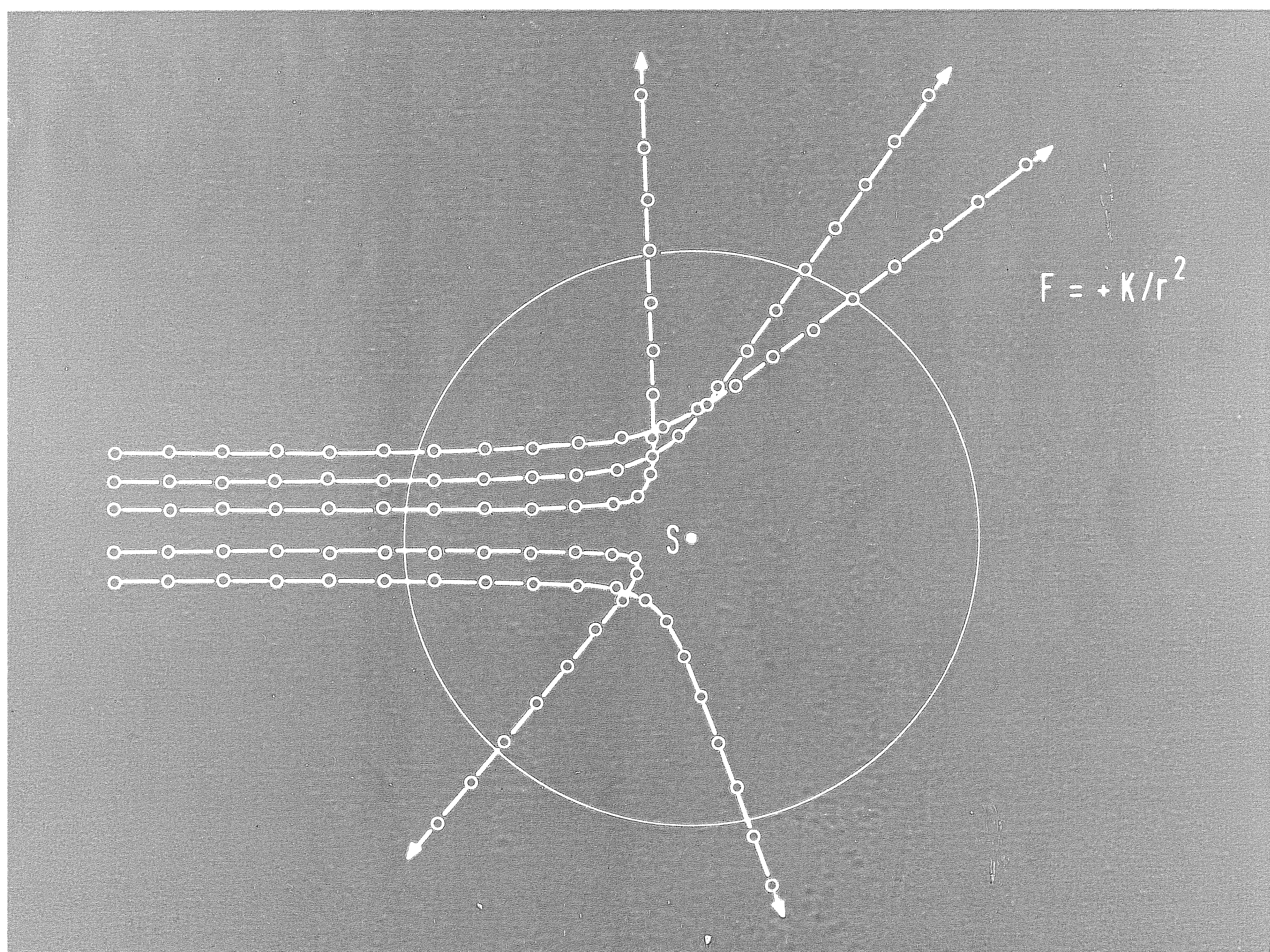


1979

Letnik 26

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1979

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovich (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU.

Naročnina: za posameznike 200.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 100.— din, za ustanove in podjetja 250.— din, za tujino 18 \$ = 324.— din, posamezna številka 40.— din, dvojna številka 80.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1400 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1979 DMFA SRS — 429

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA**Članki**

Uporaba in posplošitve Hornerjevega algoritma (Zvonimir Bohte)	129
Gibanje v polju središčnih sil (Mitja Kregar)	141

Novice

6. Mednarodni kongres za logiko, metodologijo in filozofijo znanosti (Niko Prijatelj)	150
---	-----

Domače vesti

Mednarodno tekmovanje študentov matematike v Beogradu (Mirko Dobovišek)	155
Primatijada (Nada Širca)	158
8. matematični seminar (Martina Koman)	IV

Nove knjige (Janez Rakovec, Rajko Jamnik, Peter Legiša, Egon Zakrajšek, Ivan Vidav)	149, 159
--	----------

CONTENTS**Articles**

Applications and generalizations of the Horner algorithm (Zvonimir Bohte)	129
Kinematics and dynamics in the central force field (Mitja Kregar)	141

News	150
-----------------------	-----

Home news	155
----------------------------	-----

Reviews	149, 159
--------------------------	----------

Na ovitku: Glej sliko 9 v članku Mitja Kregarja, *Gibanje v polju središčnih sil*.

UPORABA IN POSPLOŠITVE HORNERJEVEGA ALGORITMA

ZVONIMIR BOHTE

Math. Subj. Class. (1980): 65-02

Hornerjev algoritem za računanje vrednosti polinoma je že dobro desetletje del programa elementarne matematike v naši srednji šoli. Ta članek obravnava razne uporabe in posplošitve Hornerjevega algoritma, ki so prav tako elementarne in ki jih obravnavamo v okviru dodatnega pouka ali krožkov.

APPLICATIONS AND GENERALIZATIONS OF THE HORNER'S ALGORITHM

The Horner algorithm for the calculation of the value of the polynomial has been a part of the curriculum of the elementary mathematics in our middle school for the last decade. This article deals with various applications and generalizations of the Horner algorithm which are also elementary and can be included in the programme of the additional education.

1. Uvod

Anglež William George Horner (1786—1837) je objavil svojo metodo za numerično reševanje algebrائيh enačb leta 1819 v članku [3]. To je njegovo edino objavljeno delo, vendar je postal z njim zelo znan v Veliki Britaniji. Bolj kot njegova metoda je ostal v uporabi njegov algoritem za računanje vrednosti polinoma. Hornerjevo metodo je že v 13. stoletju na Kitajskem uporabljal Tian-juan. Leta 1804 je Italijan P. Ruffini metodo ponovno odkril, Horner pa neodvisno od njega 15 let pozneje. Takratna izoliranost otoka od celine je bila tolikšna, da je bilo neodvisnih odkritij mnogo.

Hornerjev algoritem za računanje vrednosti polinoma je pri nas že dobro znan, saj spada že več kot desetletje v program elementarne matematike ([5]). Na kratko ponovimo osnovno idejo.

Naj bo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

dan polinom z realnimi koeficienti stopnje n , torej naj bo $a_n \neq 0$. Osnovna in zelo pogosta naloga je izračunati vrednost polinoma pri danem realnem argumentu c .

Vrednost polinoma (1) pri argumentu $x = c$ lahko direktno izračunamo tako, da izračunamo sproti vse potence c^k , jih pomnožimo z ustreznimi koeficienti a_k in vse produkte seštejemo. Ta direktni algoritem lahko zapišemo takole:

$$p_1 = c, \quad s_1 = a_1 c + a_0$$

$$p_k = c \cdot p_{k-1}, \quad s_k = a_k \cdot p_k + s_{k-1}; \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$$p(c) = s_n$$

Tu so p_k potence c^k , s_k pa delne vsote v vrednosti polinoma. Če predpostavimo, da ni noben koeficient polinoma enak nič in da je tudi $c \neq 0$, potem

moramo za izračun vrednosti polinoma stopnje n opraviti $2n - 1$ množenj in n seštevanj (ali odštevanj).

Za zgled izračunajmo vrednost polinoma

$$p(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 \tag{2}$$

pri argumentu $x = 2$.

Računanje z direktnim algoritmom lahko uredimo v tole tabelo:

k	a_k	p_k	s_k
0	-7		
1	6	2	5
2	-5	4	-15
3	4	8	17
4	-3	16	-31
5	2	32	33

Rezultat je $p(2) = 33$.

Hornerjev algoritem je bolj ekonomičen. Vzemimo, da smo polinom $p(x)$ delili z binomom $x - c$ in da smo dobili kvocient

$$q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1$$

ter ostanek b_0 . Potem velja

$$p(x) = (x - c) q(x) + b_0 \tag{3}$$

in očitno je

$$p(c) = b_0$$

Ker velja enačba (3) za vsak x , se polinoma na obeh straneh ujemata v vseh koeficientih. Velja torej

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \\ a_k &= b_k - c \cdot b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \end{aligned}$$

Od tod lahko po vrsti izračunamo vse koeficiente kvocienta in ostanek. To je Hornerjev algoritem:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_k &= c \cdot b_{k+1} + a_k, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \end{aligned}$$

Računanje lahko uredimo v pregledno shemo:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c		$c \cdot b_n$	$c \cdot b_{n-1}$	$\dots$	$c \cdot b_2$	$c \cdot b_1$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	$b_0 = p(c)$

V prvi vrstici so podani koeficienti polinoma, v zadnji pa koeficienti kvocienta in ostanek. Števila v zadnji vrstici so vsote števil nad njimi. S Hornerjevim algoritmom dobimo torej poleg vrednosti polinoma pri argumentu c kot stranski produkt še koeficiente kvocienta polinoma z binomom $x - c$.

Pri tem moramo opraviti samo n množenj in n seštevanj, torej je ta algoritem bolj ekonomičen od direktnega.

Vrednost polinoma (2) pri $x = 2$ izračunamo takole:

	2	—3	4	—5	6	—7
2		4	2	12	14	40
	2	1	6	7	20	33

Torej je $p(2) = 33$ in

$$q(x) = 2x^4 + x^3 + 6x^2 + 7x + 20$$

Uporaba Hornerjevega algoritma je zelo obsežna in raznovrstna ([1], [5]). Naštejmo samo nekaj najbolj pogostih uporab. Če želimo narisati graf polinoma, moramo izračunati vrednost polinoma pri raznih vrednostih argumenta. S Hornerjevim algoritmom je tabeliranje polinoma zelo preprosto. Če ima polinom celoštevilске koeficiente, lahko s Hornerjevim algoritmom hitro ugotovimo vse morebitne racionalne ničle polinoma. V poštev pridejo le ulomki $\pm p/q$, kjer je p delitelj svobodnega koeficienta a_0 , q pa delitelj vodilnega koeficienta a_n . Če je vrednost polinoma enaka nič, smo ugotovili ničlo, obenem pa smo našli še polinom, ki ima za ničle preostale ničle prvotnega polinoma. Pri iskanju nadaljnjih ničel imamo potem manj dela. S Hornerjevim algoritmom lahko ugotovimo meje realnih ničel. Če so na primer pri nekem $c > 0$ vsi $b_k > 0$, $k = n, n-1, \dots, 1, 0$, potem je c zgornja meja za ničle polinoma.

Najpogosteje seveda uporabljamo Hornerjev algoritem pri numeričnem računanju korenov algebraičnih enačb (npr. s sekantno metodo ([1], [2], [5])), kjer moramo računati vrednost polinoma pri vse boljših približkih za koren. Ko smo zadovoljni z natančnostjo približka, dobimo ob zadnjem računanju vrednosti polinoma hkrati tudi koeficiente reduciranega polinoma, s katerim nadaljujemo računanje drugih korenov.

Na koncu tega uvoda omenimo še dve izpeljavi Hornerjevega algoritma.

Prva kaže na to, da je Hornerjev algoritem le okrajšano deljenje polinoma z binomom $x - c$. Oglejmo si to na primeru $n = 3$.

Dolgo deljenje polinoma

$$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

z binomom $x - c$ poteka takole:

$$\begin{array}{r}
 (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) : (x - c) = b_3 x^2 + b_2 x + b_1 \\
 \underline{-(b_3 x^3 + c b_3 x^2)} \\
 b_2 x^2 + a_1 x \\
 \underline{-(b_2 x^2 + c b_2 x)} \\
 b_1 x + a_0 \\
 \underline{-(b_1 x + c b_1)} \\
 b_0
 \end{array}$$

Pri tem je $b_3 = a_3$, $b_2 = a_2 + c b_3$, $b_1 = a_1 + c b_2$, $b_0 = a_0 + c b_1$. V Hornerjevi shemi nastopajo le mastno tiskana števila. Vse drugo je pri dolgem deljenju samo nepotreben balast.

Najhitreje pa Hornerjev algoritem za računanje vrednosti polinoma razložimo z uporabo oklepajev. V našem primeru $n = 3$ imamo:

$$a_3 c^3 + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = ((a_3 c + a_2) c + a_1) c + a_0$$

Pri tem so vrednosti izrazov v posameznih oklepajih naši $b_2 = b_3 c + a_2$, b_3 je namreč enak a_3 , $b_1 = b_2 c + a_1$ in $b_0 = b_1 c + a_0$. Pri tej izpeljavi pa se na prvi pogled ne vidi, da so delni rezultati b_k koeficienti kvocienta.

Oglejmo si sedaj nekaj razširitev in posplošitev Hornerjevega algoritma in njihovo uporabo.

2. Taylorjeva oblika polinoma

Vsak polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{4}$$

moremo zapisati v obliki

$$p(x) = b_n (x - c)^n + b_{n-1} (x - c)^{n-1} + \dots + b_1 (x - c) + b_0 \tag{5}$$

ki jo imenujemo Taylorjeva oblika polinoma. To obliko dobimo, če polinom (4) razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke c . Ta je seveda za polinom končna.

Z zaporednim odvajanjem polinoma (5) dobimo tele zveze med odvodi polinoma pri $x = c$ in koeficienti b_k :

$$p^{(k)}(c) = k! b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{6}$$

Obenem pa iz oblike (5) sledi tudi, da so koeficienti $b_0, b_1, \dots, b_n$ ostanki pri zaporednem deljenju polinoma z binomom $x - c$. Ta deljenja lahko ekonomično opravimo s Hornerjevim algoritmom.

Za zgled razvijmo polinom (2) po potencah $x - 2$. Razširjena Hornerjeva shema je v tem primeru:

	2	—3	4	—5	6	—7
2		4	2	12	14	40
	2	1	6	7	20	33 = b_0
2		4	10	32	78	
	2	5	16	39	98 = b_1	
2		4	18	68		
	2	9	34	107 = b_2		
2		4	26			
	2	13	60 = b_3			
2		4				
	2	17 = b_4				
	2	2 = b_5				

Torej imamo rezultat

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = \\ &= 2(x-2)^5 + 17(x-2)^4 + 60(x-2)^3 + 107(x-2)^2 + \\ &\quad + 98(x-2) + 33 \end{aligned}$$

Od tod in s formulami (6) dobimo hitro tudi odvode polinoma (2) pri $x = 2$:

$$\begin{aligned} p(2) &= 33, \quad p'(2) = 98, \quad p''(2) = 2 \cdot 107 = 214, \\ p^{(3)}(2) &= 6 \cdot 60 = 360, \quad p^{(4)}(2) = 24 \cdot 17 = 408, \quad p^{(5)}(2) = 120 \cdot 2 = 240 \end{aligned}$$

Nekatere numerične metode za reševanje algebraičnih enačb zahtevajo poleg računanja njegove vrednosti tudi računanje odvodov polinoma, na primer Newtonova metoda ([1], [2], [5]) še prvega odvoda ali Laguerrova metoda ([2]) še prvih dveh odvodov.

Računanje odvoda polinoma po opisani metodi zahteva $2n - 1$ množenj. Če bi polinom najprej odvajali ($n - 1$ množenj) in nato izračunali vrednost po Hornerjevi metodi ($n - 1$ množenj), bi to skupaj dalo $2n - 2$ množenj. Vendar ne smemo pozabiti, da dobimo z razširjeno Hornerjevo shemo hkrati tudi vrednost polinoma, kar je vsekakor bolj ugodno, kadar potrebujemo oboje.

Glavna uporaba Taylorjeve oblike polinoma je Hornerjeva metoda za računanje realnih korenov algebraičnih enačb. Ideja metode je v tem, da najprej koren omejimo med dve zaporedni celi števili, nato pa sistematično določamo v korenu decimalko za decimalko. Ta metoda je podrobno razložena v [1]. Danes Hornerjeve metode ne uporabljamo več, saj je znanih mnogo drugih bolj učinkovitih metod.

3. Deljenje polinoma s trinomom

Hornerjevo metodo za deljenje polinoma z binomom lahko razširimo na deljenje s trinomom

$$r(x) = x^2 - px - q \quad (7)$$

Vzemimo, da smo delili polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (8)$$

s trinomom (7) in da smo pri tem dobili kvocient

$$q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_3 x + b_2$$

in ostanek $b_1 x + b_0$. Potem velja za vsak x enačba

$$p(x) = r(x) q(x) + b_1 x + b_0 \quad (9)$$

Torej se koeficienti obeh polinomov na levi in desni strani te enačbe ujemajo:

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - p \cdot b_n \\ a_k &= b_k - p \cdot b_{k+1} - q \cdot b_{k+2}, \quad k = n-2, n-3, \dots, 2, 1 \\ a_0 &= b_0 - q \cdot b_2 \end{aligned}$$

Iz teh enačb lahko po vrsti izračunamo koeficiente $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$ s temle algoritmom:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + p \cdot b_n \\ b_k &= a_k + p \cdot b_{k+1} + q \cdot b_{k+2}, \quad k = n-2, n-3, \dots, 2, 1 \\ b_0 &= a_0 + q \cdot b_2 \end{aligned}$$

Računska shema je

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
p		pb_n	pb_{n-1}	$\dots$	pb_3	pb_2	
q			qb_n	$\dots$	qb_4	qb_3	qb_2
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_2	b_1	b_0

Števila v zadnji vrstici so vsote števil nad njimi.

Za zgled delimo polinom (2) s trinomom $x^2 - 2x + 5$:

	2	—3	4	—5	6	—7
2		4	2	—8	—36	
—5			—10	—5	20	90
	2	1	—4	—18	—10	83

Dobili smo kvocient $2x^3 + x^2 - 4x - 18$ in ostanek $-10x + 83$.

Ta algoritem uporabljamo predvsem takrat, kadar želimo izračunati vrednost polinoma pri kompleksnem argumentu.

Vzemimo, da želimo izračunati vrednost polinoma (8) pri

$$x = c + id$$

Ker je

$$(x - c - id)(x - c + id) = x^2 - 2cx + c^2 + d^2$$

je očitno

$$r(c \pm id) = 0$$

če v (7) vzamemo

$$p = 2c, \quad q = -(c^2 + d^2)$$

Zato iz (9) sledi

$$p(c + id) = b_1(c + id) + b_0 = b_1c + b_0 + ib_1d$$

Vrednost polinoma (2) pri $x = 1 + 2i$ je vrednost ostanka pri deljenju tega polinoma s trinomom $x^2 - 2x + 5$ pri tem x . To deljenje smo že opravili, zato je

$$p(1 + 2i) = -10(1 + 2i) + 83 = 73 - 20i$$

Osnovni Hornerjev algoritem pri kompleksnem argumentu zahteva $4n - 2$ realnih množenj, splošeni Hornerjev algoritem pa le $2n + 3$ realnih množenj.

Če je $c + id$ ničla polinoma (8), potem sta b_1 in b_0 nič in tedaj dobimo s tem algoritmom tudi koeficiente polinoma $q(x)$, ki ima za ničle vse preostale ničle polinoma $p(x)$.

Podobno kot pri realnem argumentu lahko izračunamo vrednost odvoda polinoma pri kompleksnem argumentu z razširjeno Hornerjevo shemo.

Najlažje je priti do ustreznega algoritma z odvajanjem enačbe (9):

$$p'(x) = r(x) q'(x) + (2x - p) q(x) + b_1$$

Če vstavimo za x število $c + id$ in upoštevamo, da je $r(c + id) = 0$, dobimo

$$p'(c + id) = (2c - p + 2id) q(c + id) + b_1$$

Podaljšana Hornerjeva shema nam da $q(c + id)$, nato pa lahko hitro izračunamo odvod.

Ta račun nam pride prav, kadar računamo kompleksne korene algebraičnih enačb z Newtonovo metodo, pri kateri pa moramo za začetni približek vzeti kompleksno število.

Kompleksne korene algebraičnih enačb lahko računamo tudi z metodo Bairstow-Hitchcock ([1]), pri kateri moramo tudi na vsakem koraku iteracije dvakrat deliti polinom s trinomom.

Posplošitev Hornerjevega algoritma na deljenje dveh polinomov poljubne stopnje je prav tako mogoča.

Napišimo samo računsko shemo za deljenje polinoma (8) s polinomom $x^3 - px^2 - qx - r$, ki si jo lahko vsak bralec izpelje sam:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	a_0
p		pb_n	pb_{n-1}	pb_{n-2}	$\dots$	pb_4	pb_3		
q			qb_n	qb_{n-1}	$\dots$	qb_5	qb_4	qb_3	
r				rb_n	$\dots$	rb_6	rb_5	rb_4	rb_3
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_3	b_2	b_1	b_0

V zadnji vrstici dobimo koeficiente kvocienta $b_n x^{n-3} + b_{n-1} x^{n-4} + \dots + b_4 x + b_3$ in ostanka $b_2 x^2 + b_1 x + b_0$.

Deljenje polinomov poljubnih stopenj potrebujemo na primer pri Evklidovem algoritmu za določevanje največjega skupnega delitelja dveh polinomov.

4. Faktorialni polinomi

Faktorialni polinomi pogosto nastopajo v numerični analizi pri interpolaciji funkcij in v diferenčnem računu ([6]).

Splošni faktorialni polinomi so definirani takole:

$$p_0(x) = 1$$

$$p_k(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Polinom $p_k(x)$ je polinom stopnje k z vodilnim koeficientom 1, ki ima za ničle vse ničle polinoma $p_{k-1}(x)$ in še dodatno ničlo a_k .

Prva naloga naj bo izračun vrednosti polinoma

$$p(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_n p_n(x) \tag{11}$$

pri danem realnem argumentu x .

Direktni algoritem je enostaven:

$$\begin{aligned} q_1 &= x - a_1, & s_1 &= c_1 q_1 + c_0 \\ q_k &= (x - a_k) q_{k-1}, & s_k &= c_k q_k + s_{k-1}, & k &= 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Rezultat je

$$p(x) = s_n$$

Pri tem algoritmu je treba opraviti $2n - 1$ množenj in $2n$ seštevanj. Tu smo sproti računali vrednosti faktorialnih polinomov q_k in delnih vsot s_k .

Tudi pri tej nalogi obstaja bolj učinkovit algoritem, ki je posplošitev Hornerjevega algoritma. Za primer $n = 3$ lahko namreč zapišemo $p(x)$ takole:

$$p(x) = ((c_3(x - a_3) + c_2)(x - a_2) + c_1)(x - a_1) + c_0$$

Če posamezne delne rezultate označimo z $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$, imamo tale algoritem:

$$\begin{aligned} b_n &= c_n \\ b_k &= (x - a_{k+1}) b_{k+1} + c_k, & k &= n - 1, n - 2, \dots, 1, 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Rezultat je

$$p(x) = b_0$$

Dokažemo ga tako, da izpišemo vse enačbe (12), jih po vrsti pomnožimo s $p_n(x), p_{n-1}(x), \dots, p_1(x), p_0(x)$ in seštejemo. Pri tem dobimo enačbo

$$b_0 + \sum_{k=1}^n b_k p_k(x) = \sum_{k=1}^n b_k (x - a_k) p_{k-1}(x) + p(x)$$

v kateri se vsoti na obeh straneh uničita, saj očitno velja zveza

$$p_k(x) = (x - a_k) p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Posplošeni Hornerjev algoritem zahteva le n množenj. Računska shema za računanje vrednosti polinoma (11) je le nekoliko bolj komplicirana od standardne:

c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\dots$	c_1	c_0
$(x - a_n) b_n$	$(x - a_{n-1}) b_{n-1}$	$\dots$	$(x - a_2) b_2$	$(x - a_1) b_1$	
b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	b_0

Hornerjev algoritem je poseben primer tega splošnejšega algoritma, če je

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Tedaj so faktorialni polinomi navadne potence.

Pri interpolaciji v ekvidistantnih točkah nastopajo tako imenovane posplošene potence:

$$p_k(x) = x^{(k)} = x(x - 1) \dots (x - k + 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

To so faktoralni polinomi za

$$a_k = k - 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Za zgled izračunajmo vrednost polinoma

$$p(x) = 5x^{(4)} - 4x^{(3)} + 3x^{(2)} - 2x^{(1)} + 1$$

pri $x = 4$:

5	—4	3	—2	1
	1×5	2×1	3×5	4×13
5	1	5	13	53

Rezultat je

$$p(4) = 53$$

Druga pogosta naloga je preureditev danega polinoma po faktorialnih polinomih.

Vzemimo, da imamo podan polinom

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Želimo ga zapisati v obliki

$$p(x) = c_n p_n(x) + c_{n-1} p_{n-1}(x) + \dots + c_1 p_1(x) + c_0 p_0(x)$$

kjer so $p_k(x)$ faktorialni polinomi (10).

Ker imajo vsi polinomi $p_1(x), \dots, p_n(x)$ faktor $x - a_1$, vsi polinomi $p_2(x), \dots, p_n(x)$ faktor $x - a_2$ itd., je očitno, da so koeficienti $c_0, c_1, \dots, c_n$ ostanki pri zaporednem deljenju polinoma $p(x)$ z binomi $x - a_1, x - a_2, \dots, x - a_n$.

Za zgled razvijmo polinom (2) po posplošenih potencah. Polinom moramo deliti z $x, x - 1, x - 2, x - 3, x - 4$.

	2	—3	4	—5	6	—7 = c_0
1		2	—1	3	—2	
	2	—1	3	—2	4 = c_1	
2		4	6	18		
	2	3	9	16 = c_2		
3		6	27			
	2	9	36 = c_3			
4		8				
	2	17 = c_4				
	2 = c_5					

Rezultat je

$$2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = 2x^{(5)} + 17x^{(4)} + 36x^{(3)} + 16x^{(2)} + 4x^{(1)} - 7$$

Če so vsi $a_1, a_2, \dots, a_n$ enaki c , so posplošeni polinomi kar premaknjene potence $p_k(x) = (x - c)^k$ in preureditev polinoma nam da ravno Taylorjev polinom.

5. Ortogonalni polinomi

Pravimo, da so polinomi

$$p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots$$

ortogonalni glede na skalarni produkt $(\cdot, \cdot)$, če velja za $i \neq k$

$$(p_i(x), p_k(x)) = 0$$

Pri tem je $p_k(x)$ polinom stopnje k .

Dva najbolj pogosta primera skalarnega produkta sta:

$$(p_i(x), p_k(x)) = \sum_{j=1}^N p_i(x_j) p_k(x_j)$$

kjer so $x_1, x_2, \dots, x_N$ dani argumenti, in

$$(p_i(x), p_k(x)) = \int_a^b w(x) p_i(x) p_k(x) dx$$

kjer je $[a, b]$ dan interval in $w(x) > 0$ primerna zvezna funkcija (utež), za katero velja

$$\int_a^b x^n w(x) dx < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Do ortogonalnih polinomov vedno lahko pridemo z ortogonalizacijo zaporedja potenc $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$. Za računanje z ortogonalnimi polinomi je zelo pomembno, da ortogonalni polinomi zadoščajo tričlenski rekurzivni relaciji, ki jo v splošnem lahko zapišemo takole:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \quad p_1(x) = a_0 x + b_0 \\ p_{k+1}(x) &= (a_k x + b_k) p_k(x) + c_k p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{13}$$

Tu so koeficienti a_k, b_k, c_k v preprosti zvezi z vodilnima koeficientoma polinomov $p_{k+1}(x), p_k(x), p_{k-1}(x)$ ([4]).

V uporabni matematiki dostikrat aproksimiramo dano funkcijo s polinomom, ki se izraža kot linearna kombinacija ortogonalnih polinomov:

$$p(x) = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + \dots + d_n p_n(x) \tag{14}$$

Vzemimo, da želimo izračunati vrednost tega polinoma pri danem argumentu x .

Direktni algoritem je v tem, da sproti računamo vrednosti ortogonalnih polinomov pri danem x iz rekurzivne relacije (13) in tako po vrsti dodajamo člene v vsoti (14):

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, \quad q_1 = a_0 x + b_0, \quad s_1 = d_0 + d_1 q_1 \\ q_{k+1} &= (a_k x + b_k) q_k + c_k q_{k-1}, \quad s_{k+1} = s_k + d_{k+1} q_{k+1}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Rezultat je

$$p(x) = q_n$$

Pri tem moramo v splošnem opraviti $4n-2$ množenj.

Nekoliko dela si lahko prihranimo, če posplošimo metodo iz prejšnjega razdelka.

Pri danem x izračunamo zaporedje števil $f_n, f_{n-1}, \dots, f_1, f_0$ po temle pravilu:

$$\begin{aligned} f_n &= d_n, \quad f_{n-1} = (a_{n-1} x + b_{n-1}) f_n + d_{n-1} \\ f_k &= (a_k x + b_k) f_{k+1} + c_k f_{k+2} + d_k, \quad k = n-2, \dots, 1, 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Rezultat je

$$p(x) = f_0 \quad (16)$$

O tem se prepričamo, če pomnožimo vsak $f_k, k = n, n-1, \dots, 1, 0$ z ustreznim $p_k(x)$ in vse enačbe seštejemo. Tako dobimo

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1} p_{k+1}(x) + f_1 p_1(x) + f_0 p_0(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1} (a_k x + b_k) p_k(x) + f_1 (a_0 x + b_0) p_0(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1} c_k p_{k-1}(x) + \sum_{k=0}^n d_k p_k(x) \end{aligned}$$

Ker veljajo za polinome $p_k(x)$ relacije (13), se vsi členi pri istem $f_{k+1}, k = 1, \dots, n-1$ uničijo. Isto velja za člen pri f_1 . Zato ostane:

$$f_0 p_0(x) = \sum_{k=0}^n d_k p_k(x)$$

kar je ravno enačba (16).

Za izračun vrednosti polinoma (14) po tem algoritmu je v splošnem treba le $3n-1$ množenj. Če so a_k in/ali c_k vsi enaki 1, je pridobitev z novim algoritmom še toliko večja.

Računsko shemo lahko zapišemo takole:

d_n	d_{n-1}	$d_{n-2} \dots$	d_1	d_0
$(a_{n-1} x + b_{n-1}) f_n$	$(a_{n-2} x + b_{n-2}) f_{n-1}$	$\dots$	$(a_1 x + b_1) f_2$	$(a_0 x + b_0) f_1$
		$c_{n-2} f_n \dots$	$c_1 f_3$	$c_0 f_2$
f_n	f_{n-1}	$f_{n-2} \dots$	f_1	f_0

Algoritem (15), (16) imamo lahko za splošen, saj dobimo za posebne vrednosti koeficientov rekurzivne formula za vse dosedanje algoritme. Faktorialne polinome dobimo npr. za $c_k = 0$, $a_k = 1$, $b_k = -a_k$.

Učinkoviti algoritmi za računanje vrednosti polinomov, razvitih po drugih funkcijah, so za avtomatično računanje zelo pomembni.

Za primer si oglejmo računanje vrednosti polinoma

$$p(x) = d_0 T_0(x) + d_1 T_1(x) + \dots + d_n T_n(x)$$

kjer so $T_k(x)$ polinomi Čebyševa, ki so ortogonalni na intervalu $[-1, +1]$ z utežjo $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Velja ([4])

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$$

Rekurzivna relacija, ki sledi iz adicijskega teorema za funkcijo $\cos x$, je

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

pri čemer je

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

Formule (15) so v tem primeru

$$f_n = d_n, \quad f_{n-1} = 2x f_n + d_{n-1}$$

$$f_k = 2x f_{k+1} - f_{k-2} + d_k, \quad k = n-2, \dots, 1$$

$$f_0 = x f_1 - f_2 + d_0$$

Zadnja enačba se razlikuje od splošne zaradi tega, ker velja $T_1(x) = x T_0(x)$ in ne $T_1(x) = 2x T_0(x)$. Produkt $2x$ izračunamo seveda samo enkrat. Za izračun vrednosti $p(x)$ moramo v tem primeru opraviti le n množenj.

LITERATURA

- [1] Z. Bohte, *Numerično reševanje enačb*, DZS, Ljubljana 1974.
- [2] Z. Bohte, *Numerične metode*, DZS, Ljubljana 1978.
- [3] W. G. Horner, *A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation*, Phil. Trans. Roy. Soc. Vol. 109, 1819.
- [4] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, MK, Ljubljana 1969.
- [5] F. Križanič, *Aritmetika, algebra in analiza za gimnazije*, III. del, DZS, Ljubljana 1975.
- [6] A. Vadnal, *Osnove diferenčnega računa*, DZS, Ljubljana 1979.

GIBANJE V POLJU SREDIŠČNIH SIL

MITJA KREGAR

UDK 531.32

Z računalnikom numerično obravnavamo gibanje točkastih teles v polju središčnih sil.

KINEMATICS AND DYNAMICS IN THE CENTRAL FORCE FIELD

The kinematics and dynamics of bodies in central force fields is studied numerically using a desk calculator.

Pri pouku fizike v srednji šoli in na univerzi navadno obravnavamo gibanje teles le v preprostih poljih sil ali pa se omejimo na posebno preproste tire. Tako se na primer pri gibanju teles v polju središčnih sil običajno omejimo le na kroženje. Vendar zdaj ko so dosegljivi manjši žepni ali namizni elektronski računalniki, spet lahko oživimo numerično reševanje kinematičnih in dinamičnih problemov. Tako zlahka dobimo nekatere zanimive rezultate, do katerih bi sicer na tej ravni težko prišli.

Prispevek želi opozoriti na tak način pouka z numeričnim obravnavanjem ravninskega gibanja v polju središčnih sil $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ z namiznim računalnikom. (Račun zlahka posplošimo na nesrediščne sile.) Privzemimo, da bralec pozna premo gibanje in kroženje ter vektorsko seštevanje.

Z računalnikom izračunamo tir telesa $\mathbf{r}(t)$ z maso m , na katerega deluje središčna sila $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ v časovnih razmikih dt pri izbrani začetni legi $\mathbf{r}(0)$ in hitrosti $\mathbf{v}(0)$. Središče sile izberemo za izhodišče koordinatnega sistema S . V računalnik zapišemo začetna podatka $\mathbf{r}(0)$ in $\mathbf{v}(0)$, analitično zapisano silo $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ in časovni interval dt . Program sestavljajo podprogrami, ki se ciklično ponavljajo:

- a) za izpis (risanje, če je priključen risalnik) $\mathbf{r}(t)$
- b) za računanje $\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) dt$ in
- c) za računanje $\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a} dt$.

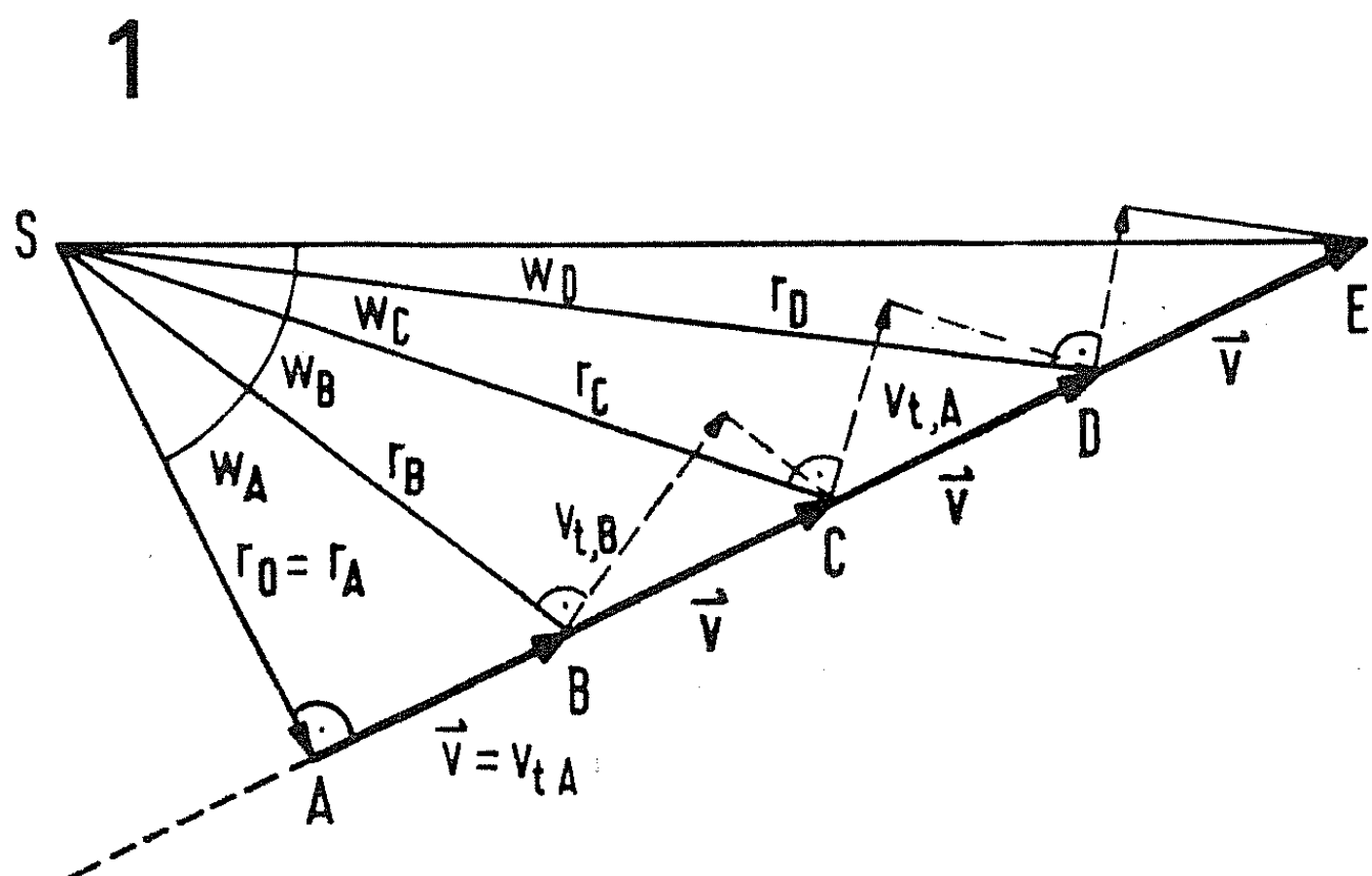
Vektor pospeška $\mathbf{a}$ je usmerjen proti središču, njegova velikost je $a = F(r)/m$.

Posebnosti gibanja v polju središčnih sil spoznavamo sproti, ko analiziramo tir telesa. Proučujemo le primere, pri katerih je

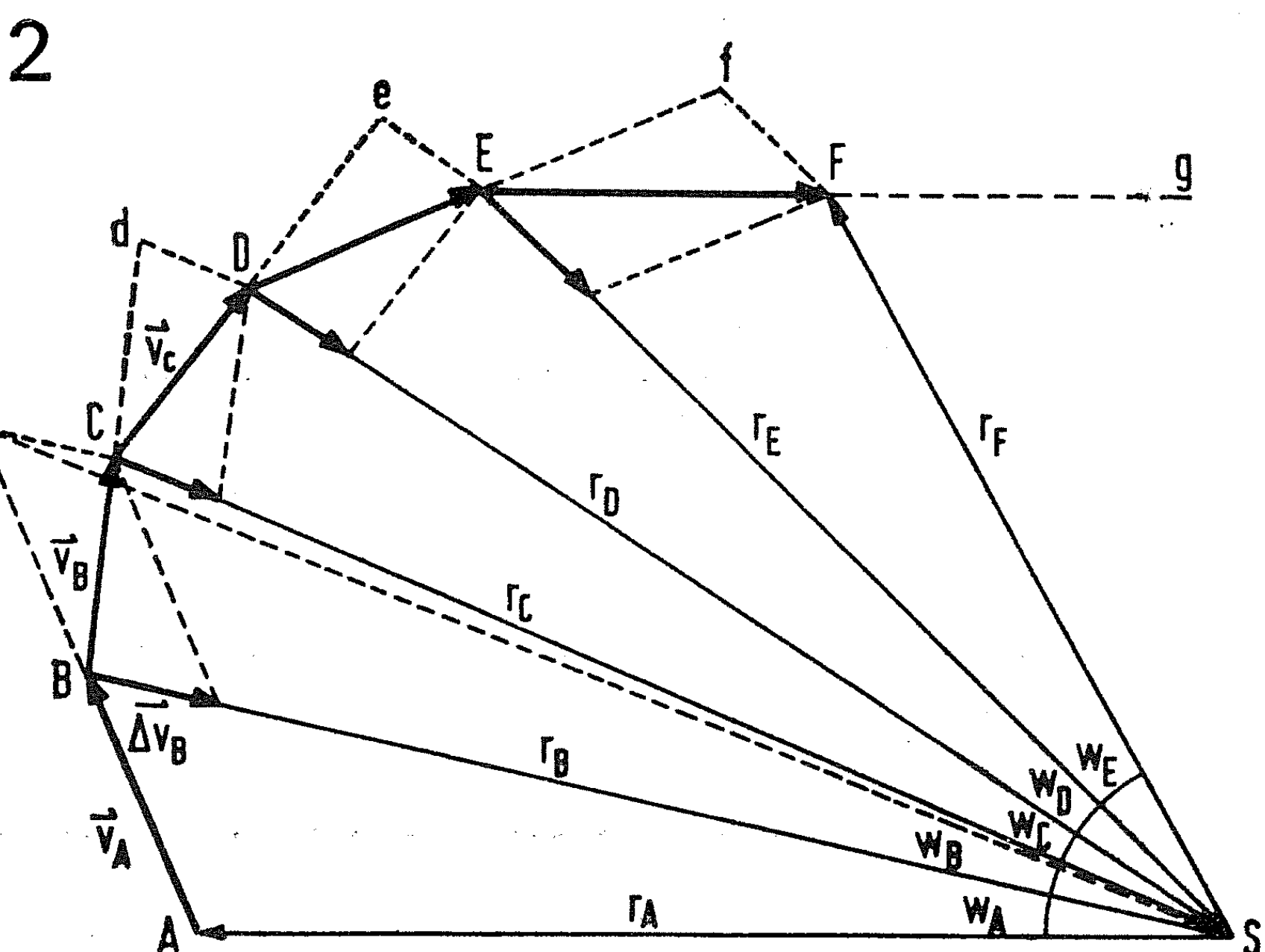
$$F = k r^n \quad (1)$$

Zlasti so zanimivi primeri z $n = 1, 0, -1$, in -2 .

Začnimo z najpreprostejšim primerom, ko je konstanta k v enačbi (1) enaka 0. Tir telesa je premica, točke $A, B, C, \dots$ so lege telesa v časovnih razmikih po $dt = 1$ s (sl. 1). Daljice $\overline{AB}, \overline{BC}, \dots$ ustrezajo hitrosti. Telo se giblje premo enakomerno skladno s 1. Newtonovim zakonom. S hitrostjo se ohranja tudi gibalna količina $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$.



Sl. 1. Če je središčna sila enaka 0, se telo giblje premo enakomerno, lege telesa (točke A, B, C...) ustrezajo enakomernim časovnim presledkom $dt = 1s$. Poleg gibalne količine $G = mv$ se ohranja tudi vrtilna količina $\Gamma = m\omega^2 r$ glede na poljubno izbrano središče S.



Sl. 2. Tir telesa v polju privlačne sile po Newtonu [1]. Ker sila spreminja samo radialno komponento hitrosti, se ploščinska hitrost (vrtilna količina) še vedno ohranja, saj so površine trikotnikov ASB, BSC itd. enake.

Glede na izbrano središče S (ki je poljubno, če ni sile) lahko definiramo še dve fizikalno zanimivi količini, ki se pri takšnem gibanju ohranjata. Prva je ploščinska hitrost v_s , to je ploščina, ki jo radij vektor opiše v časovni enoti. Trikotniki ABS, BCS itd. so vsi ploščinsko enaki, ker imajo enako osnovnico v in enako višino r_0 :

$$2v_s = vr_0 = konst. \quad (2)$$

Produkt dvojne ploščinske hitrosti z maso pa je ustrezna dinamična konstanta tega premega enakomernega gibanja, ki jo imenujemo vrtilno količino:

$$\Gamma = 2mv_s = mvr_0 = konst. \quad (3)$$

Ker je ploščina trikotnikov BCS itd. tudi produkt osnovnice r in višine v_t : $vr_0 = r_i v_{t,i}$ in ker lahko definiramo kotno hitrost $\omega_i = v_{t,i}/r_i$, je to tudi

$$\Gamma = mr_i v_{t,i} = mr_i^2 \omega_i = konst.$$

Ti dve konstanti gibanja sta zanimivi predvsem zato, ker se ohranjata tudi v polju središčnih sil, kar zlahka dokažemo.

Vzemimo zdaj, da je $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$. Tir telesa, ki se giblje v polju središčne privlačne sile, približno ponazorimo z lomljeno črto, katere ravni deli ustrezajo premikom v časovnih razmikih dt (sl. 2). Posamezne dele tira nadomestimo z odseki premic za premo enakomerno gibanje, na koncu vsakega časovnega intervala pa popravimo vektor hitrosti za $d\mathbf{v} = d\mathbf{G}/m = \mathbf{F}dt/m$. Ker je sila F središčna, se spremeni le radialna komponenta hitrosti. Pri $dt = 1s$ je sprememba hitrosti dv po merskem številu enaka pospešku a . To spremembo hitrosti dv prištejemo vektorju hitrosti $\mathbf{v}_A$ na koncu intervala dt in jo zato označimo $d\mathbf{v}_B$. V naslednjem časovnem intervalu dt je hitrost telesa $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{v}_B$ in telo pripotuje v točko C. Ko bi sile ne bilo, bi se telo premaknilo v točko c. Ploščina trikotnika BCS pa je še vedno enaka ploščini trikotnika BcS (ki je ploščinsko enak trikotniku ABS), saj imata oba trikot-

nika enako osnovnico $\overline{BS}$ in — ker je daljica cC vzporedna daljici $\overline{BS}$ — tudi enako višino. Ploščinska hitrost se potemtakem ohranja.*

Tako korakoma nadaljujemo. V naslednjem časovnem intervalu pridemo tako v točko D namesto v točko d, itd. Lomljena črta ABCD... je približen tir telesa. Če časovni interval dt zmanjšujemo, preide lomljena črta ABCD v gladko krivuljo — pravi tir telesa. Na opisani način so izračunane poti teles v poljih središčnih sil na sl. 3—6 in 9.

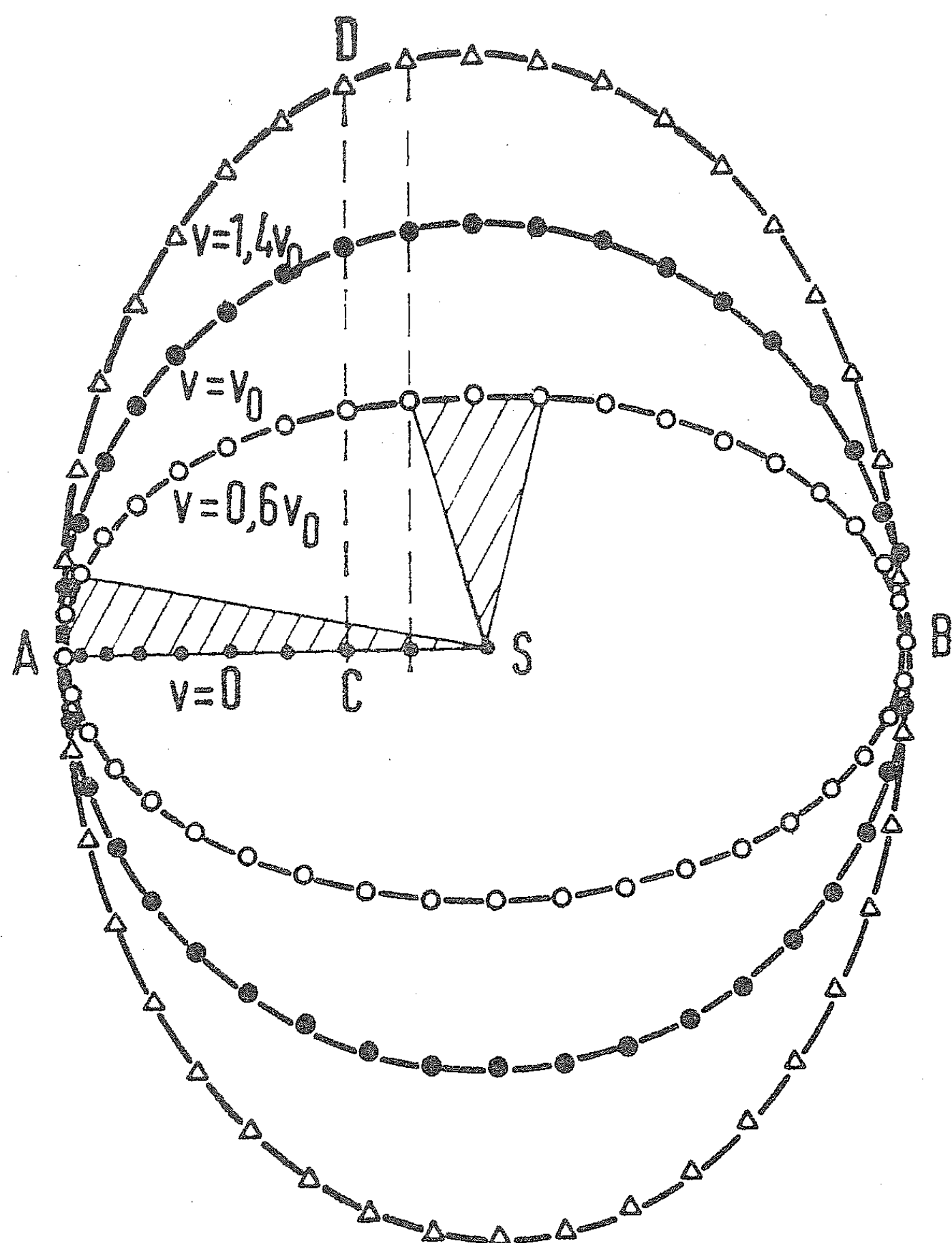
Spoznali smo izrek o ohranitvi vrtilne količine telesa za gibanje v polju središčnih sil. *Ploščinska hitrost — s tem tudi vrtilna količina — telesa, ki se giblje v polju središčne sile, se ohranja.* Spomnimo se drugega Keplerjevega zakona, ki pravi, da zariše radij vektor od Sonca do planeta v enakih časovnih intervalih enake ploščine. Ta zakon torej pove, da je sila na planet središčna sila, s središčem v Soncu.

Za hip se omejimo na krožne tire. Tedaj velja $F(r) = mv_0^2/r$ in krožilna hitrost v_0 in obhodni čas T sta takole odvisna od razdalje r , sile $F(r)$ in mase telesa:

$$v_0 = [rF(r)/m]^{1/2} \quad T = 2\pi r/v_0 = 2\pi[mr/F(r)]^{1/2} \quad (4), (5)$$

Privlačna sila na telo je pogosto sorazmerna z oddaljenostjo telesa od izbranega središča: $F = -kr$ (npr. pri nihalih na vijačno vzmet ali pri matematičnem nihalu, če so odmiki od ravnovesnih leg dovolj majhni).

Sl. 3 kaže v takšnem polju tire telesa, ki se začne gibati iz točke A pravokotno na radij z različnimi začetnimi hitrostmi. Hitrost, pri kateri telo kroži, označimo z v_0 . V splošnem je tir telesa elipsa s središčem sile v središču elipse. Poseben primer nastopi, če je začetna hitrost enaka nič: telo sinusno niha.



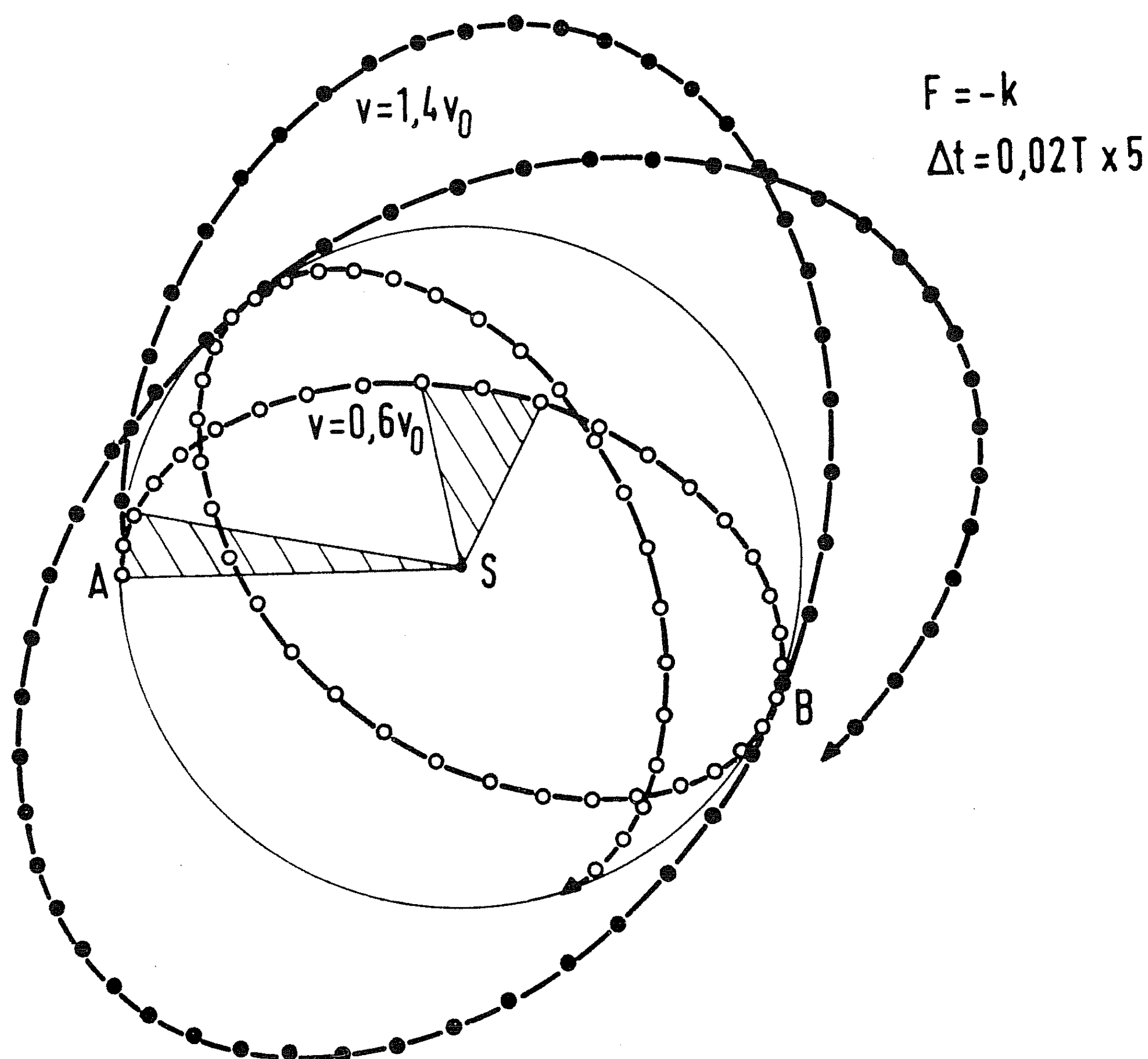
Sl. 3. Tiri telesa v polju središčne sile $F = -kr$ za začetne hitrosti $v = 0,6v_0$, v_0 in $1,4v_0$. Pri hitrosti v_0 telo kroži. Za časovni interval smo vedno vzeli $dt = 0,02T$, če je T obhodni čas na krožnem tiru. Zaradi preglednosti ni narisana vsaka, temveč le vsaka peta izračunana lega.

* Če poznamo definicijo vektorskega produkta, dobimo ta rezultat mnogo ceneje: $\mathbf{r}(t + dt) \times \mathbf{v}(t + dt) = (\mathbf{r}(t) + \mathbf{v}dt) \times (\mathbf{v}(t) + \mathbf{a}dt) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ ali $\Gamma(t + dt) = \Gamma(t)$.

Ker je $r/F(r) = r/kr = 1/k$, sledi iz (3), da pri takšni sili obhodni čas T — in zato tudi kotna hitrost ω — ni odvisen od radija krožnega tira. Tudi obhodni časi na vseh drugih elipsnih tirih so enaki, saj telo v vseh primerih potrebuje za en obhod enako število časovnih intervalov dt (sl. 3). Zato tudi lege telesa v izbranem času na različnih tirih povezuje vertikalna premica, npr. $\overline{CD}$. O tem se zlahka prepričamo, če opazujemo gibanje matematičnega nihala.

To posebnost lahko razložimo še drugače. Pri središčnih silah je razmerje sile in njene projekcije v izbrani smeri, npr. v smeri osi x , enako razmerju razdalje r in njene komponente: $F_x/F = x/r$. V našem primeru se ta enačba poenostavi v $F_x = -kx$. Sila povzroči v smeri osi x pospešek a_x . Velja: $ma_x = -kx$ in podobno za smer y : $ma_y = -ky$. Gibanje v eni smeri ne vpliva na gibanje v drugi smeri. Obe enačbi sta enačbi harmoničnega nihanja z enakim nihajnim časom $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$, zato lahko takšno gibanje vedno opišemo kot sestav dveh pravokotnih nihanj z istim nihajnim časom $x = a \cos \omega t$ in $y = b \sin \omega t$. Da je tir v resnici elipsa, zlahka dokažemo, saj velja $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

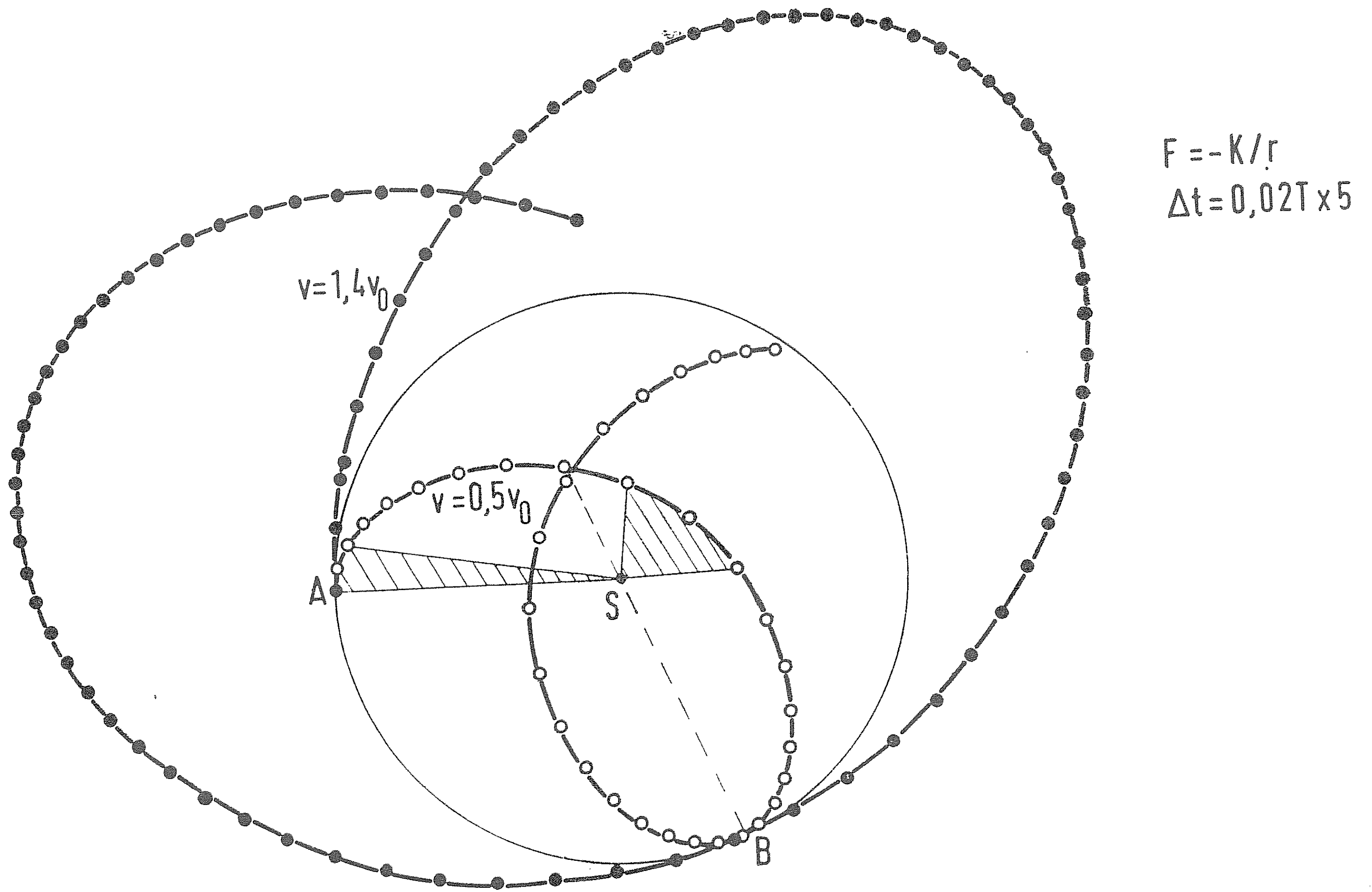
Če je središčna sila po velikosti konstantna: $F = -k$, je gibanje telesa bolj zamotano. Tir telesa je nekakšna rozeta, ki v splošnem ni zaključena (sl. 4). (Krožni tir je zaradi preglednosti slike označen le s tanko krožnico.) Takšen je npr. tir satelitov blizu Zemlje ($g = \text{konst.}$) ali pa projekcija na horizontalno ravnino tira telesa, ki se brez trenja giblje v obrnjenem votlem stožcu. Obhodni čas je smiselno vpeljati le za krožne tire. Ker sila ni odvisna od razdalje, pokaže enačba (4), da je razmerje obhodnih časov na krožnicah z radijema r_1 in r_2 kar $T_1/T_2 = (r_1/r_2)^{1/2}$.



Sl. 4. Tiri telesa v polju središčne sile $F = -k$ so rozete.

Če je pot majhna v primerjavi z razdaljo r , je sila konstantna tudi po smeri. Opraviti imamo z običajnim poševnim metom, tir pa je parabola. Gibanje v radialni smeri pa ustreza prostemu padu oziroma navpičnemu metu.

Sila na naboj blizu naelektrenega valja ali žice je obratno sorazmerna z razdaljo r : $F = \pm k/r$. Ravninsko gibanje v polju takšne privlačne sile kaže sl 5. Obhodni čas pri kroženju je tedaj sorazmeren z razdaljo r .



Sl. 5. Tiri telesa v polju središčne sile $F = -k/r$.

Za fiziko je posebno zanimiv primer, ko je sila obratno sorazmerna kvadratu razdalje: $F = \pm k/r^2$. Omejimo se najprej na privlačno silo in na krožni tir. Iz enačbe (5) dobimo

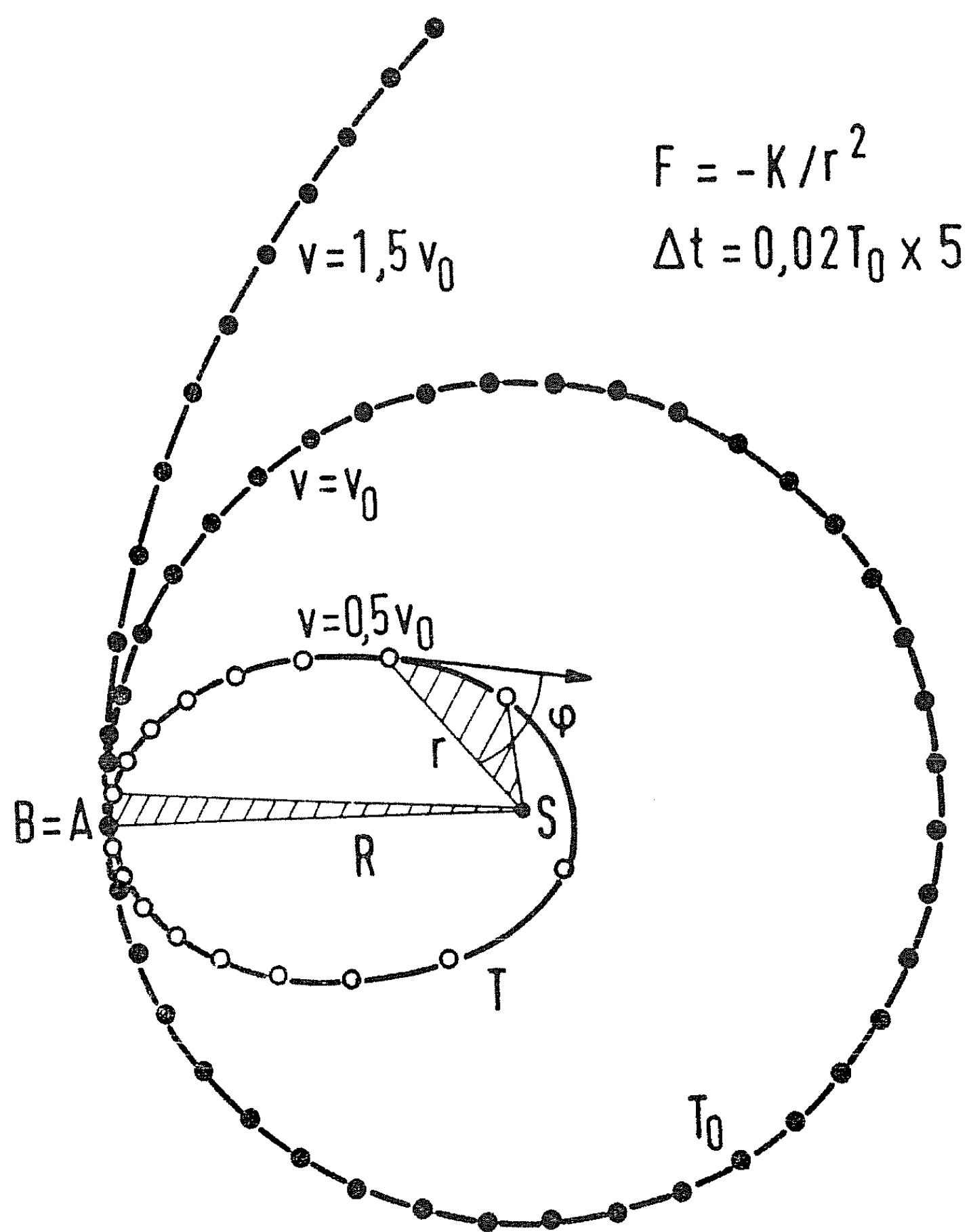
$$T^2/r^3 = 2\pi m/k = \text{konst.} \quad (6)$$

Rezultat nas spominja na 3. Keplerjev zakon za krožne tire planetov okrog Sonca: *Kvadrati obhodnih časov krožnih poti so v enakem razmerju kot kubi središčnih razdalj*. Odtod navadno sklepamo, da je sila med Soncem in planetom obratno sorazmerna s kvadratom njune razdalje. Ker pa po 3. Keplerjevem zakonu ni odvisna od mase, velja $k/m = C$, ali $k = Cm$. Torej deluje Sonce na planet s silo $F = Cm/r^2$. V tem zakonu sile je m težnostna masa planeta, ona v (5) pa je vztrajnostna masa. Odtod sledi sorazmernost težnostne in vztrajnostne mase planetov. Premislek o nujni simetriji med masama Sonca in planeta nas pripelje do Newtonovega gravitacijskega zakona: $F = GMm/r^2$.

Oglejmo si še tire, ki niso krožnice (sl. 6). Telo se giblje po elipsi ali hiperboli, središče sile S pa je v gorišču. Ni težko dokazati, da je tir stožnica. Izrek o ohranitvi energije da $W_k + W_p = mv^2/2 - k/r = W_0$, izrek o ohranitvi

gibalne količine pa $mvr \sin \varphi = \Gamma$. Tu je φ kot med krajevnim vektorjem in vektorjem hitrosti. Eliminirajmo v in dobimo kvadratno enačbo za radij $W_0 r^2 + kr - \Gamma^2/2m \sin^2 \varphi = 0$, ki ima korena $r_{1,2} = (-k/2W_0)[1 \pm (1 - 2W_0\Gamma^2/k^2m \sin^2 \varphi)^{1/2}]$. Če pripada prvi koren kotu φ , pripada drugi koren kotu $180 - \varphi$. Toda vsota obeh korenov je konstantna: $r_1 + r_2 = -k/W_0$. To pa je definicijska enačba elipse, parabole ali hiperbole, če je $W_0 \leq 0$.

Elipsno gibanje s središčem sile v gorišču elipse je karakteristično za privlačno silo, ki je obratno sorazmerna s kvadratom razdalje. Zato že na podlagi prvega Keplerjevega zakona, ki pravi, da se telesa gibljejo okrog Sonca po elipsnih tirih s Soncem v gorišču, lahko sklepamo, da je gravitacijska sila obratno sorazmerna s kvadratom razdalje.



Sl. 6. Tiri telesa v polju središčne sile $F = -k/r^2$ so stožnice.

Tretji Keplerjev zakon pri izpeljavi gravitacijskega zakona ni potreben.

Elipsni tir je tako zanimiv, da si ga natančneje oglejmo. Primerjajmo najprej krožni in elipsni tir na sl. 6. Ploščinski hitrosti sta v razmerju začetnih hitrosti v točki A, saj velja:

$$v_S/v_{S_0} = vR/v_0R = v/v_0. \quad (7)$$

Ploščinsko hitrost dobimo tudi, če ploščino elipse (kroga) delimo z ustreznim obhodnim časom $T(T_0)$: pri elipsi je $v_S = \pi ab/T$ (a in b sta velika in mala polog elipse), pri krogu pa $v_{S_0} = \pi R^2/T_0$. Kvocient obeh pa je

$$v_S/v_{S_0} = abT_0/R^2T. \quad (8)$$

Radialni pospešek na krogu z radijem R (in s tem tudi v točki A) je v^2/R . Elipsni tir blizu točke A pa dovolj dobro opišemo tudi s pritiskjenim krogom z radijem r , ki gre skozi točko A (sl. 7). Potemtakem je pospešek v točki A tudi v^2/r ali $v_0^2/R = v^2/r$, kar lahko zapišemo tudi takole:

$$v^2/v_0^2 = r/R. \quad (9)$$

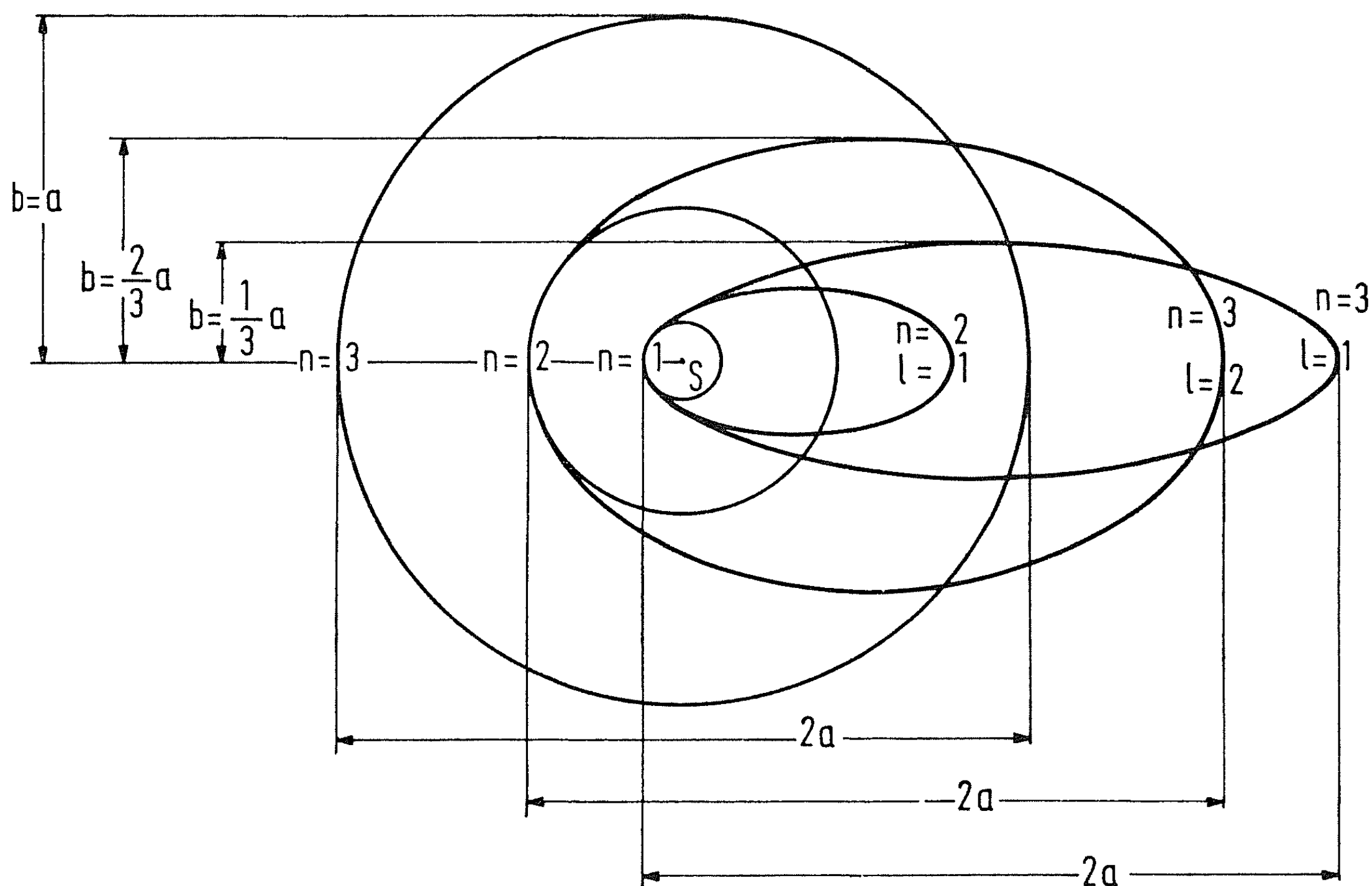
Ni težko ugotoviti zvezo med veliko in malo polosjo elipse ter radijem pritiskjenega kroga: $r = b^2/a$ (sl. 7). Zato lahko (9) zapišemo:

$$v^2/v_0^2 = b^2/aR. \quad (10)$$

Iz enačb (7), (8) in (10) eliminirajmo v_S/v_{S_0} ter v/v_0 , pa dobimo zvezo med obhodnimi časi:

$$T^2/a^3 = T_0^2/R^3. \quad (11)$$

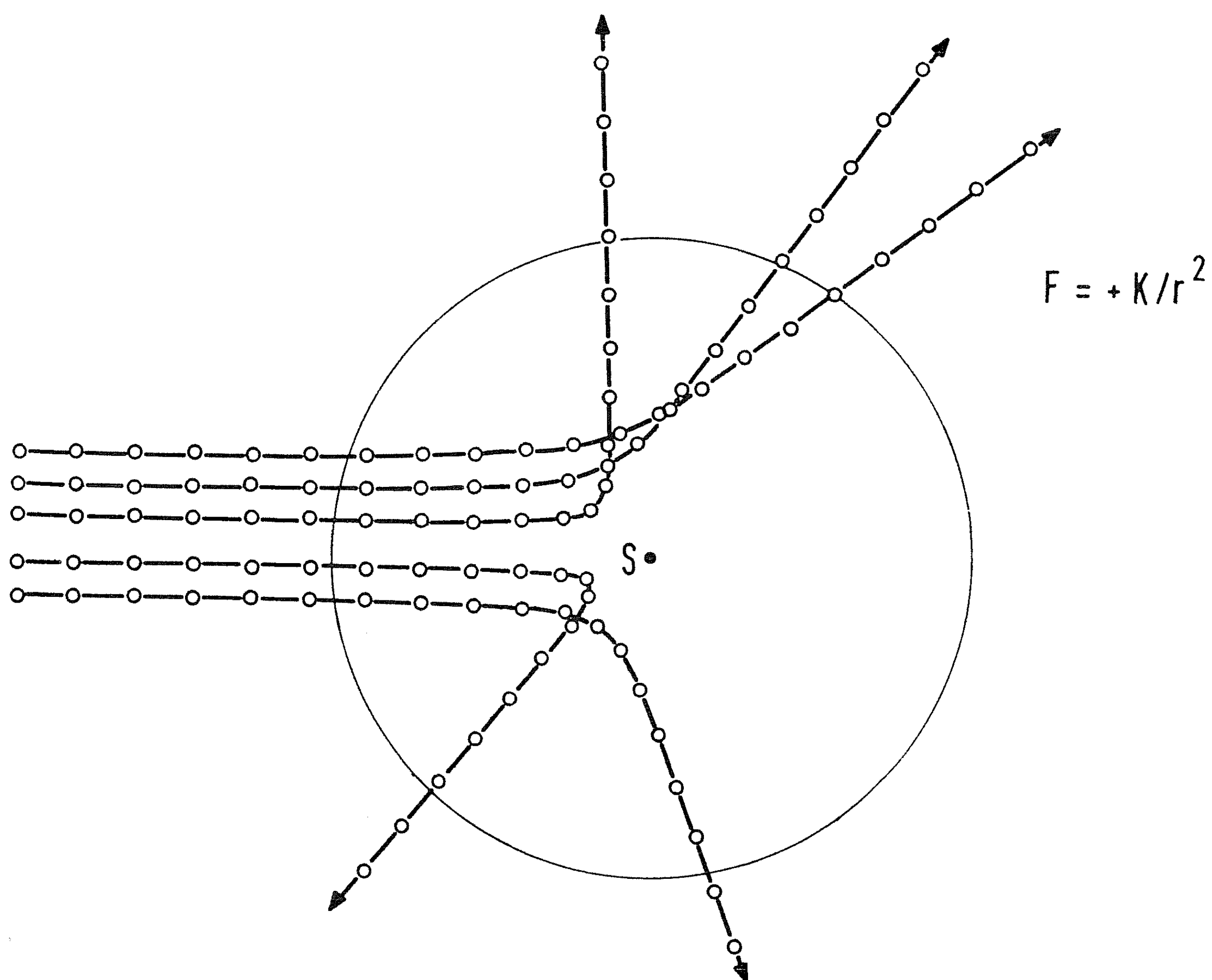
Primerjajmo (11) s (6) za krožne tire, pa ugotovimo, da je obhodni čas T po elipsi z veliko polosjo a kar enak obhodnemu času po krogu z radijem a .



Sl. 8. Dovoljeni tiri elektrona v enoelektronskem atomu po Bohr-Sommerfeldovem modelu za $n = 1, 2, 3$. Središče sile sovpada s središčem pritisnjenih krogov.

tiri za $n = 1, 2$ in 3 . Očitno so manjši krogi vedno pritisnjeni krogi večjih elips. Bralec lahko z računom to sam preveri.

Doslej smo obravnavali tire, pri katerih je začetna hitrost pravokotna na začetni radij. To je narekovala zahteva po preglednosti slik. Začetek časovne skale pa lahko poljubno premaknemo. Primer sipanja curka delcev, ki v polje $F = k/r^2$ vstopajo vodoravno z enako hitrostjo, je na sl. 9 (Rutherfordovo sipanje).



Sl. 9. Sipanje curka delcev v polju odbojne sile $F = k/r^2$.

S sl. 3 do 6 ugotovimo še eno lastnost središčnih sil. V vseh obravnavanih primerih se poti teles, ki zapuščajo točko A v vertikalni smeri z različnimi hitrostmi, slej ko prej križajo, prvič v točki B. Te sile imajo torej tudi ne-kakšne zbiralne lastnosti.

Z opisanim obravnavanjem lahko reproduciramo izrek o ohranitvi vrtilne količine, elipsno gibanje matematičnega nihala, Keplerjeve zakone in ugotovimo, da Sonce učinkuje na Zemljo s središčno silo, ki pada s kvadratom razdalje. Pri posebnih predavanjih pa lahko npr. zasledujemo gibanje električno nabitih delcev v polju središčnih sil. Pri tem ni posebno težko vključiti še nesrediščnih sil.

Omenimo naj, da je tako prvi obravnaval gibanje teles že I. Newton v knjigi *Matematični principi naravne filozofije* [1].

LITERATURA

[1] Sir Isaac Newton, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, (1729, ponatis Dawsons of Pall Mall, London 1968), str. 66.

NOVE KNJIGE

Jean Dieudonné, Linearna algebra i elementarna geometrija. Iz francosčine prevedli V. Mardešić in G. Papić. Školska knjiga, Zagreb 1977, 206 str.

Vsa elementarna geometrija je tu izpeljana kot model vektorskega prostora. V uvodu avtor poudari, kako daljnosežen pomen ima v matematiki linearna algebra. Z znanjem le-te se nam odpira tudi najpreprostejša pot v geometrijo. Ta pot naj bi po avtorjevem mnenju za vselej nadomestila tradicionalno, to je Evklidovo in Hilbertovo zasnovo geometrije pri pouku v srednji šoli. Knjiga je posebej namenjena profesorjem, ki naj njeno snov ustrezno priredijo za dijake.

Vpeljavi realnih števil in vektorskega prostora sledi najprej afina in nato evklidska geometrija ravnine. Analogno je potem obdelan trirazsežni prostor. Dodane so še nekatere teme, npr. mera kotov in izpeljava neevklidskih geometrij. Na koncu posameznih poglavij so naloge oziroma problemi, ki prispevajo tudi k razširitvi obravnavane snovi. Knjiga pa ne vsebuje slik, saj te niso nujno potrebne za njeno razumevanje.

Z vidika formalne matematike je vektorska aksiomatizacija in izpeljava geometrije vsekakor preprostejša od Hilbertovega sistema. Vendar je tudi slednjemu treba priznati marsikatero prednost, posebej njegovo neposredno povezavo in motivacijo z geometrijskim izkustvom. Evklidova oziroma Hilbertova zasnova geometrije namreč ostane ena od naravnih poti v to področje in je za marsikoga celo najrazumljivejša. Algebraično usmerjenemu bralcu pa bo seveda geometrijo najbolj približala Dieudonnéjeva knjiga.

Janez Rakovec

6. MEDNARODNI KONGRES ZA LOGIKO, METODOLOGIJO IN FILOZOFIJO ZNANOSTI

Ta kongres je zasedal v Hannovru med 22. in 29. avgustom 1979. Navzočih je bilo nad 580 matematikov pa tudi zastopnikov naravoslovnih in filozofskih strok, ki so prišli, lahko rečemo, iz vsega kulturnega sveta. Največ udeležencev je bilo seveda iz Sovjetske zveze, okoli 100, in Združenih držav Amerike, okoli 80, sicer pa je bilo okrog 100 Nemcev iz obeh Nemčij, po 20 Francozov in Angležev pa Japonci, Južni Američani itn. Tudi Jugoslavija je bila zastopana z 8 matematiki in med njimi je bil celo 1 Slovenec ...

Če je iz naziva kongresa morda na prvi pogled videti, da je bila njegova tematika razmeroma ozko omejena le na področje matematične logike in njenih filozofskih implikacij, je to le »optična« prevara, ki sicer nasploh rada ponagaja dolгим naslovom. Nasprotno lahko trdimo, da ima le redkokateri specializirani matematični kongres tako širok spekter, kot ga je imel ta. To je tudi brž razvidno, če samo naštejemo imena vseh 14 sekcij, ki so popolnoma enakovredno delovale na kongresu. Te so:

1. Teorija dokazljivosti in osnove matematike
2. Teorija modelov in njene uporabe
3. Rekurzivnostna teorija in teorija izračunljivosti
4. Aksiomatična teorija množic
5. Filozofska logika
6. Splošna metodologija znanosti
7. Osnove verjetnosti in indukcije
8. Osnove in filozofija fizikalnih znanosti
9. Osnove in filozofija biologije
10. Osnove in filozofija psihologije
11. Osnove in filozofija družbenih znanosti
12. Osnove in filozofija jezikoslovja
13. Zgodovina logike, metodologije in filozofije znanosti
14. Temeljna načela etike znanosti

V vsaki sekciji so bila 30 do 45-minutna predavanja povabljenih strokovnjakov in 20-minutni prispevki drugih udeležencev, ki so se sami priglasili k besedi in poročali o svojem delu. Mimo tega so bili na programu tudi naslednji simpoziji:

Vloga konstruktivnosti v matematiki (1. sekcija)

Ravnotežnostna ekonomika; Formalni sistemi pravic (11. sekcija)

Simpozij o Fregeju (13. sekcija)

Pravičnost porazdelitve in delež družbenih sredstev za znanstvene raziskave; Etični problemi v zvezi z genetičnimi raziskavami in manipulacijami (14. sekcija).

Kakor je na matematičnih kongresih že ustaljena navada, so bila tudi na tem kongresu tako imenovana plenarna predavanja posebno uglednih raziskovalcev, ki so bila kajpak namenjena vsem udeležencem. Tokrat je šlo za naslednja imena in naslove:

- a) Gaisi Takeuti, Nagoya, Japonska:
Delo Paula Bernaysa in Kurta Gödela
- b) René Thom, Bures-sur-Yvette, Francija:
Vloga in meje matematizacije uporabnih znanosti
- c) Werner Hildenbrand, Bonn, Zvezna republika Nemčija:
Vloga matematike v ekonomiki
- d) Robert Fogel, Harvard, Združene države Amerike:
»Znanstvena« zgodovina in tradicionalna zgodovina

Povejmo zdaj o vsakem teh predavanj nekaj besed:

a) Profesor Takeuti je v zelo strnjeni obliki, predavanje je trajalo proti pričakovanju le dobrih trideset minut, nakazal temeljna izhodišča in genezo Hilbertovega programa fundiranja matematike in njegov »žalostni« izid. Kakor pove že naslov, se je pri tem omejil le na delo najožjega Hilbertovega sodelavca Paula Bernaysa in pa seveda Kurta Gödela, ki je s svojima slovitima izrekoma o nepopolnosti rekurzivne aritmetike zadal Hilbertovemu programu tako rekoč milostni udarec.

b) Profesor Thom, avtor znamenite teorije katastrof, ki jo je objavil leta 1972, pa je bil v nasprotju z redkobesednim Japoncem zares romansko zgovoren in tudi polemičen. Govoril je sicer v angleščini, ki pa je pogosto zadočila pristrčno neutajljiv francoski naglas in izreko. Najprej je zbranemu občestvu logikov brez vsakršne zadrege preprosto izjavil, da se mu njihova pot v matematiki ne vidi prava in da bržčas tavajo v »slepi« ulici. Namesto da se matematika ubada sama s seboj in s problemom svoje logične neoporečnosti, naj bi se po Thomovem mnenju uperila navzven in raje poskusila dvoje:

1. razumeti svet, v katerem živimo, in morda tudi samega človeka in
2. razširiti človekovo moč nad njegovim okoljem.

Ti nalogi, ki sicer nista tako tesno povezani, kot bi človek na prvi pogled sodil, sta izjemno zapleteni. Posebno druga nujno predpostavlja možnost, da se nekako prebijemo onkraj dejanskega izkustva. Kajti vsak algoritem, ki naj bi bil uperjen na možno delovanje, implicira namreč neke sorte razširjeno možnost napovedi. Napoved pa sloni kajpak vedno na možnosti, da razširimo naravno domeno neke funkcije čez meje, ki so bile določene z opazovanjem. Potemtakem so kvantitativne napovedi očitno vezane na matematične postopke nadaljevanja, posebej na najpomembnejšega izmed njih, na metodo analitičnega nadaljevanja. Vsak problem namreč, ki je dobro definiran, ima svoj analitični model, pa četudi sam po sebi ni analitičen. Poleg metode analitičnega nadaljevanja funkcij ima Thom za najpomembnejše teoreme matematike še: Taylorjevo formulo, izrek o implicitnih funkcijah in splošni Stokesov izrek. Kvantitativna napoved naravnih pojavov je potemtakem mogoča le, če nam uspe najti za te pojave natančne analitične zakone. To pa je vse prej kot preprosta naloga. Doslej je to popolnoma uspelo le v teoretični mehaniki, ki izhaja iz Galijeve ali Lorentzove grupe transformacij, kajti obe ti grupi imata v prostoru opazljivih reči analitično reprezentacijo. Brž pa ko se lotimo študija globalnih makroskopskih struktur, smo že prisiljeni podpreti fundamentalne zakone s statističnimi razglabljanji, katerih veljavnost je često dvomljiva. Če se od fizike usmerimo proti kemiji, vloga in moč matematike kaj hitro upadeta in dosežeta brez dvoma svoj minimum v biologiji. Nasprotno pa lahko zopet zaznamo porast obeh v nekaterih družbenih znanostih, predvsem

v ekonomiji. Pri študiju sveta, v katerem živimo, pa moremo uporabljati matematiko še na drug način, pri katerem nam ne gre za eksaktne kvantitativne zakone, marveč le za interpretacijo in razumevanje danih pojavov in situacij. Razumevanje dane situacije pomeni namreč redukcijo globalnih pojavov na znane lokalne dogodke, ki to situacijo generirajo. Tako redukcijo je v načelu mogoče napraviti z matematičnim pojmom singularnosti. Dani situaciji je treba najti tako matematično strukturo, da se lokalni dogodki situacije preslikajo na singularnosti ustrezne strukture. Seveda je v takih primerih problem verifikacije izredno težaven, saj je vsakršno kvantitativno preverjanje že načelno nesmiselno. Glede na nakazane probleme in še odprte možnosti uporabe matematike se je Thom uprl tudi današnjemu trendu vzgoje mladih matematikov, ki je v večini dežel pač tak, da se »elita« usmeri v tako imenovano »čisto« matematiko, medtem ko se z njeno »uporabo«, ki jo je treba seveda razumeti v Thomovem poglobljenem smislu, ubadajo večidel le manj zagnani in obetavni. Po njegovem mnenju bi moralo biti kajpada prav obratno.

Thomova negativna ocena pomena temeljnih logičnih raziskav je bila neposredni vzrok, da je sklical organizator dva dni kasneje posebno debato o njegovem predavanju. Vendar je bila udeležba presenetljivo skromna in pogovor se je sukal le ob bolj obrobni vprašanji, kot je na primer intenzionalna in ekstenzionalna interpretacija pojmov. Zakaj tega izziva za polemiko niso sprejela »velika imena« sodobne logike, ki so bila sicer na kongresu navzoča, lahko le ugibamo...

c) Profesor Hildenbrand je podal najprej kratek, toda slikovit zgodovinski pregled različnih mnenj matematikov in ekonomistov o vlogi matematike v ekonomiji. Ta mnenja so nihala od navdušenega sprejemanja pa vse do odločnega odklanjanja uporabe matematike v ekonomiji. Šele v našem stoletju se je to nihanje bržčas da dokončno zaustavilo, in sicer ob tehle načelnih spoznanjih:

1. O možnosti in potrebi uporabe matematike v ekonomiji ne more biti več nobenega dvoma. Vsekakor pa je še mogoče razpravljati o tem, koliko in katera matematika je za to najprimernejša.

2. Za učinkovito uporabo matematike morajo biti izhodna ekonomska dejstva jasno izražena in to v taki obliki, ki omogoča konstrukcijo primerne matematičnega modela.

3. Kvaliteta ekonomije ni odvisna toliko od kvalitete uporabljene matematike, kot od realnosti in pravilnosti ekonomskih hipotez, s katerimi opišemo dano ekonomsko situacijo.

Profesor Hildenbrand je nato ilustriral rabo matematike na tako imenovanem problemu ravnovesja v teoriji evaluacije. Tu gre, zelo preprosto povedano, za iskanje optimalnega odnosa na relaciji: proizvodnja—prodaja—poraba. Pri tem je posebej poudaril, da je večina pomembnih ekonomskih problemov, brž ko jih matematiziramo, nelinearnih ali pa celo nekvantitativnih, se pravi, da so izrazljivi le z nenumeričnimi matematičnimi strukturami. Z vidika logike je treba v tej zvezi omeniti problem neprotislovnosti, ki je gotovo temeljnega pomena pri izboru pogojev, ki naj opredelijo določeno ekonomsko situacijo.

- d) Profesor Fogel me je dokončno prepričal, da sta angleščina in ameri-kanščina, vsaj kar zadeva izgovarjavo, vendarle 2 jezika. Njegovega govora mi

nikakor ni uspelo dovolj hitro sproti prevajati v angleščino, čeravno je sicer res, da tudi v tej nisem kdo ve kako trden. Vsekakor pa si upam trditi, da po mnenju profesorja Fogla naloga zgodovine je in ostane v ugotavljanju, kaj se je nekoč in nekje zares zgodilo. Pri tem je seveda osnovni problem vprašanje evidence, ki je povezano z ovrednotenjem ustrezne dokumentacije in pričevanja. V tej zvezi so bile v zadnjem času tradicionalne metode dopolnjene z natančnejšo tipologijo evidence, s formalizacijo osnovnih modelov obnašanja, z uporabo kvantitativnih metod sociologije, politične zgodovine in statistike in z novim gledanjem na vlogo nasprotujočih si pričevanj. Čeprav je še opaziti določeno nasprotje med zastopniki tradicionalne in nove zgodovine, se v resnici obe dopolnjujeta in zato je razumno pričakovati, da bo tega nasprotja v prihodnje zmeraj manj.

Poleg teh plenarnih predavanj je bilo še nekaj nad 30 predavanj povabljenih predavateljev v posameznih sekcijah. Ker so povzetki teh predavanj, včasih žal preveč skopi, skupaj s povzetki prispevkov še drugih udeležencev kongresa zabeleženi v 6 zvezkih ABSTRACTS in so vsakomur, ki se za to zanima, na razpolago v Matematični knjižnici, naj tukaj omenim le nekaj naslovov, ki utegnejo vzbuditi zanimanje:

1. sekcija: Harvey Friedman, Amherst N. Y., Združene države Amerike:
O intuicionistični polnosti intuicionistične logike

N. N. Nepeivoda, Izevsk, Sovjetska zveza:
Zveze med teorijo dokaza in računalniškim programiranjem

2. sekcija: Angus Macintyre, Mull. Argyll, Škotska:
Praštevila v nestandardnih modelih aritmetike

3. sekcija: V. R. Pratt, Cambridge, Mass., Združene države Amerike:
Dinamična logika

6. sekcija: R. Bhaskar, Edinburgh, Škotska:
Realizem v naravoslovju

John Smart, Canberra, Avstralija:
Težave z realizmom v filozofiji

8. sekcija: I. Prigogine, A. P. Grecos, Bruselj, Belgija:
Problem ireverzibilnosti v teoretični fiziki

Y. Sahkov, Moskva, Sovjetska zveza:
Verjetnost v klasični in kvantni fiziki

9. sekcija: Oswald A. Reig, Caracas, Venezuela:
Ontološka narava bioloških vrst

10. sekcija: B. Velichovsky, Moskva, Sovjetska zveza:
Sodobni problemi spoznavne psihologije

11. Sekcija: Peter Hammond, Colchester, Anglija:
Liberalizem, neodvisne pravice in Paretovo načelo

E. Malinvaud, Pariz, Francija:
Pojem ravnovesja v ekonomiki

13. sekcija: M. A. Finocchiaro, Las Vegas, Združene države Amerike:
O metodoloških problemih zgodovine znanosti (Analitičen pristop)

14. Sekcija: Patrick Suppes, Stanford California, Združene države Amerike:
Racionalno dodeljevanje sredstev za znanstvene raziskave

Z izjemno svečane otvoritve in prvih dveh plenarnih predavanj, ki so bili v modernem gledališču Theater am Aegi, so vsa druga predavanja potekala

v ogromni in častitljivi stavbi Tehniške Univerze, v bivši kraljevski palači, sezidani v 19. stoletju. Glede na nacionalnost gostiteljev je bržčas odveč pripomba, da je bila organizacija kongresa brežhibna. Vseeno pa moram povedati, da obetana enakopravnost jezikov, namreč angleščine, francoščine, nemščine in ruščine ni bila uresničena, ker ni bilo simultane prevajanja iz angleščine niti na plenarnih predavanjih. Vendar se zdi, da to ni povzročalo vidnega nerazpoloženja pri udeležencih kongresa. Ali naj to pomeni, da je angleščina že postala sodobna latinščina?

Za sklep pa še nekaj bibliografskih podatkov:

V brošuri *PROGRAM* (of the 6th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science), ki je na voljo v Matematični knjižnici, sta tudi kratka povzetka plenarnih predavanj profesorjev Fogla in Thoma. Sicer pa bo na popolne tekste treba počakati na *PROCEEDINGS* of the 6th Inter. Cong. of Logic, Methodology and Philosophy of Science, ki bo zanesljivo izšel vsaj v dveh letih. Za morebitne nečakance pa tale koristni nasvet: čakalna doba bo ravno pravšnja, da ta čas pazljivo »prelistate« *proceedingse* prejšnjih kongresov. Ti so:

Proceedings of the 1960 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Edited by Ernest Nagel, Patric Suppes, Alfred Tarski. Matematična knjižnica 8505 (Stanford, California, USA, od 24. 8. do 2. 9. 1960)

Proceedings of the 1964 International Congress of Logic, ..., Edited by Yehoshua Bar-Hillel. Mat. knjižnica 8278 (Jeruzalem, Izrael, od 26. 8. do 2. 9. 1964)

Proceedings of the third International Congress of Logic, ... Edited by B. Van Rootselaar, J. F. Stall. Mat. knjižnica 6208, 47 — T.3 (Amsterdam, Nizozemska, od 25. 8. do 2. 9. 1967)

Proceedings of the fourth International Congress of Logic, ... Edited by P. Suppes, L. Henkin, Gr. C. Moisil, A. Joja. Mat. knjižnica 6209, Vol. 74 (Bukarešta, Romunija, od 29. 8. do 4. 9. 1971)

Proceedings of the fifth International Congress of Logic, ... Edited by R. E. Butts, J. Hintikka. Tega dela trenutno v Mat. knjižnici še ni. Izšlo je v založbi D. Reidel Publishing Company in obsega kar 4 knjige:

Part I: *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*, 1977, X + 406 strani

Part II: *Foundational Problems in the Special Sciences*, 1977, X + 427 strani

Part III: *Basic Problems in Methodology and Linguistics*, 1977, X + 321 strani

Part IV: *Historical and Philosophical Dimensions of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, 1977, X + 336 strani. (London, Ontario, Canada, 1975)

Prijetno branje vam želi

Niko Prijatelj

MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE V BEOGRADU

Letos je bilo že 12. zvezno in 5. mednarodno tekmovanje študentov matematike v čast dnevu študentov beograjske univerze, četrtemu aprilu. Otvoritev tekmovanja je bila 30. 3. v Beogradu. Po odprtju smo se tekmovalci in člani tekmovalne komisije z avtobusom odpeljali v Poreč, kjer je tekmovanje potekalo. Organiziran je bil tudi sprejem Titove štafete v Poreču, ogled delovne organizacije Digitron v Bujah, šahovski in košarkarski turnir.

Tekmovanja se je udeležilo 18 ekip z raznih univerz. Naštejmo najprej tuje: iz Prage in z Dunaja po dve ekipi, po ena pa iz Delfta (Nizozemska), Krakowa, Budimpešte in Szegeda (Madžarska). Od domačih so sodelovale po dve ekipi iz Beograda, Ljubljane in Zagreba in po ena iz Novega Sada, Prištine, Sarajeva in Skopja.

V ljubljanski prvi ekipi so bili France Forstnerič, Bojan Mohar in John Shawe-Taylor, v drugi pa Gorazd Divjak, Robert Reinhardt in Edmond Rusjan.

Naloge so izbrali beograjski asistenti. Študentje 1. in 2. letnikov so tekmovali v eni skupini, študentje 3. in 4. letnikov pa so izbirali lahko med naslednjimi predmeti: (vsak si je pred tekmovanjem moral izbrati dva predmeta) programiranje, diferencialne enačbe, verjetnostni račun, funkcije kompleksnih spremenljivk, funkcionalna analiza, geometrija in topologija.

Kot vedno je bilo pregledovanje nalog izredno zamudno in težavno delo.

Ljubljanska prva ekipa se je zelo dobro odrezala. Mislim, da najboljše, odkar sodelujemo na tem tekmovanju. Poglejmo si rezultate.

Ekipno: 1. Praga 1, 2. Budimpešta, 3. Ljubljana 1, 4. Dunaj 1, 5. Zagreb 1, 6. Krakow, 7. Praga 2, 8. Beograd 1, 9. Dunaj 2, 10. Delft (Nizozemska), 11. Skopje, 12. Szeged, 13. Zagreb 2, 14. Sarajevo, 15. Ljubljana 2, 16. Priština, 17. Novi Sad, 18. Beograd 2.

Pri posameznikih pa je bil vrstni red naslednji:

1. in 2. letnik: 1. Mladen Bestvina, Zagreb, 2. Jiří Navratil, Praga, 3. Karel Grill, Dunaj. John Shawe Taylor si je priporil četrto mesto.

3. in 4. letnik: 1. Simawi Wandor, 2. France Forstnerič, Ljubljana, 3. Jan Maky, Praga 1.

Poglejmo si še naloge.

Naloge za prvi in drugi letnik

1. Naj bo f štirikrat zvezno odvedljiva realna funkcija na intervalu $[0, 1]$, za katero velja $|f^{(4)}(x)| \leq M$ in $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

Dokaži, da je

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{720}{M}$$

2. Naj bo $f: [-1, 1] \rightarrow R$ takšna zvezna funkcija, da je $f(0) = 0$. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo trojic različnih števil a, b, c iz $[-1, 1]$, da velja:

$$(a + b + c) [f(a) + f(b) + f(c)] = a f(a) + b f(b) + c f(c)$$

3. Naj bo G grupa generirana z a in b in naj velja $a^4 = b^4 = abab = e$. Dokaži, da je podgrupa H , generirana z $a^3 b$ in $b a^3$, podgrupa edinka.

4. Naj bo $f: (a, b) \rightarrow R$ odvedljiva funkcija in zanjo naj velja $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ in $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$. Za vsak $x \in (a, b)$ naj velja $f'(x) + [f(x)]^2 + 1 \geq 0$. Dokaži, da je $b - a \geq \pi$.

Programiranje

1. Definicija:

Gramatika je četverica $G = (N, T, P, S)$, kjer je:

N — je končna množica neterminalnih simbolov

T — končna množica terminalnih simbolov, disjunktna z N

P — končna množica produkcij

S — startni simbol (aksiom gramatike)

Naj bo G_b gramatika, kjer je:

$N = \{ \langle \text{konstanta} \rangle, \langle \text{celo število} \rangle, \langle \text{realno število} \rangle, \langle \text{znak} \rangle, \langle \text{število} \rangle, \langle \text{cifra} \rangle, \langle \text{osnovno realno število} \rangle \}$

$T = \{ +, -, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, E, . \}$

$P = \left\{ \begin{array}{l} \langle \text{konstanta} \rangle := \langle \text{celo število} \rangle \mid \langle \text{realno število} \rangle \\ \langle \text{celo število} \rangle := \{ \langle \text{znak} \rangle \}_0^1 \langle \text{število} \rangle \\ \langle \text{znak} \rangle := + \mid - \\ \langle \text{število} \rangle := \{ \langle \text{cifra} \rangle \}_1 \\ \langle \text{cifra} \rangle := 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\ \langle \text{realno število} \rangle := \langle \text{osnovno realno število} \rangle \mid (\langle \text{osnovno realno število} \rangle \mid \langle \text{celo število} \rangle) E \langle \text{celo število} \rangle \\ \langle \text{osnovno realno število} \rangle := \{ \langle \text{znak} \rangle \}_0^1 (\langle \text{število} \rangle . \mid \langle \text{število} \rangle . \langle \text{število} \rangle \mid . \langle \text{število} \rangle) \end{array} \right\}$

$S = \langle \text{konstanta} \rangle$

$L_b(G_b)$ je množica celih in realnih konstant v fortranu.

- Nariši graf prehodov stanj končnega avtomata, ki prepozna $L_b(G_b)$.
- Sestavi tabelo prehodov stanj.
- Napiši program v fortranu, ki uporablja tabelo prehodov stanj, za razpoznavanje, sintaktično kontrolo in izračun vrednosti konstante.

2. Napiši program, ki izračuna število e na 100 decimalnk.

Diferencialne enačbe

1. Naj bo $\varphi \in C^\infty[-1/4, 1/4]$. Ali ima enačba

$$y''(x) + x^2 [y(x) + y'(x + 1)] = 0$$

rešitev $y(x)$ definiramo na realni osi in za katero velja vsaj $y(x) = \varphi(x)$ za vsak $x \in [-1/4, 1/4]$?

2. Funkciji $\varphi(x)$ in $\psi(x)$ naj bosta zvezni, monotoni in omejeni funkciji, definirani na vsej realni osi. Predpostavimo, da za vsa realna števila velja $\varphi(x) \geq \psi(x)$. Ali ima enačba $y' = [y - \varphi(x)] [y - \psi(x)]$ rešitev definirano na intervalu neskončne dolžine?

Topologija

1. Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev: Obstaja števni, kompakten T_1 prostor, ki nima števne baze.

2. Pokaži, da ima vsak števni, kompakten metričen prostor izolirano točko.

Verjetnostni račun

1. Naj bo $\Omega = N = \{1, 2, \dots\}$, $\mathcal{A} = \{A; A \subseteq N\}$, $P(\{n\}) = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$ in $X: \Omega \rightarrow R$ definirana takole: $X(\omega) = \omega'$, kjer je $\omega' \in \{0, 1, 2\}$ in ω je kongruentna ω' po modulu 3.

Nadalje naj bo Y slučajna spremenljivka, neodvisna od X .

Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev: preslikava $Y: \Omega \rightarrow R$ je enolično definirana s porazdelitveno funkcijo spremenljivke Y .

2. Naj bodo X in X_n slučajne spremenljivke, definirane na istem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Z F označimo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X in predpostavimo, da je absolutno zvezna. Dokaži: za vsak $x \in R$ konvergira X_n proti X z verjetnostjo 1, če in samo če gre verjetnost

$P\left[\bigcup_{k \geq n} ([X_k < x] \triangle [X < x])\right]$ proti 0, ko gre $n \rightarrow \infty$. (Tu pomeni $\triangle$ simetrično diferenco.)

Funkcije kompleksnih spremenljivk

1. Naj bo L multiplikativen linearen funkcional na $A(U)$. (Tukaj pomeni $A(U)$ množico vseh analitičnih funkcij na območju U .) to je $L: A(U) \rightarrow C$ in $L(fg) = L(f)L(g)$ za vse funkcije $f, g \in A(U)$. ($L \equiv 0$ ne štejemo med multiplikativne funkcionale.)

Dokaži, da je $L(f) = f(z_0)$ za neki z_0 iz U .

2. Naj bo $\bar{D}$ zaprt disk, vsebovan v odprti množici U in $A = \{f \in C(U); |f(z)| \leq 1 \text{ za vse } z \in U \text{ in } f(z) = 0 \text{ za } z \notin \bar{D}\}$. Dokaži, da je A zaprta in omejena podmnožica v $C(U)$ in da ni kompaktna.

($C(U)$ so vse zvezne kompleksne funkcije na U s topologijo enakomerne konvergence na vseh kompaktnih podmnožicah U -ja.)

Funkcionalna analiza

1. Naj bo $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ takšno zaporedje Lebesguovo merljivih funkcij, da je $\text{ess sup } f_n = +\infty$ za $n = 1, 2, \dots$. Ali za vsako tako zaporedje obstaja mera μ na $[0, 1]$, za katero velja

$$\int_0^1 f_n d\mu = +\infty, \text{ za } n = 1, 2, \dots$$

2. Naj bo T omejen operator iz Banachovega prostora X v normiran linearen prostor Y , za katerega obstajata taki realni števili α in β , $\beta < 1$, da velja: za vsak y iz Y z normo 1 obstaja x iz X z normo manjšo ali enako α , tako da je $\|y - Tx\| \leq \beta$.

Dokaži, da potem za vsak y in Y obstaja x iz X , da je $y = Tx$ in $\|x\| \leq \alpha(1 - \beta)^{-1} \|y\|$!

Geometrija

1. Naj bo ABC trikotnik v E^2 in M točka v njem. Dokaži, da je $MN + MB + MC < AB + AC$ če je BC najkrajša stranica trikotnika ABC .

2. Naj bo $Oabc$ konveksen trieder v E^3 , katerega dieri so ostrokotni, in a' pravokotna projekcija poltraka a na ravnino Obc , b' pravokotna projekcija b na ravnino Oca in c' pravokotna projekcija c na ravnino Oab . Pokaži, da so Oaa' , Obb' in Occ' simetrijske ravnine diedrov triedra $Oa'b'c'$.

Mirko Dobovišek

PRIMATIJADA 79

Poleg zahtevnega študijskega dela najdemo študentje še vedno čas, da se sprostimo v športu, da se zabavamo, pa tudi da se pogovorimo o problemih, ki nas pestijo.

PRIMATIJADA je športno, kulturno, poučno in seveda tudi zabavno srečanje študentov z vseh prirodoslovno-matematičnih oddelkov in fakultet iz Jugoslavije.

Letošnje 6. srečanje je potekalo od 9. 4. do 15. 4. v Umagu, sodelovale pa so fakultete iz Beograda, Kragujevca, Ljubljane, Niša, Novega Sada, Osijeka, Prištine, Reke, Sarajeva, Skopja in Zagreba, ki je bil tokrat organizator.

Iz Ljubljane se je srečanja udeležilo 54 študentov matematike in fizike. Na športnem področju smo se odlično odrezali, najboljša pa so bila dekleta v odbojki in fantje v rokometu, saj so oboji zasedli prvo mesto.

Dopoldne so potekala predavanja, na katerih so študentje spregovorili o svoji raziskovalni dejavnosti, in se vrstili razgovori o reformi visokošolskega izobraževanja, o učinkovitosti študija, o samoupravljanju, delu mladinskih organizacij in študentskem standardu.

Večeri so bili bolj zabavnega značaja. Vse ekipe so se pomerile v kvizu in naša ekipa je zasedla zasluženno prvo mesto, saj so se fantje res izkazali, tako v znanju kot v spretnostnih igrah.

Srečanje je potekalo v prijateljskem in športnem ozračju in upamo, da bo tako tudi prihodnje leto, ko se bomo srečali na Tjentištu.

Naj na koncu še povemo, da se študentje srečujemo s finančnimi težavami, saj moramo skoraj polovico stroškov poravnati sami. Tudi letos nam je — tako kot že lani — priskočil na pomoč Inštitut Jožef Stefan, odsek za uporabno matematiko, VTO matematika in mehanika ter VTO fizika.

Nada Širca

NOVE KNJIGE

Selected Papers of Alfréd Rényi: I. str. 627, II. str. 646, III. str. 667; Akadémiai Kiadó, Budapest 1976.

Madžarski matematik Alfréd Rényi (1921—1970) je bil nedvomno med najplodovitejšimi matematičnimi ustvarjalci v drugi polovici našega stoletja. V svojem razmeroma kratkem življenju je objavil čez 350 originalnih sestavkov in nekaj knjig. Članki obravnavajo zelo različna vprašanja, predvsem iz teorije števil, verjetnostnega računa, teoretične statistike in njunih uporab v ekonomiki, kemiji, medicini itn. Med knjigami je treba posebej omeniti obsežen učbenik verjetnostnega računa; odlikuje ga bogastvo snovi, originalno izhodišče in pedagoško mojstrstvo.

V pričujočih treh knjigah je zbranih 156 Rényijevih člankov v angleščini, nemščini in francoščini. Članki, ki so izšli prvotno v madžarskem, ruskem ali kitajskem jeziku, so prevedeni v angleščino. Veliko sestavkov je še zmeraj aktualnih, drugi pa so zanimivi vsaj z zgodovinskega stališča. Ker so poleg tega po večini lahko dostopni, je prebiranje teh knjig zares užitek.

Rajko Jamnik

William Arveson, An Invitation to C^* -algebras, Graduate Texts in Mathematics 39, Springer-Verlag, New York — Heidelberg — Berlin 1976, 106 str.

O tej odlični knjigi lahko poročam nekoliko podrobneje, ker mi je bila za osnovo predavanj na tretji stopnji v letu 1978/79. Vsebina je razdeljena na štiri dele: Osnove, Teorija večkratnosti, Borelove strukture in Od komutativnih algeber do GCR algeber. Obdelali smo približno polovico knjige, kar daje slutiti, da je v njej kljub majhnemu obsegu zgoščeno prav dosti materiala. Treba pa je pripomniti, da je del časa šel za izpeljavo spektralne razčlenitve normalnih operatorjev (povzeto po Rudinovem delu Functional Analysis).

V čem je kvaliteta te knjige? Avtor sam pravi, da se je dosledno izogibal Bourbakijevega načina pisanja. Poskušal je posredovati osnove, uporabne ideje teorije C^* -algeber in pustiti ob strani posplošitve, ki skoraj nikoli ne pridejo v poštev. Tako so izreki večkrat zapisani le za primer separabilnih Hilbertovih prostorov in GCR algeber. Seveda pa to samo zase ne bi bilo kaj posebnega. Kar pri tej knjigi najbolj zbuja spoštovanje, je avtorjevo suvereno obvladanje snovi, način, kako z minimalnimi sredstvi elegantno in originalno doseže težke rezultate. Druga, prav tako občudovanja vredna lastnost pa je jasnost in popolnost izpeljav. Treba je reči, da že omenjena Rudinova knjiga ne vzdrži primerjave ne na enem ne na drugem področju. Arvesonov način pisanja me spomnja na Milnorjevo knjigo Characteristic Classes, ki smo jo pred leti študirali na topološkem seminarju in v kateri je bilo praktično vse tako dobro napisano, da je bilo to videti že kar nekakšna čarovnija. Čeprav je Invitation to C^* -algebras verjetno na nekoliko nižjem nivoju, je primerjava z Milnorjem najlepši kompliment, ki ji ga lahko izrečem.

Peter Legiša

Niklaus Wirth, Računalniško programiranje, DMFA SRS, 1979, 280 str. Cena 250.— din (200.— din). (Izbrana poglavja iz matematike; 12).

Niklaus Wirth, C. A. R. Hoare in Edsger W. Dijkstra so v računalništvu tri najimenitnejša imena današnje dobe. Vsi trije so duševni očetje strukturnega programiranja, brez česar si danes ne znamo več zamišljati sestavljanja obsežnih in zamotanih računalniških programov.

Pri tem je treba reči, da se ti trije možje niso omejili na teoretična razglabljanja, ampak se jim je posrečilo svoje ideje res približati najširšemu krogu uporabnikov. Rezultat njihovih skupnih naporov je programski jezik pascal, pri tem pa gre prav N. Wirthu posebna zahvala, da se je pascal tako bliskovito razširil. V članku *Moč pascala*, s podnaslovom *Uporabnikom je vseč, prodajalcem se začanja svitati, standardi so na poti*, ki je bil objavljen v julijski (1979) številki revije *Datamation*, beremo:

»Pospešena rast pascala se je nemoteno nadaljevala; decembra 1978 je Pascal News (13) objavil, da obstaja že 110 različnih prevajalnikov za pascal, od tega enajst za PDP-11. Danes lahko uporabljamo pascal na vsej računalniški opremi, od mikroračunalnikov do super računalnikov, področje uporabe pa se je občutno razširilo od začetne vloge v sistemskem programiranju in pri pouku programiranja. Današnja raba pascala sega od procesiranja v realnem času za vesoljsko omrežje Nase do splošnih knjigovodskih sistemov na mini računalnikih.«

Niklaus Wirth pa ni samo velik računalniški teoretik (in praktik) pač pa tudi velik pedagog. Objavil je vrsto člankov in knjig, med katerimi zavzemata knjigi *Systematic Programming* in *Algorithms + Data Structures = Programs* prav posebno mesto.

V knjigi *Systematic Programming* (SP) najdemo opis programskih procesov, osnovanih na programskem jeziku pascal. Bralec zve, kako naj bi sestavljal programe, za katere se da pokazati njihova pravilnost.

Knjiga *Algorithms + Data Structures = Programs* (ADSP) je izjemno berljiva knjiga, ki uvaja bralca v reševanje pretresljivo težkih problemov na presenetljivo preprost način.

Delo *Računalniško programiranje* obsega prevod izbranih poglavij iz obeh Wirthovih knjig. Prevod in izbor poglavij sta delo dr. Boštjana Vilfana, ki je v to nalogo vložil veliko dela in strokovnega znanja. Nemajhno težavo je predstavljala računalniška terminologija, saj le-ta na tem področju pri nas šele nastaja. Prevajalcu je treba priznati, da je izšel iz tega težkega boja nadvse častno, če že ne kar kot zmagovalec.

Knjiga *Računalniško programiranje* obsega enajst poglavij (in 275 strani). Prvih sedem poglavij (56 strani) je prevod prvih sedmih poglavij dela SP in obravnava osnovne elemente programiranja. Naslovi poglavij so Uvod, Temeljni pojmi, Zgradba računalnika, Preprosti pripomočki in sistemi, Nekaj preprostih programov, Končnost programov in Linearni zapis in programski jeziki.

Osmo poglavje (62 strani) — Osnovne podatkovne strukture je prevod prvega poglavja dela ADSP in obširno obravnava podatkovne strukture modernega jezika, kot je pascal.

Deveto poglavje (36 strani) — Postopno razvijanje programov je prevod petnajstega poglavja SP in na primerih obravnava strukturno pot za razvijanje programov.

Zadnji dve poglavji (101 stran) — Rekurzivni algoritmi in Dinamične podatkovne strukture sta prevod tretjega in (delno) četrtega poglavja dela ADSP. Kot povesta že naslova, posegata ti dve poglavji v manj znana in logično precej zapletena področja programiranja. Tu spoznamo Niklausa Wirtha v najljepši luči, saj nam branje pokaže, da je življenje neprimerno bolj preprosto, kot se nam zdi.

Z rahlim obžalovanjem pogrešam v knjigi še dve zanimivi poglavji o sortiranju in o zgradbi prevajalnikov, a ne preostane mi drugega, kot da bralca, ki ga utegne to zanimati, napotim k izvirnemu delu ADSP.

Knjiga Računalniško programiranje je bogato opremljena z zanimivimi nalogami, ki, se razume, nimajo predloženih rešitev.

O primernosti dela za šolski učbenik je težko soditi, saj je to zelo odvisno od učnega programa in ne nazadnje od učitelja. Vsekakor pa je to delo neprecenljive vrednosti za splošno računalniško izobrazbo. Vsakomur pa, ki hoče ostati v računalniškem srednjem veku, branje tega dela močno odsvetujem. Poti nazaj namreč ni.

Egon Zakrajšek

Anton Suhadolc, Linearni topolški prostori. Zbirka izbranih poglavij iz matematike 11. Ljubljana 1979, 160 str. Cena 150.— din (120.— din).

Avtor je sestavil ta skripta po zapiskih predavanj, ki jih je imel l. 1976/77 na podiplomskem študiju matematike. Vsebujejo pa le prvih pet poglavij, ki govore o splošni teoriji. Zato bodo prišla prav tudi študentom matematike na drugi stopnji pri predmetu funkcionalna analiza, kjer se sicer obravnavajo v glavnem normirani prostori, v program pa so vključeni tudi osnovni pojmi lokalno konveksnih vektorskih prostorov. Tudi v uporabi imamo pogosto opravka s splošnimi topološkimi vektorskimi prostori; pomislimo samo na distribucije.

Skripta so napisana tako, da so dostopna bralcu brez posebne matematične predizobrazbe. Prvo poglavje npr. obravnava vektorske prostore z algebrskega stališča. Vsebuje pa že pojme, ki so pomembni v poznejši teoriji: funkcional Minkowskega, seminorme itd. Tu je tudi dokazana algebraična verzija Hahn-Banachovega izreka o razširitvi. Drugo poglavje seznanja bralca s tistim delom splošne topologije, ki ga potrebujemo pri teoriji linearnih topoloških prostorov (na kratko LT prostorov). Naslednje poglavje govori o splošnih lastnostih LT prostorov. Tu je med drugim dokazan izrek, da se da vsak Hausdorffov LT prostor vložiti v poln LT prostor (LT prostor X je poln, če je v njem vsak Cauchyjev filter konvergenten). Posebno pomembni so lokalno konveksni LT prostori. Četrto poglavje obravnava te prostore, zvezne linearne preslikave med njimi in zvezne linearne funkcionale. V zadnjem poglavju je najprej dokazan izrek, da sta dva Hausdorffova LT prostora nad istim obsegom izomorfna, če imata isto končno razsežnost, nato izrek, da je vsak lokalno kompakten Hausdorffov LT prostor končno razsežen. Podrobneje so obravnavani še metrični LT prostori in posebej Fréchetovi prostori. Na koncu skript je stvarno kazalo.

Ivan Vidav

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Odsek za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Oddelek za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko ljubljanske univerze, Inštitut J. Stefan in Zavod SR Slovenije za šolstvo

prirejajo 25. in 26. januarja 1980

8. matematični seminar

ZANIMIVA MATEMATIKA

Seminar je namenjen zlasti srednješolskim učiteljem matematike, saj je snov tega seminarja primerna za delo v krožkih. Seminar bo v veliki fizikalni predavalnici na Jadranski c. 26 v Ljubljani. Delo seminarja bo potekalo takole:

Petek, 25. januar:

9,00	Otvoritev seminarja
9,00—9,45	Ivan Vidav: Komplementarna zaporedja naravnih števil in funkcija $[x]$
10,00—10,45	
11,15—12,00	Vladimir Batagelj: Popotovanja
12,15—13,00	
15,00—17,00	Pogovor o matematiki v šoli in izven nje. Vodi Tomaž Pisanski, sodeluje Anton Suhadolc, predsednik DMFA, Aleksander Cokan — Zavod SRS za šolstvo, Zvone Trontelj — Presek

Sobota, 26. januar:

8,00—8,45	Roman Rojko: Igra nim
9,00—9,45	Roman Rojko: Trikotna števila
10,15—11,00	Tomaž Pisanski: Celi trikotniki
11,15—12,00	Tomaž Pisanski: Pellova enačba

Prispevek za seminar je 200 din za udeleženca. Vodstva šol in organizacij združenega dela prosimo, da prispevek nakažejo vnaprej na žiro račun DMFA SRS št. 50101-678-47233, lahko pa ga plača udeleženec na seminarju.

Vse udeležence seminarja in druge člane društva vabimo, da se v petek, 25. januarja udeležijo skupne večerje, ki bo organizirana, če bo dovolj prijav.

Za seminar se prijavite do 19. januarja 1980 na naslov:

Martina Koman, gimnazija, 66230 Postojna.

Sekretarka seminarja:

Martina Koman

Vodja seminarja:

Tomaž Pisanski