

B-177/77-6

ODPISANO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1977

Letnik 24

6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1977

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovich (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Marjan Turk.

Naročnina: za posameznike 140.— din (za člane društva je že vračunana članarina 20.— din), za dijake in študente 60.— din, za ustanove in podjetja 180.— din, za tujino 12 \$ = 216.— din, posamezna številka 25.— din, dvojna številka 50.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 65-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

Članki	Stran
Reševanje nelinearnih operatorskih enačb v Banachovem prostoru (Edvard Kramar)	193
Oscilacijski izreki — asimptotične ocene števila ničel (Jože Andrej Čibej)	201
Merjenje majhnih svetlobnih tokov (Janez Žitnik)	208
Novice	
Kvarkonij (Janez Strnad)	214
Izboljšane vrednosti astronomskih konstant (Marijan Prosen)	217
Domače vesti	
Ob petinsedemdesetletnici akademika Antona Kuhlja (Peter Vencelj)	218
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter resumeji doktorskih disertacij v letu 1976 (Ciril Velkovich)	219
Prejeli smo v oceno (Zvonko Trontelj, Ivan Vidav, Anton Suhadolc, Ivan Kuščer, Janez Rakovec, France Križanič)	200, 207, 221, 222
Obvestila	
Uredniški odbor (Janez Strnad)	213
Vsebina Obzornik mat. fiz. 24 (1977)	223
Vabilo na seminar »Matematična logika« (Martina Koman)	IV

CONTENTS

Articles	Page
Solving nonlinear operator equations in Banach spaces (Edvard Kramar)	193
Oscillation theorems — asymptotic estimates for the number of zeros (Jože Andrej Čibej) . . .	201
Measurement of weak light fluxes (Janez Žitnik)	208
News	214
Home news	218
Reviews	200, 207, 221, 222

REŠEVANJE NELINEARNIH OPERATORSKIH ENAČB V BANACHOVEM PROSTORU

EDVARD KRAMAR

AMS Subj. Class. (1970) 47 H 15, 47 H 05

Članek obravnava posplošitev tangentne in sekantne metode na enačbe $P(x) = 0$, kjer je P nelinearni operator med Banachovima prostoroma X in Y . Dokazana sta dva izreka o monotonem vedenju zaporednih približkov v delno urejenih prostorih X in Y .

SOLVING NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS IN BANACH SPACES

In this article a generalisation of the tangent and secant method for the equation $P(x) = 0$ is considered. Here P is a nonlinear operator between Banach spaces X and Y . Two theorems are proved on monotone behaviour of successive approximations in partial ordered spaces.

1. Posplošitev nekaterih metod na operatorske enačbe

Reševanje enačb je posebno v uporabni matematiki eden najpogostejših problemov, pa najsi gre za reševanje algebraskih enačb, sistemov enačb, diferencialnih enačb, integralnih enačb itd. Najpogosteje se primeri, da je taka enačba nelinearna, saj nastopi že če hočemo poiskati ničlo kakega polinoma ali kake transcendentne enačbe.

Za skalarne enačbe je bilo izdelanih mnogo različnih numeričnih metod (nastajajo pa še danes), ki bolj ali manj uspešno izračunajo dovolj natančen približek iskane rešitve (tangentna metoda, sekantna metoda, metoda zaporednih približkov itd.). Bralcu so te metode verjetno znane, saj jih obravnavajo že v nekaterih srednjih šolah.

Že davno so si zastavili nalogo, kako bi dobili podobne metode za splošnejše enačbe: sistem nelinearnih enačb, nelinearne diferencialne in integralske enačbe itd. Večina metod se je dala posplošiti. Skoraj vse posplošitve so mlajšega datuma.

Oglejmo si kar splošen problem reševanja operatorske enačbe

$$P(x) = 0 \quad (1)$$

kjer je P nelinearen operator, ki deluje med Banachovima prostoroma X in Y . Vzemimo najprej Newtonovo (tangentno) metodo, ki ima za skalarne enačbe $f(x) = 0$ obliko

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Seveda se takoj vprašamo, kako bomo definirali odvod operatorja. Najugodnejše je tu vzeti tako imenovani krepki ali Fréchetov odvod operatorja.

1.1 Definicija. Naj bo A odprta množica v Banachovem prostoru X in P poljuben operator iz X v Y . Če obstaja tak linearen, zvezen operator $L: X \rightarrow Y$, da velja

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|P(x+h) - P(x) - Lh\| / \|h\| = 0; \quad h \in X, x \in A$$

potem imenujemo L Fréchetov odvod operatorja P v dani točki $x \in A$, v znakih $P'(x) = L$.

Če v okolici rešitve x^* enačbe (1) obstaja Fréchetov odvod in njegov inverzni operator, že lahko formalno zapišemo iteracijski predpis oblike (2):

$$x_{n+1} = x_n - P'(x_n)^{-1}P(x_n) \quad (3)$$

Na ta način smo dobili tako imenovano Newton-Kantorovičevo metodo, ki jo je na operatorske enačbe posplošil L. V. Kantorovič (gl. [3]). Da se pokazati, da pri nekih predpostavkah zgornja iteracija konvergira z redom 2^* proti rešitvi x^* . Izrekov, ki govorijo o tej konvergenci, ne bomo navajali, ker so že precej dolgo znani in izpopolnjeni (gl. npr. [6], [4], ...).

Druga zelo znana metoda za skalarne enačbe je sekantna metoda, ki ima obliko ([1]):

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right]^{-1} \cdot f(x_n); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Naziv te metode izvira iz geometrijske slike. Vzemimo, da imamo v ravnini (x, y) graf funkcije $y = f(x)$; potem je rešitev enačbe $f(x) = 0$ ravno tista vrednost spremenljivke x , kjer krivulja $y = f(x)$ seče os x . Če imamo dana že dva približka rešitve x_{n-1} in x_n , potegnemo skozi točki $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ in $(x_n, f(x_n))$ premico — sekanto. Abscisa točke, v kateri ta premica seče os x , vzamemo za novi približek.

Posplošitev na splošne operatorske enačbe je precej mlajša, saj je nastala okrog l. 1960. Najprej si oglejmo, kako bi uvedli pojem diferenčnega kvocienta operatorja. Za ilustracijo vzemimo preprost primer. Predpostavimo, da rešujemo sistem dveh enačb z dvema neznankama: $f(u, v) = 0$, $g(u, v) = 0$, pri čemer sta f in g dani zvezni funkciji dveh spremenljivk. Če pišemo $x = (u, v)$ ter $P(x) = (f(u, v), g(u, v))$, rešujemo operatorsko enačbo $P(x) = 0$, kjer operator P deluje v evklidskem prostoru R^2 . Diferenčni kvocient operatorja P , ki ga označimo z $\delta P(x, y)$, mora zadoščati enačbi

$$P(x) - P(y) = \delta P(x, y) (x - y)$$

Če bi iz te relacije hoteli izračunati operator $\delta P(x, y)$, opazimo, da imamo zanj le dve običajni enačbi, $\delta P(x, y)$ pa je matrika reda 2×2 , se pravi, ima 4 neznane koeficiente. Podobno imamo v primeru $X = Y = R^n$ za $\delta P(x, y)$ le n enačb za n^2 neznanih elementov.

Pričakovati je, da so v poljubnih Banachovih prostorih še večje težave. Zgornjo nedoločeno deloma odpravimo, če ob definiciji operatorja $\delta P(x, y)$ zahtevamo še nekaj lastnosti, kot na primer linearnost, zveznost itd. Tako je nastalo nekaj različnih definicij diferenčnega kvocienta operatorja, ki pa so za reševanje operatorske enačbe nekako enako uspešne. Oglejmo si primer diferenčnega kvocienta operatorja, ki ga je uvedel J. W. Schmidt [5].

1.2 Definicija. Diferenčni kvocient operatorja P v točkah $x, y \in \mathcal{D}(P)$ je linearen, omejen operator $\delta P(x, y) : X \rightarrow Y$, ki ustreza pogojema

$$a) P(x) - P(y) = \delta P(x, y) (x - y)$$

$$b) \|\delta P(x, y) - \delta P(y, z)\| \leq a \|x - z\| + b \|x - y\| + b \|y - z\|$$

kjer sta a in b nenegativni konstanti.

Naj opomnimo, da za dani operator P ne obstaja nujno njegov diferenčni kvocient $\delta P(u, v)$ niti ni vedno en sam (ob koncu bomo zapisali primer dveh ekvivalentnih diferenčnih kvocientov).

Predpostavimo, da ima operator P v neki okolici rešitve x^* enačbe (1) diferenčni kvocient v zgornjem smislu in zanj obstaja inverzni operator. Potem lahko zapišemo posplošitev iteracije (4)

$$x_{n+1} = x_n - \delta P(x_n, x_{n-1})^{-1} P(x_n); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

* Metoda konvergira z redom p , če eksistira okolica U rešitve x^* in taka konstanta K , da za vse približke x_n iz okolice U velja ocena: $|x^* - x_{n+1}| \leq K |x^* - x_n|^p$.

pri čemer moramo seveda poznati dva začetna približka x_{-1} in x_0 . Pri nekih predpostavkah se da zopet dokazati konvergenca zgornjega zaporedja k rešitvi x^* z redom $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.61$ ([4], [3]), ...).

V zadnjem razdelku bomo na zgledu ilustrirali zgornji metodi.

2. Monotono obnašanje približkov

Če spet vzamemo skalarno enačbo $f(x) = 0$, kjer je funkcija f v okolici rešitve x^* konveksna in je tam vrednost njenega odvoda pozitivna, lahko iz geometrijske slike razberemo, da za zaporedje približkov $\{x_k\}$, dobljenih po Newtonovi metodi, velja: $x^* \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$ ali pa $x_0 \leq x^* \leq \dots \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1$. Pri istih pogojih dobimo za približke $\{y_k\}$, dobljene po sekantni metodi, naslednje inkluzije: $x^* \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0 \leq y_{-1}$ ali $y_{-1} \leq y_0 \leq y_2 \leq y_3 \leq x^* \leq \dots \leq y_7 \leq y_4 \leq y_1$ ali pa $y_{-1} \leq y_1 \leq y_2 \leq y_4 \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq y_6 \leq y_3 \leq y_0$. Podobno vedenje približkov opazimo tudi, če je funkcija f konkavna. (Opisano vedenje približkov bi opazili, če bi na primer izpisali približke za rešitev enačbe $xe^x - 1 = 0$).

Zopet se pojavi vprašanje, ali velja kaj podobnega tudi za operatorske enačbe. Pozitiven odgovor bomo dobili če imamo v prostorih X in Y tudi relacijo delne urejenosti.

Predpostavili bomo, da sta Banachova prostora X in Y hkrati tudi delno urejena linearna prostora. Se pravi: v njih imamo relacijo delne urejenosti (refleksivno, antisimetrično in tranzitivno relacijo), ki je z linearno strukturo povezana z zahtevama:

- a) če je $x \geq 0$ in $c > 0$, je $cx \geq 0$,
- b) če je $x_i \geq y_i$; $i = 1, 2$, potem je $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$,

kjer so elementi x, x_i, y_i iz X (oziroma iz Y) in c iz R . Pri tem bomo uporabljali isti znak za delno urejenost v prostoru X in v Y . Primeri takih prostorov so npr.: R^n — n -dimenzionalni evklidski prostor z delno ureditvijo $x \leq y$ natanko tedaj, ko je $x_i \leq y_i$ ($i = 1, \dots, n$), potem $C[a, b]$ — prostor zveznih funkcij z normo $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ in relacijo delne urejenosti $f \leq g$ natanko tedaj, ko je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, itd.

Definirajmo nekatere lastnosti, ki jih operator P lahko ima ali ne.

2.1 Definicija. Naj bo operator P odvedljiv v Fréchetovem smislu v nekem območju $D \subset \mathcal{D}(P) \subset X$; potem ima lahko katero od lastnosti:

- (A1) $P(u) - P(v) \geq P'(v)(u - v)$; $u, v \in D$
- (A2) $P(u) - P(v) \leq P'(v)(u - v)$; $u, v \in D$
- (B1) $P'(u)x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$; $x \in X, u \in D$
- (B2) $P'(u)x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $x \in X, u \in D$

Podobno definiramo analogne lastnosti z diferenčnim kvocientom operatorja.

2.2 Definicija. Naj ima operator P diferenčni kvocient $\delta P(u, v)$ za poljubna elementa u in v iz nekega območja $D \subset \mathcal{D}(P) \subset X$; potem ima P lahko katero od lastnosti:

- (A1)' $\begin{cases} u_1 \leq u_2 \Rightarrow \delta P(u_1, v)t \leq \delta P(u_2, v)t; & t \geq 0, u_1, u_2, v \in D \\ v_1 \leq v_2 \Rightarrow \delta P(u, v_1)t \leq \delta P(u, v_2)t; & t \geq 0, u, v_1, v_2 \in D \end{cases}$
- (A2)' $\begin{cases} u_1 \leq u_2 \Rightarrow \delta P(u_1, v)t \geq \delta P(u_2, v)t; & t \geq 0, u_1, u_2, v \in D \\ v_1 \leq v_2 \Rightarrow \delta P(u, v_1)t \geq \delta P(u, v_2)t; & t \geq 0, u, v_1, v_2 \in D \end{cases}$
- (B1)' $\delta P(u, v)x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$; $u, v \in D, x \in X$
- (B2)' $\delta P(u, v)x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $u, v \in D, x \in X$

Pri običajnih funkcijah imenujemo lastnost (A) konveksnost oziroma konkavnost, lastnost (B) pa, da je odvod $f'(x)$ pozitiven ali negativen. Pri tem je očitno v neki okolici rešitve vedno izpolnjena ena izmed vsake lastnosti, pri operatorjih pa ni nujno, da je sploh katera izpolnjena.

Sedaj že lahko preidemo k študiju vedenja zaporednih približkov iz Newtonove metode

$$P(x_n) + P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

2.3 Izrek. *Naj bo operator P v neki okolici rešitve x^* enačbe (1) Fréchetovo odvedljiv in ima eno od lastnosti (A) in (B); potem za vrednost operatorja na zaporednih približkih dobimo:*

a) če velja lastnost (A1), je $P(x_{n+1}) \geq 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b) če velja lastnost (A2), je $P(x_{n+1}) \leq 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Za zaporedne približke pa dobimo dve vrsti vključitev:

c) če velja (A1) in (B1) ali (A2) in (B2), dobimo

$$x^* \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$$

d) če velja (A1) in (B2) ali (A2) in (B1), dobimo

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x^*$$

Dokaz. Naj najprej velja lastnost (A1), potem dobimo iz zveze (6)

$$\begin{aligned} 0 &= P(x_n) + P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \leq P(x_n) + P(x_{n+1}) - P(x_n) = \\ &= P(x_{n+1}) = -P'(x_{n+1})(x_{n+2} - x_{n+1}) \end{aligned}$$

V tej oceni smo že opazili trditev a) in če velja še lastnost (B1), dobimo $x_{n+1} - x_{n+2} \geq 0$, če pa velja lastnost (B2), dobimo $x_{n+1} - x_{n+2} \leq 0$. Če velja lastnost (A2), dobimo analogno

$$0 \geq P(x_{n+1}) = P'(x_{n+1})(x_{n+1} - x_{n+2})$$

od koder najprej sledi trditev b) ter pri lastnosti (B1) še $x_{n+1} - x_{n+2} \leq 0$, pri lastnosti (B2) pa sledi obratno $x_{n+1} - x_{n+2} \geq 0$.

Dokazati moramo le še vključitev rešitve x^* . Naj zopet velja najprej lastnost (A1), potem dobimo spet iz zveze (6)

$$\begin{aligned} 0 &= P(x^*) - P(x_n) - P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \geq P'(x_n)(x^* - x_n) - \\ &\quad - P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = P'(x_n)(x^* - x_{n+1}) \end{aligned}$$

Od tod sledi pri lastnosti (B1) $x_{n+1} - x^* \geq 0$, a pri lastnosti (B2) $x_{n+1} - x^* \leq 0$. Če velja lastnost (A2), dobimo obratne relacije in sta tako verigi vključitev približkov v c) in d) potrjeni.

Naj opomnimo, da je lahko začetni približek x_0 neprimerljiv z rešitvijo x^* , vendar se približki od x_1 dalje že začno urejati v eni izmed oblik, ki smo ju zapisali zgoraj.

Dobro znano je: če imamo realno monotono in omejeno zaporedje števil, potem to zaporedje vedno konvergira. V splošnih normiranih prostorih (npr. v $C[0, 1]$) ni to več nujno res, zato moramo v takih primerih še posebej proučiti konvergenco zaporedja približkov.

Oglejmo si še, kako je z monotonim obnašanjem približkov pri sekantni metodi

$$P(x_n) + \delta P(x_n, x_{n-1})(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (7)$$

Glede na to, kako izberemo začetna približka x_{-1} in x_0 in glede na lastnosti (A)' in (B)' dobimo dvanajst možnosti: povežimo jih v izrek:

2.4 Izrek. *Naj ima operator P v neki okolici rešitve x^* enačbe (1) diferenčni kvocient in po eno od lastnosti (A)' in (B)'. Potem dobimo za približke $\{x_k\}$, dobljene po sekantni metodi (7), naslednje možnosti:*

I. pravo monotonost — imamo jo v štirih primerih:

a) če je $x^* \leq x_0 \leq x_{-1}$, $0 \leq (-1)^i P(x_0)$, $0 \leq (-1)^i P(x_{-1})$ in pri (A1)', (B1)', $i = 0$ ali (A2)', (B2)', $i = 1$, velja

$$x^* \leq \dots \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0 \leq x_{-1} \quad \text{in} \quad (-1)^i P(x_n) \geq 0$$

b) če je $x_{-1} \leq x_0 \leq x^*$, $(-1)^i P(x_0) \geq 0$, $(-1)^i P(x_{-1}) \geq 0$ in pri (A1)', (B2)', $i = 0$ ali (A2)', (B1)', $i = 1$, velja

$$x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x^*; \quad (-1)^i P(x_n) \geq 0$$

II. periodično monotonost z večino členov »levo« od rešitve

a) če je $x_{-1} \leq x_0 \leq x^*$, $(-1)^i P(x_{-1}) \leq 0$, $(-1)^i P(x_0) \leq 0$ in pri (A1)', (B1)', $i = 0$ ali (A2)', (B2)', $i = 1$, velja

$$x_{-1} \leq x_0 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq x_7 \leq x_4 \leq x_1 \\ (-1)^i P(x_n) \leq 0 \quad (-1)^i P(x_n) \geq 0$$

b) če je $x_{-1} \leq x^* \leq x_0$, $(-1)^i P(x_{-1}) \leq 0$, $(-1)^i P(x_0) \geq 0$ in pri lastnostih (A1)', (B1)', $i = 0$ ali (A2)', (B2)', $i = 1$, velja

$$x_{-1} \leq x_1 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_5 \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq x_6 \leq x_3 \leq x_0 \\ (-1)^i P(x_n) \leq 0 \quad (-1)^i P(x_n) \geq 0$$

III. periodično monotonost z večino členov »desno« od rešitve

a) če je $x^* \leq x_0 \leq x_{-1}$, $0 \leq (-1)^i P(x_0)$, $0 \leq (-1)^i P(x_{-1})$ in pri lastnostih (A2)', (B1)', $i = 0$ ali (A1)', (B2)', $i = 1$, je

$$x_1 \leq x_4 \leq x_7 \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq x_5 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_0 \leq x_{-1} \\ (-1)^i P(x_n) \leq 0 \quad (-1)^i P(x_n) \geq 0$$

b) če je $x_{-1} \leq x^* \leq x_0$, $(-1)^i P(x_{-1}) \leq 0$, $0 \leq (-1)^i P(x_0)$ in pri lastnostih (A2)', (B1)', $i = 0$ ali (A1)', (B2)', $i = 1$, je

$$x_{-1} \leq x_2 \leq x_5 \leq x_8 \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq x_6 \leq x_4 \leq x_3 \leq x_1 \leq x_0 \\ (-1)^i P(x_n) \leq 0 \quad (-1)^i P(x_n) \geq 0$$

Dokaz. Dokažimo najprej naslednji trditvi:

Če velja lastnost (B1)', potem iz pogoja $P(x) \geq 0$ sledi $x^* \leq x$ (8)

Če velja lastnost (B2)', potem iz pogoja $P(x) \geq 0$ sledi $x \leq x^*$ (9)

Zares, zapisati moramo le definicijo diferenčnega kvocienta operatorja P

$$\delta P(x, x^*) (x - x^*) = P(x) - P(x^*) = P(x) \geq 0$$

od koder pri lastnosti (B1)' sledi $x - x^* \geq 0$, pri lastnosti (B2)' pa $x - x^* \leq 0$.

Preverimo sedaj prvi del trditve I. a) v zgornjem izreku, torej predpostavimo: $x^* \leq x_0 \leq x_{-1}$, $0 \leq P(x_0)$, $0 \leq P(x_{-1})$; operator P ima lastnosti (A1)' in (B1)'. Najprej dobimo iz iteracijskega predpisa pri $n = 0$

$$\delta P(x_0, x_{-1}) (x_1 - x_0) = -P(x_0) \leq 0$$

kar nam zaradi (B1)' da $x_1 - x_0 \leq 0$. Upoštevajmo še lastnost (A1)' v zvezi

$$0 = -P(x_0) + \delta P(x_0, x_{-1}) (x_0 - x_1) \geq -P(x_0) + \delta P(x_0, x_1) (x_0 - x_1) = -P(x_1)$$

ki nam po trditvi (8) da $x^* \leq x_1$. Torej že velja prvi del trditve I. a) pri $n = 1$. Privzemimo, da velja ta trditev do indeksa n in dokažimo, da velja tudi pri indeksu $n + 1$. Najprej dobimo iz iteracijske formule (7)

$$\delta P(x_n, x_{n-1}) (x_{n+1} - x_n) = -P(x_n) \leq 0$$

in po lastnosti (B1)' takoj sledi relacija $x_{n+1} - x_n \leq 0$. Zapišimo še enkrat zvezo (7) in upoštevajmo lastnost (A1)'

$$\begin{aligned} 0 &= P(x_n) + \delta P(x_n, x_{n-1}) (x_{n+1} - x_n) \leq \\ &\leq P(x_n) + \delta P(x_{n+1}, x_n) (x_{n+1} - x_n) = P(x_{n+1}) \end{aligned}$$

od koder zopet po trditvi (8) sledi $x^* \leq x_{n+1}$, s čimer je dokazan prvi del trditve I. a) za vsak n .

Prav podobno bi dokazali še vse ostale primere v trditvi I. Dokažimo še prvi del trditve II. a), ki se malo razlikuje od prejšnje. Privzemimo, da za operator P veljata lastnosti (A1)' in (B1)'. Če označimo z x in y dva zaporedna približka ter z w približek, ki ga dobimo po sekantni metodi iz prvih dveh, dobimo zanje trditvi:

$$\text{Če je } x \leq y, P(x) \leq 0 \text{ in } P(y) \leq 0, \text{ sledi } x^* \leq w \text{ in } P(w) \geq 0 \quad (10)$$

$$\text{Če je } x \leq y, P(x) \leq 0 \text{ in } P(y) \geq 0, \text{ sledi } x \leq w \leq x^* \text{ in } P(w) \leq 0 \quad (11)$$

Zares, ker velja za elemente x , y in w zveza (7), dobimo

$$\delta P(y, x) (w - y) = -P(y) \geq 0$$

od koder po lastnosti (B1)' sledi $w \geq y$ in iz predpostavk še $w \geq x$. Če še enkrat upoštevamo omenjeno zvezo in lastnost (A1)', dobimo

$$0 = P(x) + \delta P(y, x) (w - x) \leq P(x) + \delta P(w, x) (w - x) = P(w)$$

in po trditvi (8) sledi še $x^* \leq w$. Prav analogno dokažemo tudi trditev (11).

Po predpostavkah prvega dela trditve II. a) imamo: $x_{-1} \leq x_0 \leq x^*$, $P(x_{-1}) \leq 0$ in $P(x_0) \leq 0$. Če sedaj v trditvi (10) in (11) postavljamo zaporedne približke $x_1, x_2, \dots$, dobimo: $x_{-1} \leq x_0 \leq x_2 \leq x_3 \leq x^* \leq x_4$, $x^* \leq x_1$ in $P(x_2) \leq 0$, $P(x_3) \leq 0$, $P(x_4) \geq 0$, $P(x_1) \geq 0$. Nastane le še vprašanje, kakšen je približek x_4 v primerjavi z x_1 ? Zapišimo zvezo (7) pri $n = 0$ in $n = 3$, ju odštejmo in upoštevajmo lastnost (A1)'

$$\begin{aligned} 0 &= P(x_3) + \delta P(x_3, x_2) (x_4 - x_3) - P(x_0) - \delta P(x_0, x_{-1}) (x_1 - x_0) = \\ &= \delta P(x_3, x_0) (x_3 - x_0) + \delta P(x_3, x_2) (x_4 - x_3) - \delta P(x_0, x_{-1}) (x_1 - x_0) \geq \\ &\geq \delta P(x_3, x_0) (x_4 - x_0) - \delta P(x_0, x_{-1}) (x_1 - x_0) \geq \delta P(x_0, x_{-1}) (x_4 - x_1) \end{aligned}$$

od koder po lastnosti (B1)' sledi $x_4 \leq x_1$.

Če tako nadaljujemo, dobimo res verigo inkluzij v trditvi II. a). Prav podobno dokažemo tudi vse druge primere v trditvah II. in III.

Naj opomnimo, da je lastnost, da zaporedni približki oklepajo rešitev, včasih zelo ugodna, saj lahko približke združimo v dve podzaporedji, ki vsako z ene strani konvergira k rešitvi enačbe.

3. Numeričen primer

Za zgled obravnavanih metod vzemimo sistem nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} f(u, v) &\equiv tg(v - 1,1u) + 2uv - 2,9u = 0 \\ g(u, v) &\equiv e^{(u-1,1v)} + 3uv - 3v - 0,4 = 0 \end{aligned}$$

ki je omenjen v [2]. Če pišemo $x = (u, v)$ in $P(x) = (f, g)(x)$, imamo operatorsko enačbo $P(x) = 0$, kjer je P nelinearni operator, ki deluje v prostoru R^2 . Rešitev gornjega sistema je $x^* = (0,945876651..., 1,306153316...)$. V prostoru R^2 uvedemo delno urejenost tako, da je $x \leq y$ natanko tedaj, ko sta obe komponenti vektorja x manjši ali enaki ustreznima komponentama vektorja y . Fréchetov odvod operatorja P v točki x je matrika

$$P'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

za diferenčni kvocient našega operatorja P pa vzamemo matriko

$$\delta P(x, y) = \begin{vmatrix} (f(u, v) - f(u', v))/(u - u'), & (f(u', v) - f(u', v'))/(v - v') \\ (g(u, v) - g(u', v))/(u - u'), & (g(u', v) - g(u', v'))/(v - v') \end{vmatrix}$$

kjer smo pisali $x = (u, v)$ in $y = (u', v')$. Hitro se lahko prepričamo, da zgornji matriki zadoščata pogojem definicije 1.1 oziroma 1.2. Lahko pa hitro preverimo, da bi lahko za diferenčni kvocient našega operatorja vzeli tudi matriko

$$\begin{vmatrix} (f(u', v') - f(u, v'))/(u' - u), & (f(u, v') - f(u, v))/(v' - v) \\ (g(u', v') - g(u, v'))/(u' - u), & (g(u, v') - g(u, v))/(v' - v) \end{vmatrix}$$

ki tudi zadošča pogojem definicije 1.2.

Lahko se prepričamo, da ima operator P v neki okolici rešitve lastnosti (A1)' in (A1) ter (B1)' in (B1).

V spodnjih tabelah so izpisani zaporedni približki, izračunani po obeh metodah na računalniku IBM 1130, pri čemer so števila nad črto začetni približki. Iz rezultatov razberemo, da se približki res vedejo po pravilih, ki smo jih zapisali v zgornjih izrekih.

a) Newton-Kantorovičeva metoda

x_n	x_n
(2,0 , 2,0)	(0,7 , 0,7)
(1,182902929 , 1,596471675)	(1,751007082 , 2,304387168)
(0,985478151 , 1,356436674)	(1,199399504 , 1,628517161)
(0,947478572 , 1,308185283)	(0,991604666 , 1,364192987)
(0,945879490 , 1,306156919)	(0,947985295 , 1,308828098)
(0,945876651 , 1,306153316)	(0,945881565 , 1,306159550)
	(0,945876651 , 1,306153316)
$x^* \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$	$x_0 \leq x^* \leq x_5 \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1$

b) sekantna metoda

x_n	x_n
(2,0 , 2,0)	(0,7 , 0,9)
(1,0 , 1,5)	(0,8 , 1,0)

(0,971441475 , 1,354912824)	(1,064722128 , 1,454282469)
(0,949598030 , 1,310783350)	(0,910859102 , 1,260950585)
(0,946023570 , 1,306337010)	(0,941696527 , 1,300840604)
(0,945877244 , 1,306154069)	(0,946049466 , 1,306372407)
(0,945876651 , 1,306153316)	(0,945875845 , 1,306152295)
	(0,945876651 , 1,306153316)

$$x^* \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0 \leq x_{-1} \quad x_{-1} \leq x_0 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_5 \leq x^* \leq x_4 \leq x_1$$

LITERATURA

- [1] Collatz L., *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer 1964.
- [2] Hofmann W., *Die Regula falsi im Banach-Räumen*, Computing 7 (1971) 106—112.
- [3] Kantorovič L. V., *O metode Njutona dlja funkcional'nih uravnenij*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 51 (1948) 1237—1240.
- [4] Kramar E., *Analitično reševanje nelinearnih operatorskih enačb v Banachovem prostoru*. Magistrsko delo, Ljubljana 1973.
- [5] Schmidt J. W., *Die Regula falsi für Operatoren in Banach-Räumen*, Z. Angew. Math. Mech. 41 (1961) T61-T63.
- [6] Tapia R. A., *Kantorovich Theorem*, Mat. Res. Center, U.S. Army, Madison, Wis. 1969.

PREJELI SMO V OCENO

Miklos Kocsis, High- Speed Silicon Planar — Epitaxial Switching Diodes, Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, 177 str.

Pri razvoju polprevodniških elektronskih elementov so imele polprevodniške diode gotovo posebno vlogo. V elektronskih vezjih je dioda eden izmed najbolj pogostih elementov. Zlasti velja to za računalnike, in sicer predvsem za tiste, ki so nastali pred današnjo široko uporabo integriranih vezij. Diode, ki so zanimive za te namene, morajo imeti zelo kratek čas preklapljanja (switching time): pod 10 ns in včasih celo pod 1 ns. Kako izdelamo take vrste diode, kakšne tehnologije uporabljamo, vse to obdela avtor v pričujoči monografiji.

V uvodnem delu se seznanimo s fizikalnimi procesi, ki nastopajo pri polprevodniških hitrih diodah in jih kasneje avtor uporabi pri analiziranju posameznih tipov diod. Poseben poudarek je na diodah, ki jih dobimo s planarno — epitaksialno tehnologijo ob uporabi difuzije zlata. Delo se zaključi s pregledom merilnih diod, ki so potrebne pri testiranju hitrih diod. Dodana je znatna bibliografija, ki zajema dela raziskovalnih skupin z vzhoda in zahoda.

Knjiga bo koristila vsem, ki se ukvarjajo s polprevodniškimi elementi in tehnologijami, tako strokovnjakom s tega področja, ker obravnava tudi najnovejše dosežke, kot tudi začetnikom, ker je pisana pregledno in ne pozabi omeniti semintja tudi prehojeno pot na področju polprevodniških diod.

Zvonko Trontelj

OSCILACIJSKI IZREKI — ASIMPTOTIČNE OCENE ŠTEVILA NIČEL

JOŽE ANDREJ ČIBEJ

AMS Subj. Class. 34 C 10

V članku obravnavamo nekaj asimptotičnih ocen za število ničel rešitev navadne diferencialne enačbe drugega reda.

OSCILLATION THEOREMS — ASYMPTOTIC ESTIMATES FOR THE NUMBER OF ZEROS

In the paper some asymptotic estimates for the number of zeros of solutions of second order ordinary differential equations are considered.

V klasični teoriji diferencialnih enačb govorimo o rešitvi enačbe takrat, ko nam uspe reducirati problem na računanje nekega integrala, na t. i. kvadrature. Izkaže pa se, da je to pri enačbah, ki se pojavljajo v praksi, le redkokdaj mogoče. Iz zagate si lahko pomagamo predvsem na dva načina; poleg numeričnih metod nam včasih dajo zadovoljive rezultate tudi kvalitativne metode. Pri teh se odpovemo analitičnemu zapisu (klasično) ali tabeliranju rešitev (numerična analiza) in smo zadovoljni, če razkrijemo njihovo globalno vedenje. Poleg raziskav stabilnosti rešitev dane diferencialne enačbe se je v tej smeri najbolj razvila teorija oscilacij, ki problem zastavlja takole: kako iz koeficientov diferencialne enačbe direktno odkriti število (in razporeditev) ničel, ki jih premorejo njene rešitve? V prvi fazi razvoja je bilo največ narejenega na področju navadnih diferencialnih enačb drugega reda; postavljeni so bili kriteriji za grobo delitev enačb glede na to, ali imajo njihove rešitve končno ali neskončno mnogo ničel na predpisanem intervalu. Osnova vseh kasnejših rezultatov na tem področju so klasični Sturmovi primerjalni in separacijski izreki. Na tem mestu jih ne bomo ponavljali, saj jih najdemo v večini učbenikov diferencialnih enačb (glej npr. [2], str. 196—204); v nadaljevanju bomo privzeli, da jih bralec v tem obsegu pozna.

V praksi se večkrat izkaže, da delitev enačb v dva razreda (oscilacijske — rešitve imajo neskončno mnogo ničel; neoscilacijske — rešitve imajo na poljubnem intervalu samo končno mnogo ničel) ni dovolj podrobna; od tod izhaja želja, da bi dobili vsaj asimptotično oceno za število ničel na intervalu $(a, x]$. To število bomo označevali z $N(a, x)$; pri danem x je — vsaj asimptotično — res odvisno samo od enačbe, ne pa od njene slučajno izbrane rešitve, ker se po Sturmovem separacijskem izreku (glej [2], str. 197) ničle dveh linearno neodvisnih rešitev prepletajo, zato lahko izbira druge rešitve spremeni $N(a, x)$ kvečjemu za 1. Pri določanju tega števila se lahko omejimo na oscilacijske enačbe in izhajamo iz vedenja njihovih rešitev na neomejenem intervalu (a, ∞) , ker je znano (glej [2], str. 196), da ničle netrivialnih rešitev ne morejo imeti končnih stekališč. — V nadaljevanju bomo navedli nekaj možnosti za določanje $N(a, x)$ pri linearnih diferencialnih enačbah drugega reda in metode ilustrirali s preprostimi primeri. Pri izrekih, ki rabijo le kot orodje, bomo najbolj dolgovezne dokaze izpustili in se omejili na prikaz praktičnih aplikacij njihovih rezultatov.

Obravnavali bomo najprej enačbo oblike

$$u'' + q(x)u = 0 \quad (1)$$

ko je $q(x) = 1/h^2(x)$, $h(x)$ pa je funkcija, odvedljiva in pozitivna na celem intervalu $(0, \infty)$.

Prvo oceno je za poseben primer, ko je enačba oscilacijska, limita $h'(x)$ pa je enaka 0 (ko $x \rightarrow \infty$), dokazal A. Wiman že leta 1917. Dognal je, da velja

$$N(a, x) \sim (1/\pi) \int_a^x ds/h(s) \quad (2)$$

Znak $\sim$ kot običajno pomeni, da z rastočim x limitira kvocient količin na obeh straneh tega znaka proti 1. Rezultat je poseben primer splošnejšega izreka, ki ga je pred dobrimi dvajsetimi leti dokazal Z. Nehari. Ta je pripeljal našo nalogo v klasične vode, saj je prišel do števila ničel s pomočjo prirejenega problema lastnih vrednosti in lastnosti njegovega spektra. Konstrukcija, ki nas pripelje do prirejenega problema, je po svoje precej zanimiva. Takole ravnamo: naj bodo $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ po velikosti urejene ničle netrivialne rešitve enačbe (1) (pogosto vemo za ničli v točkah a in b ter nas zanima, koliko jih je vmes) in naj bo funkcija $H(x)$ odvedljiva ter pozitivna na intervalu $[0, \infty)$, $Q(x)$ naj bo dana kot $1/H^2(x)$. Pri danem x ($a < x \leq b$) izberimo t tako, da bo

$$\int_0^t ds/H(s) = \int_a^x ds/h(s)$$

Iz narave obeh integrandov sledi, da smo našli enolično preslikavo intervala $[a, x]$ na interval $[0, t]$. Posebej odlikujmo realno število T s predpisom

$$\int_0^T ds/H(s) = \int_a^b ds/h(s) \quad (3)$$

torej $T = \psi(b)$, če je ψ omenjena preslikava med obema intervaloma. Sestavimo prirejeni problem lastnih vrednosti

$$d^2v/dt^2 + \lambda Q(t)v = 0, \quad v(0) = v(T) = 0 \quad (4)$$

Nehari je dokazal tole:

IZREK I: Če je v opisani situaciji funkcija H izbrana tako, da je za vsak x z intervala $[a, b]$

$$| dh/dx - dH/dt | \leq 2M \quad (t = \psi(x))$$

ustreza n -ta lastna vrednost problema (4) oceni

$$| \lambda_n^{1/2} - 1 | \leq M$$

pri tem je indeks n isti kakor pri oštevilčenju ničel rešitve enačbe (1) na intervalu $[a, b]$.

Z dolgoveznim dokazom (bralec ga najde v [5]) ne bomo zapravljali prostora, povejmo raje, kako izrek uporabimo v praksi. Predvsem je treba ugotoviti, da je koristen le, kadar znamo poiskati eksplicitno formulo za lastno vrednost λ_n ali vsaj dobro oceno zanjo, da lahko iz nje izluščimo iskani n . To gre najpreprosteje, če je $Q(t) = 1$. Problem se reducira na enačbo $v'' + \lambda v = 0$ in robne pogoje $v(0) = v(T) = 0$. Kot je dobro znano, so potem lastne vrednosti dane z enačbo

$$\lambda_n^{1/2} = n\pi/T$$

V tem posebnem primeru je $H(t) = 1$, $H'(t) = 0$, izrek I pa trdi: če na intervalu $[a, b]$ velja ocena $| h'(x) | \leq 2M$, ustreza število ničel, ki jih premorejo rešitve enačbe (1), oceni

$$| (n\pi/T) - 1 | \leq M \quad (5)$$

Ker je v našem primeru $H(t) = 1$, je T zelo lahko določiti iz enačbe (3) — enak je kar vrednosti integrala funkcije $1/h(x)$ v mejah od $x = a$ do $x = b$. Ugotovitev (5) lahko zato polepšano preimenujemo v

IZREK II: *Naj bo v enačbi (1) $q(x) = 1/h^2(x)$, funkcija $h(x)$ pri tem pozitivna in zvezno odvedljiva na vsem intervalu $[0, \infty)$. Če so $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ zaporedne ničle netrivialne rešitve enačbe (1) in je za vsak x z intervala $[a, b]$ $|h'(x)| \leq 2M$, velja za število teh ničel ocena*

$$((1 - M)/\pi) \int_a^b dx/h(x) \leq n \leq ((1 + M)/\pi) \int_a^b dx/h(x) \quad (6)$$

V praksi je pogost primer, da vemo za ničle v točkah $x = a$ in $x = b$ (včasih ju predpišemo kot robna pogoja); če lahko absolutno vrednost odvoda funkcije $h(x)$ ujamemo na celem intervalu $[a, b]$ pod neko konstanto, lahko iz ocene (6) ugotovimo, v kakšnih mejah se lahko suče število ničel na odprtem intervalu (a, b) . Poglejmo si enostaven primer!

Enačba (1) naj bo $u'' + 4u = 0$; tokrat je $h(x) = 1/2$ in $h'(x) = 0$, zato je tudi konstanta M enaka 0 in iz neenačbe (6) dobimo enačbo; na intervalu (a, b) ima rešitev $u(x)$ ($u(a) = u(b) = 0$) natanko $n - 1$ ničel, pri čemer velja za n v skladu z oceno (6) enačba

$$n = (1/\pi) \int_a^b dx/h(x) = (2/\pi) (b - a) \quad (7)$$

Še številski primer: vzemimo partikularno rešitev $u(x) = \sin 2x$, postavimo $a = \pi/2$, $b = 5\pi/2$; enačba (7) nam da $n = 4$ in torej pravilno napove tri ničle na odprtem intervalu (a, b) . Kvaliteta ocene (6) ni vedno tako zadovoljiva, odvisna je predvsem od velikosti konstante $2M$, s katero ujamemo absolutno vrednost odvoda $h'(x)$. Če je $M \geq 1$, je treba na levi strani ocene (6) vzeti 0 kot spodnjo mejo za število ničel.

V preprostem primeru, ki smo ga pravkar obravnavali, se je ocena (6) preoblikovala v Wimanov originalni rezultat (2). Pokažimo, da to ni bilo slučajno, se pravi, da izrek II vsebuje asimptotično oceno (2) v posebnem primeru, ko je limita $h'(x)$ enaka 0, če gre x preko vseh meja.

Najprej bomo pokazali, da je enačba takrat avtomatično oscilacijska, da imajo torej njene rešitve na neomejenem intervalu (a, ∞) neskončno mnogo ničel. Zaradi pogoja, da gre odvod funkcije $h(x)$ proti 0 ($x \rightarrow \infty$), obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $x_0 > 0$, da je za vsak $t > x_0$ izpolnjena neenačba $|h'(t)| \leq \varepsilon$. Oceno integriramo v mejah od x_0 do nekega (večjega) x in jo malce uredimo:

$$-\varepsilon(x - x_0) + h(x_0) \leq h(x) \leq \varepsilon(x - x_0) + h(x_0) \quad (8)$$

Če v oceni delimo povsod z x , poženemo le-tega preko vseh meja in primerjamo kvadrate dobljenih izrazov, pridemo takoj do ugotovitve

$$0 \leq 1/\omega \leq \varepsilon^2$$

za poljuben $\varepsilon > 0$; to pove, da je $1/\omega$ poljubno majhno število. Z ω smo pri tem označili vrednost $\liminf x^2 q(x)$. Iz definicije števila ω in ugotovitve o velikosti njegove obratne vrednosti sledi, da je za primerno velike x

$$q(x) > cx^{-2} \quad (9)$$

pri čemer je c lahko poljubno velika pozitivna konstanta; za naš namen bo dovolj vzeti $c > 1/4$. Eulerjeva enačba

$$v'' + cx^{-2}v = 0$$

je za vse $c > 1/4$ oscilacijska (neposredni dokaz prepustimo bralcu), potemtakem je zaradi ocene (9) in Sturmovega primerjalnega izreka (bralec ga najde — anonimnega — na strani

198 v [2]) naša enačba $u'' + q(x)u = 0$ ($q(x) = 1/h^2(x)$) še toliko bolj. Funkcija $q(x)$ mora biti torej od nekega x dalje dovolj »velika«, če naj bo ustrezna enačba oscilacijska; natančnejša zahteva (9) pove, da je zaradi $1/h(x) > c^{1/2}x^{-1}$

$$\int_a^\infty dx/h(x) = \infty$$

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$; pri danih predpostavkah obstaja naravno število m takšno, da je za vse $x \geq x_m$ (x_m : m -ta ničla rešitve enačbe (1) na intervalu (a, ∞)) izpolnjena neenačba $|h'(x)| \leq 2\varepsilon$; obstaja tudi naravno število p ($p > m$), da sta za vse $k \geq p$ pravilni oceni

$$0 \leq (1/\pi N(x_m, x_k)) \int_a^{x_m} dt/h(t) \quad (10)$$

$$1/N(a, x_k) < 1/N(x_m, x_k) < (1 + \varepsilon)/N(a, x_k) \quad (11)$$

saj mora $N(a, x_k) \rightarrow \infty$, ko gre indeks $k \rightarrow \infty$. Spomnimo se ocene (6), uporabimo jo na intervalu (x_m, x_k) in upoštevajmo, da je sedaj $M = \varepsilon$. Odkrijemo, da velja

$$1/(1 + \varepsilon) \leq (1/\pi N(x_m, x_k)) \int_{x_m}^{x_k} dt/h(t) \leq 1/(1 - \varepsilon)$$

Če upoštevamo še oceni (10) in (11), dobimo

$$1/(1 + \varepsilon)^2 < (1/\pi N(a, x_k)) \int_a^{x_k} dt/h(t) < \varepsilon + 1/(1 - \varepsilon)$$

Za dovolj velike x (dovolj velik k) je ε poljubno majhen, zato je nujno

$$\lim (1/\pi N(a, x_k)) \int_a^{x_k} dt/h(t) = 1 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (12)$$

Ker je za vsak x z intervala $[x_k, x_{k+1})$ izpolnjena enačba $N(a, x) = N(a, x_k)$, iz (12) brez težav ugotovimo, da je tudi

$$\lim (1/\pi N(a, x)) \int_a^x dt/h(t) = 1 \quad (x \rightarrow \infty)$$

to pa je tisto, kar smo hoteli pokazati, saj je zadnja enačba ekvivalentna Wimanovi formuli (2).

Druga funkcija, ki ne povzroča večjih problemov pri računanju lastnih vrednosti problema (4), je $Q(t) = k^2/(t + 1)^2$, $k > 1/2$. Lastne vrednosti so tokrat

$$\lambda_n = 1/(4k^2) + n/(k \log(T + 1)), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ker je $H(t) = (t + 1)/k$ in $H'(t) = 1/k$, nam da izrek I kot posledico

IZREK III: *Naj bodo izpolnjene začetne predpostavke izreka II. Če velja*

$$|h'(x) - 2K| \leq 2M \quad 0 < K < 1$$

na vsem intervalu $[a, b]$, ustreza število ničel oceni

$$((1 - M)^2 - K^2) \left(\int_a^b ds/h(s) \right)^2 \leq \pi^2 n^2 \leq ((1 + M)^2 - K^2) \left(\int_a^b ds/h(s) \right)^2 \quad (13)$$

Trditve ni težko preveriti. Transformacija, izražena z enačbo (3), ima sedaj obliko

$$k \log(t + 1) = k \int_0^t ds/(s + 1) = \int_a^x ds/h(s)$$

in posebej za $t = T$

$$k \log (T + 1) = \int_a^b ds/h(s)$$

Zato lahko izraz za lastne vrednosti preoblikujemo v

$$\lambda_n = 1/(4k^2) + \pi^2 n^2 / (\int_a^b ds/h(s))^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

in izrek I nam da takoj oceno

$$(1 - M)^2 \leq 1/(2k)^2 + \pi^2 n^2 / (\int_a^b ds/h(s))^2 \leq (1 + M)^2$$

Ta ocena je ekvivalentna oceni (13), ki smo jo želeli preveriti; treba je le označiti $K = 1/(2k)^2$ in jo nekoliko preurediti.

V nadaljevanju bomo z Wimanovo formulo (2) dokazali dva izreka za enačbe splošnejše oblike

$$(r(x)u')' + q(x)u = 0 \quad (14)$$

rezultate pa porabili za vračilo dolga, torej za posplošitev Wimanove formule same.

IZREK IV: Funkciji $r(x)$ in $q(x)$ v enačbi (14) naj bosta zvezno odvedljivi na intervalu $(0, \infty)$, $r(x)$ naj bo tudi pozitivna in $q(x)$ nenegativna na vsem intervalu; izpolnjena naj bosta pogoja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x dt/r(t) = \infty \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) d((r(x)q(x))^{-1/2})/dx = 0 \quad (16)$$

(obakrat $x \rightarrow \infty$). Potem velja za število ničel, ki jih imajo rešitve enačbe (14) na intervalu $(a, x]$, asimptotična ocena

$$N(a, x) \sim (1/\pi) \int_a^x (q(x)/r(x))^{1/2} dx \quad (17)$$

Izrek dokažemo takole: najprej uporabimo v enačbi (14) transformacijo

$$t = \int_a^x ds/r(s) = \varphi(x) \quad (18)$$

in dobimo enačbo

$$d^2u/dt^2 + r(x(t))q(x(t))u = 0 \quad (19)$$

x kot funkcija t je dan z inverzno funkcijo funkcije φ iz predpisa (18); ker je φ monoton naraščajoča, s tem ni težav. Zaradi predpostavk v izreku gre x nujno proti ∞ , ko tja hiti t . To nam skupaj s (16) pove, da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d((r(x(t))q(x(t)))^{-1/2})/dt = 0$$

enaka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) d((r(x(t))q(x(t)))^{-1/2})/dx = 0$$

Če označimo $h(t) = (r(x(t))q(x(t)))^{-1/2}$, je potemtakem $\lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = 0$; to je dovolj, da lahko uporabimo Wimanovo formulo (2), ki pravi, da je

$$N(0, \varphi(x)) \sim (1/\pi) \int_0^{\varphi(x)} (r(x(t))q(x(t)))^{1/2} dt$$

Upoštevajmo zvezo med spremenljivkama t in x (glej transformacijo (18)), pa ne bo težko uvideti, da je ta asimptotična ocena ekvivalentna oceni (17), ki jo je bilo treba dokazati.

IZREK V: Funkciji $r(x)$ in $q(x)$ naj ustrezata predpostavkam prejšnjega izreka. Poleg pogoja (16) naj namesto (15) velja še

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x q(t) dt = \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad (20)$$

Potem velja za število ničel ocena (17).

Izrek dokažemo podobno kot prejšnjega, podrobnosti najde bralec v [5]

Zadnja dva izreka nas pripeljeta do drobne, a elegantne posplošitve Wimanove formule (2).

IZREK VI: V enačbi

$$u'' + u/h^2(x) = 0 \quad (21)$$

naj bo $h(x)$ pozitivna in odvedljiva na intervalu $(0, \infty)$, funkcija $g(x) = (x^2 h^{-2}(x) - 1/4)^{1/2}$ realna in pozitivna.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (g^{-1}(x))' = 0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (22)$$

Potem velja za število ničel netrivialnih rešitev enačbe (21) asimptotična ocena

$$N(a, x) \sim (1/\pi) \int_a^x (g(s)/s) ds \quad (23)$$

Dokaz tega izreka je prav kratek; v enačbo (21) uvedemo novo spremenljivko z s predpisom $u = zx^{1/2}$; ta postopek nam da enačbo

$$(xz')' + g^2(x)x^{-1}z = 0$$

ki ima obliko (14), če vzamemo $r(x) = x$ in $q(x) = g^2(x)x^{-1}$. Zaradi predpostavke (22) velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) q((r(x) q(x))^{-1/2})/dx = \lim_{x \rightarrow \infty} x d(1/g(x))/dx = 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

S tem je očitno izpolnjen pogoj (15), porabimo lahko kar izrek IV in ocena (17) se direktno prepiše v iskani rezultat (23).

Kadar je $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = 0$, je zaradi

$$h(x) - h(0) = xh'(\theta) \quad (0 < \theta < x)$$

tudi $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2}h(x) = 0$. Direkten račun nam da

$$x(g^{-1}(x))' = (h'(x) - x^{-1}h(x))/(1 - (h^2(x)/4x^2))^{3/2}$$

zato je pogoj (22) iz zadnjega izreka izpolnjen vselej, ko je ustrezno Wimanovemu $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = 0$. Ker nam Wimanov pogoj pove tudi to, da je $\lim_{x \rightarrow \infty} xh^{-1}(x) = \infty$, velja asimptotično

$$g(x)/x \sim x(1/xh(x)) = 1/h(x)$$

Tako izrek VI vsebuje Wimanovo formulo (2) kot poseben primer, je pa splošnejši od nje: za enačbo

$$u'' + ((1 + \log x)/(4x^2 \log x))u = 0$$

lahko zadnji izrek uporabimo, Wimanovega rezultata pa ne, ker ni izpolnjen limitni pogoj za odvod funkcije $h(x)$.

Izrek VI nam da še za oči lepo oceno števila ničel, kadar $h(x)$ asimptotično postaja premica, $h(x) \sim mx + n$ ($0 < m < 2$). Takrat je $g(x) \sim (1/m^2 - 1/4)^{1/2}$, integral v (23) pa lahko eksplicitno izračunamo, kar da oceno

$$N(a, x) \sim (1/\pi) (1/m^2 - 1/4)^{1/2} \log x$$

S tem za oči prijetnim rezultatom končujemo ta kratki prikaz nekaterih najpreprostejših ocen za določanje števila ničel, ki jih premorejo rešitve diferencialnih enačb drugega reda. Ob koncu pripomnimo le še to, da tovrstne ocene niso koristne le za končne uporabnike matematičnih orodij, ampak tudi tam, kjer se ta orodja izdelujejo, med drugim na primer v teoriji parcialnih diferencialnih enačb in spektralni teoriji diferencialnih operatorjev. Bralcu, ki ga ti problemi podrobneje zanimajo, predlagamo za začetek delo [5] in bibliografijo v njem.

LITERATURA

- [1] Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, New York, John Wiley 1964.
- [2] Križanič F., *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Ljubljana, Državna založba 1974.
- [3] Nehari Z., *On the Zeros of Solutions of Sec. Order Diff. Equations*, Am. J. Math. 76 (1954), 689—697.
- [4] Nehari Z., *Oscillation Criteria for Second Order Lin. Diff. Eq.*, Trans. Am. Math. S. 85 (1957) 428—445.
- [5] Swanson C. A., *Comparison and Oscillation Theory of Lin. Diff. Eq.*, New York, Academic Press 1968.

PREJELI SMO V OCENO

Christian Berg, Gunnar Forst, *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups*. Springer — Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1975. Str. VIII + 197. Cena 59.— DM

V tej knjigi obravnavata avtorja moderno potencialno teorijo. Kaj je moderna potencialna teorija? Klasična potencialna teorija je študirala logaritmični in Newtonov potencial in ustrezni Laplaceov operator v dvo- in trirazsežnem evklidskem prostoru. Okoli l. 1930 so odkrili, da obstaja zveza med potencialno teorijo in teorijo Brownovega gibanja. Laplaceov operator v R^3 je namreč infinitezimalni generator Brownove polgrupe, ki opisuje prehodne verjetnosti pri Brownovem gibanju. Newtonovo potencialno jedro, to je funkcija $1/r$, pa je integral po času Brownove polgrupe. S posplošitvijo je nastala moderna potencialna teorija. Namesto evklidskega prostora vzamemo poljubno lokalno kompaktno Abelovo grupo G , namesto polgrupe prehodnih verjetnosti pa študiramo na G poljubno družino omejenih pozitivnih mer $\{\mu_t, t > 0\}$, ki je polgrupa za konvolucijo. Od polgrupe μ_t še zahtevamo, da integral $\int_0^\infty \mu_t dt$ obstaja in definira na G pozitivno mero, ki se imenuje potencialno jedro. Potentialna teorija študira lastnosti konvolucijskih polgrup na G in ustreznih potencialnih jeder. Pri tem se izkaže, da obstaja povratno enolična korespondenca med konvolucijskimi polgrupami na G in negativno definitnimi zveznimi funkcijami, definiranimi na dualni grupi grupe G . Zato imajo v tej teoriji pomembno vlogo pozitivno in negativno definitne funkcije.

Knjiga C. Berga in G. Forsta je razdeljena na tri poglavja. Prvo poglavje je pripravljeno. Obravnava harmonično analizo na lokalno kompaktnih Abelovih grupah, lastnosti pozitivno definitnih funkcij in Fourierovo transformacijo pozitivno definitnih mer. Drugo govori na splošno o krepko zveznih polgrupah, konvolucijskih polgrupah, negativno definitnih funkcijah in popolnoma monotonih funkcijah. Zadnje poglavje pa je posvečeno potencialni teoriji konvolucijskih polgrup in potencialnih jeder. Med tekstom so povsod posejani številni primeri in številne naloge. Na koncu pa je dokaj izčrpna bibliografija. Knjiga zahteva od bralca, da pozna osnove funkcionalne analize in teorije mere.

Ivan Vidav

MERJENJE MAJHNIH SVETLOBNIH TOKOV

JANEZ ŽITNIK

UDK 535.08-15

V članku je obdelanih nekaj problemov, ki se pojavljajo pri merjenju majhnih svetlobnih tokov.

MEASUREMENT OF WEAK LIGHT FLUXES

In this article some limitations, especially noise, of photosensitive devices are discussed.

Prispevek je posvečen merjenju majhnih svetlobnih tokov in težavam, ki nastopijo zaradi šuma. Navezuje se na članek P. Gosarja o zaznavanju infrardeče svetlobe s termičnimi in fotonskimi senzorji [2]. Omejili se bomo na dva termična in dva fotonska senzorja.

Bolometer

Bolometer je pravzaprav kalorimeter in uporovni termometer hkrati. To je ploščica iz platine ali polprevodnika s površino nekaj kvadratnih milimetrov in debelino nekaj stotink milimetra, ki je na eni strani počrnjena. Platinsko ploščico počrnijo tako, da nanjo pri nizkem tlaku naparijo plast zlata ali volframa. Odbojnost ploščice na počrnjeni strani je zelo majhna, tako da se praktično vsa vpadla svetloba absorbira. Na račun vpadlega svetlobnega toka se ploščica segreje in zato se ji upor spremeni. V prvem približku je relativna sprememba upora sorazmerna s temperaturno spremembo:

$$\Delta R/R = \alpha \Delta T \quad (1)$$

Bolometer lahko vežemo v eno od obeh vej Wheatstonovega mostička. Večkrat pa ga vežemo tako, da merimo spremembo napetosti na zaporednem upor R_d zaradi spremembe upora bolometra R (sl. 1).

Napetost na uporu R_d je

$$U = R_d U_0 / (R_d + R) \quad (2)$$

Spremembi upora bolometra za $-\Delta R$ ustreza sprememba napetosti

$$\begin{aligned} \Delta U &= R_d \Delta R U_0 / (R_d + R)^2 = R_d \Delta R I / (R_d + R) = \\ &= F I \Delta R = F I R \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (3)$$

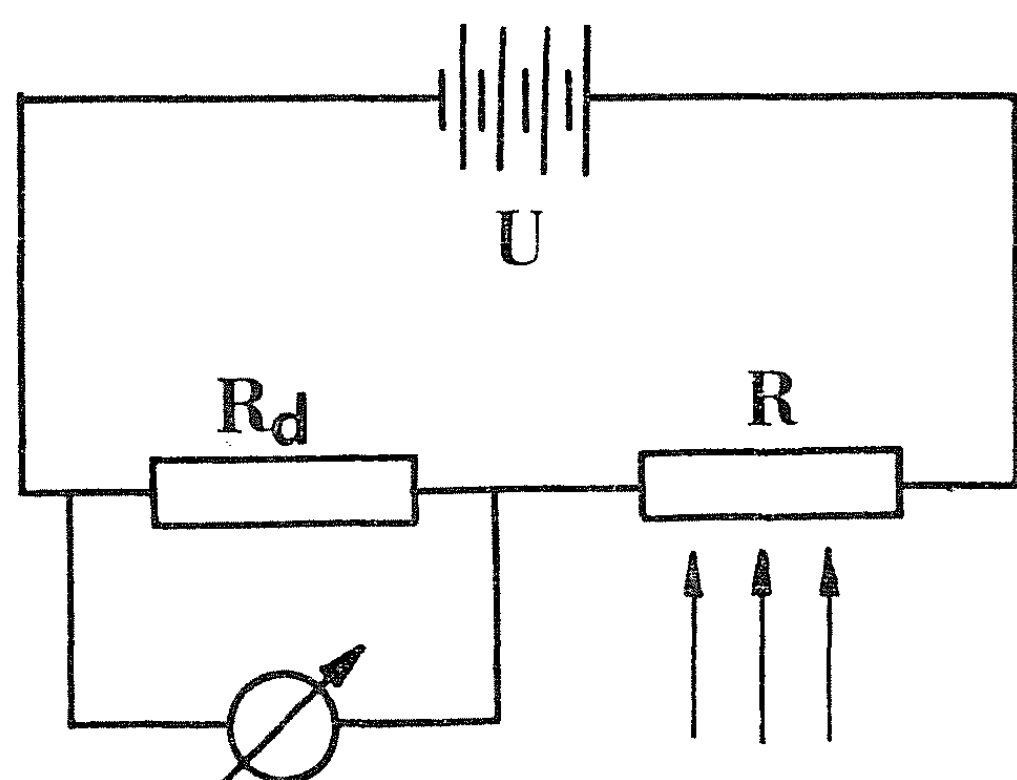
I je prvotni nemoteni tok skozi bolometer in

$$F = R_d / (R_d + R)$$

Sprememba upora bolometra je odvisna od vpadlega energijskega toka P . Zapišimo energijsko bilanco za bolometer, ki ima za ΔT višjo temperaturo kot okolica:

$$C d(\Delta T)/dt + \lambda \Delta T = P \quad (4)$$

Pri tem je C toplotna kapaciteta bolometra in λ koeficient prenosa toplote. Če je bolometer prilepljen na nosilno ploščico, je α določen z njeno toplotno prevodnostjo. Za črn bolometer,



Sl. 1. Vezava bolometra

prosto viseč v vakuumu, pa je razlika med energijskim tokom, ki ga bolometer seva v okolico, in energijskim tokom, ki ga prejema iz nje, $\sigma S(T^4 - T_0^4) = \sigma S\Delta(T^4) = 4\sigma ST^3\Delta T = \lambda\Delta T$. Torej je $\lambda = 4\sigma ST^3$, če je S površina počrtnjenega dela bolometra in σ Stefanova konstanta. Pri tem smo upoštevali, da ima druga stran bolometra veliko odbojnost, tako da bolometer seva in prejema energijski tok le na počrtnjeni strani.

Pri merjenju majhnih signalov se pokažejo težave, ker je merjenje majhnih enosmernih tokov in napetosti težavno. Zato pošljejo svetlobo, preden pade na bolometer, skozi zobato kolo ali kolo z režami, ki svetlobni curek razseka. Frekvenca, s katero se vrti kolo, je nekaj deset vrtljajev na sekundo. Upoštevali bomo samo osnovno Fourierovo komponento, kakor da niha energijski tok vpadle svetlobe sinusno: $P = P_0 \exp(i\omega t) + konst.$ Tudi temperatura niha podobno: $\Delta T = \Delta T_0 \exp(i\omega t) + konst.$ Iz enačbe (4) dobimo za amplitudo temperaturne razlike

$$|\Delta T_0| = P_0/\lambda(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2} \quad (5)$$

Koeficient C/λ označimo s τ in ga imenujemo tudi odzivni čas.

V enačbo (3) vstavimo ΔT_0 iz (5) in takoj sledi:

$$\Delta U = FIR\alpha P_0/\lambda(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2} \quad (6)$$

Kvocienat $\Delta U/P_0 = r$ je občutljivost bolometra:

$$r = FIR\alpha/\lambda(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2} \quad (7)$$

Za $\omega\tau \ll 1$ se izraz poenostavi:

$$r = FRI\alpha/\lambda = FRI\alpha/4S\sigma T^3 \quad (8)$$

Drugi izraz velja za bolometer v vakuumu. Za tak bolometer je ponavadi upor okoli 50 ohmov, površina okoli 1 mm² in $F = \frac{1}{2}$. Pri temperaturi 375 K in toku 4 mA je tedaj občutljivost približno 20 V/W.

Bolometri reagirajo na vpadlo svetlobo z odzivnim časom kake milisekunde. Njihova občutljivost je neodvisna od valovne dolžine. Zato jih uporabljajo zlasti v daljnem infrardečem območju, kjer drugi detektorji odpovedo.

Najmanjši še merljivi energijski tok omejujejo stohastično nihajoča napetost, ki se pojavi na vsakem upor zaradi termičnega gibanja prevodniških elektronov. Zato teče v upor majhen stohastično nihajoč tok. Pojav se imenuje termični šum. Povprečna moč termičnega šuma na enoto frekvenčnega intervala je [7]:

$$d\langle P_t \rangle/d\nu = 4kT \quad (9)$$

Vpadli svetlobni tok povzroči na izhodu padec napetosti $U_s = rP$. Kvadrat te signalne napetosti mora biti vsaj tako velik, kot je povprečni kvadrat fluktuacij napetosti zaradi termičnega šuma. Za frekvenčni interval $\Delta\nu$, na katerem merimo, sledi iz (9) omejitvev:

$$P_{min}^2 = U_s^2/r^2 = \langle U_t^2 \rangle/r^2 = 4kTR\Delta\nu/r^2 \quad (10)$$

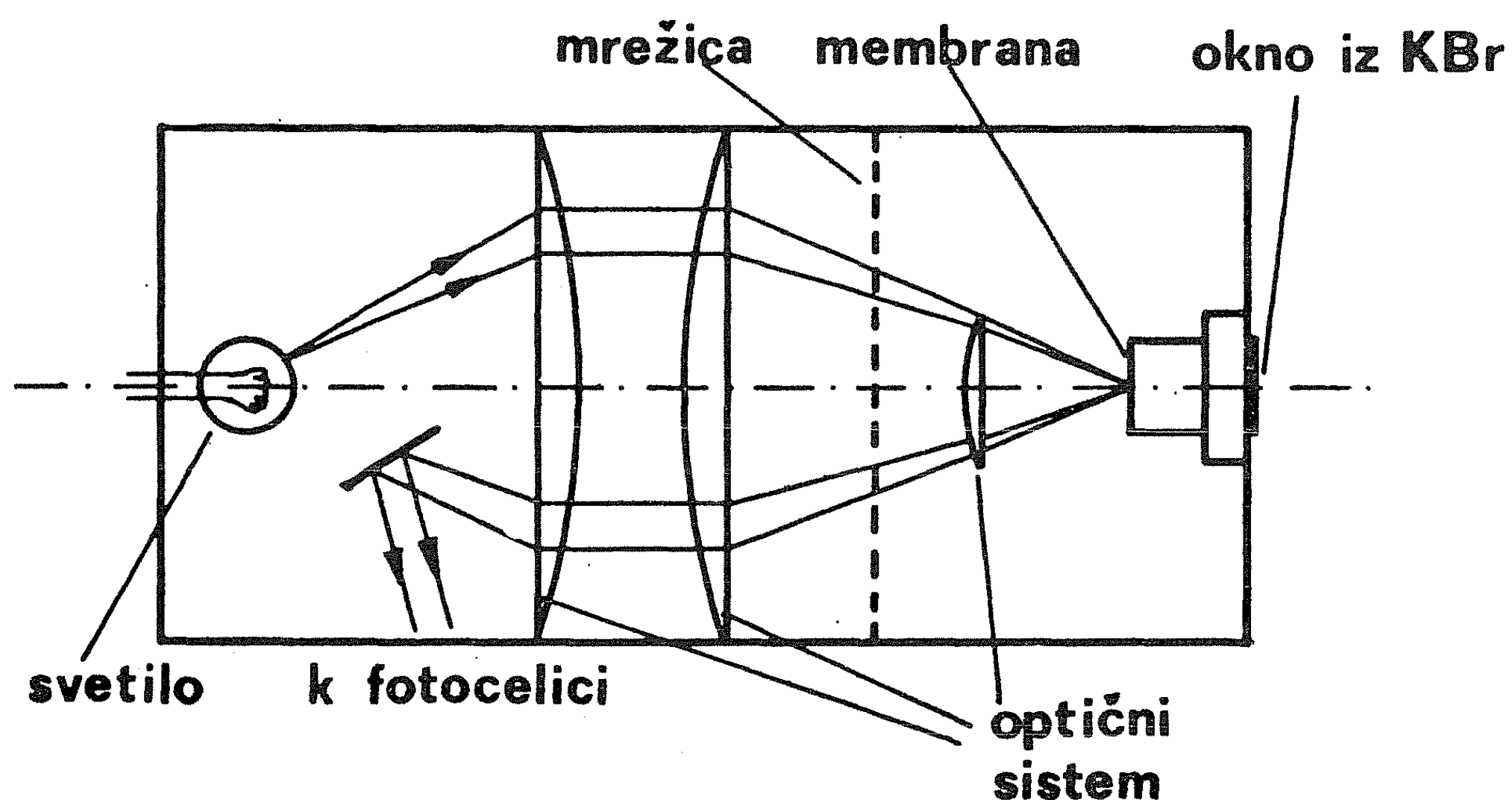
Za širino frekvenčnega pasu $\Delta\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ je za običajne bolometre pri sobni temperaturi najmanjša merljiva moč okoli 10^{-10} W . Dosti manjših moči pri sobni temperaturi ne moremo meriti, pogosto pa si pomagamo s hlajenjem.

Precej manjše moči merijo s supraprevodnimi bolometri. V bližini kritične točke za prehod v supraprevodno stanje se namreč nekaterim snovem upor zelo hitro spreminja. Meritev ni preprosta, ker je treba meriti majhno napetost. Najpreprostejša rešitev je ta, da izmenični signal transformirajo s transformatorjem, hlajenim s tekočim helijem, da se izognejo dodatnemu šumu. Signal nato še ojačijo z ozkopasovnim ojačevalnikom. Bolometer

in transformator sta skupaj v kriostatu [3]. S supraprevodnim bolometrom iz niobijevega nitrída so pri temperaturi 10 K izmerili energijski tok 10^{-12} W. Občutljivost bolometra na območju valovnih dolžin od 1 m do 1500 m je skoraj konstantna.

Golayeva celica

Golayeva celica je pravzaprav zelo občutljiv plinski termometer. V posodici kockaste oblike z robom nekaj milimetrov je plin. Posodica ima na eni strani okence, prekrito s ploščico iz KBr, ki močno absorbira svetlobo. Na drugi strani pa ima odprtino s prožno membrano ali tanko plastjo kovine. Ta je na zunanji strani prevlečena s kovinsko prevleko, da odbija svetlobo. Zaradi absorbiranega svetlobnega toka se plin segreje in razpne: membrana se izboči. Na membrano pada skozi posebno mrežico curek vidne svetlobe. Mrežica se preslika sama vase. Zaradi premikov membrane se mrežica in njena slika bolj ali manj prekrivata. Prepuščena svetloba pade na fotocelico, s katero merimo odziv (sl. 2).



Sl. 2. Golayeva celica

Poglejmo, kolikšna je občutljivost Golayeve celice. Svetloba pade na občutljivi del stene in temperatura plina naraste. Sprememba temperature plina je

$$\Delta T = P/\lambda \quad (11)$$

Koeficient prenosa toplote λ je določen s toplotno prevodnostjo celične stene in lastnostmi plina v celici. Zaradi spremembe temperature se tlak v posodi spremeni za Δp .

Iz enačbe $pV/T = konst.$ sledi

$$V\Delta p + pSx = pV\Delta T/T \quad (12)$$

Površino membrane smo označili z S in njen premik z x . V ravnovesju napetost membrane uravnovesi povečanje tlaka v posodici:

$$\kappa x = S\Delta p = pS\Delta T/T - pS^2x/V \quad (13)$$

κ je konstanta prožnosti. Iz tega sledi za premik membrane

$$x = SpV\Delta T/T(\kappa V + pS^2) = SpPV/\lambda(\kappa V + pS^2) \quad (14)$$

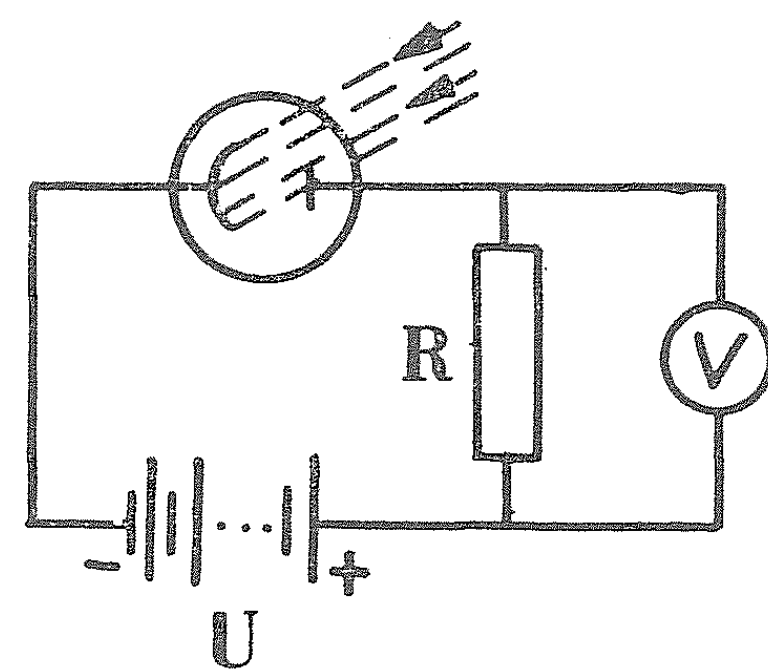
Odziv fotocelice je odvisen od premika membrane. Golayeva celica je presenetljivo občutljiv detektor. Najmanjši še merljivi energijski tok je okrog 10^{-11} W. Kot pri vseh termičnih merilnikih je njen odziv neodvisen od valovne dolžine vpadle svetlobe. Tudi Golayevo celico uporabljajo predvsem na infrardečem območju. Nevšečno je le to, da je njen odzivni čas — okrog 10^{-2} s — precej dolg v primerjavi z odzivnim časom drugih detektorjev.

Fotocelica

Fotocelica, ki izkorišča zunanji fotoefekt, spada k fotonskim senzorjem. Vpadla svetloba izbije iz fotokatode elektrone in anoda jih posrka. V anodnem krogu steče električni tok, ki ga merimo. Namesto toka merimo raje napetost na delovnem upor (sl. 3).

Tok izbitih elektronov izrazimo s povprečnim številom vpadlih fotonov na časovno enoto. To število je $P/h\nu$, če je P energijski tok vpadle svetlobe in ν njena frekvenca. Vsak foton pa ne izbije elektrona, ampak se pri dobrih fotocelicih to posreči približno vsakemu stotemu. Upoštevati je treba torej še kvantni izkoristek η fotocelice, tako da je fotoelektrični tok

$$I_f = \eta e_0 P / h\nu \quad (15)$$



Sl. 3. Vezava fotocelice

Izkoristek fotocelice je odvisen od valovne dolžine vpadle svetlobe in od snovi, iz katere je zgrajena katoda. Nekaj podatkov je zbranih v preglednici 1.

Preglednica 1. Lastnosti fotokatod

Snov	λ	η	temni tok (300 K)
Ag-0-Cs	0,80 μm	0,5%	$10^{-11} \text{ — } 10^{-13} \text{ A/cm}^2$
Cs ₂ -Sb	0,50 μm	30%	$10^{-14} \text{ — } 10^{-15} \text{ A/cm}^2$
NaKSb-Cs	0,40 μm	15%	$10^{-13} \text{ — } 10^{-14} \text{ A/cm}^2$
	0,90 μm	0,5%	
Cs-Sb	0,35 μm	25%	10^{-14} A/cm^2
GaAs-Cs	0,40 μm	35%	10^{-14} A/cm^2
	0,90 μm	2%	10^{-16} A/cm^2

Izkoristek povečajo tako, da katodo oblože s stekleno plastjo. Poševni svetlobni curek, ki vstopi skozi prizmatični del, se v steklu večkrat totalno odbije (sl. 4). Tako kvantni izkoristek povečajo dva- do petkrat.

Občutljivost fotocelice definiramo kot razmerje med padcem napetosti na izhodnem uporu in vpadlim energijskim tokom:

$$r = U/P = RI_f/P = \eta e_0 R / h\nu \quad (16)$$

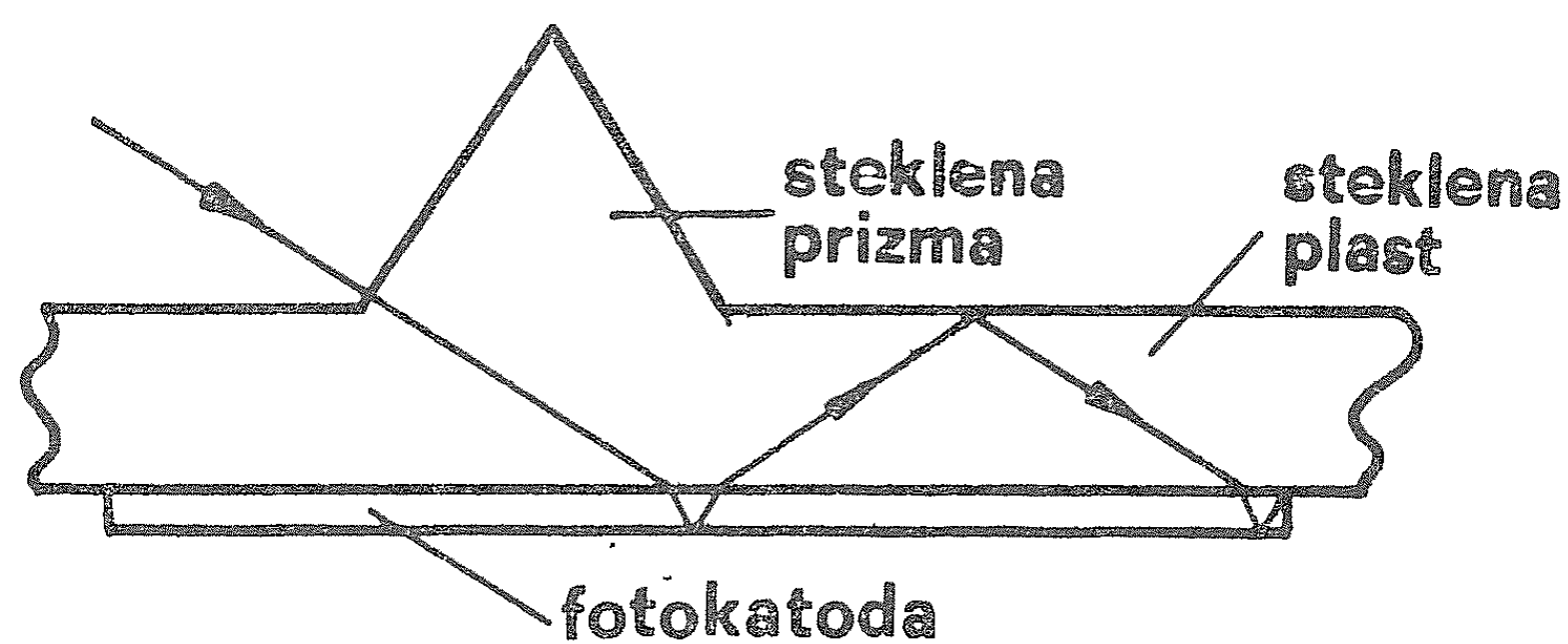
Tipični izhodni upor je kakih deset megohmov in izkoristek 0,02. Tako je občutljivost približno 10^5 V/W .

Da ocenimo najmanjši merljivi svetlobni tok, moramo pri fotocelici poleg termičnega šuma upoštevati še temni tok in zrnati šum. Okvirno obdelajmo oba pojava. Ko fotocelico priklopimo na napetost, opazimo, da že v temi teče majhen tok, ponavadi kakih 10^{-12} A . Ta tok, ki si ga razlagamo predvsem s termično emisijo, imenujemo temni tok. Njegovo gostoto ocenimo z Richardsonovo enačbo:

$$I/S = AT^2 \exp(-e_0 \phi / kT)$$

Izstopno delo smo označili s ϕ , A pa je konstanta — približno $1,2 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2\text{K}^2$. K temnemu toku prispeva še površinsko prevajanje po steklu fotocelice.

Tok, ki izvira iz katode, ni »gladek« ampak zrnat. Fotoni, ki padejo na fotocelico, so slučajno porazdeljeni po času. Če je fotonov malo, je njihova porazdelitev približno Poissonova. Prav tako fluktuiira okrog povprečne vrednosti tudi število izbitih elektronov na



Sl. 4. Naprava za izboljšanje kvantnega izkoristka fotocelice

časovno enoto. Efektivni odmik od povprečnega števila izbitih elektronov dobimo iz znane enačbe $\Delta n = \bar{n}^{1/2}$. Temu pojavu pravimo zrnati šum.

Prispevek izbitega elektrona j k skupnemu toku zapišemo z Diracovim delta:

$$I_j(t) = e_0 \delta(t - t')$$

Spektralno amplitudo izrazimo s Fourierovo transformacijo:

$$A(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} I_j(t) \exp(i\omega t) dt = (e_0/2\pi) \exp(i\omega t')$$

Če je povprečno število izbitih elektronov $\bar{n}$, je spektralna gostota moči, ki jo prejema delovni upor:

$$d\langle P \rangle / d\nu = 8\pi^2 R \bar{n} |A(\omega)|^2 = 2\bar{n} R e_0^2 = 2\bar{I} R e_0 \quad (17)$$

Pri tem je $\bar{I} = \bar{n}e_0$ povprečni tok. Posebnost zrnatega šuma je, da je $d\langle P \rangle / d\nu$ konstantno. Tak šum se imenuje beli šum.

Približno ocenimo še najmanjši merljivi svetlobni tok. Če merimo tok na izhodu fotocelice, mora biti šum manjši kot fotoelektrični tok. Iz tega sledi, podobno kot pri bolometru:

$$RI_f^2 \leq 4kT\Delta\nu + 2e_0 R \bar{I} \Delta\nu \quad (18)$$

Ob pripravo izbranim delovnem uporom okoli 10^7 ohm je navadno drugi člen zanemarljiv. Pri sobni temperaturi in $\Delta\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ je

$$P_{min} = h\nu I_{min} / \eta e_0 = 10^{-11} \text{ W}$$

Občutljivost izboljšamo s hlajenjem delovnega upora. Tako dosežemo najmanjše merljive moči okoli 10^{-12} W . Še boljše rezultate dobimo s fotopomnoževalko. Zrnati šum sedaj prevladuje zaradi velikega ojačenja in dodatnega šuma pri sekundarni emisiji elektronov.

Fluktuacije toka v prvem dinodnem krogu sestavljata dva prispevka. To sta prispevek zaradi šuma ojačenega primarnega fotoelektričnega toka in prispevek zaradi fluktuacij števila sekundarnih elektronov. Iz enačbe (17) sledi po množenju z R za povprečni kvadrat fluktuacij napetosti

$$\bar{U}_1^2 = 2e_0 \bar{I}_1 R^2 \Delta\nu + m_1^2 \bar{U}^2 = 2e_0 \bar{I}_0 m_1 R^2 \Delta\nu + m_1^2 2e_0 \bar{I}_0 R^2 \Delta\nu = \bar{U}^2 m_1 (1 + m_1)$$

Pri tem je m_1 ojačenje v krogu prve dinode. S podobnim sklepanjem sledi za fluktuacije napetosti v dinodnem krogu n :

$$\bar{U}_n^2 = \bar{U}^2 m_1 m_2 \dots m_n (1 + m_n + \dots + m_n m_{n-1} \dots m_2 m_1)$$

Približno lahko vzamemo, da je $m_1 = m_2 = \dots m_n$ in vpeljemo polno ojačenje fotopomnoževalke $m^n = M$. Za fluktuacije napetosti na delovnem uporom sledi potem:

$$\bar{U}_n^2 = 2e_0 \bar{I}_0 R^2 \Delta\nu M (m^{n+1} + 1) / (m - 1) \quad (19)$$

Ker je $m^{n+1} \gg 1$, lahko enačbo (19) poenostavimo

$$\bar{U}_n^2 = 2e_0 \bar{I}_0 R^2 \Delta\nu M^2 m / (m - 1)$$

Ko upoštevamo še termični šum, sledi za oceno najmanjšega svetlobnega toka

$$P_{min} = [4kTR\Delta\nu + 2e_0 \bar{I}_0 \Delta\nu M^2 R^2 m / (m - 1)]^{1/2} / r$$

Pri običajnih fotopomnoževalkah z ojačenjem od 10^5 do 10^7 je najmanjši merljivi energijski tok okoli 10^{-14} W .

Fotodiodo sestavljata območji polprevodnika p in polprevodnika n. V stacionarnem stanju skozi spoj p-n ne teče noben tok. Ko priklopimo na območje p negativni in na območje n pozitivni priključek baterije, steče v zaporni smeri samo majhen tok, ki je takole odvisen od napetosti [4]:

$$I = I_0[\exp(e_0 U/kT) - 1]$$

I_0 je tok nasičenja skozi diodo.

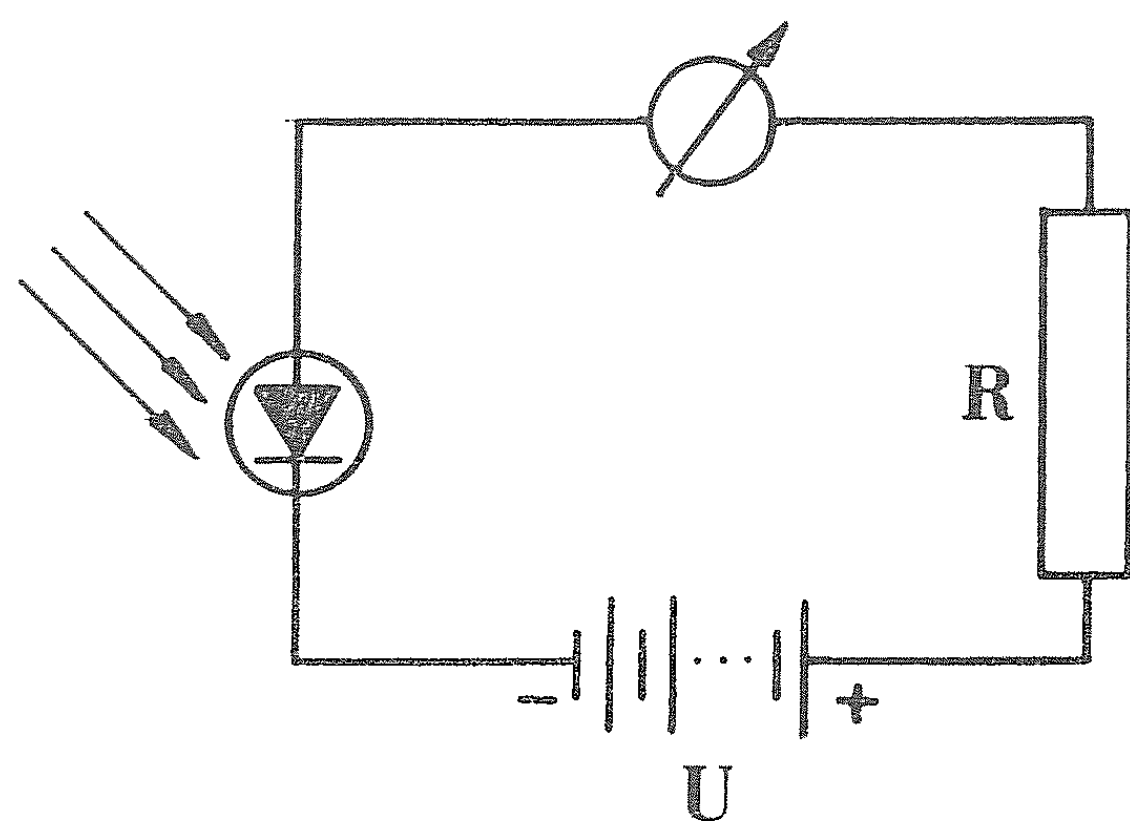
Ko spoj p-n osvetlimo, vpadli fotoni povzročijo, da se v neposredni bližini spoja pojavijo pari elektron-vrzel. Tok v krogu, v katerem je skupaj z delovnim uporom R vezana dioda, je

$$I = I_0[\exp(e_0(\varphi - U)/kT) - 1] - I_f$$

φ je padec napetosti na fotodiodi in U napetost na bateriji v krogu (sl. 5). Navadno merimo tok skozi delovni upor R . Takemu načinu obratovanja diode pravimo fotodiodni režim. Ta se razlikuje od režima brez zunanje gonilne napetosti, ki ga imenujemo tudi ventilni režim.

Občutljivost fotodiode omejujeta termični in zrnati šum. Iz (18) sledi:

$$I_{min}^2 = 2e_0 \bar{I}_0 \Delta\nu + 4kT\Delta\nu/R$$



Sl. 5. Dioda v fotodiodnem režimu

Za tok nasičenja 10^{-8} A in delovni upor 10^7 ohm pri $\Delta\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ in sobni temperaturi je minimalni tok približno $7 \cdot 10^{-14}$ A. Tak tok steče skozi diodo pri kvantnem izkoristku 0,8 že, če pade na fotodiodo kakih 10^5 fotonov. Ker je energija posameznega fotona nekaj elektronvoltov, je najmanjši merljivi energijski tok približno 10^{-12} W. Šum zmanjšajo s hlajenjem, vendar je tedaj odziv senzorja nekoliko počasnejši. Ponavadi je odzivni čas germanijevih ali silicijevih diod nekaj mikrosekund.

LITERATURA

- [1] D. Hadži, *Infrardeči spektrometri*, Obzornik mat. fiz. 2 (1952) 128.
- [2] P. Gosar, *Senzorji za infrardečo svetlobo*, Obzornik mat. fiz. 22 (1975) 139.
- [3] F.X. Eder, *Moderne Messmethoden der Physik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.
- [4] J. Strnad, *Moderna fizika*, Univerza v Ljubljani 1973, str. 556.
- [5] Smith, Jones, Chasmar, *The Detection and Measurement of Infrared Radiation*, Oxford University Press 1968.
- [6] Kruse, Mc Glauchlin, Mc Quistan, *Elements of Infrared Technology*, Wiley, New York 1962.
- [7] J.J. Freeman, *Principles of Noise*, Wiley, New York 1958.
- [8] N.A. Soboleva in drugi, *Fotoelektronni pripori*, Nauka, Moskva 1965.

OBVESTILO

Uredniški odbor Obzornika za matematiko in fiziko prosi sodelavce, da oddajo prispevke za Obzornik v dveh izvodih. To velja tudi za vse druge publikacije pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS. Sklep o tem je sprejel upravni odbor Komisije za tisk ob soglasju vseh uredniških odborov. Zaradi povečanega števila publikacij in vedno večjega števila sodelavcev obstaja namreč nevarnost, da bi se edini izvod na poti od avtorja do izida izgubil.

Janez Strnad

KVARKONIJ

Pred kratkim so potrdili obstoj mezona Y z maso okoli desetih mas protona [1]. Domneva, da ga sestavljata peti kvark in njegov antikvark, dobiva vedno več podpore [2], [3]. Najnovejši podatki izvirajo s sestanka o interakcijah leptonov in fotonov konec avgusta v Hamburgu [4], [5].

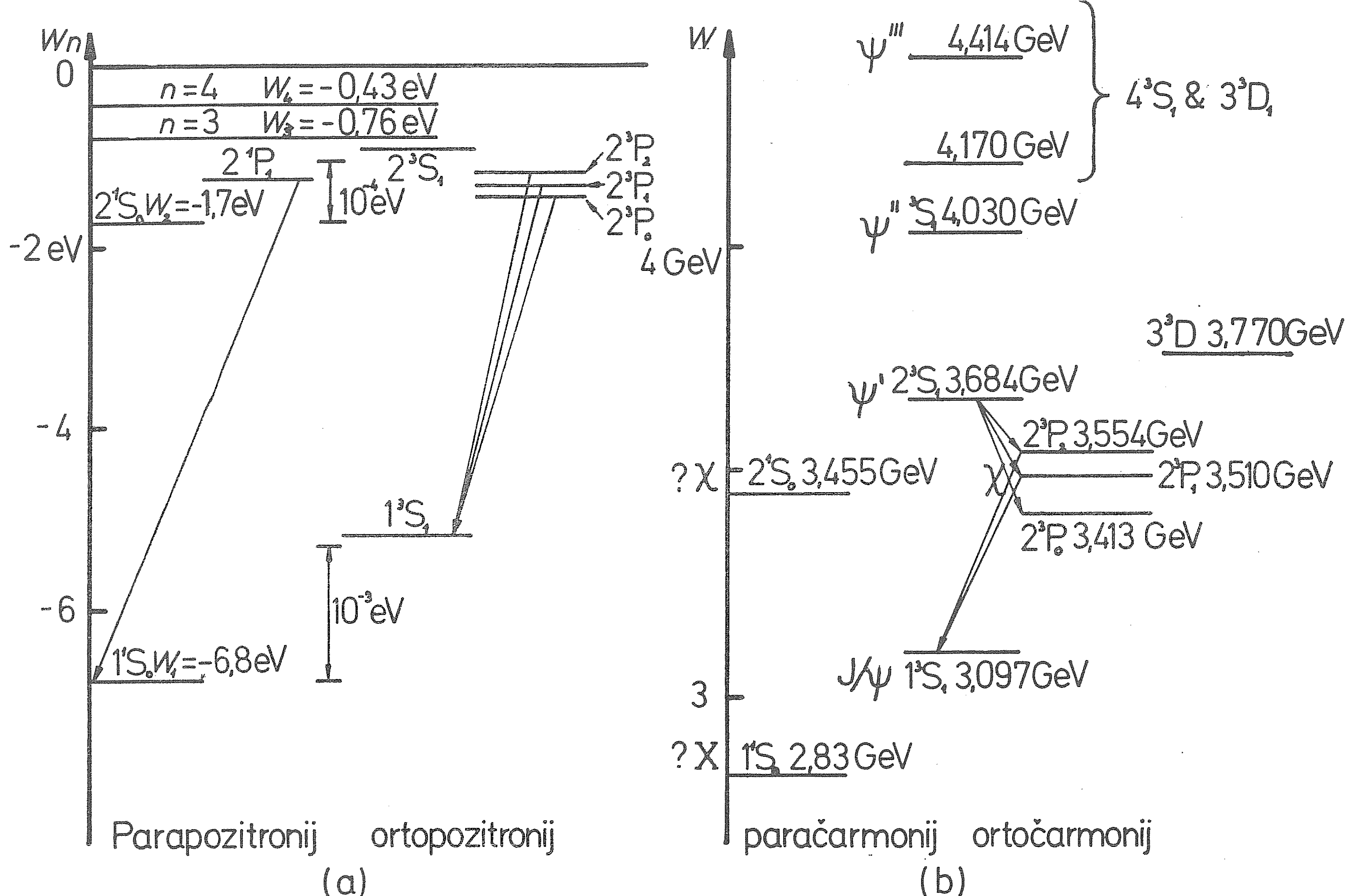
Najprej posezimo nekoliko nazaj. Pred tremi leti so odkrili delec, za katerega se je udomačilo ime J/ψ in delec ψ' [6]. Od tedaj se je naše znanje o osnovnih delcih izdatno obogatilo. Kvarki, ki so jih nekateri imeli zgolj za koristno računsko pomagalo, so postali nepogrešljiva sestavina teorije. Zdaj veljajo za prave delce — s posebnostjo, da ne morejo nastopati prosti. Trem prejšnjim kvarkom u , d in s se je pridružil četrti kvark c s čarom. Delca J/ψ in ψ' in sorodne delce sestavljata kvark c in njegov antikvark $\bar{c}$ [7].

Vezen sistem kvarka c in antikvarka $\bar{c}$ je podoben *pozitroniju*, ki ga sestavljata elektron in pozitron. Ta spominja na vodikov atom, le da ima namesto jedra pozitron. Pozitronij je teoretično dobro raziskan [8]. Že zdavnaj so tudi premerili njegovi osnovni stanji. Spina obeh delcev sta namreč lahko vzporedna ali nasprotno vzporedna. V prvem primeru gre za *ortopozitronij* s spinom 1, ki da pri anihilaciji tri fotone, in v drugem za *parapozitronij* s spinom 0, ki da pri anihilaciji dva fotona [9]. Prvo vzbujeno stanje pozitronija pa so opazili šele pred dvema letoma [10].

Pozitronijev spekter spominja na vodikovega. Treba je le upoštevati, da je reducirana masa dvakrat manjša in so zato tudi lastne energije po absolutni vrednosti dvakrat manjše: $W_n = -m_e c^2 \alpha^2 / 4n^2$ ($\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c$ je konstanta fine strukture in n glavno kvantno število). Tako ustreza na primer prehodu iz prvega vzbujenega stanja ($n = 2$) v osnovno stanje ($n = 1$), to je prvi črti Lymanove serije, pri pozitroniju dvakrat večja valovna dolžina (2430 Å) [10] kot pri vodiku (1216 Å). Zaradi fine razcepitve so lastne energije odvisne tudi od tirnega kvantnega števila l , in sicer v splošnem naraščajo z naraščajočim l . Velikostna stopnja tega razcepa je $|W_n| \propto \alpha^2$. Parapozitronijeva stanja so enojna (singletna), ortopozitronijeva pa trojna (tripletna); dve ortopozitronijevi stanji sta pod ustreznim parapozitronijevim stanjem, tretje pa je nad njim. Izjeme so le ortopozitronijeva stanja s tirnim kvantnim številom $l = 0$, ki so precej nad ustreznim parapozitronijevim stanjem in so enojna.

Zaradi podobnosti s pozitronijem imenujemo sistem kvarka c in antikvarka $\bar{c}$ *čarmonij*. Kvark in antikvark veže drugačen potencial od Coulombovega in o njegovi obliki šele ugi-bajo. Pogosto vzamejo zanj približno $V(r) = -c\hbar(\alpha_s/r)(1 - r^2/a^2)$ in dobijo za »močno« sklopitveno konstanto α_s 0,2 do 0,26, za a 0,2 fm in za lastno energijo čarobnega kvarka 1,6 GeV [12]. Vsekakor je sklopitvena konstanta α_s precej večja od elektromagnetne sklopitvene konstante, to je od konstante fine strukture $\alpha = 1/137$. Zato je pri čarmoniju fina razcepitev znatno večja kot pri pozitroniju. Ima enako velikostno stopnjo kot energijska razlika med sosednjima stanjema z različnima glavnima kvantnima številoma. Delcu J/ψ z lastno energijo 3,1 GeV in s spinom 1 ustreza osnovno stanje ortočarmonija 1^3S_1 in delcu ψ' z lastno energijo 3,7 GeV in s spinom 1 vzbujeno stanje ortočarmonija 2^3S_1 z glavnim kvantnim številom $n = 2$ in tirnim kvantnim številom $l = 0$.

Spekter čarmonija so napovedali kmalu po odkritju delcev J/ψ in ψ' [11], [12]. Poznejše merske ugotovitve so se sorazmerno dobro skladale z napovedmi za druga stanja. Resonanca η_c ali X z lastno energijo 2,82 GeV bi morda utegnila ustrezati osnovnemu stanju paračarmonija 1^1S_0 in resonanca η_c' ali $\chi(3,4)$ z lastno energijo 3,45 GeV prvemu vzbujenemu stanju paračarmonija 2^1S_0 z $n = 1$ in $l = 0$. Mnogo bolj gotovo je, da ustreza trodelna resonanca $\chi(3,5)$ ali P_c trem stanjem ortočarmonija 2^3P_0 , 2^3P_1 in 2^3P_2 z $n = 2$,



Sl. 1. Spekter pozitronija (a) in spekter čarmonija (b); stanja so označena s spektroskopskimi oznakami: prvo je glavno kvantno število, zgornji indeks se nanaša na skupni spin (1 za singlet-para, 3 za triplet-orto), S, P, D... ustrezajo po vrsti vrednostim 0, 1, 2... tirnega kvantnega števila l , spodnji indeks je kvantno število polne vrtilne količine j , ki je enako $l + 1$ ali l ali $l - 1$. Poševne črte ustrezajo električnim dipolnim prehodom pri pozitroniju in prehodom z izsevanjem fotona γ pri čarmoniju

$l = 1$ in $j = 0, 1, 2$. Zanje so napovedali srednjo lastno energijo $3,457$ GeV, merjenje pa je dalo $(3,522 \pm 0,005)$ GeV*. Široke resonance z lastnimi energijami $4,03$ GeV (ψ''), $4,17$ GeV in $4,41$ GeV (ψ''') pa ustrezajo višjim vzbujenim stanjem ortočarmonija. Verjetno ustreza prva stanju 3^3S_1 , drugi dve pa različnima mešanicama stanj 4^3S_1 in 3^3D_1 . Pozneje so napovedali še stanje ortočarmonija 3^3D z $n = 3$ in $l = 2$ z lastno energijo $3,755$ GeV. Na hamburškem sestanku so poročali o odkritju tega stanja z lastno energijo $(3,770 \pm 0,005)$ GeV raziskovalci, ki delajo ob stanfordskem nakopičevalniku SPEAR in ob hamburškem nakopičevalniku DORIS. Prej se je izmaknilo odkritju, ker so sicer skrbno preiskali območje nad 4 GeV, območje med $3,7$ in 4 GeV pa le površno. To odkritje je vsekakor lep uspeh čarmonijske teorije.

Medtem so odkrili čarobna nevtralna mezona D^0 (iz antikvarka $\bar{u}$ in kvarka c , na kratko $(\bar{u}c)$) in $\bar{D}^0$ ($u\bar{c}$) ter čarobna nabita mezona D^+ ($\bar{d}c$) in D^- ($d\bar{c}$) z lastno energijo okoli 2 GeV [13]. Ti mezoni imajo spin 0 — spina kvarka in antikvarka sta nasprotno vzporedna — ali spin 1 (tedaj dobi simbol kot zgornji indeks še zvezdico) — spina kvarka in antikvarka sta vzporedna. Poročajo pa tudi že o odkritju čarobnih mezonov F^+ ($\bar{s}c$) in F^- ($s\bar{c}$), ki imata za razliko od prejšnjih od nič različno čudnost.

Po izmerjenem razmerju verjetnosti za reakciji $e^- + e^+ \rightarrow \text{hadron} + \dots$ in $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ so sklepali, da obstaja šest različnih vrst kvarkov [14]. Največja spodbuda za nadaljnji razvoj je v tej zvezi ravno potrditev obstoja delca Y . O tem delcu so poročali

* Merski podatki za 3P_0 , 3P_1 in 3P_2 so po vrsti $3,414$ GeV; $3,508$ GeV in $3,552$ GeV [16].

raziskovalci z univerze Columbia, ki delajo pod vodstvom L.M. Ledermana na batavijskem sinhrotronu. O delcu so govorili že precej časa, a zdaj kaže, da o njegovem obstoju ni več dvoma. Tarčo iz bakra ali iz platine so obstreljevali s protoni s kinetično energijo 400 GeV. Zanimali so se za reakcije, pri katerih sta nastala negativni in pozitivni mion s skupno energijo nad 5 GeV in drugi delci. Miona so zaznavali z magnetnim spektrometrom z dvema krakoma. Preiskali so skupno $1,6 \cdot 10^{16}$ reakcij. Pri 9000 izmed njih je nastal mionski par.* Na območju okoli 9,5 GeV so opazili izdatno povečanje števila mionskih parov.

Medtem ko bi jih pričakovali okoli 350, so jih zaznali 770 [1]. Kaže, da je mogoče to povečanje pripisati resonancama Υ in Υ' z lastnima energijama 9,44 GeV in 10,2 GeV, od katerih je ena trikrat izrazitejša kot druga. Resonanci sta dokaj široki: pri reakciji med hitrim protonom in jedrom nastaneta delca Υ in Υ' , od katerih vsak po zelo kratkem času razpade na par $\mu^-\mu^+$.

Delca Υ in Υ' sta podobna delcema J/ψ in ψ' , le da ju sestavljata težji kvark b in njegov antikvark $\bar{b}$ [2]—[5], [15]. b je peti kvark izmed napovedane šesterice z novim kvantnim številom *lepoto* (*beauty* po imenu za kvark b, ki izvira od oznake »bottom« — dno. Šesti kvark t — za »top« — vrh — naj bi imel še dodatno kvantno število *resnico* — *truth*, vendar zanj za zdaj ni eksperimentalne osnove). Sistem vezanega kvarka in njegovega antikvarka so imenovali *kvarkonij*. Od obeh znanih sistemov te vrste,** mezona ψ ($c\bar{c}$ — čarmonija) in mezona Υ ($b\bar{b}$), ima slednji precej večjo maso. Z malo spremenjeno čarmonijsko teorijo so pojasnili vse doslej ugotovljene lastnosti mezona Υ . Pri tem je treba upoštevati predvsem večjo lastno energijo kvarka b, nad 5 GeV. Nerelativistični opis s potencialom pa je tako tem boljši, čim večjo maso ima kvark.

Štirje kvarki u, d, s in c so nekako ustrezali štirim leptonom e^- , ν_e , μ^- in ν_μ . Vsi ti delci so točkasti fermioni s spinom $\frac{1}{2}$. Težkemu kvarku b bi ustrezal po tem *težki lepton* τ in težkemu kvarku t njegov nevtrino ν_τ . Na hamburškem sestanku so navedli dodatne dokaze o obstoju težkega leptona. Že dve leti so ob SPEAR opazovali povečanje preseka za reakcije elektronov in pozitronov pri skupni energiji okoli 4 GeV. Samo del tega gre na račun praga za nastanek para mezonov D. Skupina M. Perla je opazovala zadnje čase z novimi merilniki reakcije, pri katerih sta nastala elektron in mion z nasprotnima znakoma naboja in so velik del energije odnesli nevtralni delci. Ta merjenja, ki so jih ponovili tudi ob DORIS, kažejo s čedalje večjo zanesljivostjo, da gre del povečanja preseka na račun praga za nastanek para težkih leptonov τ^- in τ^+ . Leptona nastaneta $e^- + e^+ \rightarrow \tau^- + \tau^+$ in po zelo kratkem času razpadeta. Težki lepton τ^- ali τ^+ naj bi imel tedaj lastno energijo med 1,85 GeV in 1,9 GeV. Zgornja meja za lastno energijo njegovega nevtrina ν_τ pa je 0,6 GeV [18].

Tako se je v zadnjem času precej zjasnila slika, čeprav je še dosti nerešenih vprašanj. Pomembno je, da se zdi pot v prihodnost pregledna, tako da je mogoče načrtovati pomembne poskuse.

Janez Strnad

LITERATURA

[1] S.W. Herb, D.C. Hom, L.M. Lederman, J.C. Sens, H.D. Snyder, J.K. Yoh, J.A. Appel, B.C. Brown, C.N. Brown, W.R. Innes, K. Ueno, T. Yamaguchi, A.S. Ito, H. Jostlein, D.M. Kaplan, R.D. Kephart, *Observation of a Dimuon Resonance at 9,5 GeV in 400 GeV Proton-Nucleus Collisions*, Phys. Rev. Letters **39** (1977) 252.

[2] C. E. Carlson, R. Suaya, Υ (9,5) as Bound State of New Heavy Quarks, Phys. Rev. Letters **39** (1977) 908.

[3] G. J. Aubrecht, W. W. Wade, *Production of Υ (9,5) in e^+e^- — Annihilation and Photoproduction*, Phys. Rev. Letters **39** (1977) 978.

[4] D. J. Miller, *Elementary particles — a rich harvest*, Nature **269** (1977) 286.

* Do oktobra so premerili že 27000 mionskih parov in zaslutili še tretji vrh pri 10,4 GeV [17].

** Mezone ρ , ω in Φ sestavljajo tri različne mešanice parov $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ in $s\bar{s}$.

- [5] *New quarks in the hills of upsilon*, New Scientist **75** (1977) 590.
- [6] *Nova delca*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 42.
- [7] B. Golli, *Delci ψ v modelu kvarkov*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 193.
- [8] R.A. Ferrell, *The Positronium Fine Structure*, Phys. Rev. **84** (1951) 858.
- [9] S. Kandare, *Pozitronij*, Obzornik mat. fiz. **2** (1952) 181.
- [10] K.F. Canter, A.P. Mills, S. Berko, *Observation of Positronium Lyman α Radiation*, Phys. Rev. Letters **34** (1975) 177.
- [11] T. Appelquist, A. De Rujula, H.D. Politzer, S.L. Glashow, *Spectroscopy of the New Mesons*, Phys. Rev. Letters **34** (1975) 365.
- [12] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, T.-M. Yan, *Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States*, Phys. Rev. Letters **34** (1975) 369.
- [13] *Čarobni delci*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 16.
- [14] *Model šestih kvarkov*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 113.
- [15] E. Eichten, K. Gottfried. *Heavy Quarks in e^+e^- Annihilation*, Physics Letters **66B** (1977) 286.
- [16] A. I. Vajnštejn, M. L. Bološin, V. I. Zaharov, A.V. Novikov, L. B. Okun', M. A. Šifman, *Čarmonij i kvantna hromodinamika*, Uspehi fiz. nauk **123** (1977) 217.
- [17] *Upsilon particles at 9,4 and 10 GeV suggest new quark*, Phys. Today **30** (1977) 17 (10).
- [18] M. L. Perl et al., *Properties of the proposed τ charged lepton*, Phys. Letters **70B** (1977) 487.

IZBOLJŠANE VREDNOSTI ASTRONOMSKIH KONSTANT

Na zasedanju Mednarodne astronomske unije (IAU) 1976 v Grenoblu* so privzeli nove, izboljšane vrednosti za astronomske konstante. Morda bodo nekatere od njih zanimale tudi bralce Obzornika:

hitrost svetlobe v vakuumu	299792,458 km/s
astronomska enota	149 597 870 km
čas, v katerem preleti svetloba eno astronomsko enoto	499,004782 s
ekvatorski radij Zemlje	6378,140 km
sploščenost zemeljskega elipsoida	1/298,257
ekvatorski radij Merkurja	2439 km
ekvatorski radij Venere	6052 km
ekvatorski radij Marsa	3397,2 km
ekvatorski radij Jupitra	71398 km
ekvatorski radij Saturna	60000 km
ekvatorski radij Urana	25400 km
ekvatorski radij Neptuna	24300 km
ekvatorski radij Plutona	2500 km
masa Lune	1/81,30068 = 0,01230002 mase Zemlje
masa Sonca	328900,5 mas sistema Zemlja-Luna

Razmerje med maso Sonca in maso posameznega planeta (skupno s sateliti, če jih ima)

Merkur	6023600	Saturn	3498,5
Venera	408523,5	Uran	22869
Mars	3098710	Neptun	19314
Jupiter	1047,355	Pluton	3 000 000 (približno)

Marijan Prosén

* J.B. Irwin, J. Ashbrook, *Astronomical Notes from Grenoble*, Sky and Telescope, **52** (1976) 419.

OB PETINSEDEMDESETLETNICI AKADEMIKA ANTONA KUHLJA



V življenju vsakogar so svečani trenutki, ki jih deli le s svojimi najbližjimi. Jubilej akademika profesorja dr. ing. Antona Kuhlja pa sega čez te meje. Čez štirideset let je učil in strokovno vzgajal mnoge študente. Zlasti pouku mehanike na naši univerzi je postavil trdne temelje. Povsod kjer je bila potrebna pomoč, je bil pripravljen sodelovati in pomagati. Tovariški odnos in nesebično razdajanje znanja odlikujeta njegov značaj. S svojim življenjem in delom nam je resnično za vzor. Njegov jubilej je zato tudi naš praznik. Ob tej priliki bi se mu radi zahvalili za vse, kar nam je dal kot človek, učitelj in prijatelj.

Rodil se je 11. novembra 1902 na Opčinah pri Trstu. Gimnazijo je obiskoval v Trstu in končal v Kranju. Vpisal se je na oddelek za elektrotehniko tehniške fakultete univerze v Ljubljani in pet let kasneje diplomiral za inženirja elektrotehnike. Nekaj let je poučeval na tehnični srednji šoli v Ljubljani. Jeseni 1933 je postal do-

cent za teoretično mehaniko na tehnični fakulteti ljubljanske univerze. Za doktorja tehničnih znanosti je bil promoviran 1936. Že dve leti kasneje je postal izredni profesor za mehaniko, 1946 pa redni profesor za mehaniko. Za njegovo pedagoško, znanstveno in družbeno delo mu je fakulteta za naravoslovje in tehnologijo v letošnjem letu podelila — prvemu s področja tehničnih ved — naziv zaslužni profesor.

Sodeloval je v uredniških odborih mnogih revij. Med drugim je bil od 1957 do 1961 tudi član uredniškega odbora Obzornika za matematiko in fiziko.

Z veliko odgovornostjo je opravljal številne družbene funkcije. V letih obnove 1947—1948 je bil dekan tehniške fakultete, od 1952—1954 rektor tehniške visoke šole, nato pa še dve leti rektor ponovno združene univerze. Nekaj časa je bil znanstveni vodja letalsko-tehničnega inštituta v Beogradu. Bil je direktor inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko in direktor inštituta za turbinske stroje, kjer je še vedno znanstveni sodelavec. Vrsto let že sodeluje v raznih republiških komisijah za raziskovalno in izobraževalno delo.

Redni član slovenske akademije znanosti in umetnosti je postal 1949, od 1961 pa je njen podpredsednik. Je častni in zaslužni član številnih strokovnih društev in častni predsednik jugoslovanskega društva za mehaniko. Za svoje življenjsko delo je dobil 1972 Kidričevo nagrado. Trikrat je bil odlikovan z visokimi odlikovanji.

Našemu dragemu profesorju želimo njegovi učenci in sodelavci predvsem zdravja in moči, da bi še dolgo prihajal med nas, nas učil in spodbujal.

Peter Vencelj

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE TER RESUMEJI DOKTORSKIH DISERTACIJ V LETU 1976

na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani ter na obeh Pedagoških akademijah

Pedagoška akademija Maribor

Matematika-fizika

125. Ratajc Anica
126. Stegne Ivan
127. Štruel-Mužerlin Marjetka

128. Kušar-Burnik Ivanka
129. Zidarič Sonja
130. Lešnik Marija

131. Meško Tanja
132. Vreš Iztok

Tehnični pouk in fizika

133. Grum-Domitrovič Boža
134. Budler-Balažič Vida
135. Onič Alojzija
136. Gradišnik Marjan

137. Klopčič Anka
138. Berden Pavel
139. Novak Zvonimir
140. Poljanec Ivan

141. Mrhl Jože
142. Stojanović Slobodan
143. Lipovšek Ivan
144. Medik Stane

Dodatni predmet fizika

145. Markič Marijana

146. Zlatnik Jerika

Pedagoška akademija Ljubljana

Matematika-fizika

409. Češnjevar Silva
410. Hitejc Milena
411. Matičič Božo
412. Ribnikar Polonca
413. Škrabar Zlata
414. Matjan Danica
415. Jursinovič Milka

416. Završnik Majda
417. Fonda Magda
418. Kumer Franjo
419. Lovrenčič Bogomila
420. Praprotnik Jožica
421. Kričej Marijana
422. Kumer Jasna

423. Ljubišič Ljiljana
424. Seršen Katarina
425. Štrancar Sonja
426. Bratina Marjeta
427. Mrvič Vida
428. Škufca Danica

Fizika — tehnični pouk

429. Grosek Anton
430. Stegovec Vojko

431. Turk Vladimir
432. Hadinjak Ludvik

433. Kovačič Alenka
434. Sabol Ivan

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

Matematika — pedagoška smer

277. Bratina Ivica
278. Grešak Dušan
279. Slavič Slavko
280. Sečnik Jožica
281. Zajc Rudolf
282. Lončarič-Reisman Dušanka
283. Pavšek Dragi
284. Čečuk Nada

—
p — adični obsegi
Algebraične enačbe, rešljive z radikali
—
Grupe v elementarni matematiki
Alternativni obsegi
Osnove neevklidske geometrije
—

Matematika — tehniška smer

111. Rojko Roman
112. Urbančič Silvan
113. Kralj Jasna
114. Vukelič Milan
115. Stare Jurij
116. Grčar Alenka
117. Lipovec Rado
118. Ciglar Alenka
119. Sluban Boris

Algol — 68
Test s kvocientom zanesljivosti
Končno aditivne in vektorske mere
Tauberjevi izreki
Sipanje rentgenskih žarkov pod malimi koti
Analitične karakteristične funkcije
Osnovni pojmi teorije informacije
Hurewiczov izrek
Verjetnosti velikih odklonov vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk
Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb paraboličnega tipa
Konvergenčne lastnosti Newtonove metode
Aproksimacija s polinomi
Teorija perturbacij pri problemu lastnih vrednosti matrik

120. Turk Marjan

121. Janežič Dušanka
122. Močnik Marija
123. Britovšek Anton

124. Zakrajšek Franc	Klasične kvadraturene formule
125. Bric Rudi	Računanje elementarnih funkcij
126. Fakin Igor	Analiza napak pri numeričnem reševanju navadnih diferencialnih enačb prvega reda — začetna naloga
127. Kastelic Janez	Teorija interpolacije funkcij
128. Jensterle Rado	Razloček med porazdelitvenimi funkcijami vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk in normalno porazdelitveno funkcijo
129. Bras Etbin	Waringov problem
130. Ikica Branko	Hammersteinova integralska enačba
131. Kališnik Anton	Čebiševi polinomi v numerični analizi
132. Kostrevc Ljubomir	Obseg p-adičnih števil in funkcije nad njimi
133. Kugonič Otmar	Linearne razširitve v prostorih zveznih funkcij
134. Lešnjak Gorazd	Analitične strukture v spektrih funkcijskih algeber
135. Marušič Dragan	Najmanjši grafi cikličnih grup

Fizika — pedagoška smer

43. Kodelja Marijan

Fizika — tehniška smer

261. Brumen Milan	Študij temperaturne odvisnosti jedrske kvadrupolne resonance v biološko zanimivih organskih spojinah
262. Špiler Fran	Spektrometrija žarkov γ pri ekstremni ločljivosti in stabilnosti
263. Javornik Miroslav	Prosojnost plazme v močnem magnetnem polju
264. Detela Andrej	Elektrooptični modulator s kristalom LiNbO_3
265. Hadži Aleksander	Simulacija razvoja zvezdnih gruč z računalnikom
266. Sever Franc	Računanje protonskih valovnih funkcij z optičnim potencialom
267. Zgonik Marko	Dinamika magnetnih mehurčkov

Matematika — III. stopnja

6. Omladič Matjaž

Operatorske analitične funkcije

Delo obravnava analitične funkcije, katerih vrednosti ležijo v prostoru linearnih omejenih operatorjev med dvema Banachovima prostoroma. Še posebej nas zanimajo obrati, enostranski obrati in relativni obrati takih funkcij. S tega stališča so glavni rezultati dela nanizani v razdelkih III. 5 (potreben in zadosten pogoj za obstoj obrata in enostranskega obrata operatorske analitične funkcije na nekem polju), IV. 2 in IV. 3 (obstoj obratov, enostranskih onratov in relativnih obratov posebne vrste metamorfnih operatorskih funkcij, ki predstavljajo posplošitev resolvente Rieszovega operatorja) ter IV. 5 (potreben in zadosten pogoj za to, da na nekem punktiranem krogu okoli dane točke obstaja obrat operatorske analitične funkcije in ima v točki pol stopnje m). Preostanek dela pa pripravlja teren za to gradnjo. V prvem poglavju navajamo nekaj osnovnih definicij in dejstev v zvezi z vektorskimi analitičnimi funkcijami, v drugem pa se pomudimo pri Fredholmovih operatorjih (orožje, namenjeno prvi polovici četrtega poglavja). Tretje poglavje, ki je sicer v večjem delu priprava na Allanov izrek (razdelek III. 5), nam kot »stranski produkt« da dva lepa rezultata iz teorije vektorskih analitičnih funkcij: hitro konvergentni razvoj in izrek o vzdigovanju (razdelek III. 3); lastni teoretični pomen ima bržkone tudi izrek o enostranskih obratih v gostih obratnih limitah (razdelek III. 4).

Fizika — III. stopnja

40. Martinčič Rafael	Prilagoditev eksperimenta za vodenje s procesnim računalnikom in meritev reakcije (n, γ) na ^{89}Y in ^{141}Pr
41. Pucelj Bogdan	Določitev presekov reakcij $^{90}\text{Zr}(\gamma, p) ^{89}\text{Y}$ in $^{90}\text{Zr}(\gamma, n) ^{33}\text{Zr}$ z merjenjem kompleksnega razpada residualnih jeder
42. Rupnik Peter	Absolutna energijska umeritev protonskega elektrostatičnega pospeševalnika
43. Žaucer Matjaž	»Ab initio« računanje magnetnega premika. Molekularni integrali z gradientno invariantnimi Gaussovimi funkcijami
44. Slak Janez	Jedrska magnetna resonanca feroelektrikov vrste TGS in $\text{NaH}_3(\text{SeO}_3)_2$
45. Možina Janez	Akustična emisija pri koroziji
46. Segar Igor	Prispevek kapljičnih konfiguracij k prosti energiji za primer Ginzburg-Landauovega funkcionala

47. Pumpernik Danilo

48. Šolmajer Tomaž

49. Korun Matjaž

Spin-mrežna relaksacija v tekočinah

Vibracijska nihanja in študij potencialnega polja dimere mravljinčne kisline

Meritev fotoprotonskih spektrov pri ^{11}B

Fizika — doktorske disertacije

61. Žaucer Matjaž

Računanje magnetnih lastnosti diamagnetnih molekul z metodo končne motnje

V delu so izračunana magnetna susceptibilnost in magnetna zasenčenja jeder nekaterih manjših molekul. Prvič je bila izračunana susceptibilnost molekul z uporabo splošne baze gradientno invariantnih funkcij v okviru teorije samousklajenega polja. Originalen je tudi izračun susceptibilnosti drugega reda. Račun magnetnih zasenčenj jeder z metodo končne motnje in z analitičnim računanjem integralov predstavlja natančnejšo in formalno lažjo alternativo Ditchfieldovi metodi računanja zasenčenj z metodo neskončne motnje. Rezultati, izračunani z nekoliko razširjenimi bazami, so zanesljivi. Omejitev uporabe metode na večjih molekulah predstavlja le računalniški čas.

PREJELI SMO V OCENO

Jörgens-Rellich, *Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Bearbeitet von J. Weidmann. Hochschultext. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1976. 228 str.

Delo je posvečeno proučevanju robnega problema za linearne diferencialne enačbe 2. reda

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad -\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty$$

Iščemo netrivialne rešitve te enačbe v prostoru $L^2(a, b)$, ki zadoščajo morebitnim robnim pogojem v levem in (ali) desnem krajišču, oblike $cu(a) + du'(a) = 0$ in $eu(b) + fu'(b) = 0$. Problem se da prevesti v jezik funkcionalne analize. Leva stran zgornje enačbe določa neki diferencialni operator A , definiran na primerni podmnožici dvakrat odvedljivih funkcij v $L^2(a, b)$. Zgornjo enačbo zapišemo v obliki $Au = \lambda u$, iščemo torej lastne vrednosti in lastne funkcije linearnega neomejenega operatorja A . Če so robni pogoji primerno izbrani, je A sebi adjungiran operator. Zanima nas tudi rešitev enačbe $Au = f$, kjer je f dana funkcija iz $L^2(a, b)$.

Knjiga je razdeljena na tri dele. V prvem je podan kratek pregled teorije linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru, v drugem pa je izčrpno obdelana spektralna teorija sebi adjungiranih operatorjev. V tretjem je obravnavan v začetku opisani problem. Izdelana je Weylova teorija za robni problem. Za višek teorije smemo imeti Titchmarshove formule za lastne funkcije in lastne pakete operatorja A , s katerimi se da enostavno izraziti spektralna družina operatorja A . Obravnavani so tudi konkretni primeri robnih problemov. V knjigi je tudi precej nalog.

Delo je zelo zanimivo še zato, ker v njem jasno vidimo, kako nam funkcionalna analiza omogoča kratko in jasno formulirati probleme iz analize in dati nanje tudi nekatere odgovore. Vidi pa se tudi, da je treba za popoln, zaokrožen rezultat spet uporabiti analizo.

Knjiga je namenjena študentom matematike in fizike, predvsem tistim, ki bi radi imeli trdno matematično podlago za študij Schödingerjeve enačbe.

Zanimiv je tudi nastanek knjige. Po zapiskih predavanj prof. Rellicha je pripravljaval rokopis za tisk prof. Jörgens. Pripravil je prvi dve poglavji. Po prerani smrti prof. Jörgensa je delo nadaljeval njegov učenec in sodelavec prof. J. Weidmann, priznani strokovnjak za diferencialne operatorje. Dopolnil je nekatere dokaze, delno posodobil matematični jezik in dodal nekaj novejših rezultatov.

Anton Suhadolc

G. Bizám und J. Herczeg, Logik macht Spass. 85 Aufgaben mit Lösungen. Budapest, Akadémiai Kiadó, 1976, 391 str., 22 cm

Knjiga je nemški prevod madžarskega originala: Játék és Logika. 85 feladatban. Pred seboj imamo bogato zbirko rešenih miselnih nalog z enotno tematiko: gre predvsem za iskanje bijektivnih preslikav med končnimi množicami, pri čemer mora posamezna preslikava zadoščati določenim pogojem. Značilna naloga ima npr. takšno obliko: za šest ljudi je treba ugotoviti njihove poklice in bivališča, če vemo, kateri poklici in kateri kraji pridejo v poštev; pri tem nam je še na voljo nekaj indirektnih informacij, ki na prvi pogled povedo zelo malo.

Rešitve nalog obsegajo tri četrtine knjige in so izdelane v vseh podrobnostih ter pogosto v več variantah. Kakor so naloge urejene sistematično, tako njihove rešitve postopno razvijajo in razlagajo ustrezne metode reševanja. Ob tem avtorja povesta tudi marsikaj teoretičnega iz logike, množic, kombinatorike, geometrije..., kar je tesno povezano z omenjeno tematiko. Knjiga pomaga bralcu razvijati logično mišljenje in mu hkrati širi matematično obzorje.

Naloge so skoraj vse originalne in so izbrane premišljeno, tako da so — kljub enotni tematiki — zelo raznovrstne po težavnosti in po metodah, ki so za njihovo reševanje potrebne. Po vsebini in tudi po obliki so zastavljene duhovito in mikavno. Besedilo uspešno dopolnjujejo številne slike in razpredelnice.

Knjiga od bralca ne zahteva posebnega matematičnega znanja in lahko da marsikaj že učencem proti koncu osnovne šole. Z zanimanjem pa jo bo vzel v roke tudi tisti, ki matematiko dobro obvlada ali mu je matematika poklic. Avtorja mislita še na tiste bralce, ki ne utegnejo predelati vse knjige, in jim svetujeta najprimernejši izbor in vrstni red nalog.

Janez Rakovec

Proceedings of Equadiff III, J. E. Purkině university. Brno, 1973, 288 strani.

Knjigo je izdala Purkynějeva univerza v Brnu kot tomus I v Seria monographia zbirke Folia facultatis scientiarum naturalium universitatis Purkynianae Brunensis. V knjigi so priobčeni prispevki s tretjega češkoslovaškega posvetovanja o diferencialnih enačbah leta 1972 v Brnu (prvo je bilo leta 1962 v Pragi, drugo leta 1966 v Bratislavi). Poročila so razdeljena, kot je pač navada, v plenarna in sekcijška (sekcije so bile tri: za navadne diferencialne enačbe, za parcialne diferencialne enačbe, za numerično analizo in uporabo).

Iz bogate vsebine prepišimo le naslove in avtorje plenarnih predavanj: Ob the approximation of eigenvalues of non-selfadjoint operators (J. H. Bramble), Finite elements and numerical stability (J. Descloux), On limit-point and separation criteria for linear differential expressions (W. N. Everitt, M. Giertz), On some problems of the theory of the difference schemes (N. N. Janenko), Problèmes de frontière libre liés à certaines questions d'hydraulique (E. Magenes), On a theorem of Brunovský for periodic optimal control (L. Markus), Abstract semilinear equations with small parameter (M. Sova), On two-sided difference methods for ordinary differential equations (E. A. Volkov).

Knjiga je namenjena vsem, ki jih zanima sodobni razvoj teorije diferencialnih enačb in njihove uporabe.

Thomas Riedrich, Vorlesungen über nichtlineare Operatorengleichungen (Teubner-Texte zur Mathematik), B. G. Teubner, Leipzig, 1976, 184 strani.

Skripta predstavljajo pregleden uvod v poglavje nelinearne funkcionalne analize, ki je zanimivo samo po sebi pa tudi za uporabo v fiziki, kemiji, biologiji in ekonomiji. Knjižica obsega štiri poglavja, prvo o osnovah, drugo o različicah Banachovega izreka o negibni točki, tretje o nelinearnih operatorskih enačbah v R^n (Brouwerjev izrek o negibni točki dokaže na primer na dva načina), četrto o nelinearnih operatorskih enačbah v topoloških vektorskih prostorih (Leray-Schauderjeva teorija indeksa, pozitivne lastne vrednosti kompaktnih operatorjev itd.).

Po knjižici bo rad posegel vsak, ki ga zanimajo osnove nelinearne funkcionalne analize pa tudi njeni najnovejši dosežki.

France Križanič

Statistical Physics (Proceedings of the International Conference, 25—29 August, 1975, Budapest), uredila L. Pál in P. Szépfalussy. Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, 251 strani

Z enoletno zamudo so v knjižni obliki izšla pregledna predavanja s predlanske konference v Budimpešti, o kateri sem že poročal. Knjiga daje dober vpogled v nekatera novejša področja tega dela teorijske fizike.

Kot sicer na konferenci je tudi tu prevladoval problem kritičnih faznih prehodov; tem je bilo posvečenih kar 5 izmed vseh 12 predavanj. Na čelu je bil K. G. Wilson, mladenič s Cornellove univerze, ki je razložil svojo metodo renormalizacije. Za to delo, ki je šele omogočilo dosledno analitično lotevanje, so mu dali Boltzmannovo odlikovanje. Z drugih strani in z drugačnim matematičnim prikazovanjem so se istega problema lotili Ja. G. Sinai iz Moskve (ki je sicer znan z deli iz ergodijske teorije), L. P. Kadanoff in sodelavca z Brownove univerze ter G. Jona-Lasinio iz Rima. O transportnih pojavih blizu kritičnega stanja pa je razpravljal B. I. Halperin iz Bellovih laboratorijev.

Teme drugih predavanj so bile prav raznolike. Hud problem predstavlja tvorba zarodkov pri faznih spremembah (npr. kapljic pri kondenzaciji ali mehurčkov pri izparevanju); o tem je poročal K. Binder iz Saarbrückena. — Ko se kak sistem močno odmakne od termodinamičnega ravnovesja, se v njem lahko pojavijo urejene strukture (kot npr. urejeni celični vrtinci v ogrevani plasti olja). O pojavih te vrste je razpravljal H. Haken iz Stuttgarta. — Teorija turbulence bolj in bolj sodi v statistično mehaniko, kot je pokazalo predavanje P. C. Martina s Harvardove univerze. — Slišali smo še o fluktuacijah (N. G. van Kampen iz Utrechta), o ekscitonih (A. A. Abrikosov iz Moskve) in celo o starodavnem plinskem modelu iz trdih kroglic (P. Résibois iz Bruslja).

Veliko novega z vseh teh in še drugih področij bo najbrž prinesla tudi naslednja taka konferenca, ki bo letos v Haifi (Izrael).

Ivan Kuščer

VSEBINA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 24 (1977)

št. 1—6, str. 1—224

Članki — matematika

Preprosti zgledi iz topološke dinamike (France Križanič)	1
Regularni kolobarji, 1. del (Niko Prijatelj)	33
Regularni kolobarji, 2. del (Niko Prijatelj)	65
Hitra Fourierova transformacija (Gabrijel Tomšič)	69
Kolobarji z involucijo (Niko Prijatelj)	161
Reševanje nelinearnih operatorskih enačb v Banachovem prostoru (Edvard Kramar)	193
Oscilacijski izreki — asimptotične ocene števila ničel (Jože Andrej Čibej)	201

Članki — fizika

Toplotni vodniki (Riko Jerman)	10
Dva najpomembnejša morska tokova (Karel Bajc)	42
Magnetni mehurčki (Marko Zgonik)	77
Transverzalni laserski nihajni načini (Boris Vedlin)	83
Življenje zvezd (Andrej Čadež)	97
Radijsko sevanje sonca (Vladimir Čadež)	109
Najnovejša spoznanja o fiziki planetov Osončja (Fran Dominko)	112
Vesolje (Janez Strnad)	123
Kako naj vključimo astronomijo v pouk fizike? (Ivan Kuščer)	140
Barvni laserji (Boris Vedlin)	170
Josephsonov pojav (Franc Sever)	175
Merjenje majhnih svetlobnih tokov (Janez Žitnik)	208

Novice

Čarobni delci (Janez Strnad)	16
Gradientna teorija močne interakcije (Janez Strnad)	21
Supertežka jedra? (Janez Strnad)	48
Do vse boljše ločljivosti (Marijan Prosen)	54
Dolgoživih supertežkih jeder ni? (Janez Strnad)	87
Ali so osnovne konstante spremenljive? (Janez Strnad)	143
Zanimiva uporaba Brouwerjevega izreka (Dušan Repovš)	184
Kvarkonij (Janez Strnad)	214
Izboljšane vrednosti astronomskih konstant (Marijan Prosen)	217

Šola

Konferenca nemškega fizikalnega društva o pouku fizike (Seta Oblak)	25
Šesti kongres mednarodne raziskovalne skupine za pouk matematike (Ignacij Smolec, prev. in prir. Marija Vencelj)	26
Na razpotju (France Križanič)	89
Kako bi lahko še vključili astronomijo v pouk fizike? (Marijan Prosen)	146
Razprava s posvetovanja o sodobnih težnjah pri pouku matematike in fizike od osnovne šole do univerze, Bernardin, 22. oktobra 1976 (Martina Koman)	147
Strjevanje podhlajene kapljevine (Aleš Jereb)	185

Domače novice

Jubilej profesorja Antona Moljka (Janez Strnad)	27
Rezultati ankete, ki je bila poslana tehničkim fizikom (Janez Stepišnik in Zvonko Trontelj)	28
Deveto zvezno tekmovanje študentov matematike (Peter Legiša)	30
Čestitka prof. dr. Djuru Kurepi	29
Jubilej publicistične dejavnosti DMFA SRS (Ciril Velkovrh)	56
France Ahlin, 24. 9. 1905—2. 2. 1977 (Ivan Kuščer)	58
Bibliografija prof. Franceta Ahlina (Ciril Velkovrh)	59
28. občni zbor DMFA SRS, 23. 10. 1976, Hotel Bernardin, Portorož (Marjan Hribar)	60
Finančno poročilo komisije za tisk DMFA SRS od 15. 11. 1975 do 1. 9. 1976 (Janez Markelj) ..	62
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka IMFM v letu 1976 (Anton Suhadolc)	94
Seznam novih članov DMFA SRS v letu 1976 (Ciril Velkovrh)	III/3
Posvet o tekmovanju iz fizike (Jelka Lekić)	149
Poročilo o seminarju Astrofizika (Martina Koman)	150
Petnajst seminarjev iz fizike in matematike (Dušan Modic)	152
Letno poročilo oddelka za matematiko IMFM za študijsko leto 1975/76 (Jože Vrabec)	153
Aktiv učiteljev fizike, osnovna šola v Izoli, 5. marca 1977 (Bogomila Kolenko)	156
Nagrajenci Sklada Borisa Kidriča v letu 1977 (Ciril Velkovrh)	157
Jubilej matematike v Zagrebu (Gabrijel Tomšič)	188
Plemljeva spominska soba (Ciril Velkovrh)	189
Bibliografija člankov in drugih publikacij, objavljenih v Jugoslaviji, posvečenih profesorju dr. Josipu Plemlju in njegovemu delu (Ciril Velkovrh)	190
Spoštovani člani Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, dragi kolegi! (Aleksandra Kornhauser)	191
Petinsedemdeset let akademika Antona Kuhlja (Peter Vencelj)	218
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter povzetki doktorskih disertacij v letu 1976 (Ciril Velkovrh)	219

Dopisi

M. Ribarič, <i>Thermodynamics of linear transport processes</i> (prev. Janez Strnad)	93
--	----

Nove knjige

Vladimir Batagelj in Tomaž Pisanski, <i>Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj</i> , 2. del, 1967—1975 (Ivan Štalec)	9
Mirko Dobovišek, Milan Hladnik in Matjaž Omladič, <i>Rešene naloge iz analize I</i> , 1. in 2. del (Jože Grasselli)	15
Alojzij Vadnal, <i>Diskretno dinamično programiranje</i> (France Križanič)	III/1
Rajko Jamnik, <i>Uvod v matematično statistiko</i> (France Križanič)	III/1
Alojzij Vadnal, <i>Rešeni problemi linearnega programiranja</i> , ponatis (Rajko Jamnik)	III/2
France Križanič, <i>Topološke grupe</i> (Milan Hladnik)	III/2
Seznam publikacij komisije za tisk DMFA SRS v letu 1976 (Ciril Velkovrh)	IV/2
France Križanič, <i>Liejeve grupe</i> (Peter Legiša)	IV/3
Sergej Pahor, <i>Slučajni procesi</i> (Alojz Kodre)	IV/3
Dopisna delavska univerza — Univerzum (Ciril Velkovrh)	148
Egon Zakrajšek, <i>Programski jezik Pascal</i> , ponatis (Vladimir Batagelj)	169
Janez Strnad, <i>Poskusi v posebni in splošni teoriji relativnosti</i> (Sergej Pahor)	183
V letu 1976 smo prejeli naslednje revije v zameno za Obzornik za matematiko in fiziko (Stanislav Zorko)	192
Mitja Rosina, <i>Jedrska fizika</i> , ponatis (Ciril Velkovrh)	174
Janez Strnad, <i>Fizika</i> , 1. del (Ciril Velkovrh)	191
Andrej Čadež, <i>Fizika zvezd</i> (Alojz Kodre)	169

Prejeli smo v oceno

G.I. Marchuck, <i>Methods of numerical mathematics</i> (Zvonimir Bohte)	20
G. Schorn, <i>Mengen und algebraische Strukturen</i> (Niko Prijatelj)	20
Th. Bröcker, <i>Differentiable germs and catastrophes</i> (J. V.)	41
F. Karteszi, <i>Introduction to finite geometries</i> (Ivan Pucelj)	64
J. Knopfmacher, <i>Abstract analytic number theory</i> (Jože Grasselli)	64
<i>Malaja matematičeskaja enciklopedija</i> (France Križanič)	158
W.H. Fleming, R.W. Rishel, <i>Deterministic and stochastic optimal control</i> (France Križanič)	158
K. Jörgens, F. Rellich, <i>Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen</i> (France Križanič)	158
I. Ekeland, R. Temam, <i>Convex analysis and variational problems</i> (France Križanič)	158
S.K. Berberian, <i>Lectures in functional analysis and operator theory</i> (Peter Legiša)	159
T. Kato, <i>Perturbation theory for linear operators</i> (2. izdaja) (Peter Legiša)	159
A.V. Balakrishnan, <i>Applied functional analysis</i> (Peter Legiša)	160
G. Vainikko, <i>Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden</i> (Anton Suhadolc)	160
N.F. Stewart, F. Jensen, <i>Solution numerique des problèmes matriciels</i> (Zvonimir Bohte)	160
M. Kocsis, <i>High-speed silicon planar — epitaxial switching diodes</i> (Zvonko Trontelj)	200
C. Berg, G. Forst, <i>Potential theory on locally compact Abelian groups</i> (Ivan Vidav)	207
Jörgens-Rellich, <i>Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen</i> (Anton Suhadolc)	223
G. Bizam, J. Herczeg, <i>Logik macht Spass</i> (Janez Rakovec)	222
T. Riedrich, <i>Vorlesungen über nichtlineare Operatorengleichungen</i> (France Križanič)	223
<i>Proceedings of Equadiff III</i> (France Križanič)	222
<i>Statistical physics</i> (Ivan Kuščer)	221

Utrinki

Kdor zna, ... (Zvonimir Bohte)	61
Galileo Galilei in dve krogli (Dušan Repovš)	76
Biofizika? (Ivan Kuščer)	92

Vprašanja (Ciril Velkovrh)	145
110 (Dušan Repovš)	145

Obvestila

Vabilo na seminar iz astrofizike (Martina Koman)	IV/1
Obvestilo UO KT	63
Obvestilo (Martina Koman)	82
Plemljeva spominska soba — vabilo (Sergej Pahor)	III/3
29. občni zbor DMFA SRS (Marjan Hribar)	III/4
Obvestilo UO KT	151
Uredniški odbor (Janez Strnad)	213
Vabilo na seminar iz matematične logike (Martina Koman)	IV/6

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, odsek za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Zavod SRS za šolstvo in Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko ljubljanske univerze prirejajo od 1. do 4. februarja 1978

7. seminar iz matematike

MATEMATIČNA LOGIKA

Seminar je namenjen zlasti srednješolskim učiteljem matematike, vabljeni pa so tudi drugi člani DMFA, kijih ta snov zanima. Seminar bo v veliki fizikalni predavalnici na Jadranski 26 v Ljubljani.

Urnik predavanj:

Sreda 1. 2. ob

9,30	Otvoritev seminarja
9,30—10,15 10,45—11,30	Vladimir Batagelj: O teorijah
11,45—12,30	Niko Prijatelj: Formalna izgradnja logičnega jezika
15,00—15,45 16,00—16,45	Tomo Pisanski: Izračunljivost in rešljivost

Četrtek 2. 2. ob

8,30—9,15 9,30—10,15	Niko Prijatelj: Formalna izgradnja logičnega jezika
10,45—11,30 11,45—12,30	Vladimir Batagelj: O teorijah
15,00—15,45	Vladimir Batagelj: O teorijah
16,00—16,45 17,00—17,45	Tomo Pisanski: Izračunljivost in rešljivost

Petek 3. 2. ob

8,30—9,15 9,30—10,15	Izidor Hafner: Izrek o dedukciji in njegova uporaba
10,45—11,30 11,45—12,30	Niko Prijatelj: Formalna izgradnja logičnega jezika
15,00—15,45 16,00—16,45	Tomo Pisanski: Izračunljivost in rešljivost
17,00—17,45	Janez Rakovec: Logika in množice v srednji šoli

Sobota 4. 2. ob

8,30—9,15 9,30—10,15	Janez Rakovec: Logika in množice v srednji šoli
10,45—11,30 11,45—12,30	Izidor Hafner: Izrek o dedukciji in njegova uporaba

V sredo, 1. februarja ob 19,00, bo družabni večer DMFA SRS v Hotelu Bellevue, Pod gozdom 12. Na ta večer vljudno vabimo vse člane društva in njihove zakonce, ne samo udeležence seminarja.

Prispevek za seminar je 100 din za udeleženca. Vodstva šol in organizacij združenega dela prosimo, da prispevek nakažejo vnaprej na žiro račun DMFA SRS št. 50101-678-47233, lahko pa ga plača udeleženec na seminarju.

Za seminar se prijavite z dopisnico do 20. januarja 1978 na naslov: Martina Koman, gimnazija, 66230 Postojna.

Sekretarka seminarja

Martina Koman

Vodja seminarja

Niko Prijatelj