IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

ODPIS

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1978

Letnik 25

5

LETNIK 25. — ŠTEVILKA 5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1978

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Marjan Turk.

Naročnina: za posameznike 170.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 80.— din, za ustanove in podjetja 215.— din, za tujino 15 $ = 270.— din, posamezna številka 30.— din, dvojna številka 60.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

Članki

O širjenju epidemij (Jože Andrej Čibej) 161

Sociologija, psihologija in poučevanje matematike (Lars Gårding, prev. Tamara Bohte) 170

Vprašanja (113, 114 — Tomo Pisanski, 115 — Dušan Repovš) 169, 176

Domače vesti

Finančno poročilo komisije za tisk DMFA SRS od 1. 9. do 31. 12. 1977 (Janez Markelj) 177

Ples matematikov, fizikov in astronomov (Katarina Košmelj in Rajko Sabo) . . 179

Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter resumeji doktorskih disertacij v letu 1977 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 180

Nagrajenci Sklada Borica Kidriča v letu 1978 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 186

Odgovori (46 — Dušan Repovš) 188

Prejeli smo v oceno (Tomaž Pisanski, France Križanič) 189

Nove knjige (Stanislav Zorko) 191

Utrinek — Zgodba o rdeči kapici 185

CONTENTS

Articles

On spreading of epidemics (Jože Andrej Čibej) 161

The sociology, psychology, and teaching of mathematics (Lars Gårding) . . . 170

Questions 169, 176

Home news 177

Answers 188

Reviews 189

New books 191

Na ovitku: Epidemija kuge (bakrorez iz 18. stoletja)

Obzornik mat. fiz. 25 (1978) 5

O ŠIRJENJU EPIDEMIJ

Jože Andrej ČIBEJ

AMS Subj. Class. 92 A 15

V članku obravnavamo dva preprosta matematična modela, ki opisujeta širjenje epidemij.

ON SPREADING OF EPIDEMICS

In the article two simple mathematical models are considered which describe spreading of epidemics.

I. Osnovni pojmi

Začetki proučevanja epidemij spadajo sicer že v Hipokratove čase (459—377 pred n. š.), vendar je šlo do konca 19. stoletja — vsaj z matematičnega stališča — izključno za statistično spremljanje podatkov o številu obolelih za posamezno boleznijo. Šele Pasteurjeva in Kochova odkritja so postavila temelje za pravilno razumevanje procesa okužbe in imunizacije, s tem pa so bile dane tudi osnovne možnosti za prehod od statistične obdelave minulih epidemij k modeliranju in napovedovanju njihovega razširjanja v dani populaciji. Tako lahko rečemo, da je matematična epidemiologija (v današnjem pomenu besede) stara kakšnih osemdeset let. Naš članek ni prikaz dosežkov te vede, ampak želimo z njim dati bralcu osnovno informacijo o njenih prijemih in relativni kompleksnosti matematičnega instrumentarija, ki ga uporablja.

Preden se lotimo modelov, moramo pojasniti nekaj stvari v zvezi z razdelitvijo populacije glede na njene epidemiološke značilnosti. Prav grobo razdelimo populacijo takole:

— osebki, ki so v danem trenutku že okuženi z bolezenskimi klicami (*okuženi osebki*);

— osebki, ki so v danem trenutku sicer zdravi, vendar so dovzetni za okužbo (*dovzetni osebki*);

— osebki, ki se ne morejo (več) okužiti (*varni osebki*).

Glede na vrsto modela uporabljamo natančnejše razčlenitve posameznih skupin; pri prvi npr. na

— osebke, ki so že kužni za okolico;

— osebke, pri katerih je bolezen v t. i. latentnem stanju in emisije bolezenskih klic še ni;

pri drugi skupini lahko od osebkov ločimo tiste, ki so neposredno izpostavljeni okužbi; končno lahko osebke, ki so v razredu varnih, razdelimo na imune, mrtve in tiste, ki so v zanesljivi karanteni, izolirani od prenašalcev bolezni. Naj toliko zadošča za uvod.

II. Epidemija brez varnih osebkov

Začeli bomo z najpreprostejšim modelom, ki opisuje takšno širjenje epidemije, da ni noben osebek varen po gornji definiciji, kar pomeni, da je v končni fazi praktično cela populacija okužena. Za konkretno uporabo je ta model nekoliko preveč poenostavljen, pomeni pa relativno dober globalni opis razvoja bolezni v posebnem primeru, ko je:

— bolezen močno nalezljiva, pa ne tako resna, da bi bila potrebna izolacija ali pa bi osebki zaradi bolezni umirali;

— bolezen pa je dovolj dolgotrajna, da okuženi osebki ne ozdravijo (in postanejo imuni) v obdobju njenega intenzivnega širjenja.

Naj bo torej dana homogena populacija, v kateri obstaja tak proces mešanja, ki zagotavlja kontakte med zdravimi in okuženimi osebki (to je ena od omejitvenih predpostavk za veljavnost modela!); v začetku proučevanja ($t = 0$) naj bo sestavljena iz N dovzetnih in enega okuženega osebka (omejitev na eno okuženo osebo pa ni bistvena, kot bomo videli iz poteka računov). Poskušajmo ugotoviti, kako se s časom spreminja število še neokuženih osebkov!

Ker je tretji razred (»varni«) prazen, mora za vsak trenutek t veljati enačba

$$S(t) + I(t) = N + 1 \tag{1}$$

če z $S(t)$ označujemo število zdravih, z $I(t)$ pa število okuženih osebkov. Privzetek o »kvalitetnem mešanju« populacije oblikujemo takole: število novih primerov bolezni v dovolj kratkem časovnem intervalu ΔS je premo sorazmerno produktu števil $S(t)$ *in* $I(t)$ ter dolžine intervala

$$\Delta S = -bS(t)\, I\,(t)\, \Delta t$$

Konstanta b pomeni delež »uspešnih« kontaktov med osebki iz različnih razredov. V limiti ($\Delta t \to 0$) dobimo ob upoštevanju (1) enačbo

$$S'(t) = -b\, S(t)\, I(t) = -b\, S(t)\, (N - S(t) + 1) \tag{2}$$

Spremenljivki sta ločljivi, zato integracija in začetni pogoj $S(0) = N$ takoj izdasta rešitev

$$S(t) = N\,(N + 1)\,/\,(N + \exp\,(b(N + 1)t) \tag{3}$$

Število zdravih torej eksponentno pada s časom, tem hitreje, čim uspešnejši so kontakti med zdravimi in bolnimi. Uporabna izpeljanka iz rezultata (3) je t. i. *epidemijska krivulja,* ki meri hitrost oziroma intenzivnost pojavljanja novih primerov bolezni:

$$\varphi(t) = I'\,(t) = d(N + 1 - S(t))/dt = -S'(t) =$$
$$= N\,(N + 1)^2\, b \exp\,(b(N + 1)t)\,/\,(N + \exp\,(b(N + 1)t))^2$$

Graf funkcije $\varphi\,(t)$ je unimodalna krivulja z maksimumom v točki $t^* = \log\, N\,/\,(b(N + 1)\,)$. V tem pogledu obravnavani model kar dobro opisuje dejansko stanje; začetna okužba se vedno hitreje širi, največ novih primerov na časovno enoto je v točki t^*; to je tudi razumljivo, saj je v tem trenutku populacija razdeljena na dva enako velika razreda,

$$S(t^*) = I(t^*) = (N + 1)\,/\,2 \tag{4}$$

zato je takrat največ kontaktov med bolnimi in zdravimi. (Da to drži, lahko preverimo tudi posredno; ker je po (2) funkcija $\varphi(t)$ enaka produktu $S(t)I(t)$, hkrati pa velja (1), nam mora maksimum te funkcije istočasno posredovati rešitev znane naloge, kako razdeliti število (npr. $N+1$) na dva sumanda tako, da bo njun produkt maksimalen. Ugotovitev (4) s tega stališča prav dobro poznamo.) Od časa $t = t^*$ dalje pa širjenje epidemije upada, ker pač zmanjkuje dovzetnih (»zdravih«) osebkov.

III. Splošnejši primer

Ena od najbolj kritičnih predpostavk prejšnjega modela je idealizacija procesa mešanja, v katerem naj bi prišli vsi osebki v stik z okužbo. Zato med dovzetnimi posebej odlikujmo tiste, ki so že izpostavljeni okužbi, poleg tega pa uvedimo razred varnih osebkov. Tako populacija razpade na štiri razrede:

$\mathcal{I}$ — okuženi osebki (»bolni«),
$\mathcal{E}$ — dovzetni osebki, izpostavljeni okužbi,
$\mathcal{S}$ — drugi dovzetni osebki,
$\mathcal{V}$ — varni (od teh so posebej pomembni tisti, ki postanejo imuni v času epidemije).

Namesto z absolutnimi podatki o številu osebkov posameznega tipa delajmo raje z deležem posameznega razreda v celotni populaciji. Če te deleže po vrsti označimo z $I(t)$, $E(t)$, $S(t)$ in $V(t)$, velja ob vsakem času enačba

$$I(t) + E(t) + S(t) + V(t) = 1 \tag{5}$$

Ker epidemije ponavadi ne trajajo več kot nekaj tednov, ne bo prehud greh, če privzamemo dvoje; da gre za populacijo stalne velikosti in da so rojstva v ravnovesju z umrljivostjo. (Tu mislimo seveda na umiranje, ki ni v zvezi z našo epidemijo; smrt zaradi proučevane bolezni pomeni samo povečanje moči razreda $\mathcal{V}$ za eno enoto, temu ustrezno zmanjšanje razreda $\mathcal{I}$ pa poskrbi, da ostane enačba (5) v veljavi.) Hujši očitek zaradi statičnosti modela si bomo prislužili zato, ker ne upoštevamo migracijskih gibanj, vendar je to že druga zgodba ...

Privzemimo, da je
$$E(0) = 0 \tag{6}$$
$$V(0) = 0 \tag{7}$$

Prvi pogoj velja vsaj po levi limiti, drugega lahko razumemo tudi tako, da vse osebke, ki so bili imuni pred začetkom opazovane epidemije, izključimo iz proučevane populacije. Postavimo še nekaj »pravil igre«:

— Osebek, ki se okuži v trenutku t, naj v trenutku $t + w$ $(w > 0)$ preide med varne. Konstanta w očitno predstavlja normalno trajanje bolezni, po preteku w časovnih enot torej okuženi osebek ozdravi in postane enkrat za vselej imun (ali pa umre, kar mu tudi zagotavlja »varnost« pred okužbo).

— Da se osebek iz razreda $\mathcal{E}$, izpostavljen okužbi, dejansko okuži, mora sprejeti določeno infekcijsko dozo $D > 0$ bolezenskih klic. Smiselno je privzeti, da je intenzivnost tega procesa sorazmerna gostoti okuženih $I(t)$, zato osebek, ki je v času t_1 prvič izpostavljen okužbi, dejansko zboli v času t_2, ki ustreza pogoju

$$r \int_{t_1}^{t_2} I(t)\, dt = D \qquad (r > 0) \tag{8}$$

— Delež osebkov, ki so v intervalu dolžine Δt prvič izpostavljeni okužbi, naj bo — na osnovi premisleka pri prejšnjem modelu — enak $bI(t)S(t)\,\Delta t$, tako da velja za moč razreda $\mathcal{S}$ diferencialna enačba

$$S'(t) = -b\,I(t)\,S(t) \tag{9}$$

Od štirih funkcij, ki nastopajo v enačbi (5), nas bosta posebej zanimali $I(t)$ in $S(t)$; prva je gotovo najpomembnejša za prakso, saj opisuje delež obolelih v celotni populaciji, druga je prav zabavna z matematičnega stališča. Preden spustimo čas z verige, moramo pogledati v zgodovino bolezni: če naj sploh pride do epidemije, mora na začetku štetja ($t = 0$) obstajati določen delež $I(0)$ okuženih osebkov; ustrezni razred bomo označevali kar z $\mathcal{I}_0$. Omislimo si za $t \in [-w, 0]$ funkcijo $Z(t)$, ki naj določa delež osebkov, ki so bili okuženi že v času $t \leq 0$. Brez skrbi privzamemo, da je $Z(t)$ na omenjenem zaprtem intervalu zvezna, nepadajoča funkcija, ki ustreza pogojema

$$Z(-w) = 0 \qquad Z(0) = I(0) \tag{10}$$

Za pozitivne vrednosti t pa funkcijo zvezno nadaljujmo

$$Z(t) = \begin{cases} Z(0) - Z(t-w) & 0 \leq t \leq w \\ 0 & w \leq t \leq \infty \end{cases} \tag{11}$$

Pri $t > 0$ ima $Z(t)$ še vedno nazoren pomen, ker predstavlja delež osebkov iz izhodiščnega razreda $\mathcal{I}_0$, ki so v trenutku t še vedno bolni.

V nadaljnjem naj bo t_0 minimum tistih t, za katere je

$$r \int_0^t Z(t)\,dt \geq D \tag{12}$$

Integrand je po (11) — različen od 0 samo na intervalu $[0, w]$. Če ni nobenega t s to lastnostjo, smo že opravili: po premisleku k enačbi (8) je moč razreda $\mathcal{I}_0$ premajhna, da bi se epidemija razširila, zato bomo privzeli, da tak $t_0 \leq w$ obstaja; obravnavo pa bomo razdelili na tri intervale.

i) Opazujmo najprej interval $[0, t_0]$. Trenutek t_0 je po definiciji tak, da se pred njim ni mogel okužiti noben osebek iz razreda $\mathcal{E}$, zato še toliko manj iz razreda $\mathcal{S}$, pač pa lahko začne naraščati moč razreda $\mathcal{V}$ na račun tistih rekonvalescentov iz $\mathcal{I}_0$, ki so se bili dovolj zgodaj okužili. Zapišimo to eksplicitno:

$$I(t) = Z(t) \qquad 0 \leq t \leq t_0 \tag{13}$$

$$V(t) = Z(t-w) \qquad 0 \leq t \leq t_0 \tag{14}$$

Pri dani funkciji $Z(t)$ lahko enačbo (13) uporabimo v (9),

$$S'(t) = -b\,Z(t)\,S(t) \tag{15}$$

dobljeno enačbo pa eksplicitno rešimo

$$S(t) = S(0) \exp\left(-b \int_0^t Z(s)\,ds\right);\ 0 \leq t \leq t_0 \tag{16}$$

Odtod tudi

$$E(t) = S(0) - S(t) \tag{17}$$

Če poznamo predzgodovino bolezni, z enačbami (13), (14), (16) in (17) brez težav eksplicitno določimo deleže posameznih razredov v celotni populaciji za vsak trenutek s proučevanjem intervala $[0, t_0]$.

ii) Naj bo zdaj $t \geqq t_0$. Definirajmo novo konstanto

$$K = \exp(D\,b\,/\,r) \tag{18}$$

pa lahko zapišemo, da je

$$S(t_0) = S(0)\,/\,K \tag{19}$$

Ker je funkcija $S(t)$ monotono padajoča, lahko za vsak $t \geqq t_0$ najdemo najmanjšo $\sigma = \sigma(t)$, da se pri množenju s konstanto K (ki je značilna za dano populacijo in dano bolezen) vrnemo iz točke t v točko σ

$$S(\sigma) = K\,S(t) \tag{20}$$

Tako določeni σ ima zanimivo lastnost, ki jo preberemo iz naslednje vrste enačb

$$\begin{aligned} r \int_{\sigma}^{t} I(\tau)\,d\tau &= -(r/b) \int_{\sigma}^{t} (S'(\tau)/S(\tau))\,d\tau = \\ &= (r/b)\,(\log S(t) - \log S(\sigma)) = (r/b) \log (S(\sigma)/S(t)) = \\ &= (r/b) \log K = (r/b)\,(Db/r) = D \end{aligned} \tag{21}$$

Od $\sigma(t)$ do t mine torej ravno pravšen čas za okužbo (glej (8)!). Naj za zdaj t leži na intervalu $[t_0, t_0 + w]$. Do $t_0 + w$ so lahko postali imuni samo osebki iz izhodiščnega razreda $\mathcal{I}_0$, še neozdravljenim »okužencem« pa so se pridružiti tisti, ki so v času od 0 do $\sigma(t)$ prešli iz razreda $\mathcal{S}$ v razred $\mathcal{E}$ (in se do t po (21) okužili). Zato je na tem intervalu

$$I(t) = Z(t) + S(0) - S(\sigma(t)) = Z(t) + S(0) - KS(t)$$

Dobljeni izraz vstavimo v (9) in pridelamo čisto spodobno Bernoullijevo diferencialno enačbo

$$S'(t) + b\,(Z(t) + S(0))\,S(t) = b\,K\,S^2(t) \tag{22}$$

Da dobimo ustrezni začetni pogoj, še enkrat preberemo (19). Postavimo

$$g(t) = Z(t) + S(0) \tag{23}$$

in po običajnem postopku ([6], str. 35) z uvedbo nove odvisne spremenljivke $L = 1/S$ spremenimo (22) v linearno diferencialno enačbo

$$L' - b\,g(t)\,L = -b\,K$$

ki je ni težko rešiti, le eksplicitni zapis partikularne rešitve, ki jo zahteva (19), je nekoliko kompliciran (primerjaj [6], str. 33, (6)!). Zato naj bo

$$h(t) = \exp\left(b \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right) \tag{24}$$

in napišimo kar ustrezno rešitev originalne enačbe:

$$S(t) = \left(h(t)\left((K/S(0)) - b\,K \int_{t_0}^{t} d\tau/h(\tau)\right)^{-1}\right. \tag{25}$$

Da se pokazati, da je $S(t)$ na celem intervalu $[t_0, t_0 + w]$ pozitivna in monotono padajoča, kar nas lahko le veseli, saj se to ujema z našimi pričakovanji, da je vedno manj zdravih osebkov, ki ne pridejo v stik z boleznijo. O tem, kako daleč pada $S(t)$, pa nekoliko kasneje.

iii) Kakor je že zapis (25) kompliciran, če ga obogatimo z uvedbo originalnih količin (postavimo (23) v (24), dobljeno pa v (25), pa imamo zmešnjavo), smo lahko še kar zadovoljni v primerjavi s tem, kar nas čaka sedaj. Pa pojdimo lepo po vrsti!

Za $t \geqq t_0 + w$ je razred $\mathcal{I}_0$ prazen, $Z(t) = 0$. V razredu $\mathcal{I}$ so kvečjemu tisti osebki, ki so bili že pred trenutkom $\sigma(t)$ izpostavljeni infekciji, pa še ti ne vsi: tisti, ki so bili okuženi že pred časom $\sigma(t\text{-}w)$, so zdaj že postali imuni in prešli v razred $\mathcal{V}$. V trenutku t so torej v razredu $\mathcal{I}$ natanko tisti osebki, ki so v času med $\sigma(t\text{-}w)$ in $\sigma(t)$ prešli iz razreda $\mathcal{S}$ v razred $\mathcal{E}$, ali v znakih

$$I(t) = S(\sigma(t\text{-}w)) - S(\sigma(t)) = K\,(\,S(t\text{-}w) - S(t)\,) \tag{26}$$

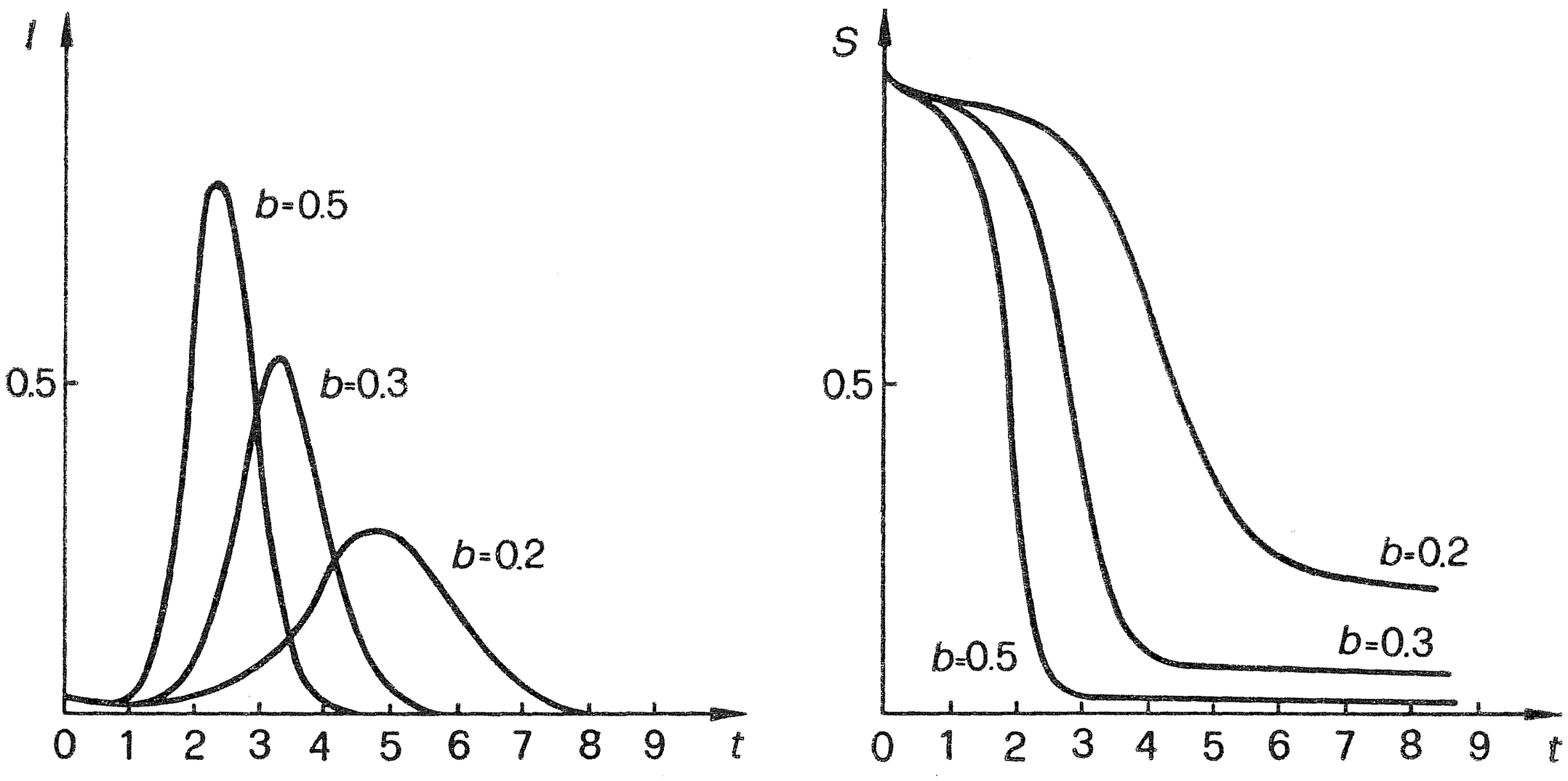
S prenosom dobljenega izraza v (9) dobimo enačbo

$$S'(t) = -b\,K\,S(t)\,(\,S(t\text{-}w) - S(t)\,),\ t_0 + w \leqq t < \infty \tag{27}$$

Enačba (27) ima vrsto grdih lastnosti: nelinearna je, predvsem pa nastopa neznana funkcija tudi pri premaknjenem argumentu $t\text{-}w$, torej gre za diferenčno — diferencialno enačbo (enačbo z zakasnitvijo). Z malo dobre volje lahko po korakih (dolžine w) uženemo (27), če le opazimo, da je začetni pogoj vedenje rešitve na celem predhodnem intervalu, enačba pa je potem na naslednjem »koščku« Bernoullijeva. Peš seveda ne pridemo daleč, primeren strojček pa izračuna in nariše rešitve, ki smo jih mi pobrali iz [5].

Zdaj pa si zadajmo še nekoliko drugačno nalogo. Ker je $S(t)$ monotono padajoča in ostane ves čas pozitivna, mora obstajati

$$\lim S(t) = S^*\ (t \to \infty)$$



SLIKA 1: Potek funkcij $I(t)$ in $S(t)$ pri nekaterih vrednostih b; $Z(t) = 0.022\,(1 + t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$

S* pomeni delež populacije, ki v času epidemije ni bil izpostavljen okužbi, zato predstavlja za prakso zelo važen podatek. Poskusimo torej določiti asimptotično vedenje funkcije $S(t)$.

Enačbo (27) integrirajmo od $t_0 + w$ do $T \geqq t_0 + w$:

$$\int_{t_0+w}^{T} (S'/S)\,dt = -bK\left(\int_{t_0+w}^{T} S(t-w)dt - \int_{t_0+w}^{T} S(t)dt\right) = -bK\left(\int_{t_0}^{T-w} S(t)dt - \int_{t_0+w}^{T} S(t)dt\right)$$

Levo stran izračunajmo, na desni polepšajmo meje:

$$\log S(t) - \log S(t_0+w) = -bK\left(\int_{t_0}^{T-w} S(t)dt + \int_{T-w}^{t_0+w} S(t)dt - \int_{T-w}^{t_0+w} S(t)dt - \int_{t_0+w}^{T} S(t)dt\right) =$$

$$= -bK\left(\int_{t_0}^{t_0+w} S(t)dt - \int_{T-w}^{T} S(t)\,dt\right)$$

Naj gre $T \to \infty$. Integral na desni lahko po izreku o povprečni vrednosti zamenjamo z wS^* in pišemo

$$\log S^* - bKwS^* = \log S(t_0+w) - bK\int_{t_0}^{t_0+w} S(t)\,dt \qquad (28)$$

Iz Bernoullijeve enačbe (22) lahko ugotovimo, da je

$$\int_{t_0}^{t_0+w} (S'/S)\,dt = -b\int_{t_0}^{t_0+w} (Z(t)+S(0))dt + bK\int_{t_0}^{t_0+w} S(t)dt$$

oziroma

$$\log S(t_0+w) - \log S(t_0) = -bwS(0) - b\int_{t_0}^{t_0+w} Z(t)dt + bK\int_{t_0}^{t_0+w} S(t)dt \qquad (29)$$

Prvi integral na desni se da še poenostaviti. Najprej uvedimo količino

$$G = b\int_0^w Z(t)\,dt$$

ki ima očiten nazoren pomen, meri namreč efektivno infekcijsko kapaciteto izhodiščnega razreda $\mathcal{I}_0$, ki upošteva tudi prehode iz razreda $\mathcal{S}$ v razred $\mathcal{E}$. Če uporabimo definicijo t_0 in vedenje nenegativnega integranda $Z(t)$, ki je pri $t \geqq w$ identično enak 0 (glej (11)), lahko takole poenostavimo

$$b\int_{t_0}^{t_0+w} Z(t)dt = b\int_0^{t_0+w} Z(t)dt - b\int_0^{t_0} Z(t)dt =$$

$$= b\int_0^w Z(t)dt - (bD/r) = G - (bD/r) \geqq 0 \qquad (30)$$

Zberimo izsledke (29), (30) in upoštevajmo še (19):

$$\log S(t_0+w) - bK\int_{t_0}^{t_0+w} S(t)dt = \log(S(0)/K) - bwS(0) - G + (bD/r)$$

Izraz vstavimo v (28) in se spomnimo, da je $\log K = bD/r$. To nam da

$$\log S^* - bKwS^* = \log S(0) - bwS(0) - G$$

ali enakovredno

$$S^* = S(0) \exp (b\,K\,w\,S^* - b\,w\,S(0) - G) \tag{31}$$

Enačba (31) je zaradi obilice konstant nekoliko nepregledna za numerično iskanje limite S^*, zato upoštevajmo nasvet iz [4]; na obeh straneh pomnožimo z $b\,K\,w$, uvedemo nove količine

$$x = b\,K\,w\,S^* \tag{32}$$

$$p = S(0)\,b\,w \tag{33}$$

$$Q = \exp (\,G - (\,b\,D\,/\,r)\,) \tag{34}$$

in (31) oblikujemo v

$$e^x / x = Qe^p / p \tag{35}$$

Oblika funkcije e^x/x zagotavlja, da ima (35) rešitev za vsak pozitiven p (in p, definiran s (33), je gotovo tak); rešitvi sta dejansko dve, če le ni istočasno $Q = 1$ in nima funkcija minimuma v $x = p$, za korena enačbe pa velja $x_1 \leq p \leq x_2$. Ker je $S(t)$ monotono padajoča, je seveda $S^* < S(t_0) = S(0)/K$, zato je $x = b\,K\,w\,S^* < b\,w\,S(0) = p$ in je iskana limita S^* določena z manjšim od obeh korenov enačbe (35) in enačbo (32).

Privoščimo si skromen praktičen primer. Naj bodo konstante v modelu po vrsti take: $b = 0.3$, $D = 0.01$, $r = 1.0$, $w = 7.0$. Treba je še povedati, kako je potekalo obolevanje razreda $\mathcal{J}_0$. Naj bo ta proces opisan z najpreprostejšo funkcijo, ki ustreza pogojema (10); postavimo $Z(t) = 0.003\,(7 + t)$, $-7 \leq t \leq 0$. S tem je proces širjenja bolezni v celoti dan. Vrednost $Z(-7)$ je res enaka 0, z $I(0) = Z(0) = 0.021$ pa je da n delež bolnih v celotni populaciji, ko začnemo šteti čas (glej (10)!). Funkcijo $Z(t)$ nadaljujemo po pravilu (11) v

$$Z(t) = \begin{cases} 0.021 - 0.003\,t & 0 \leq t \leq 7 \\ 0 & 7 \leq t < \infty \end{cases}$$

in izračunamo $K = \exp\,(Db/r) = 1.0030$ ter

$$G = b \int_0^w Z(t)dt = 0.3 \int_0^7 (0.021 - 0.003\,t)dt = 0.02205$$

po enačbah (33) oziroma (34) pa določimo še

$$p = S(0)\,b\,w = (1 - I(0))\,b\,w = 2.0559$$

$$Q = e^G / K = 1.0192$$

in izračunamo desno stran enačbe (35)

$$Q\,e^p / p = 3.8737$$

Enačbo $e^x / x = 3.8737$ smo rešili po Newtonu in dobili za manjši koren x_1 vrednost 0.3760 (zaokroženo). To pove, da je (glej (32)!)

$$S^* = x_1 / (\,b\,K\,w\,) = 0.1785$$

Drugače rečeno, skoraj 18 % populacije sploh ne pride nikoli v stik z boleznijo. Če vzamemo v račun privzetek o mešanju, je to gotovo optimistična ugotovitev.

IV. Namesto zaključka

Česa smo se pravzaprav naučili od obeh obravnavanih modelov? Predvsem sta to lepa primera za uporabo matematike zunaj klasične fizikalne delavnice, a ves čas tudi opozarjata na svojo nepopolnost glede na uporabnost v praksi. Seveda sta daleč od tega, kar je do danes dosegla deterministična teorija (glej npr. [3] in primeren učbenik integralskih enačb!), ki se je v dobršni meri približala realističnemu opisu širjenja epidemij s privzemanjem novih in novih faktorjev, npr. časovne in prostorske populacijske dinamike (naravni prirastek, prostorska razporeditev in migracije), večfaznega poteka bolezni, vpliva prenašalcev (npr. komarja anofelesa pri malariji), rekurentnih epidemij itd. Vseeno se zdi, da je prehod k stohastičnim modelom imel vsaj tako pomembno vlogo kot v fiziki prehod od klasične k valovni mehaniki. Treba je namreč upoštevati, da je vsaj »srečavanje« zdravih in okuženih v svojem bistvu slučajen proces, da o vplivu drugih dejavnikov niti ne govorimo. Zato sta naša modela res elementaren primer za lotevanje obravnavanih problemov. Bralcu, ki ga je stvar začela zanimati, predlagamo po klasični monografiji [1] še opozorilni razdelek 4.12 v [2] (o širjenju gonoreje), obstajajo pa tudi specialne monografije o posameznh tipih modelov (npr. [7]); novejše dosežke najdemo v reviji *Mathematical Biosciences* in v medicinski periodiki.

LITERATURA

[1] Bailey N. T. J., *The Mathematical Theory of Epidemics;* Charles Griffin & Co. Ltd., London 1957.

[2] Braun M., *Differential Equations and Their Applications;* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1978.

[3] Cooke K. L., Kaplan J. L., *A Periodicity Threshold Theorem for Epidemics and Population Growth;* Math. Biosc. **31** (1976) 87—104.

[4] Hadeler K. P., *Mathematik für Biologen;* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

[5] Hoppenstead F., Waltman P., *A Problem in the Theory of Epidemics;* Math. Biosc. **9** (1970) 71—91.

[6] Križanič F., *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun;* Državna založba Slovenije, Ljubljana 1974.

[7] Waltman P., *Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics;* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1974.

VPRAŠANJA

113 — Ali lahko vesoljska ladja, ki se giblje po eliptičnem tiru okoli Sonca, zaradi srečanja s kakim planetom brez uporabe motorjev pobegne iz Osončja?

114 — Kako je mogoče izkoristiti vrtenje Zemlje okoli lastne osi in njeno gibanje okoli Sonca pri izstreljevanju raket, ki naj bi zapustile Osončje?

Tomo Pisanski

Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 5

SOCIOLOGIJA, PSIHOLOGIJA IN POUČEVANJE MATEMATIKE

LARS GÅRDING*

AMS Subj. Class. (1970) 00 A 05

Podali bomo kratko analizo vloge matematike v družbi. Začeli bomo z življenjepisi treh oseb, ali bolje, treh skupin A, B in C, ki po vrsti predstavljajo široko javnost, uporabnike matematike in poklicne matematike. V razdelku o psihologiji A sreča C, ki zapade v krizo. Potem zvemo, kako je potekal poskus, ko je C hotel reformirati poučevanje matematike. Poglavje se konča z naukom.

THE SOCIOLOGY, PSYCHOLOGY, AND TEACHING OF MATHEMATICS

We shall give a short analysis of the role of mathematics in society. It starts with biographies of three persons or rather collectives A, B, and C, representing, in order, the public, the users of mathematics, and the professional mathematicians. In a section about psyhology A meets C and C has a crisis. Then we are told how C fared when he wanted to reform the teaching of mathematics. The chapter ends with a morality.

1. Trije življenjepisi

A. Označimo s črko A matematika, ki naj bo predstavnik bolj ali manj izobražene javnosti. Potem si moramo predstavljati osebo, ki živi in dela že tisoče let. Istočasno bo imela ta oseba celo različne starosti. Kogar ta pojav moti, naj si predstavlja, da je A razcepljen na več posameznikov. Orisali bomo njegov razvoj in njegove dosežke v matematiki.

Najprej naj bo A otrok, ki se uči šteti. Predpostavljamo, da živi A v okolju, kjer so števila pomembna in da ima normalen kontakt z odraslimi. Potem A v starosti približno šestih let že dobro obvlada prvih 10—20 naravnih števil in njihov vrstni red. Zna tudi seštevati majhna števila in šteti na prste. Zanimajo ga večja števila in sprašuje, kako se jim pravi. Nekoč se uspava s štetjem in pride do 100. Razburljiv trenutek. Četudi ostane A celo življenje nepismen, poveča svoje matematično območje na vsa števila pod 1000 in dobro obvlada tiste ulomke in geometrijske like, za katere obstoje imena v njegovem jeziku. Če igra karte ali kocka ali je drugače prisiljen računati na pamet, računa natančno. Če A živi v deželi, kjer blago kupujejo in prodajajo, kjer uporabljajo denar ali kjer merijo čas z uro, potem te svoje sposobnosti uporablja vsak dan. Ta A obstaja že več tisoč let in še vedno sestavlja več kot polovico človeštva. Zaradi skoraj vsakodnevnega kontakta z naravnimi števili in morda tudi z ulomki mu je številski model domač. Ima intuitiven občutek za tako vrsto praktične geometrije, kot jo uporabljamo na primer v mizarstvu. Toda njegovo znanje je omejeno. Da bi lahko obvladal velika števila in izvajal dolge račune, mora iti A v šolo. Tam preneha biti nepismen in lahko začne vsrkavati dele človekove kulturne dediščine.

---

* Ta sestavek je prevod 12. poglavja iz avtorjeve knjige *Encounter with Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1977. Zahvaljujemo se založbi, da je dovolila prevod. Prevedla Tamara Bohte.

Za začetek se mora A naučiti brati in pisati. To se v večjem obsegu ni zgodilo do devetnajstega stoletja. »Branje, pisanje in računanje« so bili trije stebri ljudske izobrazbe. Matematika je bila na tretjem mestu, toda cilj je bil zelo jasen: učiti učinkovite algoritme za štiri aritmetične operacije in seznaniti učence z obstoječimi merskimi sistemi za težo, prostornino, denar in čas. A se je najprej naučil imen in znakov za naravna števila ter preprostega seštevanja in odštevanja. Za tem je prišla poštevanka, ki se je je moral naučiti na pamet. Opremljen s tem nepogrešljivim orodjem se je A s precejšnjim trudom naučil algoritme za množenje in deljenje. Na razpolago je bila praktična uporaba. Poučevanje je bilo zelo konkretno s poudarkom na spretnosti in rezultat je bil dober. Po končanem šolanju je imel A dovolj prakse, da ni pozabil, kar se je bil naučil. Če je A premišljal, za kaj gre pri višji matematiki, si je predstavljal zelo obširno poštevanko ali morda peto aritmetično operacijo.

Zdaj pa zasledujmo A nekoliko naprej v srednjo šolo, kjer se uči latinščino, zgodovino, jezike in nekaj matematike. Poučevanje je zdaj manj utilitaristično in A se sreča z znanstveno matematiko v dveh oblikah: z Evklidovo geometrijo in z algebro, ki obsega linearne in kvadratne enačbe. A je dober učenec in stori vse, kar zahtevajo od njega, toda po končani šoli svojega znanja nima priložnosti uporabljati in zato to znanje naglo izpuhti. Kot uradnik se A kdaj pa kdaj spomni Pitagorovega izreka, toda pozabil je že, kaj je hipotenuza in težave ima z računanjem procentov. Kot urednik A pazi, da se na straneh njegove revije ne pojavijo nobene formule. Če pogovor nanese na matematiko, se sprašuje, ali je zveza med glasbeno in matematično nadarjenostjo. To, kar je veljalo za A pred sto leti, je v bistvu še vedno res. Razlika je le v dejstvu, da utrudljivih računov nič več ne računa »peš«, to je s svinčnikom in papirjem. A se uči iste stvari kot prej, dobi pa več razlage in manj vaje. Nove stvari so: teorija množic, ki naj razloži številski sistem, binarni sistem, ki naj razloži računalnike, in čitanje preprostih diagramov, da bi razumel kompliciranо družbo, v kateri živi. Kot odrasel človek A nima vzroka, da bi se ukvarjal z matematiko in njegovo mnenje o predmetu lahko povemo prav na kratko: to je nekaj, kar ima opraviti z računalniki, sateliti in jedrsko energijo. Podrobnosti ne pozna, meni pa, da gre med drugim tudi za binarni sistem in množice. Kot urednik A še vedno pazi, da na njegovih straneh ni formul, razen v kratkem obdobju, ko je bila Einsteinova formula $E = mc^2$, ki so jo včasih pisali $E = mc2$ ali $F = m3^2$, splošno sprejeta čarobna formula. A obravnava števila, ki jih dobi z računalnikom, z večjim spoštovanjem kot tista, ki jih izračuna »peš«. Ob družabnih priložnostih se A obnaša tako kot prej.

B. Tako kot A se pojavlja tudi B v mnogih oblikah in v raznih obdobjih. B naj označuje ljudi, ki uporabljajo matematiko kot orodje, ne da bi sami kaj prispevali k predmetu. B stoji med A in poklicnim matematikom, ki ga bomo obravnavali v naslednjem razdelku. Ni tako lahko razlikovati med B in C, toda recimo, da je danes tipični B inženir, ki naredi načrt za most ali napiše kompliciran program za računalnik. Ta B ima sijajno kariero. Razprostira se čez več tisoč let in tu jo lahko le orišemo.

B se je prvič pojavil pred 4000 leti v rodovitnih dolinah Nila in Evfrata. Vodil je knjigovodstvo princem, beležil zaloge žita, olja, živine, vojakov in sužnjev. Pisal je zakone in zidal templje in palače z znakom civilizacije: z

ravnimi črtami in s pravimi koti. Meril je razdalje, risal zemljevide in zapisoval gibanje nebesnih teles ter si včasih pridobil občudovanje množic, ker je napovedal sončni mrk. Imel je šolo, kjer so se bistri mladi dečki učili aritmetiko in knjigovodstvo. Njegovo življenje se v 3000 letih ni veliko spremenilo. V Italiji je v renesansi še vedno vodil knjigovodstvo, toda zdaj za bogatega trgovca. Po izumu smodnika se je B posvetil balistiki. Po tem prvem uspehu na bojišču je začel B graditi moderno civilizacijo.

Konstruiral je, zidal, izboljševal stare procese in izumljal nove. Med njegovimi dosežki so velike ladje, železnice, parni stroj, jeklo, daljnostrelni topovi, novi eksplozivi, avtomobili, letala, telekomunikacije, sintetični materiali, sateliti, jedrska energija itd. Pri vsem svojem delu uporablja B matematiko kot orodje, v glavnem le zato, da izvaja preproste račune, včasih pa uporablja kompliciranе matematične modele; tako je bilo na primer, ko je B odkril planet Uran ali konstruiral optične leče. B je navadno dobil modele od C, toda včasih je moral čisto sam izumiti model in ustrezno teorijo. To se je zgodilo, ko je bil B Newton in je premišljeval o gibanju planetov. Rešitev problema je našel v gravitacijskem zakonu in izumil matematični instrument — infinitezimalni račun, ki mu je omogočil izračunavanje poti po tem zakonu. Po dobi, ko je bil Newton, je B delal kot fizik in zdaj mu je bila matematika neobhodno potrebna, da je lahko formuliral osnovne zakone, ki jih je odkril, t. j. zakone hidrodinamike in elektrike in principe atomske fizike. Fizika je za B zelo težka in pogosto mora iskati nove matematične modele. Navadno nima več dovolj moči, da bi jih konstruiral sam in zgodilo se je že, da ga je C prehitel. Ko je bil B Einstein in je odkril splošno relativnost, je potreboval tako geometrijo, kot jo je Riemann že obdelal. Isto se je zgodilo, ko je B osnoval kvantno mehaniko. Matematično orodje, med drugim teorija grup, je bilo že v zalogi, pripravljeno za rabo. Kadar B danes dela kot teoretični fizik, preizkuša mnogo stvari iz te zaloge, čeprav ostaja glavno orodje infinitezimalni račun.

Sicer pa je B bolj aktiven kot kdajkoli. K tradicionalnima področjema dejavnosti, tehniki in fiziki je B dodal numerično analizo, obdelavo podatkov in dve veji družbenih znanosti — biologijo in medicino. Včasih so njegova prizadevanja precej skromna, na primer, če je B zdravnik in hoče nekaj dokazati s statistiko. Tedaj mora prositi za nasvet drugega B, specialista za uporabo matematične statistike.

Mnenje, ki ga ima B o matematiki kot predmetu in njegovo mnenje o C se spreminja od nekritičnega občudovanja do arogantnega občutka premoči. Kot profesor fizike ali tehnike B navadno misli, da bi matematiko morali poučevati fiziki (inženirji), ne pa njegov kolega C, ki je brezupen teoretik. V zadnjem času se je pokazalo, da so se začeli odnosi med obema strankama izboljševati. B si je pridobil boljše matematično razumevanje, C pa se je prilagodil rastoči pestri trumi študentov, ki hoče matematiko uporabljati za zelo raznovrstne namene.

C. Matematik C, ki študira predmet zaradi predmeta samega, se je prvič pojavil skupaj z B pred 4000 leti v rodovitnih dolinah Nila in Evfrata. Verjetno sta bila B in C nekaj časa ista oseba, potem pa je B postal C, ko ga je začelo orodje bolj zanimati kot njegova uporaba. Metamorfoza je nastopila, ko je imel B veliko časa in mu je bilo v zadovoljstvo, da je sedel in premišljeval.

C je imel svoje prvo veliko obdobje v Grčiji od leta 500 do leta 0 pr. n. š. Tedaj je za B po nekaterih začetnih uspehih nastopila doba mrtvila. C pa je vneto premišljeval o matematičnih problemih, diskutiral o problemih z drugimi in zapisoval, kar je odkril. Njegovi rezultati so v Evklidovih Elementih ter v Arhimedovih in Apolonijevih delih. To je bil sijajen debut in Elementi so imeli fantastičen uspeh kljub pedantnemu stilu in abstraktnemu razglabljanju. Ko je tako pokazal svojo moč, je C miroval več kot tisoč let. Ko se je pojavil drugič z rešitvami enačb tretje in četrte stopnje, ni dosegel enakega uspeha kot s svojim debutom. Toda v sedemnajstem stoletju je C zbudil pozornost, ko je odkril infinitezimalni račun in vse od tedaj trdo dela in ima precej uspeha. Tudi A, to je splošna javnost, ga še vedno ceni. Toda njegov tradicionalni ugled je zelo odvisen od nezmožnosti A, da bi razlikoval med B in C. Lahko se zgodi, da A zmotno misli, da je C dosegel nekatere dosežke B, na primer elektronske računalnike.

Vemo že, kako A in B gledata na C in na njegov predmet, zdaj pa bomo povedali nekaj besed o položaju C v naši družbi ter o njegovem mnenju o sebi in drugih. Večino časa je C univerzitetni učitelj, lahko pa je tudi zaposlen v industriji ali na kakem raziskovalnem inštitutu. Na nekem področju matematike je specialist in je napisal dva ali tri po vsem svetu znane članke — čeprav le v ožjem krogu. Včasih trdo dela in slabo spi. To je takrat, ko skuša dokazati nov izrek. Pogosto ne uspe, včasih pa se vse čudovito izide in tedaj je zadovoljen. Če sam ne piše dobrih člankov, tedaj to store drugi. C je ponosen na svoj kolektivni jaz, ki je že napisal in še vedno piše toliko čudovitih stvari. Ve, da ima njegov predmet neomejene možnosti in da bo vedno privlačeval nadarjene mlade ljudi. V svojih odnosih do A in B je realist, tako da se ne trudi občevati na nivojih, kjer to ni mogoče. Toda včasih se mu zdi, da ga B spravlja v slabo voljo, in včasih, da se A uči napačno vrsto matematike in sklene, da bo s tem v zvezi kaj ukrenil. Na njegov sklep se bomo povrnili pozneje.

2. Psihologija matematike

Predstavljajmo si, da je A izobražena in inteligentna oseba, C pa redni profesor matematike in da sta soseda. A začne premišljevati o C. Kaj počne razen vsakdanjih opravil? O čem premišljuje? Kako je mogoče, da premišljuje o tako abstraktnih stvareh, kot je matematika? Kako je mogoče, da si kdo napolni življenje s tako puščobo? C pa je pravkar prebral nov članek D, genija v tem predmetu. C je nameraval narediti nekaj podobnega in je že začel z delom. Zdaj pa mora priznati, da je pošteno premagan. C je pobit in kar naprej premišljuje, zakaj sam ni videl problemov v isti luči kot D. Potem bi dobil večino rezultatov, do katerih je prišel D.

Prvič, v tem, da se C rad ukvarja z matematiko, ni nič izrednega. Milijoni šolskih otrok vseh starosti se tudi radi ukvarjajo z matematiko; obstoji veliko več čudnih načinov zabijanja časa, na primer igranje šaha. Poleg tega pa C le občasno poskuša reševati težke probleme. Večino časa posveča poučevanju in morda tudi pisanju. C je intenzivno študiral do tridesetega leta. Na enem področju matematike je prebral vse klasike in vso novejšo literaturo in k njej prispeval nekaj izrekov. Tu se počuti popolnoma doma. Zanj je pojem analitične funkcije na primer kot star prijatelj in vzbuja na ducate asociacij. Včasih se C ukvarja z mislijo, da bi moral znati razložiti A, kaj je analitična funkcija.

Ko pa C o tem še naprej premišljuje, vidi, da ta zamisel ni realistična. Toda nekega dne se mu ponudi nepričakovana priložnost, da preizkusi svoj pedagoški talent. A je zbegan nad tem, kar piše v matematičnem učbeniku njegove hčerke o množicah in prosi C, naj mu to razloži. Ker je A inteligenten in vljuden poslušalec, se stvari razvijejo razmeroma dobro, toda na obrazu A lahko opazimo zatajena vprašanja. Ali je to vse? Zakaj ti čudni znaki za tako preproste stvari? C razume namig in razloži, da je algebra množic le jezik, ki se uporablja v matematiki, kjer pride prav pri raznih pojmih in v kompliciranih primerih. Da bi A dobil predstavo, o čem gre pri pravi matematiki, prikaže zdaj C v glavnih obrisih dokaze, da je $\sqrt{2}$ iracionalno število, da obstaja neskončno mnogo praštevil in da vidimo krožni lok pod istim kotom iz vseh točk na obodu. Uspeh je omejen, ker postane A utrujen in A in C se poslovita, zatrjujoč drug drugemu, da sta čas prijetno preživela. Čez en teden ima C večjo srečo, ko premaga A v šahu in razkrije enega od njegovih trikov s kartami.

Za težave, ki jih je občutil C, ko je skušal A razložiti naravo matematike, obstoji čisto naravna razlaga. A bi moral veliko delati in se seznaniti s tujim matematičnim modelom, preden bi lahko upošteval rezultate njegove teorije. Moral bi imeti nekoliko navdušenja in potrpljenja, kot ga je imel C, ko je bil študent. Ko bi se bil, na primer, A zanimal za kombinatorne probleme, kar ne bi bilo nenavadno, bi bili njuni matematični kontakti lahko bolj rodovitni, če bi se C prilagodil položaju in se skrbno pripravil.

Pustimo zdaj A in se posvetimo vprašanju, zakaj je D toliko bolje uspelo pri skupnem problemu kot C. C zdaj misli, da pozna dober odgovor. Problem je obravnaval staro vpeljano vejo matematike, ki jo je C zelo dobro poznal. K njej je celo prispeval svoje dosežke. Potem je imel tretji matematik, E, obzorno predavanje, v katerem je pokazal, da je bila primerno posplošena verzija problema zelo pomembna v popolnoma novi zvezi. Ko je C poslušal to predavanje, ga je novo, pogumno lotevanje stvari skoraj prestrašilo. E je dvignil svoj mali krog problemov na višji nivo. Tu se je dalo veliko premišljevati in veliko početi. C se je takoj začel ukvarjati z nekaterimi posebnimi primeri in postavil celo vrsto domnev, kakšen naj bi bil splošni odgovor. Prve domneve je moral ovreči, toda prav ko se je pojavila obetajoča, je šel C v knjižnico, kjer je videl, da je D našel pravi odgovor in bo čez nekaj mesecev objavil podrobne analize. C je tudi spoznal, kako da je D lahko uspel. Manj je računal in več premišljeval. C si je predstavljal, kako je D, nestrpen in hiter mislec, izbral najznačilnejše posebne primere in formuliral splošen rezultat. Bilo je skoraj grozljivo videti, kako samozavesten je bil D na nepoznanem področju. Po prvem pretresu si je C kmalu opomogel in zgodba se je zanj srečno končala. C je zelo skrbno prebral končni članek D, izpopolnil teorijo v več podrobnostih in napisal o stvari odlično knjigo, ki so jo dolgo imeli za standardno delo.

Razliko med C in D lahko vidimo pri matematiki v vsaki učilnici. Večina študentov dela rada varne sistematične račune, toda to jim včasih prikrije pravo naravo stvari. V novi situaciji preizkusijo stare recepte in ne uspejo. Potrebujejo novo idejo. Nekateri jo dobe sami, drugi pa potrebujejo pomoč. Tisti, ki uspe, ima perspektivno sposobnost. Če je potrebno, lahko D znano snov tako zgosti, da ne prikrije pogleda na neznano. Ta metafora naj bo tu za skromno razlago, zakaj je imel D tak uspeh.

3. Poučevanje matematike

Medigra med učiteljem matematike in njegovim učencem je lahko neke vrste umetnost — pravo vprašanje učitelja, hitra analiza učenčevega mišljenja, ki ji slede prave razlage ob pravem času. Te vrste poučevanja ne moremo sistematizirati in se z njo ne bomo več ukvarjali. To poglavje obravnava novo matematiko v šolah in se konča z zgodbo, ki ima naslov Trije načini.

Kako je C reformiral šolsko matematiko

Da bi lahko razumel stare matematične članke, mora C vedeti, kako so se ljudje v tistem času izražali. Vsebina izrekov se ne spreminja, kar naprej pa se spreminja terminologija in načini gledanja na stvari. Pojavljajo se novi izrazi, stari pa izginjajo ali spremene pomen. Poleg tega so še stalni premiki znotraj matematike in med njenimi vejami. Seveda je posledica tega, da se zdi včasih predmet precej neurejen in C hoče zmedo urediti. Tako obdobje je bilo sredi našega stoletja. V začetku stoletja so se pojavili pojmi kot grupa, kolobar, obseg in množica, ki so bili splošno sprejeti, toda velika sistemizacija se je začela ko je C napisal vrsto knjig z naslovom Eléments des Mathématiques pod psevdonimom Nicolas Bourbaki. Njegov glavni namen je bil napraviti za osnovo matematike sorazmerno novo teorijo topoloških prostorov in imel je vsesplošen uspeh. Naredil je terminološko revolucijo in ustvaril novo sistematiko, ki je bila osnovana na preprostih matematičnih modelih, kot so topološki prostor, linearni prostor, grupa itd.

Toda C s tem ni bil zadovoljen; hotel je tudi reformirati šolsko matematiko. Upravičeno je mislil, da ima preveč rutinskega računanja in istočasno premalo pojmov, ki bi bili lahko razumljivi in bi vodili k boljšemu razumevanju narave matematike in človekovega mišljenja. Take stvari so bile na razpolago — na primer pojmi množice, relacije, funkcije in grupe. C je začel delati za svoj program propagando in uspelo mu je, da so ga sprejeli v mnogih šolah po svetu. Otroci so se začeli učiti množice, preden so znali ugotoviti število njihovih elementov, starejši otroci so se ukvarjali s funkcijami in relacijami. Starši so obiskovali posebne tečaje, ki naj bi jim omogočili razumeti, kaj delajo njihovi otroci.

Po nekaj letih je C opazil, da njegova pobuda ni imela želenega učinka. Novi pojmi so res preprosti, toda z njimi moramo ravnati z lingvistično natančnostjo, tega pa večina otrok ne zmore. Poleg tega so bile zanimive uporabe redke in vaje so bile trivialne in neplodne. Druge senčne strani so bile, da je izginila aritmetična spretnost, da so zapostavljali elementarno geometrijo in da je po končanem šolanju ostalo zelo malo aktivnega znanja matematike. Na kratko povedano, če že stvar ni bila popoln polom, uspeh tudi ni bila. Zdaj hoče imeti C več poudarka na spretnosti in manj na teoriji, noče pa popolnoma odnehati. Po njegovem je mogoč pameten kompromis. Svoj neuspeh hoče razložiti s tole analizo. Modeli in pojmi, ki jih hoče vpeljati, so preprosti in koristni v matematiki, kjer prispevajo k zakonu in redu, ne da bi kakorkoli omejevali. Vse to lahko narede tudi v šolskem programu. Toda žal je druga stran njihove preprostosti njihova nevtralna, revna vsebina: ti modeli sploh niso dobra igrišča za otroke. V njih lahko veliko vidiš in se naučiš — toda zelo malo *storiš*. Nasprotno so v odprti deželi števil in geometrije vedno lepe in poučne stvari za vsakogar. Ti modeli so boljše vsakdanje okolje. V tej najnovejši formulaciji najde C nekoliko tolažbe za svoj poraz.

Zgodba

Matematika je pomemben osnovni predmet in mora skrbeti za več interesov. Namenjena mora biti ne samo uporabnikom in družbi na splošno, skrbeti mora tudi za svoje interese. Med drugim to pomeni, naj matematiko poučujejo na matematično pomenski način. Tako zahtevo moramo pretehtati v odnosu do stvarnega stanja poučevanja. Kako to lahko storimo na tri različne načine, bo pokazala zgodba, v kateri C razkrije svojo filozofijo poučevanja, bralcu pa prepusti, da sam izlušči *sens moral.*

Trije načini

Učitelj pravi razredu: Razložil vam bom pomemben pojem preme sorazmernosti. Uporablja se v matematiki, fiziki, družbenih znanostih in v vsakdanjem življenju; ima dve spremenljivki x in y, tako da je y odvisen od x. Definicija je takale (obrne se k tabli in začne pisati):

Pravimo, da je y sorazmeren x, če obstaja tako število a, da je $y = ax$ za vsako vrednost x in ustrezno vrednost y.

Potem se obrne in pogleda po razredu. Samo učenec ali dva sta razumela. Učitelj spet poskusi. No, vidite, kar sem pravkar napisal, pomeni, na primer, da je, če vstavimo za $a = 2$ (obrne se k tabli in piše),

$$y = 2x \text{ za vse } x$$

Spet se obrne in pogleda po razredu. Zdaj so skoraj vsi razumeli. Ker na dveh obrazih opazi, da učenca ne razumeta, učitelj spet poskusi. No, vidite, kar sem pravkar napisal, pomeni, na primer, da je, če vstavimo za $x = 3$, $y = 6$ (napiše na tablo),

$$6 = 2 \times 3$$

Obrne se in pogleda po razredu. Vsi so razumeli.

VPRAŠANJA

Vprašanje 115

Oglejmo si naslednjo igro za *enega* igralca. Kdo nam izmed *šestih* različnih barv izbere *štiri* in jih razvrsti v neko *zaporedje*. Uganiti moramo, *katere* štiri barve so to in kakšen je njihov *vrstni red*. Sprašujemo lahko le tako, da sestavimo četverico barv, nato pa izvemo, *koliko* barv smo uganili in koliko jih že stoji *na pravem mestu* v zaporedju. Vsakokrat smemo pri sestavljanju novih četveric poljubno premeščati in zamenjavati barve.

Naloga se glasi:

(*i*) določi *najmanjše možno število vprašanj*, ki je potrebno, da dobimo pravilno razmeščeno četverico barv;

(*ii*) določi *povprečno število vprašanj*, ki je potrebno, da dobimo pravilno razmeščeno četverico barv.

Pripomba: opisana igrica je zadnje čase zelo priljubljena v ZRN; tam so že začeli izdelovati posebno satovje in obarvane čepke, s katerimi se igrica še laže igra. Igralec izbira obarvane čepke in jih razmešča v satovje. Tako niza četverko za četverko in ima lep pregled nad igro. Pri izdelavi te igrače so morali najprej ugotoviti, kako veliko naj bo to satovje, da se bo igra lahko na njem v povprečju končala. To sprašuje ravno naloga (*ii*).

Dušan Repovš

DOMAČE VESTI

FINANČNO POROČILO KOMISIJE ZA TISK DMFA OD 1. 9. 1976 DO 31. 12. 1977

Zaradi objektivnih težav (v pisarni komisije za tisk od 20. 12. 1977 nismo imeli stalnega uslužbenca) smo inventuro za leto 1977 in polovico leta 1976 lahko opravili šele pred kratkim. V letu in pol se je promet več kot podvojil. To se pozna tudi pri večjem neizterjanem dolgu za Obzornik za matematiko in fiziko za leto 1976 in 1977 ter Presek za šolsko leto 1977/78. Od 1. maja je pisarna komisije za tisk DMFA SRS redno odprta vsak dan polni delovni čas. Poleg omenjene inventure bomo skušali v letošnjem letu redno poslovati ter nadomestiti še nekatere zaostanke pri naših obveznostih. Seznam vseh izdanih publikacij (37 po številu) smo objavili na IV. strani 2. številke letošnjega Obzornika za matematiko in fiziko. Kljub omenjenim težavam so publikacije redno izhajale. Pri Preseku se je naklada povečala vsako leto za nekaj tisoč, izšlo pa je tudi nenavadno veliko učbenikov v Zbirki izbranih poglavij iz fizike in Postdiplomskem seminarju iz fizike. Veliko dela je bilo še z urejanjem Plemljeve spominske sobe in prodajo bronastih, srebrnih ter zlatih Plemljevih značk. Za redno izhajanje publikacij imajo veliko zaslugo Raziskovalna skupnost Slovenije, ki sta nam tudi v minulem letu odobrili znatne zneske za subvencioniranje naših izdaj. Pomembno nalogo opravljajo tudi kolegi na srednjih in osnovnih šolah; ti posredujejo predvsem knjige Sigma in Presek dijakom in učencem, ki so jim naše izdaje predvsem namenjene.

	dohodki	izdatki	saldo
Obzornik za matematiko in fiziko	447.239,70	397.172,95	+ 50.066,75[1]
Presek	1188.304,90	922.852,70	+ 265.452,20[1]
Matematika-Fizika	223.853,00	225.752,50	— 1.899,50[2]
Sigma	300.687,15	192.116,00	+ 108.571,15[3]
Izbrana poglavja matematike	75.840,00	47.015,00	+ 28.825,00[4]
Postdiplomski seminar iz matematike	30.461,40	30.461,40	0
Publications IMFM	54.820,40	30.624,15	+ 24.196,25
Izbrana poglavja iz fizike	131.934,75	125.844,50	+ 6.090,25[4]
Postdiplomski seminar iz fizike	—	28.625,00	— 28.625,00[2]
Seminarji	4.938,25	4.938,25	0
Vega	21.058,00	21.058,00	0
Letna poročila (DMFA, IMFM)	16.537,00	13.390,00	+ 3.147,00[5]
Učbeniki za srednje šole	89,000,00	89.000,00	0
Prodaja knjig, skript in značk	1268.159,20	1001.390,60	+ 266.768,60[1]
10 % režija	376.797,60	270.782,30	+ 106.015,30[1]
Skupaj	4229.631,35	3401.023,35	+ 828.608,00
Plemljev dom	140.333,10	140.333,10[6]	0
Plemljev muzej	66.885,85	66.885,85	0
Skupaj	4436.850,30	3608.242,30	+ 828.608,00

Dohodki	OMF št. 5-6/76, 1-6/77	Presek št. 5/III, 1-4/IV, 1-2/V
Saldo 1976	5.856,90	36.315,70
Subvencije:		
ISS 1976	20.000,00	40.000,00
ISS 1977[7]	21.800,00	77.898,00
RSS 1976	28.200,00	200.000,00
RSS 1977/[7]	150.000,00	181.761,00
Naročnine	219.970,00	649.830,20
Razno	1.412,80	2.500,00
Skupaj	447.239,70	1188.304,90

Izdatki	OMF	Presek
Tisk	200.503,00	667,596,90
Avtorski honorarji	145.477,60	161.569,20
Članarina	16.524,00	
Materialni izdatki		10.770,00
10 % režija	34.668,35	82.916,60
Skupaj	397.172,95	922.852,70
Saldo	+ 50.066,75[8]	+ 265.452,20[9]

V minuli poslovni dobi smo prodali naslednje število publikacij iz posameznih zbirk:

	Število knjig	v vrednosti din
Sigma	18.729	447.845,00[10]
Matematika-Fizika	1.691	268.990,00
Izbrana poglavja iz matematike	1.985	54.312,00
Postdiplomski seminar iz matematike	105	2.275,00
Publications	12	120,00
Seminarji iz matematike in fizike	21	684,00
Izbrana poglavja iz fizike	947	36.926,00
Postdiplomski seminar iz fizike	77	1.176,00
Razne knjige drugih založb	423	35.387,00
Plemelj — značke, razglednice in drugo	11.869	83.426,00[11]
Vega — značke, razglednice, priznanja, PK	27.063	191.040,00
Skupaj	62.922	1122.181,00

REŽIJA

Dohodki	
Saldo 1976	60.577,05
Obresti v banki	8.902,00
OMF	34.668,35
Presek	82.916,60
Natis in prodaja knjig, skript in značk	188.133,60
Drugi dohodki	1.600,00
Skupaj	376.797,60

Izdatki:	
Intelektualne storitve	72.426,30
OD	88.275,10
Bančni stroški	6.278,00
PTT OMF in Presek	6.178,00
Materialni stroški pisarne in drugi izdatki KT	67.092,70
Skupaj	270.782,30
Saldo	+ 106.015,30[13]

Dolžniki:

OMF, 1975—1977	33.800,00
Presek, 1976/1977	400,00
Sigma in druge knjige	35.072,00[14]
Skupaj	69.272,00

V skladišču imamo še 34.882 knjig, značk in drugih artiklov v vrednosti	574.890,00
Gotovina na žiro računu	828.608,00[15]
Skupna vrednost našega premoženja je	1403.498,00

[1] Podrobno razdelitev finančnega poslovanja za obe reviji, prodajo knjig in sredstev na partiji »režija« prikazujemo v nadaljnjih razpredelnicah.

[2] Dolg bomo poravnali po nakazilu drugega dela subvencije RSS; do dneva obračuna nam je še niso nakazali.

[3] Namenska sredstva za subvencioniranje knjig Sigma.

[4] Izbrana poglavja iz matematike in fizike izdajamo v VTOZD matematika oz. VTOZD fizika.

[5] Namenska sredstva za Letno poročilo IMFM 1977/78.

[6] V izdatku je upoštevan tudi saldo, katerega smo nakazali na ŽR DMFA SRS.

[7] ISS in RSS sta nam zaradi rednega izhajanja in točnega obračunavanja v letu 1977 nakazali vso odobreno subvencijo za obe reviji že pred dokončnim obračunom.

[8] Iz tega zneska smo morali poravnati še tiskarske stroške za 6. številko. Ostanek pa je bil s še ne plačano naročnino namenjen za poravnavo stroškov prve številke v letošnjem letu.

[9] Namenska sredstva za 3. in 4. številko petega letnika Preseka.

[10] Od tega je knjig brez Štirimestnih logaritmov in drugih tabel le 5112 v vrednosti 164.293,00 din.

[11] Nekaj te zaloge je na Bledu še neprodane.

[12] Del sredstev smo porabili za interno subvencijo Presekove knjižnice.

[13] V letošnjem letu bomo potrebovali več sredstev iz naslova »režija« zaradi večjega obsega dela.

[14] Večino dolga predstavlja še neprodana zaloga na Bledu.

[15] Navidez velika sredstva so le zagotovilo za nekajmesečno nemoteno delo, saj samo ena številka Preseka stane skoraj 200.000 dinarjev.

Nadzorni odbor je 19. 6. 1978 pregledal poslovanje komisije za tisk in potrdil urejenost poslovanja.

Janez Markelj

PLES MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV

V petek, 19. maja 1978, smo matematiki organizirali elitni ples matematikov, fizikov in astronomov v pivnici Zvezda. Organizacije smo se lotili že nekaj tednov prej in počasi se je mladinska soba napolnila s predmeti, ki so jih podjetja namenila za naš srečolov. Pripravljali smo tudi program, v katerem smo skušali predvsem obuditi spomin na vesele urice našega študija.

V Pivnici se je zbralo okoli 200 ljudi, čeprav moramo malce potožiti, da se profesorji plesa niso udeležili v tako velikem številu kot prejšnja leta. Program je bil pester: plesna točka, recitacije ob glasbi pa seveda naš zabavni program. Prava senzacija je bil srečolov, pri katerem ni bilo treba znati verjetnostnega računa, saj so vse srečke zadele. Pa s tem še ni bilo konec presenečenj. Naši fantje so dokazali, da niso samo dobri matematiki, ampak da znajo peči tudi torte. Torta je prišla na originalno licitacijo, ki jo je vodil asistent Pisanski. Za mamljivi dobitek se je vnel boj med skupino fi-fi, tozdom Žeja in moča matematiki. Na koncu je matematikom zmanjkalo denarja in s torto so se sladkali fi-fijevci. Zabava se je končala s plesom in razpoloženje je bilo nadvse veselo.

Katarina Košmelj in *Rajko Sabo*

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE TER RESUMEJI DOKTORSKIH DISERTACIJ V LETU 1977

V tem seznamu objavljamo prvič tudi diplomante iz meteorologije in prvo doktorsko disertacijo iz mehanike. Študij meteorologije je organiziran v okviru oddelka za fiziko FNT. Dosedanji diplomanti so bili objavljeni v slavnostni publikaciji Meteorološka služba — Hidrološka služba — Slovenije, 1947—1977, str. 41. Organiziranega študija mehanike pa na ljubljanski univerzi še ni, čeprav potekajo priprave zanj v okviru oddelka za matematiko in mehaniko FNT že nekaj let.

Seznam diplomantov iz leta 1976 je bil objavljen v Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 219—221.

Ciril Velkovrh

Pedagoška akademija Maribor

Matematika-fizika

147. Butolen Anton
148. Klemen Maks
149. Obreht Anton
150. Vindeg Anica
151. Slaček Marjeta
152. Zavolovšek Jožica
153. Pernek Angela
154. Šarič Miroslav
155. Gosak Vladka
156. Kogej Ida
157. Medved Marija
158. Ojcinger Vera
159. Gosak Darko
160. Slekovec Marjanca
161. Štamberger Jožica
162. Koželj Olga
163. Jarc Angela
164. Šarič Majda
165. Holsedl Marjeta
166. Casar Štefan

Tehnični pouk in fizika

167. Zemljič Miroslav
168. Pungartnik Srečko
169. Marovt Amalija
170. Kramberger Jože
171. Petek Marjan
172. Čeh Ignac
173. Mislej Jelka
174. Jakopec Feliks
175. Herman Jernej
176. Kos Marjana
177. Mavrič Roman
178. Štebih Silva

Pedagoška akademija Ljubljana

Matematika-fizika

435. Ljubišić Ljiljana
436. Seršen Katarina
437. Štrancar Sonja
438. Bratina Marjeta
439. Mrvič Vida
440. Škufca Danica
441. Nikolovski Živko
442. Vedlin Cvetka
443. Kokošinc Marjeta
444. Mertelj Nuša
445. Zadnik Nuša
446. Bevc Marija
447. Černač Jana
448. Stiplovšek Emilija
449. Planinc Frančiška
450. Štefanič Milena
451. Tkalčič Diomira
452. Škrlj Nevenka
453. Žagar Saša
454. Drole Irena
455. Gregorič Emilija
456. Likar Martina
457. Perne Jožica
458. Ambrožič Ivanka
459. Forca Eda
460. Grum Marija
461. Kočevar Ivanka
462. Renčelj Tatjana
463. Simonič Silva
464. Uršič Darinka
465. Glavič Jože
466. Glavič Marija
467. Sirk Vida
468. Steržaj Pavel

Tehnični pouk-fizika

469. Kralj Jože
470. Ažman Marija
471. Brgoč Martina
472. Vučko Stanko
473. Cetinski Edvard
474. Košmrlj Jože
475. Rejc Milan
476. Ažman Milena
477. Cvelbar Milan

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

Matematika — pedagoška smer

285.	Hribar-Košmrl Anka	Ravninska kristalografija
286.	Potočnik-Smolnikar Silva	Reševanje matričnih iger
287.	Volarič Marija	Verižni ulomki in diofantske aproksimacije
288.	Pavlič Gregor	Praštevila v aritmetičnih zaporedjih
289.	Podjed Marta	Matrične igre
290.	Pospeh Vlasta	Statistična neodvisnost v analizi in teoriji števil
291.	Palčič-Uršnik Julijana	Končne diference

Matematika — tehniška smer

136. Blejec Andrej	Matematični modeli v ekologiji
137. Bojadžiev Damjan	Fourierove vrste
138. Panjan Branko	Formalno realni obsegi in Hilbertov 17. problem
139. Alt Zvonka	Teorija aproksimacije funkcij
140. Jamšek Jana	Stabilnost numeričnih metod za reševanje parcialnih diferencialnih enačb
141. Dular Dušan	Cele funkcije eksponentnega tipa
142. Kejžar Bogdan	Nelinearne integralne enačbe
143. Zupančič Polona	Karakterizacija karakterističnih funkcij
144. Brvar Andrej	Dinamika snežnih plazov
145. Kadunc Bojan	Skoraj periodične funkcije
146. Jeran Matjaž	Enakomerna aproksimacija
147. Rovtar Marija	Približno reševanje operacijskih enačb — projekcijsko iteracijska metoda
148. Alkalaj Vladimir	Teorija aproksimacij
149. Lazar Ivan	Racionalne kvadratne norme in Minkowski-Hassejev izrek
150. Drnovšek Ivan	Cele funkcije z realnimi ničlami in problem Polya
151. Urbanc Janko	Subharmonične funkcije
152. Založnik Aleš	Interpolacija v funkcijskih algebrah
153. Legiša Helena	Analiza nekaterih računskih operacij s polinomi
154. Lozej Miro	Analiza nekaterih računskih procesov za reševanje sistemov linearnih enačb
155. Gaborovič Zoran	Linearna teorija slučajnih procesov
156. Kosta-Mramor Nežka	Topološke polgrupe
157. Polanc Ljubomir	Aksiomi algeber analitičnih funkcij
158. Repovš Dušan	Borsukova teorija oblike
159. Magajna Bojan	O projektivnih modulih, vektorskih svežnjih in funkciji K_0
160. Magajna Zlatan	Vlaknenje
161. Stare Janez	Grupa enot v obsegu algebraičnih števil

Fizika — pedagoška smer

44. Obrovnik Vitjan	46. Majerle Igor
45. Lorenčič Ivan	47. Habe Anica

Fizika — tehniška smer

268. Kunsterle Dušan	Študij temperaturne odvisnosti magnetofonoskega efekta
269. Jerman Riko	Optični sistem za recirkulacijo elektronov
270. Glumac Bogdan	Umeritev spektrometra gama za merjenje aktivnosti pragovnih detektorjev
271. Ložar Bojan	Raziskava strukturnih faznih prehodov in mrežne dinamike v listoplastnih perovskitih vrste C_nCdCl in $2C_nCdCl$ z metodo JMR
272. Ulčar Marijan	Študij površinskih stanj na meji med silicijem in silicijevim oksidom
273. Zadravec Dušan	Fizikalne osnove UV in rentgenskih laserjev
274. Mervič Igor	Meritve elektrooptičnih lastnosti tankih plasti tekočih kristalov
275. Miklavčič Milan	Optimizacija metod za določevanje akomodacijskih koeficientov
276. Petek Branko	Prenos toplote v plinu med površinama s poljubno akomodacijo
277. Dušič Milorad	Meritev presekov za reakcije $^{91}Zr(gama, p_2)^{90}Ym$, $^{92}Zr(gama, p_1)^{91}Ym$ in $^{94}Zr(gama, p)^{93}Y$ v območju dipolne veleresonance

278. Hočevar Edvin — Določanje vsebnosti bakra v nekaterih mineralih z jedrsko kvadrupolno resonanco bakra

279. Šmit Žiga — Študij sistema za avtomatsko nevtralizacijo odpadnih vod

280. Kastelič Niko — Greenova funkcija linearizirane Navier-Stokesove enačbe

281. Hozjan Jožef — Interferometrično centriranje optičnih sistemov

Meteorologija

27. Ferlan Milan — Vetrovi v Sloveniji

28. Zupančič Boris — Presoja metod za računanje povprečne dnevne temperature

29. Urbančič Jelko — Vpliv akumulacijskih jezer na meglo, vlago in temperaturo v okolici

Matematika — III. stopnja

7. Hladnik Milan — Odvajanja in avtomorfizmi C* — algeber

V delu se obravnavata dve vrsti operatorjev, delujočih na C^*-algebri A : avtomorfizmi, to je, bijekcije iz A na A, ki ohranjajo algebrsko strukturo, in linearni operatorji $\delta : A \to A$ z lastnostjo $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ $(x, y \varepsilon A)$. Slednja se imenujejo odvajanja (derivacije) algebre A. Skušano je čim natančneje raziskati zvezo med odvajanji in avtomorfizmi dane C*-algebre ter določiti odnose med raznimi podgrupami avtomorfizmov.

V prvem poglavju je dokazan izrek, da je v von Neumannovi algebri vsako odvajanje notranje, to je, definirano z elementom iz algebre. S tem izrekom si je avtor odločilno pomagal pri nadaljnji obravnavi. Vsako C*-algebro namreč lahko predstavi kot algebro operatorjev na nekem Hilbertovem prostoru, odvajanja in avtomorfizme pa lahko pri nekaterih pogojih razširimo na njeno šibko zaprtje, ki je von Neumannova algebra.

Okoliščine, pri katerih je omenjena razširitev mogoča, so opisane v drugem poglavju. Precejšnja pozornost je posvečena tudi notranjim odvajanjim in notranjim avtomorfizmom ter njihovi medsebojni zvezi. Prav tako se proučuje vprašanje, kdaj avtomorfizem C*-algebre leži na enakomerno zvezni enakoparametrični podgrupi v grupi vseh avtomorfizmov. Pri tako imenovanih simetričnih ali *-avtomorfizmih sta izpeljana dva zadostna pogoja za to, je pa še nedognano, če sta neodvisna drug od drugega.

Simetrični avtomorfizmi se raziskujejo še nadalje. Zanje so definirane razne podgrupe, med katerimi so dokazane številne relacije. V posebnih C*-algebrah (von Neumannovi, postliminarni), ki so obravnavane na koncu, mnoge izmed teh podgrup sovpadajo.

8. Dobovišek Mirko — Algebre med H^∞ in L^∞

Algebro H^∞ omejenih analitičnih funkcij na enotnem krogu lahko s prehodom na robne funkcije identificiramo z zaprto podalgebro algebre L^∞ na krožnici. Vsako zaprto algebro, ki vsebuje algebro H^∞ in je vsebovana v algebri L^∞, imenujemo algebra med H^∞ in L^∞. Algebre med H^∞ in L^∞, ki pa so generirane s H^∞ in z množico kompleksnih konjugirank notranjih funkcij, imenujemo Douglasove algebre, ker je Douglas leta 1968 postavil domnevo, da so vse algebre med H^∞ in L^∞ tako generirane.

V delu je prikazan dokaz te domneve. V prvem, drugem in tretjem poglavju je dokazanih nekaj lastnosti prostorov maksimalnih idealov algeber med H^∞ in L^∞, Carlesonov izrek in Carlesonova klasifikacija interpolacijskih zaporedij zato, da se v četrtem poglavju lahko dokaže, da je prostor maksimalnih idealov vsake algebre med H^∞ in L^∞ enak prostoru maksimalnih idealov neke Douglasove algebre. V petem poglavju je s pomočjo enakosti teh dveh prostorov maksimalnih idealov dokazano, da sta tudi algebri enaki. V zadnjem poglavju pa je podan še dokaz posplošitve Chang-Marshallovega izreka in Wermerjevega izreka na algebre med $H^\infty \cap C_B$ in C_B, kjer je C_B C*-algebra generirana in z B obrnljivimi Blaschkejevimi produkti in je B algebra med H^∞ in L^∞.

Fizika — III. stopnja — pedagoška smer

1. Prelog Peter	Fresnelova conska mrežica*
2. Šulek Drago	Nelinearna optika v pouku fizike
3. Dolenšek Jožica	Uporaba matrik v srednješolski fiziki
4. Oblak Seta	Prikaz jedrske magnetne resonance s prosto precesijo jeder v šibkem magnenem polju
5. Ferbar Janez	Nernstov zakon

Fizika — III. stopnja — tehniška smer

50. Golli Bojan	Novi pogoji za dvodelčno gostotno matriko
51. Čopič Martin	Brillouinovo sipanje v tekočih kristalih
52. Rutar Veceslav	Študij feroelektričnega faznega prehoda v KD_2PO_4 s pomočjo kemičnega premika ^{31}P
53. Luzar-Vlachy Metka	Spin-mrežna relaksacija in lastna difuzija v tekočem kristalu TBBA
54. Kranjc Tomaž	Dinamika tunelskega sistema (XY_8) v alkalnih halogenidih

Matematika — doktorske disertacije

14. Kramar Edvard — Lokalno konveksni topološki vektorski prostori s Hilbertskimi polnormami

V delu so obravnavani lokalno konveksni topološki vektorski prostori, katerih topologija se da definirati z neko družino polnorm, ki imajo še lastnost, da jih lahko izrazimo s polskalarnimi produkti.

V takih prostorih, nakratko imenovanih H-lokalno konveksni prostori, je vpeljan pojem ortogonalnosti vektorjev, izražanje linearnih zveznih funkcionalov, definiran je pojem adjungiranega operatorja in proučevane so nekatere njegove lastnosti. V naslednjih poglavjih se študira struktura algeber operatorjev, ki delujejo v takem prostoru. Med temi algebrami je najti operatorsko algebro, ki je primer tako imenovane LMC^*-algebre in je posplošitev C^*-algebre.

V zadnjem poglavju je dokazana za poljuben sebi adjungiran operator v H-lokalno konveksnem prostoru njegova spektralna razčlenitev.

15. Legiša Peter — Hermitski operatorji in izometrična struktura Banachovih prostorov

Obravnavana snov sodi bolj ali manj v izometrično strukturo Banachovih prostorov. Prvi razdelek je posvečen izometričnim reprezentacijam von Neumannovih algeber na Banachovih prostorih. Če obstaja izometrična upodobitev (ohranjajoča identiteto) faktorja tipa I na Banachovem prostoru X, je ugotovljeno, da mora X vsebovati Hilbertove podprostore in imeti (zlasti v nekaterih specialnih primerih) tudi sicer zanimivo strukturo.

Če imamo na X naraščajoče posplošeno zaporedje hermitskih projektorjev z določenimi lastnostmi, je pokazano, da obstaja naravna izometrična reprezentacija von Neumannove algebre tipa I na X in da X nekako razpade na Hilbertove podprostore. To je uporabljeno pri kompleksnih Banachovih prostorih s hiperortogonalno bazo in poleg že znanih so dobljeni tudi novi rezultati.

Druga polovica dela je posvečena iskanju zadostnih pogojev za to, da je grupa $\mathcal{G}$ vseh linearnih izometrij Banachovega prostora X nase Banach-Liejeva grupa v normni topologiji. Najdena pogoja zahtevata, da obstajata dovolj majhni okolici $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ identitete v $\mathcal{G}$, tako da lahko vsak element iz $\mathcal{V}$ povežemo z identiteto s potjo po $\mathcal{U}$, ki je bodisi odvedljiva bodisi ima končno dolžino. Pokazano je, da je $\mathcal{G}$ Banach-Liejeva grupa, če je X kompleksen in ima hiperortogonalno bazo.

---

* Ta diploma je bila opravljena že leta 1976

16. Vukman Joso — **Involucija v algebri omejenih linearnih operatorjev Banachovega prostora**

V delu je obravnavan problem involucije v algebri omejenih linearnih operatorjev $L(X)$ realnega ali kompleksnega Banachovega prostora X. Sprašujemo se, kako vpliva involucija, definirana na $L(X)$, na strukturo prostora X. Delo je sestavljeno iz dveh delov. V prvem je obdelan z običajnimi sredstvi funkcionalne analize, v drugem pa so uporabljene metode in rezultati iz teorije Banachovih algeber z involucijo. Najprej je opisano, kaj se da povedati o realnem ali kompleksnem Banachovem prostoru X, če je na algebri $L(X)$ definirana involucija brez kakršnih koli dodatnih zahtev. Izkazalo se je, da je X v tem primeru nekakšna posplošitev Hilbertovega prostora. Nekaj časa se avtor ukvarja s tem prostorom, potem pa preide na karakterizacije Hilbertovih prostorov in prostorov z ekvivalentno Hilbertovo normo. Od involucije v $L(X)$ se zahtevajo različne algebraične ali metrične lastnosti in na podlagi tega je dokazano, da je prostor X izomorfen Hilbertovemu prostoru ali da je celo Hilbertov prostor. Pri vseh rezultatih v prvem delu zadošča, da je involucija definirana le na podalgebri algebre $L(X)$, ki vsebuje vse izrojene operatorje iz $L(X)$. V drugem delu je Banachov prostor X ves čas kompleksen. Involucija je definirana na takšni podalgebri algebre omejenih lineranih operatorjev, ki deluje na prostoru X tranzitivno. Dokazi rezultatov drugega dela slonijo v veliki meri na metodi, ki jo je izdelal profesor dr. Niko Prijatelj v svoji disertaciji.

17. Rupnik Viljem — **Zvezna posplošitev metod simpleksov v prostoru omejitvenih in kriterialnih koeficientov, ki so zvezne funkcije**

Običajno linearno programiranje se ukvarja s problemom najti funkciji $c(x)$ ekstremno vrednost, pri čemer vektor x zadošča pogoju $Ax = b$ ter pogoju nenegativnosti. Naloga je razširjena na primer, kjer je $c(t)$ vektor s komponentami, ki so enolične, omejene in zvezne ter vsaj enkrat odvedljive realne funkcije realnega skalarnega parametra t; vektor $b(t)$ je enake narave, le da za njegove komponente zahtevamo nenegativnost za vsak $t \in [o, T]$; komponenta a_{ii} matrike A reda $m\,n$ so realna končna števila; rešitvena funkcija $x(t)$ pa je enake narave kot $b(t)$, le da je zanjo dopustna zveznost po odsekih. Za tako oblikovano nalogo — najti opt $c(t)\,x(t)$ pri pogojih $Ax(t) = b(t)$, $x(t) \geqslant$ o — je dokazana eksistenca odsekoma stacionarnih bazičnih možnih rešitev za primer trivialne in netrivialne rešitve in tudi eksistenca optimalne rešitve $x(t)$. Obravnavana je tudi degeneracija za zgornjo nalogo in prav tako za posamezne primere, ko je $b(t) = b_0$ ali pa $c(t) = c_0$. Osvetljena je zgradba množice zvezno posplošenih simpleksnih transformacij, ki jih določa iteracijski postopek reševanja naloge. Zvezno spreminjajoči se konveksni polieder zaradi narave znanih funkcij v problemu zagotavlja končnost iteracijskih korakov. Eksistenčni izreki omogočajo tudi rešitev naloge z $A(t)$, kjer so komponente enake narave kot $c(t)$.

Zgornja naloga zveznega dinamičnega linearnega programiranja je po svoji naravi zvezni neterminalni problem upravljanja z gibljivim robom na spremenljivi enoparametrični desni lupini. Predložena posplošitev je hkrati razširjava parametričnega linearnega programiranja v smeri nelinearne parametrizacije istočasno v namenski funkciji in omejitvah.

Mehanika — doktorske disertacije

1. Vencelj Peter — **Vpliv prostih in vezanih vrtincev na tok v turbinah z velikim številom lopatic in primerjava z eksperimentom**

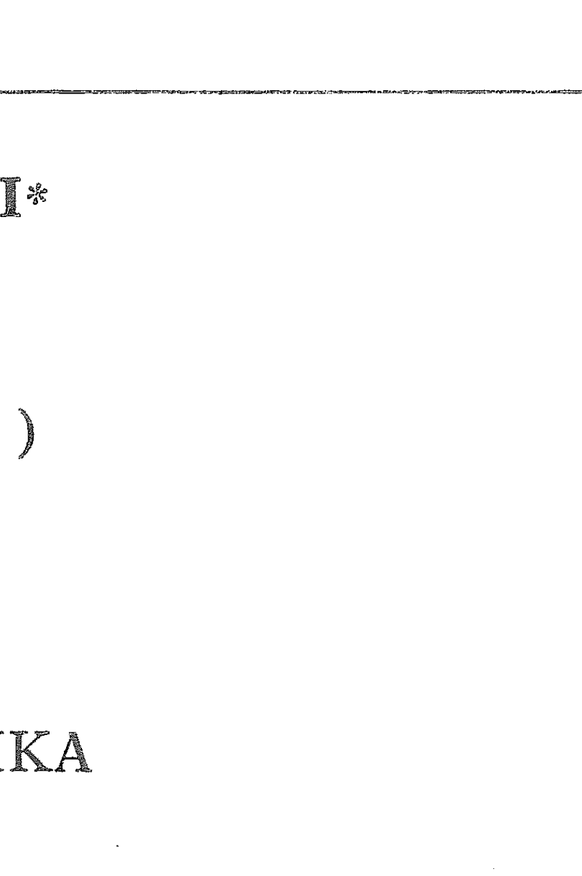
Delo je razdeljeno na tri dele. V prvem delu so zbrane splošne zakonitosti gibanja zvezne snovi obenem z osnovami klasične hidromehanike. Posebna skrb je namenjena oblikovanju gibalnih enačb in drugih zakonitosti v splošnih koordinatah, tako v inercialnih kot tudi v neinercialnih sistemih. Pri obravnavi tokovnih razmer v turbinskih strojih je namreč ugodno napisati enačbe tudi v sistemih, ki se gibljejo skupaj z vrtečimi se deli stroja. Razmeram v turbinskih strojih je posvečen drugi del, ki obravnava le stroje z velikim številom lopatic. Pri takih strojih je vsaj v

povprečju tok osnosimetričen. Poseben poudarek je na vrtinčnem toku, znanem kot Beltramijev tok, in na oblikovanju prehodnih pogojev iz enega v drugo območje stroja. S tem so dane možnosti za obravnavanje tokovnih razmer istočasno v več delih stroja, čemur se večina avtorjev, ki se ukvarjajo s to problematiko, izogiblje. Računsko je namreč takšna naloga precej zahtevna. V tretjem delu je podan postopek, kako obravnavati tok istočasno skozi dve območji stroja. Začetni nelinearni problem je preveden z Newtonovo metodo na zaporedje linearnih nalog. Posamezna linearna naloga se rešuje z metodo končnih elementov. Na razpolago so bili eksperimentalni rezultati za turbino z oznako AK-6. Narejen je bil izračun za to turbino za več režimov obratovanja in opravljena primerjava z eksperimentom. Razlika med izračunanimi in izmerjenimi vrednostmi ni skoraj nikjer večja od nekaj procentov.

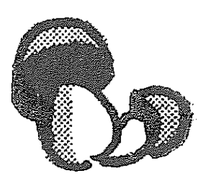
UTRINEK

ZGODBA O RDEČI KAPICI*

```
//JOB T
      WRITE ( 3,100 )
100   FORMAT ( 21H ZGODBA O RDEČI KAPICI )
      RK = RDEČA KAPICA
      CALL RK
      GO TO BABICA
      LOAD KOŠARA
      KOŠARA = POGAČA + SADJE + HERMELIKA
      RETURN DO DVEH
      CONTINUE
      CALL ŽIVAL
      READ VOLK
      FUNCTION BITI ZLOBEN
      DIMENSION VELIK
      DO POJEJ 1 , 2
1     RDEČA KAPICA
2     BABICA
      CONTINUE
      CALL LOVEC
      LOAD GUN
      DIMENSION 45MM
      SUBROUTINE BOOM
      EXTENDED PRECISION
      IF VOLK ZADET
      GO HOME
      CALL EXIT
      HAPPY END
```



CØNTINUE



* Ta zgodba je iz zabavnega programa, katerega so pripravili študenti matematike in fizike na lanskem brucovanju

NAGRAJENCI SKLADA BORISA KIDRIČA V LETU 1978*

Sklad Borisa Kidriča je letos podelil za pomembne znanstveno-raziskovalne dosežke, izume in izpopolnitve pet Kdričevih nagrad, šestnajst nagrad Sklada Borisa Kidriča ter sedemnajst nagrad za izume in izpopolnitve. Med nagrajenci je tudi sedem članov našega društva.

Ciril Velkovrh

NAGRADE SKLADA BORISA KIDRIČA

Prof dr. Andreju Hočevarju in sodelavcu **mag. Jožetu Rakovcu** za razpravo *Splošni modeli circum-globalnega in kvazi-globalnega sevanja na hribih z enostavno geometrijsko obliko,* objavljeno v dveh člankih leta 1977.

Razprava *Splošni modeli circum-globalnega in kvazi-globalnega sevanja na hribih z enostavno geometrijsko obliko,* ki je bila objavljena v znani mednarodni reviji Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, podaja zaokrožen teorijski model za računanje circum-globalnega in kvazi-globalnega obsevanja pri različnih oblikah reliefa in ob poljubnem stanju atmosfere. Delo prinaša bistveno nove ideje pri oceni obsevanja na razgibanem reliefu. Upoštevani so vsi odločilni astronomski in meteorološki parametri. Računski model upošteva poleg astronomskih parametrov še propustnost in sipanje svetlobe v atmosferi, vrsto in stopnjo oblačnosti, trajanje sončnega obsevanja, orientacijo in nagib reliefa ter tudi optične lastnosti okolice. Rezultati računov za obsevanje na hribu stožčaste oblike so bili preverjeni z meritvami v naravi. Pomen dela je predvsem v tem, da sta avtorja pri računanju sončnega obsevanja sistematično upoštevala reliefne značilnosti in meteorološke razmere ter izpeljala ustrezen računski model. Raziskava je pomemben prispevek k možnosti ocene enega najpomembnejših meteoroloških parametrov za rast in razvoj rastlin in je zaradi razgibanosti terena v Sloveniji za nas posebno zanimiva.

Dr. Danici Burg-Hanželovi za šest razprav s področja raziskav feromagnetikov, antiferomagnetikov in supraparamagnetikov s pomočjo mössbauerske spektroskopije, objavljenih v letih 1976 in 1977.

Dr. Burg-Hanželova že vrsto let proučuje hiperfina magnetna polja na mestu mössbauersko aktivnih jeder v fero- in antiferomagnetnih snoveh z brezodrivno resonančno absorpcijo žarkov gama. V zadnjih dveh letih je v uglednih mednarodnih revijah objavila vrsto pomembnih eksperimentalnih rezultatov, zbranih v šestih razpravah: Študija tiksotropnega beta — FeOOH z Mössbauerjevim efektom, Mössbauerjeva študija $SrEu_2Fe_2O_7$; Enodimenzionalni magnetizem v $N_2H_6FeF_5$; Eno — in dvodimenzionalni antiferomagnetizem v nekaterih železovih fluoridih; Mössbauerjeva študija $SrTb_2Fe_2O_7$; Študija antiferomagnetnega $XeFeF_9$. Posebej je treba omeniti prikaz odvisnosti magnetnih lastnosti železovih spojin od dimenzionalnosti kristalne mreže. Izmerjeni so bili izmenjalni integrali med spini v verigi in med verigami pri vrsti sistemov, ki kažejo antiferomagnetno ureditev v eni, dveh ali treh dimenzijah. Določeni so bili kritični eksponenti v bližini faznih prehodov in izmerjene korelacije med spini v dveh in treh dimenzijah nad Neelovo temperaturo. Osvetljena je bila narava tiksotropne faze. Delo je znaten prispevek z razumevanju strukture nekaterih fero- in antiferomagnetikov in k nadaljnji uporabi mössbauerske spektroskopije za študij faznih prehodov in razvoj novih materialov, ki so pomembni v železarstvu in elektronski industriji.

Dr. Matjažu Žaucerju in sodelavcema mag. Danielu Pumperniku in **Milanu Hladniku, dipl. ing. mat.** za dosežke pri teoretični obravnavi magnetnih lastnosti molekul.

---

* Seznam lanskih nagrajencev smo objavili v Obzorniku mat. fiz. **24** (1977), str. 157.

V štirih delih, objavljenih v letih 1976 in 1977 v uglednih mednarodnih revijah, je razvit račun kemijskega premika v jedrski resonanci in magnetne susceptibilnosti molekul iz osnovnih podatkov. Osnovan je na uporabi gradientno invariantnih atomskih funkcij, ki eksplicitno vsebujejo zunanje polje, pri čemer pa ni treba uporabiti polne množice bazičnih funkcij. Avtorji so pokazali, da so rezultati računa magnetnih lastnosti neodvisni od izhodišča vektorskega potenciala magnetnega polja. Pokazali so tudi, da so vsi integrali v Hartree-Fockovi hamiltonki analitično rešljivi, če so atomske funkcije Gaussovega tipa. Metoda je tako zanesljiva, da se lahko določijo: vpliv števila osnovnih funkcij, spremembe energije posameznih orbital, njihovi prispevki h kemijskemu premiku in tako dalje.

V teh in posebej v treh nadaljnjih delih so izračunani primeri, ki omogočajo primerjavo z eksperimentalnimi količinami. Ujemanje je odlično. Posebno pomembni so izračuni susceptibilnosti, ki so doslej edini popolnoma gradientno invariantni. Prav tako pomembni so rezultati energetskih bilanc pri tvorbi molekul v močnih magnetnih poljih. Slednji kažejo, da je tvorba molekul v teh razmerah preferirana. Ta rezultat se da uporabiti pri razlagi nastajanja večjih molekularnih sistemov v vesolju.

NAGRADE ZA IZUME IN IZPOPOLNITVE

Doc. dr. Marjanu Hribarju in mag. Petru Rupniku za izpopolnitev *Sonda za določanje koncentracije Hg v stenah vrtin.*

Merilne naprave za merjenje Hg v vzorcih, na čelih odkopov ter v vrtinah so zasnovane na modernih fizikalnih metodah — rentgenski fluorescenčni analizi ter analizi comptonskega sevanja. Metode same so sicer znane, vendar so delali do zdaj predvsem s pulveriziranimi kamninami. Merjenje vsebnosti Hg v vrtinah pa je novost.

Takšno merjenje omogoča racionalizacijo vrtanja ter bistveno skrajša analitične postopke pri določanju vsebnosti Hg v vzorcih kamnin in jedru vrtin.

Omenjena sonda se uporablja v rudniku živega srebra v Idriji.

Prof. dr. Jožetu Pahorju, Milanu Petroviču, **Žigi Šmitu, dipl. ing.** in Edvardu Šeferju, dipl. ing. za izpopolnitev *Naprava za kontinuirano avtomatsko večstopenjsko kontrolo razstrupljevanja tekočih odpadkov pri industrijskih galvanikah.*

Omenjena naprava rabi za kontinuirano in avtomatsko nevtralizacijo in obarjanje kovinskih hidroksidov odpadnih vod pri industrijskih galvanikah. Prednost naprave je v kontinuirnem doziranju nasproti doslej uporabljenim napravam, ki so dozirale po porcijah.

Prednost domače naprave je poleg nižje cene in zmanjšanja uvoza tudi v tem, da je mogoča montaža in da je tudi servis enostavnejši.

Doslej je ena taka naprava že vgrajena, drugih šest je pa tik pred vgraditvijo.

Jerneju Böhmu, dipl. ing., **Banu Dallu, dipl. ing., Janezu Krajniku, dipl. ing., prof. dr. Sergeju Pahorju**, dr. Jožeu Šnajderju, **Miranu Tiringerju dipl. ing., Janezu Cerarju, dipl. ing.**, prof. dr. Marjanu Erjavcu, mag. Milanu Sokliču, dipl. ing. za izpopolnitev *JANUS 3 računalniški sistem za zbiranje in obdelavo podatkov v nuklearni medicini.*

JANUS 3 je računalniški sistem za zbiranje in obdelovanje podatkov v nuklearni medicini, ki povezuje trikanalni renograf, dvokanalni scintigraf in Angerjevo kamero.

To je prvi doma zasnovani in realizirani sistem, ki vsebuje vse standardne obdelave v nuklearni medicini, prav tako pa omogoča tudi raziskovalno delo na tem področju ter je odprt za nadaljnje dopolnjevanje nuklearne instrumentacije za medicinsko diagnostiko.

Sistem je instaliran in deluje že nekaj let v kliničnem centru.

ODGOVORI

Vprašanje 46, Obzornik mat. fiz. **6** (1957/58), 43:

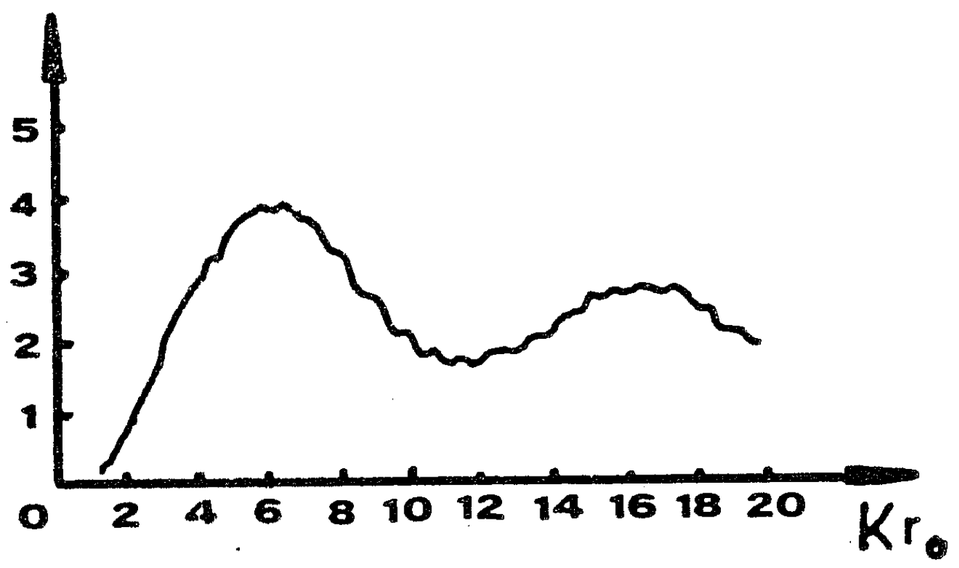
Cigareta, iz katere smo pravkar posrkali dim, se kadi na obeh konceh. Iz tlečega konca se vije modrikast dim, na drugi strani pa je dim čisto bel. Kako naj si razložimo to razliko v barvi?

Razlika v barvi nastane zaradi različnega sipanja svetlobe [1]. Delci dima, ki se dvigajo iz tlečega krajišča cigarete, so namreč manjši od tistih, ki se dvigajo iz ustnika. Ustni del cigarete je vlažen in vlaga se kondenzira na delcih dima, ki se vije iz tega krajišča. Razmeroma debele vodne kapljice, ki pri tem nastanejo, sipljejo vse sestavine bele svetlobe približno enako, manjši delci s tleče strani cigarete pa sipljejo predvsem modro svetlobo, zato je tam dim modrikast.

Kapljice katrana v dimu, ki se dviga iz žarečega krajišča, so kroglice s polmerom r_0, ki je precej manjši od valovne dolžine vpadajoče svetlobe λ. Značilna količina za sipanje valovanja na oviri je sipalni presek σ, ki ga definiramo kot razmerje med časovnim povprečjem energijskega toka sipanega valovanja in časovnim povprečjem gostote energijskega toka vpadajočega valovanja [2], [3]. Podroben račun za majhno dielektrično kroglico z dielektričnostjo ε je prvi naredil angleški fizik, Nobelov nagrajenec l. 1904 J. W. Strutt-lord Rayleigh (1842—1919). Po njem se rezultat imenuje Rayleighova formula [2], [4], [5]:

$$\sigma = \tfrac{8}{3}\,\pi r_0^2 (kr_0)^4 (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)$$

Pri tem je $k = 2\pi/\lambda$. Sipalni presek je obratno sorazmeren s četrto potenco valovne dolžine vpadajoče svetlobe: $\sigma \propto \lambda^{-4}$, toda le če je $kr_0 \ll 1$. Razberemo, da se siplje modra svetloba v tem primeru znatno močneje od rdeče. To je že pred Rayleighom (1868) opazil angleški fizik J. Tyndall, po katerem pojav tudi imenujejo [6].



Sl. 1. Sipalni presek okrogle kapljice vode za svetlobo; na ordinatno os je naneseno razmerje med sipalnim presekom σ in geometrijskim presekom πr_0^2, na abscisno os pa količina $kr_0 = 2\pi r_0/\lambda$. Slika je iz knjige *Fizičeskij enciklopedičeskij slovar'*, Moskva, Sovjetskaja enciklopedija 1965, IV. del, str. 353

Rezultat računov za večje kapljice kaže (sl. 1), da ni več tako močne odvisnosti od valovne dolžine [7], zato na kapljicah megle, ki se vije iz ustnika, ne pride več do tako selektivnega sipanja. Zlasti velja to za sipanje na množici neenako velikih kapelj, kajti pri tem se razmažejo interference, ki jih še opazimo pri posamezni kaplji.

Dušan Repovš

LITERATURA

[1] Repovš D., *Dve vprašanji*, Presek **2** (1974/75) 4, str. 181.

[2] Wallace P. R., *Mathematical Analysis of Physical Problems*, Holt, New York, Rinehart and Winston 1972, str. 274—281.

[3] Strnad J., *Moderna fizika*, I. del, Ljubljana 1972, str. 67.

[4] Morse P. M., Feshbach H., *Methods of Theoretical Physics*, Part II, New York, McGraw-Hill, 1953, str. 1066—1070 in 1882—1884.

[5] Hardy A. C., Perrin F. H., *The Principles of Optics*, New York, McGraw-Hill 1932, str. 166—167.

[6] Tyndall J., Proc. Roy. Soc. **17** (1868—69), str. 223.

[7] Van de Hulst H. C., *Light Scattering by Small Particles*, New York, J. Willey, 1957.

PREJELI SMO V OCENO

Jack E. Graver, Mark E. Watkins, Combinatorics with emphasis on the theory of graphs (Graduate Texts in mathematics; 54), 1977, Springer-Verlag, New York Inc. (xv + 351 str.)

Kombinatorika z vsemi svojimi vejami, predvsem s teorijo grafov, se je v zadnjih letih močno razvila. Zato se je pokazala potreba po enotnem pristopu k tej bogati matematični smeri. Mnogo sorodnih rezultatov, ki so nastali v različnih vejah kombinatorne matematike, je mogoče v dovolj splošni teoriji postaviti na skupni menovalec. Graver in Watkins sta v knjigi poskusila začrtati tako teorijo in reči moramo, da jima je poskus tudi uspel.

Za osnovno kombinatorično strukturo vzameta **sistem** (V, f, E), to sta končni množici **točk** V in **blokov** E ter preslikava f, ki vsakemu bloku priredi neko množico točk. Izkaže se, da je mogoče večino znanih kombinatoričnih struktur gledati kot sisteme. To so npr. grafi, multigrafi, psevdografi in celo hipergrafi. Hipergrafi so v bistvu sistemi z nekaterimi malenkostnimi omejitvimi. Sistemi pa so tudi matroidi in načrti (»designs«), med katere sodijo npr. Steinerjevi trojni sistemi, končne projektivne ravnine in taktične konfiguracije.

Naštejmo še poglavja: Končne množice, Algebrajske strukture nad končnimi množicami, Multgrafi, Omrežja (Networks), Prirejanja in sorodne strukture, Separacija in povezanost v multigrafih, Kromatična teorija grafov, Dva slavna problema, Načrti, Teorija matroidov, Enumeracija. Seveda je treba omeniti še Bibliografijo, Indeks simbolov in Stvarno kazalo.

Knjigo odlikuje dobro organizirana zgradba in pa matematična strogost, ki je sicer popestrena z zgledi, vendar nikoli ne zdrsne z algebraičnega na intuitivni nivo. V knjigi zasledimo kopico zanimivih rešitev. Tako na primer avtorja obravnavata planarne grafe popolnoma kombinatorično, brez bojazni, da bi »nazornost« oziroma »čudni« topolški rezultati razvrednotili veljavnost dokazov. Trik, ki ga uporabita, je preprost. Znano je, da obstaja več karakterizacij planarnih grafov. Avtorja sta izbrala MacLaneov kriterij za definicijo planarnih grafov in za tem izpeljala večino pomembnih rezultatov (Eulerjev obrazec, izrek Kuratowskega, Jordanov izrek — za grafe itd.) popolnoma korektno in vendar brez topoloških argumentov.

Zanimiv je tudi znani izrek Forda in Fulkersona o pretokih, ki je v knjigi primerno posplošen, tako da je z njim enostavno izpeljati rešitev prirejanja v bipartitnih grafih in dokazati Mengerjev izrek.

Knjiga bo zanimala predvsem matematike. Čeprav jo načelno lahko bere vsak študent že po prvem letniku, je v celoti morda pretežka za prvi stik s kombinatoriko. Zaradi sistematike, ki jo uvaja, pa bo verjetno kmalu nepogrešljiva vsem, ki se s kombinatorno matematiko ukvarjajo.

Tomaž Pisanski

Lars Gårding, Encounter with Mathematics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977, 270 strani.

Star in nespravljiv spor med avtorjem in knjigotržcem se odvija in zavija ob vprašanju: komu je knjiga namenjena? Na prvi pogled bi moralo biti ob poljudnih knjigah vse prav in duhovi enotno ubrani. Poljudna knjiga je pač namenjena najširšemu bralstvu, odpira naj mu poglede in razglede po neznanem, po vsem, »kar tako ljubosumno skriva elitizem visoke znanosti«. Drugi, manj očarani pogled pa nam razkrije, da ni tako, v matematiki že ne. Vsak korak v matematiko je naporen, prvi, drugi in vsi, ki jima sledijo. Na vsaki stopnici izobrazbe pa bi človek rad pogledal naprej, rad bi zvedel, kaj ga lepega in zanimivega čaka, ko bo zbral moči za naslednji korak. Zato se da poljudna knjiga pisati za različne ravni, od tabulae rasae (izključeno) do elite (vključeno).

Iz takega spoznanja je zrasla nadvse zanimiva knjiga Larsa Gårdinga *Srečanje z matematiko* (morda je ustreznejši prevod naslova *Spopadanje z matematiko*). Namenjena je bralcu na drugi in tretji stopnici, študentu matematike na primer. Bralca, že navajenega na naporno vrtanje v matematično besedilo, bi rada poučila o sodobni matematiki, s čim se ukvarja in kako reči streže. Naslovi poglavij:

Modeli in realnost. Teorija števil. Algebra. Geometrija in linearna algebra. Limite, zveznost in topologija. Herojski vek. Diferenciranje. Integriranje. Vrste. Verjetnost. Uporaba. Sociologija, psihologija in pouk matematike. Dodatek.

o namenih še nič ne povedo, iz njih ne moremo prebrati, ali gre za sodobno knjigo ali ne. Zgovornejši pa so naslovi razdelkov. Na slepo izberimo na primer poglavje o algebri z razdelki: *Teorja enačb. Kolobarji, obsegi, moduli in ideali. Grupe. Dokumenti.* Druga polovica četrtega poglavja: *Normirani linearni prostori. Omejenost, zveznost in kompaktnost. Hilbertov prostor. Adjungiranost in spektralni izrek. Dokumenti.* Nekaj razdelkov iz sedmega poglavja o diferenciranju: *Diferencialne enačbe. Parcialne diferencialne enačbe. Diferencialni račun na mnogoterostih. Dokument.* Iz desetega poglavja: *Vsote slučajnih spremenljivk. Zakon velikih števil in centralni limitni izrek. Verjetnost v fiziki. Dokument.*

Zadnji razdelek v vsakem poglavju je prepuščen pomožni učiteljici zgodovini. Matematika govori živ jezik, kar živi, pa se spreminja. Matematično odkritja pripovedujemo danes drugače kot ob njihovem nastanku. Zato je z majhnim izvlečkom iz tega ali onega osnovnega dela pričaran okvir, ki ga je teorija nosila ob svojem rojstvu. Zgodovinski poti je posvečeno tudi vse šesto poglavje, ki govori o začetkih matematične analize v herojskem sedemnajstem stoletju.

Zgledi, s katerimi pojasnjuje današnjo podobo matematike, niso vselej elementarni. V knjigi srečamo tudi težke izreke z vsemi dokazi, na primer obrat Fourierove transformacije in Hilbertov izrek o ničlah polinomskih idealov. Avtorju se je pač posrečilo te dokaze tako lepo izbrusiti, da jih je lahko vdelal v poljudno delo.

France Križanič

V LETU 1977 SMO PREJELI NASLEDNJE REVIJE V ZAMENO ZA OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1. ACTA ARITHMETICA, Warszawa 1977, Vols 32, 33, 34.
2. ACTA UNIV. CAROLINAE, Math. phys., Praga 1977, Vol. 18.
3. ACTA UNIV. OULUENSIS, Ser. A. Astr., Oulu 1973, No. 1.
4. ACTA UNIV. OULUENSIS, Ser. A. Math., Oulu 1972, No. 1; 1973, Nos 2, 3, 4, 5, 6; 1974, Nos 7 8; 1975 Nos 9, 10, 11; 1976, No. 12; 1977, No. 13.
5. ACTA UNIV. OULUENSIS, Ser. C. Nucleonica, Oulu 1976, No. 2.
6. ACTA UNIV. OULUENSIS, Ser. A. Phys., Oulu 1973, Nos 3, 4; 1974, Nos 5, 6; 1975, Nos 7, 8, 9, 10, 11; 1976, No. 12; 1977, No. 13.
8. ANALELE STI. UNIV. AL. I. CUZA DIN IASI, Math., IASI 1977, T. 23.
9. ANALELE UNIV. BUCARESTI, Fiz., Bucaresti 1977, Anul 26.
7. ALGEBRA I LOGIKA, Novosibirsk 1977, T. 16.
10. ANALELE UNIV. BUCARESTI, Mat., Bucaresti 1977, Anul 26.
11. ANALELE UNIV. TIMISOARA, Fiz.-chim., Timisoara 1973, Vol. 11; 1974, Vol. 12.
12. ANNALES ACAD. SCI. FENNICAE, Math., Helsinki 1977, Vol. 3., F. 1.
13. ANNALES ACAD. SCI. FENNICAE, Math. Dissertationes, Helsinki 1977, 12.
14. ANNALES POLONICI MATH., Warszawa 1977, T. 34, 35.
15. ARKIV MATH., Stockholm 1977, Vol. 15.
16. ASTRONOMSKE EFEMERIDE, Ljubljana 1977.
17. BERICHTE DER GESSELSCHAFT FÜR MATH., Bonn 1977, Nr. 110, 112—116.
18. BOLETIN ACAD. CIENC. FIS. MAT. NATURALES, Caracas 1976, T. 36; 1977, T. 37.
19. BOLETIN SOC. MAT. MEXICANA, Ser. 2., Mexico 1975, Vol. 20; 1976, Vol. 21.
20. BONNER MATH. SCHRIFTEN, Bonn 1977, Nr. 93—101.
21. BULLETIN ACAD. POLONAISE SCI., Math. astr. phys., Varsovie 1977, Vol. 25.
22. BULLETIN DIS. PREV. RES. INST., Kyota 1976, Vol. 26, No. 1, 2.
23. BULLETIN FUKUOKA UNIV. EDUC. NATURAL SCI., Fukuoka 1977, Vol. 27.
24. BULLETIN INST. MATH., Taipei 1977, Vol. 5.
25. BULLETIN SCI., Zagreb 1977, Vol. 22.
26. BULLETIN SOC. MATH. FRANCE, Paris 1977, T. 105.
27. BULLETIN SOC. SCI. LETTRES LODZ, Lodz 1965—1976, Vols 16—26.
28. CERCETARI OPERATIONALE STATISTICA, Timisoara 1976, 1977, Nos 4—6.
29. COLLOQUIUM MATH., Warszawa 1977, Vols 37, 38.
30. COMMENTATIONES MATH. UNIV. CAROLINAE, Praga 1977, T. 18.
31. ČEŠKOSLOVENSKI ČASOPIS PRO FYZIKU, Praga 1977, Vol. 27.
32. DIFFERENCIAL'NYE URAVNENIJA, Minsk 1977, T. 13.
33. DOKLADY AN BSSR, Minsk 1969—1974, T. 13—18.
34. DOKLADY BOLGARSKOJ AN., Sofija 1977, T. 30.
35. ECONOMIC COMPUT. ECONOM. CYBERNETIC STUD. RES., Bucaresti 1977.
36. ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK, Ljubljana 1977, leto 44.
37. FARMACEVTSKI VESTNIK, Ljubljana 1977, leto 28.
38. FIZYKA, Gdansk 1977, Z. 20, Nr. 266.
39. FIZIKA. A Journal exper. theor. physics, Zagreb 1977, Vol. 9.
40. FUNDAMENTA INFORMATICAE Warszawa 1977, Vol. 1, Nu. 2.
41. GALAKSIJA, Časopis za popularizacijo nauke, Beograd 1977, god. 6, 1—12.
42. GLASNIK MAT., Zagreb 1977, T. 12.
43. GODIŠEN ZBORNIK, Sek. A. MAT. FIZ-HEM., Skopje 1975/76, knj. 25—26.
44. GODIŠEN ZBORNIK, Elektromašinski fak., Skopje 1976, knj. 8/9.
45. GODIŠNIK NA VISŠITE UČBENI ZAVEDENIJA, Priložna matematika, Sofija 1974, T. 10; 1975, T. 11.
46. HIROSHIMA MATH. JOURNAL, Hiroshima 1977, Vol. 7.
47. INFORMATICA, Ljubljana 1977, letnik 1, št. 1, 2, 3, 4.
48. IDRIJSKI RAZGLEDI, Idrija 1976, leto 21, št. 3/4.
49. INFORMATION PROCESSING IN JAPAN, Tokyo 1976, Vol. 16.
50. INTERNATIONALE MATH. NACHRICHTEN, Wien 1977, Jahrgang 31.
51. INŽENERNO-FIZIČESKIJ ŽURNAL, Minsk 1965—1976, T. 8—31.
52. JOURNAL FRANKLIN INST., Phyladelphia 1977, Vols 303, 304.
53. LUCRARILE SEMINARULUI GEOM. TOPOLOGIE, Timisoara 1977.
54. MATEMATIČKI LIST ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE, Beograd 1976/77.

55. MATEMATIČKI VESTNIK, Beograd 1977, knj. 1.
56. MATEMATIČKI ZABAVNIK, Beograd 1976, god. 3; 1977, god. 4.
57. MAT. FIZ. LIST UČ. SRED. ŠKOLA, Zagreb 1976/77, god. 27.
58. MAT. FYZ. ŠKOLE, Olomouc 1976/77, ročnik 7.
59. MATHEMATICA SLOVACA, Bratislava 1977, Vol. 27.
60. MATHEMATICAL GAZETTE, London 1977, Vol. 61.
61. MEMORIAS MAT. UNIV. FED., Rio de Janeiro 1977, No. 78—85.
62. METODY DISKRETNOGO ANALIZA, Novosibirsk 1977, T. 30, 31.
63. NOTICES AMER. MATH. SOC., Providence 1977, Vol. 24.
64. NOTIZIARIO UNIONE MAT. ITALIANA, Bologna 1977, Anno 4.
65. NOVICE IJŠ, Ljubljana 1977, leto 15.
66. NUMERUS. Popularno matematičko spisanie za učenici na osnovnoto učilište, Skopje 1975/76, God. 1; 1976/77, god. 2.
67. OSAKA J. MATH., Osaka 1977, Vol. 14.
68. PREPRINT SERIES DEPARTMENT MATH., Ljubljana 1977, Vol. 15.
69. PROCEEDINGS AMER. MATH. SOC., Providence 1977, Vols 62—67.
70. PROCEEDINGS FAC. SCI. TOKAI UNIV., Tokyo 1977, Vol. 12.
71. PROSVETNI DELAVEC, Ljubljana 1977, št. 1—21.
72. PROTEUS, Ljubljana 1976/77, letnik 39.
73. PUBLICATIONS INST. MATH., Beograd 1977, Vol. 21, 22.
74. PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAK., Beograd 1977, Nos. 577—598, 599.
75. RADIOTEHNIKA, Harkov 1977, vyp. 41, 42.
76. RAZPRAVE — PAPERS, Društvo meteorologov Slovenije, Ljubljana 1977.
77. REPORT, Oulu 1970, No. 17, 1971; No. 33—37, 1974; No. 42, 1975; No. 44, 47, 1976; Nos 48, 51—54, 1977; Nos 55—60, 62.
78. REVISTA MATH. HISPANO-AMER., Madrid 1977, Vol. 37.
79. REVISTA UN. MAT. ARGENTINA, Buenos Aires 1977, Nu. 2.
80. REVUE ROUMAINE MATH. PURES APPL., Bucarest 1977, T. 22.
81. RIVISTA MAT. UNIV. PARMA, Parma 1977, Vol. 3.
82. ROZHLEDY MAT-FYZ., Praha 1974—1977, ročnik 53—55.
83. SCRIPTA F.S.N.U.P.B., Physica, Brno 1977, ročnik 7.
84. SEMINARUL ECUATII FUNCTIONELA, Timisoara 1977.
85. SEMINARUL TEORIA FUNCTILOR MAT. APLICATE, Timisoara 1977.
86. SERDIKA, Sofija 1977, Vol. 3.
87. SODOBNA PEDAGOGIKA, Ljubljana 1977, Vol. 28.
88. STUDIA UNIV. BABES-BOLYAI, Phys., Cluj 1977, Anul 22.
89. STUDIA UNIV. BABES-BOLYAI, Math., Cluj 1977, Anul 22.
90. STUDII CERT. MAT., Bucaresti 1977, T. 29.
91. TEHNIČKA FIZIKA, Beograd 1977, Vol. 16, 17.
92. TEORIJA FUNKCIJ, FUNKCIONAL'NYJ ANALIZ I IH PRILOŽENIJA, Har'kov 1977, vyp. 27, 28.
93. UČENYE ZAPISKI TARTUSKOGO GOS. UNIV., Trudy po mat. meh., Tartu 1977, T. 19, 20.
94. UKRAINSKIJ MAT. ŽURNAL, Kiev 1977, T. 29.
95. USPEHI MAT. NAUK, Moskva 1977, T. 32.
96. VARILNA TEHNIKA, Ljubljana 1977, letnik 26.
97. VESCI AN BSSR., Fiz.-energetyčnyh navuk, Minsk 1968—1974.
98. VESCI AN BSSR, Fiz. mat., Minsk 1977.
99. VESCI AN BSSR, Fiz. tehn., Minsk 1956—1974.
100. VESTNIK BELORUSS. GOS. UNIV., Mat. fiz. meh., Minsk 1977.
101. VESTNIK HAR'KOVSKOGO UNIV., Mat. meh., Har'kov 1977, vyp. 42, No. 148.
102. VESTNIK LENINGRADSKOGO UNIV., Fiz. him., Leningrad 1977.
103. VESTNIK MOSKOV. UNIV., Ser. 15. Vyčisl. mat. kib., Moskva 1977.
104. VZGOJA IN IZOBRAŽEVANJE, Ljubljana 1977, leto 8.
105. ZBORNIK RADOVA, Nova serija, Beograd 1977, knj. 2.
106. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK., Fiz., Novi Sad 1977, Vol. 7.
107. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK., Mat., Novi Sad 1977, Vol. 7.
108. ZDRAVSTVENI VESTNIK, Ljubljana 1977, letnik 46.
109. ŽIVLJENJE IN TEHNIKA, Ljubljana 1977, letnik 28.

Stanislav Zorko

OBČNI ZBOR — DNEVNI RED

1. Otvoritev
2. Pregled dejavnosti društva od ustanovitve do danes
3. Razvoj matematike od ustanovitve društva
4. Razvoj fizike od ustanovitve društva
5. Razdelitev društvenih priznanj
6. Razprava o poročilih
7. Poročilo nadzornega odbora
8. Volitve novega odbora
9. Pregled sklepov in razno

V prostorih hotela Radin bo razstava društvenih publikacij zadnjih dveh let. Ob tem boste lahko vplačali naročnino za Obzornik za matematiko in fiziko za leto 1978, eventualne starejše dolgove in posamezno in skupinsko naročnino za Presek.

Za UO Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS

Tajnik Ivan Pavliha — Predsednik Sergej Pahor

Prijavite se s spodnjim odrezkom do 30. 9. 1978

Odrežite!

PRIJAVA

Prijavljam se na občni zbor DMFA SRS 20. in 21. 10. 1978 v Radencih

..... (priimek in ime) ..... (kraj, ulica) (poštna št., pošta)

Rezervirajte mi, prosim, prenočišče za ..... oseb v (ustrezno obkroži):

1. hotelu Radin, Radenci (cena penziona v dvoposteljni sobi je 294,00)
2. hotelu Jeruzalem, Ljutomer
3. privatni sobi v Radencih

Želje bodo upoštevane po vrstnem redu prijav.

Druge želje .....

..... (kraj) ..... (datum) ..... (podpis)

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije vabi na

POSVETOVANJE O USMERJENEM IZOBRAŽEVANJU IN POVEZOVANJU DRUŠTVA Z ZDRUŽENIM DELOM ter na

30. JUBILEJNI OBČNI ZBOR DRUŠTVA, KI BO 20. IN 21. OKTOBRA 1978 V HOTELU RADIN V RADENCIH

Spored

Petek, 20. 10. 1978	
— 13.00 in dalje:	Prijave v recepciji hotela Radin Tu boste dobili Bilten občnega zbora
— 16.00	Posvetovanje: — usmerjeno izobraževanje — društvo in združeno delo
— 20.00	Večerja in družabni večer
Sobota, 21. 10. 1978	
— 9.00	Občni zbor
— 13.00	Kosilo Po kosilu kopanje v bazenu ali izlet na Kapelo

Odrežite!

PROFESORICA

MARIJA MUNDA

GIMNAZIJA MILOŠA ZIDANŠKA

Trg Miloša Zidanška 1

62000 M A R I B O R