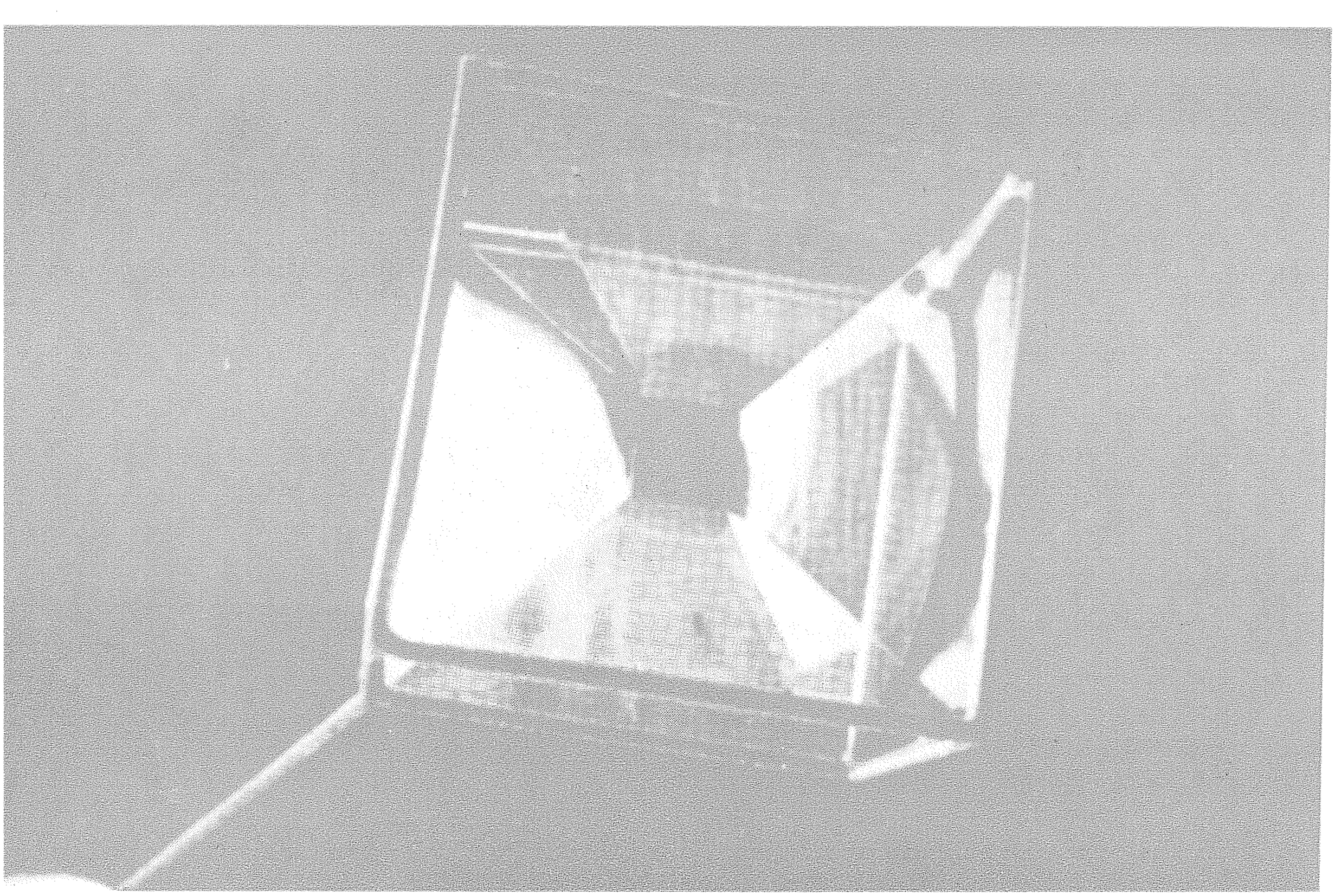
ZDAJE DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

KNJIŽNICA

1979
Letnik 26
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



LETNIK 26. — ŠTEVILKA 4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 1979

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Marjan Turk.

Naročnina: za posameznike 200.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 100.— din, za ustanove in podjetja 250.— din, za tujino 18 $ = 324.— din, posamezna številka 40.— din, dvojna številka 80.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1400 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1979 DMFA SRS — 415

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

Članki

Izreki o negibni točki in matematična ekonomija (Jože Andrej Čibej) 97

Šola

Lorentzova transformacija — grafično (Janez Strnad) 102
Precesija — malo drugače (Andrej Likar) 108

Domače vesti

11. zvezno in 4. mednarodno tekmovanje študentov matematike (France Forstnerič) 111
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter resumeji doktorskih disertacij v letu 1978 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 113
Seznam novih članov DMFA SRS v letu 1977 in 1978 (Marija Hrovath in Ciril Velkovrh) 117
O prvi matematični olimpiadi srednješolcev (Dušan Repovš) 118

Vprašanja — 116 (Ivan Kuščer) 122

Odgovori — 50 (Janez Žitnik), 111 (Boštjan Hostnik) 123

Prejeli smo v oceno (Peter Gosar, Niko Prijatelj, France Križanič, Janez Rakovec, Peter Legiša, Milan Hladnik, Mitja Rosina, Ciril Velkovrh) 125

CONTENTS

Articles

Fixed point theorems and mathematical economy (Jože Andrej Čibej) 97
School 102
Home news 111
Questions 122
Answers 123
Reviews 125

Na ovitku: Posnetek milnične tvorbe med robovi kocke. Slika je vzeta iz knjige C. Isenberg, *The Sience of Soap Films and Soap Bubbles* (Tieto Ltd., Avon, 1978).

Obzornik mat. fiz. 26 (1979) 4

IZREKI O NEGIBNI TOČKI IN MATEMATIČNA EKONOMIJA

JOŽE ANDREJ ČIBEJ

Math. Subj. Class. (1980) 47 H 10, 90 A 15

V članku obravnavamo uporabnost Brouwerjevega izreka o negibni točki pri dokazu eksistence ravnovesne točke v preprostem ekonomskem modelu.

FIXED POINT THEOREMS AND MATHEMATICAL ECONOMY

In this paper Brouwer's fixed-point theorem is used to prove existence of an equilibrium point for a simple economic model.

Od kopice izrekov o negibni točki je študentu matematike nekako najbolj na očeh (Banachov) izrek o negibni točki kontrakcije polnega metričnega prostora vase (glej [6], str. 114), z drugimi pa ne pride prav pogosto v stik. V tem prispevku bi radi pokazali, kako je z enim od njih mogoče elegantno ugnati zanimivo nalogo iz matematične ekonomije. Brouwerjev izrek, o katerem bo govor, sodi med klasične (beri tudi: najbolj uporabljane) izreke o negibni točki. Tudi Obzornik je o njem že pisal (glej [8]).

DEFINICIJA: Naj bo X topološki prostor in $f : X \to X$ zvezna preslikava tega prostora vase. Točko $x \in X$ imenujemo *negibna točka* preslikave f, če je $f(x) = x$. Če ima vsaka zvezna preslikava prostora X vase negibno točko, pravimo, da ima X *lastnost negibne točke* (LNT).

V bogati množici izrekov, ki med topološkimi prostori odlikujejo tiste z LNT, zavzema Brouwerjev rezultat (glej [1]) posebno mesto, delno na račun svoje starosti in še bolj zaradi vpliva, ki ga je imel na kasnejša raziskovanja v tej smeri. V novejši literaturi ga srečamo v več različnih oblikah. Kot bomo kasneje videli, so le-te ekvivalentne, zato nam zadošča katerakoli izmed njih, npr. tale:

IZREK: Vsaka zvezna preslikava $f : B^n \to B^n$ n-razsežne krogle (prostora R^n) vase premore vsaj eno negibno točko; B^n ima torej LNT.

Brouwerjev izrek je mogoče dokazati na več načinov, zanimiva je npr. varianta v [3], str. 468—470. Poleg dokazov, ki zahtevajo več topološkega znanja (npr. [2], str. 340—341), najdemo precej takšnih, ki uporabljajo kombinatorne prijeme ([9], str. 48—49, [7], str. 303—308). Nobena od različic pa ni posebno kratka, zato se bomo dokazu odpovedali. Preden pokažemo, kako koristen je lahko izrek v praksi, pa še nekaj opomb. Značilno je, da so dokazi pogosto narejeni za standardni simpleks

$$S^n = \left\{ x \in R^n;\ x_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

in ne za kroglo B^n, to pa ni nobena ovira; znano je namreč, da je lastnost negibne točke (LNT) topološka invarianta, kar pomeni, da se z enega pro-

stora, ki to lastnost ima, prenese na poljubno njegovo homeomorfno sliko (glej [9], str. 41). Izrek 13 v [12] nas pouči, da je vsaka omejena zaprta konveksna množica (z neprazno notranjostjo) $A \subset R^n$ (torej tudi standardni simpleks) homeomorfna zaprti enotni krogli tega prostora, zato so morebitni pomisleki odveč.

Vzemimo, da v menjalnem procesu na trgu sodeluje R oseb, ki kot kupci in/ali prodajalci ob popolni konkurenci trgujejo z $n + 1$ različnimi dobrinami. Z vektorji

$$y^r = (y_0{}^r, y_1{}^r, \ldots, y_n{}^r) \qquad r = 1, 2, \ldots, R \tag{1}$$

opišemo strukturo njihovega premoženja oziroma strukturo »košare dobrin« vsakega posameznika, saj $y_i{}^k$ očitno pomeni število enot i-te dobrine, s katerimi v proučevanem trenutku razpolaga k-ti udeleženec menjalnega procesa.

V vektorju cen

$$p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \tag{2}$$

zberimo trenutne cene dobrin, ki so predmet menjave. Vsaki gospodinji je jasno, da je ta vektor različen od 0 in so njegove komponente nenegativne, pri čemer je $p_i = 0$ prej izjema kot kaj drugega.

Predpostavimo, da ima *funkcija povpraševanja* po različnih dobrinah za vsakega posameznika obliko

$$x^r(p, M^r) = (x_0{}^r(p, M^r), \ldots, x_n{}^r(p, M^r)) \quad r = 1, 2, \ldots, R \tag{3}$$

Zapis pomeni, da je npr. njegovo povpraševanje po i-ti dobrini odvisno od sredstev M^r, s katerimi razpolaga, in od cen posameznih dobrin, predvsem seveda od cene i-te dobrine same, pa tudi od cen nadomestnih dobrin ali substitutov (primer: kava — čaj) in dopolnilnih ali komplementarnih dobrin (primer: kava — sladkor). Brez posebnih pomislekov lahko v okvirih našega preprostega primera privzamemo, da so $x^r(p, M^r)$ zvezne funkcije obeh spremenljivk in da zadoščajo enačbam

$$\sum_{i=0}^{n} p_i x_i{}^r(p, M^r) = M^r \qquad r = 1, 2, \ldots, R \tag{4}$$

kar pomeni, da je celotno povpraševanje vsakega posameznika (po vseh dobrinah, ki se pojavljajo na trgu) vrednostno usklajeno z njegovimi razpoložljivimi sredstvi. Ta sredstva (M^r) naj bodo kar enaka vrednosti njegove »košare dobrin«, ovrednotene po cenah, ki v danem trenutku veljajo na trgu:

$$M^r(p) = \sum_{i=0}^{n} p_i y_i{}^r \tag{5}$$

To pomeni, da je *agregatna funkcija povpraševanja* (po vsaki od $n + 1$ dobrin)

$$x_i(p) = \sum_{r=1}^{R} x_i{}^r(p, M^r(p)) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{6}$$

kot vsota ustreznih funkcij posameznih povpraševalcev dejansko funkcija vektorja cen p. Definirajmo *funkcijo presežnega povpraševanja* $z(p) = (z_0(p), z_1(p), \ldots, z_n(p))$ s predpisom

$$z_i(p) = x_i(p) - y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{7}$$

pri čemer pomeni

$$y_i = \sum_{r=1}^{R} y_i^r \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

celotno količino i-te dobrine, ki je na razpolago na trgu. Pri danem vektorju cen nam vrednost funkcije presežnega povpraševanja po i-ti dobrini pove, kolikšna je razlika med želeno količino te dobrine (povpraševanjem po njej) in količino, ki je na razpolago (ponudbo te dobrine); ta razlika je lahko pozitivna ali negativna, kakor pač v danem trenutku narekujejo tržne razmere. Vsekakor pa pri prej zapisanih predpostavkah velja, da je zvezna vektorska funkcija $z(p)$ homogena reda 0, kar pomeni, da je $z(tp) = z(p)$ za vsak pozitiven t. Množenje celotnega vektorja cen s skalarnim faktorjem t namreč ne spremeni razmerij med cenami različnih dobrin in zato ne spremeni presežnega povpraševanja (glej [10], str. 183). Zaradi enačb (4) in (5) pa velja še

$$\sum_{i=0}^{n} p_i z_i(p) = 0 \tag{8}$$

pri poljubnem vektorju cen p. To enačbo običajno imenujemo Walrasov zakon presežnega povpraševanja.

Vektor $p^* = (p_0^*, p_1^*, \ldots, p_n^*)$ imenujemo *ravnovesni vektor cen*, če velja

$$z_i(p^*) \leqq 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{9}$$

pri čemer dopuščamo neenakost $z_i(p^*) < 0$ samo v primeru, ko je $p_i^* = 0$. Ekonomski pomen tega pogoja je očiten: za vse dobrine, po katerih obstaja povpraševanje (in imajo zato pozitivno ceno), zahtevamo usklajenost ponudbe s povpraševanjem; pri drugih je ustrezna komponenta funkcije presežnega povpraševanja po absolutni vrednosti kar enaka ponudbi te dobrine, po predznaku pa seveda negativna.

Zanimivo vprašanje je, ali takšen vektor sploh obstaja. Naj bo model, ki smo ga opisali, še tako preprost in še tako obremenjen z nekaterimi ne najbolj realističnimi predpostavkami in poenostavitvami, pa iz njega le lahko zaslutimo obsežnost in pomembnost tovrstnih razmišljanj pri praktičnem oblikovanju politike cen. Za zdaj bomo seveda ostali pri preprostem modelu, pokazali eksistenco ravnovesnega vektorja in nakazali pot, ki nas lahko pripelje do njega.

Da ne bi zašli v izrazito ekonomsko obarvano razpravo o objektivnih tržnih zakonitostih ob popolni konkurenci, po katerih se oblikujejo cene dobrin, si zamislimo, da prilagaja cene dejanski ponudbi in povpraševanju »referent za cene«. Temu vsi udeleženci menjalnega procesa sporočajo količine dobrin, po katerih povprašujejo ali jih ponujajo pri trenutno veljavnem vektorju cen p. Po njihovih podatkih referent za vsako dobrino izračuna funkcijo presežnega povpraševanja ter določi nov vektor p' tako, da poveča cene dobrinam s pozitivno vrednostjo $z_i(p)$ (ker je po teh očitno preveliko povpraševanje, povečanje cene pa naj ga nekoliko umiri) in zmanjša cene tistim, pri katerih ima ta funkcija negativno vrednost. Ko dobi podatke o velikosti ponudbe in povpraševanja po posameznih dobrinah pri tako korigiranem vektorju cen, ponovi postopek. Njegova naloga je opravljena, ko ugotovi, da mu je uspelo (s primerno natančnostjo) izračunati ravnovesni vektor p^*.

Eden od mogočih načinov za izvedbo opisanega postopka zaporednih približkov je pravilo

$$p_i' = \max \{0, p_i + b\, z_i (p)\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{10}$$

s primerno izbrano pozitivno konstanto b. Zgoraj zapisana definicija ravnovesnega vektorja nam pove, da je vektor cen p ravnovesen natanko takrat, ko je invarianten za prehod (10), kar lahko formalno zapišemo v obliki enačbe

$$\max \{0, p_i + b\, z_i (p)\} = p_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{11}$$

Kot smo že ugotovili, deljenje ali množenje vseh cen z isto konstanto pri našem modelu ne spremeni tržnih razmer, zato si lahko privoščimo takšno normalizacijo vektorja p, da bo vsota cen (izračunana po vseh dobrinah) enaka ena.

S tem zožimo dopustne vektorje cen na standardni simpleks

$$P = \left\{(p_0, p_1, \ldots, p_n),\ p_i \geqq 0,\ \sum_{i=0}^{n} p_i = 1\right\}$$

Pravilo (10) lahko zdaj interpretiramo kot zvezno preslikavo množice P vase, $T\colon P \to P$, ki deluje po komponentah takole:

$$T_i (p) = \frac{1}{C (p)} \max \{0, p_i + b\, z_i (p)\} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{12}$$

in je

$$C (p) = \sum_{i=0}^{n} \max \{0, p_i + b\, z_i (p)\}$$

Po Brouwerjevem izreku ima vsaka zvezna preslikava simpleksa P vase negibno točko; obstaja potemtakem vektor $p^* \in P$, tako da je

$$T (p^*) = p^* \tag{13}$$

Iz primerjave enačb (11) in (12) razberemo, da je to hkrati ravnovesni vektor našega modela. Ker bi koga le utegnil motiti faktor $1/C (p^*)$, ki ga srečamo v (12), pokažimo, da je ta razlika med obema zapisoma samo navidezna, ali z drugimi besedami, da je ta faktor enak 1.

Če v enačbi (13) upoštevamo, kaj pomeni $T (p^*)$ (glej (12)), lahko napišemo

$$C (p^*)\, p_i^* = \max \{0,\ p_i^* + b\, z_i (p^*)\} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Če vsako od $n + 1$ enačb na obeh straneh pomnožimo s pripadajočo ceno p_i^* in enačbe seštejemo, dobimo

$$\sum_{i=0}^{n} C (p^*)\, (p_i^*)^2 = \sum_{i=0}^{n} (p_i^*)^2 + \sum_{i=0}^{n} p_i^*\, z_i (p^*)$$

Po Walrasovem zakonu (8) je drugi člen na desni enak nič, zato $C (p^*) = 1$ in negibna točka operatorja T, ki jo zagotavlja Brouwerjev izrek, je ravnovesni vektor cen. Preden se poslovimo od primera, ki nas je poučil, da v opisanem modelu vedno obstaja tak nabor cen za posamezne dobrine, ki ne dopušča pozitivnega presežnega povpraševanja (in s tem posredno prispeva k tržni stabilnosti!), formalno prepišimo rezultat kot Walrasov eksistenčni izrek:

IZREK: Naj bo $P = \{p = (p_0, p_1, \ldots, p_n),\ p_i \geqq 0,\ p \neq 0\}$ množica vektorjev cen, $Z = \{z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)\}$ poljubna podmnožica v R^{n+1}, $z\colon P \to Z$ pa zvezna preslikava, homogena reda 0 in takšna, da velja Walrasov zakon

$$\sum_{i=0}^{n} p_i z_i (p) = 0 \qquad (p \in P)$$

Potem obstaja vsaj en ravnovesni vektor cen p^* po predpisu (9).

Kot smo videli, lahko to trditev dokažemo z Brouwerjevim izrekom o negibni točki zvezne preslikave na simpleksu. Mogoče pa je še bolj zanimivo dejstvo, da lahko povezavo prehodimo tudi v nasprotni smeri: H. Uzawă je v [11] pokazal, da sta Walrasov in Brouwerjev izrek v nekem pogledu ekvivalentna: brž ko priznamo veljavnost enega od njiju, je zagotovljena tudi pravilnost drugega. To odkritje je vzpodbudilo nova iskanja sorodstvenih vezi med izreki o negibni točki in klasičnimi rezultati matematične ekonomije. Med različnimi dosežki te vrste se odlikuje elegantni Hoang Tuyev dokaz Kakutanijevega izreka o negibni točki (glej [4] oziroma [5]) s posplošitvijo omenjenega Walrasovega izreka, ki je bila — sama zase — že dolgo znana v matematični ekonomiji. Na drugi strani pa so s pripomočki topologije in funkcionalne analize ugnali cel kup problemov teorije splošnega ravnovesja, ki v osnovi sicer spominjajo na naš primer, v katerem smo obravnavali samo menjalni proces, vendar so po svoji postavitvi in kompleksnosti modelov (vključitev produkcije, mednarodne menjave . . .) mnogo bliže praksi. To pa je že čisto druga (in precej bolj resna) zgodba, zato bodi dovolj.

LITERATURA

[1] Brouwer L. E. J., *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten,* Math. Ann., **71** (1912) 97—115.

[2] Dugundji, J., *Topology,* Boston, Allyn and Bacon 1966.

[3] Dunford N., Schwartz J., *Linear Operators, Part I,* New York, Interscience 1958.

[4] Hoang Tuy, *A Note on the Equivalence between Walras' Excess Demand Theorem and Brouwer's Fixed-Point Theorem,* v knjigi *Computing Equilibria: How and Why,* J. Los and M. Los, Ed., Amsterdam, North Holland 1976.

[5] Kakutani S., *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem,* Duke Math. J., 8 (1941) 457—459.

[6] Križanič F., *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun,* Ljubljana, Državna založba Slovenije 1974.

[7] Nikaido H., *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics,* Amsterdam, North Holland 1970.

[8] Repovš D., *Zanimiva uporaba Brouwerjevega izreka,* Obzornik mat. fiz., **24** (1977) 184.

[9] Riedrich T., *Vorlesungen über nichtlinearen Operatoren-gleichungen,* Leipzig, Teubner 1976.

[10] Uzawa H., *Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange,* Review of Economic Studies, **27** (1959) 182—194.

[11] Uzawa H., *Walras' Existence Theorem and Brouwer's Fixed-Point Theorem,* Economic Studies Quarterly **13** (1962) 59—62.

[12] Vidav I., *Splošna topologija,* Obzornik mat. fiz., **23** (1976) 1—16.

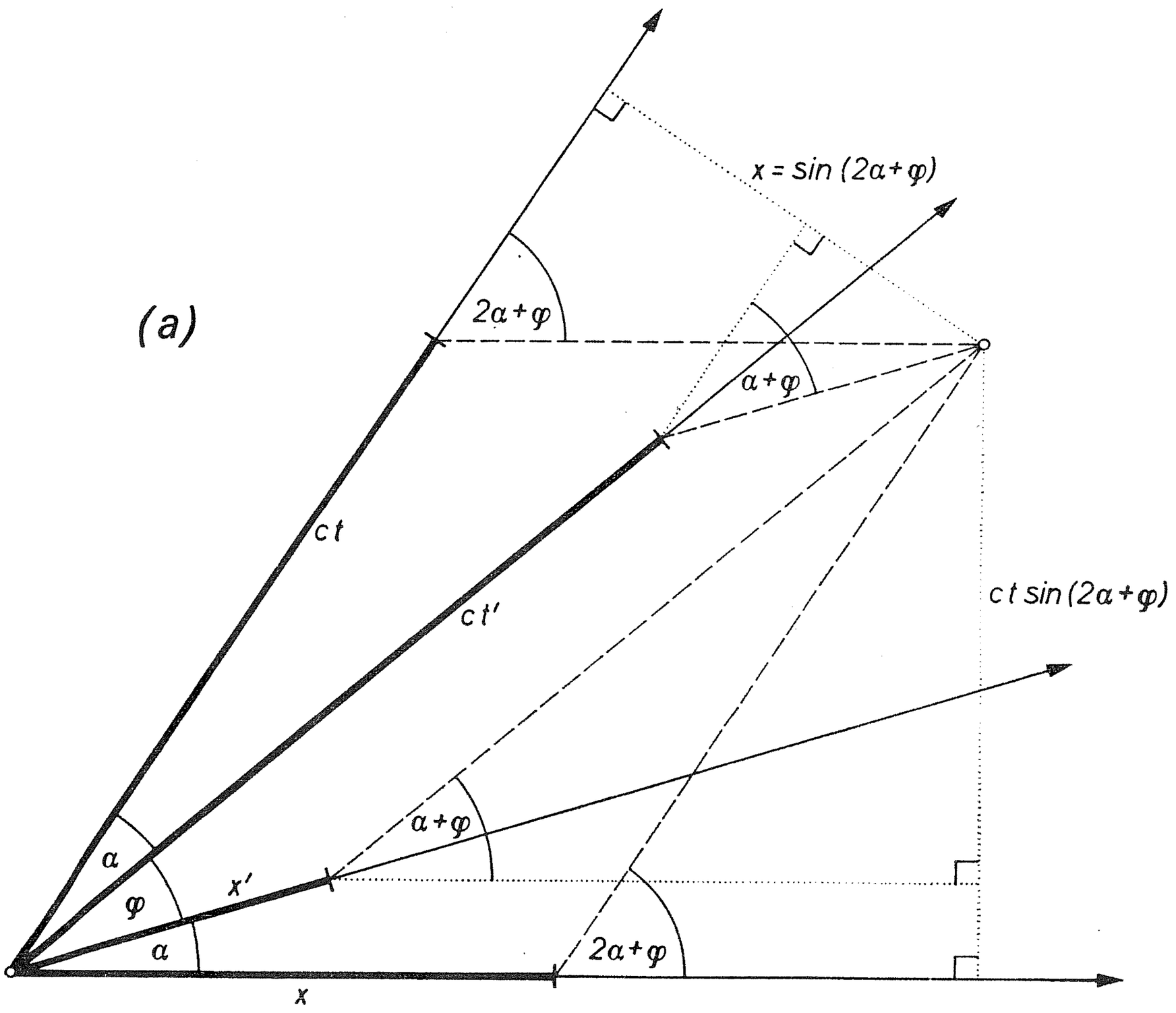
LORENTZOVA TRANSFORMACIJA — GRAFIČNO

Lorentzova transformacija ima pri poučevanju posebne teorije relativnosti na univerzi osrednjo vlogo. Ponekod se srečajo z njo že dijaki pri fiziki v srednji šoli. Pri nas jo uporabijo kot zgled pri matematiki v 4. letniku [1]. Zaradi njenega pomena so si močno prizadevali, da bi Lorentzovo transformacijo grafično ponazorili. V tem kratkem sestavku so nanizane možnosti, ki se za to ponujajo. Pogosto v učbenikih ilustrirajo račune z Lorentzovo transformacijo zaradi nazornosti z ustreznimi diagrami. Komu se zdijo prepričljivejši računi, drugemu pa diagrami, vendar si je komaj mogoče misliti, da bi prebili popolnoma brez računov.

Transformacija je zaradi privzetka o homogenosti prostora in časa linearna. Homogeno Lorentzovo transformacijo zapišemo v obliki

$$ct' = a_{00}ct + a_{01}x \qquad x' = a_{10}ct + a_{11}x$$

t in x sta čas in koordinata dogodka v inercialnem opazovalnem sistemu S in t' in x' čas in koordinata tega dogodka v inercialnem opazovalnem sistemu S′. Namesto samega časa raje upoštevamo produkt časa in hitrosti svet-



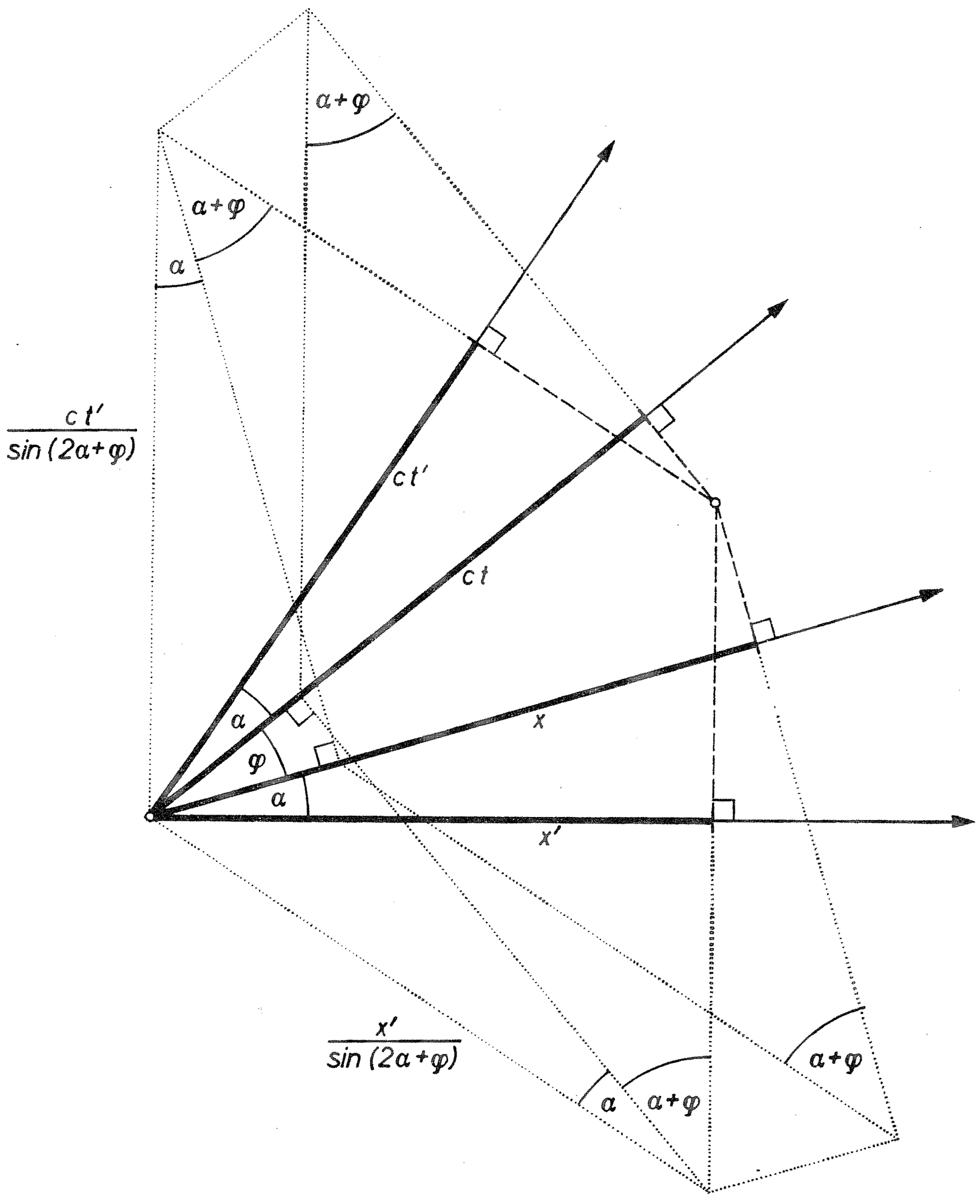
Sl. 1. Diagrama za ponazoritev Lorentzove transformacije s kontravariantnimi (a) in kovariantnimi (b) koordinatami. Z risb je mogoče razbrati, da veljata za oba primera enačbi (2), vendar sta diagrama popolnoma različna. O tem priča različen vrstni red osi.

lobe c, ki ima enako enoto kot koordinata x. Omejimo se na eno krajevno razsežnost. Osi x in x' položimo na isto premico. Izhodišči O in O′ se pokrijeta v trenutku $t = t' = 0$.

Izhodišče O′, to je točka $x' = 0$, se giblje v opazovalnem sistemu S′ s hitrostjo v_0. Iz tega takoj sledi $x/ct = -a_{01}/a_{11} = v_0/c$. Razrešimo sistem enačb (1) na ct in x, pa dobimo obratno transformacijo

$$ct = D^{-1}(a_{11}ct' - a_{01}x') \qquad x = D^{-1}(-a_{10}ct' + a_{00}x')$$

Načelo relativnosti trdi, da je mogoče opisati pojave iz katerega koli inercialnega opazovalnega sistema z enačbami enake oblike. Postavimo determinanto koeficientov enako ena: $D = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = 1$, pa mora veljati $a_{00} = a_{11}$. (Izhodišče O, to je točka $x = 0$, se giblje v opazovalnem sistemu S′ s hitrostjo $-v_0$. Zares je $x'/ct' = a_{10}/a_{00} = -v_0/c$.) Načelo o invariantnosti svetlobne hitrosti zahteva, da je $x'/ct' = 1$, če je $x/ct = 1$. Sledi $(a_{10} - a_{11})/(-a_{00} + a_{01}) = 1$ in naposled $a_{01} = a_{10}$.



Iz zapisanih štirih enačb takoj izračunamo $a_{00} = a_{11} = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2} = \gamma_0$ in $a_{10} = a_{01} = -v_0\gamma_0/c$. Tako je

$$ct' = \gamma_0 (ct - v_0 x/c) \qquad x' = \gamma_0 (-v_0 ct/c + x) \tag{1}$$

Obratna transformacija sledi iz te, če zamenjamo količine s črticami z ustreznimi količinami brez črtic in narobe ter postavimo $-v_0$ namesto v_0. Hitro se prepričamo, da je pri transformaciji (1 c) invarianta $x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$.

Gibanje delca po osi x v opazovalnem sistemu S ponazorimo s krivuljo — svetovnico — v diagramu, v katerem nanašamo na ordinatno os ct in na abscisno os x. Gibanje tega delca po osi x' v opazovalnem sistemu S' ponazorimo s svetovnico v digramu, v katerem nanašamo na ordinatno os ct' in na abscisno os x'. Dogodek ct, x na prvem diagramu je z Lorentzovo transformacijo (1) povezan z dogodkom ct', x' na drugem diagramu.

Tak način grafičnega podajanja je pregleden, a dolgovezen. Ali ne bi mogli prebiti z enim diagramom, v katerem bi točka ustrezala dogodku v obeh inercialnih opazovalnih sistemih? V tem primeru moramo pač imeti dva para osi ct, x in ct', x'. Pogled na transformacijo (1) pokaže, da osi ct', x' ne moremo dobiti s preprostim zasukom pravokotnih osi ct, x. Pri zasuku osi η in ξ za kot φ velja namreč $\eta' = \eta\cos\varphi$ in $\xi' = -\eta\sin\varphi + \xi\cos\varphi$. Drugi člen v prvi enačbi ima nasproten znak kot prvi člen v drugi enačbi. Tega ni mogoče uskladiti s transformacijo (1), če se želimo izogniti imaginarni koordinati in imaginarnemu kotu. Taka možnost je zares vse prej kot privlačna.

Ker nočemo imeti opravka z imaginarnimi količinami, se moramo odpovedati pravokotnim koordinatnim sistemom. Pri tem se moramo zaradi načela o invariantnosti svetlobne hitrosti omejiti na sisteme s simetrično razporejenimi osmi. Razlikujemo dva primera. Pri prvem uporabimo *kontravariantne koordinate*. Kontravariantna koordinata je odsek, ki ga odreže na osi vzporednica z drugo osjo skozi dogodek (sl. 1a). Pri drugem uporabimo *kovariantne koordinate*. Kovariantna koordinata je odsek, ki ga odreže na osi pravokotnica na to os skozi dogodek (sl. 1 b). S slik razberemo da velja za oba primera

$$\begin{aligned} ct &= [ct' \sin(\alpha + \varphi) + x' \sin\alpha]/\sin(2\alpha + \varphi) \\ x &= [ct' \sin\alpha + x' \sin(\alpha + \varphi)]/\sin(2\alpha + \varphi) \end{aligned} \tag{2}$$

Kljub temu pa sta diagrama popolnoma različna. O tem priča že drugačen vrstni red osi.

Zahtevamo, da se transformacija (2) ujema z obratno transformacijo (1):

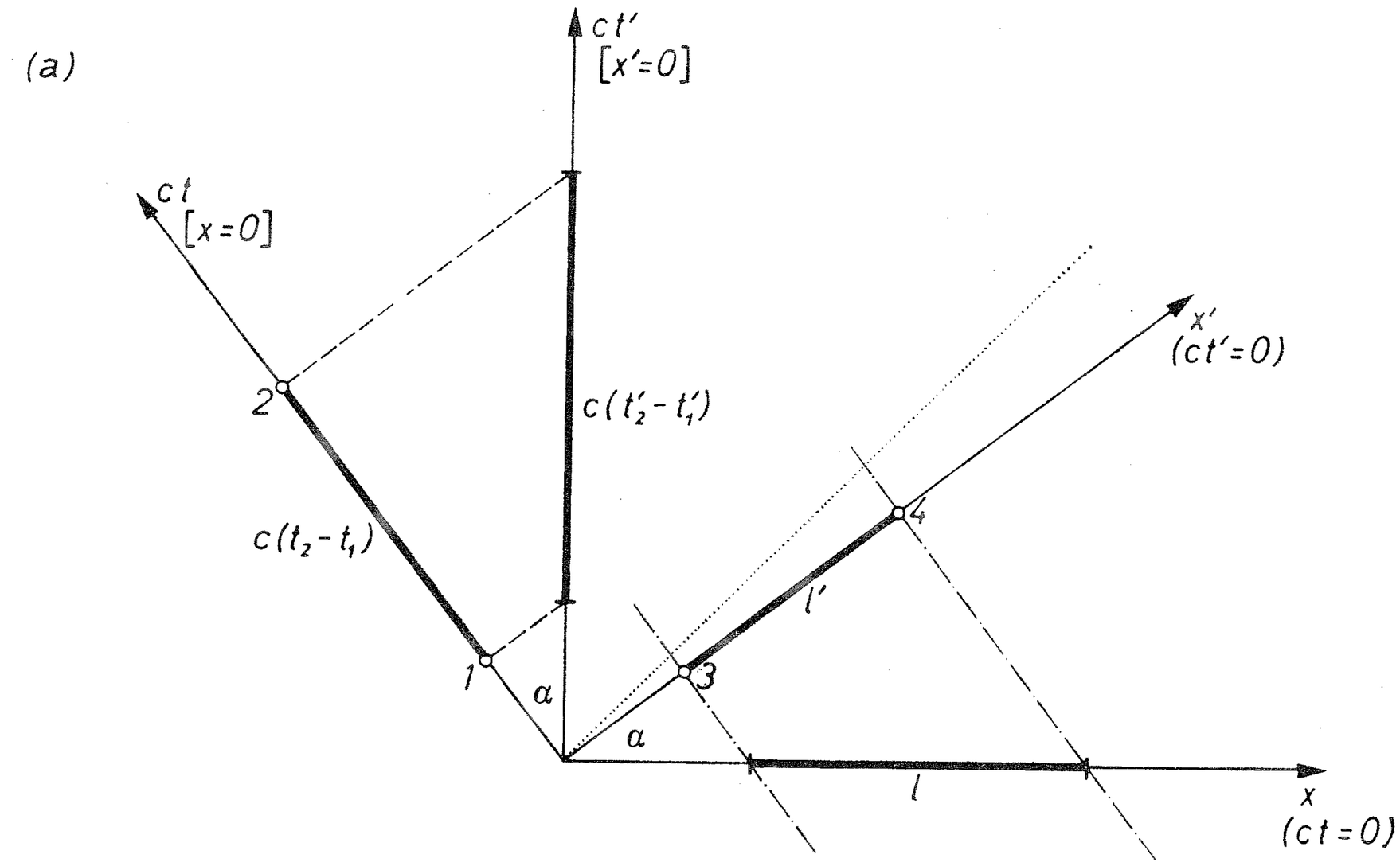
$$\gamma_0 = \sin(\alpha + \varphi)/\sin(2\alpha + \varphi) \qquad \gamma_0 v_0/c = \sin\alpha/\sin(\alpha + \varphi)$$

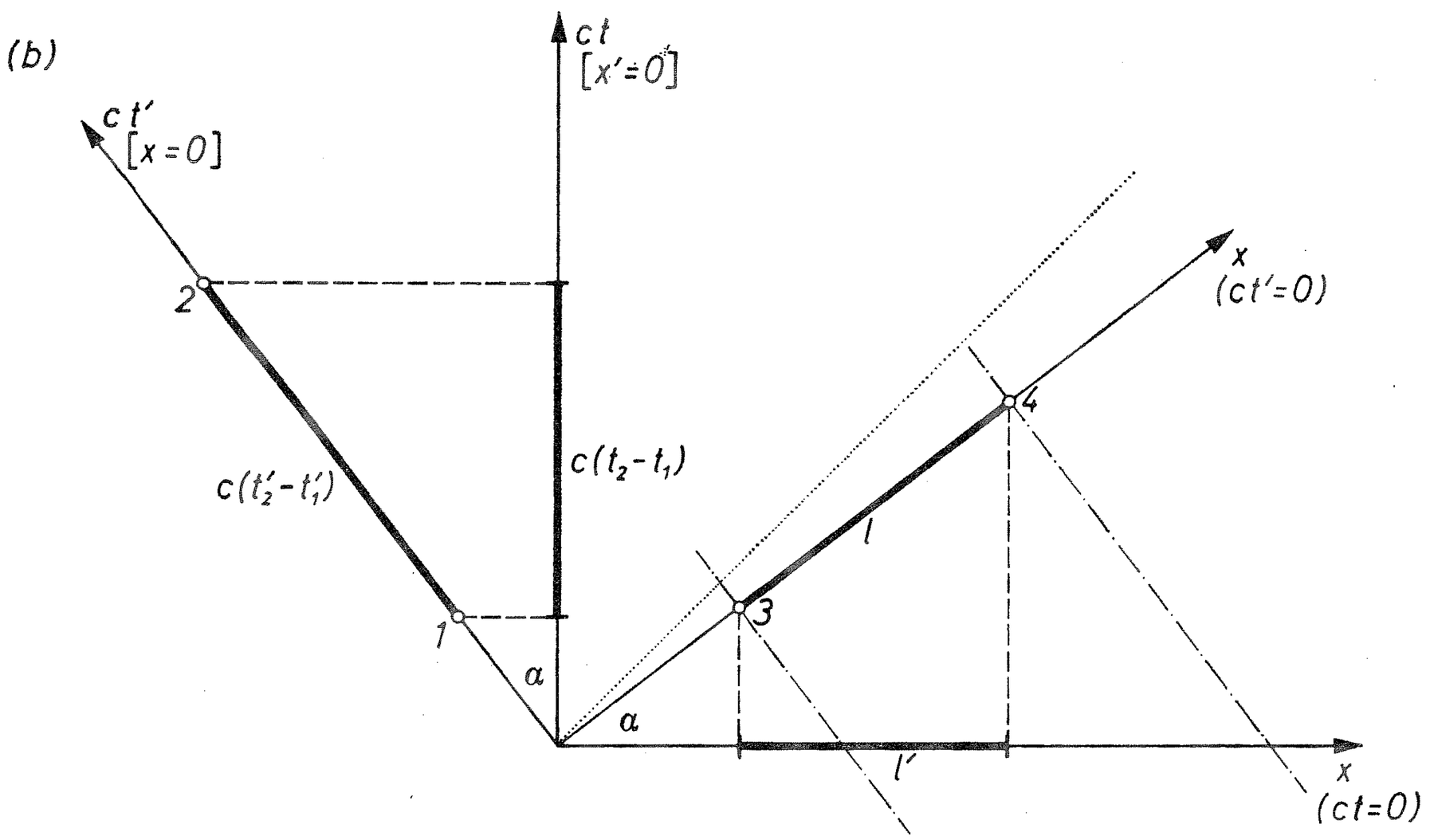
Iz obeh enačb sledi še $v_0/c = \sin\alpha/\sin(\alpha + \varphi)$. Iz dveh izmed zapisanih treh enačb izračunamo kota α in φ pri danem razmerju v_0/c.

Za poseben primer $\alpha + \varphi = {}^1/_2\,\pi$ imata enačbi rešitvi

$$v_0/c = \sin\alpha \qquad \cos\alpha = 1/\gamma_0$$

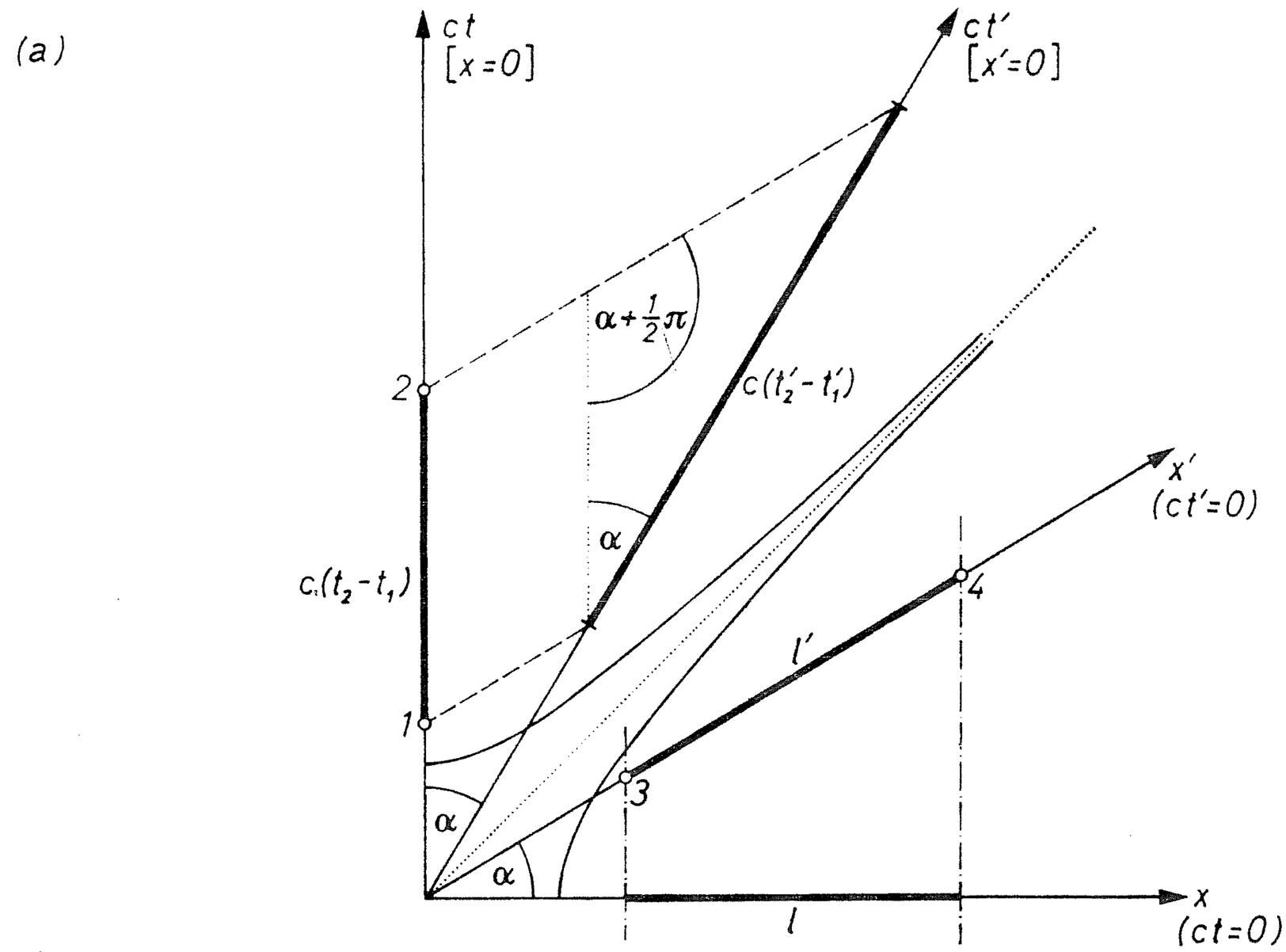
Ta primer je raziskal za kontravariantne koordinate H. Amar, ne da bi vedel za prejšnje delo E. Loedla [2], [3], in za kovariantne koordinate R. W. Brehme, ne da bi spočetka vedel za Loedlovo in Amarjevo delo [4], [5]. Z *Loedlovim diagramom* (sl. 2 a) in *Brehmerjevim diagramom* (sl. 2 b) prepro-

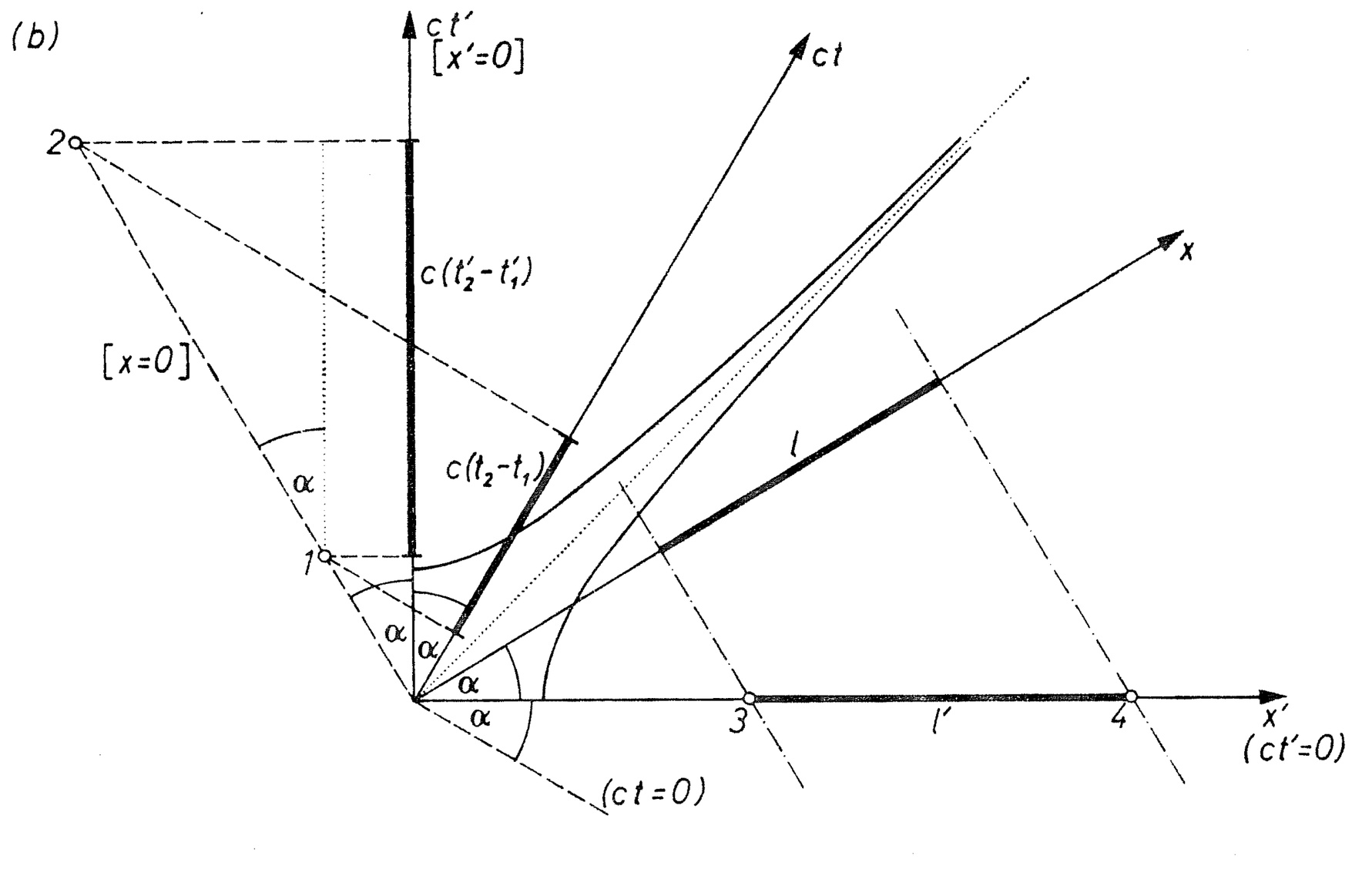




Sl. 2. Podaljšanje časa in skrčenje dolžin na Loedlovem (a) in Brehmejevem (b) diagramu. Ta sledita z izbiro $\alpha + \varphi = {}^1\!/_2\,\pi$ iz splošnega diagrama s kontravariantnimi (sl. 1 a) in kovariantnimi (sl. 1 b) koordinatami. 1 in 2 sta dogodka, ki se dogodita na istem kraju v opazovalnem sistemu ct, x (v izhodišču 0). 3 in 4 sta dogodka, ki se dogodita na svetovnicah krajišč palice z lastno dolžino l sočasno v opazovalnem sistemu ct', x' (pri $ct' = 0$). Za oba diagrama veljata enačbi $c\,(t_2' - t_1') = c\,(t_2 - t_1)/\cos\alpha = \gamma_0 c\,(t_2 - t_1)$ in $l' = l\cos\alpha = l/\gamma_0$. Svetovnici obeh krajišč palice z lastno dolžino l sta narisani s pikami in črticami. Z oglatima oklepajema sta označeni svetovnici izhodišč 0 $[x = 0]$ in 0′ $[x' = 0]$, z okroglima pa premici $(ct = 0)$ in $(ct' = 0)$. Pikčasto je narisana svetovnica svetlobnega signala, ki je simetrala med osema ct' in x' ter med osema ct in x. Pri zgledu smo izbrali $v_0/c = {}^3\!/_5$, ko je

$$\gamma_0 = {}^5\!/_4 \text{ in } \alpha = 36{,}9^0.$$





Sl. 3. Podaljšanje časa in skrčenje dolžine na diagramu Minkowskega (a) in na ustreznem (b) diagramu. Ta sledita z izbiro $2\alpha + \varphi = {}^1\!/_2\,\pi$ iz splošnega diagrama s kontravariantnimi (sl. 1 a) in kovariantnimi (sl. 1 b) koordinatami. Risbi se naslanjata na risbi na sl. 2. Za oba primera veljata enačbi $c\,(t_2' - t_1') = c\,(t_2 - t_1)\,\cos\alpha/k\cos 2\alpha = \gamma_0 c\,(t_2 - t_1)$ in $l' = l/k\cos\alpha = l/\gamma_0$. Dodana sta še dela dveh vej hiperbole $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 = 1$, za katero lahko vzamemo, da določa enoti na oseh ct' in x'. To upoštevamo s koeficientom k. Pri zgledu smo izbrali $v_0/c = {}^3\!/_5$, ko je

$$\gamma_0 = {}^5\!/_4 \text{ in } \alpha = 31{,}0^0.$$

sto ponazorimo podaljšanje časa in skrčenje dolžin. Diagrama sta tudi sicer prav uporabna in se hitro navadimo nanju. Vendar ne kaže navajati enega in drugega. Pri pouku si največkrat pomagajo z Brehmejevimi diagrami. Brehme in F. W. Sears sta celo napisala učbenik za posebno teorijo relativnosti, ki gradi na teh diagramih [6].

V zahtevnejših učbenikih ponazorijo Lorentzovo transformacijo nekoliko drugače [7]. Pri kontravariantnih koordinatah izberejo $2\alpha + \varphi = {}^1/_2\,\pi$. V tem primeru ne moremo doseči, da bi se enačbi (2), taki kot sta, skladali z obratno Lorentzovo transformacijo (1). Zapišemo ju kot

$$ct = k\cos\alpha\,(ct'/k) + k\sin\,(x'/k) \qquad x = k\sin\alpha\,(ct'/k) + k\sin\alpha\,(x'/k)$$

ct'/k proglasimo za novi ct' in x'/k za novi x' in pravimo, da ju merimo z enoto, ki se po faktorju $1/k$ razlikuje od enote na oseh ct in x. Tedaj imamo $k\cos\alpha = \gamma_0$ in $k\sin\alpha = \gamma_0 v_0/c$, tako da je $\mathrm{tg}\,\alpha = v_0/c$ in $k = \gamma_0/\cos\alpha = (1 + v_0^2/c^2)^{1/2}/(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$. Faktor $1/k$ je odvisen od hitrosti in je enak 1, če je $v_0/c_0 = 0$.

Diagram te vrste, ki ga pogosto imenujejo *diagram Minkowskega*, kaže, da je mogoče skrčenje dolžin vzporediti z napako zaradi paralakse, do katere pride, če pri merjenju dolžine gledamo na merilo postrani (sl. 3 a). Slabost pa je poleg spremenljivih enot na oseh ct' in x' še to, da se zdi opazovalni sistem ct, x odlikovan, ker ima edini pravokotni osi. Kovariantne različice diagrama za $2\alpha + \varphi = {}^1/_2\,\pi$ ni v učbenikih. Tukaj je navedena zaradi popolnosti (sl. 3 b).

Janez Strnad

LITERATURA

[1] F. Križanič, *Aritmetika, algebra in analiza za gimnazije*, IV. del, Ljubljana, DZS 1970, str. 50.

[2] H. Amar, *New geometric representation of the Lorentz Transformation*, Am. J. Phys. **23** (1955) 487.

[3] H. Amar, E. Loedel, *Geometric representation of the Lorentz transformation*, Am. J. Phys. **25** (1957) 327.

[4] R. W. Brehme, *A geometric representation of the Galilean and Lorentz transformations*, Am. J. Phys. **30** (1962) 489.

[5] R. W. Brehme, *Geometric representations of the Lorentz transformation*, Am. J. Phys. **32** (1964) 233.

[6] F. W. Sears, R. W. Brehme, *Introduction to the theory of relativity*, Reading, Mass., Addison-Wesley 1968.

[7] G. Joos, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1959, str. 234 (prva izdaja je izšla leta 1932) in mnogi drugi učbeniki teoretične fizike in posebne teorije relativnosti.

PRECESIJA — MALO DRUGAČE

Med osupljive pojave v mehaniki sodi *precesija* vrtavk. Poskus naredimo tako, da osno simetrično vrtavko vrtljivo vpnemo zunaj težišča (sl. 1). Vodoravno os vrteče se vrtavke na prostem krajišču pridržimo ter jo nato v lahnem sunku vodoravno poženemo. Če je bila smer in kotna hitrost zagona prava, se vrtavkina simetrijska os giblje s konstantno kotno hitrostjo po vodoravni ravnini. To je precesija.

Precesija navidez nasprotuje vsakdanjim izkušnjam. Te nas silijo, da se vprašamo: »Zakaj vrtavka ne pade?« V tem sestavku poskusimo odgovoriti na to vprašanje malo drugače, kot je sicer v navadi.

Najprej si oglejmo običajno razlago precesije. Če se osno simetrična vrtavka vrti okrog geometrijske osi, ima v smeri te osi vrtilno količino $\boldsymbol{\Gamma}_\omega$ (sl. 1). Vektor vrtilne količine $\boldsymbol{\Gamma}_\omega$ kroži s simetrijsko osjo vrtavke v vodoravni ravnini. Vrtilna količina sistema se torej spreminja. Tega je kriv navor teže, saj je vrtavka podprta zunaj težišča. Vektor navora teže je

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$$

V kratkem času dt dobi vrtavka sunek navora teže $\mathbf{M}\,dt$, ki je po izreku o vrtilni količini enak spremembi vrtilne količine v tem času

$$\mathbf{M}\,dt = d\,\boldsymbol{\Gamma}_\omega \tag{1}$$

V kratkem času dt se geometrijska os vrtavke zasuče za kot $d\varphi = \Omega\,dt$, če je Ω precesijska kotna hitrost. S sl. 1 razberemo, da je velikost spremembe vrtilne količine zvezana z zasukom geometrijske osi vrtavke $d\,\varphi$ takole $d\,\Gamma_\omega = \Gamma_\omega\,dt$. Iz enačbe (1) sledi $M\,dt = \Gamma_\omega\,\Omega\,dt$ in

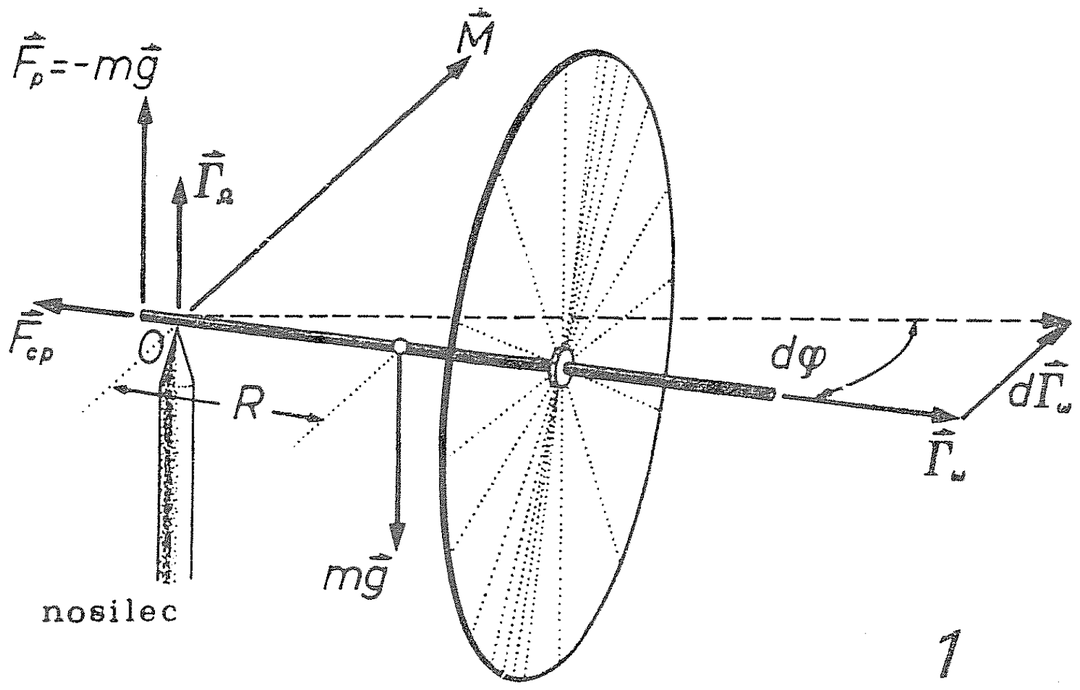
$$\Omega = M/\Gamma_\omega \tag{2}$$

Velikost vrtilne količine Γ_ω se ne spreminja, ker navor nima komponente v smeri geometrijske osi vrtavke. Zaradi precesije ima vrtavka še navpično komponento vrtilne količine Γ_ω. Ta komponenta je ves čas konstantna po velikosti in po smeri. Vrtavki jo damo z začetnim sunkom navora. Če te komponente vrtavka nima, se pravi, da prosto krajišče samo spustimo, ne da bi vrtavko vodoravno pognali, je njeno gibanje bolj zapleteno.

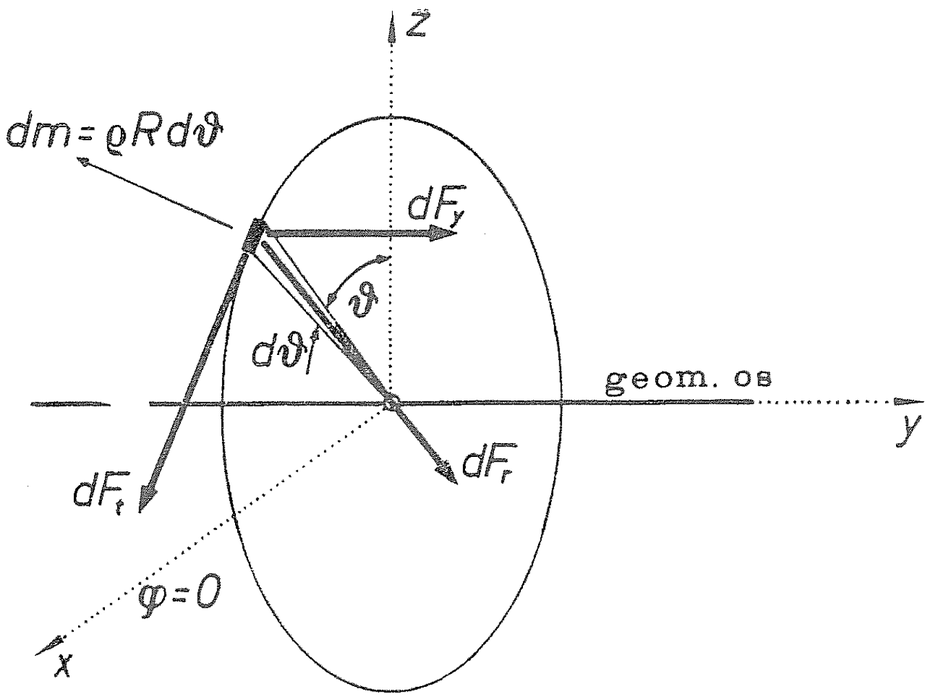
Vrtavka ne pade zato, ker ima vektor navora teže ves čas vodoravno smer. Vsota vseh zunanjih sil v navpični smeri je enaka nič, saj se težišče ne premika v tej smeri. Navpična sila podpore v osišču mora torej biti nasprotno enaka teži. Osišče prispeva še vodoravno centripetalno silo, ki zagotovi gibanje težišča po krogu. Ta sila je navadno zanemarljiva, saj je pri demonstracijskih poskusih precesijska kotna hitrost majhna.

Izkušnje pokažejo, da ta nekoliko formalistična razlaga marsikoga ne zadovolji, čeprav ne more oporekati njeni pravilnosti. Formalistična razlaga je pogosto bližnjica, ki nas hitro in varno pripelje do cilja, ne da bi pojav v podrobnosti razumeli.

Poskusimo pojasniti precesijo vrtavke tako, da se ne opremo na izrek o vrtilni količini. Tudi poskus nekoliko poenostavimo, da se izognemo nepotrebnim zapletom pri računanju. Vrtavko podprimo v težišču, kamor postavimo izhodišče pravokotnega koordinatnega sistema z navpično osjo z. Vrtavka naj bo tanek, tog obroč, ki je na svojo geometrijsko os pritrjen z zelo



1



2

Sl. 1. Precesija vrtavke. V času dt se zasučeta geometrijska os vrtavke in vektor $\Gamma\omega$ za kot $d\varphi$. Vrtilno količino $\Gamma\Omega$, ki kaže navpično navzgor, damo vrtavki, ko jo lahno sunemo v vodoravni smeri. Navor teže $\mathbf{M}$ ima isto smer kot sprememba vrtilne količine $d\,\Gamma\omega$. V točki O deluje nosilec na vrtavko s silo, katere navpična komponenta je nasprotno enaka sili teže, vodoravna komponenta pa skrbi, da se vrtavkino težišče giblje po krogu.

Sl. 2. Na vsako točko togega obroča, ki precedira, deluje sila $d\mathbf{F}$, ki jo razstavimo na radialno (dF_r), tangentno (dF_t) komponento ter komponento v smeri osi y ($d\mathbf{F}_y$).

lahkimi, a trdnimi drogovi (sl. 2). Obroč naj precedira: vrti naj se okrog geometrijske osi s kotno hitrostjo ω, njegova geometrijska os pa naj se vrti v ravnini xy s kotno hitrostjo Ω. S to poenostavitvijo smo se izognili gibanju težišča vrtavke okrog pritrdišča pri pravi precesiji. Ker lahko vsako simetrično vrtavko sestavimo iz tankih homogenih obročev, se s poenostavitvijo nismo preveč oddaljili od prvotnega problema.

Oglejmo si gibanje posameznih delov obroča. Ker sta Ω in ω ves čas konstantni, so različne lege geometrijske osi obroča v ravnini xy enakovredne. Zato bomo postavili geometrijsko os obroča v os y.

Deli obroča se gibljejo po zamotanih tirih. Analizirajmo za del obroča silo, ki omogoča tako gibanje. Na majhen odsek obroča z maso $dm = \varrho\, R\, d\vartheta$ (ϱ je masa obroča na dolžinsko enoto, R njegov polmer, $d\vartheta$ pa majhen kot, ki odloča o velikosti odseka (sl. 2)) deluje po Newtonovem zakonu sila

$$d\mathbf{F} = dm\,\mathbf{a} \tag{3}$$

Pospešek odseka s kotom ϑ proti osi z izračunamo najlaže v polarnih koordinatah r, ϑ, φ. Te koordinate so s pravokotnimi povezane takole:

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = R\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = R\cos\vartheta \tag{4}$$

Pospešek $\mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ dela obroča s polarnima koordinatama ϑ, $\varphi = 0$ dobimo z dvakratnim odvajanjem enačb (4) po času. Pri tem upoštevamo, da velja $\dot{\varphi} = \Omega$ in $\dot{\vartheta} = \omega$. Rezultat je:

$$\mathbf{a} = (-R\,[\omega^2 + \Omega^2]\,\sin\vartheta,\ 2\,R\,\Omega\,\omega\cos\vartheta,\ -R\omega^2\cos\vartheta) \tag{5}$$

Iz kartezičnih komponent a_x in a_y pridelamo tangencialno in radialno komponento pospeška iz enačb, ki ju napišemo, če gledamo na sl. 2:

$$-a_r\cos\vartheta\ -a_t\sin\vartheta = a_z \qquad -a_r\sin\vartheta + a_t\,\mathrm{cost}\vartheta = a_x$$

Iz tega pa sledi:

$$a_r = R\omega^2 + R\Omega^2 \sin^2\vartheta \qquad a_t = -\tfrac{1}{2} R\Omega^2 \sin 2\vartheta \qquad (6\,a, 6\,b)$$

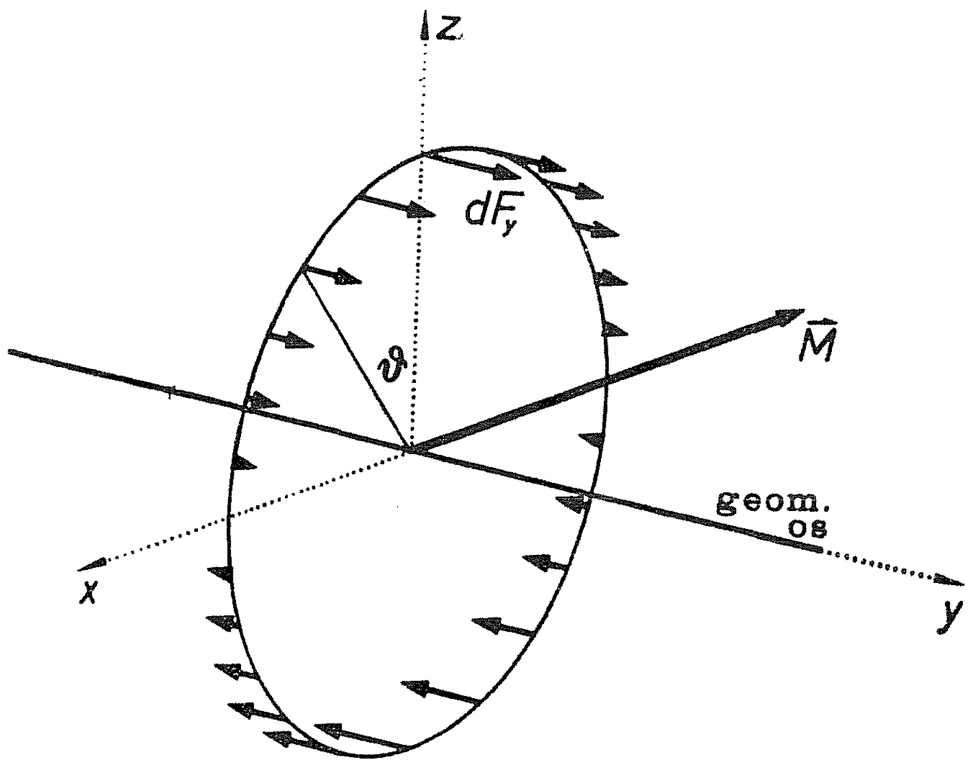
Komponente sile, ki mora delovati na izbrani odsek obroča, so sedaj na dlani:

$$dF_t = -\tfrac{1}{2} R^2\Omega^2\varrho \sin 2\vartheta \, d\vartheta \qquad (7\,a)$$

$$dF_r = [R^2\varrho\omega^2 + R^2\varrho\Omega^2 \sin^2\vartheta] \, d\vartheta \qquad (7\,b)$$

$$dF_y = 2 R^2\varrho\Omega\omega \cos\vartheta \, d\vartheta \qquad (7\,c)$$

Ker je obroč tog, si lahko s primerno porazdelitvijo notranjih napetosti sam zagotovi radialno in tangentno komponento sile, saj je njun navor na celotni obroč enak nič in prav tako njuna vsota. Navor komponente dF_y pa je od nič različen. S sl. 3 izračunamo njegovo velikost takole:



Sl. 3. Odvisnost komponent dF_y od kota ϑ. Togemu obroču lahko priskrbimo te komponente sile na primer tako, da delujemo na geometrijsko os z navorom **M**.

$$dM = 2R\cos\vartheta dF_y$$

in

$$M = 4\varrho\Omega\omega R^3 \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = mR^2\Omega\omega \qquad (8)$$

Če torej želimo obroč prisiliti, da bo precediral, mora delovati nanj zunanji navor z velikostjo $M = \Gamma_\omega \Omega$. S tem zagotovimo vsaki točki obroča potrebno komponento sile dF_y. Zveza med velikostjo zunanjega navora M, precesijsko kotno hitrostjo Ω in vrtilno količino okrog geometrijske osi $\Gamma\omega$ se ujema z zvezo pri prejšnji razlagi. To velja tudi glede smeri vektorja navora **M** (sl. 3).

Različni deli obroča morajo biti različno napeti, saj razlika v tangentni napetosti obroča zagotavlja potrebno tangentno silo. Integracija enačbe (7 a) da:

$$F_t = \tfrac{1}{4} \varrho R^2\Omega^2 \cos 2\vartheta + F_0 \qquad (8)$$

Velikost tangentne napetosti v izbrani točki obroča niha s frekvenco $2\omega/2\pi$ in amplitudo $\tfrac{1}{4} \varrho R^2\Omega^2$ okrog srednje vrednosti.

Radialno silo na del obroča podaja enačba (7 b). V prvem členu spoznamo centripetalno silo, ki deluje tudi takrat, ko obroč ne precedira.

Razlaga precesije, ki smo jo predstavili, je podrobnejša od običajne. Izvedeli smo nekaj o tangentnih in radialnih silah v obroču. Poleg tega pa smo neposredno videli, zakaj moramo delovati na obroč z zunanjim navorom, če želimo, da precedira.

Andrej Likar

DOMAČE VESTI

11. ZVEZNO IN 4. MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Za poročanje o študentskem tekmovanju iz matematike 1. aprila 1978 v Beogradu je resda že malo pozno. Ker pa bodo marsikoga zanimale naloge s tekmovanja in ker je ekipa naše fakultete dosegla na njem lep uspeh, je vseeno bolje, da članek izide zdaj kot nikoli.

Na tekmovanju je sodelovalo 16 ekip, 10 iz jugoslovanskih fakultet in 6 iz tujine, v vsaki ekipi pa so bili po trije tekmovalci. Kot običajno so študentje prvega in drugega letnika reševali naloge iz analize in algebre, študentje višjih letnikov pa smo lahko izbirali med več področji, vsak je reševal po dve nalogi iz dveh izbranih področij.

Spregovorimo na kratko o rezultatih. V 1. skupini (1. in 2. letnik) je bil z vsemi možnimi 100 točkami najboljši Soukup Lajos iz Budimpešte. Drugo nagrado sta prejela Karel Grill (78 točk) in Josef Zaussinger (76 točk), oba z Dunaja, tretjo nagrado pa Konrad Engel (68 točk) iz Rostocka (DDR). V 2. skupini (3. in 4. letnik) je prejel prvo nagrado Kollar Janos iz Budimpešte (algebra in topologija, 98 točk). Drugo nagrado je dobil France Forstnerič iz Ljubljane (algebra in verjetnostni račun, 68 točk), tretjo pa Vilmos Totir iz Szegeda (funkc. analiza in kompleksna analiza, 60 točk). Ekipno je prva ekipa iz Ljubljane osvojila četrto mesto, druga pa deveto. Med Ljubljančani sta se zelo izkazala tudi Bojan Mohar in John Taylor.

Ekipi naše fakultete sta torej dosegli na tekmovanju lep uspeh. Še pomembnejše pa je to, da smo se tu srečali s študenti matematike iz drugih fakultet in preživeli z njimi nekaj lepih dni. Organizacija tekmovanja sicer ni bila brezhibna, toda organizatorji so bili prav tako študentje kot mi, pa smo jim laže oprostili nekaj drobnih napak. Za konec želimo, da bi bila taka tekmovanja še vrsto let in da bi se tudi na naši fakulteti vedno našel kdo, ki se ga bo želel udeležiti.

Dr. Petru Legiši se najlepše zahvaljujemo, da je našel čas in potoval z nami. Imel je nemalo truda pri popravljanju naših nalog.

Naloge

Analiza I

1. Naj bo f zvezna funkcija; $f \in C\,[0, 1]$ in $a,\ b \in [0, 1],\ a < b$. Denimo, da za vsak $x \in (a, b)$ obstaja limita

$$f^{I}(x) = \lim_{h \to 0} (f(x + h) - f(x - h))/(2 \,.\, h)$$

Dokaži, da obstajata taki točki $p,\ q \in (a, b)$, da velja

$$f(b) - f(a) \leqq f^{I}(p) \,.\, (b - a), \quad f(b) - f(a) \geqq f^{I}(q) \,.\, (b - a)$$

2. Dva metrična prostora (M_1, d_1) in (M_2, d_2) sta izometrična, če obstaja bijektivna preslikava $f\colon M_1 \to M_2$, ki ohranja razdaljo: $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ za vsak $x, y \in M_1$.

Naj bo $M_1 = M_2 = \mathbb{R}^n$, $d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Dokaži, da metrična prostora $(\mathbb{R}^n, d_1)$ in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ nista izometrična!

Algebra I

1. Točki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ iz $\mathbf{R}^3$ zadoščata naslednjim pogojem:

(1) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq 0$, $y_1 \geqq y_2 \geqq y_3 \geqq 0$;

(2) $x_1 \leqq y_1$, $x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2$, $x_1 + x_2 + x_3 \leqq y_1 + y_2 + y_3$. Označimo $\mathbf{y}^p$ ($p = 1, 2, \ldots, 48$) točke, ki jih dobimo iz točke $\mathbf{y}$ s permutacijami njenih koordinat in množenjem koordinat s $+1$ ali -1. Dokaži, da lahko vektor $\mathbf{x}$ predstavimo v obliki $\mathbf{x} = \sum_{p=1}^{48} t_p \,.\, \mathbf{y}^p$, kjer je $t_1, \ldots, t_{48} \geqq 0$ in $\sum_{p=1}^{48} t_p = 1$; z drugo besedo, $\mathbf{x}$ pripada konveksni ogrinjači množice $\{\mathbf{y}_p, p = 1, \ldots, 48\}$.

2. Poišči vse polinome $p(x)$ nad obsegom $\mathbf{F}$, ki zadoščajo relaciji $p(x^2) \equiv (p(x))^2$!

Algebra II

1. Če algebrajski zakon $\mathbf{Z}$ velja v neskončno mnogo grupah s praštevilskim redom, velja $\mathbf{Z}$ v vsaki komutativni grupi. Dokaži!

2. Poišči matrično reprezentacijo grupe Aut $(\mathbf{Q}(\sqrt{p}))$, kjer je p praštevilo, $\mathbf{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b \,.\, \sqrt{p} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$; Aut pomeni grupo avtomorfizmov.

Topologija

1. Poišči infimum vseh topologij na dani množici X, za katere je X Hausdorffov, kompakten in popolnoma nepovezan prostor!

2. Naj bo X prostor T_3 in naj bo card $(X) = \aleph_2$. Če je vsak podprostor $Y \subseteq X$, za katerega je card $(Y) =$ card (X), separabilen, je vsak podprostor prostora X separabilen. Dokaži!

Verjetnostni račun

1. Dokaži, da je $(E(X^r))^{1/r}$ nepadajoča funkcija r za vsako nenegativno slučajno spremenljivko X. Nato dokaži neenakost:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right]^r \leqq n^{r-1} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^r\right]$$

za $r > 1$ in poljubne $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$!

2. Naj bo slučajna spremenljivka X_1 enakomerno porazdeljena na $[0, 1]$. Če je $X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k$, naj bo X_{k+1} enakomerno porazdeljena na $[0, x_k]$. Poišči matematično upanje spremenljivke X_n!

Funkcionalna analiza

1. Naj bo $A \subseteq [0, 1]$ poljubna množica z Lebesguovo mero 0. Dokaži, da obstaja zvezna strogo naraščajoča realna funkcija f, definirana na intervalu $[0, 1]$, za katero je $f'(t) = 0$ za vsak $t \in A$!

2. Naj bo M zaprta podmnožica evklidskega prostora $\mathbf{R}^n$ z lastnostjo Čebiševa: vsaka točka $x \in \mathbf{R}^n$ ima eno samo najbližjo točko $\pi(x) \in M$ po evklidski metriki. Dokaži naslednjo lastnost preslikave $\pi : \mathbf{R}^n \to M$:

a) π je zvezna;

b) za vsako točko $x \in \mathbf{R}^n - M$ obstaja neki poltrak $\mathbf{p}$ z izhodiščem v x, da je $\pi(\mathbf{p}) = \{\pi(x)\}$.

Kompleksna analiza

1. Naj bo $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ analitična funkcija na odprtem disku $\Delta = \{z: |z| < 1\}$. Dokaži: če je $|\arg f(z)| < \Theta$ $(\Theta < \pi/2)$, potem velja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1} \leqq \frac{|a_0|^2}{\cos^2 \Theta}$$

2. Naj bo f' analitična funkcija na območju, ki vsebuje disk $\Delta = \{z||z| < 1\}$ in naj bo $f(0) = 0$. Dokaži neenakost

$$\int_0^{2\pi} |f(\exp(i\Theta))| \, . \, d\Theta \leqq \int_0^{2\pi} |f'(\exp(i\Theta))| \, . \, d\Theta$$

Diferencialne enačbe

1. Ali ima Riccatijeva enačba

$$y' = (y + 5 \, . \, x + \sin x) \, . \, (y + 5x - \cos x - 2)$$

kakšno rešitev, definirano in zvezno na kakšnem intervalu neskončne dolžine?

2. Ali imata enačbi

$$y''' - \exp(-x) \, . \, y'' + \exp(\cos x) \, . \, y' - (x^3 + x + 1) \, . \, y = 0$$

$$y''' - 3 \, . \exp(-x) \, . \, y'' + \exp(\cos x) \, . \, y' - 2 \, . \, (x^3 + x + 1) \, . \, y = 0$$

kakšna skupno netrivialno rešitev?

France Forstnerič

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE TER RESUMEJI DOKTORSKIH DISERTACIJ V LETU 1978*

Pedagoška akademija Maribor

Matematika-fizika

167. Ogrinc Venčeslav
168. Švajger Rosvita
169. Trstenjak Ivan
170. Budler Ema
171. Moravec Vida
172. Tarča Marta
173. Gomboc Miroslav
174. Zamuda Jožica
175. Zajmi Marija
176. Kontler Saša
177. Voršič Ivan
178. Hrastnik Marija
179. Valentin Alojzija
180. Planinšek Darko
181. Zrim Sonja

Tehnični pouk-fizika

179. Oder Milan
180. Kodba Stanko
181. Britovšek Mirko
182. Koželj Rihard
183. Petrovič Miodrag
184. Polič Karel
185. Navršnik Edvard

Pedagoška akademija Ljubljana

Matematika-fizika

478. Benčina Alenka
479. Konc-Žvegelj Viktorija
480. Murovec Dušan
481. Batistič Sergij
482. Resman Silva
483. Podjed Fani

---

*Seznam diplomantov iz leta 1977 je bil objavljen v Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 5, str. 180—185.

484. Avbelj Helena
485. Stevanovski Nevenka
486. Novak Zdenka
487. Okrogelnik Frančiška
488. Rogina Darinka
489. Nardin-Jan Draga
490. Per-Kos Tanja
491. Jekovec Irena
492. Fajdiga Marija
493. Jelenc Bernarda
494. Kosec Darinka
495. Rijavec Bojana
496. Žigon Katarina

Tehnična vzgoja-fizika

467. Dulmin Marko
468. Lukan Franc
469. Šket Stanko
470. Benčina Janko
471. Valenčič Milan
472. Žlajpah Miroslav
473. Brežnik Vida
474. Rauter Miha
475. Marin Barbka

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

Matematika — pedagoška smer

292. Petruna Vincenc	Galoisova teorija
293. Škufca Janez	Izoperimetrična lastnost krogle
294. Skrbinšek Primož	Odvojne ploskve
295. Briški Janez	Pouk geometrije po Choquetu
296. Gril Marija	Psevdoprašteviла in njihove lastnosti
297. Bešlagič Majda	Igre med več igralci
298. Rojs Zlatko	Razširitve simetričnih operatorjev

Matematika — tehniška smer

162. Klun Peter	Analiza zaokrožitvenih napak pri osnovnih računskih operacijah
163. Barle Janez	Simetrično normirani ideali v algebri omejenih linearnih operatorjev
165. Prijatelj Andreja	Ortogonalne metode za reševanje sistemov linearnih enačb
164. Razinger Matjaž	Invariantni podprostori
166. Lavrač Nada	Diferencialni račun v Banachovih prostorih
167. Bratoš Špelca	Ocena napak za metodo z izrojenim jedrom in metodo momentov za Fredholmovo integralsko enačbo
168. Komelj Janez	Rothov izrek
169. Tepina Marjeta	Modulska grupa
170. Šušteršič Maja	Fourierove transformacije in osnovne rešitve
171. Tomažič Mitja	Numerično reševanje diferencialnih enačb in variacijske metode
172. Podobnik Darja	Iterativno reševanje nelinearnih enačb
175. Cerar Meta	Zakoni velikih števil
173. Božič Jurij	Verižni ulomki
174. Lorenz Katarina	Kompaktne Banachove algebre
176. Janko Uroš	Neortogonalne metode za reševanje sistemov linearnih enačb
177. Vozlič Andrej	Uporaba zlepkov pri numeričnem reševanju navadnih diferencialnih enačb
178. Stopar Alenka	Kardinalna in ordinalna števila
179. Murn Marko	Eliptične funkcije
180. Jagrič Anton	Sardove kvadraturne formule
181. Lavrič Boris	Zaprte simetrične linearne relacije in posplošene resolvente v Hilbertovih prostorih
182. Rifl Alojz	Teorija matrik in reševanje sistemov linearnih enačb
183. Lenarčič Slavko	Kvalitativna teorija dinamičnih sistemov
184. Koželj Bojan	Ravnovesje tankih toroidnih lupin
185. Zajc Danilo	Enačba za prevajanje toplote
186. Ščavničar Ivo	Stohastično linearno programiranje. Dvostopenjski problemi
187. Petkovšek Marko	NP — polni problemi

Fizika — pedagoška smer

48. Rožmarin Milan 49. Sekolonik Peter 50. Vengust Tadej

Fizika — tehnična smer

282. Šorli Iztok	Lastnosti tankih plasti deponiranega silicijevega dioksida
283. Štrbac Zoran	Študij faznih prehodov v plastnih perovskitnih strukturah z dvojno jedrsko resonanco
284. Valantič Bojan	Kotna porazdelitev kozmičnih žarkov
285. Lakovič Gorazd	Usmeritev nevtronskega polja fisijske celice pri reaktorju TRIGA
286. Merljak Peter	Študij feroelastičnega faznega prehoda v $KH_3(SeO_3)_2$ s pomočjo protonske magnetne resonance
287. Tasevski Milan	Tpliv vodikove vezi na NMR releksacijska časa T_1 in T_2
288. Robnik Marko	Možnost akustičnega merjenja koeficientov izparevanja
289. Lončarič Vojko	Merjenje impendance pri zelo visokih frekvencah
290. Umek Bogdan	Uporaba Fresnelove zonske plošče v nuklearni medicini

Matematika — III. stopnja

9. Cedilnik Anton — Algebre z neizrojeno invariantno bilinearno formo

V delu je obravnavana ne nujno asociativna algebra, nad katero deluje neizrojena bilinearna forma, ki je invariantna v tem smislu: $f(xy, z) = f(x, yz)$. Najprej je algebra obdelana povsem algebrsko, pri čemer so glavno orodje anihilatorji. Ob tem pa omenjena forma vpelje v nosilni prostor dualnost in s tem lokalno konveksne topologije, s katerimi postane algebra topološka. Od tod sledijo nekateri strukturni izreki za polenostavne algebre.

V algebri pa je lahko še neodvisna topologija. Če je to topologija Banachovega ali celo Hilbertovega prostora, nastane struktura, ki je nekakšna neasociativna posplošitev — algeber. Strukturni izreki so v tem primeru precej močni, saj je taka algebra že skoraj polenostavna.

V obeh delih je posebej obdelan asociativni primer. Precej podrobno so obravnavali tudi problem morfizmov, sprememba osnovnega obsega ter adjunkcija enote.

11. Kranjc Marko — Imerzija in vložitve gladkih mnogoterosti

V delu se obravnava teorija imerzij in vložitev ene gladke mnogoterosti v drugo. Najprej je podana klasična teorija imerzij, na koncu pa še moderna. Dokazani so izreki o vložitvah, ki nam dajo s pomočjo teorije PL-vložitev klasifikacijo izotopskih razredov vložitev k-povezane sklenjene m-mnogoterosti v $(2m-k)$-dimenzionalni evklidski prostor.

10. Pisanski Tomaž — Vložitev grafov v sklenjene ploskve

Delo obravnava probleme topološke teorije grafov. Jedro topološke teorije grafov sestavlja proučevanje vložitev grafov v ploskve. V nalogi so prikazane različne metode, ki omogočajo kombinatorični študij teh topoloških problemov. Del naloge sestavlja izgradnja matematičnega orodja. Seznanjamo se z grafi, s kromatično teorijo grafov, s ploskvami in ploskovnimi kompleksi, z grupami grafov in z grafi grup. Osrednjo temo dopolnjujejo nekateri stranski rezultati.

Fizika — III. stopnja — tehnična smer

55. Zupan-Draksler Marija	Difuzija bora v silicij v oksidacijski atmosferi (izvor boron*)
56. Barbič Leon	Zasledovanje hidratacij cementa z NMR
57. Poljšak Matjaž	Struktura jedra ^7Li v modelu gruč

Matematika — doktorska disertacija

19. Kozak Jernej — **Numerične lastnosti bazičnih zlepkov pri interpolaciji funkcij obeh spremenljivk**

V delu je zajet pregled osnovnih pojmov in znanih dosežkov teorije zlepkov, podrobneje pa je obdelana uporaba baze normaliziranih B-zlepkov v interpolacijskih nalogah in izbira dodatnih točk, enakomerna konvergenca interpolacijskih kubičnih zlepkov k zvezni funkciji ter zlepki nad dvodimenzionalnimi območji.

20. Zakrajšek Egon — **O invariantni vložitvi pri reševanju diferenicalnih enačb**

Delo obravnava numerično reševanje linearnih robnih problemov drugega reda, konstrukcijo Greenove funkcije, reševanje linearnih robnih problemov višjega reda in reševanje diskretnih linearnih robnih problemov višjega reda, vse z metodo invariantne vložitve. Pokazano je, kako lahko to metodo uporabimo za reševanje mnogo širšega razreda problemov, kot je bilo znano doslej.

Fizika — doktorske disertacije

62. Jamšek-Vilfan Marija — **Študij jedrske spin-mrežne relaksacije v mezomorfnih fazah**

Avtorica je v delu obravnavala vpliv treh različnih molekulskih gibanj na jedrsko spin-mrežno relaksacijo v nematskih in smektičnih mezomorfnih fazah. Izračunala je prispevek fluktuacij smeri urejenosti k relaksacijski hitrosti, če so elastične konstante tekočega kristala različne. Določila je relaksacijsko hitrost zaradi opletanja dolgih molekulskih osi okrog lokalne smeri urejenosti in sočasne rotacije molekul okrog dolgih osi. Izračunala je, kakšen prispevek k relaksaciji da translacijska difuzija molekul, ki so podolgovate oblike in difundirajo anizotropno. V vseh teh primerih je obravnavala odvisnost relaksacijske hitrosti od Larmorjeve frekvence in od orientacije vzorca v magnetnem polju. S primerjanjem izračunane in izmerjene relaksacijske hitrosti je ugotovila, da relaksirajo protoni v nematskem tekočem kristalu MBBA v območju med 1 in 100 MHz predvsem zaradi translacijske difuzije molekul, pri višjih frekvencah pa zaradi gibanja alkilnih verig. Glavni relaksacijski mehanizem za devterone v isti snovi je rotacija molekul okrog dolgih osi. Ocenila je vrednost korelacijskih časov za ta gibanja. Analizirala je tudi kotno odvisnost relaksacijske hitrosti v nematskem APAPA in mešanci MBBA-EBBA ter določila intermolekularne relaksacijske mehanizme v PAA-d6. S podobno analizo protonske relaksacije v smektičnih fazah tekočih kristalov TBBA in DOBAMBC je pokazala, da so v smektični A fazi teh dveh snovi glavni relaksacijski mehanizem fluktuacije smeri urejenosti. V smektični C fazi se poveča vpliv translacijske difuzije molekul in končno prispevata k relaksaciji v smektični H fazi samo še počasno molekulska difuzija in lokalna rotacija. Ocenila je velikost difuzijske konstante in korelacijskih časov v teh fazah.

63. Burger Iko — **Študij strukture in dinamike liotropnih tekočih kristalov z metodo jedrskih magnetnih resonanc**

Avtor je z NMR metodami raziskoval ureditev in dinamiko molekul in molekulskih skupkov liotropnih tekočih kristalov. Izbral je še malo poznane liotropne mešanice z značilno urejenostjo v močnem magnetnem polju. O ureditvi molekulskih skupkov in o njihovi obliki v magnetnem polju je dobil največ podatkov z meritvami kvadrupolnega razcepa devterija, z ESR meritvami in meritvami dielektrične konstante. Ugotovil je, da so molekulski skupki valjaste oblike in končnih dimenzij, kar se ujema z izsledki raziskovanj s sipanjem X-žarkov in optičnih meritev. Ponovno je potrdil razvrstitev urejenih liotropnih tekočih kristalov v magnetnem polju na dve vrsti: valjasti skupki so v vrsti I nematsko urejeni v smeri magnetnega polja, v vrsti II pa so urejeni v ravnini pravokotno na magnetno polje. Ocenil je velikost skupkov, ki so dolgi nekaj tisoč Å. Poleg anizotropnega gibanja molekul kot celote je raziskoval tudi segmentno gibljivost molekulskih verig z meritvami kemičnih premikov in relaksacijskih časov jeder ^{13}C in devterija. Iz teh

meritev je moč določiti ureditveni parameter oziroma korelacijske čase ionskega dela molekul in segmentov ogljikovodikovih verig. Rezultati meritev termotropnih in liotropnih tekočih kristalov so pokazali veliko podobnost in se ujemajo s teoretskim modelom za segmentno gibljivost ogljikovodikovih verig Marčelje in Pinka. Prikazal je tudi različno urejenost oziroma gibljivost benzenskih obročev v MBBA, HBBA in PAA kot posledico različne konfiguracije in različnih vplivov ogljikovodikovih verig.

64. Kalin Tomaž **Korelacije večkratnega sipanja termičnih nevtronov**

Večkratno sipanje je vedno navzoče pri meritvah dvojno diferencialnih sipalnih presekov za termične nevtrone. Dosedanji postopki za korekcijo večkratnega sipanja so zahtevali predznanje sipalne funkcije preiskovane snovi.

V delu je bila numerično testirana nova metoda za korekcije večkratnega sipanja pri meritvah diferencialnih sipalnih presekov. V nasprotju z dozdaj znanimi metodami ta ne zahteva poprejšnjega poznavanja modela sipalne funkcije.

Numerični eksperimenti so pokazali, da predlagana metoda dobro deluje. V večhitrostnem primeru z izotropnim sipanjem so bili doseženi zadovoljivi rezultati celo ob sipanju na polneskončni plošči. V večhitrostnem primeru s kvadratno anizotropnim sipanjem pa je metoda dobro delovala do debelin, ko nadaljnje debeljenje plošče ni več bistveno prispevalo k povečani gostoti sipanih nevtronov.

SEZNAM NOVIH ČLANOV DMFA SRS V LETU 1977 IN 1978

V tem seznamu objavljamo 152 imen novih članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. V zadnjih dveh letih nam je 104 ljudi poslalo pristopno izjavo. Drugih 48 članov so bivši študentje matematike in fizike, ki so bili na Obzornik za matematiko in fiziko naročeni že med študijem, po odhodu s fakultete pa so avtomatično postali člani društva. Današnje število članov je seveda precej manjše, kot je zadnja zaporedna številka 1202, ker je bilo tudi letos črtanih nekaj članov zaradi odpovedi društvene revije ali pa zaradi nerednega plačevanja naročnine in članarine. Takih primerov je bilo v zadnjih dveh letih kar 282. Danes je v društvu 836 članov in 103 člani-študentje, ki plačujejo polovično naročnino.

Marija Hrovath in Ciril Velkovrh

1051 Arnuš Olga
1052. Bajc Karel
1053. Bevc Dušan
1054. Blaznik Angela
1055. Blejec Andrej
1056. Bon Mirjam
1057. Bratož Špela
1058. Bren Matevž
1059. Briški Janez
1060. Cenčič Boris
1061. Cestnik Igor
1062. Cvikl Bruno
1063. Čepar Drago
1064. Čer Jasna
1065. Črešnar Marija
1066. Dacar Anica
1067. Dečko Edo
1068. Djonović Miloš
1069. Djordjević Srdjan
1070. Djukanović Božo
1071. Dolenc Jasna
1072. Draksler Marinka
1073. Drnovšek Ivan
1074. Fajmut Angela
1075. Ferjančič Andrej
1076. Fric Marjana
1077. Glavič Monika
1078. Golja Janez
1079. Grum Majda
1080. Habe Anica
1081. Hadži Dušan
1082. Henigman Tatjana
1083. Hodošček Milan
1084. Hrastar Andraž
1085. Ivančič Igor
1086. Jagrič Anton
1087. Janežič Dušanka
1088. Jelenc Alojzij
1089. Jeran Matjaž
1090. Kapus Sergej
1091. Kastelič Niko
1092. Kavčič Branka
1093. Kejžer Bogdan
1094. Klein Edita
1095. Klemen Maks
1096. Knez-Vozel Ela
1097. Kobal Barbara
1098. Koderman Ivan
1099. Komar Karel
1100. Komelj Janez
1101. Košuta Mara
1102. Kovač Irena
1103. Kragelj Milica
1104. Kranjc Bojan
1105. Kregar Vlasta
1106. Kristanec Marija
1107. Krušič Bogdan

1108. Kugonič Otmar
1109. Kukman Iztok
1110. Kunaver Alenka
1111. Kunstelj Friderika
1112. Kutnjak Milan
1113. Lautar Franjo
1114. Lazar Ivan
1115. Leskovšek Drago
1116. Lesnika Avguštin
1117. Lešnjak Gorazd
1118. Limoni Vili
1119. Logar Bojan
1120. Lončar Franc
1121. Lorenčič Ivan
1122. Magajna Bojan
1123. Magajna Zlatan
1124. Malnič Aleksander
1125. Manohin Marija
1126. Marčič Nada
1127. Markun Tatjana
1128. Mejak Marija
1129. Merljak Peter
1130. Merše Vida
1131. Meža Erna
1132. Milutinović Uroš
1133. Mitkovič Milan
1134. Mlakar Kristina
1135. Nagode Angela
1136. Namestnik Borut
1137. Nastran Janez
1138. Obrovnik Vitjan
1139. Orel Bojan
1140. Palčič Jana
1141. Percan-Simovič Marija
1142. Petek Branko
1143. Petkovšek Marko
1144. Petrič Ana
1145. Petruna Vincenc
1146. Podgorelec Izidora
1147. Podgornik Rudi
1148. Podreka Edi
1149. Pogačnik Jernej
1150. Polajnar Stanko
1151. Ponikvar Boris
1152. Pristavec Terezija
1153. Prosenc Mirko
1154. Razinger Matjaž
1155. Reisman Dušanka
1156. Repovš Dušan
1157. Robnik Marko
1158. Rojs Zlatko
1159. Rovtar Marija
1160. Rupnik Peter
1161. Savič Ana
1162. Sekolonik Peter
1163. Senegačnik Adela
1164. Sever Franc
1165. Sever Slavko
1166. Slivnik Tomaž
1167. Sojč Mihael
1168. Soklič Jaka
1169. Spetič Florijan
1170. Srebotnjak Egon
1171. Ščavničar Ivo
1172. Ščavničar Stevo
1173. Šega Iva
1174. Škufca Janez
1175. Šmit Žiga
1176. Šorli Iztok
1177. Šoštarič Davor
1178. Špolar Tomaž
1179. Tavzes Nada
1180. Tavzes Radovan
1181. Trenz Marija
1182. Troha Bogdan
1183. Turk Marija
1184. Umek Bogdan
1185. Umek Marija
1186. Urbančič Jelko
1187. Urlep Tomaž
1188. Vengust Tadej
1189. Vogrinc Jože
1190. Volk Boris
1191. Zadnik Lidija
1192. Zakošek Cvetka
1193. Založnik Aleš
1194. Zgonik Marko
1195. Zorec Anton
1196. Zorec Ivo
1197. Zupan Borut
1198. Zupan Matjaž
1199. Zupančič Ivan
1200. Žerjal Aljoša
1201. Žibert Jožica
1202. Žitnik Metka

O PRVIH MATEMATIČNIH OLIMPIADAH SREDNJEŠOLCEV

Obzornik je o olimpiadah veliko poročal [1]—[7]. Pripravil sem kratek pregled prvih 4 olimpiad [8], o katerih naš list še ni pisal, kajti Jugoslavija je sodelovala šele na 5. MMO, leta 1963 v Wrocławu. Iz nalog s teh olimpiad bo lahko bralec tudi sam razvidel, da se je kvaliteta tekmovanja neverjetno dvignila.

I. mednarodna matematična olimpiada

Organizirali so jo Romuni v juliju leta 1959. Udeležilo se je je sedem držav: Bolgarija, Romunija, NDR, ČSSR, SSSR, Madžarska in Poljska. Med posamezniki je zmagal B. Diviš (ČSSR), ekipno pa Romunija. Poglejmo si naloge (točke v oklepajih pomenijo maksimalno število točk):

1. dan: 1. Dokažite, da se ulomek $\frac{21n+4}{14n+3}$ ne da okrajšati za nobeno naravno število n. (5 točk)

2. Za katere realne x veljajo naslednje enačbe, če za korene vzamemo samo pozitivne vrednosti?

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$$
$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2 \qquad \text{(8 točk)}$$

3. Naj bo α kot in naj realna števila a, b, c in $\cos\alpha$ ustrezajo enačbi:

$$a\cos^2\alpha + b\cos\alpha + c = 0.$$

Sestavite kvadratno enačbo za $\cos 2\alpha$, katere koeficienti bodo funkcije a, b in c. Primerjajte dano in vašo enačbo za posebne vrednosti: $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$. (7 točk)

2. dan: 1. Konstruirajte pravokoten trikotnik z dano hipotenuzo, če je težiščnica na hipotenuzo enaka geometrijski sredini katet. (5 točk)

2. V ravnini je podana daljica AB in na njej poljubna točka M. Na istem bregu daljice so nad daljicami AM in MB konstruirani kvadrati $AMCD$ in $BEFM$. Krožnici, ki ju očrtamo tema kvadratoma, se sekata v točkah M in N.

a) Dokažite, da gredo premice AF in BC skozi točko N.

b) Dokažite, da gre premica MN skozi isto točko ravnine, neodvisno od izbire točke M na intervalu AB.

c) Določite geometrijsko mesto razpolovišč daljic R, ki spajajo središči kvadratov. (8 točk)

3. Dani sta ravnini P in Q, ki se sekata v premici p. Na ravnini P je dana točka A in na ravnini Q točka C tako, da niti ena izmed njiju ni na premici p. Konstruirajte enakokraki trapez $ABCD$ z osnovnicama AB in CD, ki mu lahko očrtamo krog. Pri tem mora točka B ležati v ravnini P in točka D v ravnini Q. (7 točk)

II. mednarodna matematična olimpiada

Organizirali so jo spet Romuni in sicer v vasi Sipaja julija 1960. Udeležili so se je srednješolci iz petih držav: Bolgarije, Romunije, NDR, Madžarske in ČSSR. Zmagali so Madžari tako ekipno kot posamično. Poglejmo naloge, ki so jih pisali po 3 in 4 ure:

1. dan: 1. Določite vsa trocifrna števila, ki pri delitvi z 11 dajo kvociente, enake vsoti kvadratov cifer dividenda.

2. Za katere realne x velja neenačba:

$$4x^2/(1 - \sqrt{1 + 2x})^2 < 2x + 9$$

3. V pravokotnem trikotniku ABC je hipotenuza razdeljena na n enakih segmentov, pri čemer je n neparno število. Dolžina hipotenuze je a, višina nanjo pa je h. α je kot, pod katerim se z vrha A vidi tisti segment, ki vsebuje razpolovišče hipotenuze R. Dokažite:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}$$

2. dan: 1. Konstruirajte trikotnik s podatki: v_a, v_b, t_a!

2. Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$. Naj bo X poljubna točka na daljici AC in Y na daljici $B'D'$.

a) Določite geometrijsko mesto razpolovišč daljic XY.

b) Določite geometrijsko mesto točk Z, ki leže na daljici XY in ustrezajo relaciji: $ZY = 2ZX$.

3. Dan je enakokrak trapez z osnovnicama a in b ter višino h.
   a) Na simetrijski osi trapeza določite točko P, s katere se vidita kraka trapeza pod pravim kotom.
   b) Določite izraz za izračun oddaljenosti točke P od kraka trapeza.
   c) Določite pogoje, pod katerimi je mogoče konstruirati točko P. Diskusija!

4. V dani pokončni stožec je včrtana krogla. Tej krogli je očrtan pokončen valj, čigar osnovnica leži v ravnini osnovnice stožca. V_1 je volumen stožca in V_2 volumen valja.
   a) Dokažite, da je enakost $V_1 = V_2$ nemogoča.
   b) Določite najmanjšo vrednost za k, pri kateri velja enakost $V_1 = kV_2$ in za ta primer konstruirajte kot α pri vrhu osnega preseka stožca.

III. mednarodna matematična olimpiada

Pripravili so jo madžarski matematiki v poletju 1961. Udeležili so se je srednješolci iz šestih držav: Bolgarije, Madžarske, NDR, Poljske, Romunije in ČSSR. Zmagali so domačini, ki so bili za 40 točk boljši od Poljakov. Naloge so bile naslednje:

1. dan: 1. Rešite sistem enačb: $x + y + z = a$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

$$xy = z^2$$

kjer so a in b dana števila. Napišite pogoj, ki ga morata izpolnjevati števili a in b, da bodo rešitve x, y in z pozitivna, med seboj različna števila. (6 točk)

2. Če so stranice trikotnika a, b in c in S njegova ploščina, velja neenakost:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

Dokažite! V katerem primeru velja enačaj? (7 točk)

3. Rešite enačbo:

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

kjer je n poljubno naravno število. (7 točk)

2. dan: 1. Dan je trikotnik $P_1P_2P_3$ in v njegovi notranjosti poljubna točka P. Premice P_1P, P_2P in P_3P sekajo nasprotne stranice v točkah Q_1, Q_2 in Q_3. Dokažite, da med razmerji

$$\frac{P_1P}{\overline{PQ_1}}, \quad \frac{P_2P}{\overline{PQ_2}}, \quad \frac{P_3P}{\overline{PQ_3}}$$

obstaja vsaj eno razmerje, ki ni večje od 2, in vsaj eno, ki ni manjše od 2. (6 točk)

2. Konstruirajte trikotnik s podatki: b, c, α, kjer je α kot $\sphericalangle AMB$ in M razpolovišče stranice a. Kot α je manjši od 90°. Dokažite, da je naloga rešljiva samo v primeru, da velja

$$b \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2) \leq c < b.$$

Kdaj nastopi enakost? (7 točk)

3. Dana je ravnina E in tri nekolinearne točke A, B in C na isti strani ravnine, tako da ravnina, ki jo te točke določajo, ni paralelna ravnini E. Na ravnini E izberemo tri poljubne točke A', B' in C'. Razpolovišča daljic AA', BB' in CC' označimo s črkami L, M in N, težišče trikotnika LMN pa s črko G. (Položaji A', B' in C', v katerih točke L, M in N ne tvorijo trikotnika, za nas ne pridejo v poštev.) Določite geometrijsko mesto točk G, če se točke A', B' in C' gibljejo v ravnini E neodvisno druga od druge. (7 točk)

IV. mednarodna matematična olimpiada

Pripravili so jo na Češkoslovaškem poleti 1962. Udeležile so se je iste države kot leto poprej. Med posamezniki je zmagal J. Bernstein iz Sovjetske zveze, ekipno pa mladi matematiki iz Madžarske.

Reševali so naslednje naloge:

1. dan: 1. Poiščite najmanjše naravno število n, ki zadošča naslednjim zahtevam:

a) če ga zapišemo v desetiškem sistemu, se končuje s številko 6,

b) če to šestico prestavimo iz mesta enic pred število, dobimo število, ki je 4-krat večje od prvotnega. (6 točk)

2. Poiščite vsa realna števila x, ki zadoščajo neenačbi

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \tfrac{1}{2} \qquad \text{(6 točk)}$$

3. Dana naj bo kocka $ABCDEFGH$, kjer je $ABCD$ spodnja osnovnica in $EFGH$ zgornja. Točka X naj se enakomerno giblje po stranicah kvadrata $ABCD$ po poti $A—B—C—D—A$, točka Y pa naj se z isto hitrostjo giblje po stranicah kvadrata $FGCB$ po poti $F—G—C—B—F$. Točki X in Y se pričneta gibati ob istem trenutku, prva iz točke A, druga iz F. Poiščite in narišite geometrijsko mesto razpolovišč daljice XY. (8 točk)

2. dan: 1. Rešite enačbo

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 \qquad \text{(5 točk)}$$

2. Na krožnici K naj bodo dane tri različne točke A, B in C. Konstruiraj (s šestilom in ravnilom) na krožnici K četrto točko D tako, da bi lahko v tako dobljeni tetivni četverokotnik včrtali krog. (7 točk)

3. Dan je enakokraki trikotnik ABC, r radij očrtanega kroga in R radij včrtanega kroga. Dokažite, da je razdalja d med središči obeh krogov enaka $\sqrt{r(r-2R)}$. (6 točk)

4. Za tetraeder $SABC$ naj velja naslednja lastnost: obstaja 5 krogel, ki se dotikajo robov SA, SB, SC, AB, BC, CA ali njihovih nosilk zunaj tetraedra. Dokažite, da je $SABC$ pravilni tetraeder in da za vsak pravilni tetraeder obstaja 5 krogel z opisanimi lastnostmi. (8 točk)

Pripomba: S tem prispevkom je poročanje Obzornika o MMO skorajda izpopolnjeno, manjkajo le še naloge s 7., 8. in 11. MMO; objavili jih bomo kdaj kasneje. Bralca, ki ga podrobneje zanimajo olimpijske naloge in razne inačice njihovih rešitev, vabim, da si prebere knjigo [8].

Dušan Repovš

LITERATURA

[1] Petek P., *Matematična olimpiada v Wrocławu*, Obz. mat. fiz. **10** (1963) 134—135. (V. MMO).

[2] Globevnik J., *VI. mednarodna matematična olimpiada v Moskvi*, Obzornik mat. fiz. **11** (1964) 90—91.

[3] Pisanski T., *O IX. mednarodni matematični olimpiadi za srednješolce*, Obzornik mat. fiz. **14** (1967) 164—165.

[4] Legiša P., *Deseta mednarodna matematična olimpiada*, Obzornik mat. fiz. **15** (1968) 172—173.

[5] Ured. — *XII. mednarodna matematična olimpiada*, Obzornik mat. fiz. **18** (1971) 39—40.

[6] Roblek B., *Mednarodna matematična olimpiada*, Obzornik mat. fiz. **19** (1972) 31—33. (XIII. MMO).

[7] Repovš D., *Mednarodne matematične olimpiade srednješolcev*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 176—178 (XIV.—XVI. MMO).

[8] Morozova E. A., Petrakov I. S., *Meždunarodnye matematičeskie olimpiady* (Zadači, rešenija, itogi), *Posobie dlja učaščihsja*, Prosveščenie, Moskva 1976. (I.—XVII. MMO).

VPRAŠANJE

116 — SKRIVNOST MILNEGA MEHURČKA

Dvanajst enako dolgih kosov žice zlotamo v kocko in na eno oglišče prilotamo še ročaj. Kocko pomočimo v detergent in jo previdno vzdignemo ven. Na žicah obvisi čedna geometrijska tvorba z obliko dveh prisekanih piramid (gl. sliko na naslovni strani). Narejena je iz 13 listov milnice, in sicer: 8 trapezov, ki sestavljajo plašča obeh piramid; 4 trikotnih »reber«, ki vežejo piramidi na tiste robove kocke, ki so vzporedni z osjo piramid; končno je na sredi kocke še majhen kvadrat, v katerem se piramidi stikata.

Človeka mika izračunati, kolikšen je kvocient x nazadnje omenjenega kvadrata in kockinega robu. Po vsem, kar slišimo v šoli o površinski napetosti, se naloga ne zdi težavna. Milnica sama od sebe zavzame takšno obliko, da je njena površina minimalna. Z neznanim x izrazimo površino y in zahtevamo, da naj bo $dy/dx = 0$. Dobimo kubno enačbo

$$6x^3 - (12 - 2\sqrt{2})\,x^2 + (11 - 4\sqrt{2})\,x - (6 - 4\sqrt{2}) = 0,$$

katere edini realni koren je

$$x = 0{,}07291.$$

Naloga se je zdela kar pripraven zgled za računanje ekstrema in sem jo zapisal v skripta *Matematične naloge iz fizike*, 1. del. Lepega dne pa se oglasi Alojz Kodre s trditvijo, da se mora dati ravnovesna oblika milnic izračunati tudi bolj preprosto. Kjerkoli se po tri milnične ploskve stikajo, morajo med seboj oklepati enake kote, to je po 120^0; saj drugače sile površinske napetosti ne bi bile med seboj v ravnovesju. Pogoj lahko postavimo za kót med trapezno ploskvijo in kvadratkom ali za kót med sosednjima trapeznima ploskvama. Za čudo dobimo drugačni vrednosti kot prej, namreč

$$x = 1 - 3^{-1/2} = 0{,}42265 \quad \text{in} \quad x = 0.$$

Naj razsodijo bralci, katera vrednost je prava!

Ivan Kuščer

ODGOVORI

Vprašanje 50 (Obzornik mat. fiz. 7 (1960) 188)

Raketa se pospešeno oddaljuje od Zemlje. Zanima nas zveza med časoma trajanja potovanja rakete, ki ju merita opazovalec na Zemlji in opazovalec v raketi.

Vzemimo, da miruje opazovalec na Zemlji v inercialnem opazovalnem sistemu S. Opazovalni sistem S_a, v katerem miruje raketa, pa ni inercialen, saj se raketa giblje pospešeno. Ob izbranem trenutku t', merjeno v lastnem opazovalnem sistemu opazovalca v raketi S_a, naj miruje raketa v izbranem inercialnem opazovalnem sistemu S*. (Inercialni opazovalni sistem S* smo vpeljali ravno z zahtevo, da raketa v njem trenutno miruje.) V tem opazovalnem sistemu se v zelo kratkem časovnem razmiku dt' poveča hitrost rakete od 0 na $a'dt'$. Tu je a' konstantni lastni pospešek in dt' lastni časovni razmik; to sta podatka, ki ju izmeri opazovalec v raketi v svojem opazovalnem sistemu S_a. Ta dva podatka smemo iz neinercialnega opazovalnega sistema S_a prevzeti v inercialni opazovalni sistem S*, saj se v trenutku t' oba sistema skladata. V inercialnem opazovalnem sistemu S, ki je povezan z Zemljo, se poveča hitrost rakete od v na $v + dv$, ko se v inercialnem opazovalnem sistemu S* poveča od 0 na $a'dt'$. Obe hitrosti povežemo z Lorentzovo transformacijo za vzdolžno komponento hitrosti: $u = (u^* + u_0)/(1 + u^*u_0/c^2)$. V njej je u komponenta hitrosti v inercialnem opazovalnem sistemu in u^* ustrezna komponenta hitrosti v drugem inercialnem opazovalnem sistemu, katerega izhodišče se giblje s hitrostjo u_0, merjeno v prvem sistemu, v isti smeri. Za u_0 vstavimo v, za u^* vstavimo $a'dt'$ in dobimo

$$u = v + dv = (v + a'dt')/(1 + va'dt') =$$
$$= (v + a'dt')(1 - va'dt'/c^2) = v + a'dt' - va'dt'/c^2$$

če ne upoštevamo zelo majhnih členov z dt'^2. Preostane zveza

$$a'dt' = dv/(1 - v^2/c^2)$$

iz katere sledi

$$a't' = \int_0^v (1 - v^2/c^2)^{-1}dv = \tfrac{1}{2}c\ln[(c + v)/(c - v)]$$

Hitrost rakete za opazovalca na Zemlji je

$$v = c(e^{a't'/c} - e^{-a't'/c})/(e^{a't'/c} + e^{-a't'/c}) = c\,\mathrm{th}(a't'/c)$$

Zvezo med lastnim časom t', ki ga izmeri opazovalec v raketi, in časom t, ki ga izmeri opazovalec na Zemlji, dobimo takole:

$$dt = dt'/[1 - v^2(t')/c^2]^{1/2}$$

V zelo kratkem časovnem razmiku dt' okoli trenutka t' smemo namreč vzeti, da se raketa giblje v opazovalnem sistemu S s konstantno hitrostjo $v(t')$ in uporabiti enačbo, ki povezuje inercialna opazovalna sistema. Z enačbo

$$(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = [1 - \mathrm{th}^2(a't'/c)]^{-1/2} = \mathrm{ch}(a't'/c)$$

imamo naposled

$$t = \int_0^t (1 - v^2/c^2)^{-1/2} dt' = \int_0^t \mathrm{ch}(a't'/c)dt' = (c/a')\mathrm{sh}(a't'/c)$$

Zadnja enačba daje odgovor, ki ga terja vprašanje. Ko preteče na primer za opazovalca na raketi med pospešenim potovanjem 10 let, poteče za opazovalca na Zemlji kar okoli 8740 let.

Janez Žitnik

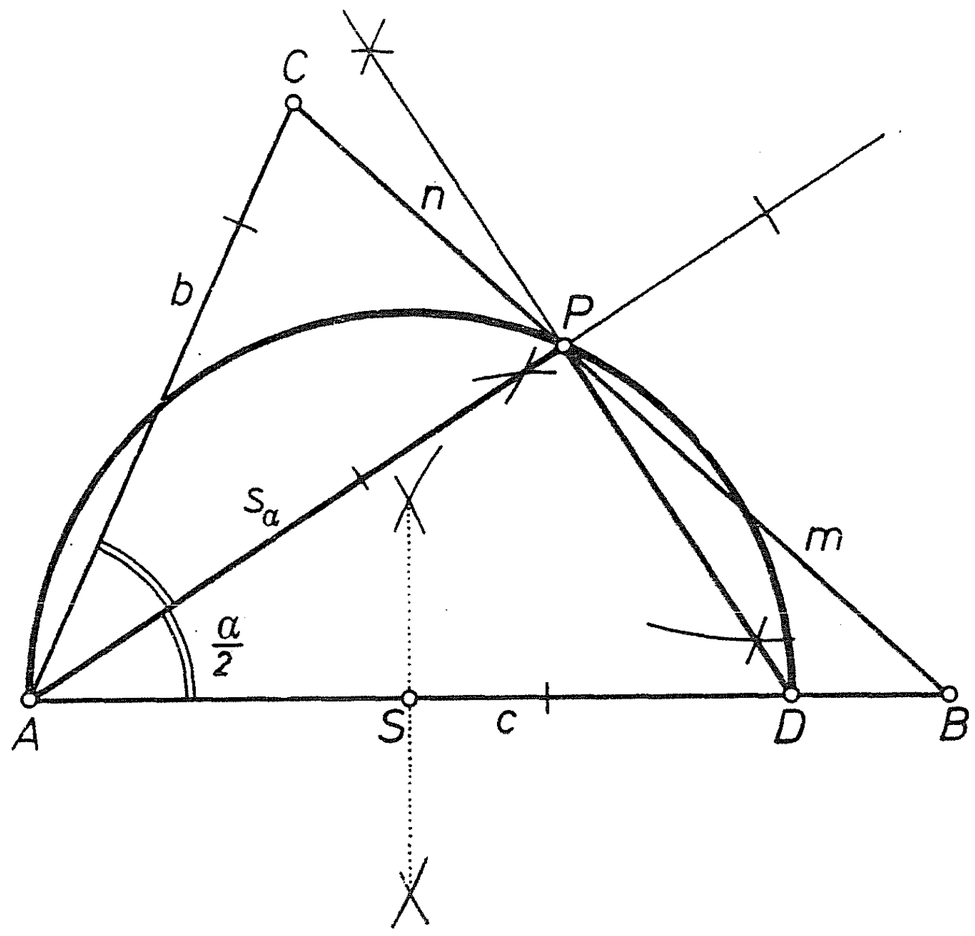
Vprašanje 111 (Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 96)

S Stewartovo formulo $mb^2 + nc^2 = c_a{}^2 a + mna$ in zvez $m + n = a$, $m : n = c : b$, $c_a = s_a$ dobimo najprej $m = \dfrac{ca}{b+c}$ in $n = \dfrac{ba}{b+c}$ in končno $s_a = \dfrac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)\,(-a+b+c)}$, ki predstavlja dolžino na simetrali kota $\sphericalangle CAB$ od oglišča A do presečišča s stranico BC. Iz zvez $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ in $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$ lahko izračunamo $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(-a+b+c)}{bc}}$$

Če sedaj delimo s_a s $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, dobimo $\dfrac{s_a}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2bc}{b+c}$, kjer sta b in c dolžini danih stranic AC in AB. Istočasno uganemo tudi geometrijski pomen kvocienta $\dfrac{s_a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, ki predstavlja projekcijo s_a na stranico AB v pravokotni smeri na s^a in je neodvisen od kota α.

Geometrijsko mesto iskanih presečišč P je torej Talesov polkrog s polmerom r in z mejnima točkama v oglišču A in v točki D na stranici AB, kjer velja $\overline{AD} = 2r = \dfrac{2bc}{b+c}$.



Boštjan Hostnik

PREJELI SMO V OCENO

Solitons and Condensed Matter Physics, Editors: A. R. Bishop and T. Schneider, Solid-State Sciences 8, Springer-Verlag, Berlin 1978.

V minulem desetletju se je pokazalo, da bo treba miselni način fizika pri opisu in razlagi pojavov v naravi bistveno dopolniti. Teorijske metode moderne fizike slonijo večinoma na ideji linearnosti in na principu superpozicije, ki je s tem zvezan. Raziskave nelinearnih pojavov v plazmi, optiki, hidrodinamiki in še posebej v trdni snovi so vodile do odkritja zelo stabilnih nelinearnih ekscitacij. Pravimo jim solitoni. Veliko pojavov v naravi lahko razložimo le z idejo o solitonih. Junija 1978 je bil v Oxfordu simpozij o nelinearni strukturi in dinamiki kondenzirane materije. Predavanja na tej konferenci so zbrana v pričujoči knjigi. Razdeljena so na dve skupini. Prva, manj obširna skupina obravnava matematične aspekte teorije solitonov. Drugi, zelo obširni del knjige pa je posvečen uporabi ideje solitonov v statistični mehaniki in fiziki trdne snovi. Knjiga prinaša bogastvo novih spoznanj in bo dobrodošla vsem, ki jih zanima zelo buren razvoj tega novega področja fizike in tudi novega načina mišljenja v fiziki.

Peter Gosar

Franco Spisani, Implicazione, endometria, universo del discorso, Bologna, International Logic Review, 1977, 174 str.

Malce nenavadna dvojezična knjiga — tekst je napisan hkrati v italijanščini in angleščini — ki ima tri poglavja: *Od silogizma do logične implikacije, Svet pogovora in račun s spremenljivkami, Endometrične strukture; »geometrija« točke-figure.* V teh poglavjih so podani dialektični dvogovori umišljenih razpravljavcev Complexusa in Simplexa. Smisel njunih logično-filozofsko-geometrično-historičnih disputacij je ostal podpisanemu žal prikrit.

Niko Prijatelj

Jean-Louis Krivine, Aksiomatička teorija skupova, S francuskog preveo Vladimir Devidé, školska knjiga, Zagreb 1978, broš., 120 str.

Drobna knjižica, pa jo je treba tudi »nadrobno« brati. Zelo primerna za tiste, ki jih zanimajo aktualni problemi v teoriji množic in dobro poznajo tako imenovano »naivno« teorijo množic, pa tudi s simboliko matematične logike si ne smejo biti preveč vsaksebi. Po Uvodu se zvrstijo tale poglavja: Aksiomi teorije množic (Zermelo-Fraenkel) — Ordinalna in kardinalna števila — Aksiom fundacije (pri nas rečemo Aksiom regularnosti) — Shema refleksije — Množica formul — Množice, opredeljive z ordinalnimi števili. Relativna neprotisovnost aksioma izbire — Fraenkel-Mostowskijevi modeli. Relativna neprotislovnost negacije aksioma izbire (brez aksioma fundacije) — Konstruktibilne množice. Relativna neprotislovnost splošne hipoteze kontinuuma — Dodatek: Drugi Gödelov izrek o nepopolnosti v teoriji množic. Knjižica je sklenjena z Nalogami in Bibliografijo.

Niko Prijatelj

Gerald B. Folland: Introduction to partial differential equations. Preliminary informal notes of university Courses and seminars in mathematics. (Mathematica notes; 17) Princeton university Press, Princeton, New Yersey, 1976, 352 str.

Knjiga predstavlja lep in dostopen uvod v sodobno teorijo parcialnih diferencialnih enačb. Vsebino dovolj dobro predoča kazalo: Pripomočki. Lokalne eksistenčne teorije. Laplaceov operator. Dirichletova in Neumannova naloga čez integralske enačbe. Operator toplotnega prevajanja. Valovni operator. Teorija odvodov v L^2. Eliptične robne naloge, metode L^2.

France Križanič

Árpád Szabó, The Beginnings of Greek Mathematics, Akadémiai Kiadó, Budapest 1978, 358 str.

Knjiga obsega tri dele: zgodnjo zgodovino teorije iracionalnosti, teorijo razmerij pred Evklidom in zgradbo matematike v deduktivnem okviru.

Delo odpira nove poglede na nastanek in razvoj grške matematike. Natančna filološka analiza virov v izvirniku podpira domnevo, da so korenine grške aritmetike in algebre prej v denarništvu in glasbi kakor v geometriji, da je bila grška algebrska misel manj vezana na geometrijo, kot smo mislili doslej.

France Križanič

H. Meschkowski, Temelji euklidske geometrije. Iz nemščine prevedel D. Palman. Moderna matematika, Školska knjiga, Zagreb 1978, 242 str., 20 cm.

Knjiga obravnava evklidsko geometrijo na podlagi Hilbertovega sistema aksiomov, a v posodobljeni obliki. Avtor pokaže, kako je takšna pot v geometrijo v marsičem enostavnejša od povsem algebraične obravnave; po Hilbertu lahko izpeljemo precejšen del geometrije še pred vpeljavo Dedekindovega aksioma oziroma realnih števil.

V uvodu spoznamo razvoj geometrijske aksiomatike, v naslednjih poglavjih pa postopoma predelamo vseh pet skupin Hilbertovih aksiomov; vsaki skupini sledi izpeljava ustreznih izrekov. Nadalje avtor posebej obravnava mnogokotnike in poliedre, modele geometrij, gibanja, podobnost, ploščino in prostornino ter osnove projektivne geometrije.

Delo odlikujeta hkrati velika razumljivost in znanstvena višina. Značilna je tudi obdelava nekaterih, drugod manj navzočih tem kakor npr. Dehnovega izreka o poliedrih, ki so enaki po razdelitvi. Po drugi strani pa je zaradi osredotočenja na osnove geometrije tudi kaj izpuščeno, npr. konstrukcijske naloge. Tako se knjiga v marsičem dopolnjuje z drugimi geometrijskimi učbeniki.

Knjigo priporočajo poleg drugega pregleden razpored snovi, veliko število slik, poučne dokazovalne naloge in izčrpen seznam literature. Z zanimanjem jo bodo vzeli v roke vsi, ki jih privlači geometrija oziroma so se že srečali z njeno aksiomatično zgradbo. To delo je tudi lepa dopolnitev k srednješolskemu pouku geometrije.

Janez Rakovec

John Wermer, Banach Algebras and Several Complex Variables, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 35, Springer Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1976, 160 str.

Knjiga se ukvarja z zvezo med analitičnimi funkcijami več kompleksnih spremenljivk in komutativnimi Banachovimi algebrami. V začetku so rezultati funkcijske teorije uporabljeni pri študiju lastnosti komutativnih Banachovih algeber (robu Šilova in podobnem). Večji del knjige pa je posvečen problemu enakomerne aproksimacije analitičnih funkcij več kompleksnih spremenljivk s polinomi in sorodnim vprašanjem. Pri tem je med drugim uporabljena Čechova kohomologija prostora maksimalnih idealov komutativne Banachove algebre pa tudi distribucije.

Osnove teorije analitičnih funkcij več kompleksnih spremenljivk so razvite sproti. Drugi pomožni rezultati so vsaj navedeni, če že ne dokazani. Avtor se sicer ne izgublja v širino, ampak hiti dokazovati zastavljene cilje. Knjiga bo zanimiva za tiste naše matematike, ki pri delu v funkcionalni analizi zadenejo na (nelahko) področje analitičnih funkcij več spremenljivk.

Peter Legiša

Ivan Vidav, Uvod v teorijo C*-algeber. (Po predavanjih zapisala Milan Hladnik in Matjaž Omladič.) Ljubljana 1979, 80 str. (Postdiplomski seminar iz matematike; 12.) Cena 75.— din (60.— din).

Dvanajsti zvezek Postdiplomskega seminarja prinaša zgoščen prikaz osnovnih pojmov in delovnih metod — pravzaprav le enega dela — obsežne teorije C*-algeber, ki so poseben primer Banachovih algeber z involucijo.

O splošnih Banachovih algebrah in algebrah z involucijo govori prvo poglavje, ki navaja nekaj dejstev, potrebnih pri nadaljnji obravnavi (neprimerno popolnejšo informacijo o njih najde slovenski bralec v delu prof. Vidava: Banachove algebre, Postdiplomski seminar iz matematike, št. 11). Drugo poglavje je posvečeno t. i. abstraktnim C*-algebram, njihovim algebraičnim in topološkim lastnostim. V njem so zbrani klasični rezultati v zvezi z Gelfandovo upodobitvijo komutativnih C*-algeber, pozitivnimi elementi in pozitivnimi funkcionali, ideali in podalgebrami, ekstremnimi točkami, izometrijami in jordanskimi homomorfizmi ter odvajanji in avtomorfizmi C*-algeber. Tretje in zadnje poglavje pa se loteva obravnave različnih vrst operatorjev nad Hilbertovim prostorom (kompaktnih, Hilbert-Schmidtovih in operatorjev s sledjo) ter algeber omejenih linearnih operatorjev, brez dvoma najpomembnejših primerov nekomutativnih C*-algeber. Z njimi so abstraktne C*-algebre lepo povezane po teoriji upodobitev, ta pa v pričujočem prikazu ni zajeta.

Kot vsi drugi zvezki Postdiplomskega seminarja je tudi to delo v prvi vrsti namenjeno študentom tretje stopnje matematike, predvsem tistim, ki so usmerjeni v funkcionalno analizo.

Milan Hladnik

Janez Strnad, Posebna teorija relativnosti, DZS 1979, 212 str. (Knjižnica Sigma; 28). Cena 180 (144) din.

V knjigi *Posebna teorija relativnosti* avtor pregledno predstavi zgradbo teorije, posledice simetrijskih načel, kot so homogenost prostora in časa, izotropnost prostora in zlasti načelo relativnosti, po katerem so vsi inercialni sistemi enakovredni. Najprej pokaže, kako vplivajo simetrijska načela na obliko zakonov mehanike in elektromagnetizma, nato prikaže pojave, ki iz tega sledijo. Avtor zelo poudarja povezanost Einsteinove teorije relativnosti s prejšnjimi idejami, zato v prvem delu govori o Galilejevi relativnosti, ki prežema Newtonovo mehaniko, vendar privede do nesoglasij pri nekaterih poskusih (avtor opiše zlasti Michelsonov poskus). Sledi, kot izhod iz zagate kako je Einstein rabil revolucionarne ideje, da je opustil stare predstave o prostoru in času. Avtor najprej prikaže nekaj značilnosti novega prostora-časa, kot so problem sinhronizacije ur, podaljšanje časa in skrčenje dolžin, potem šele vpelje Lorentzove transformacije. Kot posledico Einsteinovega načela relativnost privede do Einsteinove mehanike in opiše mnogo poizkusov in pojavov v jedrski fiziki in fiziki osnovnih delcev, ki najprepričljiveje dokazujejo Einsteinovo teorijo relativnosti in pokažejo njeno veliko uporabnost. Na kratko opiše tudi transformacije elektromagnetnega polja. Na koncu se dotakne tudi nekaj odprtih in mikavnih problemov posebne teorije relativnosti (npr. tahionov). Omenja še problem pouka teorije relativnosti v srednji šoli.

Knjiga je namenjena vsem, ki se zanimajo za ideje in posledice teorije relativnosti, znajo osnove srednješolske fizike in imajo nekaj izobrazbe iz matmatike (osnove vektorskega in diferencialnega računa). Knjiga bo pritegnila študente fizike, še preden pridejo v rednem programu do teorije relativnosti, pa tudi tedaj bo koristno dopolnilo (sistematski pregled poskusov). Po njej bodo radi segli zainteresirani študenti drugih strok, srednješolski in predmetni učitelji fizike in matematike in nadarjeni srednješolci. Knjiga ni poljuden prikaz teorije relativnosti za širši krog intelektualcev, za to so na voljo že druge publikacije.

Knjiga *Posebna teorija relativnosti* predstavlja korak naprej glede na svojo predhodnico *Relativnost* istega avtorja, ki je bila prenatrpana z repetitorijem mehanike in elektromagnetizma, opisi eksperimentov in dolgoveznimi izpeljavami. Nova knjiga pregledno podaja bistvene ideje teorije relativnosti, njene eksperimentalne posledice in izbor pomembnih poizkusov.

Mitja Rosina

ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ FIZIKE

Komisija za tisk DMFA SRS
61001 Ljubljana, pp 277

3

M. Rosina

JEDRSKA FIZIKA

140.— din (112.— din)

6

I. Kuščer

MATEMATIČNE NALOGE IZ FIZIKE, 2. del

21.— din (17.— din)

9

M. Gross in dr.

NALOGE IZ FIZIKE

100.— din (80.— din)

10

I. Kuščer

TERMO-DINAMIKA

25.— din (20.— din)

11

I. Kuščer

STATISTIČNA MEHANIKA

50.— din (40.— din)

12

F. Ahlin in dr.

IZPITNA VPRAŠANJA IZ FIZIKE

25.— din (20.— din)

13

P. Prelovšek
I. Kuščer

ZBIRKA FORMUL ZA VEKTORJE IN TENZORJE

15.— din (12.— din)

14

M. Rosina

OSNOVNI DELCI — Zbirka tabel in nalog

25.— din (20.— din)

IZDAJA ODDELEK ZA FIZIKO FNT

ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ MATEMATIKE

Komisija za tisk DMFA SRS
61001 Ljubljana, pp 227

3

E. Zakrajšek

FORTRAN

60.— din (48.— din)

4

E. Zakrajšek

PROGRAMSKI JEZIK PASCAL

70.— din (56.— din)

5

R. Jamnik

UVOD V MATEMATIČNO STATISTIKO

70.— din (56.— din)

6

M. Dobovišek in dr.

REŠENE NALOGE IZ ANALIZE, 1. del

80.— din (64.— din)

7

F. Križanič

LINEARNA ALGEBRA

50.— din (40.— din)

8

E. Zakrajšek

UPDATE

50.— din (40.— din)

10

A. Suhadolc

SEBI ADJONGIRANI OPERATORJI V HILBERTOVEM PROSTORU

12,50 din (10.— din)

150.— din (120.— din)

11

A. Suhadolc

LINEARNI TOPOLOŠKI PROSTORI

IZDAJA ODSEK ZA MATEMATIKO FNT