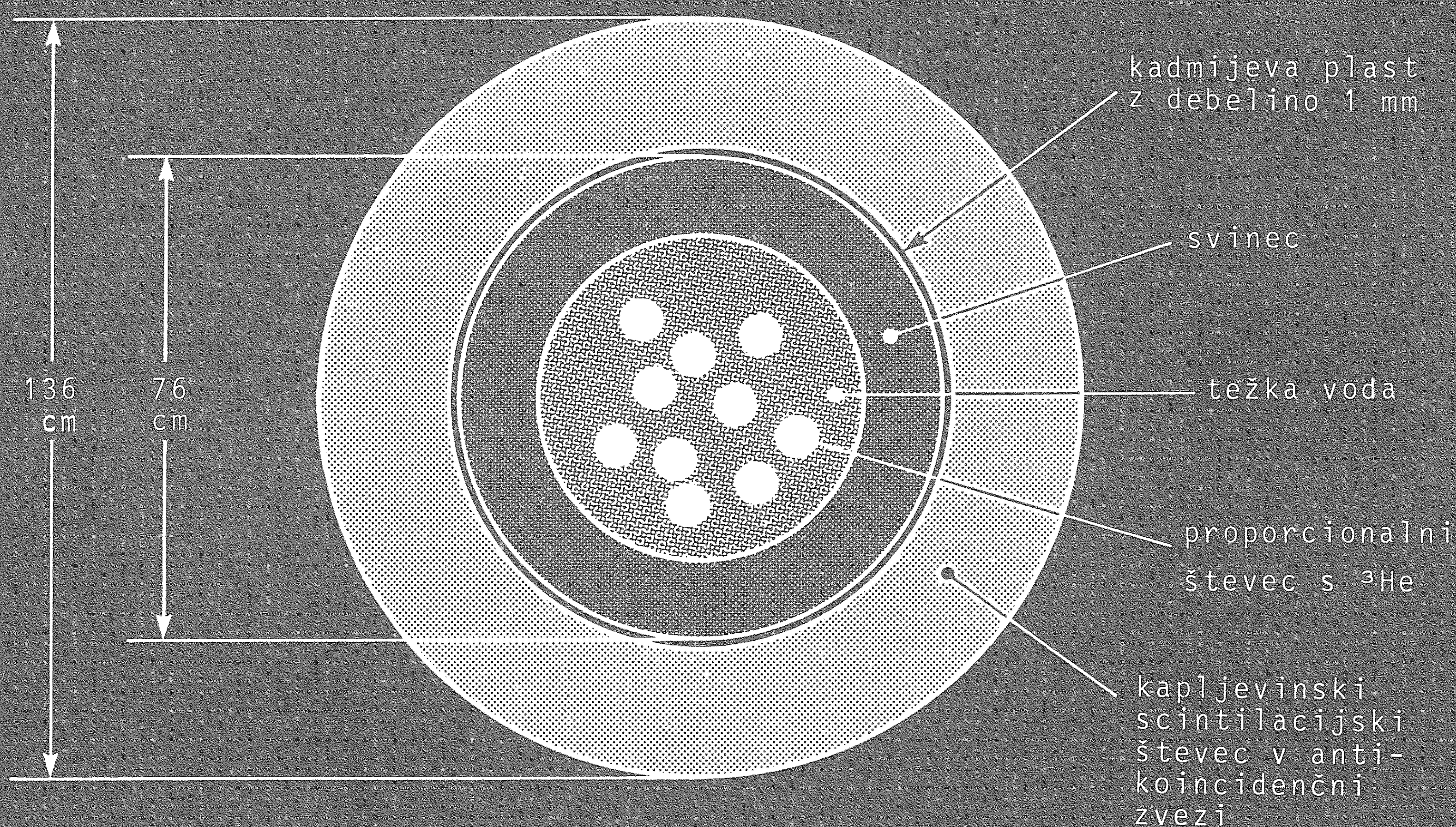


1980

Letnik 27

6

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO





**OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**

LJUBLJANA, NOVEMBER 1980

**Glavni in odgovorni urednik:** Janez Strnad.

**Uredniški odbor:** France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.

**Naročnina:** za posameznike 200.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 100.— din, za ustanove in podjetja 250.— din, za tujino 20 \$ = 400.— din, posamezna številka 50.— din, dvojna številka 100.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Komisija za tisk — Obzornik za matematiko in fiziko, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101—678—47233.

**Tiska** tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1400 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1980 DMFA SRS — 484

YU ISSN 0473-7466

Poštšina plačana na pošti 61102 Ljubljana

**VSEBINA**

|                                                                                                      |               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| V spomin: Profesor dr. Anton Kuhelj (Peter Vencelj) . . . . .                                        | 161           |
| <b>Članki</b>                                                                                        |               |
| O večparametričnih problemih (Gabrijel Tomšič, Tomaž Slivnik) . . . . .                              | 163           |
| Kratki in močni laserski impulzi (Boris Vedlin) . . . . .                                            | 168           |
| <b>Novice</b>                                                                                        |               |
| Nevtrinske oscilacije? (Janez Strnad) . . . . .                                                      | 176           |
| <b>Domače vesti</b>                                                                                  |               |
| Ob 70-letnici profesorja Alojzija Vadnala (Viljem Rupnik) . . . . .                                  | 183           |
| Življenjski jubilej profesorja Ivana Štalca. Bibliografija (Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh) . . . . . | 185           |
| Obljuba je izpolnjena (Tomaž Pisanski) . . . . .                                                     | 187           |
| Primatijada 1980 (Nada Širca) . . . . .                                                              | 188           |
| Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v letu 1979 (Josip Globevnik) . . . . .               | 189           |
| <b>Nove knjige</b> (Zvonimir Bohte, Sergej Pahor, Zlatan Magajna) . . . . .                          | 167, 182, 192 |
| <b>Vprašanja</b> — 118 (Boštjan Hostnik) . . . . .                                                   | 175           |

**CONTENTS**

|                                                        |               |
|--------------------------------------------------------|---------------|
| In memoriam . . . . .                                  | 161           |
| <b>Articles</b>                                        |               |
| On multiparameter problems (Gabrijel Tomšič) . . . . . | 163           |
| Giant laser pulses (Boris Vedlin) . . . . .            | 168           |
| <b>News</b> . . . . .                                  | 176           |
| <b>Home news</b> . . . . .                             | 183           |
| <b>Reviews</b> . . . . .                               | 167, 182, 192 |
| <b>Questions</b> . . . . .                             | 175           |

**Na ovitku:** Naprava F. Reinesa in sodelavcev za zaznavanje reakcij antinevtrinov z devteroni po nabitem in po nevtralnem šibkem toku. Dodatni ščit iz vode, betona in svinca ni vrisan. Antinevtrini izhajajo iz reaktorja, katerega sredica je oddaljena dobrih 11 m od posode s težko vodo (glej novico Nevtrinske oscilacije?)



V spomin

## PROFESOR DR. ANTON KUHELJ

Globoko nas je pretresla vest, da je 31. julija 1980 umrl v Ljubljani akademik profesor dr. inž. Anton Kuhelj. Z njim smo izgubili človeka, ki je bil poln delovne vneme in vedno pripravljen pomagati človeku, učitelja, ki je čez štirideset let nesebično razdal svoje znanje, in moža, ob katerem smo mnogi strokovno in človeško zoreli. Njegovo delo bo trajno vtakano v razvoj tehnike in naravoslovja na Slovenskem. Posebno pomembno je njegovo pedagoško in znanstveno delo v mehaniki, ki jo je temeljito poznal od splošnih teoretičnih temeljev do številnih področij njene tehnične uporabe.



Profesor Kuhelj je bil človek izjemnih lastnosti. Vsakemu je rad pomagal tako strokovno, kot pri vsakdanjih težavah. Neprestano je spodbujal k delu in usmerjal z nasveti. Težjih strokovnih problemov drugih se je lotil tudi sam. Njegovi učenci se ga bomo spominjali kot učitelja izjemnih pedagoških kvalitet. Tudi najtežjo snov je znal podati razumljivo in matematično jasno oblikovano. Uspeha in znanja se je vedno veselil, neznanje in nepoštenje sta ga jezila. Vendar je tudi takrat, ko je bilo potrebno izreči kritiko, to naredil



z globokim čutom za človeka in veliko mero odgovornosti. S svojim življenjem je neprestano izpričeval, da je bogastvo bivanja v nenehnem iskanju in spoznavanju, v delu in dajanju in da se je le tako mogoče približati resnici.

Rojen je bil 11. novembra 1902 na Opčinah pri Trstu. Gimnazijo je najprej obiskoval v Trstu, nato v Kranju, kjer je maturiral 1922 leta. Po maturi se je vpisal na oddelek za elektrotehniko ljubljanske tehnične fakultete. Pet let kasneje je diplomiral. Nato je nekaj let poučeval na tehnični srednji šoli v Ljubljani. Star enaintrideset let je postal docent na tehnični fakulteti ljubljanske univerze. Leta 1936 je bil promoviran za doktorja tehničnih znanosti, dve leti kasneje je postal izredni profesor, od leta 1946 pa je bil redni profesor za mehaniko. Ob upokojitvi leta 1976 mu je fakulteta za naravoslovje in tehnologijo podelila naslov zaslužnega profesorja. Univerza se mu je oddolžila za zasluge pri razvoju visokega šolstva in za prispevek k znanosti s podelitvijo častnega doktorata.

Znanstveno in strokovno delo profesorja Kuhlja zajema izredno široko področje. V mehaniki so to zlasti teorija lupin, aerodinamika in hidromehanika vrtinčastih tokov. Zagnano in uspešno se je spoprijemal tudi s številnimi drugimi problemi iz tehnike. Njegova največja ljubezen je bilo gotovo letalstvo. Bil je pionir pri načrtovanju naših šolskih, športnih in turističnih letal. Tudi kasneje, ko se s konstruiranjem ni več ukvarjal, so njegove misli po pripovedovanju sodelavcev pogosto uhajale k letalstvu. Prijetno in nevsiljivo je znal pritegniti pozornost poslušalcev, ko je govoril o strokovnih problemih ali o raznih dogodkih s tega področja.

Zelo bogata je bila tudi njegova pedagoška dejavnost. Težko bi našli v mehaniki poglavje, ki ga ne bi vsaj nekajkrat predaval. Srečamo ga tudi kot predavatelja drugih predmetov iz naravoslovja in tehnike. Predaval je matematikom in fizikom in mnogim tehnikom na dodiplomskem in podiplomskem študiju. Bil je mentor številnim diplomantom, podiplomcem in doktorandom. Večina strokovnjakov, ki se ukvarja s problemi iz mehanike v Sloveniji, je njegovih učencev. Pomembno je tudi njegovo pedagoško delo na drugih jugoslovanskih univerzah in v tujini.

Ni mogoče naštetati vseh družbenih funkcij, ki jih je opravljal zavzeto in odgovorno. V težkih letih obnove 1947—1948 je bil dekan tehnične fakultete. Bil je rektor tehnične visoke šole in rektor univerze. Kot znanstveni svetovalec je sodeloval na nekaterih naših znanstvenih ustanovah, in bil nekaterim direktor. Delal je v številnih komisijah, odborih in svetih za izobraževalno in raziskovalno delo. Aktiven je bil tudi v mnogih strokovnih društvih. Je edini častni predsednik Jugoslovanskega društva za mehaniko. Od leta 1957 do 1961 je bil član uredniškega odbora Obzornika za matematiko in fiziko.

Leta 1949 je postal redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Ta ga je leta 1961 izvolila za podpredsednika. Dolžnost je opravljal vse do smrti. Za življenjsko delo je prejel leta 1972 Kidričevo nagrado. Trikrat je bil odlikovan z visokimi državnimi odlikovanji.

Smrt profesorja Antona Kuhlja pomeni za tehniko, posebej še za mehaniko na Slovenskem, veliko izgubo. Slovenski mehaniki smo izgubili svojega starosta, spoštovanega učitelja in prijatelja. Lik profesorja Kuhlja bo ostal v trajnem in hvaležnem spominu vseh, ki smo ga poznali.

*Peter Vencelj*

## O VEČPARAMETRIČNIH PROBLEMIH

GABRIJEL TOMŠIČ, TOMAŽ SLIVNIK

Math. Subj. Class. (1980) 47 A 70

V sestavku so opisani večparametrični problemi lastnih vrednosti in njih klasifikacija glede na povezanost enačb. Na kratko so še obravnavani krepko povezani sistemi.

### ON MULTIPARAMETER PROBLEMS

The article describes multiparameter problems and their classification. There is a short discussion of strongly coupled multiparameter systems.

Mnogi problemi v matematiki in njeni uporabi privedejo do naloge: Reši enačbo

$$Ax = f$$

kjer je npr.  $A$  linearen operator, ki preslikuje normirani prostor  $X$  vase,  $f$  pa je dani element iz prostora  $X$ . Splošnejša oblika linearne operatorske enačbe je

$$Ax - \lambda x = f \tag{1}$$

kjer je  $\lambda$  dano kompleksno število,  $f \in X$  dani vektor.

Pri študiju enačbe (1) si postavimo predvsem tale vprašanja:

a) Za katere vrednosti parametra  $\lambda$  in pri kateri desni strani  $f$  ima enačba (1) vsaj eno rešitev?

b) Za katere vrednosti parametra  $\lambda$  je enačba (1) rešljiva enolično za vsako desno stran  $f \in X$ ? Za take vrednosti parametra  $\lambda$  obstaja torej preslikava  $(A - \lambda I)^{-1}$ . Pogosto nas zanima, ali je ta preslikava zvezna. Če je pri danem  $\lambda$  tudi ta pogoj izpolnjen, imenujemo tak  $\lambda$  regularna točka za operator  $A$ . Množico točk v kompleksni ravnini, ki niso regularne za operator  $A$ , pa imenujemo spekter operatorja  $A$ .

c) Za katere vrednosti parametra  $\lambda$  ima enačba

$$Ax - \lambda x = 0 \tag{2}$$

netrivialne rešitve? Števila  $\lambda$ , pri katerih ima ta enačba tudi od 0 različno rešitev, imenujemo lastne vrednosti operatorja  $A$ , množico lastnih vrednosti pa točkasti spekter operatorja  $A$ .

Študij teh vprašanj spada v spektralno analizo operatorjev, eno od pomembnejših vej funkcionalne analize.

Glavna vzpodbuda za študij naštetih vprašanj je prišla od reševanja parcialnih diferencialnih enačb matematične fizike. Enačbo nihanja pravokotne membrane na primer največkrat rešujemo po Fourierovi metodi separacije spremenljivk. Namesto ene parcialne enačbe dobimo dve navadni diferencialni enačbi, v katerih pa je številski parameter  $\lambda$ . Parameter je treba določiti tako, da ima ustrezna homogena linearna diferencialna enačba od nič različno



rešitev, ki pa še zadošča potrebnim robnim pogojem. Te netrivialne rešitve imenujemo lastne funkcije, ustrezne vrednosti  $\lambda$  pa lastne vrednosti. Te so, kot je znano, v tesni zvezi s frekvencami, s katerimi lahko membrana nevsiljeno niha.

Analogni problem za membrano eliptične oblike privede do dveh linearnih diferencialnih enačb, kot je pokazal že Hilbert v začetku tega stoletja. V obeh enačbah sta dva parametra  $\lambda$  in  $\mu$ . Spet ju je treba določiti tako, da imata enačbi netrivialni rešitvi, ki zadoščata potrebnim dodatnim pogojem. Tak problem imenujemo dvoparametrični problem. V članku [1] je opisanih še več drugih situacij, ki privedejo do dvoparametričnih in tudi večparametričnih problemov. Prav v zadnjem času se je močno razvila teorija o večparametričnih problemih lastnih vrednosti.

Oglejmo si nekaj posplošitev večparametričnih problemov. Naj bodo  $A_r$  in  $M_{rs}$  linearni operatorji iz normiranega prostora  $X$  vase. Sistem operatorskih enačb

$$A_r x_r - \sum_{s=1}^n \lambda_s M_{rs} x_s = f_r, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

kjer so  $\lambda_s$  kompleksna števila,  $f_r$  pa dani elementi iz  $X$ , imenujemo večparametrični problem. Po analogiji z enoparametričnim problemom (1) si moremo spet zastaviti vprašanja a), b) in c), seveda smiselno prirejena. Že v primeru  $m = 1$  je problem (3) splošnejši od problema (1).

Zapišimo nekaj zgledov.

Zgled 1. Naj bo  $X$  prostor kompleksnih števil,  $A_r$ ,  $M_{rs}$  dana kompleksna števila,  $n = m = 2$ . Problem (3) dobi tako obliko

$$\begin{aligned} a_1 x_1 - \lambda_1 a_{11} x_1 - \lambda_2 a_{12} x_2 &= f_1 \\ a_2 x_2 - \lambda_1 a_{21} x_1 - \lambda_2 a_{22} x_2 &= f_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Glede rešljivosti tega sistema linearnih enačb vemo, da ima natanko eno rešitev za vsako desno stran, če je determinanta sistema od 0 različna:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda_1 a_{11} & -\lambda_2 a_{12} \\ -\lambda_1 a_{21} & a_2 - \lambda_2 a_{22} \end{bmatrix} \equiv D(\lambda_1, \lambda_2)$$

Ustrezni homogeni sistem pa ima netrivialno rešitev natanko tedaj, ko je  $D(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ .

Večparametrične probleme zgornje oblike imenujemo algebraične, posvečena jim je na primer knjiga [2].

Zgled 2. Naj bo sedaj  $X$  Hilbertov prostor  $L_2(a, b)$ ,  $n = m = 2$ , operatorji  $A_r$  in  $M_{rs}$  pa integralni operatorji

$$\begin{aligned} \int_a^b A_1(s, t) x_1(t) dt - \lambda_1 \int_a^b M_{11}(s, t) x_1(t) dt - \lambda_2 \int_a^b M_{12}(s, t) x_2(t) dt &= 0 \\ \int_a^b A_2(s, t) x_2(t) dt - \lambda_1 \int_a^b M_{21}(s, t) x_1(t) dt - \lambda_2 \int_a^b M_{22}(s, t) x_2(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

Za ta dvoparametrični problem se na hitro ne da prav nič povedati glede eksistence netrivialnih rešitev  $x_1$  in  $x_2$ .

Zgled 3. Spet naj bo  $X = L_2(a, b)$ , v enačbi (3) pa naj bodo  $A_r$  diferencialni operatorji drugega reda, operatorji  $M_{rs}$  pa operatorji množenja z zvezno funkcijo  $p_{rs}(t)$ :

$$\frac{d^2 x_r(t)}{dt^2} + q_r(t)x_r(t) - \sum_{s=1}^n \lambda_s p_{rs}(t)x_s(t) = f_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Poleg tega naj bodo dani v krajiščih  $a$  in  $b$  homogeni robni pogoji oblike

$$\sum_{s=1}^n (a_{rs}x_s(a) + b_{rs}x'_s(a)) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

in podobno v krajišču  $x = b$ . Problem (5), (6) je večparametrična posplošitev Sturm-Liouvillejevega problema.

Reševanje večparametričnih nalog je precej odvisno od narave operatorjev, ki v problemih nastopajo, pa tudi od tega, kako je sistem enačb med seboj povezan. Tako namreč imenujemo večparametrični problem (3) popolno povezan, ker v vseh enačbah nastopajo v načelu vsi parametri  $\lambda_s$  in vsi neznani vektorji  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Vsi trije dosednji zgledi že spadajo v ta razred.

Če so enačbe povezane med seboj le s parametri  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , imenujemo problem šibko povezan

$$A_r x_r - \left( \sum_{s=1}^n \lambda_s M_{rs} \right) x_r = f_r, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

Problemi tega tipa so v literaturi še najbolj obdelani, glej npr. [4]. Pogosto jih moremo reducirati na enoparametričen problem, če sistem (7) študiramo v primernem tenzorskem produktu normiranih prostorov.

Večparametričen problem imenujemo krepko povezan, če so enačbe med seboj povezane le s funkcijami,

$$A_r x_r - \lambda_r \sum_{s=1}^n M_{rs} x_s = f_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Za take večparametrične probleme v literaturi ni kaj dosti narejenega. Včasih jih moremo uspešno reševati v direktni vsoti normiranih prostorov. Lastno vrednost sistema (8), kjer so vsi  $f_r = 0$ , imenujemo sedaj seveda  $n$ -terico  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , pri kateri obstaja taka rešitev  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sistema (8), da je vsaj ena od komponent  $x_k$  različna od nič. Pri krepko povezanih sistemih ne gre za določanje diskretnih vrednosti parametrov, ampak za zveze med njimi.

Oglejmo si le preprost algebrski večparametrični krepko povezani problem!

Zgled 4.

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda_1 a_{11} x_1 - \lambda_1 a_{12} x_2 &= 0 \\ x_2 - \lambda_2 a_{21} x_1 - \lambda_2 a_{22} x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Pogoj

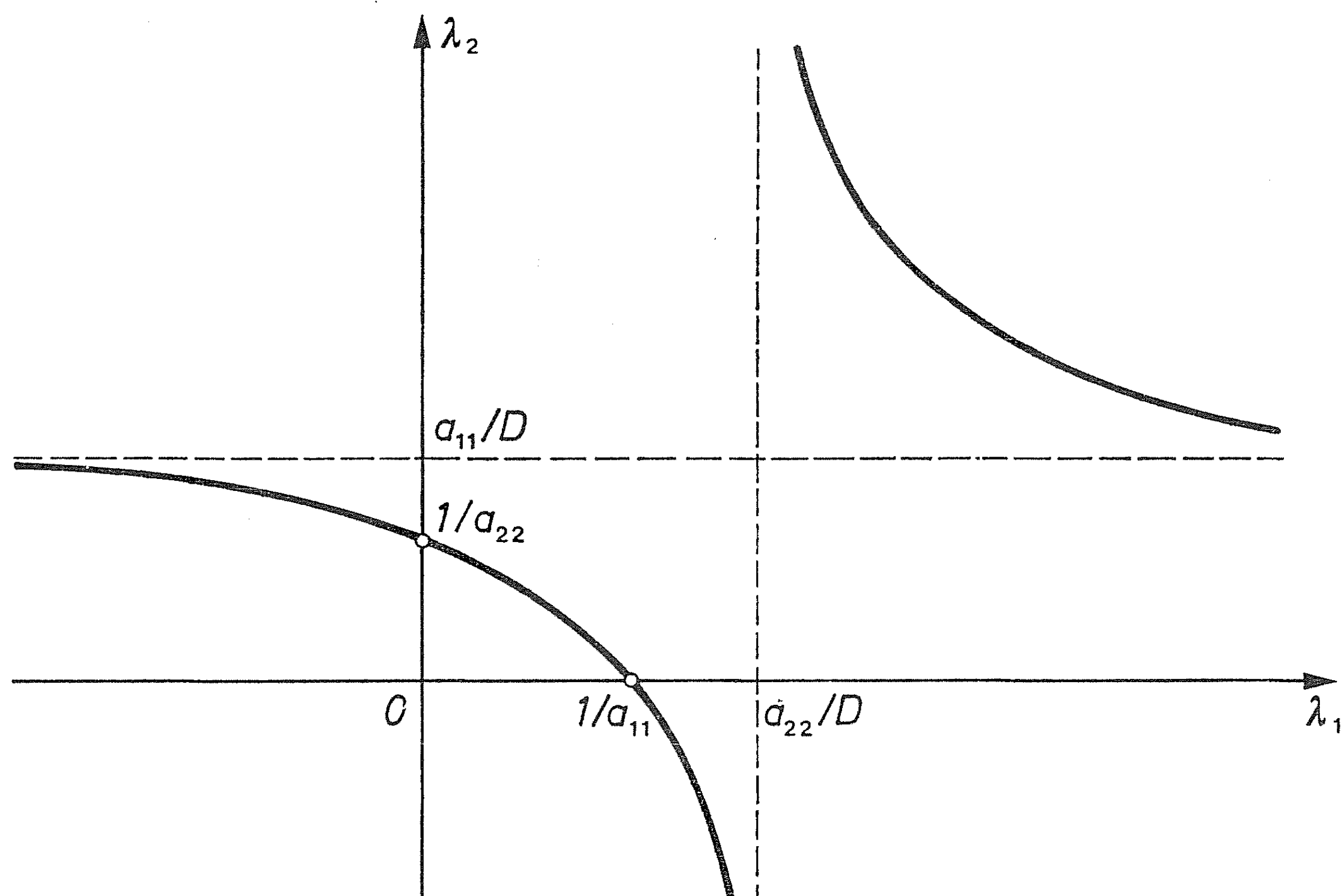
$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 a_{11} & -\lambda_1 a_{12} \\ -\lambda_2 a_{21} & 1 - \lambda_2 a_{22} \end{bmatrix} = 0$$



nam da

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 a_{11} - 1}{\lambda_1 D - a_{22}}, \quad \text{kjer je } D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Iz slike



spoznamo, da je sistem netrivialno rešljiv za vse pare  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , ki leže na krivulji. Točka  $(0, 1/a_{22})$  — pri predpostavki  $a_{22} \neq 0$  — da za  $x_1 = 0$ ; druga enačba pa postane  $x_2 = x_2$ , torej je  $x_2$  poljuben. Podobno velja za točko  $(1/a_{11}, 0)$ . V drugih točkah na krivulji sta  $x_1$  in  $x_2$  različna od nič. Podobno bi mogli premisliti izjemne primere, ko je  $a_{22} = 0$  ali  $D = 0$  ali oba hkrati enaka 0.

Pogosto nam zadošča vedeti, da sistem (8) pri  $f_r = 0$  v nekem območju  $C^n$  nima lastnih vrednosti. Na osnovi takega razmišljanja je v članku [3] podana neka druga klasifikacija večparametričnih problemov.

Skušajmo dobiti kakšno oceno za področja v  $C^n$ , kjer lastne vrednosti ne leže. V sistemu (8), kjer so vsi  $f_r = 0$ , vzemimo še eno poenostavitev  $A_r = I_r$  (identiteta v  $H_r$ ). Z upoštevanjem omejenosti operatorjev  $M_{rs}$ ,  $r, s = 1, 2, \dots, n$  dobimo tako oceno

$$\|x_r\| \leq |\lambda_r| \sum_{s=1}^n \|M_{rs}\| \|x_s\| \quad r = 1, 2, \dots, n$$

Seštejmo vse te neenačbe

$$\sum_{r=1}^n \|x_r\| \leq \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n |\lambda_r| \|M_{rs}\| \|x_s\| \leq \sum_{s=1}^n \|x_s\| \max_s \left\{ \sum_{r=1}^n |\lambda_r| \|M_{rs}\| \right\}$$

Ker je  $(x_1, \dots, x_n)$  lastni vektor, je  $\sum_{r=1}^n \|x_r\| \neq 0$ , zato vse lastne vrednosti ustrezajo neenačbi

$$1 \leq \max_s \left\{ \sum_{r=1}^n |\lambda_r| \|M_{rs}\| \right\}$$

Očitno, če je

$$1 > \max_s \left\{ \sum_{r=1}^n |\lambda_r| \|M_{rs}\| \right\}$$



potem  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  gotovo ni lastna vrednost, to pomeni, da obstaja neko področje okoli koordinatnega izhodišča v  $C^n$ , v katerem sistem (8) pri vseh  $f_r = 0$  nima lastnih vrednosti in ima torej le trivialne rešitve. Zaznamujmo  $M = \max \{ \|M_{rs}\| \}$ . Tedaj iz prejšnje ocene sledi: če je

$$1 > M \sum_{r=1}^n |\lambda_r|$$

potem homogeni sistem (8) za take  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  nima lastnih vrednosti. Dobili smo preprosto oceno področja, v katerem ni nobene lastne vrednosti:

$$\sum_{r=1}^n |\lambda_r| < \frac{1}{M}$$

Poleg te ocene se dajo dobiti še druge podobne ocene za področja, v katerih gotovo ne leže lastne vrednosti.

Prav rezultati, ki ocenjujejo področja, kjer krepko povezan sistem nima lastnih vrednosti, se dajo uporabiti pri nekih fizikalnih problemih. Tako moremo na primer z upoštevanjem takega rezultata korektno formulirati neki problem iz teorije potenciala v elektrostatiki in ugotoviti nekaj pomembnih fizikalnih lastnosti sklopljenih linij, ([5]).

## LITERATURA

- [1] Atkinson, F. V.: *Multiparameter spectral theory*, Bull. AMS **74** (1968) 1—28.
- [2] Atkinson, F. V.: *Multiparameter eigenvalue problems*, vol. 1. Acad. Press 1973.
- [3] Collatz, L.: *Multiparametric eigenvalue problems in inner product Hilbert spaces*, Jour. of Comp. Syst. Sci. **2** (1968) 333—341.
- [4] Roach, G. F.: *Representation theorems for multiparameter problems in Hilbert space*, Meth. und Verfahren Math. Physik **16** (1975).
- [5] Slivnik, T./Tomšič, G.: *Večparametrični problemi lastnih vrednosti in njih uporaba v elektrotehniki*, izide v EV (1980).

## NOVE KNJIGE

**Murray R. Spiegel, Mathematical Handbook, Schaum's Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York 1968, 271 strani.**

Matematični priročnik M. R. Spiegla je namenjen študentom in raziskovalcem na področjih matematike, fizike, tehnike in drugih znanosti. Avtor se je potrudil, da je v njem zajel tiste formule in tabele, na katere v praksi najpogosteje naletimo. Obenem se mu je posrečilo podati snov v zelo pregledni obliki, kar je nasploh odlika vseh del iz Schaumove zbirke.

Snov je razdeljena na dva dela. V prvem je zbirka formul iz elementarne matematike (npr. obrazci iz geometrije, elementarnih funkcij, analitične geometrije itd.) in višje matematike (npr. nedoločni integrali, specialne funkcije, Fourierjeve vrste itd.). Drugi del obsega petmestne tabele vseh elementarnih in nekaterih specialnih funkcij (npr. Besselovih funkcij, eliptičnih integralov itd.). Skratka knjiga je na primeren obseg pomanjšana verzija znanega priročnika Abramowitz and Stegun, Handbook of Mathematical Functions.

Zvonimir Bohte



## KRATKI IN MOČNI LASERSKI IMPULZI

BORIS VEDLIN

UDK 535.374

Članek obravnava fizikalne osnove sevanja kratkih in močnih laserskih impulzov in opiše delovanje preklopnika  $Q$ .

### GIANT LASER PULSES

In the paper basic physical properties of the generation of short high-power laser pulses are considered and the method of  $Q$ -switching is described.

#### Uvod

Letos je minilo dvajset let, odkar je v laboratoriju prvič uspelo vzbuditi stimulirano sevanje v kristalu rubina. V tem času so se zelo trudili za gradnjo novih vrst laserjev za posebno rabo in laserjev z želenimi značilnostmi sevanja. Danes poznamo laserje z aktivno snovjo v vseh agregatnih stanjih: od kristalov in amorfnih snovi preko kapljev in do plinov in plinskih mešanic.

Od sevanja laserjev z neprekinjenim delovanjem (cw) najpogosteje zahtevamo stabilnost gostote svetlobnega toka in monokromatičnost. Pri impulznih laserjih pa nas najbolj zanimata energija in čas trajanja impulza. Nekatere bistvene lastnosti, na primer valovna dolžina laserja, so značilnost pri razporeditvi energijskih črt atomov ali molekul aktivne snovi in na to ne moremo dosti vplivati. Zato pa je pri nekaterih vrstah laserjev valovno dolžino bolj ali manj mogoče spreminjati. Med temi laserji so danes najpomembnejši barvni laserji.

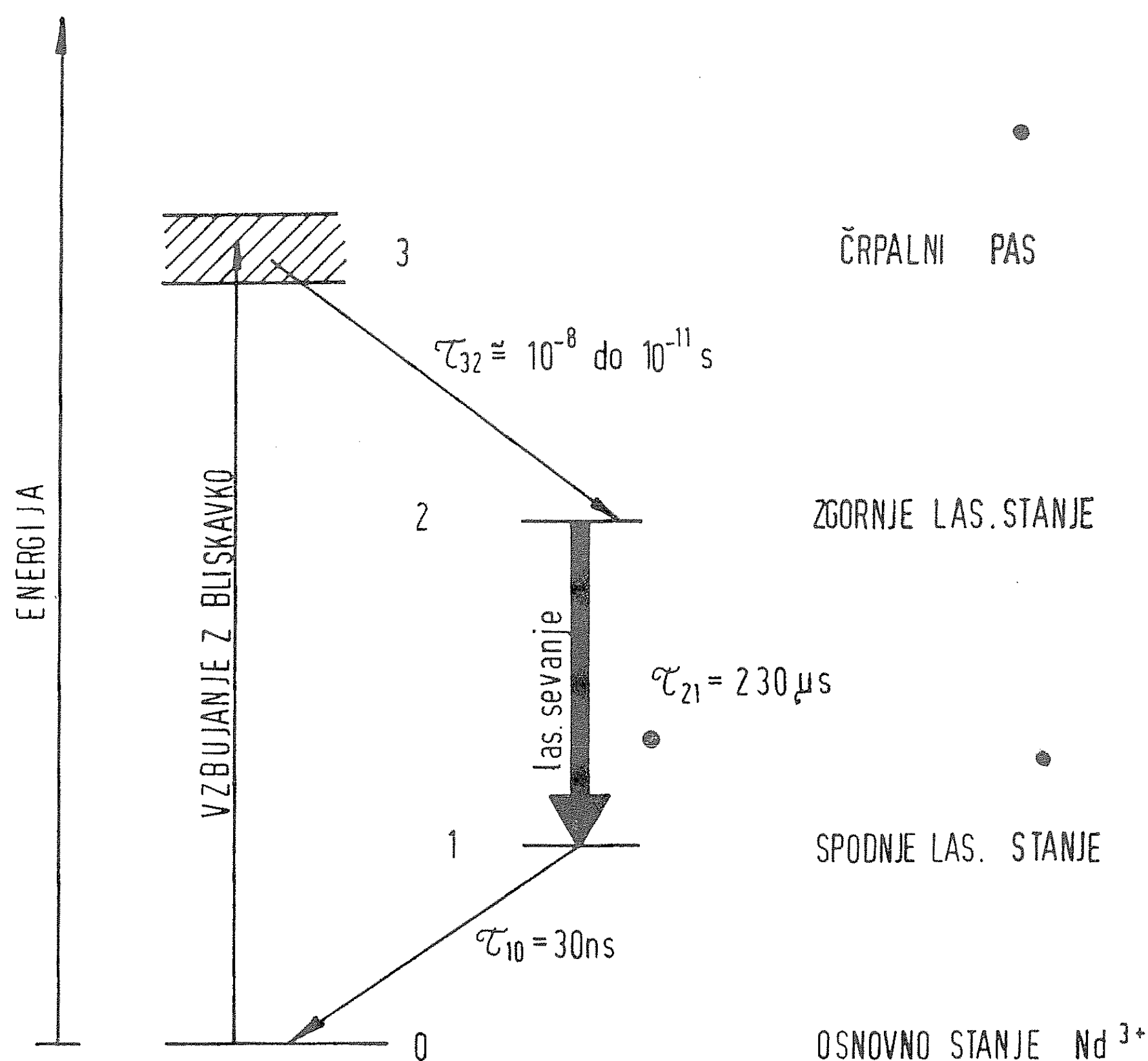
V Centru za elektrooptiko se predvsem ukvarjamo z razvojem sistemov za merjenje razdalj v mejah vidljivosti z merjenjem časa, v katerem preleti laserski impulz od opazovalca do cilja in nazaj. Zaradi absorpcije in sipanja v ozračju in velikih izgub pri difuznem odboju od cilja mora laserski impulz imeti majhno divergenco in veliko moč. Pri dani energiji povečamo moč tako, da laserski impulz skrajšamo. Ta prispevek govori o načinu in fizikalnem ozadju sevanja kratkih in močnih laserskih impulzov. Obravnavamo laser Nd-YAG, ki seva pri  $1,06 \mu\text{m}$ . Ta laser je danes eden od najpomembnejših in ga najbolj množično uporabljajo. Poleg uporabe za merjenje razdalj se uspešno prebija v industrijo in nadomešča druge stroje pri varjenju, vrtanju, rezanju in drugih vrstah industrijske obdelave, predvsem kadar se zahteva velika natančnost. V medicini se laserji Nd-YAG uporabljajo pri operativnih posegih na očeh.

Oglejmo si energijska stanja štiristanjskega laserja in prehode, od katerih je odvisno lasersko delovanje. Zapišimo enačbe, ki opišejo te prehode, in iz enačb izpeljimo osnovne zveze preklopnika  $Q$ . Navedimo izvedbe preklapljanja  $Q$  in na koncu ocenimo možnost za sevanje impulzov, krajših od nanosekunde.



## Energijska stanja štiristanjskega laserja

Laser Nd-YAG sodi med štiristanjske laserje, kar pomeni, da so v lasersko delovanje bistveno vpletena štiri energijska stanja aktivne snovi. Ion  $\text{Nd}^{3+}$ , vezan v kristalno mrežo itrij-aluminijevega garneta  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ , doživi štiri energijske prehode, da zaključi en laserski krog in izseva en foton laserske svetlobe (sl. 1) [1].



Sl. 1. Spekter energijskih stanj laserja Nd-YAG

Sprva so vsi ioni aktivne snovi v osnovnem stanju 0. Močna svetloba kriptonove ali ksenonove bliskavke jih vzbudi v energijski pas 3. Večina vzbujenih ionov nato preide brez sevanja v metastabilno stanje 2. Energijo, ki jo pri tem izgubi elektron, prevzame kristalna mreža. Iz metastabilnega stanja so dipolni prehodi v nižja energijska stanja prepovedani, zato se elektroni v metastabilnem stanju dolgo zadržujejo. Prehod med stanjema 2 in 1 je laserski prehod. Stanje 1 mora imeti precej višjo energijo kot osnovno stanje, da je v njem v ravnovesju malo ionov. Ravnovesno zasedenost podaja Boltzmanova enačba

$$N_1/N_0 = e^{-\Delta W/kT} \quad (1)$$

$\Delta W$  je energijska razlika med stanjema 1 in 0,  $N_1$  in  $N_0$  število ionov v teh stanjih,  $T$  temperatura in  $k$  Boltzmannova konstanta. Prehodi iz stanja 1 nazaj v osnovno stanje morajo biti hitri v primerjavi s fluorescenčnimi prehodi med laserskima stanjema. Tako imamo dve osnovni zahtevi, da dosežemo veliko inverzno zasedenost laserskih nivojev 1 in 2, in sicer

$$N_1/N_0 \ll 1 \quad \tau_{10} \ll \tau_{21} \quad (2)$$

$\tau_{10}$  je razpadni čas za prehod iz stanja 1 v osnovno stanje,  $\tau_{21}$  pa razpadni čas za fluorescenčni prehod iz 2 v 1. V kristalu Nd-YAG je pri sobni temperaturi nekako  $N_1/N_0 = e^{-10}$ ,  $\tau_{21} = 230 \mu\text{s}$  in  $\tau_{10} = 30 \text{ ns}$ .



## Enačbe za energijske prehode

Zasedenost stanj in časovni potek prehodov opišemo s sistemom sklopljenih enačb. Pri zapisu enačb privzamemo, da so prehodi iz pasu 3 v zgornje lasersko stanje 2 tako hitri, da je  $n_3 = 0$ , če je  $n_3$  gostota ionov v stanju 3. Z drugimi besedami pomeni to, da vsi ioni, ki jih bliskavka vzbudi iz osnovnega stanja, takoj oddajo del energije in preidejo v metastabilno stanje. Ta privzetek je popolnoma upravičen, saj je razpadni čas za prehod iz 3 v 2 od  $10^{-8}$  do  $10^{-11}$  s. Praktično skoraj vsi ioni, ki smo jih vzbudili iz osnovnega stanja v enega od absorpcijskih pasov, pristanejo v zgornjem laserskem stanju.

V opisanem modelu energijskih stanj je

$$dn_2/dt = W_p n_0 - (n_2 - g_2 n_1/g_1) \sigma \Phi c - n_2/\tau_{21} - n_2/\tau_{20} \quad (3)$$

$$dn_1/dt = (n_2 - g_2 n_1/g_1) \sigma \Phi c + n_2/\tau_{21} - n_1/\tau_{10} \quad (4)$$

$$n_{tot} = n_0 + n_1 + n_2 \quad (5)$$

Enačbe razumemo, ko pojasnimo količine:  $n_0$ ,  $n_1$  in  $n_2$  so gostote ionov v stanjih 0, 1 in 2,  $n_{tot}$  polna gostota ionov,  $c$  hitrost svetlobe v aktivni snovi,  $\tau_{ij}$  relaksacijski čas za prehod med ustreznima stanjema,  $\sigma$  presek za stimulirano sevanje,  $W_p$  verjetnost za vzbuditev iona z bliskavko na časovno enoto,  $\Phi$  gostota fotonov,  $g_1$  in  $g_2$  pa stopnja degeneriranosti nivojev 1 in 2.

Prvi člen v enačbi (3) meri število ionov, vzbujenih iz osnovnega stanja preko vmesnih stanj 3 v zgornje lasersko stanje, preračunano na enoto časa in prostornine aktivne snovi. Drugi člen opisuje praznjenje zgornjega laserskega stanja zaradi stimuliranega sevanja ( $-n_2 \sigma \Phi c$ ) in polnjenje zaradi absorpcije laserske svetlobe v spodnjem laserskem stanju ( $+g_2 n_1 \sigma \Phi c/g_1$ ). Tretji in četrti člen pa upoštevata spontano sevanje v spodnje lasersko stanje in osnovno stanje.

Enačba (4) podaja časovni potek gostote ionov v spodnjem laserskem stanju. Pojasnimo jo podobno kot enačbo (3). Zasedenost stanja 1 narašča zaradi stimuliranega in spontanega sevanja, zmanjšuje pa se zaradi absorpcije laserske svetlobe in hitrih prehodov brez sevanja v osnovno stanje.

V idealnem štiristanjskem sistemu se spodnje lasersko stanje neskončno hitro prazni. Če postavimo  $\tau_{10} = 0$ , sledi  $n_1 = 0$ . V tem primeru so ioni bodi v osnovnem stanju bodi v zgornjem laserskem stanju:

$$n_{tot} = n_0 + n_2 \quad (6)$$

Označimo spremenljivko  $n_2$  z  $n$  in enačba (3) da

$$dn/dt = -n \sigma \Phi c - n/\tau_f + W_p (n_{tot} - n) \quad (7)$$

Fluorescenčni razpadni čas stanja 2  $\tau_f$  je definiran kot

$$1/\tau_f = 1/\tau_{21} + 1/\tau_{20}$$

Enačba (7) vsebuje dve neznanki:  $n$  in  $\Phi$ . Potrebujemo torej še eno zvezo med tema količinama. Ta zveza

$$d\Phi/dt = n \sigma \Phi c - \Phi/\tau_c + S \quad (8)$$



opisuje spreminjanje gostote fotonov v laserskem resonatorju.  $\tau_c$  je značilni čas, v katerem fotoni zapustijo laserski resonator (kot koristno lasersko sevanje ali zaradi absorpcijskih in drugih izgub). Člena  $n \sigma \Phi c$  in  $S$  podajata jakost stimuliranega in spontanega sevanja. Delež spontanega sevanja je v primerjavi s stimuliranim sevanjem zelo majhen, je pa odločilen, saj vzbudi stimulirano sevanje.

Ker je za laser Nd-YAG razmerje  $\tau_{10}/\tau_{21} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ , enačbi (7) in (8) zadovoljivo opišeta dinamiko laserskih energijskih prehodov in ju lahko uporabimo za nadaljnji izračun moči laserskega impulza, dobljenega s preklapljanjem  $Q$ . Še prej pa na kratko pogledjmo, v čem je njegovo bistvo.

### Fizikalni model preklopnika $Q$

Ena osnovnih odlik trdnih laserjev je njihova zmožnost sevanja kratkih (v nanosekundnem časovnem območju) in zelo močnih (od MW do 100 MW in več) svetlobnih impulzov. Najvažnejša metoda, ki omogoča take impulze, je *preklapljanje*  $Q$  ( $Q$ -switching). Ime je dobila po kontroliranem spreminjanju dobrote laserskega resonatorja. Dobrota  $Q$ , ki je merilo za kvaliteto resonatorja, je definirana kot razmerje med energijo, shranjeno v resonatorju, in resonatorskimi izgubami na časovno enoto. Čim manjše so resonatorske izgube, tem večja je dobrota in narobe.

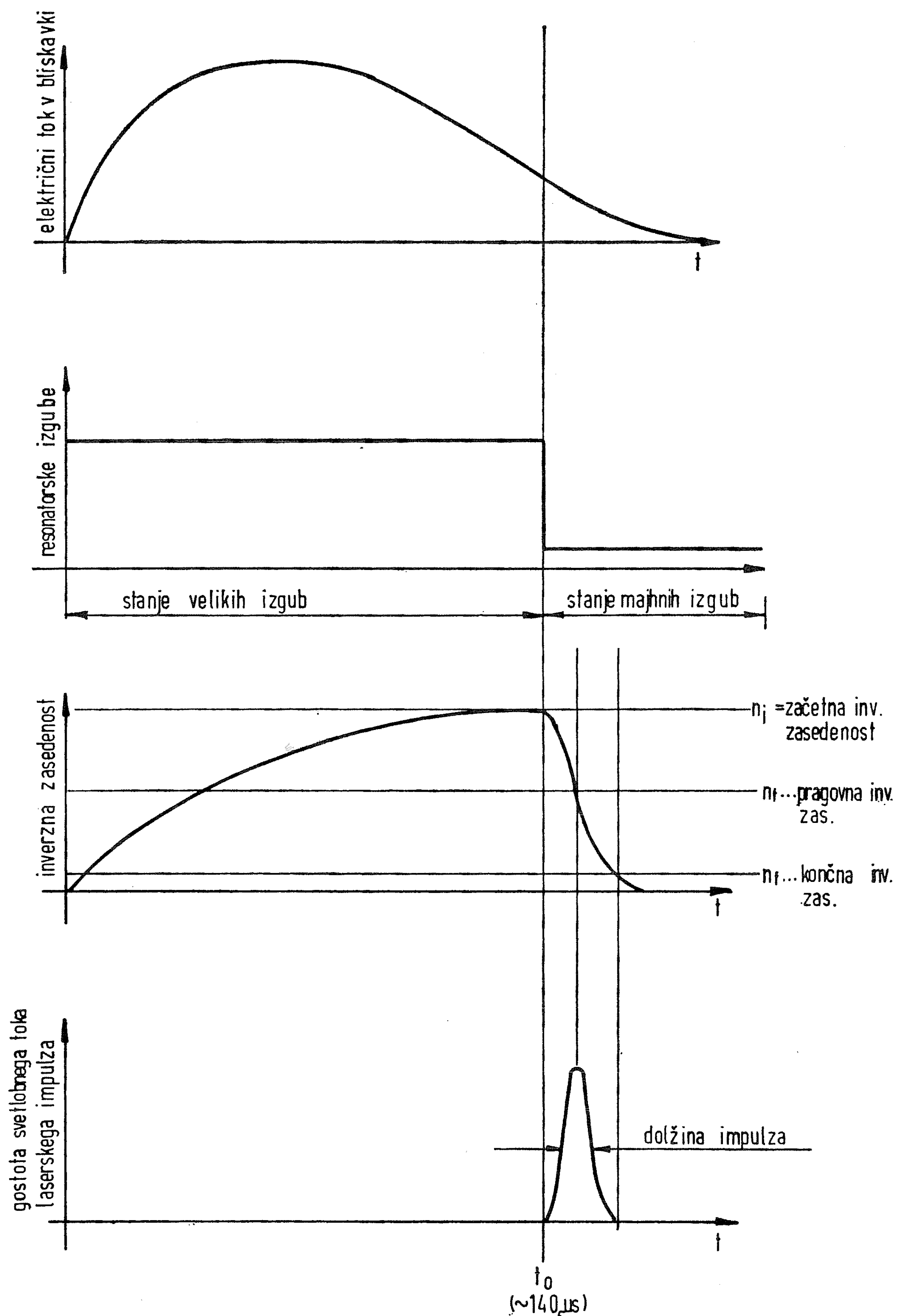
Opišimo fizikalni model preklopnika  $Q$ . Laserski resonator je v stanju z velikimi izgubami (majhen  $Q$ ) ko se vzbujaajo ioni aktivne snovi, dokler ni dosežena največja mogoča inverzna zasedenost. V tem času kljub močnemu črpanju in ojačenju v aktivni snovi ne dosežemo praga za lasersko delovanje zaradi velikih izgub. Po tem pa hitro zvečamo dobroto  $Q$  (zmanjšamo namerano vnesene izgube) — laserski resonator preide v stanje z majhnimi izgubami. Rezultat je tak, da je zdaj ojačenje v laserski snovi veliko nad pragom, kar povzroči, da se število inverzno zasedenih ionov zelo hitro zmanjša s stimuliranimi prehodi. V resonatorju dobimo veliko gostoto svetlobnega toka. Pri vsakem odboju od izhodnega zrcala z odbojnostjo  $R$  del valovanja  $1 - R$  zapusti resonator. Dobimo laserski impulz.

Do časa  $t_0$  kljub veliki inverzni zasedenosti ni laserskega delovanja, ker so izgube večje od ojačanja (sl. 2). Proti koncu impulza bliskovne luči, ko postane inverzna zasedenost največja, pa preklapimo iz stanja z velikimi izgubami v stanje z majhnimi izgubami. Tedaj zelo hitro naraste energijski tok stimuliranega sevanja: to je laserski impulz.

### Značilnosti laserskega impulza

Rešitev sistema enačb (7) in (8) da številne pomembne značilnosti laserskega impulza: energijo, čas trajanja, moč, dvizni in padni čas impulza, čas formiranja impulza itd. Če uporabimo preklopnik  $Q$ , lahko zanemarimo v enačbah (7) in (8) vpliv spontanega sevanja in optičnega črpanja. Čas trajanja laserskega impulza od 10 do 30 ns je namreč v primeri z dolžino svetlobnega impulza bliskavke (običajno 80 do 150  $\mu$ s) tako kratek, da je v tem času sprememba inverzne zasedenosti in števila fotonov v resonatorju zaradi spontanega sevanja in optičnega črpanja zanemarljivo majhna. Tako dobimo namesto (7) in (8):





Sl. 2. Časovni potek impulza v laserju s preklopnikom Q

$$d\Phi/dt = \Phi (n \sigma c l/l' - \varepsilon/t_R) \quad (9)$$

$$dn/dt = -n \sigma \Phi c \quad (10)$$

Povprečni čas  $\tau_c$ , v katerem svetloba zapusti resonator, je:

$$1/\tau_c = \varepsilon/\tau_R \quad (11)$$

$\varepsilon$  je del valovanja, ki se izgubi iz resonatorja pri enem preletu resonatorja v obeh smereh,  $\tau_R$  pa je dvojni čas preleta resonatorja:

$$\tau_R = 2l'/c \quad (12)$$

Upoštevali smo tudi razliko med dolžino aktivne snovi  $l$  in optično dolžino resonatorja  $l'$ .



Pri preklapljanju  $Q$  so izgube  $\varepsilon$  odvisne od časa

$$\varepsilon = -\ln R + L + \xi(t) \quad (13)$$

Prvi člen upošteva koristne izgube zaradi prepustnosti izhodnega zrcala. drugi vsebuje škodljive izgube (sipanje, absorpcija, uklon),  $\xi(t)$  pa izgube, ki jih vnese preklopnik  $Q$ . Večinoma so preklopniki  $Q$  tako hitri, da  $\xi(t)$  lahko opišemo kot  $\xi(t < t_0) = \xi_{\max}$  in  $\xi(t \geq t_0) = 0$ . Tedaj tudi ni težko rešiti sistema enačb (9) in (10) (sl. 2). Privzemimo, da ima laser v času  $t_0$  začetno inverzno zasedenost  $n_i$ , gostota energijskega toka v resonatorju, ki je posledica spontanega sevanja, pa je majhna. Izgube resonatorja so  $\varepsilon_{\max} = -\ln R + L$ . Potem pa se izgube hipoma zmanjšajo na  $\varepsilon_{\min} = -\ln R + L$ . Gostota energijskega toka se zveča na  $\Phi$  in nato pade na nič. Inverzna zasedenost je monotona funkcija časa, ki začne ob času  $t_0$  z  $n_i$  in se konča z  $n_f$ . Zanimivo je, da se lasersko delovanje ne konča, ko doseže inverzna zasedenost prag  $n_t$ , ampak je tedaj energijski tok v laserskem impulzu največji.

Analitična rešitev sistema da za največjo moč  $P$  pri preklapljanju  $Q$  dobljenega laserskega impulza

$$P = 2\nu hc \ln(1/R) [n_i - n_t (1 + \ln n_i/n_t)]/\lambda t_R \quad (14)$$

$V$  je prostornina aktivne snovi,  $h$  Planckova konstanta,  $\lambda$  pa valovna dolžina laserske svetlobe. Polna energija impulza  $W$  je enaka

$$W = Vhc (n_i - n_f) \ln(1/R)/\{\lambda [\ln(1/R) + L]\} \quad (15)$$

Če vpeljemo čas trajanja impulza kot  $t_p = 2W/P_{\max}$ , dobimo

$$t_p = \tau_c (n_i - n_f)/[n_i - n_t (1 + \ln n_i/n_t)] \quad (16)$$

Moč impulza, njegova energija in čas trajanja so najpomembnejše količine pri impulznih laserjih. Poznavanje fizikalnih osnov, ki vplivajo na lasersko sevanje, je odločilnega pomena za uspešno reševanje tehniških problemov.

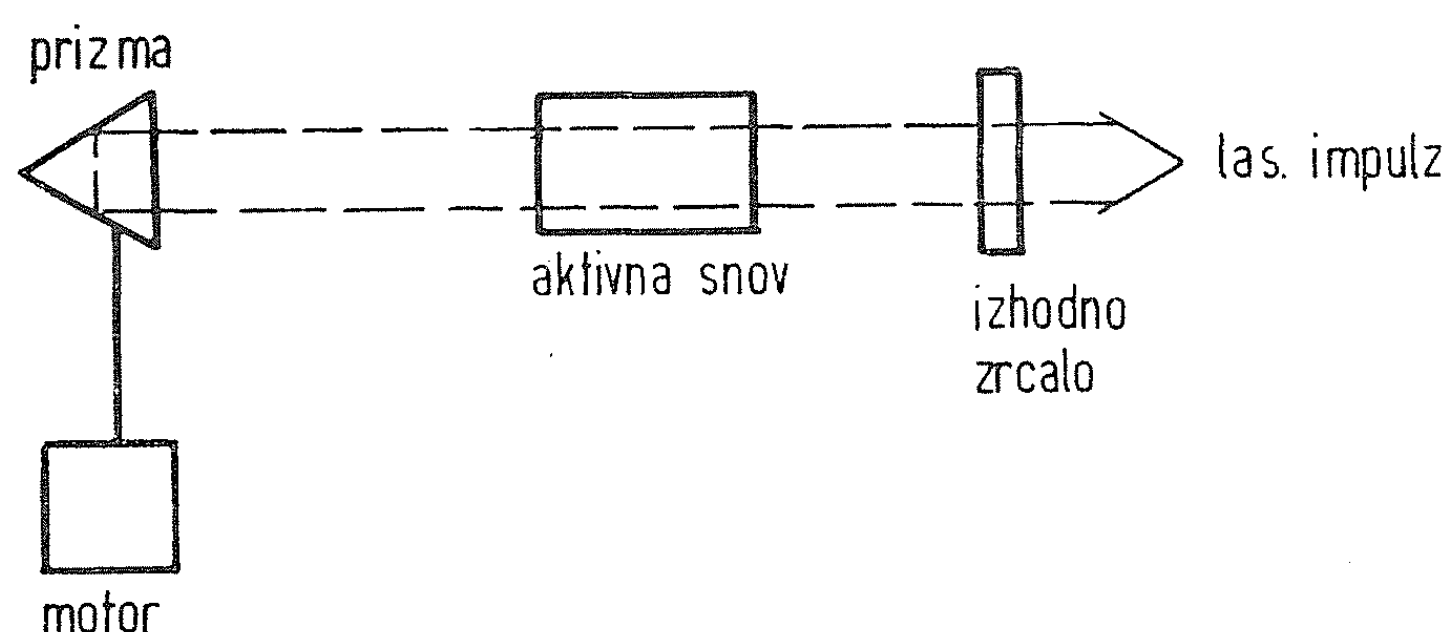
### Vrste preklopnikov $Q$

Preklop iz stanja z velikimi izgubami v stanje z majhnimi izgubami je mogoče izvesti na več načinov [2]. Uporabljamo razne mehanske, elektrooptične, akustooptične preklopnike in preklopnike, ki delujejo na osnovi nasičene absorpcije v nekaterih organskih barvilih. Od zahtevanih lastnosti laserskega impulza je odvisno, kateri preklopnik je najprimernejši.

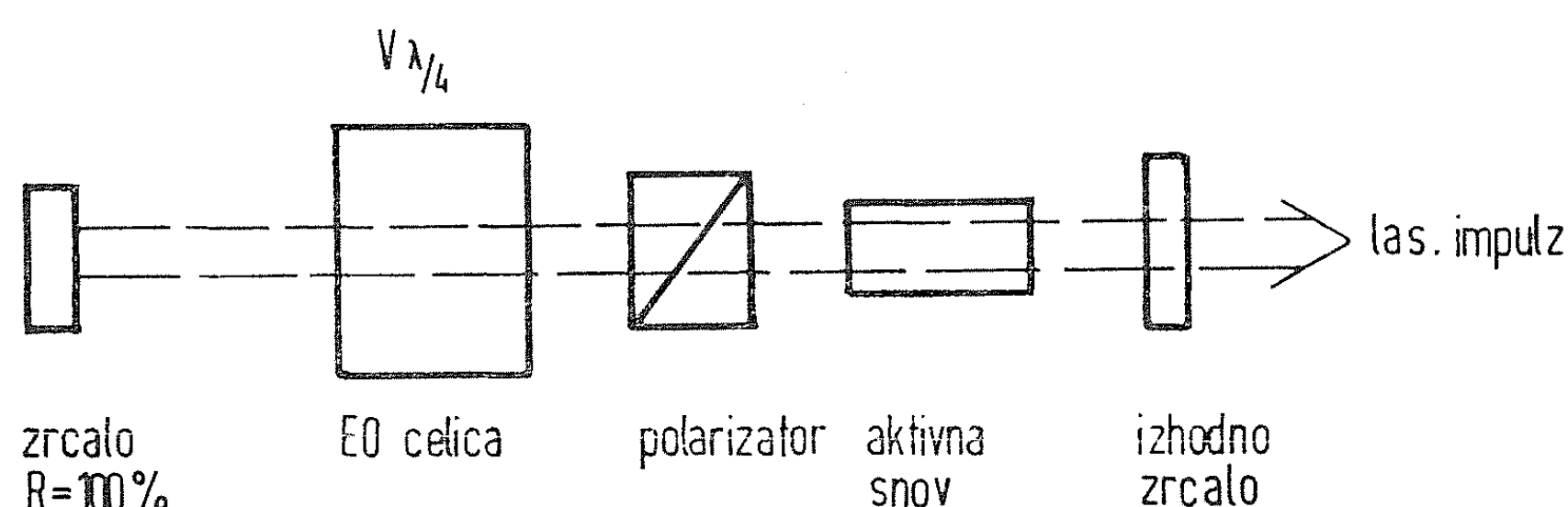
Mehanski preklopniki  $Q$ , med katere sodi rotirajoča prizma, so razmeroma počasni in se že redkeje uporabljajo, čeprav imajo zaradi svoje preprostosti nekatere prednosti (sl. 3). Neprepustno zrcalo zamenjamo s prizmo, ki je pritrjena na gred motorčka. Prizma se zelo hitro vrti (zadostne frekvence so 400 Hz) in pride enkrat pri vsakem vrtiljaju v vzporedno lego z izhodnim zrcalom. Tedaj je izpolnjen pogoj za resonatorsko stanje z veliko dobroto  $Q$  in laser odda svetlobni impulz, ki traja okoli 25 ns. Pogoj je, da je bliskovna luč sinhronizirana z vrtenjem prizme.

Zelo hitri elektronsko krmiljeni elektrooptični preklopniki izkoriščajo elektrooptični pojav za modulacijo izgub laserskega resonatorja. Ključni element elektrooptičnega stikala  $Q$  je elektrooptična celica (sl. 3). Glavni sestav-

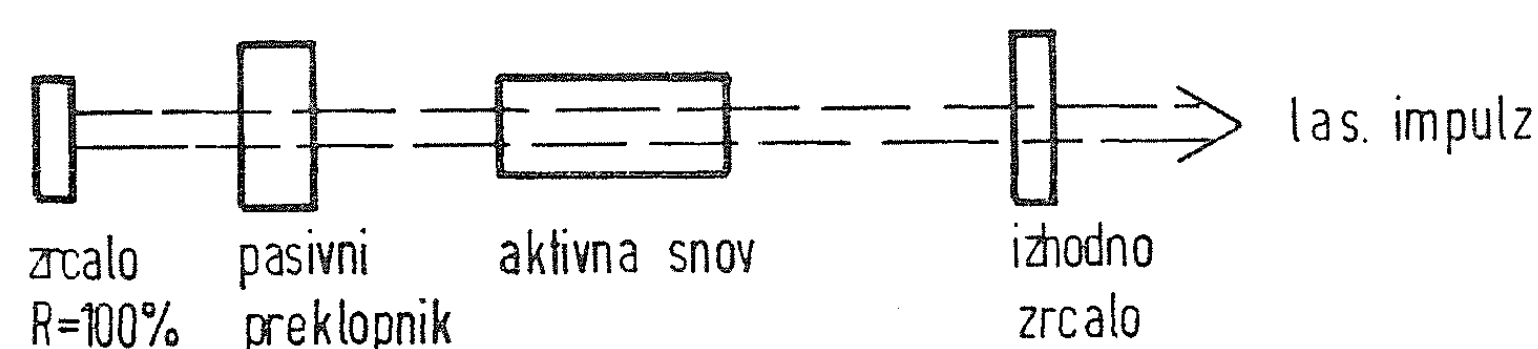
mehanski preklopnik Q



elektrooptični preklopnik Q



pasivni preklopnik Q



Sl. 3. Vrste preklopnikov Q: mehanski, elektrooptični in pasivni

ni del elektrooptične celice je kristal, ki postane pod vplivom zunanjega električnega polja dvolomen. Celica je nameščena med polarizatorjem in neprepustnim zrcalom. Optična os kristala se ujema z optično osjo laserskega resonatorja. Med impulzom bliskavke je na celico priključena napetost, ki povzroči fazno razliko  $\pi/2$  med rednim in izrednim curkom. Linearno polarizirano valovanje, ki pada na celico, se spremeni v krožno polarizirano. Po odboju od neprepustnega zrcala doživi krožno polarizirano valovanje še en prehod skozi celico in postane zopet linearno polarizirano, a smer polarizacije je glede na prvotno zasukana za  $90^\circ$ . Polarizator tega valovanja ne prepusti. Laserski resonator je v stanju z velikimi izgubami.

Tik pred koncem impulza bliskavke preklopimo napetost na priključkih elektrooptične celice na nič. Zdaj elektrooptična celica ne deluje več kot plošča  $\lambda/4$  in linearno polarizirano valovanje nemoteno potuje med zrcaloma resonatorja. Resonator je v stanju z majhnimi izgubami. Nakopičena energija se hitro sprosti kot laserski impulz.

Pasivni preklopniki so najpreprostejši. Njihov najpomembnejši del je organsko barvilo, ki mora imeti velik absorpcijski koeficient pri frekvenci laserske svetlobe. Konfiguracija laserskega resonatorja je podobna kot pri elektrooptičnem preklopniku Q, le polarizator — ploščo  $\lambda/4$  — zamenja celica



z organskim barvilom. V tej zvezi je najpomembnejša lastnost organskih barvil, da se jim spreminja prepustnost z gostoto vpadnega svetlobnega toka. Pri majhni gostoti je prepustnost majhna, z naraščanjem gostote pa tudi prepustnost narašča in doseže pri dovolj visoki gostoti skoraj vrednost 1. Pravimo, da se tedaj absorpcija *nasiti*. V času impulza bliskavke postaja zaradi večanja inverzne zasedenosti gostota toka spontano sevane svetlobe vedno večja. S tem pa se zvečuje tudi prepustnost celice z organskim barvilom in zmanjšujejo izgube laserskega resonatorja. Pri določeni gostoti spontano sevane svetlobe je dosežen prag za lasersko delovanje in laser izseva impulz.

### Pikosekundni impulzi

S preklapljanjem  $Q$  dosežemo laserske impulze, ki trajajo od 1 do 50 ns. Na frekvenčni skali ima tak impulz več longitudinalnih nihajnih načinov, ki so posledica interferometrične narave laserskega resonatorja. Razlika frekvenc sosednjih longitudinalnih načinov je  $\Delta\nu = c/2l'$ . Na poseben način pa lahko izberemo posamezne longitudinalne nihajne načine (mode locking). Laser potem oscilira pri eni sami longitudinalni frekvenci in impulzi trajajo le kako pikosekundo.

Pri zelo kratkih impulzih se zaradi načela nedoločenosti spektralna črta svetlobe razširi. Ker velja med razpadnim časom  $\tau$  in razpolovno energijo  $W_{1/2}$  zveza  $\tau W_{1/2} = h/2\pi$ , dobimo za razpolovno širino črte

$$\Delta\lambda = \lambda^2/2 \pi c t_p \quad (17)$$

če vstavimo  $\tau = t_p$  in  $W_{1/2} = h \Delta\nu = h c \Delta\lambda/\lambda^2$ .

Preglednica kaže razširitev spektralne črte pri različnih časih trajanja laserskih impulzov pri valovni dolžini  $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$ .

| $t_p$   | $\Delta\lambda$ |
|---------|-----------------|
| 1000 ns | 0,0006 nm       |
| 1       | 0,6             |
| 0,1     | 6               |
| 0,01    | 60              |

V zelo kratkih impulzih sevajo laserji že praktično belo svetlobo.

### LITERATURA

- [1] W. Koechner, *Solid-State Laser Engineering*, New York, Springer 1976.
- [2] B. Vedlin, S. Trošt, M. Knežević, J. Žakelj, C. Brajnik, *Laserska stikala Q*, Elektrotehniški vestnik 44 (1977) 94.

## VPRAŠANJE

### Vprašanje 118

Dokaži: če velja v trikotniku neenačba  $b^2 + c^2 > 3a^2$ , potem mora biti  $\alpha < 50^\circ$ .

*Boštjan Hostnik*

Opomba: Vprašanje je dostopno tudi dijakom srednjih šol.

## NEVTRINSKE OSCILACIJE?

*Nevtrini.* Nevtrino je zagotovo eden izmed najbolj skrivnostnih delcev. Pri razpadu  $\beta$ , ki ga povzroča šibka interakcija, je najprej kazalo, da ne velja zakon o ohranitvi energije. Položaj je teoretično rešil W. Pauli, ki je leta 1930 vpeljal nov delec z lastno energijo nič in brez naboja — *nevtrino*. Dobrega četrto stoletja je bilo treba čakati, da sta leta 1956 C. L. Cowan in F. Reines nedvoumno potrdila njegov obstoj. Opazovala sta reakcijo

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (1)$$

z antinevtrini iz jedrskega reaktorja. Pri tem sta zaznavala nastali nevtron in nastali pozitron [1]. Leta 1962 so ugotovili, da obstajata dve vrsti nevtrinov [2]. *Elektronski nevtrino* nastopa skupaj z elektronom, *mionski nevtrino* pa skupaj z mionom. Zakon o ohranitvi leptonskega števila sestavljata dva zakona: zakon o ohranitvi elektronskega leptonskega števila in zakon o ohranitvi mionskega leptonskega števila. Pri tem imata elektron  $e^-$  in elektronski nevtrino  $\nu_e$  elektronsko leptonsko število 1, njuna antidelca pozitron  $e^+$  in elektronski antinevtrino  $\bar{\nu}_e$  — 1, vsi drugi delci pa nič. Negativni mion  $\mu^-$  in mionski nevtrino  $\nu_\mu$  imata mionsko leptonsko število 1, njuna antidelca pozitivni mion  $\mu^+$  in mionski antinevtrino  $\bar{\nu}_\mu$  — 1 in vsi drugi delci nič. Pred tremi leti so odkrili še težki lepton  $\tau$ . Domnevajo, da obstaja tudi njegov — *tauonski*-nevtrino in velja še zakon o ohranitvi tauonskega leptonskega števila. Delec  $\tau^-$  in njegov nevtrino  $\nu_\tau$  imata to število 1, njuna antidelca  $\tau^+$  in  $\bar{\nu}_\tau$  — 1 in vsi drugi delci nič.

*Nevtralni in nabiti šibki tok.* Teorija šibke interakcije je v zadnjih letih močno napredovala. S. Weinbergu in A. Salamu je uspelo poenotiti kvantno teorijo šibke interakcije in kvantno teorijo elektromagnetne interakcije, to je kvantno elektrodinamiko. V novi teoriji, ki so ji pripravili pot C. N. Yang in R. L. Mills, P. Higgs, G. t'Hooft ter mnogi drugi, nastopajo na enaki osnovi štiri vektorska polja. Polje dolgega dosega z delcem polja brez naboja ustreza elektromagnetnemu polju s fotonom. Tri polja kratkega dosega z delci s pozitivnim in negativnim osnovnim nabojem in z nabojem nič z veliko lastno energijo pa ustrezajo šibkemu polju in njegovim delcem — vmesnim bozonom  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ . Domnevajo, da ima nevtralni delec  $Z^0$  lastno energijo okoli 90 GeV, nabita delca  $W^+$  in  $W^-$  pa nekoliko manj. Nobenega izmed teh delcev zaradi njihove velike lastne energije doslej še niso opazili prostega. Kot virtualni delci pa povzročajo vmesni bozoni razpade in reakcije, ki potekajo po šibki interakciji.

Preden so vpeljali nevtralni vmesni bozon  $Z^0$ , je bil znan le *nabiti šibki tok*; pri reakcijah ali razpadih je nastopil eden od obeh nabitih vmesnih bozonov in med leptonoma prenesel en osnovni naboj, na primer (1) in še

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n \quad \nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + p + \pi^+ \quad (2a)$$

Pri *nevtralnem šibkem toku* pa delca izmenjata nevtralni vmesni bozon, kar ni zvezano z izmenjavo naboja, na primer

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^- \quad \nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^- \quad (2b)$$



Nevtralni šibki tok so opazili že pred sedmimi leti. Prvim je to uspelo raziskovalcem CERN v Ženevi [4]. V veliki meglični celici Gargamelle, napolnjeni s tekočim freonom, so preiskali skoraj tristo tisoč reakcij, ki so jih sprožili nevtralni delci. Nevtrini, ki so nastali z razpadom pozitivnih pionov, so povzročili reakcije preko nabitega šibkega toka



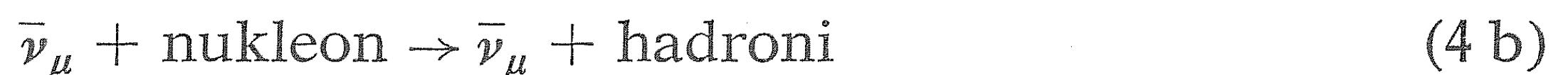
in preko nevtralnega šibkega toka



Antinevtrini, ki so nastali z razpadom negativnih pionov, so povzročili reakcije preko nabitega šibkega toka



in preko nevtralnega šibkega toka



*Dvomi.* Doslej so imeli nevtrine za delce z lastno energijo nič. Taki delci se gibljejo s hitrostjo svetlobe. Pri nevtrinu kaže spin  $1/2$  v nasprotno smer gibanja, pri antinevtrinu pa spin  $1/2$  v smeri gibanja. Prvi rahli dvomi, da morda stvari le niso tako preproste, so se pojavili, ko so ugotovili, da je izmerjena gostota toka antinevtrinov s Sonca približno trikrat manjša od napovedane [4]. Primanjkljaj so poskusili pojasniti z domnevo, da ima elektronski antinevtrino od nič različno lastno maso in da del antinevtrinov na poti od Sonca do Zemlje razpade na druge delce. Vendar bi lahko bil na drugi strani pomanjkljiv tudi model sončne notranjosti, s katerim so izračunali pričakovano gostoto toka antinevtrinov. V zadnjem času pa se množijo poskusi z nevtrini ali antinevtrini, pri katerih se napovedi ne ujemajo z izidi. Vsak izmed teh poskusov sam zase še nič ne dokazuje, vsi skupaj pa namigujejo na resno pomanjkljivost teorije.

*Merjenje z reaktorskimi antinevtrini.* Največ pozornosti je zbudil poskus z reaktorskimi antinevtrini. F. Reines je s sodelavci meril ob dvatisočmegawattnem reaktorju jedrske centrale Savannah [5]. Prav ob tem reaktorju je skupaj z že umrlim C. Cowanom dokazal obstoj antinevtrina. To pot sta ga zanimali reakciji antinevtrinov iz reaktorja z devteroni. Pri reakciji preko nevtralnega šibkega toka razbije antinevtrino devteron:



Pri reakciji preko nabitega šibkega toka pa spremeni proton v devteronu v nevtron:



Na prvo reakcijo sklepajo po nastanku enega nevtrona, na drugo pa po nastanku dveh nevtronov.

V posodi, oddaljeni dobrih 11 m od središča reaktorske sredice, je 268 kg zelo čiste (99,85 %) težke vode  $D_2O$ . V posodo s težko vodo sega deset dolgih proporcionalnih števecov s helijem  $^3He$ , ki z reakcijo  $n + ^3He \rightarrow p + ^3H$  za-

znavaajo nevtrone. Težko vodo obdaja debel svinčen ščit, tega kadmijev ščit in vse to še posoda z 2200 litri tekočega scintilatorja. Scintilacijski števcji so v antikoincidenca s proporcionalnimi števci v posodi. Vse skupaj obdaja še svinčen, betonski in vodni ščit.

Izkoristek nevtronskih števcjev so določili z znanim nevtronskim izvirom s kalifornijem  $^{252}\text{Cf}$ . Z vsemi mogočimi prijemi so zmanjšali ozadje. Merili so ob vključenem reaktorju (v celoti 67 dni) in ob izključenem reaktorju (v celoti 59 dni), z dodatnim ščitom iz snovi, bogate z vodikom, ki je zavračala počasne nevtrone, in brez tega ščita. Upoštevali so tudi primes protonov v težki vodi. Na dan so ob vključenem reaktorju zaznali v povprečju okoli 58 reakcij z enim nevtronom in 38 reakcij z dvema nevtronom. Upoštevali so možnost, da so po reakciji z dvema nevtronom zaznali števci samo enega izmed obeh nevtronov, drugega pa ne. Za gostoto antinevtrinskega toka na mestu posode s težko vodo so vzeli  $2,5 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Iz izmerjenih vrednosti in teoretičnih napovedi zanje so določili razmerje izmerjenih in napovedanih presekov za reakcije preko nevtralnega šibkega toka (ne) in preko nabitega šibkega toka (na):

$$(\sigma_{ne})_{\text{eksp}}/(\sigma_{ne})_{\text{teor}} = 0,8 \pm 0,2 \quad (\sigma_{na})_{\text{eksp}}/(\sigma_{na})_{\text{teor}} = 0,7 \pm 0,2$$

Ugotovljeno odstopanje od vrednosti 1, ki jo pričakujemo, ni bilo tolikšno, da bi zbudilo skrb.

Reines in sodelavci so nadaljevali merjenje, dobljene merske rezultate pa so obdelali drugače [6]. Namesto obeh razmerij so navedli le njuno razmerje ali *razmerje razmerij*  $(\sigma_{na}/\sigma_{ne})_{\text{eksp}}/(\sigma_{na}/\sigma_{ne})_{\text{teor}}$ . Za to razmerje, ki bi prav tako moralo biti enako 1, če bi se izid merjenj ujemal s teoretičnimi napovedmi, so dobili  $0,4 \pm 0,2$ . To razmerje je dokaj neobčutljivo za negotove podatke. Tako se na primer v števcu pokrajša gostota antinevtrinskega toka, ki ni natančno znana. Rezultat, ki se za tri efektivne odmike razlikuje od napovedane vrednosti, so sprejeli s presenečenjem. F. Reines je poročal o svojem delu na aprilskem zborovanju ameriškega fizikalnega društva. To je bilo malodane osrednje vprašanje na mednarodni konferenci o nevtrinu v Ericeju na Siciliji, kjer so na koncu junija počastili petdesetletnico Paulijeve vpeljave nevtrina. Še preden je izšel članek, so se o tem na široko razpisali [7].

Reinesova misel je tekla takole: razmerje razmerij kaže, da je na mestu posode s težko vodo manj elektronskih antinevtrinov, kakor bi jih po teoriji pričakovali. Kaj če se elektronski antinevtrini na svoji poti iz sredice reaktorja do posode s težko vodo spremenijo v kake druge antinevtrine? Reakcijo preko šibkega toka lahko namreč povzroči kateri koli antinevtrino z dovolj veliko energijo. Reakcijo preko nabitega šibkega toka pa lahko povzroči samo elektronski antinevtrino; mionski antinevtrino za reakcijo  $\bar{\nu}_{\mu} + d \rightarrow n + n + \mu^{+}$  nima dovolj energije.

*Nevtrinske oscilacije.* Že pred časom so obdelali možnost, da sta elektronski nevtrino  $\nu_e$  in mionski nevtrino  $\nu_{\mu}$ , ki ju eksperimentalno zaznavamo, mešanici dveh stanj  $\nu_1$  in  $\nu_2$  [8]. S tem so dosegli večjo simetrijo med barioni  $\Lambda$ ,  $n$  in  $p$ , ki so jih tedaj poznali, in leptoni  $\mu$ ,  $e$  in  $\nu_1$ .

Pozneje je razmišljanje nadaljeval B. Pontecorvo [9]. Kritično je pregledal eksperimentalne podatke, ki potrjujejo zakon o ohranitvi mionskega (ali elek-



tronskega) leptonskega števila.\* Vprašal se je, kakšne razpade in reakcije bi opazili, če zakon ne bi bil strogo izpolnjen. V tem primeru bi lahko elektronski in mionski nevtrini prehajali drugi v druge in prav tako elektronski antinevtrini in mionski antinevtrini. Pojav spominja na mešanje stanj, ki so ga zasledili pri nevtralnih kaonih. Nevtralni kaon  $K^0$  in nevtralni antikaon  $\bar{K}^0$  nastaneta po močni interakciji kot delca z določenim hipernabojem. Razpada pa po šibki interakciji kot mešanici kratkoživega stanja  $K_S^0$  in dolgoživega stanja  $K_L^0$  z določeno kombinirano parnostjo CP [10]. Stanji  $K_S^0$  in  $K_L^0$  sta v takem sorodstvu s stanjema  $K^0$  in  $\bar{K}^0$  kot stanji  $\nu_1$  in  $\nu_2$  s stanjema  $\nu_e$  in  $\nu_\mu$ . Razložek je v tem, da je razlika lastnih energij stanj  $K_S^0$  in  $K_L^0$  zelo majhna v primeri z lastno energijo nevtralnega kaona, razlika lastnih energij stanj  $\nu_1$  in  $\nu_2$  pa ima lahko enako velikostno stopnjo kot lastna energija nevtrina.

V okviru poenotene teorije elektromagnetne in šibke interakcije dopuščajo možnost, da se mionsko leptonsko število strogo ne ohrani [11]. V tem primeru bi bil mogoč razpad

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$$

Zanj so celo napovedovali razvejitevno razmerje okoli  $10^{-8}$ . Nekaj časa so krožile vesti, da je fizikom na švicarskem inštitutu za jedrske raziskave SIN uspelo zaznati nekaj takih razpadov. Vendar vesti niso potrdili in od tedaj se je zanimanje za nenavadne razpade mionov pleglo. Omenimo še to, da *veliko poenotenje* (angl. grand unification), to je teorija, ki bi na enaki osnovi zajela elektromagnetno, šibko in močno interakcijo, dopušča možnost, da zakon o ohranitvi mionskega leptonskega števila ne velja strogo in da ima nevtrino od nič različno lastno maso.

\* \* \*

Mešanico stanj  $\nu_1$  in  $\nu_2$  zapišimo kot

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos \Phi \cdot |\nu_1\rangle - \sin \Phi \cdot |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= \sin \Phi \cdot |\nu_1\rangle + \cos \Phi \cdot |\nu_2\rangle \end{aligned} \quad (6a)$$

S takim zapisom dosežemo, da sta stanji  $\nu_e$  in  $\nu_\mu$  ortonormirani, če sta ortonormirani stanji  $\nu_1$  in  $\nu_2$ . Konstanti  $\Phi$  pravimo mešalni kot. Stanji  $\nu_e$  in  $\nu_\mu$  imata določeno elektronsko in mionsko leptonsko število, stanji  $\nu_1$  in  $\nu_2$  pa določeno lastno maso. Pri dosedanjih merjenjih so zaznavali stanji  $\nu_e$  in  $\nu_\mu$ , ne pa stanj  $\nu_1$  in  $\nu_2$ .

V curku prostih nevtrinov z dano gibalno količino  $p$  vzamemo v izbrani točki  $|\nu_1\rangle = e^{-iW_1 t/\hbar}$  in  $|\nu_2\rangle = e^{-iW_2 t/\hbar}$ . Tu je  $W_1$  polna energija v stanju  $\nu_1$  in  $W_2$  polna energija v stanju  $\nu_2$ . Verjetnostna gostota, da naletimo v bližini izbrane točke na elektronski nevtrino, je

$$\langle \nu_e | \nu_e \rangle = |\cos \Phi \cdot e^{-iW_1 t/\hbar} - \sin \Phi \cdot e^{-iW_2 t/\hbar}|^2 = 1 - \sin 2\Phi \cdot \cos(|W_1 - W_2|t/\hbar) \quad (6b)$$

Verjetnostna gostota za mionski nevtrino pa je

$$\langle \nu_\mu | \nu_\mu \rangle = 1 + \sin 2\Phi \cdot \cos(|W_1 - W_2|t/\hbar) \quad (6c)$$

---

\* Pontecorvo je obravnaval tudi možnost, da ne velja zakon o ohranitvi števila leptonov in da se mešata nevtrinsko in ustrezno antinevtrinsko stanje.

Za delec z veliko polno energijo in majhno lastno energijo, ki se giblje skoraj s svetlobno hitrostjo, je

$$W = (c^2 p^2 + m^2 c^4)^{1/2} = pc (1 + \frac{1}{2} m^2 c^4 / c^2 p^2 + \dots)$$

Razlika polnih energij je

$$|W_1 - W_2| = pc \frac{1}{2} m_1^2 c^4 / c^2 p^2 - \frac{1}{2} m_2^2 c^4 / c^2 p^2 = \frac{1}{2} |m_1^2 - m_2^2| c^4 / cp$$

Pri tem je v našem približku  $pc$  kar polna energija delca.  $m_1$  je lastna masa delca  $\nu_1$  in  $m_2$  lastna masa delca  $\nu_2$ .

Izraza (6 b) in (6 c) kažeta, odkod ime *oscilacije*.<sup>\*</sup> Časovni razmik med maksimumom in minimumom nihajočega člena je  $\pi \hbar / |W_1 - W_2| = \hbar cp / |m_1^2 - m_2^2| c^4$ . Če ocenimo energijo reaktorskih antinevtrinov s 4 MeV in vzamemo za razliko kvadratov lastnih energij 1 eV<sup>2</sup>, dobimo zanj nekaj več kot 10<sup>-8</sup> s. Antinevtrini se gibljejo skoraj s svetlobno hitrostjo, tako da ustreza temu časovnemu razmiku razdalja kakih 5 m.

Pri Reinesovem poskusu bi bilo lahko na mestu posode s težko vodo manj elektronskih antinevtrinov kot v sredici reaktorja, ker bi se na poti delno spremenili v drugačne antinevtrine, ki ne bi mogli izzvati reakcij preko nabitega šibkega toka. Po merskih izidih so Reines in sodelavci sklepali, da utegne tičati razlika kvadratov lastnih energij  $|m_1^2 - m_2^2| c^4$  med 0,8 in 1 eV<sup>2</sup>, mešalni kot pa med 22° in 32°.

\* \* \*

*Ugovori.* Po mnenju nekaterih fizikov — med njimi je tudi R. P. Feynman — Reinesovega poskusa ni mogoče imeti za dokaz o lastni energiji nevtrinov in o nevtrinskih oscilacijah. Pri tem opozarjajo na neskladnost sedanjih merskih izidov in prejšnjih izidov pri merjenju reakcije (1) in na to, da je bilo pri prejšnjih merjenjih reakcij (5) ozadje manjše. Na nevtrinske oscilacije bi smeli z gotovostjo sklepati le, če bi se pri merjenju dane reakcije izid, na primer razmerje razmerij, spreminjal z oddaljenostjo od reaktorske sredice. Reinesovi računi niso popolnoma zanesljivi, ker nastopa v njih tudi energijski spekter reaktorskih antinevtrinov, ki ni natančno znan.

*Drugi poskusi.* Od drugih poskusov omenimo najprej merjenje razpada  $\beta$  tritija:  ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ . Ta razpad že od nekdaj uporabljajo za določitev zgornje meje za lastno energijo antinevtrina. Pri njem je namreč največja kinetična energija elektronov samo 18 keV, čeprav je to še vedno veliko v primeri z zgornjo mejo za lastno energijo antinevtrina. Z magnetnim spektrometrom kolikor mogoče natančno izmerijo porazdelitev elektronov po gibalni količini in po obliki krivulje v bližini največje gibalne količine sklepajo na lastno energijo antinevtrina. Pred kratkim je J. J. Simpson z univerze Guelph v Kanadi dobil za to lastno energijo zgornjo mejo 70 eV. Meril je s tritijem, katerega atomi so bili vgrajeni v silicijeve kristale. Sovjetski fiziki

---

<sup>\*</sup> To spominja na razmere pri katerem koli sistemu z dvema stanjema, med katerima pride do prehodov. Znan zgled je molekula amoniaka NH<sub>3</sub>. Pri tem sta stanji zastopani enakopravno: mešalni kot  $\Phi$  je 45° (glej prispevek *Do Schrödingerjeve enačbe — po Feynmanovo*, Obzornik mat. fiz. **16** (1969) 59).



z inštituta za eksperimentalno in teoretično fiziko v Moskvi pa so postavili lastno energijo med 14 in 46 eV [12]. Merili so pet let z magnetnim spektrometrom z odklonom 720°. Pri največji kinetični energiji elektronov so dosegli energijsko ločljivost okoli 45 eV. Najprej so zaznavali elektrone z Geiger-Müllerjevim števcem, pozneje pa s proporcionalnim števcem. Ozadje je bilo zelo majhno, od 0,03 do 0,1 sunka na sekundo. Uporabili so zelo tanko plast ( $2 \mu\text{g}/\text{cm}^2$ ) nekega sladkorja (valina  $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{NO}_2$ ), ki je vsebovala 18 % tritija. Navedena lastna energija antinevtrina se zdi dokaj velika. Nekateri sodijo, da morda niso zajeli vseh popravkov, ki bi jih bilo treba upoštevati pri tako natančnem merjenju.

V CERN so naredili poskus z *odlagališčem* (angl. dump). Tako pravijo debeli kovinski tarči, ki jo postavijo v protonski curek superprotonskega sinhrotona namesto običajne tanke tarče. V odlagališču pioni in kaoni, ki nastanejo pri reakcijah hitrih protonov z nukleoni, reagirajo z nukleoni, preden razpadejo. Zaradi tega se kakih tisočkrat zmanjša tok nevtrinov in antinevtrinov, ki nastanejo z razpadom pionov in kaonov. Tako pridejo bolj do izraza nevtrini in antinevtrini, ki nastanejo z razpadom zelo kratkoživih delcev. Ti delci z od nič različnim čarom naj bi dali enako elektronskih nevtrinov in antinevtrinov na eni strani ter mionskih nevtrinov in antinevtrinov na drugi. Vendar se je pri merjenjih pokazala nepričakovana asimetrija med obojimi delci. Prejšnja merjenja [3] kažejo, da verjetno ni znatnega mešanja mionskih nevtrinov (in antinevtrinov) z elektronskimi nevtrini (in antinevtrini). Pri reakcijah mionskih nevtrinov in antinevtrinov z nukleoni je bil namreč presek za reakcijo preko nabitega nevtralnega toka (3 a) in (4 a) v predvidenem razmerju s presekom za ustrezno reakcijo preko nevtralnega šibkega toka (3 b) in (4 b). Ali se meša elektronski nevtrino s tauonskim?

V teku je poskus, podoben Reinesovemu, ki so se ga lotili fiziki z inštituta za jedrske znanosti v Grenoblu in s tehnične univerze v Münchnu, med njimi R. L. Mössbauer. Predhodna merjenja so dala razliko kvadratov lastnih energij  $|m_1^2 - m_2^2| c^4 < 0,2 \text{ eV}^2$  pri mešalnem kotu  $45^\circ$  ali več pri manjšem kotu. Poskus nameravajo ponoviti ob zelo močnem reaktorju v Gosgenju v Švici v razdalji 38 m in v razdalji 65 m od reaktorske sredice. Tudi ob reaktorju Savannah načrtuje neka skupina poskus v dveh različnih razdaljah.

**Zaključek.** Po dosedanjih merjenjih ni mogoče narediti končnega sklepa. Zdi pa se zelo verjetno, da nas čakajo nova spoznanja. Ali bodo to nevtrinske oscilacije in od nič različna lastna energija nevtrina, je še odprto vprašanje. Med fiziki, ki se ukvarjajo s fiziko delcev — pa ne samo med njimi — je mogoče zaslediti nekakšno razburjenje. Število objav o navedenih problemih naglo narašča in verjetno bo ta novica zastarela, preden bo izšel Obzornik. Če bi se pokazalo, da obstajajo nevtrinske oscilacije in da ima nevtrino od nič različno lastno energijo, bi to imelo daljnosežne posledice. Ne samo da bi to morda razrešilo primanjkljaj antinevtrinov s Sonca, ampak bi vplivalo tudi na našo sliko o vesolju.

Na zgodnji razvojni stopnji vesolja je nastalo — med drugim ob razpadu neobstoječih barionov in leptonov — veliko nevtrinov in antinevtrinov. Cenijo, da pride na en današnji barion kaka milijarda nevtrinov in antinevtrinov, ki sestavljajo nekakšno nevtrinsko morje, podobno prasevanju.

Če bi presegla lastna energija nevtrina in antinevtrina kakih 20 eV, bi utegnila skupna energija nevtrinov v vesolju preseči skupno energijo dru-

gih delcev in sevanja. Zaradi tega bi utegnila biti povprečna gostota energije v vesolju večja od mejne vrednosti [13]. V tem primeru bi bilo vesolje zaprto, se pravi, da bi razširjanju sledilo krčenje in temu zopet razširjanje.

Janez Strnad

## LITERATURA

- [1] B. Čujec, *Eksperimentalno odkritje nevtrina*, Obzornik mat. fiz. **5** (1957) 67.
- [2] *Dvoje različnih vrst nevtrinov*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962) 186.
- [3] F. J. Hasert in drugi, *Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the Gargamelle neutrino experiment*, Physics Letters **46B** (1973) 138.
- [4] G. Cevc, *Skrivnost nevtrinov s Sonca*, Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 178.
- [5] E. Pasierb, H. S. Gurr, J. Lathrop, F. Reines, H. W. Sobel, *Detection of weak neutral current using fission  $\bar{\nu}_e$  on deuterons*, Phys. Rev. Letters **43** (1979) 96.
- [6] F. Reines, H. W. Sobel, E. Pasierb, *Evidence for neutrino instability*, Phys. Rev. Letters **45** (1980) 1307.
- [7] C. Sutton, *Neutrinos: do they rule the Universe?* New Scientist **78** (1980) 308; G. B. Lubkin, *Do neutrinos oscillate from one variety to another?* Phys. Today **33** (1980) 17 (1); *Identity crisis*, Scientific American **243** (1980) 60 (1).
- [8] M. Nakagawa, H. Okonogi, S. Sakata, A. Toyoda, *Possible existence of a neutrino with mass and partial conservation of muon charge*, Progr. Theor. Phys. **30** (1963) 727.
- [9] B. Pontecorvo, *Neitrinnye opyty i vopros o sohranении leptonogo zarjada*, ŽETF **53** (1967) 1717.
- [10] J. Strnad, *Moderna fizika*, Ljubljana 1977, str. 793.
- [11] J. D. Bjorken, S. Weinberg, *Mechanism for nonconservation of muon number*, Phys. Rev. Letters **38** (1977) 622; M. A. B. Beg, A. Sirlin, *Spontaneous breakdown of muon-number conservation and off-diagonal neutral currents*, Phys. Rev. Letters **38** (1977) 1113; F. E. Close, *SIN and the muon-electron puzzle*, Nature **266** (1977) 679; *Ambivalent leptons*, Scientific American, **236** (1977) 55 (5).
- [12] V. A. Lubimov, E. G. Novikov, V. Z. Nozik, E. F. Tretyakov, V. S. Kosik, *An estimate of the  $\nu_e$  mass from the  $\beta$ -spectrum of tritium in the valine molecule*, Physics Letters **94B** (1980) 266.
- [13] *Vesolje*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 123.
- [14] A. De Rujula, S. L. Glashow, *Neutrino weight watching*, Nature **286** (1980) 755.
- [15] *Whatever happened to neutrino mass*, Nature **287** (1980) 481.

## NOVE KNJIGE

---

Wiegel F. W., *Fluid flow through porous macromolecular systems*. Berlin, Springer Verlag, 1980. 102 str. Lecture notes in physics, 121. Cena DM 18.

Z opisom toka skozi permeabilne snovi se je ukvarjal že Darcy pred dobrimi sto leti. Poseben primer takega toka, ki je pomemben v fizikalni kemiji in biofiziki, je tok skozi porozne makromolekularne sisteme. O tem govori ta knjiga. Razdeljena je na tri dele. Prvi del z naslovom *Splošna razmišljanja* in s poudarkom na statistični mehaniki je uvodnega značaja. Drugi del z naslovom *Tok skozi izolirane makromolekularne zvitke* bo zanimiv za fizikalne kemike. Tretji in zadnji del *Hidrodinamika permeabilnega kompleksa celične membrane* pa je namenjen biofizikom. Čeprav se avtor ukvarja predvsem z modeli, je tudi nekaj primerjav s poskusi.

Knjiga je zanimivo napisana in je iz serije, ki obljublja najnovejše dosežke. In res: poslednje reference so iz leta 1979!

Sergej Pahor



## OB 70-LETNICI PROFESORJA ALOJZIJA VADNALA



Težko bi mu prisodili, da v letošnjem novembru praznuje življenjski jubilej — 70 let, odkar je na trdi kraški zemlji pogнал korenine. Korenine, tako čvrste in zdrave, da nam vedno znova vliva optimizem in zaupanje v življenje, delo in v vse, kar človeka dela boljšega. Vse svoje življenje posveča pedagoškemu delu, ki ga je začel kot gimnazijski profesor takoj po diplomi iz matematike v letu 1934. Ljubezen do matematične stroke ga je gnala, da je ob proučevanju matematike in fizike na srednji šoli v Kranju in Ljubljani pred vojno obranil doktorsko disertacijo z naslovom Različne definicije paralelizma in ukrivljenost prostorov. Vojna vihra ga je videla na strani čustev in želja slovenskega naroda, videla ga je takšnega, kot ga poznamo: z ljubeznijo do moralnih vrednot človeka, z zahtevo po pravici do osebne svobode,

s čutom dolžnosti do ustvarjalnega dela. Prav takšen je zaživel v povojnem času neprestanega snovanja na znanstveno-raziskovalnem področju in pri pedagoškem delu, ki ga je ob ustanovitvi Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani leta 1947 nadaljeval kot docent za matematiko. S tem trenutkom se začena njegovo nepogrešljivo poslanstvo pri širjenju matematične kulture v takratni mladi slovenski kvantitativni ekonomiji, ki danes ne more skriti vidnih sadov njegovega raziskovalnega dela pri linearnem programiranju in razširjavah; zasnoval je teorijo bilinearnega programiranja in mnogo prispeval k teoriji lokacije. Kdo bi ne poznal njegovega truda, da slovenski javnosti posreduje takratne drzne zamisli matematične ekonomije in ekonometrije, ki sta bili med obnovo razdejane domovine čvrsta opora pri snovanju teorije ekonomskega planiranja Kidričevega časa, ko je bil tesni sodelavec Borisa Kidriča. Pristen v osebnem stiku, živahen in spodbuden v besedah, potrpežljiv sogovornik s polnim košem opogumljajočih in bodrilnih misli zna vedno najti svoje mesto v delovnem okolju. Nemirni analitični duh še iz njegovih »šahovskih« mladostnih dni mu odpira pot k skupnemu delu s kolegi matematiki, predvsem v okviru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, s kolegi ekonomisti na Ekonomski fakulteti Borisa Kidriča, kjer slušbuje kot redni profesor, pa tudi v Zvezi ekonomistov Slovenije. Njegovo ime je neločljivo povezano z nastankom in razvojem operacijskih raziskav pri nas, saj se dolgi vrsti izvirnih zamisli pridružuje tudi obsežno pedagoško delo pri podiplomskem študiju s tega področja.



Ljubezen do slovenskega jezika pa tudi do jezikov nasploh mu narekuje dolgoletno skrb za matematično terminologijo, ki smo jo Slovenci izpod nje-govega peresa upravičeno pričakovali in dočakali. Tudi v razredu čutimo, da mu jezik pomeni pot do človeka; z njim želi ne le posredovati lepoto mate-matike, temveč vcepljati tudi smisel za realnost sveta in skromnost v znan-stvenem delu, vcepljati ljubezen do dela, ki človeku omogoča obstoj, mu daje veličino in humanost. Povsod je tak, v številnih družbenih in strokovnih organizacijah, v krogu svojih študentov in kolegov, doma. Prejemnik javnih priznanj, nagrad in dveh visokih državnih odlikovanj, občutljiv za dogaja-nje v sočloveku ceni umetnost in od nje marsikaj pričakuje ob svojstvenem kritičnem preudarjanju in s čutom za naravnost. Neumorno snuje, oblikuje paberke in kritike, knjige in skripta, članke in razprave, poživlja svoja pre-davanja z novimi poglavji, vmes pa skrbi, da bi vsako leto napravil mnogo višinskih metrov po naših planinah.

Želimo vam, profesor Vadnal, da takšni še mnogo let ostanete med nami!

*Viljem Rupnik*

### ŽIVLJENJSKI JUBILEJ PROFESORJA IVANA ŠTALCA



Profesor Ivan Štalc se je rodil 23. decembra 1910 v Dolenji vasi nad Škof-jo Loko kot tretji otrok kasneje dva-najstčlanske družine. Ko je bil star komaj trinajst let, je družina izgubila očeta in kot starejši med desetimi otro-ki je moram doma krepko poprijeti za delo. V tem času je obiskoval klasično gimnazijo v Kranju, kjer je leta 1930 tudi maturiral. V jeseni istega leta se je vpisal na filozofsko fakulteto v Ljub-ljani in leta 1934 diplomiral iz mate-matike in fizike. Med šolanjem je ves čas, od drugega razreda dalje, marljivo inštruiral. Po odsluženi vojaščini je leta 1935 nastopil službo na samo-upravni gimnaziji v Murski Soboti (višjo gimnazijo je ustanovila in finan-cirala občina). Naslednje leto je bil predstavljen v Ljubljano in dodeljen I. državni gimnaziji (realni) v Vegovi ulici; tam je poučeval do konca vojne,

julija 1945 pa je odšel na novoustanovljeno gimnazijo v Trbovljah, kjer je ostal do leta 1951. Od tega leta ga zopet srečamo na I. gimnaziji v Ljubljani v Vegovi ulici oziroma za Bežigradom, kjer je bil leta 1975 upokojen. Dejavnost profesorja Štalca je bila zelo mnogovrstna in obsežna. Na šoli je vodil matematični krožek, bil je mentor mnogim mladim profesorjem, se-stavljajal je urnike in bil varuh fizikalnega kabineta. V letih od 1949 do 1951 je bil pomožni inšpektor za trboveljski in celjski okraj ter za Ljubljano—okoli-

Obzornik mat. fiz. 27 (1980) 6



co; nekaj let je bil urednik Obzornika za matematiko in fiziko, nekaj časa predavatelj metodike fizike na Pedagoški akademiji in nato predavatelj metodike fizike in matematike na ljubljanski univerzi. Sodeloval je pri sestavljanju učnih načrtov, bil je član komisije za republiško tekmovanje iz matematike in predavatelj na seminarjih za fizikalno eksperimentiranje. Bil je pisec mnogih učbenikov, kot je razvidno iz njegove bibliografije, poleg tega je recenziral približno štirideset šolskih učbenikov. Pri svojem delu je bil vedno zelo vesten in dosleden in kot pedagog izjemno uspešen. Za svoje delo je prejel tudi več priznanj in odlikovanj. Njegova delavnost pa še do danes ni pojenjala. Vsi njegovi kolegi mu zato želimo še mnogo zdravih in aktivnih let!

*Marjan Vagaja*

## BIBLIOGRAFIJA

1. Moj koledar / soavtor. — MK, 1953. — 172 str.
2. Matematični priročnik za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol / J. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev; prev. A. Žabkar, po njegovi smrti delo končal Ivan Štalec. — Založba Življenje in tehnika (TZS), 1963—65, 1967, 1970, 1974, 1978, 1980. — 699 str.
3. Slovar slovenskega knjižnega jezika, 1. del, A—H / sodelavec. — DZS, 1970. — 844 str.
4. Leksikon Cankarjeve založbe: matematika / prev. in prir. A. Vadnal; sodelavec Ivan Štalec. — CZ, 1980. — 227 str.
5. Fizika za nižje razrede srednjih šol / soavtorja F. Kvaternik, A. Žabkar. — DZS. — 1. del. — 1952, 1954, 1957, 1960, 1961. — 172 str.
- Fizika za ... osnovnih šol / soavtorja: F. Kvaternik, A. Žabkar. — DZS.
6. 7. razred. — 1962, 1963, 1966, 1969, 1971, 1972, 1973. — 148 str.
7. 8. razred. — 1963, 1965, 1969, 1973, 1974. — 156 str.
8. Fizika za VII. oddelenie na osmoletkite i III. klas na gimaziite. — Skopje: Prosvedno delo, 1953, 1955, 1956. — 259 str.
9. Fizik. Sekiz yillik okullariu VII. ve orta okullarin III. ucii siniflari iciu. — Skopje: Prosvedno delo, 1955. — 247 str.
10. Fizika za sedmi in osmi razred osnovnih šol / za slepe prir. B. Slapšak. — 1970.
11. Zbirka poskusov iz fizike na tečaju za nižje stopnje / soavtor. — Zavod za proučevanje izobraževanja odraslih, 1960. — 52 str.
12. Fizikalne vaje / soavtor F. Plevnik. — Zavod za prosvedno-pedagoško službo OLO Ljubljana, 1961. — 131 str.
13. Praktične vaje iz fizike, kemije, biologije in geografije v srednjih šolah: poročilo / soavtor. — Zavod za napredek šolstva, 1963. — 168 str.
14. Matematika: splošno izobraževalna šola, 2. stopnja. — DDU. — 1959, 1965. — 300 str.
- Matematika za ... osnovne šole. — DDU.
15. 7. razred. — 1974, 1977. — 170 str.
16. 8. razred. — 1971, 1974, 1976. — 196 str.
- Matematika za ... osnovnega izobraževanja in vzgoje odraslih. — DDU Univerzum.
17. 7. razred. — 1979. — 143 str.
18. 8. razred. — 1979. — 152 str.
19. Poglobitvena matematika za 1. razred ekonomske srednje šole. — DDU. — 1961, 1972, 1973, 1975, 1976, 1980. — 122 str.
- Aritmetika in algebra za ... razred ekonomskih srednjih šol / soavtor V. Pilgram. — DDU.
20. 1. razred. — 1957. — 233 str.
21. 2. razred. — 1958. — 213 str.
22. 3. razred. — 1959. — 137 str.

- Matematika za ... ekonomske srednje šole / soavtor V. Pilgram. — DDU.  
 23. 1. razred. — 1970, 1971, 1974, 1975, 1977, 1978, 1979.  
 24. 2. razred. — 1973, 1975, 1976, 1977, 1979.  
 25. 3. razred. — 1974, 1975, 1977, 1978.  
 26. Matematika I: izbrana poglavja za poklicno administrativno šolo / soavtor V. Pilgram. — DDU. — 1978, 1979. — 277 str.  
 Tehniško računstvo. — DDU. — 1. in 2. del. — 1961. — 193 str.  
 27. 1. del. — 1972, 1974, 1978, 1980. — 100 str.  
 28. 2. del. — 1972, 1974. — 93 str.  
 Matematika za prvi razred tehniških šol. — DZS, 1973. —  
 29. Aritmetika, algebra in analiza. — 101 str.  
 30. Geometrija. — 111 str.  
 Matematika za ... tehniških šol. — DDU Univerzum.  
 31. 1. razred. — 1973, 1974, 1976, 1977, 1978. — 201 str.  
 32. 2. razred. — 1974, 1975, 1977, 1979. — 204 str.  
 33. 3. razred. — 1975, 1977, 1979. — 210 str.  
 34. 4. razred. — 1976, 1978. — 128 str.  
 35. Zbirka nalog iz aritmetike, algebre in analize za 4. razred gimnazije. — Razmnožil D. Repovš, 1972. — 122 str.  
 Zbirka nalog iz aritmetike, algebre in analize za gimnazije. — DMFA SRS.  
 36. 1. razred. — 1968, 1969. — 80 str.  
 37. 2. razred. — 1968, 1969. — 72 str.  
 38. 3. razred / soavtorji: F. Avsec, A. Cokan, M. Potisek, I. Pucelj, B. Roblek, M. Vagaja. — 1969, 1970, 1971. — 105 + 114 str.  
 39. 4. razred. — 1973, 1974. — 105 str.  
 Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za gimnazije. — DZS.  
 40. 1. razred. — 1970, 1971, 1973, 1974, 1976, 1977, 1978, 1979. — 99 str.  
 41. 2. razred. — 1970, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979. — 88 str.  
 42. 3. razred / soavtorji: F. Avsec, A. Cokan, I. Molinaro, I. Pucelj, B. Roblek, M. Vagaja. — 1972, 1975, 1977, 1979. — 200 str.  
 43. 4. razred. — 1975, 1978, 1980. — 120 str.  
 44. Geometrija za 2. razred gimnazije: prvo in drugo poglavje / soavtor I. Pucelj. — DMFA SRS, 1970. — 36 str.  
 Geometrija za gimnazije / soavtor I. Pucelj. — Maribor: Založba Obzorja.  
 45. 1. razred. — 1966, 1970, 1972, 1974, 1977, 1979. — 175 str.  
 46. 2. razred. — 1970, 1972, 1974, 1977, 1979. — 173 str.  
 Matematika: srednje usmerjeno izobraževanje: skupna programska osnova. —  
 47. 1. Linearna funkcija. Odvod. — Zavod SRS za šolstvo, 1977. — 46 str.  
 48. 2. Polinomi. Racionalne funkcije. Korenske funkcije. — Zavod SRS za šolstvo, 1977. — 81 str.  
 49. 3. Algebrske funkcije. Krivulje drugega reda. — DDU Univerzum, 1977. — 42 str.  
 50. 4. Kotne funkcije. — DDU Univerzum, 1977. — 82 str.

Vse knjige, razen kjer to ni posebej navedeno, so izšle v Ljubljani. Za založbe pa so v večini primerih navedene naslednje kratice: DZS — Državna založba Slovenije, CZ — Cankarjeva založba, MK — Mladinska knjiga, — DDU Dopisna delavska univerza, DMFA SRS — Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, TZS — Tehniška založba Slovenije.

*Ciril Velkovrh*



## OBLJUBA JE IZPOLNJENA

### *Poročilo o predavanjih iz matematike v šolskem letu 1979/80*

Na lanskem občnem zboru DMFA SRS sem razdelil med udeležence anketo, ki naj bi med drugim pokazala, kakšno je mnenje o ponovni oživitvi matematičnih (in fizikalnih) predavanj za srednješolce. Pred leti je Društvo posvečalo veliko pozornost prav predavanjem, s katerimi je med mladino populariziralo matematiko in fiziko. Vsi anketiranci brez izjeme so menili, da je potrebno nadaljevati s to društveno dejavnostjo.

V razgovoru na občnem zboru sem vprašal: zakaj ni več predavanj za srednješolce in kateri organ Društva je za to sploh odgovoren. Trdil sem, da ni vzrok v pomanjkanju predavateljev. Zarekel sem se, da si upam sam poiskati toliko predavateljev, da bi samo iz matematike lahko predavali enkrat tedensko vse šolsko leto.

Skrbelo me je, če morda zanimanje za matematiko med mladino dandanes le ni tako veliko, kot je bilo pred leti, vendar mi je skrb manjšal uspeh našega Preseka in pa izredno ugoden odziv članov Društva v že omenjeni anketi. Zato sem vsem, ki so me po občnem zboru podprli, tem bolj zatrjeval, da sem pripravljen organizirati predavatelje. Vsem tem pa sem tudi vztrajno ponavljal, da pa nisem pripravljen prevzeti nase celotnega administrativno-propagandno-organizačijskega dela, ki je gotovo v pristojnosti ustaljenih organov DMFA.

Seveda smo si obliko in vsebino predavanj vsak po svoje predstavljali. Nekdo mi je zagotavljal, da pridejo na predavanja vsi njegovi učenci, če bomo učili programiranja. Drugi je videl v predavanjih le pripravljalni tečaj svojih tekmovalcev. Jaz pa vidim v predavanjih sebe, kako sedim kot gimnazijec v klopi, še na stari univerzi, in poslušam prof. Prijatelja govoriti o usodni noči pred dvobojem Evarista Galoisa, o antinomijah v teoriji množic in o zagrenjenem Georgu Cantorju, ki je zadnja leta svojega življenja prebil z omračenim umom. Spominjam se vseh drugih profesorjev, ki so govorili o grupah, verjetnosti, odvajanju in integriranju... Kakšen svet! Popolnoma drugačen od suhoparnih logaritmov v logaritmskih tablicah in neskončnih, po duhu vedno istih nalog iz trigonometrije. Spominjam se velike fizikalne predavalnice: poskusi s svetlobo. Luči v predavalnici se ugašajo postopno, tabla se premika s pritiskom na gumb. Prizma razkloni svetlobo. Ko bi ne poslušal prof. Prijatelja, bi izbral fiziko. Pa sem najprej mislil biti strojnik, še prej, v osnovni šoli pa kemik. Res, ko bi ne bilo predavanj iz matematike za srednješolce, bi se nikoli ne odločil za študij matematike.

No, pa smo na koncu le organizirali predavanja. Zamislil sem si jih tako, da bi poleg osnovnega namena — popularizirati matematiko — dosegli še tri cilje: prvič: pomagali bi krožkom po šolah. Razbremenili bi že tako preobremenjenega srednješolskega profesorja v skrbi za krožke. Sami mentorji pa bi na predavanjih dobili sveže ideje za delo z nadarjeno mladino. Drugič: predavatelji naj bi pripravili tudi nekaj nalog, ki bi lahko poslušalcem omogočile, da doma poglobijo pridobljeno znanje. Težje med nalogami pa bi služile za pripravo na tekmovanje. Tretjič: upali smo, da bodo predavatelji pripravili predavanja v obliki članka za Presek. S tem bi obogatili slovensko matematično literaturo. Težko je reči, ali so se upi izpolnili, priznati pa moramo, da doslej na račun predavanj Presek še ni dobil kaj prida prispevkov.

Nehvaležni administrativni del organizacije je prevzela tov. Darka Hvastja. V semestralnih počitnicah je Društvo organiziralo seminar iz matematike za učitelje na srednjih šolah. V seminarskih gradivih je izšel tudi program za prva dva meseca: februar in marec. Tov. Hvastja je poslala podobno obvestilo še po šolah in v Prosvetnega delavca. Na veliko presenečenje nam je Prosvetni delavec to obvestilo zaračunal kot reklamo. Ko se je ta program iztekel, smo poslali po šolah novo obvestilo z nadaljnjim razporedom predavanj.

Najbolje, da vsa predavanja kar naštejemo:

- 7. 2. — 1. Anton Suhadolc: Matrike.
- 14. 2. — 2. Franci Forstnerič: Kongruence.
- 21. 2. — 3. Tomaž Pisanski: Verižni ulomki.
- 28. 2. — 4. Vladimir Batagelj: Vsote končnih zaporedij.
- 6. 3. — 5. Matjaž Omladič: Interpolacija.



13. 3. — 6. Anuška Ferligoj: Matematika v družboslovju.
20. 3. — 7. Jože Grasseli: Fareyeva zaporedja.
27. 3. — 8. Zlatan Magajna: Geometrijske disekcije.
3. 4. — 9. Zvonimir Bohte: Uporaba Hornerjevega algoritma, 1. del.
10. 4. — 10. Zvonimir Bohte: Uporaba Hornerjevega algoritma, 2. del.
17. 4. — 11. Gorazd Lešnjak: Krivulja, ki zapolni kvadrat.
24. 4. — 12. Milan Hladnik: Induktivna metoda v matematiki.
8. 5. — Odpadlo.
15. 5. — 13. Janez Strnad: Poskusi z elektroni.
22. 5. — 14. Janez Rakovec: Topološke lastnosti ravnine, 1. del.
29. 5. — 15. Janez Rakovec: Topološke lastnosti ravnine, 2. del (odpadlo, ker ni bilo poslušalcev)!
5. 6. — 16. Zvonko Trontelj: Alternativni energijski viri.

Na prvo predavanje je prišlo kakih petdeset dijakov iz vse Ljubljane. Za tem pa je obisk počasi, a vztrajno padal. Tudi »reklama« v Prosvetnem delavcu ni pomagala. In tako se je 29. maja 1980 izpolnila mora vsakega organizatorja. Ta dan je predavanje dr. Janeza Rakovca odpadlo, ker ni bilo poslušalcev.

Klavrno so se končala letošnja predavanja. Belim si glavo: pa se mi ne utrne misel, ki bi v celoti pojasnila polom. Kaj vse je odpovedalo? Ali so se res vsi ljubljanski dijaki naveličali zahtevnih predavanj? Ali so bili na koncu v šoli preobremenjeni? Ali so predavanja po opravljenih tekmovanjih zgubila smisel? Ali so krivi fiziki, ki so s spremembo kraja in časa svojih dveh predavanj spremenili ustaljeni ritem? Res je, da je smrt predsednika Tita vsem nam usekala globoko rano in je bilo zato predavanje, napovedano za 8. maj, preloženo.

Kakorkoli že je, obljubo, dano na občnem zboru, sem izpolnil. Dokazal sem, da je in bo dovolj predavateljev. Zato trdno upam, da se bo v prihodnje našel kdo, ki jih bo znal pravilno aktivirati. Vsekakor pa primanjkuje sposobnih organizatorjev. Brez njih pa se lahko DMFA še usmradi. Jaz se organizacije predavanj ne dotaknem več. Me je preveč strah govorjenja stenam.

*Tomaž Pisanski*

### PRIMATIJADA 1980

Sedmo srečanje študentov prirodoslovno-matematičnih fakultet Jugoslavije je bilo letos od 14. do 20. aprila 1980 v Baškem Polju pri Makarski, organizirala pa ga je PMF iz Sarajeva. Poleg naše so na srečanju sodelovale še fakultete iz Beograda, Kragujevca, Prištine, Novega Sada, Niša, Sarajeva, Skopja in Zagreba.

Srečanje je potekalo na naslednjih področjih:

1. **Tematski razgovori** so bili dopoldne. Študentje smo izmenjali misli in izkušnje o naslednjih temah:

- standard študentov (prehrana, študentski domovi, štipendije . . s.),
- način in viri financiranja OÖZSM,
- sodelovanje študentov v družbenopolitičnih in samoupravnih organih na fakulteti in zunaj nje,
- informiranje in izdajanje učbenikov,
- učinkovitost študija,
- položaj fakultete v gospodarstvu in družbi,
- športne in izvenšolske dejavnosti študentov,
- cilji in vsebina prihodnjih PRIMATIJAD v skladu z današnjimi družbenimi cilji.

2. **Športna srečanja** so potekala ves dan v naslednjih disciplinah: nogomet, košarka, rokomet, odbojka, namizni tenis, šah, streljanje. Zadnji dan je bilo tudi tekmovanje v kegljanju, plavanju in ženskem nogometu.

3. **Raziskovalno delo študentov**

Študentje so pripravili naslednja predavanja:

- M. Horvat, Detekcija kaskadnog prilaza kod  $Rb^{85}$  (Zagreb),
- Z. Hloušek, Fröhlichov Hamiltonijan perturbativni račun drugog i četvrtog reda za vlastitu energiju polarona — komulantski razvoj jednog elektronskog propagatora (Zagreb),



- M. Bestvina, Šta je teorija oblika? (Zagreb),
- M. Bestvina, Piramidalno parcialno uređeni skupovi (Zagreb),
- K. Hamid, Mnogougao (Sarajevo),
- M. Davidović, Osobine i struktura nekih klasa prstena (Novi Sad),
- D. Solarov, Diferenčni postupak za rešavanje konturnog problema sa fenomenom graničnog sloja (Novi Sad),
- K. Hamid, Neke osobine konačnog skupa tačaka u ravnini (Sarajevo),
- S. Ganić, Određivanje nikotina i fenola u dimu cigareta (Sarajevo),
- Č. Đono, Praćenje pertidazne aktivnosti tripsina u prisustvu antibiotika penicilina (Sarajevo),
- S. Sinović, Vodene gljive u vodi područja Kragujevca (Kragujevac),
- D. Knežević, Prilog poznavanja uzročnika truleži usklađivanja jabučnog voća (Kragujevac).

4. **Kulturna ustvarjalnost** je bila letos izredno slabo prikazana, saj je bil organiziran le en kulturni večer.

5. **Kviz** je potekal pod geslom Tito in revolucija.

Iz Ljubljane se je letošnjega srečanja udeležilo 57 študentov matematike in fizike; sodelovali smo v športnih srečanjih, tematskih razgovorih in kvizu.

Prihodnje leto bo PRIMATIJADA na Ohridu, organizirala pa jo bo PMF iz Skopja. Sklenili smo, da mora vsaka fakulteta obdelati in podrobno analizirati naslednji področji:

- način in učinkovitost študija ter problem učbenikov,
- raziskovalna dejavnost študentov.

Poleg tega se mora povečati tudi sodelovanje na raziskovalnem in kulturnem področju.

Na koncu pa ne moremo iti mimo financiranja, ki je za nas glavni problem. Letos smo študentje poravnali 50 % (850,00 din) sami. Denarno pa so nam pomagali IJS — odsek za uporabno matematiko, VTO matematika in mehanika ter VTO fizika, za kar se jim iskreno zahvaljujemo. Prav gotovo bo potrebno kaj ukreniti, še posebej zato, ker bomo morali v letu 1982 mi prevzeti organizacijo tega srečanja, ki se je iz prvotnega športnega srečanja razvilo v pravo politično manifestacijo, ki razvija v mladih ljudeh zdravega duha in krepi bratstvo in enotnost naših narodov in narodnosti; zato prav gotovo zasluži širšo družbeno podporo.

*Nada Širca*

## RAZISKOVALNE NALOGE ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V LETU 1979\*

**54. Numerično reševanje večparametričnih problemov lastnih vrednosti.** Nosilec Zvonimir Bohte, sodelavci Gabrijel Tomšič, Edvard Kramar, Tomaž Slivnik, Miro Lozej, Andrej Kmet, Bojan Orel in Iztok Tvrdy.

V nalogi so obravnavane numerične metode za reševanje večparametričnih problemov lastnih vrednosti. Pri reševanju algebraičnega problema so opisani štirje novi algoritmi za ekonomično in stabilno računanje odvoda determinante. Pri reševanju diferencialnega problema so obravnavani izreki o eksistenci in oscilacijskem vedenju lastnih funkcij ter dokazan nov izrek o asimptotičnih razvojih napak za diferenčno metodo. Pri reševanju integralskega problema so razložene nekatere metode, ki prevedejo problem na algebraični. Vsa izvajanja so ilustrirana z numeričnimi zgledi.

---

\* Resumeji raziskovalnih nalog iz leta 1978 so bili objavljeni v Obzornik mat. fiz. 26 (1979) 54—55.

**55. Interpolacija z analitičnimi funkcijami v neskončno dimenzijah.** Nosilec Josip Globevnik, sodelavci Mirko Dobovišek, Milan Hladnik, Vito Lampret, Gorazd Lešnjak, Aleš Založnik.

V nalogi je dokazano, da ima standardna baza v prostoru  $X = l^p(\Gamma)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) lepe interpolacijske lastnosti za zvezne preslikave z zaprte enotne krogle prostora  $X$  v neki drug Banachov prostor, analitične na odprti enotni krogli. Dokazanih je nekaj interpolacijskih izrekov in dobljena karakterizacija zalog vrednosti takih preslikav za primer, ko so vrednosti kompleksna števila. Nadalje je dokazano, da sfera vsakega reflektivnega neskončnodimenzionalnega kompleksnega Banachovega prostora vsebuje nekompaktne zaprte interpolacijske množice za take preslikave.

**56. Aproksimacija linearnih omejenih funkcionalov v numerični analizi.** Nosilec Jernej Kozak, sodelavec Andrej Vozlič.

V zadnjem času je več avtorjev pritegnila zanimiva naloga: kako uporabiti v numerični aproksimaciji podatke, ki smo jih izmerili ne kot vrednosti dane funkcije, ampak kot njena povprečja po podintervalih. Tako Laurent in Anselone (1968) raziskujeta obstoj povprečnih interpolacijskih zlepkov, Laurent (1972) njuna spoznanja razširi. Omladič et al. (1976) dokažejo obstoj povprečnih interpolacijskih kvadrature formel, Omladič (1978) izpelje več povprečnih Newton-Cotesovih pravil.

V nalogi so sistematično pregledane lastnosti računanja s povprečji. Razširjeni so znani zadostni pogoji za obstoj povprečnega interpolacijskega polinoma, izpeljana njegova Lagrangeova in Newtonova oblika, poiskane povprečne deljene difference in z njimi povprečni  $B$ -zlepki. Z  $B$ -zlepki je tudi eksplicitno konstruirana baza povprečnih interpolacijskih zlepkov, katere obstoj je dokazal že Laurent (1968).

**57. Izometrična struktura Banachovih prostorov.** Nosilec Peter Legiša, sodelavec Milan Hladnik.

V nalogi je najprej dokazano, da je v vsakem kompleksnem Banachovem prostoru s hiperortogonalno bazo linearna lupina množice hermitskih operatorjev  $W^*$ -algebra. Nadalje je dokazano, da je za vsak kompleksen Banachov prostor  $X$  z upadajočo normalizirano hiperortogonalno bazo vsak hermitski operator na  $X^*$  adjungirani operator nekega hermitskega operatorja na prostoru  $X$ , preslikava  $T \rightarrow (T^*)^{-1}$  pa je izomorfizem grupe izometrij prostora  $X$  na grupo izometrij prostora  $X^*$ . Posebej so obravnavani podobni problemi še v realnih Banachovih prostorih.

**58. Lastni problemi za linearne diferencialne operatorje.** Nosilec Anton Suhadolc, sodelavci Andrej Vitek, Anton Cedilnik, Bojan Mohar.

V nalogi je obravnavan robni problem oblike

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y & 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) &= 0, & (a + \lambda b)y(\pi) + (c + \lambda d)y'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

kjer je  $\Delta = ad - bc > 0$

v katerem parameter  $\lambda$  nastopa tudi v robnem pogoju.

V nalogi je dokazano, da ima zgornji robni problem števno zaporedje lastnih vrednosti  $\lambda_n$  in lastnih funkcij  $\psi_n(x)$  in kvečjemu končno mnogo  $\lambda_n$  je negativnih. Vsaka dvakrat zvezna odvedljiva funkcija  $f(x)$ , ki zadošča robnemu pogoju  $f(0) = 0$ , se da razviti v vrsto po lastnih funkcijah

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \psi(x)$$



Ta vrsta konvergira enakomerno, prav tako tudi vrsta, ki jo dobimo iz te vrste z odvajanjem po členih. Za nefizikalni primer  $\Delta < 0$  je s pomočjo teorije Hilbertovih prostorov z nedefinitno metriko dokazano, da sta dve lastni vrednosti kompleksni, druge pa spet pozitivne razen morda končno mnogo in da spet velja razvoj, podoben zgornjemu.

**59. Invariantni podprostor omejenih linearnih operatorjev v Banachovem prostoru.** Nosilec Ivan Vidav, sodelavec Matjaž Omladič.

Naloga prinaša nekaj novih konstrukcij invariantnih podprostorov omejenih linearnih operatorjev na Banachovih prostorih. Najprej je uvedena nova konstrukcija, ki pri danem operatorju  $T$  priredi poljubni množici  $\sigma$  spektra tega operatorja neki invarianten podprostor  $U(\sigma)$  tega operatorja. V primeru, ko je  $T$  skalaren operator na Hilbertovem prostoru, je za vsako Borelovo množico prostor  $U(\sigma)$  ravno slika spektralnega projektorja  $P(\sigma)$ . Nadalje je uvedena nova konstrukcija, ki da analogen rezultat za spektralne operatorje na Banachovih prostorih. Končno je uvedena še konstrukcija, ki da hiperinvariantne prostore kvazinilpotentnega operatorja in v posebnem primeru vse invariantne podprostore Volterrovega operatorja.

**60. Razrešitev vozlov pri povečanju dimenzij ambienta.** Nosilec Jože Vrabec, sodelavci Marko Kranjc, Bojan Magajna, Zlatan Magajna, Janez Rakovec, Nežka Kosta, Jože Malešič, Peter Petek.

V nalogi je pokazano, katere vložitve  $k$ -povezane, skelnjene  $m$ -mnogoterosti  $M$  v evklidski prostor  $R^{2m-k}$  je mogoče izotopsko deformirati v  $R^{2m-k-1}$  in katere vložitve v  $R^{2m-k-1}$  so med seboj izotopne v  $R^{2m-k}$ . Za primer, da je  $M$  produkt dveh sfer, podaja izotopsko klasifikacijo vložitev v  $R^{2m-k-1}$ .

**61. Realne Banachove algebre z involucijo.** Nosilec Joso Vukman, sodelavec Andrej Blejec.

V prvem delu naloge so obravnavane realne simetrične Banachove algebre. Veliko rezultatov, ki veljajo za kompleksne simetrične Banachove algebre, je dokazanih za realen primer. Rezultat V. Ptaka, da je neenakost  $r(x) \leq r(x^*x)^{1/2}$  (kjer je  $r(x)$  spektralni radij elementa  $x$ ) karakteristična lastnost kompleksnih simetričnih Banachovih algeber, v realnem primeru ne velja in so za karakterizacijo realnih simetričnih Banachovih algeber potrebni močnejši pogoji. V nalogi je dokazano, da je realna Banachova algebra z involucijo simetrična natanko takrat, ko je za vsak par  $x, y$  iz algebre izpolnjena neenakost  $r(x)^2 \leq r(x^*x + y^*y)$ . Obravnavani so tudi pozitivni funkcionali na realnih simetričnih Banachovih algebrah, dokazani eksistenčni izreki zanje in na osnovi tega nekatere karakterizacije realnih simetričnih Banachovih algeber. V drugem delu naloge so obravnavane realne hermitske  $B^*$ -algebre. Podane so različne karakterizacije realnih hermitskih  $B^*$ -algeber in karakterizacije realnih hermitskih Banachovih algeber z ekvivalentno  $B$  normo.

**62. Bibliografija Franca Hočevarja in Riharda Zupančiča.** Nosilec Jože Povšič, sodelavca Marjan Hribar in Stanislav Zorko.

Zbrano gradivo nam skuša stvarno in nadrobno osvetliti pravo sliko in prikazati obseg knjižnega opusa učbenikov Franca Hočevarja in Riharda Zupančiča. V avstroogrski dobi sta tudi ta dva slovenska matematika vsak v svojem času s svojo strokovno in šolsko publicistično dejavnostjo vplivala na nadaljnji razvoj matematične znanosti v Srednji Evropi in posebej na razvoj metode za posredovanja le-te.

*Josip Globevnik*

**Baumslag B. in Chandler B., Schaum's outline of theory and problems of group theory. McGraw-Hill. New York 1968. 279 str.**

Knjiga podaja običajen kurz teorije grup, kar je razvidno iz naslovov poglavij: O množicah, preslikavah in binarnih operacijah, Grupoidi, Grupe, Izreki o izomorfizmi, Končne grupe, Abelove grupe, Reprezentacije grup, Proste grupe in predstavitev grup. Pretežni del vsebine poslušajo študenti prvega in drugega letnika matematike.

Avtorja sta se seveda popolnoma podredila slogu Schaumove zbirke nalog in problemov. V uvodu tudi naravnost povesta, da je namen knjige »olajšati študij teorije grup«. Dokazi izrekov in razlage posrečenih primerov so kar se da preprosti, včasih razvlečeni, in se izgubljajo v množici nalog. Le-te so v glavnem enostavne, ne manjka pa tudi težjih. Zato bodo po zbirki segli predvsem študenti, ki jim ustreza slog Schaumove zbirke nalog.

*Zlatan Magajna*

## VSEBINA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 27 (1980) št. 1—6, str. 1—192.

### Članki — matematika

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Matematični modeli oboroževalne tekme in vojaških spopadov (Jože Andrej Čibej) . . . . .      | 1   |
| Množice v nižjih razredih osnovne šole (Izidor Hafner) . . . . .                              | 33  |
| O funkciji $[x]$ in komplementarnih zaporedjih naravnih števil (Ivan Vidav) . . . . .         | 67  |
| Parketiranje ravnine s konveksnimi mnogokotniki (Boris Lavrič) . . . . .                      | 97  |
| Pellova enačba (Tomaž Pisanski) — Problem o govedu (Arhimed, prev. France Križanič) . . . . . | 102 |
| O nekem robnem problemu (Anton Suhadolc) . . . . .                                            | 129 |
| O večparametričnih problemih (Gabrijel Tomšič, Tomaž Slivnik) . . . . .                       | 163 |

### Članki — fizika

|                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Pomanjkanje energije in pouk fizike (Janez Strnad) . . . . .                                                                                                                                                                                          | 7   |
| Razprava na posvetovanju Energijski problem in pouk fizike, Velenje, 26. oktobra 1979 (Zdravko Petkovšek, Stane Pirnat, Matjaž Žaucer, Ivan Kuščer, Zvonko Trontelj, Franc Cvelbar, Joško Batestin, Janez Ferbar, Alojz Kodre, Ciril Memon) . . . . . | 24  |
| Fizika ledu (Peter Gosar) . . . . .                                                                                                                                                                                                                   | 39  |
| Prostorske predstave in kvantna mehanika (Peter Gosar) . . . . .                                                                                                                                                                                      | 74  |
| Razvojne smeri didaktike fizike v Zvezni republiki Nemčiji (Wilfried Kuhn, prev. Janez Strnad) . . . . .                                                                                                                                              | 108 |
| Galileo Galilei in poskusi s prostim padom (Janez Strnad) . . . . .                                                                                                                                                                                   | 137 |
| Kratki in močni laserski impulzi (Boris Vedlin) . . . . .                                                                                                                                                                                             | 168 |



## Novice

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Oblika milnične opne — odgovor 116 (Rajko Krivec) . . . . .                              | 83  |
| Nov način za določanje zornih kotov zvezd (Marijan Prosén) . . . . .                     | 89  |
| Potrdili možen obstoj nevidnih spremenljivk Barnardove zvezde (Marijan Prosén) . . . . . | 90  |
| Gravitacijski valovi (Andrej Čadež) . . . . .                                            | 115 |
| Nova merilnika za nabite delce (Peter Križan) . . . . .                                  | 119 |
| Uranovi kolobarji (Marijan Prosén) . . . . .                                             | 146 |
| Nevtrinske oscilacije? (Janez Strnad) . . . . .                                          | 176 |

## Šola

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| Fotoefekt v šoli (Mirko Cvahte in Janez Strnad) . . . . .         | 53  |
| Zakaj avtomobili speljujejo s parkirišč? (Janez Ferbar) . . . . . | 123 |

## Dopisi

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| K pojmom veličina, količina, vrednota (Francé Avčin) . . . . . | 61 |
|----------------------------------------------------------------|----|

## Domače vesti

|                                                                                                                                                                     |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| VII. kongres Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije —<br>1. obvestilo (Ciril Velkovrh) . . . . .                                              | 28    |
| 3. jugoslovanska konferenca o uporabi fizike — vabilo (Zvonko Trontelj) . . . .                                                                                     | 28    |
| Poročilo o simpoziju, posvetovanju in občnem zboru DMFA SRS (Alenka Verstovšek) . . . . .                                                                           | 29    |
| Umrli je profesor doktor Lavo Čermelj (Foto Ciril Velkovrh) . . . . .                                                                                               | 31    |
| VII. kongres Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije —<br>2. obvestilo (Ciril Velkovrh) . . . . .                                              | 52    |
| Novo društvo (Karel Bajc) . . . . .                                                                                                                                 | 58    |
| Profesor dr. Anton Vakselj — osemdesetletnik. Bibliografija (France Križanič, Ciril Velkovrh) . . . . .                                                             | 59    |
| Josip Broz Tito, 1892—1980 (Foto Marjan Smerke) . . . . .                                                                                                           | 65    |
| Tridesetletnica Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije (Dušan Modic) . . . . .                                                                | 91    |
| Letovanje v Plemljevem domu na Bledu (Dušan Modic) . . . . .                                                                                                        | 92    |
| Seminar za učitelje matematike (Aleksander Cokan) . . . . .                                                                                                         | 101   |
| Finančno poročilo Komisije za tisk DMFA SRS za leto 1979 (Janez Markelj) . . . .                                                                                    | 125   |
| Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter<br>resumeji doktorskih disertacij v letu 1979 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) . . . . | 127   |
| Letno poročilo oddelka za matematiko IMFM za študijsko leto 1978/79 (Jože Vrabec) . . . . .                                                                         | 152   |
| Nagrajenci Sklada Borisa Kidriča v letu 1980 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) . . . .                                                                               | 156   |
| Poročilo o seminarju Zanimiva matematika (Martina Koman) . . . . .                                                                                                  | 157   |
| Obisk v Trstu (Karel Bajc) . . . . .                                                                                                                                | 160   |
| 3. evropski simpozij za stereologijo (Prev. in prir. Ciril Velkovrh) . . . . .                                                                                      | 160   |
| 32. občni zbor DMFA SRS — vabilo (Anton Suhadolc) . . . . .                                                                                                         | III/5 |
| V spomin: Profesor dr. Anton Kuhelj (Peter Vencelj) . . . . .                                                                                                       | 161   |
| Ob 70-letnici profesorja Alojzija Vadnala (Viljem Rupnik) . . . . .                                                                                                 | 183   |
| Življenjski jubilej profesorja Ivana Štalca. Bibliografija (Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh) . . . . .                                                                | 185   |
| Obljuba je izpolnjena (Tomaž Pisanski) . . . . .                                                                                                                    | 187   |
| Primatijada 1980 (Nada Širca) . . . . .                                                                                                                             | 188   |
| Raziskovalne naloge oddelka za matematiko IMFM v letu 1979 (Josip Globevnik) . . . . .                                                                              | 189   |

## Nove knjige

|                                                                                                                         |       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Publikacije Komisije za tisk DMFA SRS v letu 1979 (Ciril Velkovrh) . . . . .                                            | 32    |
| Steinfeld O., Quasi-ideals in rings and semigroups (Vladimir Batagelj) . . . . .                                        | III/1 |
| Trahtenbrot B. A., Što su algoritmi (Vladimir Batagelj) . . . . .                                                       | III/1 |
| Lu Y.-C., Singularity theory and an introduction to catastrophe theory (Jože Vrabec) . . . . .                          | IV/1  |
| Jamnik R., Matematična statistika (Marijan Blejec) . . . . .                                                            | 62    |
| Pietsch A., Operator ideals (Matjaž Omladič) . . . . .                                                                  | 63    |
| Eisberg R. M., Mathematische Physik für Benutzer programmierbarer Taschenrechner (Alojz Kodre) . . . . .                | 64    |
| Kramar, E., Zbirka nalog iz verjetnostnega računa (Rajko Jamnik) . . . . .                                              | 64    |
| Programmieren mit dem Taschenrechner TI-51-III (Andrej Kmet) . . . . .                                                  | III/2 |
| Economou E. N., Green's functional in quantum physics (Peter Prelovšek) . . . . .                                       | III/2 |
| Lovasz L., Combinatorial problems and exercises (Vladimir Batagelj) . . . . .                                           | IV/2  |
| Yaglom I. M., A simple non-Euclidean geometry and its physical basis (Janez Rakovec) . . . . .                          | IV/2  |
| Janić R. R., Tosić D. Dj., Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita na tehničkim fakultetima (Gorazd Lešnjak) . . . . . | 73    |
| Böhm, A., Quantum mechanics (Janez Strnad) . . . . .                                                                    | 93    |
| Drieschner M., Voraussage — Wahrscheinlichkeit — Objekt (Janez Strnad) . . . . .                                        | 93    |
| Feynman path integrals (Janez Strnad) . . . . .                                                                         | 94    |
| Martin P. A., Modeles en mecanique statistique des processus irreversibles (Slobodan Žumer) . . . . .                   | 94    |
| Martin-Löf A., Statistical mechanics and foundations of thermodynamics (Slobodan Žumer) . . . . .                       | 95    |
| Devidé V., Matematika kroz kulture i epohe (Niko Prijatelj) . . . . .                                                   | 95    |
| Revije v matematični knjižnici (Ciril Velkovrh) . . . . .                                                               | 96    |
| Budinčević M., Marić V., Obične diferencialne jednačine (Bojan Magajna) . . . . .                                       | 107   |
| Jeffrey A., Mathematics for engineers and scientists, 2. ed. (Gabrijel Tomšič) . . . . .                                | 114   |
| Gibson J. R., Electronic logic circuits (Tomaž Slivnik) . . . . .                                                       | 124   |
| Landshoff P., Methereel A., Simple quantum mechanics (Janez Strnad) . . . . .                                           | 145   |
| Ahlin F. in dr., Fizikalni praktikum I. (Janez Strnad) . . . . .                                                        | 149   |
| Presekova knjižnica (Ciril Velkovrh) . . . . .                                                                          | 149   |
| Petek P., Vaje iz diferencialnih enačb (Tomaž Pisanski) . . . . .                                                       | 150   |
| Pomožni učbeniki za študente matematike in fizike (Ciril Velkovrh) . . . . .                                            | 150   |
| Madson I. in dr., The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds (Jože Vrabec) . . . . .                 | 151   |
| Guillemin V. W. in dr., Seminar on micro-local analysis (Anton Suhadolc) . . . . .                                      | 151   |
| Bird J. O., May A. J. C., Mathematics for electrical technicians, Level 3. (Gabrijel Tomšič) . . . . .                  | 151   |
| Presek (Ciril Velkovrh) . . . . .                                                                                       | 155   |
| Spiegel M. R., Mathematical handbook (Zvonimir Bohte) . . . . .                                                         | 167   |
| Wiegel F. W., Fluid flow through porous macromolecular systems (Sergej Pahor) . . . . .                                 | 182   |
| Baumslag B., Chandler B., Group theory (Zlatan Magajna) . . . . .                                                       | 192   |

## Vprašanja

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 117 — (Francé Avčin) . . . . .    | 148 |
| 118 — (Boštjan Hostnik) . . . . . | 175 |

## Odgovori

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 3 — (Janez Žitnik) . . . . .   | 147 |
| 116 — (Peter Križan) . . . . . | 83  |