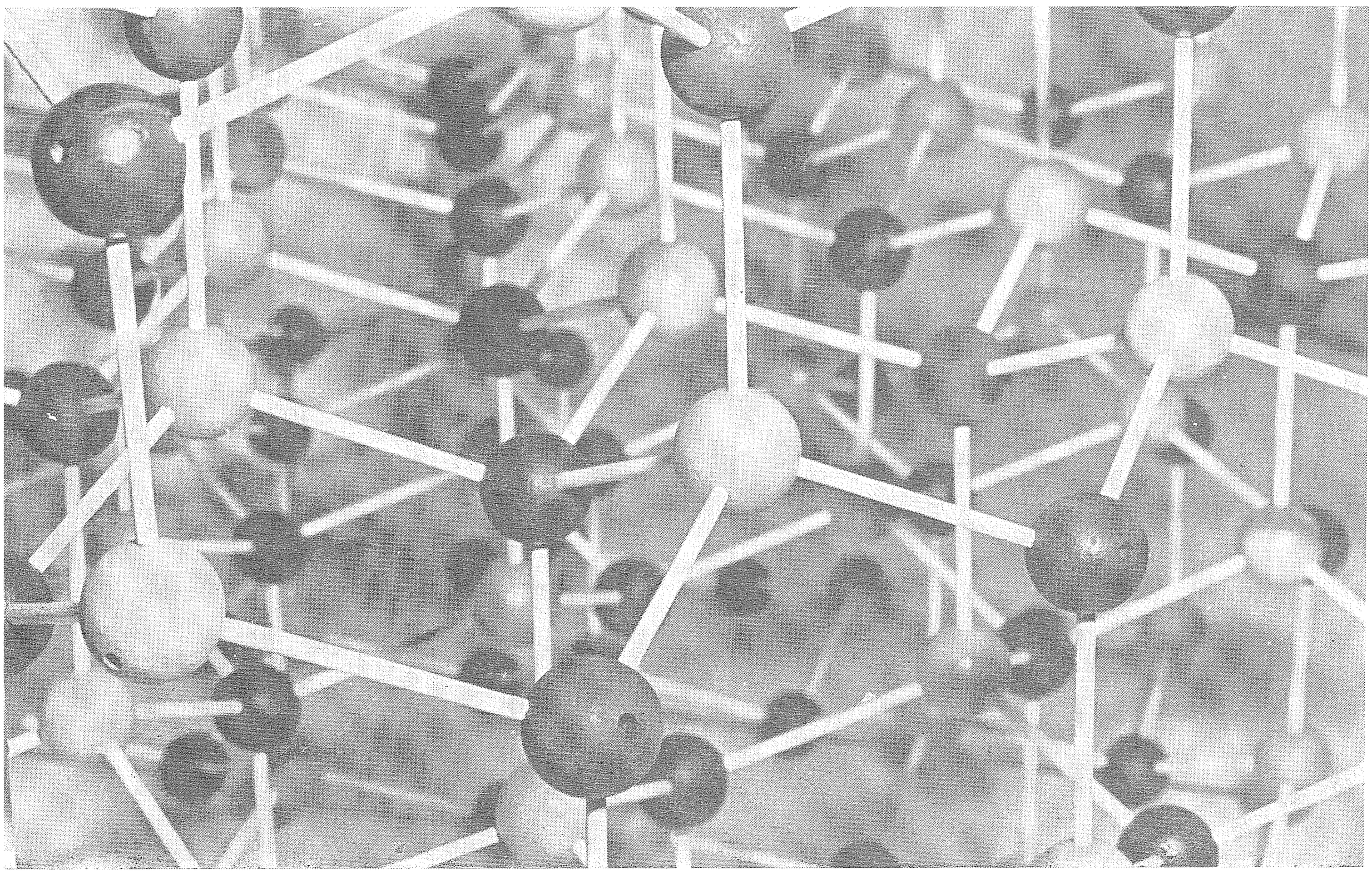
ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

1980
Letnik 27
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 27 • ŠT. 2 • STR. 33–64 • MAREC 1980

LETNIK 27. — ŠTEVILKA 2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1980

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 200.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 100.— din, za ustanove in podjetja 250.— din, za tujino 20 $ = 400.— din, posamezna številka 50.— din, dvojna številka 100.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1400 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1980 DMFA SRS — 450

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

Članki

Množice v nižjih razredih osnovne šole (Izidor Hafner) 33

Fizika ledu (Peter Gosar) 39

Šola

Fotoefekt v šoli (Mirko Cvahte in Janez Strnad) 53

Domače vesti

VII. kongres Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije (Ciril Velkovrh) 52

Novo društvo (Karel Bajc) 58

Profesor dr. Anton Vakselj — osemdesetletnik. Bibliografija (France Križanič, Ciril Velkovrh) 59

Dopisi

K pojmom veličina, količina, vrednota (France Avčin) 61

Nove knjige (Marijan Blejec, Matjaž Omladič, Alojz Kodre, Rajko Jamnik, Andrej Kmet, Peter Prelovšek, Vladimir Batagelj, Janez Rakovec) 62

Obvestilo (Marija Hrovath) III

CONTENTS

Articles

Sets in the lower classes of elementary school (Izidor Hafner) 33

Physics of ice (Peter Gosar) 39

School 53

Home news 59

Letters 61

Reviews 62

Na ovitku: Model heksagonalnega kristala ledu (Foto M. Smerke). Gl. članek P. Gosarja *Fizika ledu* na str. 39.

Obzornik mat. fiz. 27 (1980) 2

MNOŽICE V NIŽJIH RAZREDIH OSNOVNE ŠOLE

IZIDOR HAFNER

AMS Subj. class. (1970) 96-XX

Članek opozarja na težave, ki so povezane s poukom množic v nižjih razredih osnovne šole.

SETS IN THE LOWER CLASSES OF ELEMENTARY SCHOOL

The article shows the difficulties connected with sets in the lower classes of elementary school.

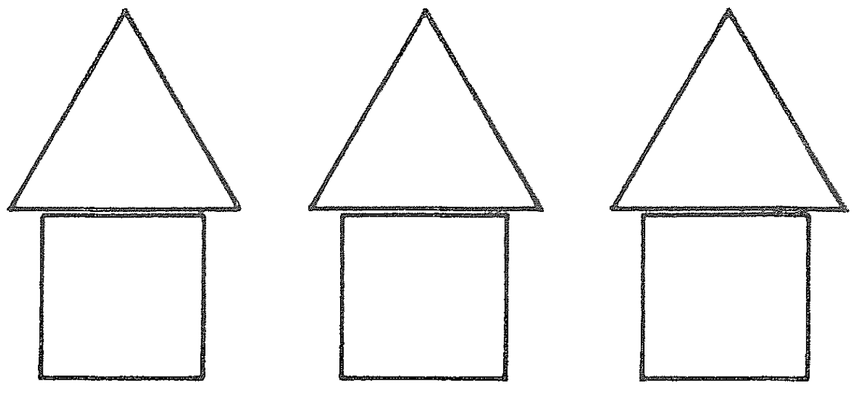
Ko sem prelistaval novi učbenik za tretji razred [4], sem opazil, da je v njem veliko manj nalog z množicami kot v učbenikih za prvi ter drugi razred. Upam, da to pomeni začetek konca ‚nove matematike'. V tem sestavku navajam nekaj zgledov, ki jih lahko sestavimo iz elementov, ki nastopajo v omenjenih učbenikih.

1. Najvažnejši del sestavka [1] je bila prva točka. Tam sem navedel, da množica (v matematičnem pomenu) ni stvarni predmet, zato je ne moremo videti in ne otipati, lahko pa jo dojamemo. V posebnem primeru množice otroških igrač ne moremo imeti pred sabo na klopi niti je ne moremo obkrožiti.

V tem sestavku se bodo izrazi »pred nami«, »pred nami na mizi«, »tole na mizi«, »biti pred nami«, »naš par čevljev« vedno nanašali na stvarni predmet, ki zavzema določeno pozicijo v prostoru in času.

Tu bom navedel zgled, pri katerem uporabljamo matematične ploščice.

Vzemimo tri trikotne in tri kvadratne ploščice. Na vsako kvadratno ploščico položimo trikotno ploščico in stvar, ki je tako nastala, imenujmo *hišica*. To, kar je pred nami na mizi, prikazuje slika.



Zdaj pa premislimo o naslednjih trditvah:

(1) Pred nami so tri hišice.
(2) Pred nami je šest ploščic.
(3) Stvar na mizi je množica treh hišic.
(4) Stvar na mizi je množica šestih ploščic.

V zadnjih dveh trditvah beseda »stvar« označuje dano kombinacijo ploščic na mizi. Trditvi (1) in (2) sta resnični, za posledico pa imata trditev:

(5) Na mizi je nekaj, kar je istočasno sestavljeno iz treh hišic ter šestih ploščic.

Od tod pa sledi:

(6) Je nekaj, kar sodi v pojma *biti sestavljen iz treh hišic* ter *biti sestavljen iz šestih ploščic*.

Seveda ne trdim, da imata omenjena pojma isti obseg, temveč le, da se obsega prekrivata.

Dodajmo k seznamu še naslednjo resnico o množicah:

(7) Kaka stvar ne more biti hkrati množica s šestimi elementi in množica s tremi elementi.

Trditve (3), (4) in (7) so nezdružljive, zato je vsaj ena od trditev (3) in (4) nepravilna. Toda nobenega razloga ni, da bi vzeli, da je trditev (3) pravilna, (4) pa ne (ali obratno). Vidimo torej, da kombinacija ploščic na mizi ni množica ploščic, če besedo »množica« uporabljamo s pomenom, kakršnega ima v točki (7).

Na vprašanje:

(8) Koliko elementov ima tale množica?

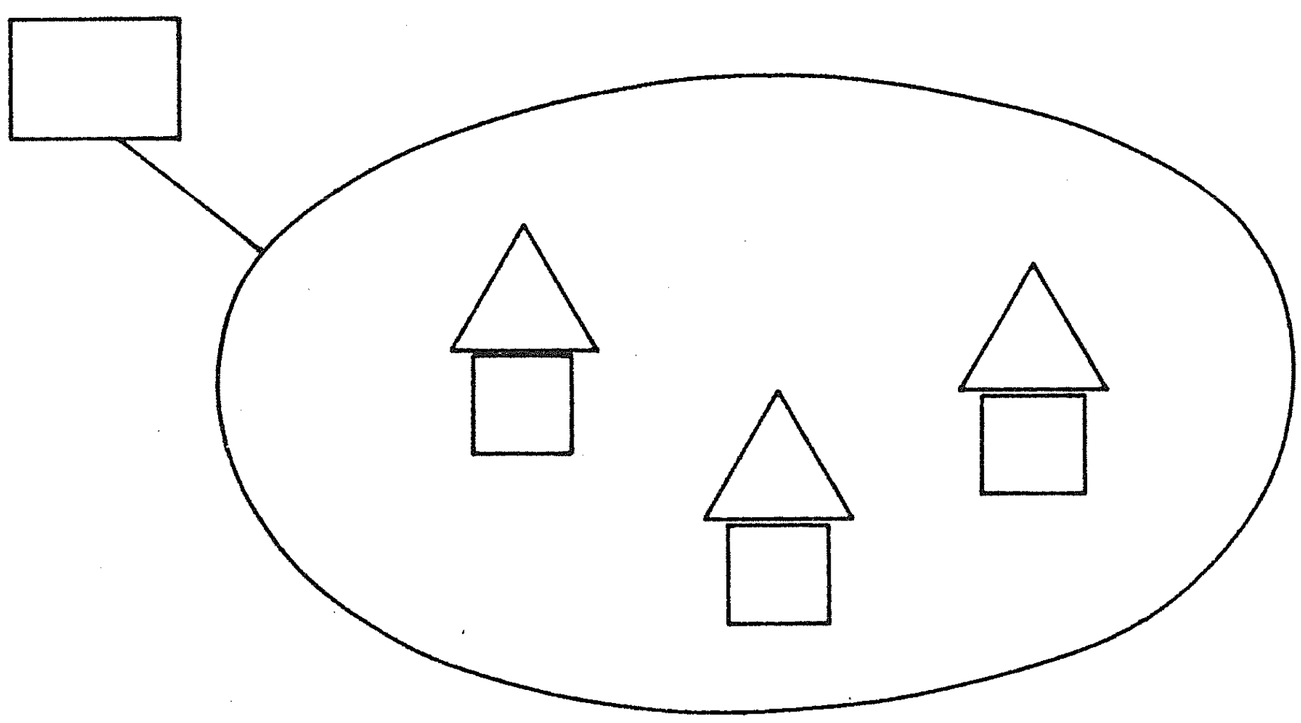
(in pri tem pokažemo na naše tri hišice), torej sploh ne moremo odgovoriti. Vsak petletni otrok pa zna odgovoriti na vprašanji

(9) Koliko hišic je pred nami?

(10) Koliko ploščic je pred nami?

Ali učenec loči lastnosti *biti sestavljen iz treh danih hišic* in *biti množica treh danih hišic* itd., ni teoretično, temveč praktično vprašanje. Če tega problema sploh ni, potem noben učenec ne bo imel težav z naslednjo nalogo:

Napiši v okvirček število elementov množice!



Kaj so elementi te množice?

V aksiomatičnih teorijah množic je $x \neq \{x\}$ izrek. Vzemimo, da je a neki predmet na mizi, potem pa množica, katere edini element je a, ne more biti na mizi. Če bi tudi množica {a} bila na mizi, bi po istem argumentu bile tudi množice {{a}}, {{{a}}} itd. in bi imeli na mizi neskončno mnogo množic. Podobno bi lahko sklepali tudi o drugih množicah. **Množica torej ne more biti na mizi (pa tudi v škatli ne).**

38. a) Množica { IIIII IIIII IIIII IIII } ima ☐ elementov.

b) Množica { ○○○○ ○○○ ○○ ○ } ima ☐ elementov.

c) Množica { xxxxx xxxxx xxxxx xxxx } ima ☐ elementov.

č) Množica { ▬▬▬ ▬▬▬ ▬▬▬ ▬▬▬ } ima ☐ elementov.

2. Vzemimo sedaj naslednji problem [2 str. 9]

»Tu pa res ni problemov,« se bo morda kdo oglasil. Če želimo rešiti takšne naloge, moramo natančno poznati elemente omenjenih množic. Drugih kandidatov za elemente množice iz primera a ni, razen črtic, ki nastopajo v formulaciji naloge. Toda ob takšni rabi črtic je trditev

$$\{||||\} = \{||||\}$$

vedno napačna, ker je vsaka črtica na levi vedno nekaj drugega kot črtica na desni.

V teoriji množic trditev

$$\mathrm{m}\,\{x, y, z\} = 3$$

ni nikoli izrek. Pač pa so izreki

$$x \neq y \,\&\, y \neq z \,\&\, z \neq x \Rightarrow \mathrm{m}\,\{x, y, z\} = 3$$
$$\mathrm{m}\,\{x, x, x\} = 1$$
$$\mathrm{m}\,\{1, 1, 1\} = 1$$
$$\{1, 1, 1\} = \{1, 1\} = \{1\}$$

Avtorjem učbenikov priporočam, da preberejo kakšno knjigo o teoriji množic. Tam bodo zaman iskali oznako oblike »{x x x x}«.

Ko bo učitelj prepričan, da učenci že delno poznajo pojma množice in število ena, naj postavi naslednjo nalogo:

»Koliko elementov ima množica {1, 1, 1}?« Bojim se, da bodo le redki povedali pravilni odgovor, večina bo odgovorila: »Tri.«

Če v matematičnih stavkih nastopa kaka individualna konstanta ali spremenljivka večkrat, ima le-ta vedno isti pomen, to je, v celotni nalogi se vsa ta nastopanja nanašajo na isti objekt. Kvadratna enačba

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

bi imela neskončno mnogo rešitev, če bi se prvo in drugo nastopanje »x« lahko nanašalo na različni števili; če pa bi ravno to želeli, bi pisali

$$y^2 - 3x - 2 = 0$$

3. Nadaljnje težave s takimi ‚množicami' iz naloge 38 pa nastopijo, če hočemo z njimi računati.

Primer: Naj bo $\mathcal{A} = \{\mathrm{x\ x\ x\ x}\}$, $\mathcal{B} = \{\mathrm{x\ x}\}$

Izračunaj $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$

Po zgledih iz učbenikov, ki so bili prevedeni iz nemščine, bi imeli

(1) $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{\mathrm{x\ x}\}$
(2) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\mathrm{x\ x\ x\ x\ x\ x}\}$

Pa še tole bi sledilo

(3) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}$
(4) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$

Oziroma iz (3) in (4)

$$\emptyset = \mathcal{B}$$

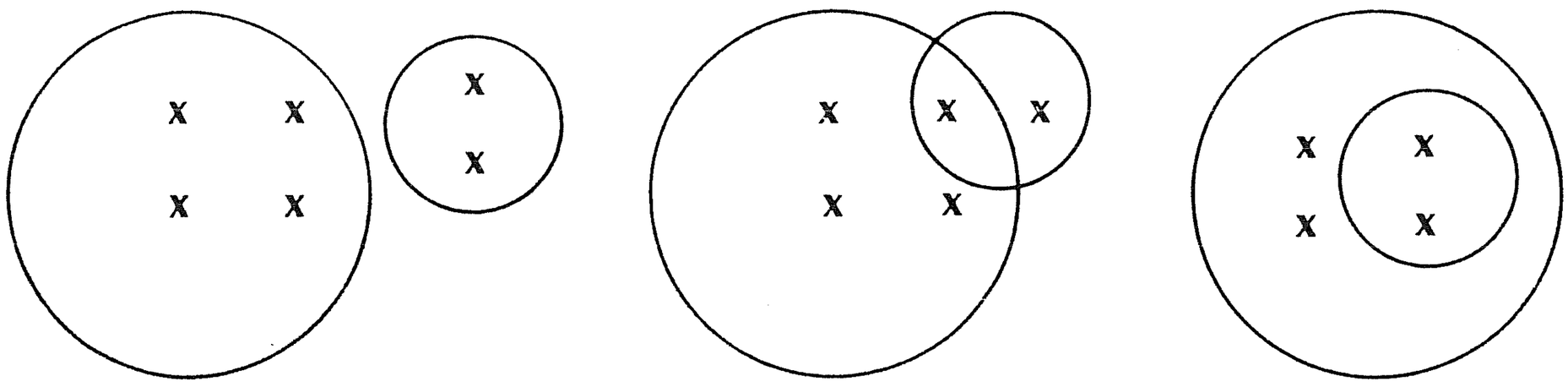
Naj bo še $\mathcal{C} = \{x\,x\,x\}$. Preveri naslednje izreke teorije množic:

$$\mathcal{A}\setminus(\mathcal{B}\cup\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\setminus\mathcal{B})\cap(\mathcal{A}\setminus\mathcal{C})$$
$$\mathcal{A}\setminus(\mathcal{B}\cap\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\setminus\mathcal{B})\cup(\mathcal{A}\setminus\mathcal{C})$$
$$\mathcal{A}\cap(\mathcal{B}\cup\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{C})$$

Problem te uganke tiči v dejstvu, da iz definicij

$$\mathcal{A} = \{x\,x\,x\,x\}$$
$$\mathcal{B} = \{x\,x\}$$

ne moremo sklepati, o katerih dveh množicah je tu govor. Ne vemo torej, katero množico označuje izraz »{x x x x}«. Če bi to vedeli, bi seveda znali tudi računati. Tako pa je možna katerakoli izmed naslednjih situacij:



Če bi naročili učencu, naj zapiše ustrezne račune za unijo, bi verjetno napisal tole:

$$\{x\,x\,x\,x\}\cup\{x\,x\} = \{x\,x\,x\,x\,x\,x\}$$
$$\{x\,x\,x\,x\}\cup\{x\,x\} = \{x\,x\,x\,x\,x\}$$
$$\{x\,x\,x\,x\}\cup\{x\,x\} = \{x\,x\,x\,x\}$$

Toda računi na levi so popolnoma enaki, rezultati pa različni! Učitelje prosim, da preizkusijo z učenci še ustrezne račune z razliko in presekom.

Kaj bi se zgodilo, če bi v aritmetiki uporabljali takšen sistem oznak, da iz le-teh ne bi mogli prepoznati ustreznih števil? Takšnega sistema ne bi nihče sprejel.

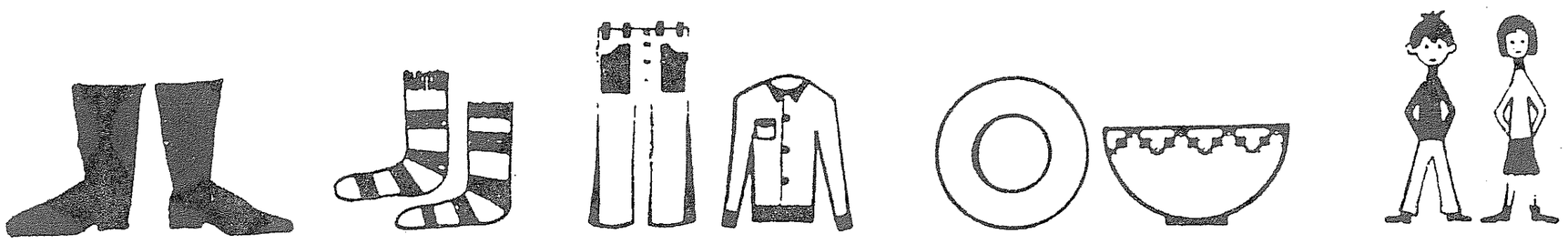
4. Imejmo tri kupčke, v vsakem kupčku tri pravokotne ploščice, na katerih je napisano Kranj, Ljubljana, Kamnik. Postavimo zaporedno vse tri ploščice prvega kupčka, dve iz drugega in eno iz tretjega (vse z imeni na spodnji strani), dodajmo oklepaje in druge znake, tako da dobimo

$$\{\square\,\square\,\square\}\setminus\{\square\,\square\} = \{\square\}$$

Ali je trditev resnična? Tudi te naloge ne moremo rešiti, a tokrat vsaj vemo, zakaj ne. Če obrnemo ploščice, lahko dobimo

$$\{\text{Ljubljana}\;\text{Kranj}\;\text{Kamnik}\}\setminus\{\text{Kamnik}\;\text{Kranj}\} = \{\text{Kamnik}\}$$

5. Še en pojem teorije množic je treba omeniti, to je pojem *urejeni par*. Oglejmo si sliko iz učbenika [2, str. 104] ter ‚napotke' [3, str. 110]:



V začetku naj učitelj pridobi z učenci oba pojma: urejeni par in navadni par, kolikor je mogoče preprosto in učencem razumljivo. Besedo par in njen pomen učenci gotovo že poznajo iz vsakdanjega življenja. Slike v učbeniku, ki ponazarjajo pare, lahko rabijo kot uvod v razgovor. Tako učenci spoznajo, da z besedo par označujemo dvojico reči (stvari, pojmov). Ob tem se učitelj dogovori z učenci, da bomo ločili med dvojico ali parom, pri katerem smemo elementa zamenjati, in dvojico ali parom, pri katerem tega ne smemo storiti. Primer: Pri dvojici ali paru stolov, na katerih sedijo učenci, smemo stola zamenjati, a se pri tem nič bistvenega ne spremeni. Drugače je pri paru čevljev: levega ne moremo zamenjati z desnim.

Tako se dogovorimo, da bomo taki dvojici ali paru, pri katerem elementov ne smemo zamenjati, rekli urejen par, in ga bomo pisali v okrogli oklepaj, medtem ko navadni par kaže množico z dvema elementoma, ki ju smemo zamenjati in ju tudi pišemo v zavitem oklepaju, kot to delamo pri množicah.

Iz ‚napotkov' bi sklepali

(1) Dvojica stolov je ‚navadni par'?
(2) Par čevljev je ‚urejeni par'?

Vzemimo par čevljev. Označimo z a levi, z b pa desni čevelj. Potem velja

$$(a, b) \neq (b, a).$$

Katera trditev velja:

(3) Naš par čevljev je (a, b).
(4) Naš par čevljev je (b, a).

Ni razloga, da bi ena od teh trditeh veljala, druga pa ne.

Isto vprašanje bi lahko postavili, če bi vzeli dva stola in bi ju označili z a in b. Kdaj imamo opravka z urejenim in kdaj z navadnim parom, naj bi odločal kriterij ‚zamenljivosti'.

Kaj pa, če imamo opravka z urejenim parom (a, a)?

Obe naslednji trditvi sta napačni:

(5) Naš par čevljev je urejeni par.
(6) Naš par čevljev je navadni par.

Druga je napačna zato, ker je navadni par množica in zato ne more biti pred nami. Iz podobnih razlogov pa tudi urejeni par ne more biti pred nami, saj ne moremo navesti nobenega razloga, da bi bil urejeni par (a, b) pred nami, (b, a) pa ne, oba pa ne moreta biti.

Pa še tole. Obujmo naš par čevljev, nato pa čevlja ‚zamenjajmo'. Kaj se je zgodilo z urejenim parom (a, b)? Odgovor je seveda: »Nič.«

6. Nova matematika naj bi razvijala logično mišljenje! Čez nekaj let ne bo več redkost takle pogovor:

Mamica: Prosim takšenle par čevljev za otroka, številka 35.
Prodajalec: Navadni ali urejeni par?
Janezek: Čevljev para vendar ne moremo zamenjati, par čevljev torej ne more biti navadni par. Tako nas učijo v šoli.
Prodajalec: Teorija se včasih razlikuje od prakse.
Mamica: V čem je razlika med navadnim in urejenim parom?
Prodajalec: Navadni par je brez vezalk.
Mamica: Potem pa mi dajte urejeni par.
Prodajalec: Želite urejeni par (levi, desni) ali urejeni par (desni, levi)?
Mamica: V čem pa je razlika?
Prodajalec: Samo v ceni, prvi je nekoliko dražji od drugega.
Mamica: Potem pa mi dajte drugega.
Prodajalec: Žal so ti že vsi prodani.
Mamica: Potem pa mi dajte urejeni par (levi, desni) pa še rezervne vezalke.
Prodajalec: Navadni ali urejeni par?
Janezek: Vezalke so vendar navadni par, saj lahko eno zamenjamo z drugo in se pri tem nič bistvenega ne spremeni.
Prodajalec: Teorija se včasih razlikuje od prakse.
Mamica (potem ko sta plačala in odšla):
Koliko elementov ima množica v cekarju?
Janezek: Štiri, to sta dva čevlja in dve vezalki.
Mamica: Ne, Janezek, dva — urejeni par čevljev in navadni par vezalk.

Zaključek

Mislim, da oba moja članka kažeta na to, da pojmi teorije množic v učbenikih niso pravilno vpeljani. Vprašanje, ali je te pojme sploh mogoče pravilno in preprosto pojasniti učencu v nižjih razredih osnovne šole, pa ostaja še naprej nerešeno. Prav tako članka ne dajeta nobenih napotkov, kako bi te pomanjkljivosti učbenikov odpravili. Nasprotno, marsikateri učitelj bo po branju teh člankov še bolj negotov, ko se bo srečal z ‚množicami'. Tudi meni namreč ni popolnoma jasno, kaj vse sodi v pojem, ki ga avtorji označujejo z besedo »množica«.

Članka govorita v glavnem o množicah, vendar pa to niso edine pripombe, ki jih imam o omenjenih učbenikih.

Seveda pa so najvažnejši problemi tisti, ki se pokažejo v praksi. Morda bi lahko v Obzorniku vsaj za nekaj časa odprli rubriko, v kateri bi učitelji postavljali vprašanja v zvezi s poukom matematike. Odgovore bi pa napisali naši vodilni strokovnjaki.

LITERATURA

[1] I. Hafner, *Množice v prvem razredu osemletke,* Obzornik mat. fiz., **26** (1979) 42—46.

[2] A. Tomič, S. Uršič, J. Vogrinc, *Matematika za 2. razred osnovne šole,* Ljubljana, Zavod za šolstvo SR Slovenije 1978.

[3] A. Tomič, S. Uršič, J. Vogrinc, *Matematika za 2. razred osnovne šole,* Priročnik za učitelje, Ljubljana, Zavod za šolstvo SR Slovenije 1978.

[4] S. Uršič, J. Vogrinc, *Matematika za 3. razred osnovne šole,* Ljubljana, Zavod za šolstvo SR Sovenije 1979.

Obzornik mat. fiz. 27 (1980) 2

FIZIKA LEDU*

PETER GOSAR

UDK 539.3:537.311

Podan je pregled novejših dognanj v fiziki ledu. Obravnavane so dielektrične lastnosti, notranje trenje, plastičnost, gibljivost dislokacij in električna prevodnost ledu.

PHYSICS OF ICE

New developments in the physics of ice are reviewed. The article discusses dielectric properties, internal friction, plasticity, mobility of dislocations, and electric conductivity of ice.

Uvod

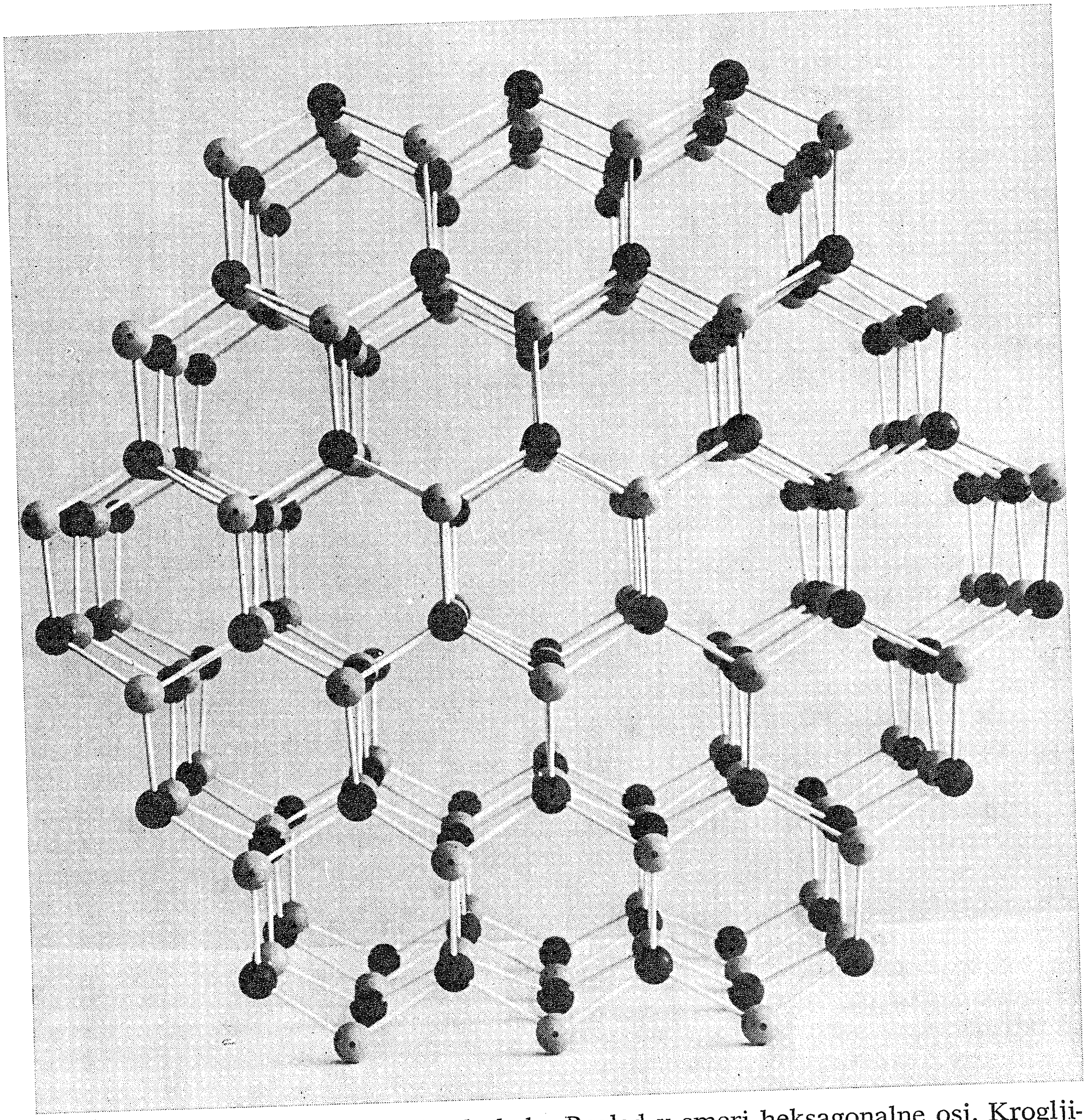
Zadnji dve desetletji sta prinesli mnogo novih spoznanj o ledu, še posebej o njegovih električnih in mehaničnih lastnostih. Do zares dobrega razumevanja pojavov v ledu smo pa še vedno zelo daleč. Led kot posebna oblika vode je za človeka pomembna snov. Spoznanja v fiziki ledu niso zanimiva le za fiziko, ampak najdejo odziv tudi v kemiji, molekulski biologiji, kriobiologiji, geofiziki, atmosferskih znanostih, hidrologiji, astronomiji in drugje. Led so raziskovali mnogi znani fiziki in kemiki, med njimi tudi nobelovci Pauling, Perutz, Eigen in Onsager.

Led uvrščamo med molekulske kristale. Pri prehodu iz plinske ali tekoče faze v trdno se oblika in struktura vodnih molekul praktično ne spremeni. Običajen led kristalizira heksagonalno (sl. 1). V ledu je vsaka molekula vode obdana tetraedrsko s štirimi sosednjimi molekulami (sl. 2). Vidimo, da led ni kompaktno grajen. Med molekulami vode je še precej praznega prostora. To razloži, zakaj je gostota ledu majhna. Voda je ena izmed redkih snovi, ki imajo manjšo gostoto v trdni kot v tekoči fazi. Strukturo osamljene vodne molekule kaže sl. 3. Za vodno molekulo je značilna njena nelinearnost. Veznici obeh protonov s kisikovim atomskim jedrom oklepata kot 104,5°. Oddaljenost protonov od kisika pa je 0,096 nm. Iz slike razberemo porazdelitev elektronske gostote v molekuli. Iz nje sklepamo, da je celoten električni naboj v okolici protonov pozitiven, v okolici kisika pa negativen. Vodna molekula zato predstavlja permanentni električni dipol. To se najbolj očitno odraža v dielektričnih lastnostih vodne pare, vode in ledu. Dipolni moment vodne molekule v pari je $6{,}1.10^{-30}$ Asm in ima smer, določeno s presečiščem ravnine molekule in nanjo pravokotne simetrijske ravnine, ki razdeli molekulo na dva zrcalno simetrična dela.

V kristalu se kot 104,5°, značilen za vodno molekulo, najbrž poveča na 109,5°, ki ustreza idealni tetraedrski koordinaciji. Protoni v ledu leže na zveznicah med kisikovimi atomi sosednjih molekul. Oddaljenost protona od ustreznega kisikovega jedra se malo poveča, morda na približno 0,101 nm. To malenkostno povečanje je posledica privlaka, ki ga povzroča negativni naboj

---

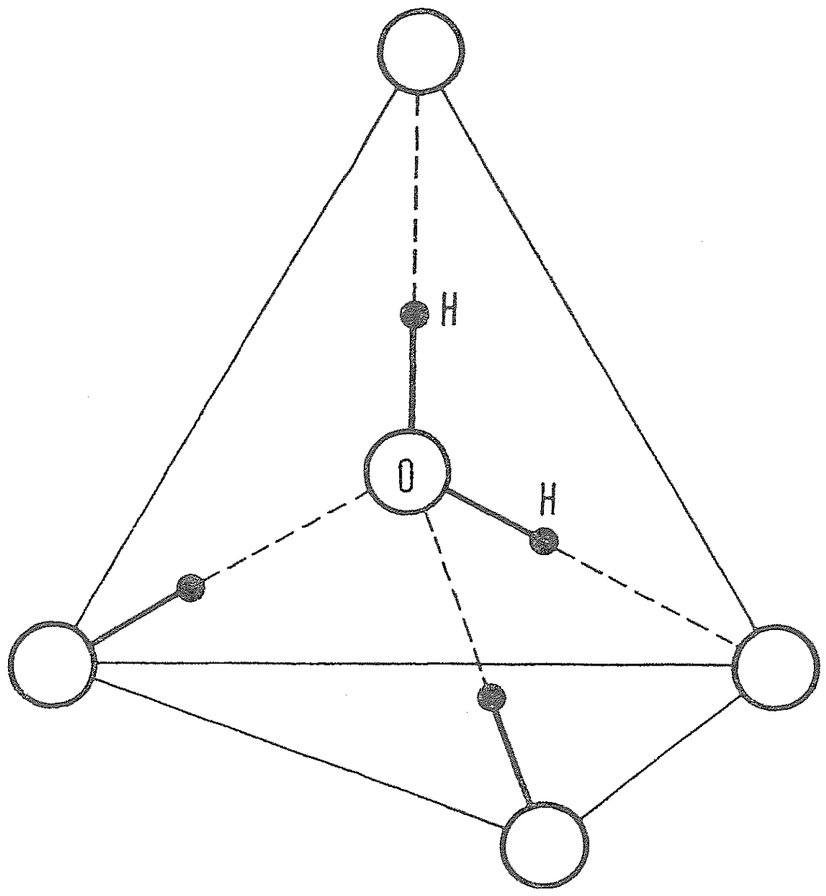
* Povzeto po predavanju 9. januarja 1979 na SAZU v Ljubljani.



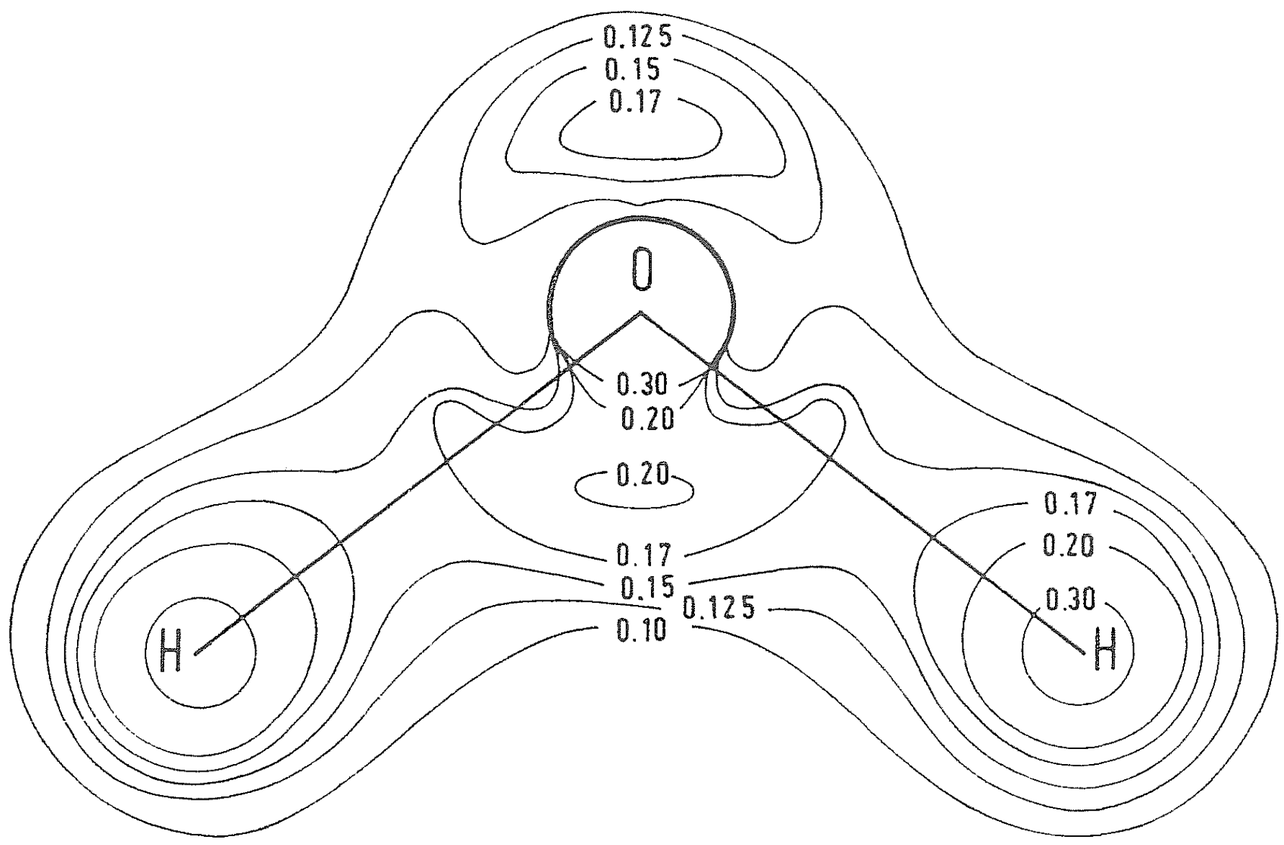
Sl. 1. Model heksagonalnega kristala ledu. Pogled v smeri heksagonalne osi. Krogljice predstavljajo kisikove atome. Lega protonov v vodikovih vezeh ni označena. Slika na naslovni strani daje pogled pravokotno na heksagonalno os. (Foto M. Smerke)

para prostih elektronov na kisiku sosednje molekule. Interakcija vodika z elektroni sosednjega kisikovega atoma vodi do tvorbe vodikove vezi O — H . . . O, ki je dolga 0,276 nm. Pri ledu je vodikova vez srednje močna. Energija, ki je potrebna za raztrganje take vedi, je samo 0,29 eV. To je zelo malo v primerjavi z energijo 5,11 eV, ki jo moramo dovesti, če hočemo odtrgati en proton iz vodne molekule.

Bernal in Fowler [1] sta leta 1933 predlagala naslednjo hipotezo o zgradbi heksagonalnega ledu s tetraedrsko koordinacijo: 1. vodne molekule so vgrajene v kristal kot celota, 2. orientacija molekul je taka, da protoni kažejo v smeri veznic med sosednjimi kisikovimi atomi, 3. v vsaki veznici je en



Sl. 2. Tetraedrska okolica vodne molekule v ledu. Krogi predstavljajo kisikove atome, pike pa protone



Sl. 3. Črte enake elektronske gostote pri molekuli vode

sam proton. Bernal-Fowlerjeva pravila pa ne določajo enolično orientacije vodnih molekul. Iz sl. 2 ugotovimo, da lahko molekula vode zavzame v splošnem šest orientacij. Vendar, če orientacijo ene molekule izberemo, potem sosednja molekula nima več 6 možnosti za orientacijo, ampak le še 3. Po pravilu št. 3 vez med molekulama ne sme ostati prazna niti ne sme biti zasedena z dvema protonoma. Tako so možnosti za orientacijo sosednje molekule dosti bolj omejene. Kljub temu lahko hitro ugotovimo, da Bernal-Fowlerjeva pravila dopuščajo zelo mnogo različnih konfiguracij. Po približni oceni Paulinga [2] iz leta 1935 je takih konfiguracij okoli $(3/2)^n$, kjer je n število vodnih molekul v kristalu. Do te ocene pridemo takole. Število protonov in s tem tudi vodikovih vezi v kristalu je $2n$. Če ne bi bilo nobene korelacije v legi protonov v sosednjih vezeh, bi dobili 2^{2n} različnih konfiguracij. Dopustne so pa le take strukture, ki vodijo do tvorbe vodnih molekul. Od možnih $2^4 = 16$ konfiguracij protonov v 4 tetraedrskih vezeh, ki vežejo posamezen kisikov atom s sosednjimi atomi, jih je le 6 pravilnih. Tako lahko ocenimo število konfiguracij, ki ustrezajo Bernal-Fowlerjevim pravilom, na $2^{2n}(6/16)^n = (3/2)^n$.

Zdi se, da je energijska razlika med različnimi konfiguracijami zelo majhna, to je manjša od kT vsaj pri temperaturah nad —100 °C. Različne konfiguracije so enako verjetne. Kristal ledu zato ni urejena snov in strogo vzeto ga sploh ne bi smeli imenovati kristal. Nered, ki ga povzročajo protoni, se kaže v lastnostih ledu na vrsto načinov. Celoten članek je pravzaprav posvečen le temu vprašanju. Nered najprej prispeva k entropiji ledu delež

$$S_0 = k\ln(3/2)^n = 3{,}38 \text{ J/molK} \qquad (1)$$

To potrjujejo meritve. Eksperimentalna vrednost entropije ledu pri absolutni ničli je 3,41 J/molK.

Eksperimentalne podatke o ledu, ki jih navajamo v tem članku, smo večinoma vzeli iz knjige Hobbs, *Ice Physics* [3]. V njej najdemo tudi skoraj popoln seznam literature o ledu do leta 1973.

Dielektrične lastnosti

Dobro potrdilo o neredu v ledu nam dajo dielektrične lastnosti ledu, predvsem frekvenčna in temperaturna odvisnost dielektrične konstante. Dielektrična konstanta $\varepsilon(\omega)$ sledi Debyevemu disperzijskemu zakonu

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\infty) + [\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)]/(1 + i\omega\tau) \qquad (2)$$

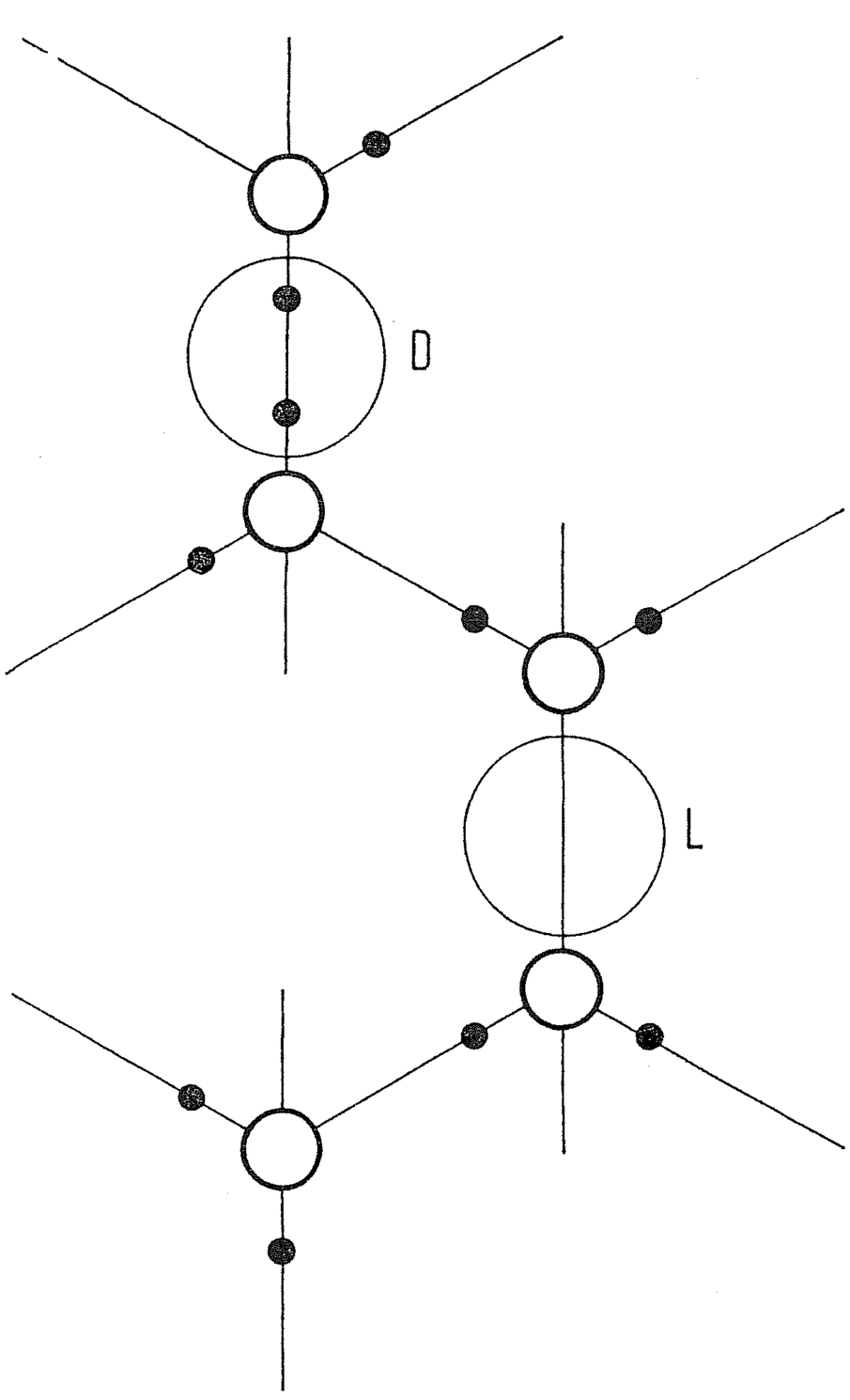
Prvi člen $\varepsilon(\infty)$ ima svoj izvor v elektronski polarizaciji vodnih molekul, drugi člen pa opisuje prispevek rotacije molekulskih električnih dipolov v zunanjem električnem polju. Pri ne prenizkih temperaturah led stalno prehaja iz ene konfiguracije v drugo. Temu ustreza vrtenje vodnih molekul. V električnem polju se molekule delno orientirajo. $\varepsilon(0)$ je izredno velik, 97,1 pri 0 °C, celo večji od $\varepsilon(0) = 88{,}2$ za vodo pri 0 °C. S padajočo temperaturo $\varepsilon(0)$ narašča in sledi v bistvu Curievemu zakonu $\varepsilon(0) \sim 1/T$. Z rastočo frekvenco $\varepsilon(\omega)$ pada od $\varepsilon(0)$ proti $\varepsilon(\infty) \approx 3{,}1$. Dokaj hiter prehod od velike k majhni dielektrični konstanti nastane v področju frekvenc $\omega \approx 1/\tau$. Za dielektrični relaksacijski čas τ velja

$$\tau = \tau_0 \exp(W/kT) \qquad (3)$$

z $\tau_0 = 5{,}3.10^{-16}$ s in $W = 0{,}57$ eV. Pri 0 °C je τ približno 2.10^{-5} s.

Dielektrična konstanta (2) ima realen in imaginaren del. Slednji je merilo za dielektrične izgube. Te dosežejo največjo vrednost pri $\omega\tau = 1$.

Dielektrični relaksacijski čas je merilo za čas, v katerem se posamezna vodna molekula zasuče iz ene orientacije v drugo. Tudi pri vodi opazujemo podoben potek dielektrične konstante, kot ga opisuje izraz (2). Vendar je tam τ dosti krajši, ima velikostno stopnjo 10^{-11} s pri 0 °C. Vodne molekule se v ledu očitno mnogo teže vrtijo kot v vodi. Razlog za to je naslednji. Če zavrtimo v ledu eno samo molekulo, dobimo konfiguracijo, ki ne ustreza več Bernal-Fowlerjevim pravilom. Ena tetraedrska vez je sedaj zasedena z dvema protonoma, druga pa je prazna. Take konfiguracije so energijsko zelo neugodne in se zdi, kot da je vrtenje praktično nemogoče. Rešitev iz te zagate je našel Bjerrum [4] leta 1951 z zamislijo o obstoju defektnih mest v kristalu. Vpeljal je defekte L in D. Defekt L predstavlja področje kristala s tako konfiguracijo vodnih molekul, da ostane ena tetraedrska vez prazna. V njej ni protona. Podobno ustreza defektu D taka konfiguracija, v kateri sta v eni vezi dva protona (sl. 4). Vodna molekula se lahko zavrti v kristalu le, če je poleg nje defekt D ali L. Pri zavrtitvi se defekt preseli iz prvotne vezi v sosednjo. Zato so defekti D in L gibljivi. Analize električnih lastnosti ledu kažejo na to, da defekti L difundira-



Sl. 4. Defekta D in L

jo v kristalu hitreje kot defekti D. V nadaljnjem bomo zato obravnavali le defekte L. Število Bjerrumovih defektov je prav majhno, približno en defekt na 10^6 molekul pri —10 °C. Z uporabo enostavnih zakonitosti statistične mehanike dobimo naslednji obrazec za število n_L defektov L

$$n_L = n_H \exp(-W_f/2kT) \tag{4}$$

Tu je n_H število vodikovih vezi v kristalu in $W_f = (0{,}68 \pm 0{,}04)$ eV energija, potrebna za nastanek para defektov L in D. Če vpeljemo p_L kot verjetnost, da se molekula vode ob defektu L zavrti v enoti časa, pokaže preprost premislek, da je

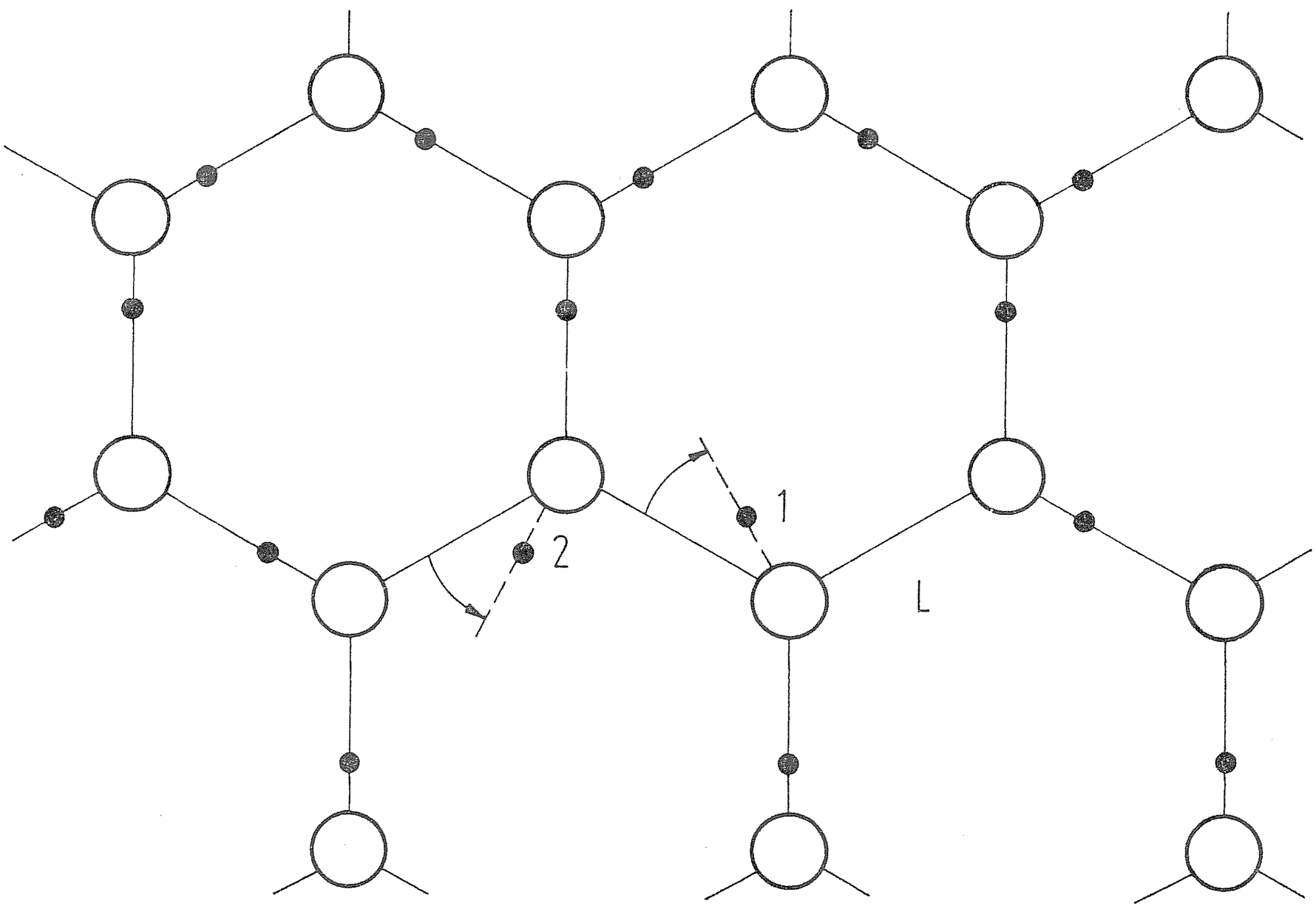
$$1/\tau = \tfrac{3}{4}(n_L/n_H)p_L \tag{5}$$

Iz (3), (4) in (5) dobimo

$$p_L = p_{L_0} \exp(-W_r/kT), \quad p_{L_0} = 2{,}5.10^{15}\ \mathrm{s}^{-1} \tag{6}$$

z $W_r = (0{,}235 \pm 0{,}01)$ eV. Pri —10 °C je $p_L \approx 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}$. W_r je aktivacijska energija za vrtenje molekule. Rotacijska aktivacijska energija je približno enaka energiji vodikove vezi, kar je razumljivo, saj se pri vrtenju ena vodikova vez pretrga in nastane nova.

Gornji, na videz dokaj dobri model dielektrične relaksacije ledu fizikalno le ni popolnoma zadovoljiv. Težko je namreč opravičiti izredno velik predeksponentni faktor p_{L0} v izrazu (6) za toplotno aktivirano vrtenje. Tako klasične kot tudi kvantne teorije toplotno aktiviranih preskokov vodijo do predeksponentnih faktorjev z velikostno stopnjo kT/h in manj. Pri —10 °C je $kT/h = 5{,}5.10^{12}\ \mathrm{s}^{-1}$, to je več velikostnih stopenj manj od izmerjene vrednosti za led. Moramo se vprašati, če ni morda kaj narobe prav v osnovni zamisli opisanega modela. Privzeli smo, da se posamezne molekule vrtijo popolnoma neodvisno. Kaj pa, če neodvisna vrtenja nadomestimo s skoraj



Sl. 5. Korelirano vrtenje molekul vode

istočasnim koreliranim vrtenjem več vodnih molekul? Oglejmo si tako možnost na sl. 5, ki kaže kristalno ravnino ledu, pravokotno na heksagonalno os. Na sliki vidimo en defekt L. Protoni so narisani v ravnovesnih legah, razen dveh z oznakama 1 in 2. Do gibanja defekta L pride na primer po toplotni ekscitaciji protona 1, ki nato preskoči v smeri puščice proti nezasedeni vezi defekta L. Mogoče pa je tudi, da je toplotno ekscitiran proton 2. Pri gibanju protona 2 v smeri puščice lahko proton prenese ekscitacijsko energijo na proton 1 in ga porine v smeri proti prazni vezi. Prenos ekscitacijske energije je mogoč zaradi močnih odbojnih sil med protonoma. Končni rezultat take enkratne toplotne ekscitacije je zavrtitev dveh molekul in preselitev defekta L na vez, ki jo je prvotno zasedal proton 2. Razširitev ideje o koreliranem vrtenju na primer večjega števila molekul je lahka in ni potrebno, da bi take primere podrobneje obravnavali. Osnovni fizikalni proces pri opisanem modelu predstavljajo večkratni zaporedni trki med protoni. Pravzaprav je bolj primerno govoriti o elastičnih rotacijskih trkih med vodnimi molekulami. Tu dosežemo z enkratno ekscitacijo zavrtitev več molekul. Zavrtijo se tudi molekule, ki niso tik ob defektu L. Podrobnejše teorijske analize [5] kažejo, da je model fizikalno utemeljen. Ker pri koreliranem vrtenju čuti prisotnost defekta L več vodnih molekul, dobimo pravilen izraz za $1/\tau$, če desno stran enačbe (5) pomnožimo s korelacijskim faktorjem z^2, kjer je z povprečno število molekul, ki se zavrtijo skupaj. S tem se predeksponentni faktor v (6) zmanjša. Z $z = 20$ že dobimo čisto smiselne vrednosti za predeksponentni faktor.

Elastični trki, enkratni in večkratni, so bili večkrat opazovani v kristalih, predvsem pri raziskovanju radiacijskih poškodb.

Notranje trenje

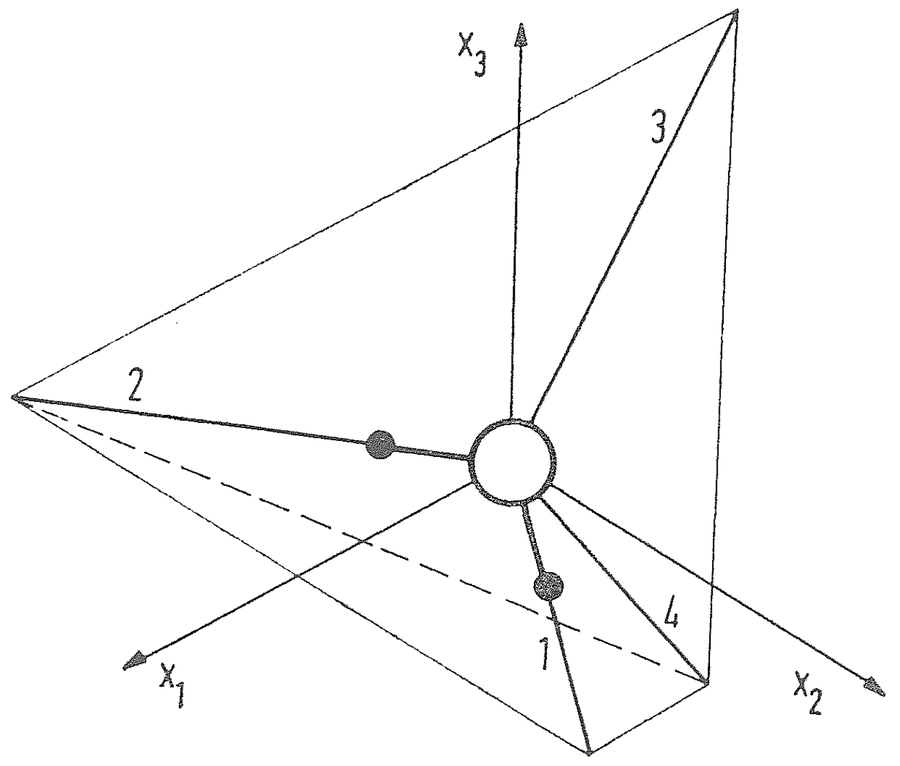
Orientacijski nered vodnih molekul se pokaže tudi pri elastičnih lastnostih kristalov. V heksagonalnih kristalih se linearna Hookova odvisnost napetosti od deformacij izraža s petimi elastičnimi konstantami. Elastične lastnosti molekulskih kristalov moremo zadovoljivo opisati s silami kratkega dosega. Tako je na primer Kahane [6] uporabljal pri ledu model valenčnih sil. Pri tem modelu si predočimo vez O — H . . . O med sosednjimi kisiki kot vzmet in ustrezna deformacijska energija vezi je $\frac{1}{2}K(\Delta r)^2$, kjer je K konstanta vzmeti in Δr sprememba dolžine vezi zaradi deformacije kristala. Poleg elastične energije zaradi sprememb dolžin vezi je Kahane upošteval tudi energijo $\frac{1}{2}G(\Delta\alpha_{ij})^2$ zaradi sprememb $\Delta\alpha_{ij}$ kotov med tetraedrskimi vezmi i, j zaradi deformacije kristala. Tu je G konstanta vzmeti, ki povezuje sosednji vezi i, j. Vseh pet elastičnih konstant se da zelo zadovoljivo izraziti s K in G. Model omogoča tudi izpeljavo disperzijskih relacij za akustična in optična nihanja ledu pri visokih frekvencah. Pomanjkljivost Kahanovega modela je v tem, da ne upošteva orientacije posameznih molekul pri računu interakcij med njimi.

Pri nadaljnjem izpopolnjevanju modela moramo vpeljati tudi interakcijske člene, ki upoštevajo orientacijo molekul. Vodna molekula se v kristalu ledu ne prilega popolnoma okolici, za katero je značilna tetraedrska razporeditev sosednjih molekul. Zaradi nastanka vodikovih vezi poskušajo sosednje molekule raztegniti molekulo v središču tetraedra tako, da bi se kot med

veznicama protonov s kisikovim atomskim jedrom povečal od 104,5° na 109,5°. Sklepamo, da se da deformacijska energija, ki izvira od oblike vodne molekule, zapisati v prvem približku kot [7]

$$U = \sum_{i<j} g_{ij} \Delta\alpha_{ij} \tag{7}$$

Tu je — podobno kot zgoraj — $\Delta\alpha_{ij}$ razlika med kotom, ki ga oklepata sosednji vezi a, j, in tetraedrskim kotom. Nadalje so g_{ij} ustrezne fenomenološke konstante. Molekula je povezana s sosednjimi molekulami s 4 vezmi in zato ima vsota (7) 6 členov. Sl. 6 kaže naravni koordinatni sistem za vodno molekulo. Iz simetrijskih razlogov sklepamo, da je $g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24}$. Od šestih g_{ij} so le trije med seboj različni. Zato je primerno vpeljati oznake



Sl. 6. Naravni koordinatni sistem (x_1, x_2, x_3) molekule vode

$$g_{12} = g^{++}, \quad g_{34} = g^{--}, \quad g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24} = g^{+-} \tag{8}$$

Pri zapisu (8) smo stvari malo poenostavili. Simetrija okolice vodne molekule v kristalu ni enaka ali višja od simetrije izolirane vodne molekule. Zato (8) velja le približno.

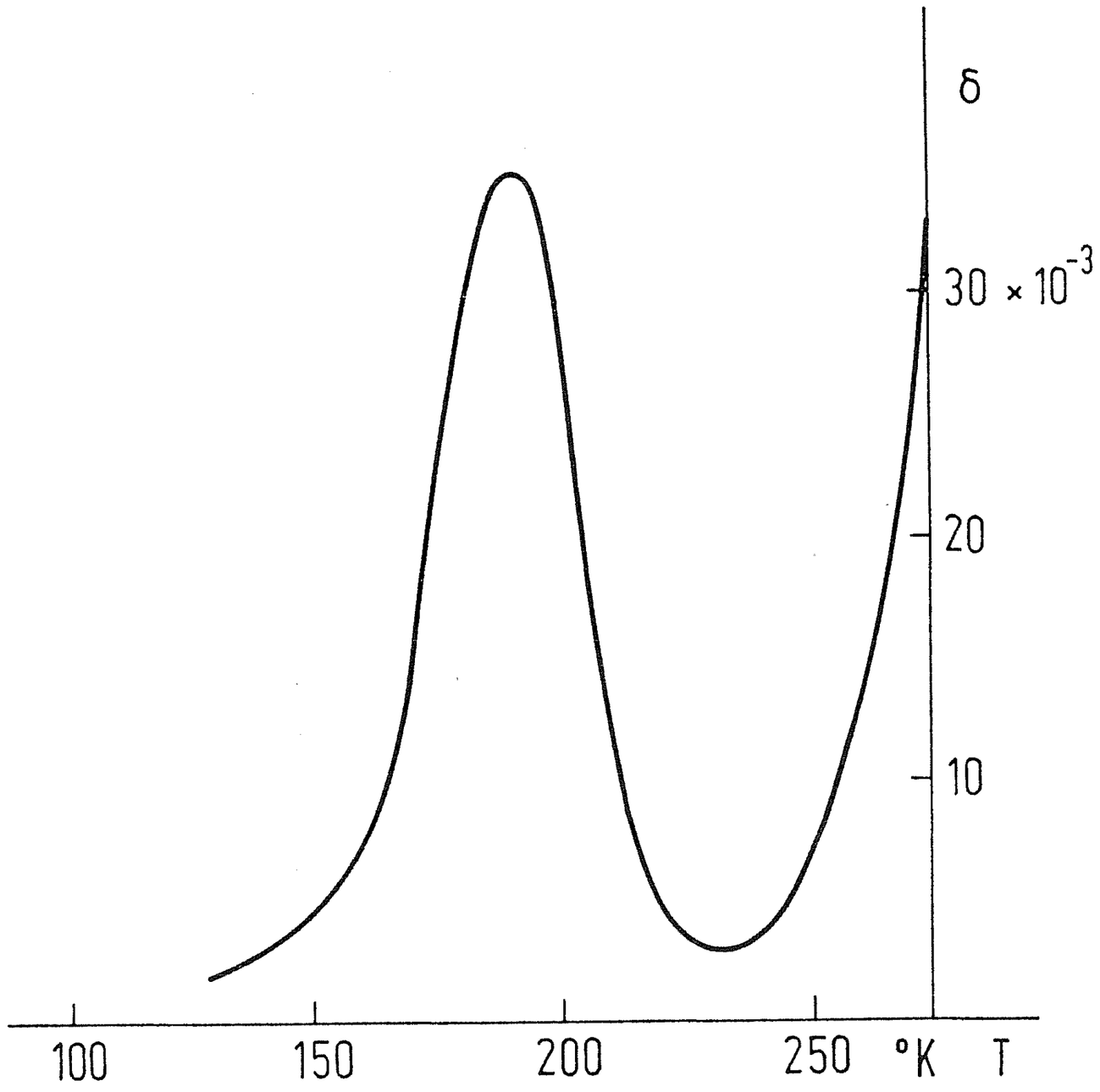
V deformiranem kristalu so spremembe kotov $\Delta\alpha_{ij}$ linearne funkcije komponent tenzorja deformacij oziroma napetosti. Energija (7) v splošnem ni ista za različno orientirane vodne molekule. Zaradi možnosti različnih konfiguracij se molekule vode delno orientirajo v deformacijskem polju, podobno kot smo to opazovali pri polarizaciji v električnem polju. Vodna molekula predstavlja elastični dipol, katerega energija se v koordinatnem sistemu (x_1, x_2, x_3) na sl. 6 zapiše kot

$$U = b_1\varepsilon_{11} + b_2\varepsilon_{22} + b_3\varepsilon_{33} \tag{9}$$

Tu so ε_{ii} diagonalni elementi deformacijskega tenzorja ε_{ij}, b_i pa glavne vrednosti tenzorja elastičnega dipola. b_i se dajo izraziti na dokaj preprost način s fenomenološkimi konstantami g^{++}, g^{--} in g^{+-}. Elastični dipol je tenzorska količina, električni dipol pa vektorska količina. Ta razlika postane razumljiva, če pomislimo, da sta deformacijsko in napetostno polje tenzorski polji, električno polje pa je vektorsko polje. Zato moramo vzeti analogijo med električnim in elastičnim dipolom zelo previdno. Predvsem se moramo zavedati, da je deformacijsko polje invarantno glede na operacijo inverzije $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Zato se energija (7) ne spremeni pri inverziji vodne molekule.

Delna orientacija vodnih molekul v izmeničnem deformacijskem polju je mogoča le pri dovolj nizkih frekvencah. Pri frekvencah $\omega \gg 1/\tau_m$, kjer je $\tau_m = \frac{2}{3}\tau$ [8], pa vodne molekule ne morejo več slediti polju. Ker molekule rabijo nekaj časa, da spremenijo orientacijo, nastane zakasnitev med napetostmi in deformacijami. Taka zakasnitev povzroča spreminjanje elastične energije v toploto, pojavu pravimo tudi notranje trenje. Logaritmični dekrement trenja Λ in kot izgub δ imata naslednjo frekvenčno odvisnost

$$\Lambda = \pi \tan\delta \approx \omega\tau_m/(1 + \omega^2\tau_m{}^2) \tag{10}$$



Sl. 7. Tipičen temperaturni potek notranjega trenja pri frekvenci 1 Hz

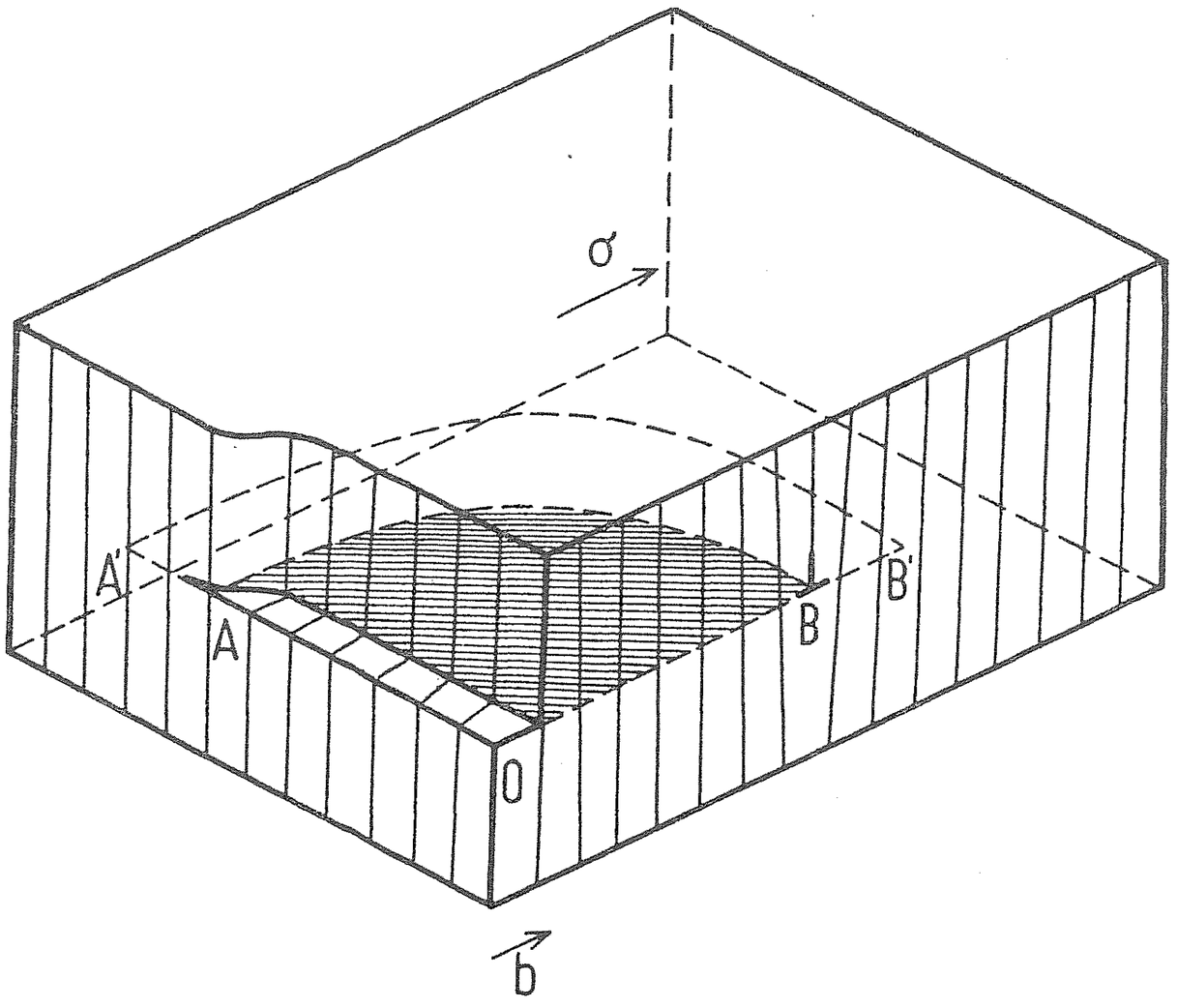
Funkcija (10) ima maksimum pri $\omega = 1/\tau_m$. Karakterističen čas τ_m za mehanično relaksacijo je močno odvisen od temperature, kot to sledi iz (3). Zato ima δ kot funkcija temperature (ω = konst.) izrazit vrh pri temperaturi, ki ustreza pogoju $\omega\tau_m = 1$ (sl. 7).

Notranjega trenja, ki je posledica vrtenja vodnih molekul, pa ne opazujemo pri poljubni vrsti deformacije ε_{ij}. Oglejmo si nekaj primerov. Koordinatni sistem izberemo tako, da kaže os z v smeri heksagonalne osi, os y pa leži v eni izmed zrcalnih ravnini kristala, ki gredo skozi heksagonalno os. Najprej vzemimo, da je le $\varepsilon_{zz} \neq 0$. Ker je izraz (9) invarianten glede na operacijo inverzije, imajo vse molekule z enim protonom v vezeh, ki so vzporedne s heksagonalno osjo, enako energijo. Podobno velja, da se tudi preostale molekule energijsko med seboj ne razlikujejo. Število molekul prve in druge vrste je zaradi Bernal-Fowlerjevih pravil neodvisno od konfiguracije vodnih molekul. Zato tu s spreminjanjem konfiguracij ne moremo spreminjati elastične energije kristala. Tako se v tem primeru molekule ne preorientirajo in zato notranjega trenja ni. Moramo poudariti, da je tako zaradi korelacij v orientaciji molekul, ki jih predpisujejo Bernal-Fowlerjeva pravila. Isto velja za deformacije tipa $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq 0$. Pri deformacijah, ki nimajo simetrije kristala, kot so na primer strižne deformacije $\varepsilon_{yz} \neq 0$, $\varepsilon_{xz} \neq 0$, $\varepsilon_{xy} \neq 0$ in $\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy} \neq 0$, pa nastane preorientacija molekul in s tem notranje trenje.

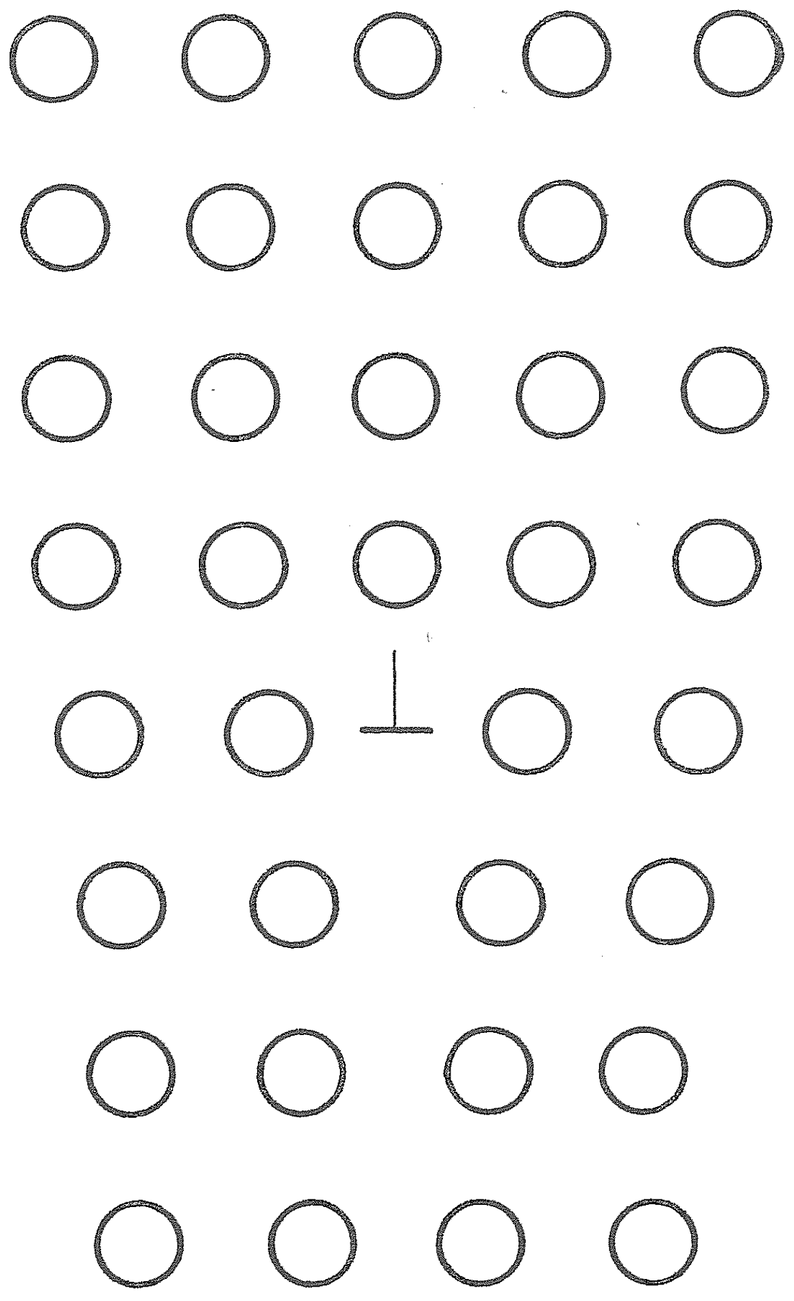
Tu opisano notranje trenje po navadi opazujemo pri torzijskih nihanjih nizkih frekvenc z velikostno stopnjo 1 Hz.

Plastičnost in gibanje dislokacij

Orientacijski nered vpliva tudi na plastičnost ledu. Plastičnost kristalov si razlagamo z gibanjem dislokacij. Stalna deformacija kristala nastane, ko začno zaradi mehanične obremenitve posamezni deli kristala drseti drug proti drugemu vzdolž drsnih ravnin. Drsne ravnine so vedno mrežne ravnine, pri ledu predvsem ravnine (0001), ki so pravokotne na heksagonalno os. Primer takega drsenja kaže sl. 8. Zaradi strižne obremenitve σ je tu nastalo drsenje vzdolž ravnine 0AB. Snov nad črtkanim delom te ravnine se je premaknila za Burgersov vektor **b** glede na spodnji del kristala. Črtkana črta AB, ki na drsni ravnini razmejuje področje drsenja od preostalega dela, kjer drsenja



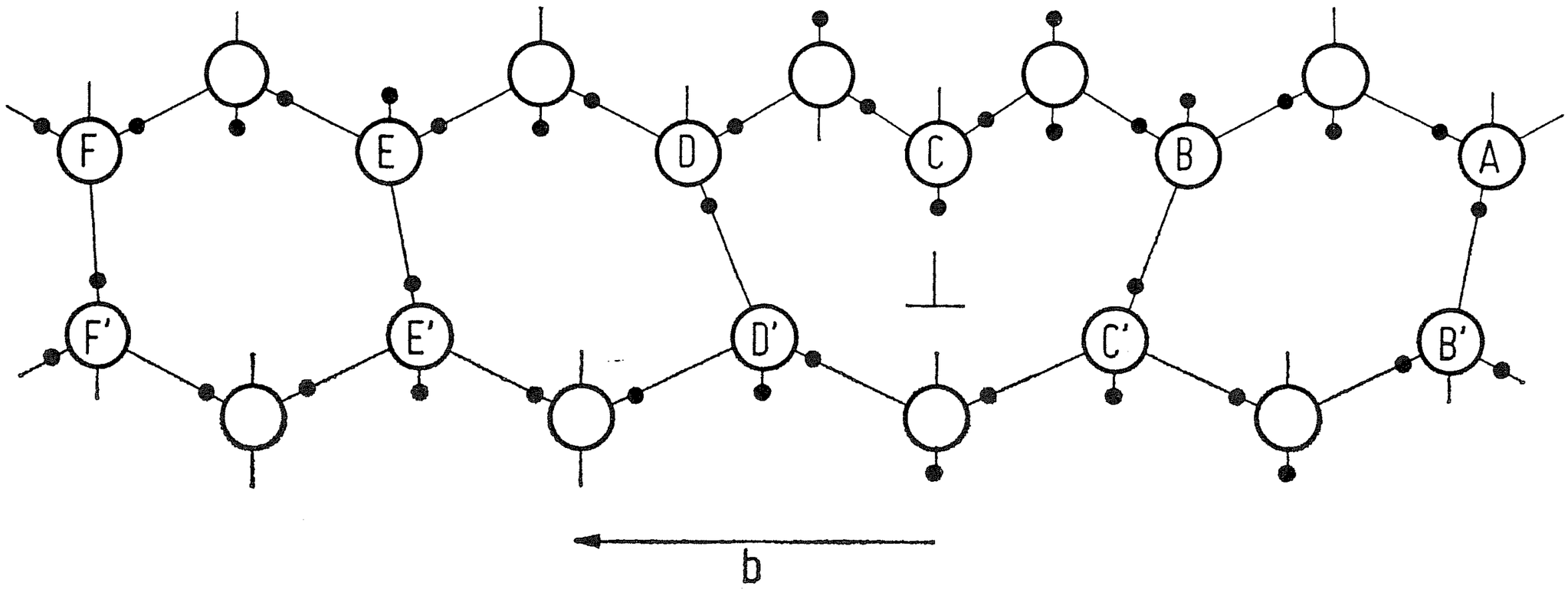
Sl. 8. Nastanek plastične deformacije zaradi gibanja dislokacije



Sl. 9. Klinasta dislokacija

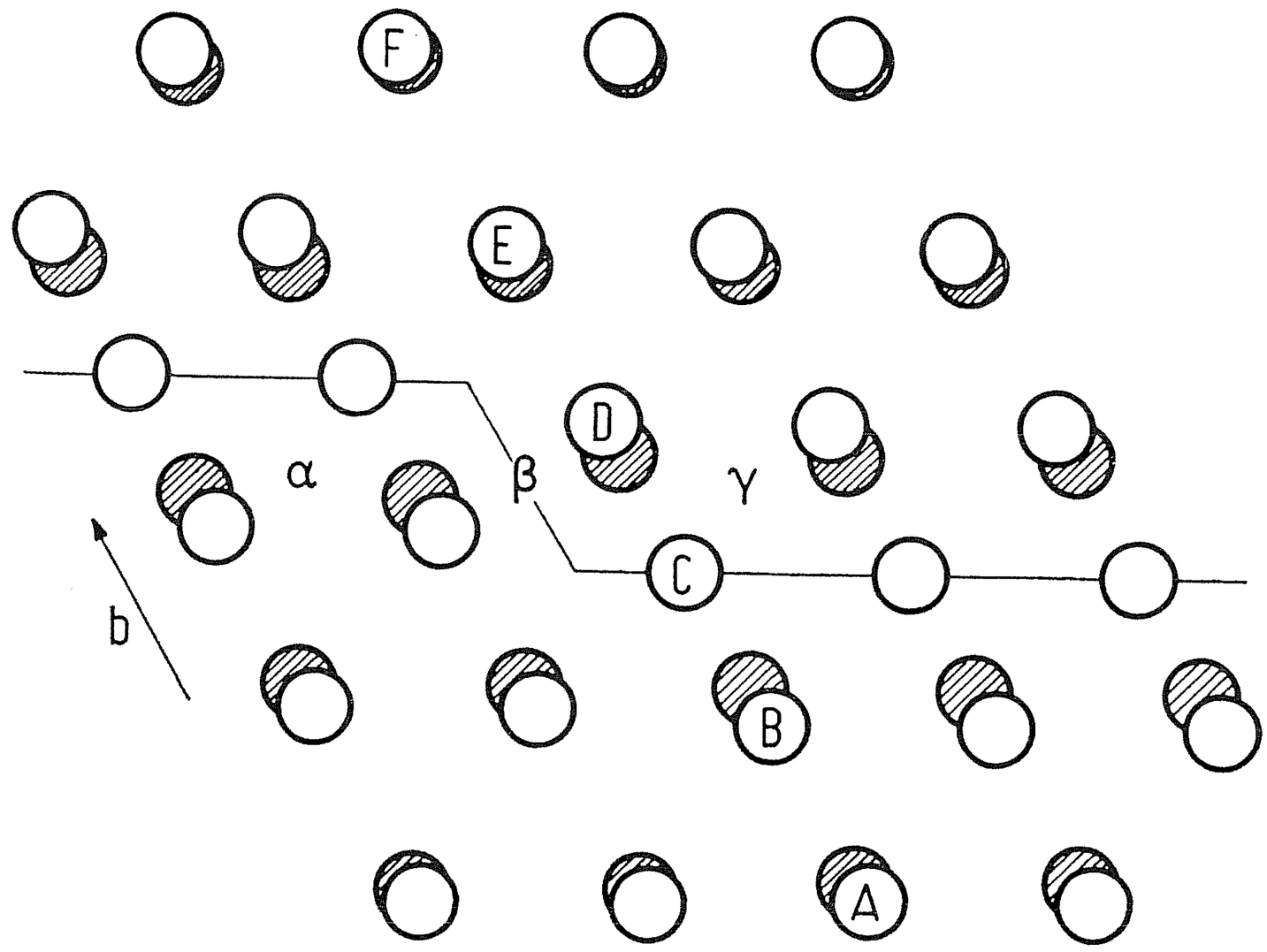
še ni, se imenuje dislokacijska črta. Drsenje poteka le v korakih, ki jih dopušča kristalna struktura. Zato je **b** eden izmed mrežnih vektorjev. Pri večini dislokacij ima Burgersov vektor velikostno stopnjo medmolekulske razdalje. Model atomske strukture dislokacije v okolici točke B kaže sl. 9. Dislokacija je pri B klinastega, pri A pa vijačnega tipa. Pri stalni obremenitvi kristala dislokacija potuje. Lega dislokacijske črte v poznejšem času je narisana na sl. 8 kot črta A′B′. S tem se veča stalna, to je plastična deformacija kristala. Hitrost deformacije $d\varepsilon/dt$, kjer ε označuje eno izmed komponent deformacijskega tenzorja, je sorazmerna gostoti dislokacij in hitrosti, s katero se gibljejo. Gostoto dislokacij določamo z ugotavljanjem števila dislokacijskih črt, ki gredo skozi presek 1 cm^2 kristala. Gostota dislokacij ima v dobrih naravnih in laboratorijskih kristalih ledu velikostno stopnjo $10^4\ cm^{-2}$ in tudi manj. V plastično deformiranih kristalih je število dislokacij lahko bistveno večje. K plastični deformaciji ledu prispevajo predvsem dislokacije z drsno ravnino (0001). Fakuda in Higashi sta v letih 1969—73 ugotovila, da so hitrosti teh dislokacij sorazmerne z obremenitvijo pri strižnih obremenitvah σ do 3 bar. Tako je bila izmerjena hitrost 3.10^{-5} cm/s pri —18 °C in $\sigma = 1$ bar [9]. Glej tudi pregledni članek Maïja in sodelavcev [10].

V jedru dislokacije so nekatere kemijske vezi med atomi pretrgane, kot je to razvidno iz modela klinaste dislokacije na sl. 9. Slika kaže presek dislokacije pravokotno na dislokacijsko črto. Ena izmed mrežnih ravnin tu ne sega skozi ves kristal, ampak se konča ob dislokacijski črti. Atomi na robu te ravnine niso tako močno kemijsko vezani na sosednje atome, kot so normalni atomi kristala. Molekulsko strukturo dislokacije v ledu kaže sl. 10. Dislokacijska črta prebode ravnino slike pri molekuli C. Burgersov vektor **b** je tu pravokoten na heksagonalno os. En proton molekule C ni vezan



Sl. 10. Molekulska struktura klinaste dislokacije v ledu

z vodikovo vezjo. Dislokacija se premakne tako, da se na primer pretrga vodikova vez D — D′ in nastane nova vez C — D′. Takoj opazimo, da je gibanje dislokacije mogoče le od C proti D, ne pa od C proti B. V vezi B — C′ je namreč proton pri molekuli C′. Če bi se vez B—C′ pretrgala in nastala nova vez C — C′, bi imeli v tej vezi dva protona. Taka konfiguracija pa ne ustreza Bernal-Fowlerjevim pravilom in ni dopustna. Dislokacija je gibljiva v drsni ravnini le toliko časa, dokler ne naleti na molekule kot C′, E′, ki njeno gibanje zaustavijo. Zaustavitev gibanja ne traja dolgo. Že pri študiju dielektričnih lastnosti in notranjega trenja smo videli, da se poljubna molekula v kristalu zavrti v času okoli τ. Dislokacija, ki je obtičala ob molekuli C′, mora počakati v povprečju čas z velikostno stopnjo τ, da se ena izmed molekul C ali C′ primerno zavrti in omogoči nadaljnje gibanje dislokacije. Iz povedanega že lahko sklepamo, da je nered v orientacijah vodnih molekul precejšnja ovira za gibanje dislokacij. V resnici se dislokacija nikoli ne giblje hkrati kot celota, ker bi se moralo zelo veliko vezi med molekulami pretrgati



Sl. 11. Dislokacija s kolenom

istočasno. To pa ni verjetno. Predstavljamo si, da dislokacijska črta ni gladka, ampak je stopničasta. Pogled na dislokacijo z eno stopnico, bolje kolenom, kaže sl. 11. Ravnina slike je drsna ravnina. Na njej je označena smer in velikost Burgersovega vektorja. Krogi predstavljajo kisikove atome. Nesenčeni atomi so nad drsno ravnino, senčeni pa pod njo. Koleno je na mestu β. Dislokacija se giblje tako, da se premika koleno po dislokacijski črti, na primer od β k γ. Pri takem premiku se pretrga samo ena vodikova vez in nastane nova. Končen rezultat gibanja velikega števila kolen je polzenje dislokacije skozi kristal. Kolena stalno nastajajo na dislokacijski črti zaradi toplotnih fluktuacij. Zdi se, da je ravno gibljivost kolen tisto, kar omejuje hitrost dislokacij [11].

Sedaj bomo poskušali dobiti oceno za zgornjo mejo hitrosti dislokacij. V najugodnejšem primeru je orientacijski nered edina ovira za gibanje kolena. Tedaj porabi koleno za preskok od β k γ čas z velikostno stopnjo τ. Število kolen na dislokacijski črti z dolžino l je seveda manjše kot l/a, kjer je a razdalja med bližnjimi molekulami. Da bi dobili zgornjo mejo za hitrost dislokacije, si oglejmo ekstremni primer, ko bi bilo število kolen enako l/a. Če bi se vsa kolena gibala v isto smer, bi se celotna dislokacija premaknila v času τ za razdaljo okoli a pravokotno na dislokacijsko črto. Hitrost dislokacije v bi imela torej velikostno stopnjo

$$v = a/\tau \tag{11}$$

Pri —18 °C je $\tau = (1{,}18 \pm 0{,}06).10^{-4}$ s. Z upoštevanjem $a = 0{,}276$ nm dobimo $v = 2{,}3.10^{-4}$ cm/s. Izraz (11) ne upošteva pomembnega dejstva, da je gibanje kolen difuzijsko gibanje. Gibljejo se tako v eno kot v drugo smer vzdolž dislokacijske črte. Pri strižno neobremenjenem kristalu sta verjetnosti za gibanje v eno ali drugo smer enaki in dislokacija ostane v časovnem povprečju pri miru. Razmere so drugačne pri obremenjenem kristalu. Naj bo σ strižna napetost, ki potiska del kristala nad drsno ravnino na sl. 11 v smeri **b**. Ko koleno preskoči z mesta β na mesto γ, opravi strižna sila delo w z velikostno stopnjo $\sigma a^2 b$ zaradi dodatne plastične deformacije. Pri preskoku $\beta \rightarrow \alpha$ pa je to delo $-\sigma a^2 b$, torej negativno. Pri obremenjenem kristalu je sedaj razmerje med verjetnostjo, da koleno preskoči od β k γ, in verjetnostjo za preskok od β k α podano z razmerjem ustreznih Boltzmannovih faktorjev $\exp(w/kT) : \exp(-w/kT)$, kot to sledi iz splošne teorije difuzijskih procesov. Presežek verjetnosti za gibanje kolena v smeri γ nad verjetnostjo za gibanje v smeri α je podan s faktorjem $\exp(w/kT) - \exp(-w/kT)$. Pri tipičnih napetostih okoli 1 bar je $w \ll kT$. Pri računanju hitrosti dislokacije moramo upoštevati, da le kolena, ki se gibljejo v pravilno smer, povzročajo napredovanje dislokacije, preostala pa nazadovanje. Zato dobimo pravilno oceno za maksimalno hitrost dislokacije, če izraz (11) pomnožimo s faktorjem $2w/kT$, ki ocenjuje višek kolen s pravo smerjo gibanja. Tako dobimo končno oceno za zgornjo mejo hitrosti

$$\mathrm{v} = (2w/kT)a/\tau \tag{12}$$

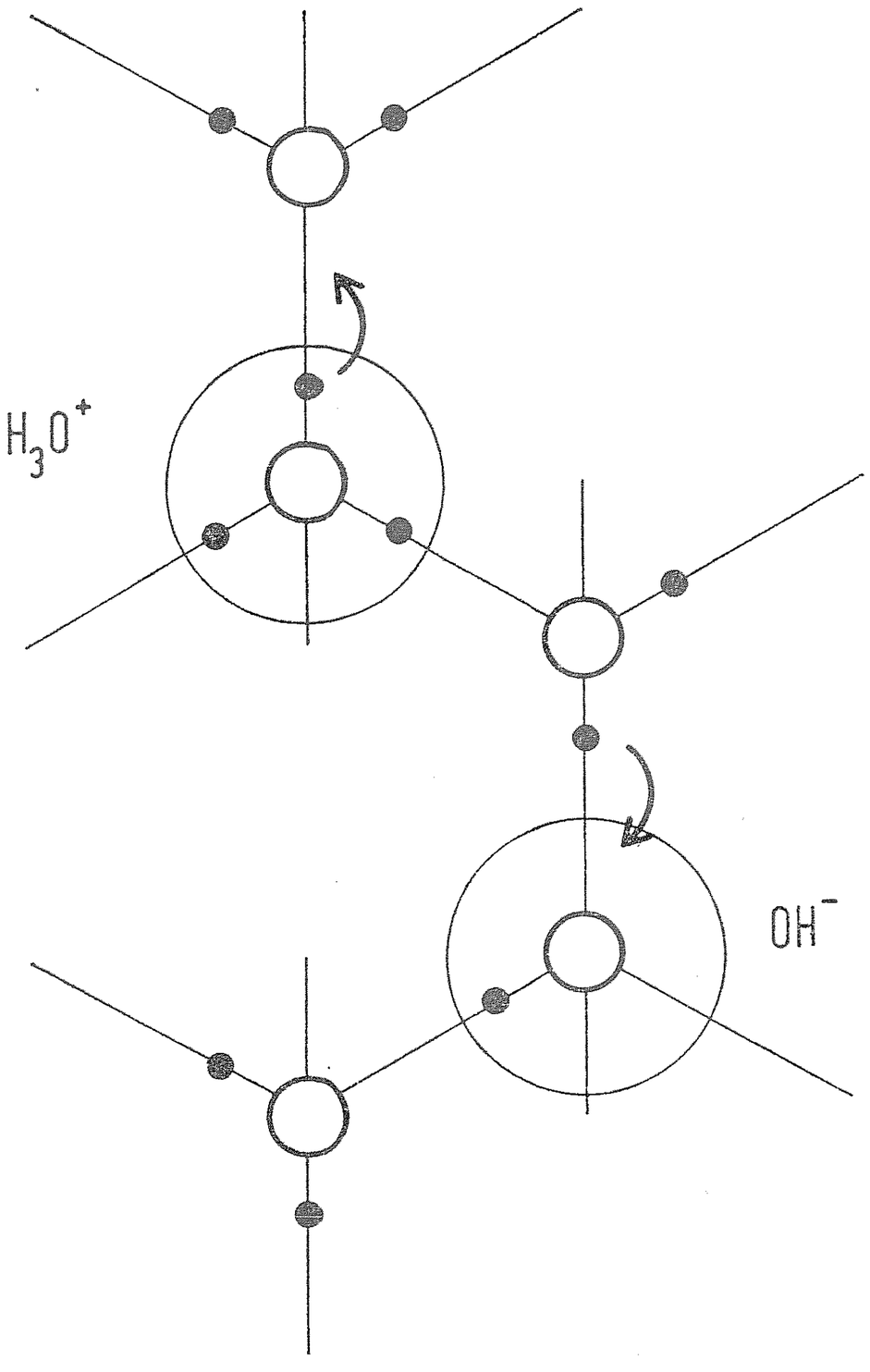
Pri temperaturi —18 °C in $\sigma = 1$ bar dobimo iz (12) kot novo oceno za maksimalno hitrost dislokacije $\mathrm{v} = 2{,}6.10^{-7}$ cm/s. Tu smo privzeli $b = a$. Izmerjena hitrost je za dve velikostni stopnji večja. Zakaj je tako, danes še ne znamo zadovoljivo razložiti. Zdi se, kot da se molekule vode v bližini dislo-

kacijske črte vrtijo mnogo hitreje kot v notranjosti idealnega kristala. Morda so dislokacije pozitivno nabite in privlačijo defekte L in s tem omogočajo hitrejše vrtenje molekul. Nekatere meritve potrjujejo navzočnost pozitivnih nabojev na dislokaciji. Že pri razpravljanju o dielektričnih lastnostih ledu smo ugotovili, da se molekule vrtijo hitreje kot to dopušča enostaven model. Tu ponovno ugotavljamo obstoj zelo hitrih vrtenj. Naše predstave o procesih v ledu bo vsekakor treba še temeljito izpopolniti. Led je zanimiv ravno zato, ker zanj ne veljajo enostavni klasični modeli. Lahko pričakujemo, da bomo prišli do bistvenih novih spoznanj o mehanizmih gibanja vodnih molekul. Taka spoznanja pa bodo nujno presegala ozki okvir fizike ledu in bodo pomembna za razumevanje širšega spektra pojavov v kondenzirani snovi.

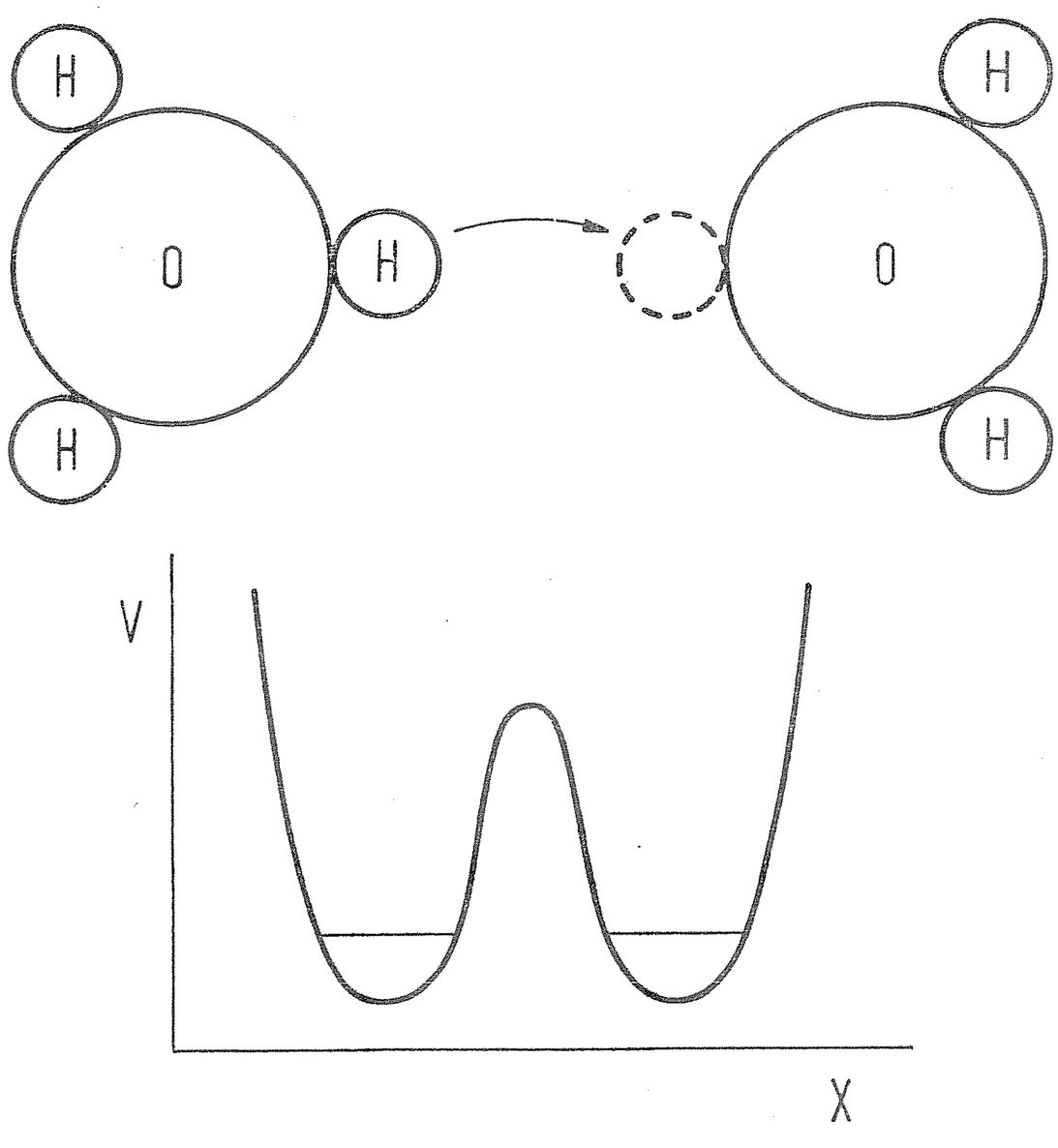
Električna prevodnost

Razprava o fiziki ledu bi bila zelo nepopolna, če ne bi omenili tudi ionskih defektov H_3O^+ in OH^-, ki obstajajo v kristalu ledu v razmeroma majhnih koncentracijah z velikostno stopnjo 1 ion na 10^{10} molekul vode pri —10 °C. Ionski defekti nastanejo z disociacijo vodnih molekul. Pri pozitivnih ionih, recimo jim kar vodikovi ioni, obdajajo kisik trije protoni, pri negativnih hidroksidnih ionih pa ga obdaja le en proton. Ob ionih so tudi tu prekršena Bernal-Fowlerjeva pravila. Pozitivni in negativni ioni se v kristalu lahko gibljejo tako, da protoni v vodikovih vezeh, ki povezujejo ione s sosednjimi molekulami, preskakujejo med dvema možnima položajema. Gibanje ionov ponazarja sl. 12. Led je ionski prevodnik električnega toka. Pri —10 °C je prevodnost ledu okoli $3.10^{-9}\ \Omega^{-1}cm^{-1}$. To je seveda izredno majhna prevodnost v primerjavi s prevodnostjo kovin. Prevodnost bakra pri 20 °C je $5{,}71.10^{5}\ \Omega^{-1}cm^{-1}$. Meritve kažejo, da je gibljivost μ^+ pozitivnih ionov dosti večja od gibljivosti μ^- negativnih ionov. Zato se bomo v nadaljnjem zanimali le za pozitivne ione. μ^+ ima velikostno stopnjo $10^{-3}\ cm^2\ V^{-1}s^{-1}$ pri —10 °C.

Mehanizem električne prevodnosti v ledu je zelo svojevrsten in zanimiv. V ledu vodikov ion ni prost delec, ki bi se gibal v električnem polju tako kot elektroni ali ioni v kovinah oziroma raztopinah. Kristalna struktura in protonska konfiguracija vodnih molekul določata dovoljene poti iona. Ko preskoči ion vzdolž izbrane vezi k sosednji molekuli vode, ne more nadaljevati poti vzdolž vseh treh preostalih tetraedrskih vezi te molekule. Če si ogledamo položaj protonov v teh vezeh, vidimo, da pri dveh leži proton ob molekuli, ki je sedaj postala pozitiven ion, pri eni pa ne. Le prvi dve vezi omogočata nadaljnje gibanje iona. Če zasledujemo gibanje iona, opazimo, da je po prehodu iona orientacija vodnih molekul vzdolž njegove poti drugačna, kot je bila prej. Kristal se vzdolž poti polarizira tako, da ne dopušča drugemu ionu gibanja po isti poti. Vzemimo kristal, ki je opremljen z dvema elektrodama, pozitivno in negativno. Vodikovi ioni potujejo od pozitivne k negativni elektrodi. Ion, ki je prepotoval neko pot, je s tem zaprl to pot vsakemu nadaljnjemu ionu. S časom bi bile vse možne poti od anode k katodi zaprte in tok med elektrodama bi moral prenehati. V resnici se to ne zgodi. Že pri študiju dielektričnih lastnosti smo videli, da Bjerrumovi defekti omogočajo dokaj hitro spreminjanje konfiguracij kristala. Ker je koncentracija orientacijskih defektov v ledu za precej velikostnih stopenj večja od koncentracije ionov, se polarizacija poti, ki jo je prepotoval kak ion, spremeni, še preden pride na



Sl. 12. Ionska defekta H_3O^+ in OH^-



Sl. 13. Potek potenciala $V(x)$ v vodikovi vezi ob ionu H_3O^+

isto pot drug ion. Zato je ionska prevodnost ledu omejena predvsem s hitrostjo gibanja protonov v vodikovih vezeh.

Gibanje protona v vodikovi vezi si razlagamo kot kvantnomehanični proces tuneliranja skozi potencialno bariero sredi vodikove vezi (sl. 13). Skladno s to predstavo je tudi dejstvo, da gibljivost vodikovih ionov ni močno odvisna od temperature. Da gre tu zares za tuneliranje, najbolj nazorno kaže izredno velik izotopski efekt. Če v ledu vodik zamenjamo z devterijem, je prevodnost tako dobljenega težkega ledu približno 30-krat manjša. Pri podrobnejši analizi samega mehanizma tuneliranja je treba upoštevati tudi interakcijo protona z mrežnimi nihanji kristala in nadalje tudi korelacijo pri gibanju protonov v sosednjih vezeh. Proton, ki preskoči v izbrani vezi iz enega položaja v drugega, s tem sproži gibanje protona v sosednji vezi. Proces tuneliranja moramo zato obravnavati kot koherenten proces gibanj v več vodikovih vezeh. Mehanizem gibanja vodikovih ionov v ledu s tuneliranjem ni nekaj, kar bi bilo specifično le za led. Razumevanje teh procesov ima gotovo dosti širši pomen.

S tem zaključujemo bežni pregled obširnega prostranstva fizikalnih pojavov v ledu. Fizika ledu povezuje klasične in kvantnomehanične pojave ter odpira nove poglede na gibanje molekul in atomov v kondenzirani snovi. Klasične predstave o gibanju tu ne zadoščajo več. Led je zelo dobra snov za raziskovanje osnovnih mehanizmov gibanj, ker ima razmeroma enostavno kristalno strukturo. Poleg tega je danes tehnologija za izdelavo kvalitetnih kristalov ledu izredno izpopolnjena.

LITERATURA

[1] J. D. Bernal, R. H. Fowler, *A theory of water and ionic solutions, with particular reference to hydrogen and hydroxylions,* J. Chem. Phys. **1** (1933) 515.

[2] L. Pauling, *The structure and entropy of ice and of other crystals with some randomness of atomic arangement,* J. Am. Chem. Soc. **57** (1935) 2680.

[3] P. V. Hobbs, *Ice Physics,* Oxford, Clarendon Press 1974.

[4] N. Bjerrum, *Structure and properties of ice,* K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fis. Medd. **27** (1951) 56.

[5] P. Gosar, *Proton-proton and proton-lattice interactions in ice, Physics of Ice,* N. Riehl, B. Bullemer, H. Englehardt Edts., New York, Plenum Press 1969, str. 401.

[6] A. Kahane, *Recherches experimentales et théoriques sur les proprietés optiques et la structure de la glace,* These Doctorat, Faculté des Sciences de Université de Paris, Ser. A., No. 3996 (1962).

[7] P. Gosar, *Theory of the anelastic relaxation of cubic and hexagonal ice,* Phil. Mag. **29** (1974) 221.

[8] L. Onsager, L. K. Runnels, *Diffusion and relaxation phenomena in ice,* J. Chem. Phys. **50** (1969) 1089.

[9] A. Fukuda, A. Higashi, *Dynamical behavior of dislocations in ice crystals,* Cryst. Lattice Defects **4** (1973) 203.

[10] C. Maï, J. Perez, R. Rivière, J. Tatibouet, R. Vassoille, *Dislocations et propriétés physico-mécaniques de la glace Ih,* Ann. Phys. **2** (1977) 91.

[11] R. Whitworth, J. G. Paren, J. W. Glen, *The velocity of dislocations in ice — a theory based on proton disorder,* Phil. Mag. **32** (1976) 409.

DOMAČE VESTI

VII. KONGRES ZVEZE DRUŠTEV MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV JUGOSLAVIJE

Z drugim oziroma prvim uradnim obvestilom nam je Društvo matematikov in fizikov SR Črne gore poslalo še naslednje obvestilo:

Sekcija za astronomijo bo razdeljena na tri skupine: 1. dinamika in fizika planetnega sistema, 2. dinamika in fizika zvezd in Sonca, 3. splošni astronomski problemi. Predavanja o pouku matematike in fizike pa bodo v posebni B skupini. Po prijavljenih predavanjih bodo po potrebi vpeljali še nove podskupine.

Obenem so nam poslali tudi obrazce, s katerimi udeleženci prijavijo svoje predavanje (kratka vsebina), ter dopisnico, s katero delovna organizacija prijavi bivanje svojega člana v hotelu, obenem pa potrdi vplačilo kotizacije v višini 400.— din na osebo.

Interesenti lahko dobe oba obrazca pri tajniku društva tov. Janezu Žitniku, gimnazija Vič, Tržaška 72, 61000 Ljubljana, tel. 261-902.

Ciril Velkovrh

FOTOEFEKT V ŠOLI

Pri pouku fizike v srednji šoli ali na univerzi ne moremo mimo *fotoefekta* ali *fotoelektričnega pojava.* Ta pojav pokaže, da elektromagnetno valovanje ne izmenjava energije z elektroni in drugimi kvantnimi delci zvezno, ampak v obrokih — *kvantih* ali *fotonih.* Fotoefekt je mogoče spremljati z neprezahtevnimi poskusi in izmeriti za kvantno fiziko značilno Planckovo konstanto h.

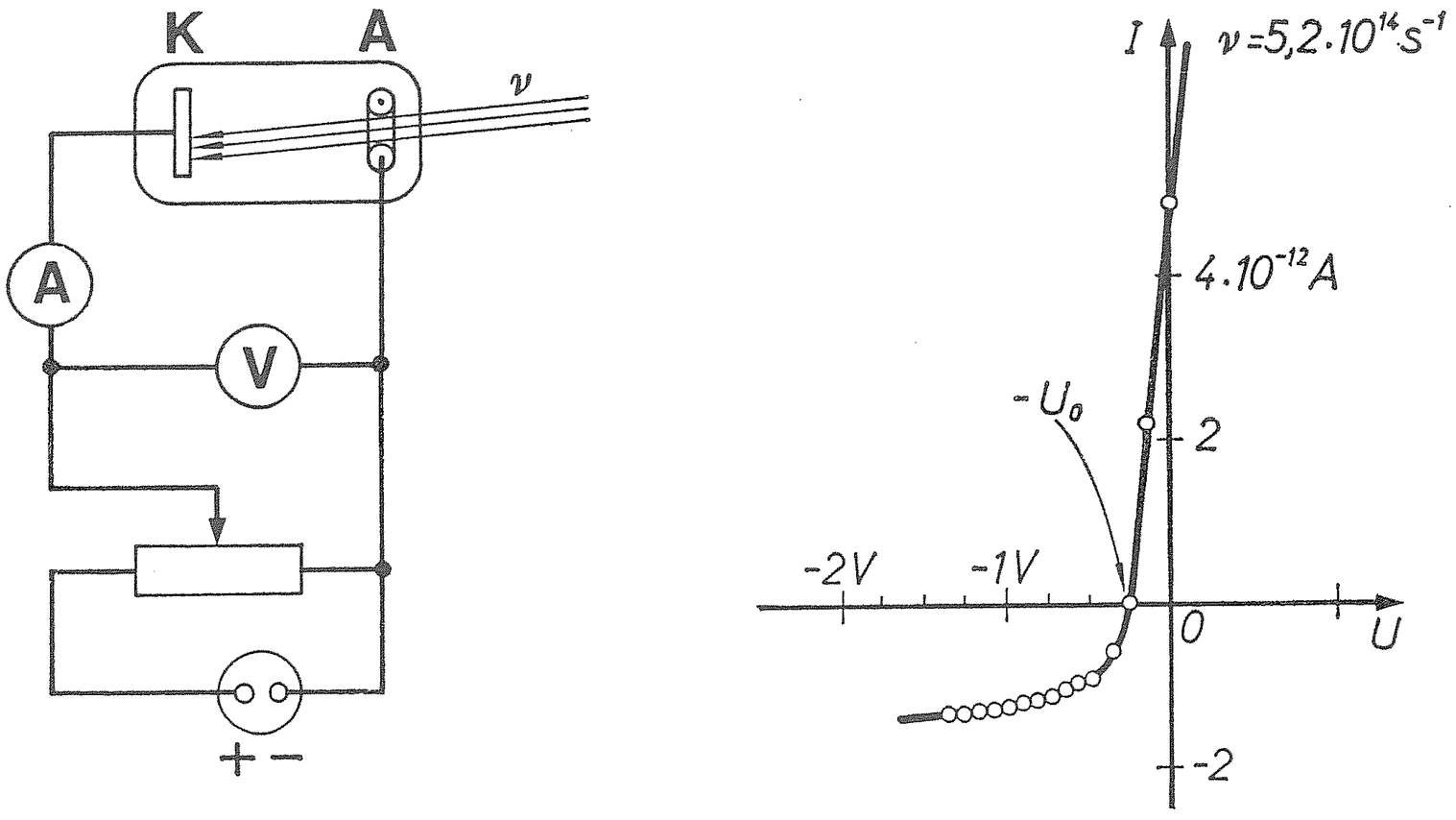
Za osnovo pri razlagi fotoefekta uporabimo *Einsteinovo enačbo* za kinetično energijo najhitrejših elektronov, ki jih iz kovine izbije enobarvna svetloba s frekvenco ν:

$$W_{k0} = h\nu - h\nu_0 \qquad (1)$$

Foton se absorbira v kovini, prevodniški elektron prevzame vso njegovo energijo $h\nu$ kot kinetično energijo in zapusti kovino. Pri tem ne trči neprožno s kakim delcem, a opravi *izstopno delo* $h\nu_0 = A$ proti sili, ki ga veže na kovino. ν_0 je *mejna frekvenca;* svetloba z manjšo frekvenco ne povzroči fotoefekta.

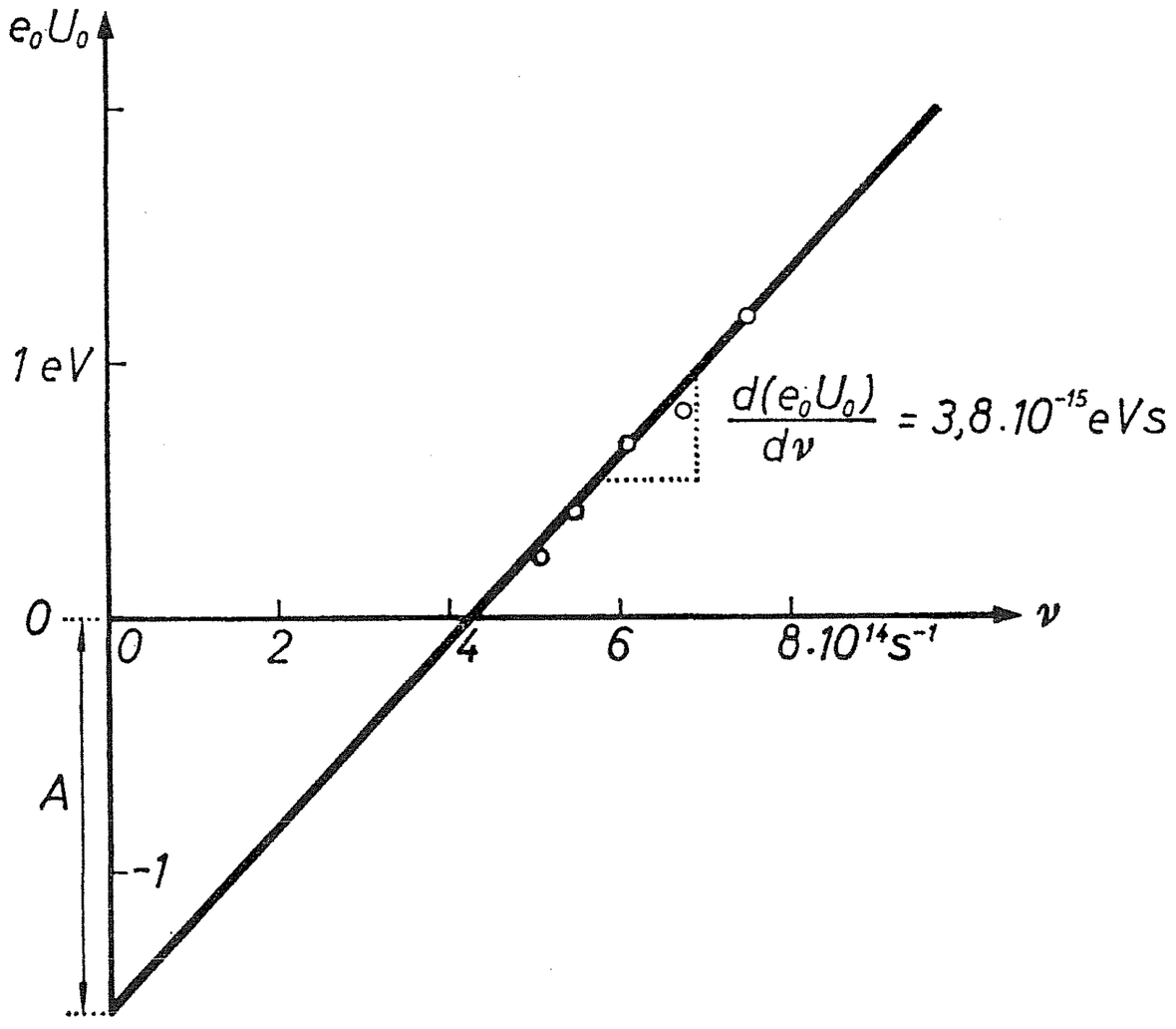
V šoli delamo poskuse s *fotocelico.* V njej posrka iz osvetljene fotokatode izbite elektrone pozitivna anoda. Po krogu teče tok, ki ga merimo z občutljivim ampermetrom. Šibek tok teče tudi, če na anodi ni napetosti proti katodi in celo, če je ta napetost negativna (sl. 1). Če negativno napetost večamo, se tok manjša in preneha teči, ko dosežemo (po absolutni vrednosti) *zaporno napetost* U_0. Poskus ponovimo z enobarvno svetlobo različnih frekvenc in poiščemo odvisnost produkta osnovnega naboja e_0 in zaporne napetosti od frekvence. V diagramu dobimo premico, ki jo opiše enačba

$$e_0 U_0 = h\nu - A \qquad (2)$$



Sl. 1. Vezje za merjenje zaporne napetosti (a) in odvisnost toka skozi fotocelico od negativne napetosti anode proti katodi pri obsevanju katode s svetlobo z valovno dolžino 578 nm (b). Zaporna napetost 0,25 V je dosežena, ko je tok enak nič. Pri večji negativni napetosti teče tok v nasprotni smeri, verjetno zaradi fotoefekta na anodi. Leyboldova fotocelica 55877 ima s kalijem prevlečeno katodo in platinasto anodo v obliki obroča, ki ga je mogoče razžariti z električnim tokom [3]

Strmina premice je Planckova konstanta $h = d(e_0U_0)/d\,\nu$. Približna določitev te konstante je glavni namen poskusa, pri katerem obsevamo fotokatodo s posameznimi spektralnimi črtami v razklonjeni svetlobi živosrebrne svetilke in merimo zaporno napetost (sl. 2).



Sl. 2. Frekvenčna odvisnost produkta osnovnega naboja in zaporne napetosti za Leyboldovo fotocelico. Planckova konstanta, določena s strmino premice $6{,}2 \cdot 10^{-34}$ Js, je nekoliko manjša od prave vrednosti $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js, izstopno delo pa je 1,6 eV [3]

V srednješolskih in visokošolskih učbenikih tako uvedejo Planckovo konstanto. Lepo in prav, tu ni kaj ugovarjati. Vendar skoraj ni učbenika, ki ne bi zbujal napačnega vtisa, da je treba v enačbi (2) upoštevati izstopno delo katode A_K, če sta elektrodi popolnoma čisti. Ker gre namreč za izbijanje elektronov iz katode, velja enačba (1) v obliki:

$$W_{k0} = h\nu - A_K \tag{1a}$$

Izbiti elektroni z največjo kinetično energijo ne morejo opraviti proti električni sili večjega dela kot W_{k0}. Ker jim zaporna napetost prepreči, da bi dospeli do anode, naj bi veljalo:

$$W_{k0} = e_0U_0 \tag{3}$$

Iz enačb (1a) in (3) sledi takoj

$$e_0U_0 = h\nu - A_K \tag{2a}$$

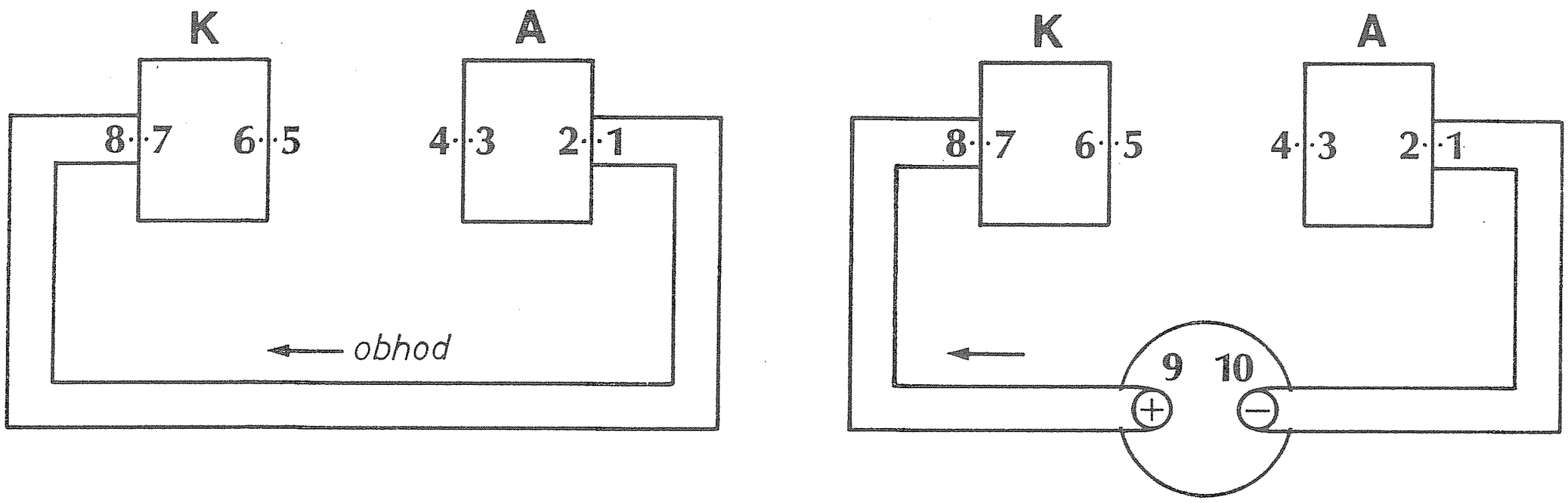
Enačba pa je napačna [1]. Napaka sicer ni bistvena, ker gre pri poskusu in razlagi, kot rečeno, predvsem za Planckovo konstanto in ne za izstopno delo. Vseeno pa si je zanimivo ogledati, kako pride do nje. Najprej poskusimo to pojasniti makroskopsko, nato pa razvijmo mikroskopsko sliko.

Vzemimo, da sta katoda in anoda iz različnih kovin s čistimi površinami in ju veže vodnik iz tretje kovine. Pred nami je električni krog, ki ni sklenjen. Drugi Kirchhoffov izrek velja tudi zanj, če upoštevamo napetost med anodo in katodo v vakuumu. Vsota vseh napetosti po sklenjeni poti je enaka nič (sl. 3a):

$$U_{78} + U_{56} + U_{45} + U_{34} + U_{12} = 0$$

Pri tem smo upoštevali, da lahko nastane napetost med točkama na obeh straneh meje dveh kovin ali kovine in vakuuma ali med dvema točkama v vakuumu (ali dielektriku). Napetosti med dvema točkama v istem kosu kovine — U_{81}, U_{67}, U_{23} — so enake nič. Ko vključimo v vodnik izvir, se od zapisanih napetosti spremeni le napetost med točkama 5 in 4 (sl. 3b):

$$U_{78} + U_{56} + U_{45}' + U_{34} + U_{12} + U_{910} = 0$$



Sl. 3. Napetost po sklenjenem krogu je enaka nič, ko sta anoda in katoda kratko sklenjeni (a) in ko priključimo med njiju izvir (b)

Odštejemo prvo enačbo od druge, pa preostane $U_{45}' - U_{45} - U_{910} = 0$. Kot vidimo, vodnik iz tretje kovine ne vpliva na ta rezultat. V njem tudi ne nastopa niti ena napetost med točkama na obeh straneh meje dveh kovin ali kovine in vakuuma. Take napetosti ni mogoče smiselno definirati ali celo izmeriti [2]. To je še ena stvar, pri kateri fizikalne knjige in članki niso posebno tankovestni.

Napetost pozitivnega priključka (9) izvira proti negativnemu (10) U_{910} je v mejnem primeru ravno zaporna napetost U_0. Napetost med točko 4 ob anodi in točko 5 ob katodi, ko sta elektrodi neposredno povezani (brez izvira kot na sl. 3a), je po definiciji *kontaktna napetost* anode proti katodi: $U_{45} = U_{AK}$. Napetost med točko 4 in točko 5, ko je priključen izvir (sl. 3b), pa je napetost v polju med anodo in katodo: $U_{45}' = U$. Tako sledi končno enačba

$$-U = U_0 - U_{AK} \tag{4}$$

$-U > 0$ je napetost, ki zavre iz katode izbite elektrone in jo je treba upoštevati, ko računamo delo pri potovanju elektronov iz točke 5 v točko 4. V skrajnem primeru, ko ob zaporni napetosti ravno preneha teči tok, je

$$W_{k0} = -e_0 U = e_0 U_0 - e_0 U_{AK} \tag{3a}$$

To kaže, zakaj je enačba (3) napačna. Iz (3a) in (1a) sledi enačba

$$e_0 U_0 = h\nu - A_K + e_0 U_{AK} \tag{2b}$$

s katero je treba nadomestiti enačbo (2a).

Privzemimo, da je kontaktna napetost dveh kovin dana z razliko njunih izstopnih del

$$-e_0 U_{AK} = A_A - A_K \tag{5}$$

pa imamo

$$e_0 U_0 = h\nu - A_A \tag{2c}$$

Z merjenjem zaporne napetosti na fotocelici s popolnoma čistima elektrodama bi lahko določili kvečjemu izstopno delo anode, če je to večje kot izstopno delo katode.

Vse to velja za popolnoma čisti elektrodi. Merjenje z navadnimi fotocelicami pa ne potrdi enačbe (2c). Če bi zares veljala ta enačba, bi bila mejna frekvenca fotocelice neodvisna od izbire kovine za fotokatodo. Anoda je ponavadi iz jekla, niklja, volframa ali kake druge kovine z velikim izstopnim delom. Tako v tem primeru fotocelica sploh ne bi bila občutljiva za vidno svetlobo. Vzrok, da ni tako, je odhlapevanje alkalijskih katod, ki imajo nizko tališče. To onesnaži anodo in izstopno delo anode postane enako izstopnemu delu čiste katode ali celo manjše. Pri navadni fotocelici tedaj vendarle vsaj približno velja enačba (2a). Napako, ki jo naredimo, če ne upoštevamo kontaktne napetosti, približno izravna onesnažitev anode s kovino katode. V resnici je enačbo (2a) zelo težko, če ne nemogoče potrditi z merjenjem s fotocelico z alkalijsko katodo. Posebna fotocelica s kalijevo katodo ima platinsko anodo izdelano tako, da jo je mogoče segreti in jo s tem vsaj delno očistiti kalija. Kalij ima izstopno delo 2,15 eV, platina pa 5,29 eV. Čeprav so pred poskusom žarili anodo, so dobili za izstopno delo 1,6 eV, kar je znatno manj od izstopnega dela čiste anode [3]. Žarenje ni očistilo anode ali pa se je med merjenjem na njej nabralo dovolj snovi s katode.

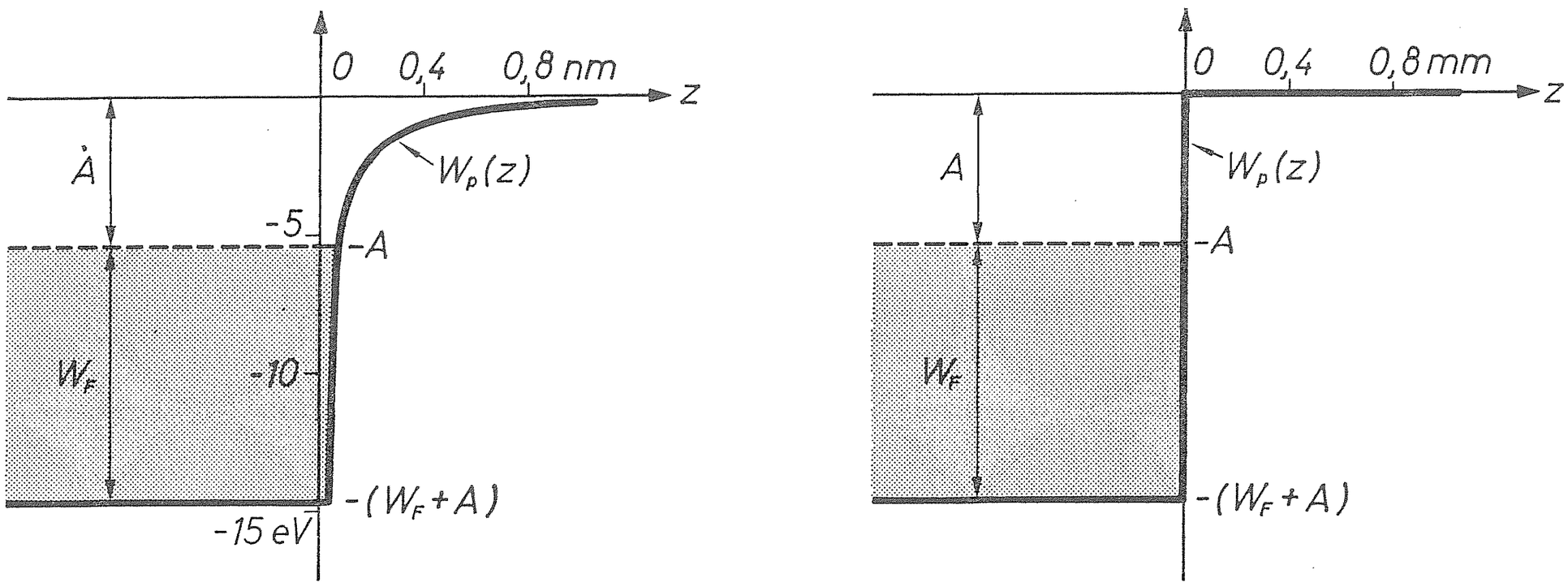
Primesi na površini močno vplivajo na izstopno delo. To izkoriščajo pri oksidnih katodah v elektronkah. Takšna katoda je prevlečena s plastjo barijevega oksida. Molekule oksida so v vrhnji plasti obrnjene z barijevimi ioni navzven. Nastane tanka dipolna plast, zaradi katere je izstopno delo znatno manjše kot pri čisti površini. Molekule barijevega oksida odhlapijo s katode na druge elektrode v elektronki in s tem močno zmanjšajo kontaktno napetost elektrod proti katodi [4].

V šoli moramo zbirati med dvema možnostma. Pri prvi se ob obravnavanju fotoefekta zadovoljimo z enačbo (1). Kvečjemu na splošno omenimo, da določa mejna frekvenca izstopno delo, te konstante pa ne poskusimo pripisati ne anodi ne katodi. Če nam gre le za določitev Planckove konstante, s tem ničesar ne izgubimo. Pri drugi možnosti pa moramo — nekako tako kot v tem sestavku — vpeljati kontaktno napetost. Vendar ne moremo podrobneje utemeljiti enačbe (5). Ta možnost je najbrž precej manj priporočljiva kot prva že zaradi časa, ki ga zahteva.

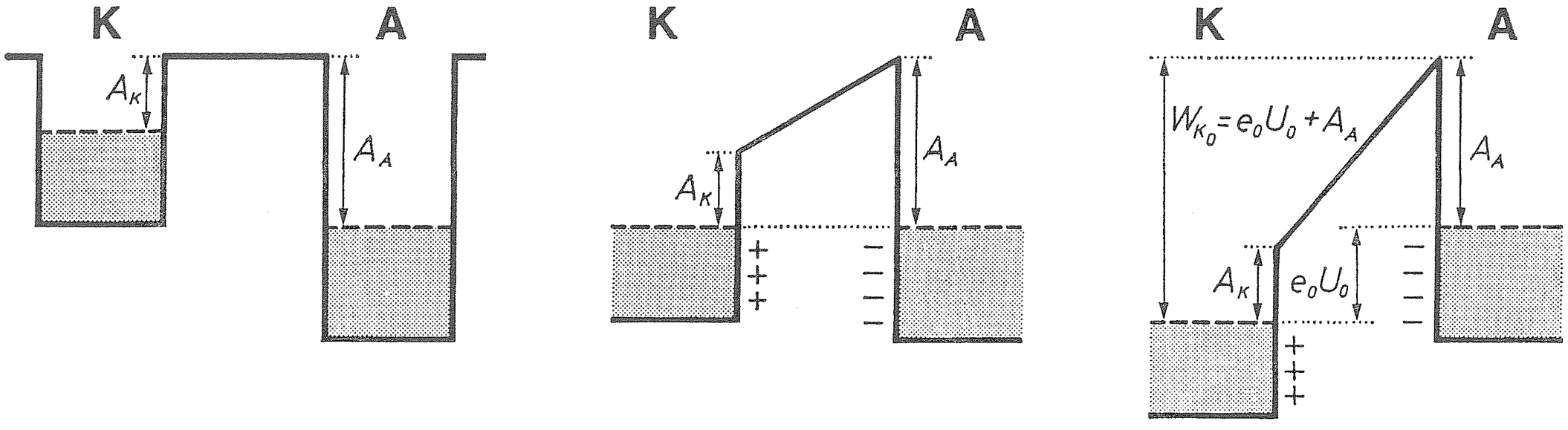
Na koncu se dotaknimo mikroskopske slike. Za naše namene zadostuje približek, v katerem vzamemo, da se prevodniški elektroni v kovini prosto gibljejo v končni potencialni jami z ravnim dnom. Zaradi Paulijevega izključitvenega načela sta na danem nivoju lahko kvečjemu dva elektrona, ki se razlikujeta po komponenti spina v odlikovani smeri. Vzamemo, da so nivoji gosti in se kinetična energija elektrona lahko zvezno spreminja, če so v bližini nezasedeni nivoji. Končno število nivojev upoštevamo z gostoto, ki podaja število nivojev na ozkem energijskem intervalu. Ko je temperatura kovine blizu absolutne ničle, so zasedeni vsi nivoji s kinetično energijo pod *Fermijevo mejo* W_F, vsi nivoji nad njo pa so nezasedeni. Ker je v najugodnejšem primeru treba dovesti prevodniškemu elektronu izstopno delo, da ga spravi-

mo iz kovine, je globina potencialne jame enaka vsoti $W_F + A$ (sl. 4) [4, 5]. Različne kovine imajo v splošnem različno Fermijevo mejo in različno izstopno delo.

Za vsako od dveh čistih elektrod, ki sta nabiti in izolirani, je potencialna energija elektrona v makroskopski razdalji od meje po dogovoru enaka nič (sl. 5a). Razmere se spremenijo, ko kovini kratko staknemo. To lahko storimo z vodnikom iz tretje kovine (sl. 3a). Iz kovine z manjšim izstopnim delom prehajajo prevodniški elektroni z večjo polno energijo v kovino z večjim



Sl. 4. Potencialna energija elektrona v odvisnosti od razdalje od ravne meje kovine (sklenjena krivulja). Prevodniški elektroni v kovini imajo kinetično energijo med 0 in Fermijevo mejo W_F, tako da je njihova polna energija med $-A-W_F$ in $-A$. Elektron z nabojem $-e_0$, ki ga približamo meji, influencira na površini kovine naboj e_0, tako da je površina ekvipotencialna ploskev. Električno polje v vakuumu je takšno, kot da bi bil v simetrični legi glede na površino naboj e_0. Na elektron v razdalji z od površine deluje tedaj sila $F = e_0^2/4\pi\varepsilon_0 (2z)^2$, njegova potencialna energija pa je $\int_{\infty}^{z} F dz = -e_0^2/16\pi\varepsilon_0 z$ (a). Na makroskopski razdalji ne opazimo zaobljenosti jame (b)



Sl. 5. Potencialna energija in polna energija elektronov v čisti anodi in katodi, ko sta nenabiti in izolirani (a), kratko sklenjeni kot na sl. 3a (b) in ko je med njima zaporna napetost kot na sl. 3b (c). Risbi b in c veljata v ravni geometriji. Z risbe c je mogoče razbrati, da mora elektron v katodi dobiti od fotona kinetično energijo $e_0U_0 + A_A$, če mu šele zaporna napetost U_0 prepreči, da bi dosegel anodo. — Razglabljanje velja — natančno vzeto — le v bližini absolutne ničle. Pri temperaturi T so na območju nad Fermijevo mejo nivoji zasedeni in na območju pod njo nezasedeni. Vendar ocenimo širino teh območij s kT (k je Boltzmannova konstanta), kar meri pri sobni temperaturi 0,025 eV in je v primeri z izstopnim delom zanemarljivo. Zato lahko rezultate prevzamemo tudi za sobno temperaturo. — Potencialna energija elektrona na anodi je večja kot na katodi. Potencialna energija je eU in zaradi negativnega naboja elektrona je napetost anode proti katodi negativna

izstopnim delom in manjšo polno energijo. Prehajanje preneha, ko se izravnata Fermijevi meji v obeh kovinah. Tedaj ima druga kovina presežek negativnega naboja in prva presežek pozitivnega. Med točkama ob prvi in ob drugi kovini je tedaj razlika potencialnih energij enaka razliki izstopnih del (sl. 5b). Ustrezna kontaktna napetost

$$U_{AK} = -(A_A - A_K)/e_0$$

je značilna za par kovin, presežni naboj pa je odvisen od geometrijskih razmer.

Tako smo prišli do zveze (5), ki je makroskopsko nismo mogli utemeljiti. Prepričali smo se tudi, da napetosti med točkama na obeh straneh meje dveh kovin ni mogoče smiselno definirati. V obeh točkah se potencialna energija elektrona razlikuje za razliko Fermijevih mej, največja polna energija elektrona pa je v njiju enaka.

LITERATURA

[1] J. Rudnick, D. S. Tannhauser, *Concerning a widespread error in the description of the photoelectric effect,* Am. J. Phys. **44** (1976) 796.

[2] L. H. Fisher, R. N. Varney, *Contact potentials between metals: History, concepts, and persistent misconceptions,* Am. J. Phys. **44** (1976) 464.

[3] A. C. Melissinos, *Experiments in modern physics,* New York, Academic Press 1968, str. 26.

[4] R. L. Sproull, *Modern Physics,* New York, J. Wiley & Sons 1963, str. 449, 440.

[5] J. Strnad, *Moderna fizika,* Ljubljana, Univerza v Ljubljani 1973, str. 485—490.

Mirko Cvahte in *Janez Strnad*

DOMAČE VESTI

NOVO DRUŠTVO

Pred skoraj dvema letoma je nastalo v Trstu novo Društvo naravoslovcev in tehnikov. Na ustanovnem občnem zboru, ki se ga je udeležilo okoli 50 zamejskih naravoslovcev, znanstvenikov in tehnikov, je bil izglasovan statut društva in izvoljen odbor, ki ga sestavljajo Aljoša Volčič, Marinka Pertot, Franko Pisani, Milko Čebulec, Jurij Slokar, Ninko Černic, Matija Hmeljak in Karel Bajc.

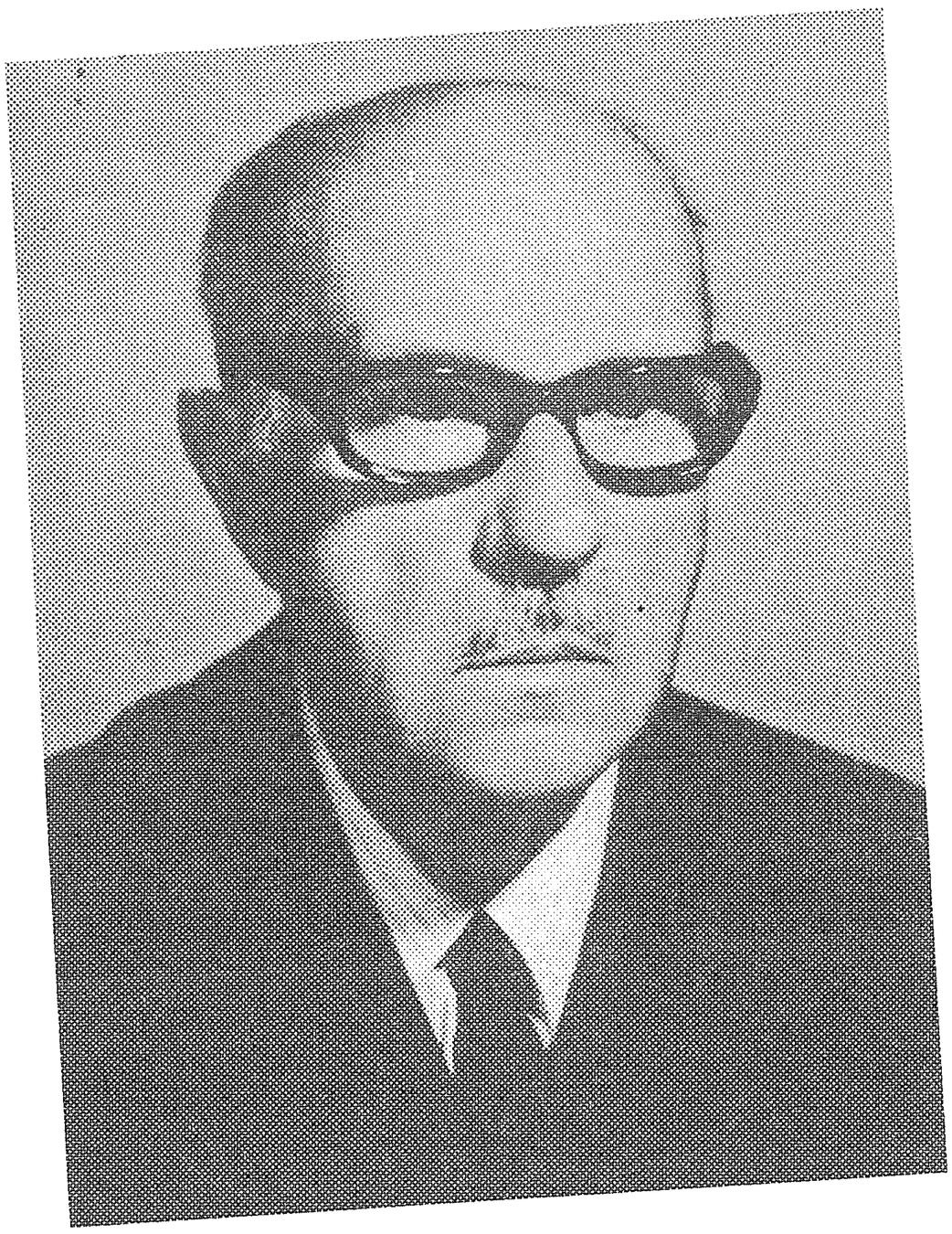
Do sedaj je društvo priredilo 7 predavanj (tematika: gobe, onesnaženje zraka, parapsihologija, kraška vegetacija, dvakrat astronomija, medicina avtomobilske vožnje), eno okroglo mizo (o radijskih oddajah za šole) in dve poučni ekskurziji (po Krasu in v grad Bistro).

Med osnovnimi cilji, ki si jih je društvo zastavilo in ki bi se jim moralo v prihodnje vsekakor bolj približati, je tudi povezava s sorodnimi društvi v matični Sloveniji. Edino dosedanje tako dejanje je bila navzočnost društvene delegacije na občnem zboru Prirodoslovnega društva Slovenije lani v Ljubljani. Za prihodnost so upi in obeti dobri ...

Karel Bajc

DOMAČE VESTI

PROFESOR DR. ANTON VAKSELJ — OSEMDESETLETNIK



Devetega decembra 1979 je slavil svoj osemdeseti rojstni dan slovenski matematik profesor dr. Anton Vakselj.

Anton Vakselj je bil med prvimi slušatelji matematike na ljubljanski univerzi, diplomiral je leta 1922 na filozofski fakulteti, kjer je imela slovenska matematika takrat svoj dom. Anton Vakselj je tudi prvi na naši univerzi obranil doktorsko tezo iz matematike. To so bili Doneski k teoriji linearne diferencialne enačbe drugega reda s štirimi singularnimi točkami. Za doktorja je bil promoviran leto dni po diplomi, jeseni leta 1923. Dve leti je nadaljeval študij v Parizu, dve leti je delal kot asistent na filozofski fakulteti. Potem pa se je, leta 1925, za dolgi dve desetletji poslovil od univerze. Vsakdanji kruh si je služil kot profesor matematike in fizike na mestni ženski gimnaziji, nekaj let pa celo kot uradnik na mestnem finančnem oddelku. Bili so to pač časi, ko na univerzi ni bilo prostora za nove moči.

Četudi je bil čas težak in nenaklonjen, ni bil brezploden. »Dopoldne sem bil res uradnik,« mi je pripovedoval profesor Vakselj, »toda popoldan je bil moj, popoldne sem bil matematik.« V tem času je oblikoval svoj raziskovalni okus, usmeril se je predvsem v diferencialno geometrijo in v algebro. V diferencialni geometriji je obravnaval teorijo ploskev in geometrijo analitičnih funkcij, v algebri so bili posebej opaženi njegovi prispevki k teoriji grup. Spominjam se bežnega srečanja s profesorjem A. G. Kurošem v Moskvi. »Iz Ljubljane ste?« me je prijetno presenetil, »Ljubljana, to je pa Vakselj.«

Pred slušatelje na univerzi je Anton Vakselj stopil spet leta 1946. Postal je redni profesor za matematiko na takratni tehniški fakulteti. Fakultete so se spreminjale, profesor Vakselj pa je, z majhnim premorom, vztrajal in učil mlade rodove naših tehnikov do upokojitve leta 1972. V povojni čas sodi tudi zasnova obsežnejše monografije Osnove matematike. Izšel je (1952) le prvi del Število-limitni proces. Študentje prvih povojnih let se spominjajo tudi na roko pisanega in razmnoženega učnega pripomočka Matematika II, ki je kasneje (1960) izšel v drugačni izdaji pri Univerzitetni založbi.

Predavanja profesorja Vakslja sta odlikovala izbrušena strogost in sodoben izraz. Profesor Vakselj ni bil učitelj le tehnikom, rad je pomagal tudi nam, »filozofom«. V stari stavbi smo bili sosedje, njegov kabinet je bil pravzaprav pregrajen del hodnika. Kot študent in asistent sem rad potrkal na njegova vrata. Razgovori z njim so mi odprli sodobno algebro, pomagal mi je skozi van der Waerdena. Kasneje je pri nas tudi honorarno predaval — več let diferencialno geometrijo kot specialni tečaj za matematike, za fizike pa (na fakulteti ali na IJS) teorijo grup.

Ob visokem jubileju čestitamo profesorju dr. Antonu Vakslju tudi sodelavci in bralci Obzornika.

France Križanič

BIBLIOGRAFIJA

1. Doneski k teoriji linearne diferencialne enačbe 2. reda s štirimi singularnimi točkami. Ljubljana: (samozal.), 1923.
2. L'equation différentielle linéaire du second ordre à quatre points singuliers. Compt. rend. acad. sc. Paris **178** (1924) 298—300.
3. Sur les substitutions linéaires. Compt. rend. acad. sc. Paris **179** (1924) 1135—1137.
4. Ein Existenztheorem der Flächen konstanter Krümmung. Math. Zeit. **32** (1930) H. 3., 407—414.
5. Einige Sätze über endliche Gruppen. Monatsh. Math. Phys. **38** (1931) H. 2., 347—350.
6. Beiträge zur Flächentheorie. Math. Zeit. **38** (1934) H. 3., 443—464.
7. Ein Existenztheorem in der Theorie der Flächenverbiegung. Publ. math. **3** (1934) 179—194.
8. Eine neue Form der Gruppenpostulate und eine Erweiterung der Gruppenbegriffes. Publ. math. **3** (1934) 195—211.
9. Eine Anwendung der linearen Substitution einer komplexen Veränderlichen in der Flächentheorie. Publ. math. **6** (1937) 161—170.
10. Kreiskurven zweiter Ordnung. Math. Zeit. **43** (1938) H. 4., 573—617.
11. Monodromijska funkcija linearne diferencialne enačbe. Razprave III, AZU, Mat. prir. raz. (1947) 5—18.
12. Matrični račun linearnih substitucij 2. reda. Razprave III, AZU, Mat. prir. raz. (1947) 19—39.
13. Dva prispevka k trikotniški geometriji. Razprave III, AZU, Mat. prir. raz. (1947) 40—75.
14. Matematika II, Ljubljana 1949, 230 str.
15. Contribution à la géométrie d'une fonction analytique. Compt. rend. acad. sc. Paris **234** (1952) 797—799.
16. Osnove matematike. I. Število — limitni proces. Ljubljana: DZS, 1952. 306 + + II str.
17. Faktorhalbgruppen. Glasnik mat. fiz. astr. Ser. II. **12** (1957) 9—16.
18. Algebraische Grundlage der Vektorrechnung. Glasnik mat. fiz. astr. Ser. II. **12** (1957) 161—169.
19. Vektordreibein einer analytischen Funktion. Glasnik mat. fiz. astr. Ser. II. **12** (1957) 171—180.
20. Višja matematika II., 2. natis. Ljubljana: Univ. zal., 1960. 375 str.
21. Beitrag zur Theorie des allgemainen Dreibeins der Raumkurve. Ljubljana: (rokopis), 1973. 10 + I str.

Ciril Velkovrh

---

* Pod črto je profesor Avčin dodal svojemu članku *O vpeljavi Giorgijevega merskega sistema* (Obzornik mat. fiz. **2** (1952) 50) tole opombo: Ime *veličina* je vsaj tehnikom bolj simpatično kot tradicionalni izraz količina. *Količina* je odraz zastarelega, zgolj algebrajskega gledanja na enačbe, ki mu njihovi simboli pomenijo le gola merska števila, torej kvantiteto veličine, njeno »kolikost«. Današnje gledanje na enačbe pa vidi predvsem kvaliteto veličine, njen »kaj«. 5 A in 10 A sta po tem gledanju ena in ista veličina, namreč električni tok (I), le da gre za dve različni njegovi vrednosti ...

Tedanje uredništvo je pristavilo: Mnogim našim sodelavcem in tudi urednikom je izraz *količina* bližji in ga zato verjetno ne bodo zamenjali z izrazom *veličina.* Navajeni so, da gledajo v simbolih že količine, ne pa samo merska števila; izraz jih pri tem ne moti. (Op. ur. za fiziko)

DOPISI

K POJMOM VELIČINA, KOLIČINA, VREDNOTA

Obzornik za matematiko in fiziko **26** (1979) 89 je prinesel članek *Količine in enote v fiziki,* ki nas kritično pripravlja na brezpogojno obveznost uporabe mednarodnega sistema merskih enot SI (Système International) v vseh količinsko merljivih znanostih z novoletnim jutrom bližnjega leta 1981.

Naj mi bo dovoljeno ob tej priliki povsem sine ira et studio ponovno* opozoriti na nekaj nerazčiščenih, različno uporabljenih pojmov v fiziki in njeni tehniški aplikaciji, ki bi jih veljalo ob tej priliki 1. 1. 1981 dogovorno tudi uskladiti, predvsem v korist učeče se mladine na vseh stopnjah fizikalno-tehniškega šolanja po vsej federaciji.

Predvsem mislim tu na osnovne pojme v skupnem jeziku fizike in tehnike. Tehniki in — kolikor mi je znano — tudi fiziki v vseh drugih republikah jim pravimo »veličine« — ustrezno izrazom kot »grandeur«, »Grösse« — le za fizike na Slovenskem velja »količina« ustrezno stari anglosaški »quantity«. Tako se mladina pri fiziki v osnovni šoli in na srednjih in višjih šolah uči o »količinah«, tista, ki preide na višji tehniški pouk, pa o »veličinah« za eno in isto. Res je, da oba pojma dovoljujeta dvojno tolmačenje: za »veličine« se imajo tudi nekateri ljudje, s »količino« pa označujemo tudi številnost (na primer količina informacij, betona, pridelkov ipd.). To zadnje se kaže med drugim tudi v omenjenem načelnem članku na strani 91 v izrazih »masna količina toplote«, »količina elektrine« ipd. Tehniki bi rekli

veličina »količina elektrine«,

fiziki pa

količina »količina elektrine«.

Posledice te tavtološke neusklajenosti v našem skupnem jeziku se seveda prenašajo tudi v strokovno literaturo, fizikalno kot tehniško (kemija je eno in drugo hkrati). Primer: v nedavnem članku fizikalno usmerjenega akademika A. Kuhlja v Strojniškem vestniku o zgodovini motornega letenja je urednik svojim tehniškim pravilom ustrezno vse nedvomne izraze »količina« spremenil v »veličina«.

Spričo te bratske razprtije je pokojni elektrotehnik akademik V. Koželj predlagal, da se vsi po vsej federaciji ali vsaj v Sloveniji oprimimo tretje možnosti »vrednota« (la valeur, der Wert, valour — value). Četrta, najnevtralnejša pa bi mogoče bila preprosto »(fizikani) pojem«.

Takih dvoumnosti je še in še, ne le pri nas. Tako imajo na primer Nemci za naša ostro ločena pojma »natančnost« (precision) in »točnost« (accuracy) v rabi en sam pojem »Genauigkeit« in s tem ustrezno zmešnjavo v pojmovanju statističnih meril. Čas bi tedaj bil, da počistimo v naši skupni hiši in pometemo pred lastnim pragom. Mar ne?

---

* Gl. str. 60 spodaj.

Francè Avčin

NOVE KNJIGE

Rajko Jamnik, Matematična statistika, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1979. 408 str. (Matematika-Fizika; 12) Cena: pl. 750.— din, br. 650.— din.

Mesto matematične statistike v okviru statističnega preučevanja je zelo pomembno. Ker je njena vloga in naloga razvijanje metod za preučevanje množičnih pojavov z matematiko, predvsem verjetnostnim računom, matematična statistika bistveno prispeva k razvoju statistike. Delo prof. Jamnika v šestih poglavjih zajema osnovne probleme matematične statistike.

V uvodnem poglavju Populacija in vzorec seznanja bralca z osnovnimi pojmi in podrobno obravnava vzorčne porazdelitve, ki izhajajo iz normalno porazdeljenih populacij (x^2, t, F) in statistike.

Obsežno poglavje je posvečeno ocenjevanju parametrov kot pomembnemu statističnemu problemu. V prvem delu se podrobno ukvarja z lastnostmi cenilk, kot so: zadostnost, popolnost, doslednost, nepristranost in učinkovitost. V drugem delu tega poglavja pa podaja osnovne metode za ocenjevanje: metodo momentov, metodo maksimalne zanesljivosti, minimaksno in Bayesovo metodo.

Še bolj specifičen in pomemben problem kot ocenjevanje je preskušanje hipotez o parametrih populacije. To problematiko obravnava izčrpno v tretjem poglavju, katerega bi mogli imenovati osrednjega. Po odstavku, v katerem seznani bralca z osnovnimi pojmi statističnega preskušanja hipotez, obravnava najmočnejši test in enakomerno najmočnejši test. V posebnem odstavku se ukvarja z nepristranskimi testi. Za aplikacijo teorije rabi preskušanje hipotez o parametrih ene ali dveh normalnih porazdelitev. Z istim namenom obravnava preskušanje hipotez o dvorazsežnostnih porazdelitvah, hipotezah o frekvenci in parametra v Poissonovi porazdelitvi. V nadaljevanju se ukvarja še z drugimi načini testiranja hipotez: s testom zanesljivosti, minimaksnim in Bayesovimi testi. Poglavje sklene s primerjavo in sorodnostjo statističnih testov z intervali zaupanja. V četrtem poglavju se ukvarja z neparametričnimi testi, ki se tičejo oblike neznanega porazdelitvenega zakona za populacijo. Na prvem mestu so testi soglasja ali prilagoditveni testi, med njimi x^2-test, testa Kolmogorova in Smirnova. Od drugih neparametričnih testov je obdelan test z znaki, inverzijski test in iteracijski test. Poglavje sklene s Spearmanovo korelacijo ranga.

Linearni modeli, podani v petem poglavju, so osnova za najrazličnejše statistične postopke od regresije, analize variance do načrtovanja poskusov. Zato s svojimi specifičnimi problemi sodijo v matematično statistiko, ki mora rešiti niz problemov, s katerimi se srečujemo pri teoretičnem obravnavanju linearnih modelov. Po uvodni opredelitvi preide avtor na problem splošne analize in preučitve lastnosti linearnih modelov: ocenjevanje vektorja regresijskih koeficientov β po metodi najmanjših kvadratov, nepristransko oceno variance modela σ^2 in na preskušanje hipoteze o $\eta = E(Y)$ pri pogoju, da je e porazdeljen po zakonu $\mathbf{N}(0, \sigma^2 . I_n)$. Kot posebne primere linearnih modelov obravnava podrobneje modele s klasifikatornimi spremenljivkami z analizo variance v ožjem smislu. Pri analizi variance za enojno klasifikacijo nakaže probleme, kot so homogenost varianc z Bartlettovim testom, Duncanov preskus sredin,

ki se pojavljajo tudi v splošnejših primerih. Problematiko analize variance razširi na dva faktorja z enim in več podatki za posamezno celico oziroma kombinacijo faktorjev. Kot poseben primer regresije je v delu obdelana odvisnost od ene spremenljivke in uporaba v različnih situacijah. Ta primer je brez posebnih težav mogoče v matrični obliki posplošiti na več neodvisnih spremenljivk. Obdelana je parabolična regresija — kot specifična — z uporabo ortogonalnih polinomov.

Delo zaključuje poglavje o zaporedni analizi. V njem je podana problematika zaporedne analize in izpeljana metoda zaporednega kvocientnega testa na splošno in zaporedni kvocient za verjetnost in poprečje za normalno porazdelitev v posebnem.

Ker gre za matematično statistiko, je poudarek dela na dokazih za izreke o obravnavanih zakonitostih in zvezah. Pri tem je avtor korektno uporabil sodobni matematični in statistični instrumentarij in z njim izčrpno obdelal ključne probleme matematične statistike. Zelo koristno vlogo imajo v delu primeri. V njih je prej praviloma kot slučajno z uporabo obravnavane teorije obdelan marsikak teoretičen problem, ki bi, vključen v osnovno razlago, ne našel pravega mesta.

Matematična statistika prof. Jamnika je pomembno delo na proučevanem področju, posebno glede na to, da v slovenščini podobnega dela doslej nismo imeli. Učbenik bo vsekakor primeren pripomoček vsem, ki jih statistika zanima bolj kot samo za uporabo že izdelanih metod.

Marijan Blejec

A. Pietsch, Operator Ideals, Mathematische Monographien, Band 16, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.

V knjigi Operatorski ideali obravnava avtor, kakor pove že naslov, ideale omejenih linearnih operatorjev nad Banachovimi prostori; to so razredi operatorjev, za katere velja, da je vsota poljubnih dveh takih operatorjev spet v tem razredu, pa tudi produkt takega operatorja s poljubnim omejenim operatorjem je spet v razredu. Primere takih idealov najdemo kaj hitro: vsi izrojeni operatorji (to so taki, ki imajo končnodimenzionalno zalogo vrednosti) že tvorijo ideal, prav tako vsi kompaktni operatorji.

Medtem ko je prvi del knjige namenjen osnovnim definicijam, lastnostim in primerom operatorskih idealov, se v drugem avtor posveti kvazinormiranim idealom, kakršen je, denimo, ideal nuklearnih operatorjev. V tretjem delu obravnava avtor teorijo *s*-števil in idealov zaporedij, v četrtem podrobneje obdela nekatere zanimive primere operatorskih idealov, peti pa je namenjen aplikacijam; tu so med drugim podane Rieszeva, Fredholmova in »vektorska« Radon-Nikodymova teorija.

Knjiga je napisana natančno in pregledno, ima stvarno kazalo in dokaj popolna seznama oznak in literature. V dokazih je avtor večinoma našel »pravo mero«, saj so hkrati dokaj elegantni in razumljivi; dokazi so izpuščeni le pri trditvah, ki so bodisi splošno znane bodisi analogne z že prej obdelanimi (kot npr. v teoriji idealov zaporedij), ali pa gre za rezultate, ki so po eni strani dokaj zahtevni, po drugi pa ne vplivajo bistveno na glavni tok teorije in rabijo le v ilustracijo (kot npr. v teoriji Radon-Nikodymovih operatorjev).

Označevanje je v vsem delu dosledno, kar ima za posledico, da avtorju začne kmalu primanjkovati ne le črk, temveč celo abeced. Zaradi tega je morda knjiga nekoliko težje čitljiva. Želeli pa bi si morda tudi nekaj več vnaprejšnje motivacije.

Vsekakor odlična strokovna knjiga, ki jo lahko priporočamo vsem, ki se ukvarjajo s funkcionalno analizo in še posebej z operatorsko teorijo.

Matjaž Omladič

Robert M. Eisberg, Matematische Physik für Benutzer programmierbarer Taschenrechner, München, R. Oldenbourg Verlag, 1978, 189 str.

Prva tri poglavja obsegajo recepte za numerično odvajanje, integriranje in reševanje navadnih diferencialnih enačb (in sicer z uporabo celega in polovičnega koraka). To znanje je v naslednjih poglavjih uporabljeno na zgledih iz fizike: prosti pad (kar tako in tudi s kvadratnim uporom), nihanja (tudi neharmonična, dušena in sklopljena), gibanje v centralnem polju sil (Keplerjev problem in Rutherfordovo sipanje), slučajni pojavi (zgolj žrebanje molekul iz ene polovice škatle v drugo) ter celo Schrödingerjeva enačba (harmonični oscilator in pravokotna potencialna jama vključno z rešitvami iz zveznega spektra in virtualnimi nivoji). Vse to je obloženo, kot poudarja že podnaslov, s 16 programi, 29 primeri, 92 nalogami in 49 slikami.

Ob branju se mi je vsiljevalo vprašanje, komu bi knjiga utegnila koristiti, saj jo avtor priporoča za pomoč pri študiju fizike in matematične fizike. Da je vsa matematka v njej omejena na recepte, smo že omenili. Vsa fizika je zaobsežena v že izgotovljenih enačbah, ki jih avtor postavi pred bralca (da je nemara res bolje tako, ugotovimo ob avtorjevem razmišljanju o entropiji pri slučajnih procesih). Kje pa naj bi bila matematična fizika, lahko samo ugibamo. Teža vsebine v vsakem poglavju sta detajlno izdelana programa v dveh izvedbah (v obratnem poljskem zapisu za kalkulatorje HP in v običajni algebrajski izvedbi za vse druge), najobsežnejši razdelek v poglavju je vedno Erklärung der Programme. Diskusija rezultatov je kar se da skromna.

Ali bi bila knjiga komu lahko vsaj zanimiva, na primer vedoželjnemu srednješolcu ali razsvetljenemu laiku? Komajda. Imetnik kalkulatorja s programom, ki bi svojo igračko rad preskusil, pa ne ve, kako in s čim, bo nad primeri iz knjige kmalu zazehal. Diferencialne enačbe drugega reda in predvsem programi zanje, kakor so predstavljeni v knjigi, so namreč utrudljivo podobni, vsa bralčeva iniciativa pa naj bi se izživela v vstavljanju različnih začetnih pogojev in vrednosti parametrov Ob pedantni izdelanosti programa in obsežni razlagi le-teh naj bralec dobi vtis, da je to huda umetelnost, ki jo kaže prepustiti pametnejšim od sebe. Za takega bralca so zgledi, ki jih imenitnejši izdelovalci kalkulatorjev priložijo navodilom za uporabo, neprimerno zanimivejši.

Seveda bi bila tudi brez naštetih slabosti knjiga obsojena na vlogo muhe enodnevnice. Ob naglem razvoju kalkulatorjev z vedno obsežnejšim spominom, s spominskimi karticami in minibibliotekami programov bo vsaka knjiga, ki ponuja zgolj izgotovljene recepte, hitro zastarela.

Alojz Kodre

Edvard Kramar, Zbirka nalog iz verjetnostnega računa, DMFA SRS, 1979, 60 str. (Zbirka izbranih poglavij iz matematike; 15.) Cena 60.— din (48.0 din).

V delu so zbrane naloge, ki jih je avtor dal pri 29 izpitnih in 15 kolokvijih iz verjetnostnega računa študentom tehnične in pedagoške matematike. Naloge so razvrščene po izpitnih terminih, dodani so jim rezultati in, kjer je potrebno, navodila za reševanje.

Primernih zbirk nalog iz verjetnostnega računa je sorazmerno malo. Zbirka dr. Kramarja bo to vrzel vsaj delno zapolnila. Pozdravili jo bodo predvsem študentje, koristna pa bo seveda vsakomur, ki bi žele obvladati verjetnostni račun bolj kot le pasivno.

Rajko Jamnik

Programmieren mit dem Taschenrechner TI-51-III (Julius Schärf and al.) — Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1978. — 143 str.; 23 cm.

Ta knjižica je nekakšen mešanec med Priročnikom in Navodilom za uporabo žepnega računalnika TI-51-III (Texas). Priznati ji moramo, da je z raznimi primeri precej natančno opisala sposobnost računalnika, v katerega lahko vgradimo manjše programe. Torej jo lahko priporočimo tistemu, ki uporablja zgolj računalnik TI-51-III, če ni pri reševanju različnih problemov s pomočjo originalnih navodil že sam pristal na isti stezi.

Vsekakor moramo še kritično preceniti vrednost take knjige. Vsakomur je znano, da se razvija tehnologija žepnih računalnikov presenetljivo hitro. V splošnem velja računalnik, ki je starejši od petih let, za arhivskega in je za vsakogar, ki se šele opremlja z računalnikom, praktično nezanimiv. Tak priročnik pa ima žal to lastnost, da izide nekaj let po tem, ko se je določeni računalnik pojavil, ves pa je seveda posvečen prav njemu. Vedeti moramo, da so vsi primeri, ki so izbrani za ilustracijo, natanko tisti, ki so pretežki za skromnejše računalnike in enostavni za malo bolj izpopolnjene.

Žepni računalnik spremlja vedno originalno navodilo za uporabo, zato je nerazumljivo, zakaj je potrebno napisati temeljitejšo verzijo, ko pa izide vendar natanko tedaj, ko je nezanimiva. Take knjižice so potemtakem skoraj brez vrednosti.

Andrej Kmet

E. N. Economou, Green's Functional in Quantum Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, 251 str.

Greenove funkcije so se po uspešni uporabi v kvantni teoriji polja v zadnjih dvajsetih letih razširile tudi v druga področja kvantne fizike, predvsem v teorijo trdne snovi in statistično mehaniko. E. N. Economou podaja uvod v to metodologijo, pri izbiri pirmerov pa se omeji na fiziko trdne snovi. Osrednja poglavja so posvečena reševanju netrivialnih enodelčnih problemov, kot so: sipanje delcev, vpliv nečistoč na stanja v kristalni mreži, problem elektronov v neurejeni trdni snovi. Slednji temi predstavljata avtorjevo raziskovalno specialnost in pomenita novost v knjižni obliki. V knjigi je zbranih nekaj zelo poučnih primerov ko metoda nudi bližnjico do eksaktnih rešitev. Prikazana je tudi uporaba Greenovih funkcij za reševanje problemov več delcev, vendar z manjšo utežjo, saj obstaja za to snov že več primernih knjig. Delo predstavlja tudi poskus poenotenja metod, saj še vedno velja, da si v gozdu različnih definicij vsak avtor uvede raje svojo Greenovo funkcijo.

Knjiga je namenjena študentom podiplomcem smeri trdna snov in raziskovalcem, ki v to področje vstopajo. Pisana je dovolj preprosto, da za posamezne primere lahko sežejo po njej tudi študentje višjih letnikov.

Peter Prelovšek

OBVESTILO

Naročnike Obzornika za matematiko in fiziko vljudno prosimo, da s priloženo položnico poravnajo naročnino za leto 1980. Cena revije v tem letu je 200.— din. Vsem ustanovam in podjetjem pa bomo v kratkem poslali ustrezni račun. Ker v začetku leta nimamo namenskih sredstev, vas prosimo, da nam naročnino čimprej nakažete.

Marija Hrovath

László Lovász, Combinatorial Problems and Exercises. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979, 551 str.

Knjiga po svoji zasnovi nekoliko spominja na knjigo Béla Andrásfai, Introductory graph theory (glej OMF 25 (1978) 1, IV) in predstavlja nekakšna nestandardno napisana »izbrana poglavja kombinatorike«. Razdeljena je na tri dele: naloge, namigi in rešitve. Znotraj posameznega dela pa je snov razdeljena po naslednjih poglavjih: preštevanja, rešeta, permutacije, preštevanja in grafi, sodost in dualnost, povezanost, faktorji v grafih, neodvisne množice točk, barvanja grafov, ekstremalni problemi na grafih, spektri grafov, avtomorfizmi grafov, hipergrafi, Ramseyeva teorija, rekonstrukcije. V vsakem poglavju so zbrani pomembnejši rezultati (tudi novejši — nekako do 1977), ki so večkrat razbiti na zaporedja nalog.

Knjiga je namenjena predvsem tistim, ki se nameravajo podrobneje seznaniti s kombinatoriko. Pri tem jim bo posebno dobrodošlo avtorjevo prizadevanje, da poudari pomembnejše koncepte in tehnike, ki jih srečamo v kombinatoriki. Vsekakor pa je priporočljivo, da bralec, preden začne listati po tej knjigi, prebere kakega od resnejših uvodov v kombinatoriko, npr. C. L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics. McGraw-Hill, New York, 1968 ali pa K. A. Rybnikov, Vvedenie v kombinatornyj analiz. Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moskva, 1972.

Vladimir Batagelj

I. M. Yaglom, A simple non-Euclidean geometry and its physical basis. Prevod iz ruščine. Springer, New York 1979. 307 str., 23,5 cm.

Avtor nas uvede v neevklidične geometrije in nato v podrobnostih izpelje najenostavnejšo od njih, Galilejevo geometrijo. Ta je v marsičem preprostejša celo od Evklidove geometrije, s katero jo avtor ves čas primerja. — Metoda obravnave je analitična. V običajni koordinatni ravnini konstruiramo model Galilejeve geometrije; slednja se zanima le za tisto, kar se ohranja pri vseh Galilejevih transformacijah: $x' = x + a$, $y' = vx + y + b$.

Uvod govori o geometriji in o njeni povezavi z mehaniko. Seznani nas s Kleinovo karakterizacijo geometrij z njihovimi transformacijskimi grupami, ki je temeljnega pomena za vso knjigo. — Sledita samo dve poglavji: prvo obravnava Galilejevo ravninsko geometrijo, drugo pa Galilejevo inverzijsko geometrijo. V sklepnem delu je izpeljana geometrija Minkowskega, ki je karakterizirana z grupo Lorentzovih transformacij iz teorije relativnosti. V dodatkih najdemo pregled vseh devetih Kleinovih geometrij z njihovo aksiomatiko in modeli.

Knjigo priporoča 227 poučnih slik ter veliko nalog in problemov, z rešitvami oziroma navodili na koncu. Posebna značilnost dela je obravnava geometrije v povezavi s teorijo relativnosti. Zato bo knjiga dobrodošla učiteljem in študentom tako matematike kakor tudi fizike.

Janez Rakovec