

R - 177/77 - 5

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

---

ODPISANO

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1977

Letnik 24

5

LETNIK 24. — ŠTEVILKA 5  
**OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**  
LJUBLJANA, SEPTEMBER 1977

**Glavni in odgovorni urednik:** Janez Strnad.

**Uredniški odbor:** France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Marjan Turk.

**Naročnina:** za posameznike 140.— din (za člane društva je že vračunana članarina 20.— din), za dijake in študente 60.— din, za ustanove in podjetja 180.— din, za tujino 12 \$ = 216.— din, posamezna številka 25.— din, dvojna številka 50.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 65-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900

**Tiska** tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2, Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

YU ISSN 0473-7466

| VSEBINA                                                                                                                                                  |                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Članki                                                                                                                                                   | Stran                   |
| Kolobarji z involucijo (Niko Prijatelj) .....                                                                                                            | 161                     |
| Barvni laserji (Boris Vedlin) .....                                                                                                                      | 170                     |
| Josephsonov pojav (Franc Sever) .....                                                                                                                    | 175                     |
| <b>Novice</b>                                                                                                                                            |                         |
| Zanimiva uporaba Brouwerjevega izreka (Dušan Repovš) .....                                                                                               | 184                     |
| <b>Šola</b>                                                                                                                                              |                         |
| Strjevanje podhlajene kapljevine (Aleš Jereb) .....                                                                                                      | 185                     |
| <b>Domače vesti</b>                                                                                                                                      |                         |
| Jubilej matematike v Zagrebu (Gabrijel Tomšič) .....                                                                                                     | 188                     |
| Delo koprskeske podružnice DMFA SRS (Bogomila Korlenko) .....                                                                                            | 188                     |
| Plemljeva spominska soba (Ciril Velkovrh) .....                                                                                                          | 189                     |
| Bibliografija člankov in drugih publikacij, objavljenih v Jugoslaviji, posvečenih profesorju dr. Josipu Plemlju in njegovemu delu (Ciril Velkovrh) ..... | 189                     |
| Spoštovani člani društva, dragi kolegi! (Aleksandra Kornhauser) .....                                                                                    | 192                     |
| <b>Nove knjige</b> (Alojz Kodre, Ciril Velkovrh, Mitja Rosina, Sergej Pahor, Ciril Velkovrh, Stanislav Zorko) .....                                      | 169, 174, 183, 191, III |

| CONTENTS                                     |      |
|----------------------------------------------|------|
| Articles                                     | Page |
| Rings with involution (Niko Prijatelj) ..... | 161  |
| Dye lasers (Boris Vedlin) .....              | 170  |
| The Josephson effect (Franc Sever) .....     | 175  |
| <b>News</b> .....                            | 184  |
| <b>School</b> .....                          | 185  |
| <b>Home news</b> .....                       | 188  |
| <b>New books</b> .....                       | 192  |

## KOLOBARJI Z INVOLUCIJO

NIKO PRIJATELJ

AMS Subj. Class. (1970) 16 A 28

Informativni članek o nekaterih osnovnih lastnostih projektorjev v involutivnih kolobarjih.

### RINGS WITH INVOLUTION

An expository article about some of the fundamental properties of projections in rings with involution.

Za asociativni kolobar  $K$  pravimo, da ima involucijo, ali da je involutiven, če je v njem definirana preslikava

$$x \mapsto x^*$$

s temile lastnostmi: za poljubna  $x, y \in K$  je

$$(x^*)^* = x \tag{1}$$

$$(x + y)^* = x^* + y^* \tag{2}$$

$$(xy)^* = y^*x^* \tag{3}$$

Tak kolobar imenujemo tudi zvezdica-kolobar in to pišemo kar  $*$ -kolobar.

Na osnovi (1) takoj vidimo, da je involucija bijekcija, saj iz  $x^* = y^*$  očitno sledi  $x = y$  in seveda je tudi vsak  $x \in K$  slika elementa  $x^* \in K$ . Zaradi (2) in (3) je potemtakem v komutativnih kolobarjih involucija istovetna z avtomorfizmom. V obsegu kompleksnih števil  $\mathbb{C}$  je na primer — mimo identične preslikave  $z \mapsto z$  — involucija tudi preslikava  $z \mapsto \bar{z}$ , ki priredi vsakemu kompleksnemu številu  $z$  konjugirano število  $\bar{z}$ . Pri nekomutativnih kolobarjih pa imenujemo involucijo — zaradi (3) — tudi anti-avtomorfizem. Eden najpomembnejših zgledov nekomutativnega  $*$ -kolobarja je vsekakor algebra omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovim prostorom, v kateri je involucija  $A \mapsto A^*$  določena s tem, da je  $A^*$  adjungirani operator k operatorju  $A$ .

Element  $x$  involutivnega kolobarja  $K$  imenujemo hermitski, če velja enakost

$$x = x^* \tag{4}$$

Po (2) je vsota hermitskih elementov kajpak spet hermitski element. Za produkt pa je na osnovi (3) to res natanko tedaj, kadar ustreza hermitska elementa  $x, y$  komutirata. Zaradi (3) in (1) je za vsak  $x \in K$  produkt  $xx^*$  očitno hermitski element. Zato je kajpak hermitski element tudi vsak  $p \in K$ , ki ga lahko zapišemo v obliki

$$p = x_1x_1^* + x_2x_2^* + \dots + x_nx_n^* \tag{5}$$

za primerno izbrane  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ . Za take elemente rečemo, da so pozitivni, in na dlani je, da je vsota pozitivnih elementov spet pozitiven element.

Poseben pomen v teoriji  $*$ -kolobarjev pa gre tistim hermitskim elementom, ki so hkrati tudi idempotenti. Pravimo jim projektorji. Potemtakem je element  $e \in K$  projektor, če in le če je

$$e = e^* \quad \text{in} \quad e^2 = e \tag{6}$$

Ničelni element 0 kolobarja je kajpak idempotent pa tudi projektor, saj veljata sklepa:  $0 = 0 + 0 \Rightarrow 0^* = 0^* + 0^* \Rightarrow 0 = 0^*$ . In če ima kolobar enoto 1, je tudi ta idempotent projektor. Za vsak  $x \in K$  dobimo namreč iz resnice  $1 \cdot x^* = x^* \cdot 1$  takoj, da je  $x \cdot 1^* = 1^* \cdot x$ . In ker ima seveda vsak kolobar kvečjemu eno enoto, mora biti torej  $1 = 1^*$ . Zato je v kolobarju z enoto hkrati z  $e$  projektor tudi  $1 - e$ .

Ker je za vsak projektor  $e$  po (6) tudi  $e = ee^*$ , je potemtakem vsak projektor pozitiven element kolobarja. Razume se, da vsota dveh projektorjev nasploh ni projektor, produkt pa je natanko tedaj, kadar projektorja komutirata.

Glede na to, da so projektorji posebne sorte idempotenti, namreč hermitski, je pač utemeljeno pričakovati, da bo ravnanje z njimi preprosteje kot pa z idempotenti nasploh. To se res brž izkaže in prav v tem je tudi bistvena prednost  $*$ -kolobarjev.

Bodi  $I$  množica vseh idempotentov,  $P$  pa množica vseh projektorjev kolobarja  $K$ , se pravi, da je  $P \subseteq I$ . Znano je, da je množica  $I$  delno urejena z relacijo  $\leq$ , ki je za poljubna  $e, f \in I$  definirana takole:

$$e \leq f \Leftrightarrow e = ef = fe \quad (7)$$

Bravec lahko brž sam preveri, da je tako definirana relacija res refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Seveda je s (7) inducirana tudi delna urejenost v podmnožici  $P$ . Vendar pa jo v primeru projektorjev  $e, f \in P$  lahko definiramo enostavneje samo s

$$e \leq f \Leftrightarrow e = ef \quad (7')$$

saj že vemo, da je produkt dveh projektorjev spet projektor, če in samo če projektorja komutirata. Potemtakem iz  $e = ef$  že sledi tudi  $e = fe$ .

Med idempotenti poljubnega kolobarja  $K$  je nadalje definirana relacija ekvivalence  $\sim$ : za poljubna  $e, f \in I$  je

$$e \sim f \Leftrightarrow \text{obstajata } x, y \in K, \text{ da je } e = xy \text{ in } f = yx \quad (8)$$

Brž se vidi, da lahko še dodatno vedno zahtevamo, da je  $x \in eKf$  in  $y \in fKe$  ter da je  $\sim$  res ekvivalenčna relacija.<sup>(1)</sup> Če pa je  $K$  tudi  $*$ -kolobar, potem si za projektorje lahko privoščimo še tako imenovano involutorno ekvivalenco  $\approx$ , ki jo opredelimo takole: za poljubna  $e, f \in P$  je

$$e \approx f \Leftrightarrow \text{obstaja } x \in K, \text{ da je } e = xx^* \text{ in } f = x^*x \quad (9)$$

Če je  $e = xx^*$  in  $f = x^*x$ , je kajpak  $y = xx^*x = ex = xf \in eKf$  pa tudi  $yy^* = exx^*e = e^3 = e$  in  $y^*y = fx^*xf = f^3 = f$ . Potemtakem smemo po potrebi že v (9) vedno še privzeti, da je  $x \in eKf$ . Iz (9) je tudi neposredno razvidno, da je relacija  $\approx$  refleksivna in simetrična. Je pa tudi tranzitivna, saj za poljubne  $e, f, g \in P$  lahko sklepamo:  $e \approx f$  in  $f \approx g \Rightarrow \exists x, y \in K: e = xx^*, f = x^*x = yy^*$  in  $g = y^*y \Rightarrow e = (xx^*)(xx^*) = x(x^*x)x^* = x(yy^*)x^* = (xy)(xy)^*$  in podobno  $g = (y^*y)(y^*y) = y^*(yy^*)y = y^*(x^*x)y = (xy)^*(xy) \Rightarrow e \approx g$ . Torej je tudi  $\approx$  prava ekvivalenčna relacija. Sicer pa je iz (8) in (9) očitno, da velja za poljubna projektorja  $e, f$  implikacija

$$e \approx f \Rightarrow e \sim f \quad (10)$$

Element z  $*$ -kolobarja  $K$  imenujemo parcialno izometrijo natanko tedaj, kadar velja enakost

$$z = zz^*z \quad (11)$$

<sup>(1)</sup> Primerjajte moj članek *Regularni kolobarji* v Obzornik mat. fiz. 24 (1977) 2 in 3. Tudi v nadaljnjem besedilu pomeni pridvignjeni znak <sup>(1)</sup> isti nasvet.

Iz tega razberemo, da je hermitski element  $e = zz^*$  projektor, saj je tudi  $e^2 = (zz^*)(zz^*) = (zz^*z)^* = zz^* = e$ . Podobno vidimo, da je tudi  $f = z^*z$  projektor. Po (9) je kajpada  $e \sim f$  in po (11) je  $z = ez = zf$ .

Vzemimo še obratno, da je za kak element  $z \in K$  produkt  $e = zz^*$  projektor, in sicer tak, da je  $z = ez$ . Potem je seveda  $z$  parcialna izometrija. Torej lahko rečemo:

1. izrek: Element  $z^*$ -kolobarja  $K$  je parcialna izometrija natanko tedaj, kadar je  $e = zz^*$  projektor in je  $z = ez$ .

Brž lahko spoznamo, da sta pri dani parcialni izometriji  $z = zz^*z$  prirejena projektorja  $e = zz^*$  in  $f = z^*z$ , ki sta kajpak involutorno ekvivalentna, karakterizirana na takle način:

2. izrek: Glede na delno urejenost (7') projektorjev je  $e = zz^*$  ( $f = z^*z$ ) najmanjši projektor, za katerega velja enakost  $z = ez$  ( $z = zf$ ).

Pa vzemimo, da je  $e'$  tak projektor, za katerega je tudi  $z = e'z$ . Potem je očitno  $e'e = e'e'zz^* = zz^* = e$ , torej res  $e \leq e'$ . In če je  $f'$  tak projektor, da je  $z = zf'$ , je  $ff' = z^*zf' = z^*z = f$ , se pravi, da je  $f \leq f'$ .

Če je  $z \in K$  parcialna izometrija, potem imenujemo  $e = zz^*$  levi,  $f = z^*z$  pa desni projektor elementa  $z$ . Za involutorno ekvivalenco  $e \sim f$  pa rečemo, da sloni na  $z$ .

Vsaka parcialna izometrija nam torej da par involutorno ekvivalentnih projektorjev. Res pa je tudi obratno. Vsak par projektorjev, ki sta involutorno ekvivalentna, določa parcialno izometrijo, na kateri ta ekvivalenca sloni. Za poljubna  $e, f \in P$  lahko namreč iz  $e \sim f$  sklepamo na obstoj takega  $z \in eKf$ , da je  $e = zz^*$  in  $f = z^*z$ . Potem pa je očitno tudi  $z = ez = zz^*z$ . Se pravi, da velja:

3. izrek: Vsaka involutorna ekvivalenca med projektorji sloni na neki parcialni izometriji.

V primeru splošnega  $*$ -kolobarja piscu teh vrstic niso znani kakšni uporabni in preprosti kriteriji, ki bi nam razodeli, kdaj je kak idempotent tudi projektor. Nekaj več je o tem mogoče povedati, če dodatno zahtevamo, da ima involucija v danem kolobarju  $K$  mimo lastnosti (1), (2) in (3) še dovoljen sklep

$$xx^* = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{za vsak} \quad x \in K \quad (12)$$

Če to je tako, potem govorimo o pravi involuciji v kolobarju  $K$ .

V vsakem  $*$ -kolobarju imenujemo tak element  $x$ , za katerega je

$$\text{normalen. In zdaj velja:} \quad xx^* = x^*x \quad (13)$$

4. izrek: V kolobarju s pravo involucijo je natanko vsak normalen idempotent projektor.

Pa naj bo idempotent  $e$  normalen. Potem nam da račun  $(e - ee^*)(e - ee^*)^* = (e - ee^*)(e^* - ee^*) = -ee^* + (ee^*)(ee^*) = -ee^* + e(ee^*)e^* = 0$  in torej po (12) odtod  $e - ee^* = 0$ , se pravi, da je  $e = ee^* = e^*$ . Da je obratno vsak projektor normalen idempotent, je seveda na dlani.

Tudi 1. izrek se v primeru prave involucije poenostavi:

1.a izrek: V kolobarju s pravo involucijo je element  $z$  parcialna izometrija natanko tedaj, kadar je  $e = zz^*$  projektor.

Očitno je treba le še ugotoviti, da je  $z = ez$ . To pa je razvidno iz računa

$$(z - ez)(z - ez)^* = (z - ez)(z^* - z^*e) = zz^* - ezz^* - zz^*e + ezz^*e = 0$$

iz katerega po (12) sledi, da je res  $z - ez = 0$ .

V kolobarju s pravo involucijo veljata nadalje za poljubna elementa  $x, y$  naslednji ekvivalenci

$$xy = 0 \Leftrightarrow xyy^* = 0 \Leftrightarrow x^*xy = 0 \quad (14)$$

Vsekakor je dovolj, če ugotovimo, da je po (12)

$$xyy^* = 0 \Rightarrow xyy^*x^* = 0 \Rightarrow (xy)(xy)^* = 0 \Rightarrow xy = 0$$

Brž ko ima \*-kolobar  $K$  tudi enoto 1, pa je (14) že tudi zadostni pogoj za to, da je involucija prava, saj lahko sklepamo za vsak  $x \in K$  po (14)

$$xx^* = 0 \Rightarrow 1 \cdot xx^* = 0 \Rightarrow 1 \cdot x = x = 0$$

Za vsak element  $x$  poljubnega kolobarja  $K$  imenujemo množici

$$L(x) = \{y \in K, yx = 0\} \quad \text{oziroma} \quad D(x) = \{y \in K, xy = 0\} \quad (15)$$

levi oziroma desni anihilator elementa  $x$  <sup>(1)</sup>. V zvezi s tem definirajmo:

\*-kolobar  $K$  je Rickartov \*-kolobar natanko tedaj, kadar obstaja za vsak  $x \in K$  tak projektor  $e \in K$ , da je

$$L(x) = Ke \quad (16)$$

Ugotovimo najprej nekaj skoraj neposrednih posledic te definicije:

a) Projektor  $e$ , ki pripada po (16) elementu  $x$ , je z  $x$  enolično določen. Za poljubna  $e, e' \in P$  lahko namreč iz enakosti  $Ke = Ke'$  sklepamo takole: ker je  $e = e^2 \in Ke$  in  $e' = (e')^2 \in Ke'$ , je torej tudi  $e \in Ke'$  in  $e' \in Ke$  in odtod dobimo, da je  $e = ee' = e'e = e'$ .<sup>(2)</sup>

b) K vsakemu  $x \in K$  obstaja tudi natanko en projektor  $f$  kolobarja, da je

$$D(x) = fK \quad (17)$$

Iz

$$y \in (L(x^*))^* \Leftrightarrow y^* \in L(x^*) \Leftrightarrow y^*x^* = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow y \in D(x)$$

takoj vidimo, da je za vsak  $x \in K$

$$D(x) = (L(x^*))^* \quad (18)$$

Če je torej  $f$  tisti edini projektor, da je za  $x^* \in K$  po (16)

$$L(x^*) = Kf$$

potem je kajpak po (18)

$$D(x) = fK$$

c) Vsak Rickartov \*-kolobar ima enoto.<sup>(1)</sup>

Za ničelni element 0 kolobarja je seveda

$$L(0) = D(0) = K$$

Če je torej  $e$  tisti edini projektor, za katerega je  $L(0) = Ke$ , je zaradi  $0^* = 0$  tudi  $D(0) = eK$ , se pravi, da je

$$K = Ke = eK$$

Odtod pa sledi, da je za vsak  $x \in K$  res  $x = xe = ex$  <sup>(3)</sup> in tako je projektor  $e$  enota kolobarja.

d) V Rickartovem \*-kolobarju je involucija prava.

Pa naj bo  $xx^* = 0$  in  $D(x) = fK$ . Iz hipoteze sledi, da je  $x^* \in D(x)$ , se pravi, da je  $x^* = fx^*$  in zato  $x = xf$ . Ker pa je tudi  $f = f \cdot f \in fK = D(x)$ , je  $x = xf = 0$  in dokaz je pri kraju.

Bodi  $x$  poljuben element Rickartovega \*-kolobarja  $K$ ,  $e$  in  $f$  pa tista edina projektorja, za katera je

$$L(x) = Ke \quad \text{in} \quad D(x) = fK \quad (19)$$

<sup>(2)</sup> Iz  $e = xe'$  sledi  $ee' = xe'$ , torej res  $e = ee'$  in podobno za  $e' = e'e$ .

<sup>(3)</sup> Iz  $x = ye$  dobimo  $xe = ye$ , torej res  $x = xe$  in podobno za  $x = ex$ .

Potem sta enolično določena tudi projektorja

$$g = 1 - e \quad \text{in} \quad h = 1 - \quad (20)$$

Kaj lahko povemo o njima?

Zaradi (19) najprej vidimo, da je

$$x = x - ex = gx \quad \text{in} \quad x = x - xf = xh \quad (21)$$

Potemtakem sta za vsak  $y \in K$  veljavna sklepa:  $yg = 0 \Rightarrow yx = 0$  in  $hy = 0 \Rightarrow xy = 0$ . Vendar pa smemo sklepati tudi obratno:  $yx = 0 \Rightarrow y \in L(x) \Rightarrow y = ye \Rightarrow y - ye = 0 \Rightarrow yg = 0$  in  $xy = 0 \Rightarrow y \in D(x) \Rightarrow y = fy \Rightarrow y - fy = 0 \Rightarrow hy = 0$ . Za vsak  $y \in K$  veljata torej ekvivalenci

$$yx = 0 \Leftrightarrow yg = 0 \quad \text{in} \quad xy = 0 \Leftrightarrow hy = 0 \quad (22)$$

Zdaj pa tudi brž spoznamo, da sta projektorja (20) karakterizirana s tem, da sta najmanjša projektorja, za katera veljata enakosti (21). Če je namreč  $g'(h')$  tudi tak projektor, da je  $x = g'x$  ( $x = xh'$ ), potem je  $(1 - g')x = 0$  ( $x(1 - h') = 0$ ) in zato po (22) tudi  $(1 - g')g = 0$  ( $h(1 - h') = 0$ ), se pravi, da je  $g = g'g$  ( $h = hh'$ ) in odtod sledi po (7'), da je res  $g \leq g'$  in  $h \leq h'$ .

V primeru torej, da je element  $x \in K$  parcialna izometrija, je na osnovi 2. izreka projektor  $g$  ravno levi projektor  $xx^*$  in projektor  $h$  prav desni projektor  $x^*x$  elementa  $x$ . Zaradi tega imenujemo tudi v splošnem primeru z (20) določena projektorja  $g$  oziroma  $h$ , za katera veljajo relacije iz (21) in (22), levi oziroma desni projektor elementa  $x$  in ju bomo v naprej označevali s simboloma  $LP(x)$  oziroma  $DP(x)$ .

Za vsak element  $x$  Rickartovega \*-kolobarja  $K$  je očitno

$$DP(x^*) = LP(x) \quad (23)$$

$LP(x)$  je namreč najmanjši projektor, za katerega je  $x = LP(x) \cdot x$  in to je seveda ekvivalentno z  $x^* = x^* \cdot LP(x)$ .

Prav tako se brž prepričamo, da velja za poljubna elementa  $x, y$  Rickartovega \*-kolobarja  $K$  ekvivalenca

$$xy = 0 \Leftrightarrow DP(x) \cdot LP(y) = 0 \quad (24)$$

Po (22) je namreč

$$xy = 0 \Leftrightarrow DP(x) \cdot y = 0 \Leftrightarrow DP(x) \cdot LP(y) = 0$$

Zdaj pa lahko tudi pokažemo:

5. izrek: Množica  $P$  vseh projektorjev Rickartovega \*-kolobarja  $K$  je glede na že definirano relacijo » $\leq$ «, ki jo delno ureja, mreža,<sup>(1)</sup> in sicer je za poljubna  $e, f \in P$

$$e \cup f = f + DP(e(1 - f)) \quad \text{in} \quad e \cap f = e - LP(e(1 - f)) \quad (25)$$

Pišimo  $e(1 - f) = x$  in bodi  $h = DP(x)$ . Iz  $xf = 0$  dobimo po (22) seveda  $hf = 0$  in torej tudi  $fh = (hf)^* = 0$ . Zato je očitno tudi  $f + h$  projektor. Če pišemo torej  $f + h = g$ , je zaradi  $gf = f$  seveda  $f \leq g$ . Po (21) pa je  $x = xh$  in to nam da  $e - ef = eh$ , se pravi  $e = e(f + h) = eg$ , torej tudi  $e \leq g$ . Potemtakem je  $g$  zgornja meja množice  $\{e, f\}$ . Pa naj bo  $k$  tak projektor, da velja tudi  $e \leq k$  in  $f \leq k$ . Ker je potem  $xk = e(1 - f)k = ek - efk = e - ef = x$ , je zaradi dejstva, da je  $h = DP(x)$  najmanjši projektor, za katerega velja enakost  $xh = x$ , seveda  $h \leq k$ . Toda iz  $f \leq k$  in  $h \leq k$  dobimo, da je  $gk = (f + h)k = f + h = g$ , se pravi, da je  $g \leq k$ . Potemtakem je res

$$g = f + h = f + DP(e(1 - f)) = \sup \{e, f\}$$

in s tem je prva enakost v (25) dokazana.

Da dokažemo še drugo, se naslonimo na prvo in ravnajmo takole:

Bodi projektor  $p = (1 - e) \cup (1 - f)$ . Potem dobimo iz relacij  $1 - e = (1 - e)p$  in  $1 - f = (1 - f)p$  enakosti  $1 - p = e(1 - p)$  in  $1 - p = f(1 - p)$ , se pravi, da je  $1 - p \leq e$  in  $1 - p \leq f$ , skratka, da je projektor  $1 - p$  spodnja meja množice  $\{e, f\}$ . Pa naj bo  $m$  tak projektor, da je tudi  $m \leq e$  in  $m \leq f$ . Potem je zaradi  $me = m$  in  $mf = m$  očitno  $(1 - m)(1 - e) = 1 - e$  in  $(1 - m)(1 - f) = 1 - f$ , se pravi, da je  $1 - e \leq 1 - m$  in  $1 - f \leq 1 - m$  in zato  $p \leq 1 - m$ , torej  $p(1 - m) = p$  ali drugače zapisano  $pm = 0$ . Odtod pa takoj sledi, da je  $(1 - p)m = m$  in to pomeni, da je  $m \leq 1 - p$ . Potemtakem je  $1 - p = \inf\{e, f\}$ . Če upoštevamo že dokazano prvo enakost v (25) in pa (23), nam da račun:  $1 - p = 1 - ((1 - e) \cup (1 - f)) = 1 - ((1 - f) \cup (1 - e)) = 1 - ((1 - e) + DP((1 - f)e)) = e - DP((1 - f)e) = e - LP(e(1 - f))$ . S tem je dokazana tudi druga enakost v (25).

Za dva idempotenta  $e, f$  poljubnega kolobarja  $K$  z enoto rečemo, da sta podobna, če in le če obstaja kak inverzibilen element  $x \in K$ , da je

$$f = x^{-1}ex \quad (26)$$

V Rickartovem \*-kolobarju pa velja:

6. izrek: Vsak idempotent je podoben nekemu projektorju.

Naj bo torej  $e \in I$  in  $DP(e) = h$ . Potem je kajpak  $e = eh$  in  $ey = 0 \Leftrightarrow hy = 0$ . Odtod razberemo, da je zaradi  $e(1 - e) = 0$  tudi  $h(1 - e) = 0$ , torej  $h = he$ . Kratek račun zdaj brž pokaže, da je element  $x = 1 - (1 - e)he$  inverzibilen, da je  $x^{-1} = 1 + (1 - e)he$  in da je

$$h = (1 + (1 - e)he)e(1 - (1 - e)he)$$

se pravi, da je idempotent  $e$  podoben svojemu desnemu projektorju  $DP(e)$ .

Neposredna posledica tega izreka je

7. izrek: V Rickartovem \*-kolobarju je vsak centralni idempotent projektor.

Če je namreč centralni idempotent  $e$  podoben projektorju  $h$ , vidimo iz enakosti  $h = x^{-1}ex = ex^{-1}x = e$ , da sta enaka.

Ta izrek in pa 4. izrek, ki nam odkrivata, kdaj je kak idempotent že tudi projektor, dopolnimo še z naslednjim:

8. izrek: V Rickartovem \*-kolobarju je idempotent  $e$  projektor, brž ko prirejena projektorja  $LP(e)$  in  $DP(e)$  komutirata.

Če pišemo  $LP(e) = g$  in  $DP(e) = h$ , je  $e = e^2 = ge = eh$ . Iz  $(1 - e)e = 0$  in  $e(1 - e) = 0$  pa dobimo po (22) tudi  $(1 - e)g = 0$  in  $h(1 - e) = 0$ , torej  $g = eg$  in  $h = he$ . Ker pa je po hipotezi  $gh = hg$ , je  $e = eh \cdot ge = eg \cdot he = gh$  in  $e^* = hg = gh = e$ .

Rickartov \*-kolobar  $K$  imenujemo \*-regularen kolobar, če obstaja za vsak  $a \in K$  tak  $x \in K$ , da je

$$a = axa^{(1)} \quad (27)$$

Najprej pokažimo:

9. izrek: \*-kolobar  $K$  z enoto je \*-regularen natanko tedaj, kadar eksistira k vsakemu  $a \in K$  tak projektor  $e \in K$ , da je

$$aK = eK \quad (28)$$

Naj bo torej  $a$  poljuben element \*-regularnega kolobarja  $K$  in  $x \in K$  tak, da je  $a = axa$ . Potem je očitno  $h = xa$  idempotent, saj je  $h^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa = h$ , in  $a = ah$ . Toda iz  $h = xa$  sledi  $Kh \subseteq Ka$  in iz  $a = ah$  pa  $Ka \subseteq Kh$ , se pravi, da je

$$Ka = Kh \quad (29)$$

Ker ima kolobar  $K$  enoto, brž razvidimo, da je tudi

$$D(a) = \{y, Kay = 0\} \quad \text{in} \quad D(h) = \{y, Khy = 0\}$$



To pomeni, da je zaradi (29)

$$D(a) = D(h) \quad (30)$$

Ker je  $h$  idempotent, pa brž vidimo, da je  $D(h) = (1 - h)K$ . Prav gotovo je namreč  $h \cdot (1 - h)K = 0$  in iz  $hy = 0$  sledi  $y = y - hy = (1 - h)y$ , torej  $y \in (1 - h)K$ . Potemtakem lahko pišemo (30) tudi

$$D(a) = (1 - h)K \quad (31)$$

Iz tega in iz (29) pa dobimo s podobnim premislekom

$$Ka = Kh = L(1 - h) = \{y, y(1 - h)K = 0\} = \{y, yz = 0 \text{ za vsak } z \in D(a)\}$$

se pravi, da je za vsak  $a \in K$

$$Ka = \{y, yz = 0 \text{ za vsak } z \in D(a)\} \quad (32)$$

Potemtakem je tudi za element  $a^*a \in K$

$$Ka^*a = \{y, yz = 0 \text{ za vsak } z \in D(a^*a)\} \quad (33)$$

Toda

$$D(a) = D(a^*a) \quad (34)$$

saj je očitno res

$$z \in D(a) \Rightarrow az = 0 \Rightarrow a^*az = 0 \Rightarrow z \in D(a^*a)$$

po (12) in (d) pa je tudi

$$z \in D(a^*a) \Rightarrow a^*az = 0 \Rightarrow z^*a^*az = 0 \Rightarrow (az)^*(az) = 0 \Rightarrow az = 0 \Rightarrow z \in D(a)$$

Iz (32), (33) in (34) pa seveda dobimo, da je

$$Ka = Ka^*a \quad (35)$$

Potemtakem obstaja tak  $u \in K$ , da je

$$a = ua^*a \quad (36)$$

Če postavimo

$$e = ua^* \quad (37)$$

brž vidimo, da je  $e$  projektor, saj je po (36) najprej  $e = ua^*au^* = (ua^*)(ua^*)^* = ee^*$ , torej  $e = e^*$  in zato tudi  $e = ee^* = e^2$ . Toda iz  $a = ea$  sledi  $aK \subseteq eK$ , iz  $e = e^* = au^*$  pa  $eK \subseteq aK$ . Zato je res  $aK = eK$  in dokaz v eno smer je končan.

Vzemimo še obratno, da je  $K$  tak \*-kolobar z enoto, v katerem obstaja k vsakemu  $a \in K$  tak projektor  $e \in K$ , da velja (28). Potem je spet veljaven že znani premislek

$$L(a) = \{y, yaK = 0\} = \{y, yeK = 0\} = L(e) = K(1 - e)$$

ki nam neposredno pove, da je  $K$  Rickartov \*-kolobar. Še več! Če primerjamo to enakost z (19) in (20) in upoštevamo, da je  $e = 1 - (1 - e)$ , brž spoznamo, da je v enakosti (28) projektor  $e$  z elementom  $a$  enolično določen, saj je  $e = LP(a)$ .

Iz (28) pa kajpak tudi sledi, da je  $a = ea$  in da obstaja tak  $x \in K$ , za katerega je  $e = ax$ . Zato je tudi  $a = axa$  in s tem je ugotovljena tudi regularnost kolobarja. Tako smo dokazali izrek tudi v obratni smeri.

Dodajmo temu izreku še naslednji dopolnili:

A) Seveda lahko \*-regularen kolobar  $K$  karakteriziramo tudi tako, da obstaja k vsakemu  $a \in K$  tak projektor  $f \in K$ , da je

$$Ka = Kf \quad (38)$$

Pri tem je projektor  $f$  z  $a$  enolično določen, ker je  $f = DP(a)$ .

B) Iz dokaza 9. izreka je razvidna implikacija:

Če eksistira k vsakemu  $a \in K$  tak  $u \in K$ , da je

$$a = ua^*a \quad (39)$$

potem je tudi tak projektor  $e \in K$ , da je  $aK = eK$ . Res pa je tudi obratno. Iz  $aK = eK$  namreč takoj sledi, da je  $a = ea$  in  $e = ax$  za primeren  $x \in K$ . Ker pa je  $e$  projektor, torej tudi  $e = x^*a^*$ , lahko pišemo  $a = x^*a^*a$  in če označimo  $x^* = u$ , v obliki (39). Potemtakem lahko tudi rečemo:

10. izrek: \*-kolobar  $K$  z enoto je \*-regularen natanko tedaj, kadar lahko vsak njegov element  $a$  zapišemo v obliki (39) za primerno izbran  $u \in K$ .

Za sklep se pomudimo še nekoliko pri involutorni ekvivalenci projektorjev (9). V vsakem \*-kolobarju  $K$  je gotovo za vsak projektor  $e$  veljaven sklep

$$e \approx 0 \Rightarrow e = 0 \quad (40)$$

Iz  $e \approx 0$  lahko namreč sklepamo na tak  $x \in eK0 = \{0\}$ , se pravi na  $x = 0$ , da je res  $e = xx^* = 0$ .

Če ima \*-kolobar  $K$  tudi enoto 1, se nam seveda ponuja podobno vprašanje, ali je za vsak projektor  $e$  dovoljen tudi sklep

$$e \approx 1 \Rightarrow e = 1 \quad (41)$$

Pa recimo, da bi ta sklep veljal in vzemimo poljuben  $x \in K$ , za katerega je  $xx^* = 1$ . Potem je očitno  $e = x^*x$  projektor, saj je  $e^2 = (x^*x)(x^*x) = x^* \cdot 1 \cdot x = x^*x = e = e^*$  in po (9) je seveda  $e \approx 1$ . Torej je po (41) tudi  $x^*x = e = 1$ . V \*-kolobarju  $K$  z enoto, v katerem velja za vsak projektor  $e$  sklep (41), velja potemtakem tudi sklep

$$xx^* = 1 \Rightarrow x^*x = 1 \quad \text{za vsak } x \in K \quad (42)$$

Vsekakor pa je res tudi obratno, da (42) implicira (41). Iz  $e \approx 1$  sledi namreč po (9) obstoj takega  $x \in K$ , da je  $1 = xx^*$  in  $e = x^*x$ . Po (42) pa odtod dobimo, da je tudi  $e = 1$ .

\*-kolobarje z enoto, v katerih je veljaven sklep (42), imenujemo končne<sup>(1)</sup>. Potemtakem je sklep (41) karakterističen za končne \*-kolobarje.

Nazadnje pa se še vprašajmo, kdaj velja za poljubna projektorja  $e, f$  kakšnega \*-kolobarja tudi k (10) obratni sklep

$$e \sim f \Rightarrow e \approx f \quad (43)$$

se pravi, kdaj sta »navadna« in involutorna ekvivalenca ekvivalentni? Izmed več mogočih odgovorov izberimo le tegale:

11. izrek: V \*-regularnem kolobarju  $K$  je za poljubna projektorja  $e, f$  veljaven sklep (43) natanko tedaj, kadar velja za vsak  $x \in K$  involutorna ekvivalenca

$$LP(x) \approx DP(x) \quad (44)$$

Naj bosta najprej  $e, f$  projektorja in  $e \sim f$  ter naj velja (44). Po (8) obstajata taka  $x \in eKf$  in  $y \in fKe$ , da je  $e = xy$  in  $f = yx$ . Potemtakem je  $x = ex = xf$ . Velja pa tudi za vsak  $z \in K$ :  $zx = 0 \Rightarrow zxy = 0 \Rightarrow ze = 0 \Rightarrow zex = 0 \Rightarrow zx = 0$  in  $xz = 0 \Rightarrow yxz = 0 \Rightarrow fz = 0 \Rightarrow x fz = 0 \Rightarrow xz = 0$ . Po (21) in (22) lahko torej ugotovimo, da je  $e = LP(x)$ ,  $f = DP(x)$  in zato je po (44) res  $e \approx f$ .

Vzemimo še obratno, da je  $K$  tak \*-regularen kolobar, v katerem velja sklep (43) in izberimo poljuben  $x \in K$ . Če pišemo  $LP(x) = e$  in  $DP(x) = f$ , je kajpak  $x = ex = xf \in eKf$  in na osnovi dokaza 9. izreka tudi vemo, da je  $xK = eK$ . Potemtakem je tak  $y \in K$ , da je

$xy = e$ . Ker pa je potem tudi  $x(fye) = (xf)y \cdot e = xy \cdot e = e^2 = e$ , smemo kar privzeti, da je že sam  $y \in fKe$ . Toda iz  $x(yx - f) = ex - xf = 0$  dobimo po (22) tudi  $f(yx - f) = 0$  in odtod, da je  $(fy)x = yx = f$ . Ker je torej  $e = xy$  in  $f = yx$ , je po (8) seveda  $e \sim f$  in zato po (43) tudi  $e \approx f$ , se pravi, da je res  $LP(x) \approx DP(x)$  in to smo hoteli dokazati.

## LITERATURA

- [1] S.K. Berberian, *Baer\*-Rings*, Berlin Heidelberg, New York, Springer-Verlag 1972.
- [2] I. Kaplansky, *Rings of Operators*, New York, W. A. Benjamin, INC. 1968.
- [3] J. von Neumann, *Continuous Geometry*, New Jersey, Princeton University Press 1960.

## NOVE KNJIGE

**Andrej Čadež, Fizika zvezd, DMFA SRS 1977, str. 60, cena 20.— din (16.— din). (Post-diplomski seminar iz fizike; 5)**

S prijetnimi občutki lahko spremljamo dejstvo, da se v zadnjem času — predvsem po zaslugi fizikalne šole in Društva matematikov, fizikov in astronomov — sicer počasi, toda vztrajno bogati originalno strokovno fizikalno čtivo v slovenščini. Najnovejši prispevek so skripta A. Čadeža *Fizika zvezd*.

Delo je posvečeno, kot pove že naslov, fizikalnemu dogajanju v zvezdah. Bralec se najprej seznani z osnovnimi enačbami zvezd, z mehanskim in energijskim ravnovesjem teh veleskupkov snovi. Preproste ocene značilnih količin, ki izhajajo iz teh enačb, so presenetljivo točne. Sledi podrobnejši opis zvezdne snovi, ocena za učinkovitost gorivnih ciklov in ocena za prosojnost zvezdne snovi, se pravi, za učinkovitost prenosa energije. Z dobljenimi zaključki so zgrajeni modeli zvezd. Končna poglavja so posvečena »nenavadnim« zvezdam, belim pritlikavkam, nevtronskim zvezdam in črnim luknjam. Tudi tu je obstoj zvezde kot celote pojasnjen s stanjem snovi v njej.

Delo se odlikuje z razumljivim, pa vendar temeljitim podajanjem gradiva. V verigi korakov od osnov do končnega cilja — modela zvezde, ni avtor nikjer pustil vrzeli, pri kateri bi se morali zadovoljiti z opravičilom o težavnosti. Pri podrobnostih iz kvantne mehanike in jedrske fizike je znal ujeti pravo mero, utrujajoče račune je znal nadomestiti s pojasnilom, izvedenim iz osnovnih načel. Zato je fizikalna vsebina vsakega računa hitro razvidna in dostopna vsakomur, ki se je v osnovnih tečajih fizike in matematike privadil fizikalnemu računstvu. Celo ljubitelj brez potrebne izobrazbe bo lahko iz samega besedila razbral bistvo.

To bistvo pa je — da zvezde kot fizikalni pojav razumemo; da tudi s preprostimi fizikalnimi razmisleki razumemo, kaj se dogaja v njihovi notranjosti in zakaj so prav take, kot so. Posebej za šolnike bo morda zanimiv celo pogled v obratni smeri: iz dela je mogoče posneti celo kopico zgledov za osnovne fizikalne zakonitosti — in to v novi, privlačni preobleki.

Skripta *Fizika zvezd* bodo nedvomno našla širok krog bralcev in so dragocen prispevek k slovenski naravoslovni kulturi. Avtorju pa naj bo poleg priznanja izrečena tudi spodbuda za načrtovani drugi del, ki bi bil posvečen dinamiki razvoja zvezd.

Alojz Kodre

## BARVNI LASERJI

BORIS VEDLIN

UDK 535.374

V sestavku so opisani laserji z organskimi barvili. Obdelan je spekter energijskih stanj molekule barvila in obravnavani energijski prehodi, ki vplivajo na lasersko delovanje. Nazadnje je izpeljana enačba za optimalno prepustnost izhodnega zrcala laserja.

### DYE LASERS

In the paper organic dye lasers are treated. The energy spectrum of dye molecules is described and the energy transitions that influence laser operation are discussed. Finally the expression for the optimum coupling value of the output mirror is derived.

### Uvod

Barvni laser ni dobil imena zaradi lastnosti, da mu lahko spreminjamo valovno dolžino (barvo izsevane svetlobe), ampak zaradi organskega barvila, ki je v njem aktivna snov. Izkorišča namreč lastnost, da mnoga organska barvila močno absorbirajo vidno in deloma ultravijolično in infrardečo svetlobo ter sevajo svetlobo pri nekoliko daljših valovnih dolžinah. 1966 sta Sorokin in Lankard [1] prva vzbudila stimulirano sevanje v organskem barvilu in odprla pot barvnim laserjem, ki so izpolnili dolgoletno željo: možnost preprostega in zveznega spreminjanja valovne dolžine na širokem območju. Barvni laser je zanimiv tudi s teoretičnega stališča, saj z razmeroma preprostim modelom lahko odgovorimo na osnovna vprašanja o njegovem delovanju. V bistvu je to štiristanjski laser, kar pomeni, da so v lasersko delovanje bistveno vpletena štiri energijska stanja organske molekule. Molekula doživi štiri energijske prehode, da zaključi en laserski krog in izseva en foton laserske svetlobe. Brez razumevanja narave teh prehodov ne moremo pojasniti pojavov, ki povzročajo inverzno zasedenost, in pojavov, ki skušajo lasersko delovanje preprečiti. Posredno pa vplivajo na lasersko delovanje še številni drugi prehodi med elektronskimi nivoji. Ti so razširjeni zaradi nihanja atomov ali atomskih skupin v molekuli in vrtenja molekule. Najprej obdelajmo energijski spekter molekule organskega barvila [1], [2].

### Energijska stanja

Singletni (S) in tripletni (T) elektronski nivoji v energijskem spektru razmeroma zapletene organske molekule so zaradi nihanj in vrtenj razširjeni v širok pas (sl. 1). Energijska razlika med sosednjima vrtilnima stanjema (tanke črte na sl. 1) ima velikostno stopnjo  $15\text{ cm}^{-1}$ , zato lahko obravnavamo elektronske nivoje kot kontinuum.

Omenili smo že, da je barvni laser štiristanjski laser. V prvem koraku laserskega kroga preide molekula iz osnovnega stanja  $S_0$  v eno od višjih vrtilno-nihajnih stanj nivoja  $S_1$  ( $A \rightarrow b$ ). Sledi drugi korak: zelo hiter prehod brez sevanja v najnižje stanje pasu  $S_1$  ( $b \rightarrow B$ ), kar pri večini molekul organskih barvil v povprečju ne traja dlje kot 10 ps. Stanje B je »odhodno« stanje za stimulirano sevanje. Molekule se v tem stanju zadržujejo zelo dolgo, v povprečju približno 5 ns, zato se jih v njem lahko nabere veliko, tako da dobimo inverzno zasedenost energijskih stanj.

Ko je molekula v spodnjem stanju prvega vzbujenega singletnega nivoja (B), ima na voljo različne poti za vrnitev v osnovno stanje. Naj omenimo najpomembnejše.

Vrnitev v  $S_0$  ( $B \rightarrow a$ ) s spontanym sevanjem, ki je spinsko dovoljen prehod, imenujemo fluorescenca. Izdatna fluorescenca je pogoj, da je organsko barvilo uporabno kot laserska snov.

Molekula se lahko vrne v osnovno stanje brez sevanja. To je nezaželen pojav, ker zmanjšuje fluorescenčni kvantni izkoristek.

Drugi nezaželen spontani prehod brez sevanja je prehod  $S_1 \rightarrow T_1$ . Verjetnost za ta prehod je razmeroma majhna, ker je prehod iz singletnih v tripletna stanja spinsko prepovedan. Toda stanje  $T_1$  je metastabilno z zelo dolgim razpadnim časom in deluje kot past za molekule. Molekula lahko preide iz stanja  $T_1$  v osnovno stanje ( $T_1 \rightarrow S_0$ ) brez sevanja ali s sevanjem. V drugem primeru je to fosforescenca. Tipični fosforescenčni razpadni čas je mnogo daljši od fluorescenčnega in meri od milisekunde do sekunde. Zato so že 1961 predlagali barvni laser na osnovi fosforescence, vendar poskusi niso uspeli. Vzrokov za to je več, med njimi je tudi razmeroma kratek razpadni čas za prehod  $T_1 \rightarrow S_0$  brez sevanja.

Povrnimo se k laserskemu krogu. Tretjemu koraku — stimuliranemu sevanju ustreza isti prehod kot spontanemu sevanju pri fluorescenci ( $B \rightarrow a$ ); barvilo seva stimulirano, če je dosežen prag za lasersko delovanje (izdatno vzbujanje molekul, majhne izgube itd.). Energijsko stanje a je lahko katerokoli od stanj nivoja  $S_0$ . Tu se skriva možnost za spreminjanje valovne dolžine. Energijska razlika med stanjema B in a in s tem valovna dolžina izsevane svetlobe je odvisna od energije stanja a.

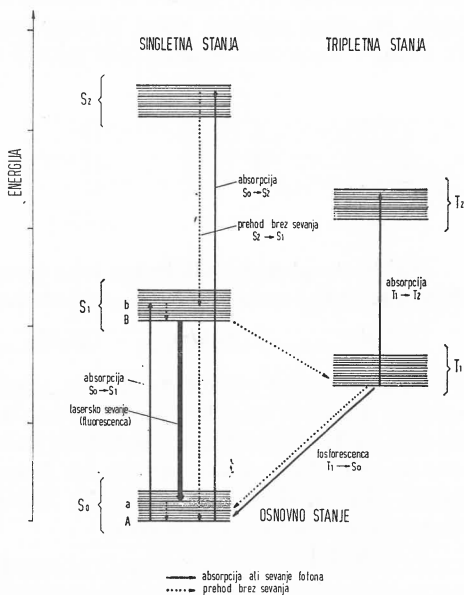
Praznjenje stanja a — četrti korak v laserskem krogu — je bistveno za doseg inverzne zasedenosti. Tu je odločilna Boltzmannova porazdelitev. Da se ohrani termično ravnovesje, razpade stanje a brez sevanja in se napolni dno osnovnega elektronskega nivoja  $S_0$ . Molekula je potem pripravljena, da ponovno absorbira foton in začne krog znova.

Drugi mogoči prehodi, ki so označeni na sl. 1, so za delovanje laserja izguba. To so absorpcijski prehodi  $S_0 \rightarrow S_2$ ,  $S_1 \rightarrow S_2$  in  $T_1 \rightarrow T_2$ . Njihov vpliv je odvisen od zgradbe organske molekule, ureditve molekul topila okoli molekul barvila itd.

### Model barvnega laserja

Zdaj ko poznamo energijski spekter molekule organskega barvila, se lahko lotimo enačb za gostoto svetlobnega toka v notranjosti laserskega resonatorja in zunaj njega. Zanima nas barvni laser z optičnim črpanjem ob neprekinjenem delovanju (CW). Za črpanje običajno uporabljamo ionske laserje z močmi med 2 in 20 W.

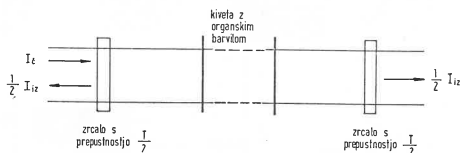
Definirajmo najprej nekaj količin. Preseka za absorpcijo v osnovnem stanju  $S_0$  pri črpalni in laserski valovni dolžini naj bosta  $\sigma_e$  in  $\sigma_l^0$ , preseka za absorpcijo laserske svetlobe v vzbujenem stanju  $S_1$  in najnižjem tripletnem stanju  $T_1$  pa  $\sigma_l^1$  in  $\sigma_l^T$ . Presek za stimulirano sevanje označimo z  $\sigma_e$ . Vsi omenjeni absorpcijski preseki imajo pri molekulah organskih barvil velikostno stopnjo okoli  $10^{-16} \text{ cm}^2$ . Razpolovna časa vzbujenega singletnega stanja  $S_1$  in tripletnega stanja  $T_1$  označimo s  $\tau_1$  in  $\tau_T$ . Gostote molekul v osnovnem stanju  $S_0$ , vzbuj-



Sl. 1. Poenostavljena risba energijskih stanj molekule organskega barvila

jenem stanju  $S_1$  in tripletnem stanju  $T_1$  naj bodo  $N_0$ ,  $N_1$  in  $N_T$ . Količini  $I_I$  in  $I_c$  pa sta gostoti svetlobnega toka laserja in črpalnega svetila.

Poenostavljeno risbo resonatorja barvnega laserja kaže sl. 2. Vsako od zrcal resonatorja ima prepustnost  $\frac{1}{2} T$ . Črpalni in laserski curek sta vzporedna in se prekrivata. Črpalni curek po enem prehodu skozi aktivno snov zapusti resonator, laserski curek pa sestoji iz dveh, v nasprotnih smereh razširjajočih se delov, ki potujeta med zrcaloma [3].



Sl. 2. Poenostavljena risba resonatorja barvnega laserja

Naj bosta gostoti svetlobnega toka laserja in črpalnega svetila  $I_I$  in  $I_c$  v fotonih/cm<sup>2</sup>s. Potem se transportna enačba za svetlobo barvnega laserja glasi

$$(dI_I/dz)_{celoten} = (dI_I/dz)_{stim} + (dI_I/dz)_{sing}^0 + (dI_I/dz)_{sing}^1 + (dI_I/dz)_{trip} + (dI_I/dz)_{ost} \quad (1)$$

Prvi člen na desni opisuje naraščanje gostote toka laserske svetlobe zaradi stimuliranega sevanja, naslednji trije členi pa označujejo izgube na račun absorpcije pri prehodih  $S_0 \rightarrow S_n$ ,  $S_1 \rightarrow S_n$  in  $T_1 \rightarrow T_n$ . Indeks  $n$  se nanaša na katerikoli višje vzbujeni elektronski nivo. Zadnji člen na desni strani enačbe opisuje vse druge izgube; med njimi so najpomembnejše izgube zaradi uklona, sipanja in absorpcije laserske svetlobe na optičnih elementih ter izgube zaradi prepustnosti izhodnih zrcal.

Z zvezo [2]

$$(dI_I/dz)_{stim} = N_1 \lambda^4 E(\lambda) I_I / 8 \pi \tau_1 c n^2 = \sigma_e N_1 I_I \quad (2)$$

in podobnimi zvezami za druge člene enačbe (1) dobimo [4]

$$(n/c) dI_I/dt + dI_I/dz = I_I (\sigma_e N_1 - \sigma_l^0 N_0 + \sigma_l^1 N_1 - \sigma_l^T N_T - K) \quad (3)$$

$c$ ,  $n$  in  $\lambda$  so hitrost svetlobe v praznem prostoru, lomni kvocient laserske snovi in valovna dolžina laserske svetlobe. Parameter  $K$  podaja zgoraj omenjene izgube v resonatorju (uklon itd.).  $E(\lambda)$  je normalizirana funkcija za odvisnost jakosti električnega polja od valovne dolžine spontano izsevane svetlobe.

Zdaj zapišimo, kaj vse vpliva na zasedenost zgornjega laserskega stanja (najnižje stanje singletnega nivoja  $S_1$ ):

$$dN_1/dt = \sigma_e N_0 I_c + \sigma_l^0 N_0 I_I - N_1/\tau_1 - \sigma_e N_1 I_I \quad (4)$$

Prva dva člena na desni strani ustrezata polnjenju stanja zaradi absorpcije črpalnega in laserskega curka v osnovnem stanju, zadnja dva člena pa praznjenju zaradi spontane in stimulirane emisije.

Podobna, a preprostejša enačba opisuje zasedenost najnižjega tripletnega stanja:

$$dN_T/dt = k_{st} N_1 - N_T/\tau_T \quad (5)$$

Parameter  $k_{st}$  podaja število prepovedanih prehodov  $S_1 \rightarrow T_1$  v časovni enoti, drugi člen pa meri hitrost vračanja v osnovno stanje s prehodi  $T_1 \rightarrow S_0$ .

Enačbe (3), (4) in (5) so osnovne enačbe barvnega laserja. Vsebujejo tri neznanke  $I_I$ ,  $N_1$  in  $N_T$ . Vse druge količine lahko izmerimo. Ker nas zanima gostota energijskega toka laserske svetlobe pri stacionarnem delovanju, so vsi časovni odvodi enaki nič. Prav tako se ne menimo za odvod  $dI_I/dz$  v enačbi (3); treba ga je upoštevati le pri zelo izdatnem optičnem ojačanju. Tako dobimo preprost sistem treh linearnih enačb:

$$\sigma_e N_1 - \sigma_l^0 N_0 - \sigma_l^1 N_1 - \sigma_l^T N_T - K = 0 \quad (6)$$

$$\sigma_e^0 N_0 I_{\tilde{e}} + \sigma_l^0 N_0 I_l - N_l / \tau_1 - \sigma_e N_l I_l = 0 \quad (7)$$

$$k_{st} N_l - N_T / \tau_T = 0 \quad (8)$$

Rešitev tega sistema pripelje do gostote svetlobnega toka v notranjosti resonatorja

$$I_l = [\sigma_e^0 \sigma_{ef} \tau_1 N_0 I_{\tilde{e}} - \sigma_l^0 N_0 - K] / [\sigma_e \tau_1 K + \sigma_l^0 \tau_1 N_0 (\sigma_l^1 + \sigma_l^T k_{st} \tau_T)] \quad (9)$$

Pri tem je

$$\sigma_{ef} = \sigma_e - \sigma_l^1 - \sigma_l^T k_{st} \tau_T \quad (10)$$

Prikladno je razdeliti parameter  $K$  na dva dela

$$K = (L + T) / l \quad (11)$$

tako da vključuje  $L$  makroskopske izgube,  $T$  pa izgube zaradi prepustnosti zrcal. Del valovanja, ki zapusti resonator skozi izhodno zrcalo in ga koristno uporabimo, je namreč s stališča resonatorja izguba.  $l$  meri dolžino aktivne snovi (kivete z barvilom).  $K$  in  $L$  izrazimo kot relativno zmanjšanje gostote svetlobnega toka pri enem prehodu svetlobe skozi aktivno snov.

Gostota svetlobnega toka, ki zapuša laser skozi izhodno zrcalo s prepustnostjo  $T$ , je

$$I_{iz} = T I_l \quad (12)$$

(12) združimo z (11) in (9), pa dobimo

$$I_{iz} = T [\sigma_e^0 \sigma_{ef} \tau_1 N_0 I_{\tilde{e}} - \sigma_l^0 N_0 - (L + T) / l] / [\sigma_e \tau_1 (L + T) / l + \sigma_l^0 \tau_1 N_0 (\sigma_l^1 + \sigma_l^T k_{st} \tau_T)] \quad (13)$$

Najpogosteje nas zanima, kako je moč laserja odvisna od prepustnosti izhodnega zrcala (sl. 3). Za vsako izbrano valovno dolžino obstaja optimalna propustnost izhodnega zrcala  $T_{opt}$ . Pri večini laserjev s stalnim delovanjem meri prepustnost  $T_{opt}$  od dela odstotka do deset odstotkov. Za velike prepustnosti  $T$  se gostota svetlobnega toka izhodnega curka zmanjša, ker se lasersko valovanje zaradi večjih izgub težje razvije, pri še večjih prepustnostih pa laser zamre.

Parameter  $T_{opt}$  je eden izmed najpomembnejših podatkov pri konstrukciji vsakega laserja. Izračunajmo ga še naravnost. Postavimo pogoj za ekstrem

$$dI_{iz} / dT = 0 \quad (14)$$

in po kratkem računu izrazimo  $T_{opt}$  kot

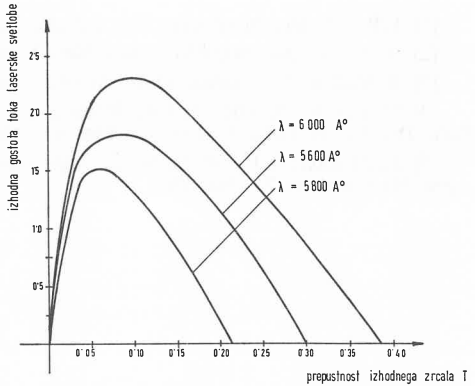
$$T_{opt} = u [(1 + v/u)^{1/2} - 1] \quad (15)$$

$u$  in  $v$  sta

$$u = L + l N_0 \sigma_l^0 (\sigma_l^1 + \sigma_l^T k_{st} \tau_T) / \sigma_e \quad (16)$$

$$v = l N_0 (\sigma_l^0 \sigma_{ef} \tau_1 I_{\tilde{e}} - \sigma_l^0) - L \quad (17)$$

Rezultat (15) je zelo podoben izrazu za optimalno propustnost izhodnih zrcal štiristanjskih plinskih laserjev [2]. To ni presenetljivo, saj so fizikalne osnove laserjev kljub različnemu načinu vzbujanja molekul ali atomov (črpanja) zelo podobne.



Sl. 3. Energijski tok barvnega laserja v odvisnosti od prepustnosti izhodnega zrcala pri izbranih valovnih dolžinah

## Zgled

V ilustracijo navedimo nekaj številskih podatkov. Denimo, da uporablja laser kot aktivno snov  $10^{-4}$  molarno raztopino rodamina 6G. To je najpogosteje uporabljeno organsko barvilo, ker ima zelo močno fluorescenco. Črpajmo z zeleno črto argonovega ionskega laserja z valovno dolžino 5145 Å. Rodamin 6G seva rumeno, oranžno in rdečo svetlobo. Izberimo valovno dolžino barvnega laserja 5700 Å, ki je blizu vrha fluorescenčne krivulje, kar pomeni, da rodamin 6G tam najmočnejše spontano seva. Predpostavimo, da je argonov laser zmožen sevati svetlobni tok z gostoto  $10^{24}$  fotonov/cm<sup>2</sup>s in da optični elementi prinesejo 4% makroskopskih izgub. Potrebujemo še absorpcijske preseke in časovne konstante [1]:  $\sigma_e^0 = 1,6 \cdot 10^{-16}$  cm<sup>2</sup>,  $\sigma_l^0 = 0,15 \cdot 10^{-16}$  cm<sup>2</sup>,  $\sigma_l^1 = 0$ ,  $\sigma_l^T = 0,18 \cdot 10^{-16}$  cm<sup>2</sup>,  $\sigma_e = 1,8 \cdot 10^{-16}$  cm<sup>2</sup>,  $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-9}$  s,  $k_{st}\sigma_T = 0,8$ . Dolžina kivete z organskim barvilom naj bo 0,03 cm.

Iz (16) in (17) sledi  $u = 0,042$  in  $v = 0,20$ , kar pripelje do končnega rezultata  $T_{opt} = 0,06$ . Vsako od izhodnih zrcal mora imeti za valovno dolžino 5700 Å prepustnost 6%, da barvni laser dela z največjo izhodno močjo.

Omenimo na koncu še to, da organskih barvil v laserski tehnologiji ne uporabljajo samo kot aktivne snovi v barvnih laserjih. Zaradi lastnosti, da postane organsko barvilo ob nasičenju absorpcije prepustno za svetlobo, če le-ta doseže dovolj veliko gostoto toka, izdelujejo iz njih stikala Q (Q-switch) in enote za fazno usklajevanje longitudinalnih nihajnih načinov (mode-locking). S tem se raziskovalno ukvarjajo tudi pri nas na ljubljanskem centru za elektrooptiko (ISKRA).

## LITERATURA

- [1] F.P. Schafer, *Dye Lasers*, F.P. Schafer Ed., New York, Springer Verlag 1973.
- [2] A. Yariv, *Quantum Electronics*, New York, John Wiley & Sons 1975.
- [3] B. Vedlin, Transverzalni laserski nihajni načini, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 83.
- [4] O. Tesche, A. Dienes, J.R. Whinnery, *Theory and Operation of High Power CW and Long Pulse Dye Lasers*, IEEE J. Quantum Electron. **QE-12** (1976) 383.
- [5] H. Mocker, R.J. Collins, *Mode competition and self-locking effects in a Q-switched ruby laser*, Appl. Phys. Letters **7** (1965) 270.

## NOVE KNJIGE

Mitja Rosina, *Jedrska fizika*, 2. izdaja. DMFA SRS 1977. 396 str. Cena 140.— din (112.— din)

Jedrska fizika je prvič izšla pred osmimi leti. Ker so skripta, ki jih uporabljajo predvsem študenti fizike v 4. letniku, pošla, se je avtor odločil za ponatis. Popravljen je le tiskovne napake in na dveh krajih izboljšal razlago. Kakor piše v uvodu, namerava skripta predelati in jim dodati nova poglavja — posebno o osnovnih delcih — čez nekaj let, ko se bo področje bolj ustalilo, ko bodo izdelane trajnejše interpretacije in se bodo pokazale nove možnosti za uporabo. Ponatisa se bodo razveselili študenti fizike in drugi, ki se zanimajo za jedrsko fiziko.

Ciril Velkovrh



## JOSEPHSONOV POJAV

FRANC SEVER

UDK 537.312.62

Članek obravnava osnovne značilnosti Josephsonovega pojava. Najprej je izpeljana zveza za tok skozi šibki spoj med dvema deloma supraprevodne kovine. Temu sledi nekaj zgledov za uporabo pojava.

### THE JOSEPHSON EFFECT

In this article the basic facts about the Josephson effect are described. The relation for the current through the weak link between two parts of a superconducting metal is derived. Finally some examples of application of the Josephson effect are considered.

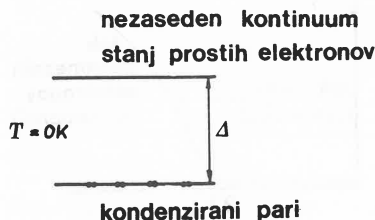
### Uvod

1962 je B. Josephson napovedal pojav, pri katerem opazimo kvantne značilnosti v makroskopskem merilu. *Josephsonov pojav* so kmalu zatem tudi eksperimentalno odkrili. Do danes je dal že več zanimivih praktičnih uporab, kot so npr. merjenje zelo šibkih magnetnih polj, detekcija elektromagnetnega valovanja z zelo visoko frekvenco, precizno merjenje konstante  $h/2e_0$  ipd.

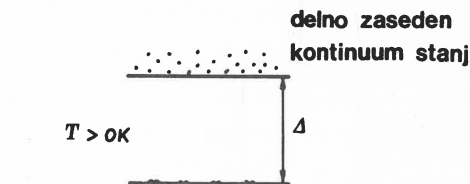
Pri Josephsonovem pojavu gre za tuneliranje parov elektronov skozi tanko zaporno plast med dvema supraprevodnikoma. Poznamo dve vrsti Josephsonovega pojava. Pri *enosmernem Josephsonovem pojavu* ohranijo pari pri tuneliranju svojo energijo in zato tok ni povezan s padcem napetosti. Enosmerni tunelski tok ima kritično vrednost  $I_c$ , ki je značilna za dani spoj. Če pritismo na spoj napetost, pa nastopi *izmenični Josephsonov pojav*; tok začne nihati z amplitudo  $I_c$ . Ta izmenični tok s frekvenco  $\nu$  je posledica dejstva, da pri prehodu čez potencialni skok  $V$  pari ne ohranijo svoje energije in se zato izseva radiofrenkvenčni foton z energijo  $h\nu = 2e_0V$ .

Kot vemo, je supraprevodnik snov, pri kateri pade električni upor na nič, če jo ohladimo pod kritično temperaturo. Ta pojav je prvi opazil H.G. Kamerlingh-Onnes 1911, mikroskopsko razlago pa so dali Bardeen, Cooper in Schrieffer 1957. V supraprevodnem stanju so elektroni vezani v pare. Vsi pari so v istem kvantnem stanju in vsi imajo isto energijo in gibalno količino. Pri 0 K so vsi elektroni vezani v pare, pri višji temperaturi pa dobe nekateri pari dovolj energije, da se raztrgajo. Pojavijo se prosti elektroni v kontinuumu stanj. Da raztrgamo par, potrebujemo energijo  $2\Delta$ , se pravi  $\Delta$  na elektron. Energijski spekter supraprevodnika kaže sl. 1. Po supraprevodniku teče tok, tudi če ni električnega polja: pari elektronov ne čutijo trenja in se prosto gibljejo. Uporabimo Newtonov zakon in napišemo izraz za gostoto električnega toka:

$$F = 2mdv/dt = 2e_0E \quad j = \frac{1}{2} n_s \cdot 2e_0v = n_s e_0v$$



Sl. 1 a



Sl. 1 b

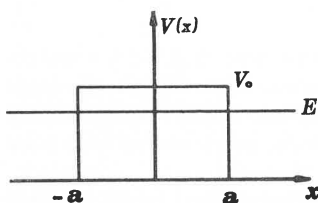
$n_s$  je gostota supraprevodnih elektronov. Odvajajmo gostoto toka po času, pa dobimo prvo Londonovo enačbo:

$$dj/dt = n_s e_0 dv/dt = (n_s e_0^2 / m) E \quad (1)$$

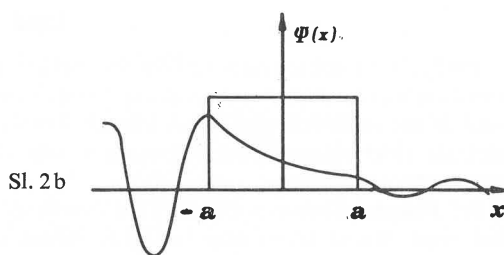
Enačba kaže, da v supraprevodni snovi ni električnega polja, če teče po njej stacionarni tok.

### Tuneliranje

Najprej si bolj splošno oglejmo tuneliranje. Za primer vzemimo tuneliranje posameznega elektrona skozi potencialno oviro (sl. 2a). Po klasični mehaniki se pot elektrona z  $W < V_1$  konča točno na robu potencialne ovire in elektron nikdar ne premaga potencialne ovire. V kvantni mehaniki opišemo gibanje prostega elektrona z valovno funkcijo  $\psi$ , ki ima zunaj ovire obliko kompleksnega ravnega vala, znotraj ograje pa približno eksponentno upada. Če je ovira dovolj ozka, je verjetnost, da najdemo elektron na drugi strani ovire, znatna (sl. 2b). Lep primer tunelskega pojava je razpad  $\alpha$ , pri katerem delci  $\alpha$  zapuste jedro, tako da tunelirajo skozi elektrostatsko oviro.

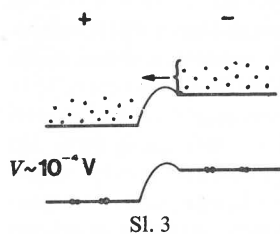


Sl. 2a



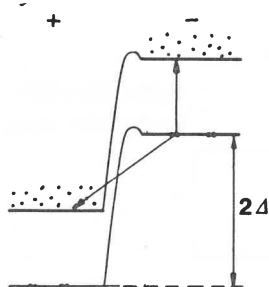
Sl. 2b

Oglejmo si še tuneliranje med dvema enakima supraprevodnikoma. Če je  $V = 0$ , ni toka posameznih elektronov, ker je tok posameznih elektronov z desne na levo enak toku v obratni smeri. Pri  $V = 0$  teče le tok parov. To je enosmerni Josephsonov pojav. Ko je  $V \neq 0$ , pa elektroni iz raztrganih parov lahko tunelirajo v obe smeri. Poleg tega tunelirajo tudi pari. Pri tem se izsevajo radiofrekvenčni fotoni z energijo  $h\nu = 2e_0 V$ . To je izmenični

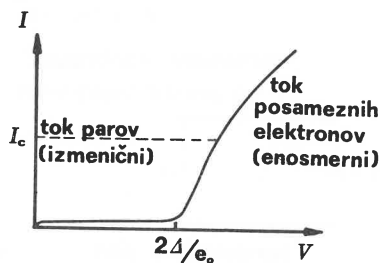


Sl. 3

Josephsonov pojav. Tok posameznih elektronov z desne na levo je večji od toka z leve na desno, ker je za elektrone z desne na levi več nezasedenih nivojev, kot jih je za elektrone z leve na desni. Skupni tok v levo narašča z napetostjo, dokler niso zasedeni nivoji na levi vsi nižji od dna kontinuuma na desni. To se primeri, ko je  $e_0 V \sim$  in  $kT$  ali  $V \sim 10^{-4}$  V, ker leže nesparjeni elektroni v območju s širino  $kT$  okrog najnižjega nivoja kontinuuma (sl. 3). Ko napetost še naraste, ostane tok bolj ali manj konstanten. Noben elektron z leve ne more tunelirati v desno, število elektronov na desni, ki so zmožni tuneliranja, pa je konstantno.



Sl. 4a



Sl. 4b

Ko  $V$  doseže  $2\Delta/e_0$ , pride do trganja Cooperjevih parov (sl. 4a). Eden od obeh elektronov tunelira v levo in pri tem zasede najnižji nivo kontinuuma. Drug elektron iz para pa zasede najnižji nivo kontinuuma na desni. Tok se močno poveča (sl. 4b).

### Faza valovne funkcije za elektronske pare

Kot vemo, je supraprevodni tok posledica koherentnega gibanja Cooperjevih parov. Ker so vsi pari v istem stanju, opišemo njihovo gibanje z isto valovno funkcijo  $\psi \propto e^{i(kr - \omega t)}$ . Tu je  $k$  valovni vektor za težišče para,  $r$  njegova koordinata in  $W = \hbar\omega = p_{para}^2/2m_{para}$  energija para. Izraz  $kr - \omega t$  v eksponentu pri valovni funkciji ima pomen faze enako kot pri klasičnem valovanju. Faza valovne funkcije za elektronske pare je makroskopsko opazljiva, ker je makroskopsko število parov v istem stanju z isto fazo. Podobno je pri fotonih v laserski svetlobi. Pri takem koherentnem valu je fazna razlika med poljubnima dvema točkama v nekem kosu supraprevodnika v času konstantna. Zato lahko med supraprevodnimi tokovi pričakujemo interferenčne pojave. Teh pojavov ne opazimo med navadnimi tokovi v navadni kovini, ker se tam elektroni kar naprej sipajo in se fazna povezava zgubi že na zelo kratkih razdaljah.

Naj od točke X teče k točki Y supraprevodni tok. Tedaj je gibalna količina Cooperjevih parov različna od nič in de Broglieva valovna dolžina  $\lambda = h/p$  končna. Med točkama X in Y obstaja v času konstantna razlika faz:  $(\Delta\vartheta)_{XY} = \vartheta_Y - \vartheta_X = \int k dl$ . Ta integral in podobne integrale je treba izračunati med točkama X in Y. Za delce z nabojem  $e$  in maso  $m$ , ki se gibljejo v magnetnem polju, je *posplošeni impulz* enak  $p = mv + eA$ , če je  $A$  vektorski potencial. Pri prehodu na kvantni opis je treba  $k$  izraziti s posplošenim impulzom, ne z gibalno količino. Tako lahko ločimo dva prispevka k fazni razliki. Prvi je zaradi toka in drugi zaradi magnetnega polja:

$$(\Delta\vartheta)_{XY} = \int k dl = \int (p/\hbar) dl = \hbar^{-1} \int (2mv + 2e_0 A) dl = (2m/\hbar) \int v dl + (2e_0/\hbar) \int A dl$$

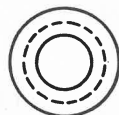
Hitrost težišča para  $v$  izrazimo z gostoto toka:  $v = j/n_s e_0$  in dobimo za fazno razliko med točkama X in Y:

$$(\Delta\vartheta)_{XY} = (4\pi m/\hbar n_s e_0) \int j dl + (4\pi e_0/\hbar) \int A dl \quad (2)$$

Imejmo supraprevodnik, ki obdaja območje iz navadne snovi. Ko napravimo zaključeno pot po supraprevodniku, mora biti celotna sprememba faze celoštevilčni mnogokratnik  $2\pi$ , da je valovna funkcija enolična:  $\Delta\vartheta = (4\pi m/\hbar n_s e_0) \oint j dl + (4\pi e_0/\hbar) \oint A dl = 2\pi n$ . Uporabimo zvezo  $B = \text{rot} A$  in Stokesov izrek  $\oint A dl = \oint \text{rot} A dS = \oint B dS$  in dobimo:  $\Delta\vartheta = (4\pi m/\hbar n_s e_0) \oint j dl + (4\pi e_0/\hbar) \oint B dS = 2\pi n$ . Če delimo s  $4\pi e_0/\hbar$ , dobimo na levi *fluksoid*  $\Phi'$ :

$$\Phi' = (m/n_s e_0^2) \oint j dl + \oint B dS = nh/2e_0 = n\Phi_0 \quad (3)$$

Količino  $\Phi_0 = h/2e_0 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$  imenujemo *flukson*. Opazimo, da je fluksoid kvantiziran. Nekateri bolj površno rečejo, da je fluks  $\oint B dS$  kvantiziran. To je res, če izberemo pot po notranjosti supraprevodnika, ker tam ni toka (sl. 5). V supraprevodniku teče namreč tok le po površini. Če bi tekkel tudi v notranjosti, bi iz Maxwellovih enačb sledilo, da je tam magnetno polje, to pa je v nasprotju z Meissnerjevim pojavom.



Sl. 5

### Šibki spoj

Tanko plast izolatorja ali supraprevodnika med dvema supraprevodnikoma imenujemo *šibki spoj*, če je kritični tok tega spoja dosti manjši od kritičnega toka supraprevodnikov na obeh straneh spoja. Poleg tega v šibki spoj prodre magnetno polje že tedaj, ko sta kosa

supraprevodnika na obeh straneh spoja še v supraprevodnem stanju in zaradi Meissnerjevega pojava v njiju ni magnetnega polja. Enosmerni supraprevodni tunelski tok skozi šibki spoj je:

$$I = I_c \sin \delta \quad (4)$$

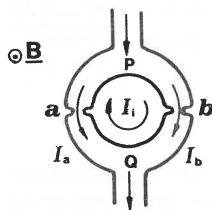
$\delta = \Delta\varphi$  je razlika faz, ki nastane na spoju in  $I_c$  je kritični tok spoja.

Morda nekatere bralce zanima pot do zveze (4). Vzemimo dva kosa supraprevodnika, ki sta ločena z izolacijsko plastjo. Skupno število elektronov v obeh kosih se ne spreminja in je enako  $2N \gg 1$ . Stanje tega sistema je že opisano, če poznamo število elektronov  $2n$  v enem kosu, kajti v drugem kosu jih je  $2(N - n)$ . Vzemimo, da je izolacijska plast tako debela, da elektroni ne morejo tunelirati skozi njo. Tedaj opišemo stanje celotnega sistema  $\Psi_n$  s produktom valovnih funkcij  $\Phi_{2n}$  in  $\Phi_{2(N-n)}$ , od katerih prva opisuje prvi kos supraprevodnika, v katerem je  $2n$  elektronov, druga pa drugi kos supraprevodnika z  $2(N - n)$  elektroni. Kadar spoj ni na zunanji napetosti, sta kemijska potenciala na obeh straneh spoja enaka in je energija celega sistema  $W$  neodvisna od tega, ali je kak elektron na eni ali na drugi strani spoja. V šibkem spoju pa je izolacijska plast tako tanka, da omogoča tuneliranje elektronov. Tuneliranje opišemo tako, da k Hamiltonovemu operatorju za popolnoma ločena kosa supraprevodnika dodamo majhno motnjo. Ta povzroči sklopitev stanj na obeh straneh in odpravi degeneracijo stanj z različnim številom elektronov na eni ali na drugi strani spoja. Motnja sklopi stanje  $\Psi_n$  z danim številom elektronov  $2n$  na eni strani spoja s stanjema  $\Psi_{n+1}$  in  $\Psi_{n-1}$ . Torej bi bila valovna funkcija celega sistema, če bi tuneliral en sam par v eno ali drugo smer, linearna kombinacija funkcij  $\Psi_n$ ,  $\Psi_{n+1}$  in  $\Psi_{n-1}$ . Vendar ne vemo, koliko je elektronov na eni in koliko na drugi strani. Vemo le, da pari tunelirajo. Zato je valovna funkcija celega sistema linearna kombinacija funkcij  $\Psi_n$ .

Problem je formalno tak kot pri gibanju elektrona vzdolž linearne verige atomov. Torej je  $\Psi_n$  analogija k valovni funkciji, ki opisuje elektron, lokaliziran okrog  $n$ -tega atoma. V približku tesne vezi zapišemo valovno funkcijo elektrona z dano komponento valovnega vektorja  $k$  kot linearno kombinacijo lokalnih elektronskih funkcij  $\Psi_n$  z Blochovim izrazom:  $\Psi_k = \sum_n \Psi_n(x - na) e^{ikna}$ , v katerem je  $a$  razdalja med atomi. Povzemimo glavne zveze, ki nam jih da obravnava linearne verige atomov. Energija ima obliko  $W(k) = W_0 + 2J_0 \cos ka$ . Valovni paket elektronov se giblje s skupinsko hitrostjo, ki je enaka časovnemu odvodu povprečne lege  $v_g = d\langle x \rangle / dt = d\langle na \rangle / dt = (1/\hbar) \partial W(k) / \partial k$ . »Gibalna količina«  $\hbar k$  pa se spreminja po »Newtonovem zakonu«  $d(\hbar k) / dt = -\partial V_{pot} / \partial x = -\Delta V_{pot} / a$ .

Za opis stanja našega sistema dveh sklopljenih supraprevodnikov vzamemo podobno linearno kombinacijo  $\Psi_\delta = \sum_n \Psi_n e^{i\delta n}$ , v kateri je  $\delta$  analogen produktu  $ka$  in pomeni razliko faz valovnih funkcij na obeh straneh spoja. Analogno lahko uporabimo še druge izraze, če povsod namesto  $ka$  pišemo  $\delta$ . Energija našega sistema je potem  $W(\delta) = W_0 + 2J_0 \cos \delta$ . Denimo, da je valovni paket sestavljen iz funkcij, ki ustrezajo »valovnim vektorjem« na intervalu med  $\delta$  in  $\delta + \Delta\delta$ . V našem primeru igra vlogo povprečne lege povprečno število parov na eni strani spoja. Zato za naš valovni paket lahko vzamemo, da se »giblje« s skupinsko hitrostjo  $d\langle n \rangle / dt = (1/\hbar) \partial W(\delta) / \partial \delta = (-2J_0/\hbar) \sin \delta$ . V stanju, ki ga opišemo z našim valovnim paketom, se število elektronov na obeh straneh spoja spreminja s časom. Zato teče iz enega kosa supraprevodnika v drug kos tok  $I = 2e_0 d\langle n \rangle / dt = (-4e_0 J_0 / \hbar) \sin \delta$ . To pomeni, da skozi spoj lahko teče tok  $I < I_c = 4e_0 J_0 / \hbar$ , ne da bi bil spoj priključen na zunanjo napetost. Kadar pa na spoj priključimo napetost  $V$ , velja  $W_{n+1} - W_n = 2e_0 V$  in valovni paket se giblje tako, kot velevala enačba  $d\langle \hbar \delta \rangle / dt = 2e_0 V$ . Od tod takoj vidimo, da pri konstantni napetosti  $V$  faza  $\delta$  linearno narašča s časom. Skozi šibki spoj teče izmenični tok  $I = I_c \sin \delta = I_c \sin(\delta_0 + 2e_0 V / \hbar t)$ , ki ima frekvenco  $2e_0 V / \hbar$ . Tipična vrednost za gostoto kritičnega toka je  $10^{-2}$  A/cm<sup>2</sup>.

### Kvantni interferometer



Sl. 6

Kvantni interferometer ali skvid (kratica SQUID pomeni superconducting quantum interferometric device) je električni krog, ki ima v vsaki od dveh vej en šibki spoj. Oba spoja sta enaka (sl. 6).

Skupni tok se razdeli na dva tokova  $I_a$  in  $I_b$ . Dokler skvid ni v zunanjem magnetnem polju, je na šibkem spoju  $a$  in na spoju  $b$  enaka fazna razlika  $\delta_0$ , ker teče čez oba spoja enak tok  $I_a = I_b = I/2 = I_c \sin \delta_0$ . Fazna razlika  $\delta_0$  je odvisna od toka  $I$ ; dokler je  $I < 2I_c$ , med točkama P in Q ni padca napetosti. Če večamo tok  $I$ ,

se fazna razlika  $\delta_0$  večja, dokler ne doseže vrednosti  $\pi/2$ , ko se med točkama P in Q pojavi napetost.

Poglejmo, kako na skvid vpliva zunanje magnetno polje. Najprej si mislimo, da v skvidu ni šibkih spojev, tako da imamo enostaven krog iz supraprevodnika in da skozenj ne teče noben tok. Če tak krog ohladimo pod kritično temperaturo v prostoru, kjer ni zunanjega magnetnega polja, je fluks skozi odprtino kroga enak nič. Ko se pojavi zunanje magnetno polje, se v krogu inducira tok  $I_i$ , ki kroži v taki smeri in je tako velik, da uniči magnetni fluks skozi odprtino. Torej velja:  $LI_i = \Phi$ . Pri tem je  $L$  induktivnost kroga,  $I_i$  inducirani tok in  $\Phi$  fluks zunanjega magnetnega polja skozi odprtino. Če je zunanje magnetno polje tako močno, da je  $I_i$  večji od kritičnega toka supraprevodnika, iz katerega je krog, se supraprevodno stanje poruši in magnetni fluks skozi odprtino ni več enak nič.

Imejmo zdaj skvid v zunanjem magnetnem polju. Ker imata šibka spoja zelo nizek kritični tok  $I_c$ , je pri dovolj močnem zunanjem magnetnem polju inducirani enosmerni supraprevodni tok premajhen, da bi popolnoma uničil magnetni fluks skozi odprtino skvida in pogoj  $LI_i = \Phi$  ni izpolnjen. Zunanje magnetno polje skozi šibka spoja prodre v odprtino skvida. Poleg tega inducirani tok povzroči spremembo faze na obeh šibkih spojih. Vzemimo, da je induktivnost skvida tako majhna, da velja  $LI_c \ll \Phi_0$ . Tedaj smemo fluks skozi skvid, ki je posledica inducirane toka, zanemariti v primerjavi z zunanjim fluksom. Ker sta v skvidu šibka spoja, pretok skozi skvid ni nujno enak celemu mnogokratniku fluksa. Toda pogoj, da je fazna razlika pri enem obhodu enaka celemu mnogokratniku  $2\pi$ , še vedno velja. Zato lahko zapišemo:

$$\Delta = \delta_a + (4\pi e_0/h) \int_a^b \mathbf{A} d\mathbf{l} - \delta_b + (4\pi e_0/h) \int_b^a \mathbf{A} d\mathbf{l} = \delta_a - \delta_b + 2\pi\Phi/\Phi_0 = n \cdot 2\pi \quad (5)$$

Pri tem smo upoštevali, da sta šibka spoja kratka in velja

$$\int_a^b \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \Phi \quad \delta_a - \delta_b = 2\pi(n - \Phi/\Phi_0)$$

Če skozi skvid ne teče zunanji tok, sta tokova skozi oba spoja nasprotno enaka. Po krogu teče inducirani tok in velja  $\delta_a^0 = -\delta_b^0 = \pi(n - \Phi/\Phi_0)$ . Če vključimo napetost  $V$ , začeta fazni razliki na obeh spojih naraščata linearno s časom  $\delta_a = \delta_a^0 + (2e_0V/\hbar)t$  in  $\delta_b = \delta_b^0 + (2e_0V/\hbar)t$ . Dobimo tok

$$I = I_c [\sin(\delta_a^0 + (2e_0V/\hbar)t) + \sin(\delta_b^0 + (2e_0V/\hbar)t)] = 2I_c \cos\pi(n - \Phi/\Phi_0) \sin\omega t = I_m \sin\omega t$$

Tu je  $\omega = 2e_0V/\hbar$ . Vidimo, da je amplituda toka  $I_m$  periodično odvisna od zunanjega magnetnega polja in da je v splošnem manjša od kritičnega toka  $2I_c$  brez polja.  $I_m(B \neq 0)$  je enak  $I_m(B = 0)$  le, če je  $\Phi$  cel mnogokratnik  $\Phi_0$ .

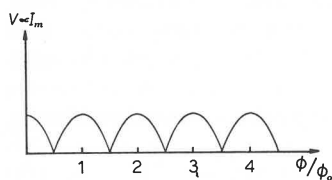
Na tem mestu je vredno opozoriti na analogijo iz optike, iz katere smo si izposodili besedo interferometer. Pri skvidu interferirata tokova, ki pritečeta z obeh vej interferometra. Enake razmere nastanejo pri uklonu svetlobe na dveh režah, ko po prehodu skozi reži interferirata delni valovanji. Lega uklonskih maksimov je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od razdalje med režama, torej od geometrije. Pri skvidu zunanje magnetno polje povzroči, da je fazna razlika na obeh šibkih spojih različna. Zato se razlikujeta optični poti pri prehodu skozi prvi in drugi šibki spoj. Spreminjanje magnetnega polja ustreza spreminjanju lomnega kvocienta snovi v dveh režah, če na danem kraju opazujemo interferenčno sliko.

### Uporaba skvida

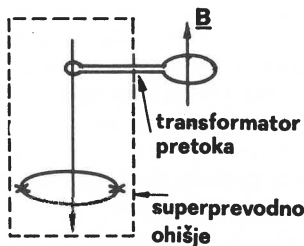
**Merjenje magnetnih polj.** Mera za magnetno polje je maksimalni tok  $I_m$ . Da izvemo, kolikšno je zunanje magnetno polje, običajno merimo padce napetosti na upor, vezanem zaporedno k skvidu (sl. 7).

Gostoto zunanjega magnetnega polja dobimo, če preštejemo fluksone. Štejemo nihaje napetosti v zanki, ko ustvarjamo zunanje magnetno polje. Tako merimo polja z natančnostjo do  $10^{-11}$  T, če je ploščina skvida  $1\text{ cm}^2$ . Merimo pa lahko še desetkrat šibkejše spremembe polja, če uporabimo naslednjo zvijačo. Dajmo skvid v tako polje, da se na krivulji  $V(\Phi)$  približamo minimumu. Ker je v tem delu krivulja  $V(\Phi)$  zelo strma, skvid močno reagira že na majhne spremembe polja.

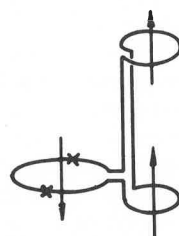
Skvid lahko uporabimo tudi kot ničelni detektor polja. Zunanje magnetno polje izmerimo kompenzacijsko tako, da enega od obeh Josephsonovih spojev priključimo na krog s povratno vezjo. Majhno napetostno razliko, ki nastane na spoju, najprej ojačimo z ojačevalnikom in nato spremenimo v tokovno spremembo. Ta tok speljemo na tuljavo, ki je zraven drugega Josephsonovega spoja. Tok v tuljavi deluje kot povratna vez in povzroči spremembo fluksa, nasprotno spremembi, ki je nastala ob vključitvi polja. S takim načinom vezave lahko zaznamo spremembe fluksa do  $10^{-3}\Phi_0$ .



Sl. 7



Sl. 8a



Sl. 8b

Fantastična občutljivost skvida nam nič ne pomaga, dokler skvida ne zaščitimo pred zunanjimi polji in njihovimi fluktuacijami. Šum zaradi fluktuacij zemeljskega magnetnega polja je okrog  $10^{-9}$  T. Ta vrednost je  $10^6$ -krat večja od občutljivosti skvida. Ponavadi zaščitimo skvid tako, da ga damo v prostor, omejen s supraprevodnikom, ki izravna zunanje polje ali ga drži na konstantni vrednosti. Če hočemo s tako zaščitnim skvidom meriti zunanje magnetno polje, uporabimo t. i. transformator magnetnega pretoka (sl. 8a). Magnetno polje povzroči v večji zanki supraprevodni tok, ki povzroči magnetni pretok v skvidu. Transformator poleg tega še poveča občutljivost.

Magnetno polje, ki ga merimo, ima lahko zelo različen izvir. Dostikrat merimo magnetno polje okrog snovi pri nizkih temperaturah. S tem spoznavamo magnetne in električne lastnosti snovi pri temperaturah blizu 0 K. Prav tako merimo tudi magnetna polja pri raznih biokemijskih reakcijah in tako spoznavamo mehanizem teh reakcij. Če ni supraprevodne zaščite, merimo lahko le gradiente magnetnih polj v različnih smereh. Za to uporabimo gradiometer (sl. 8b). Ta naprava da signal, sorazmeren z razliko gostote polja na obeh krajih. Supraprevodni gradiometer se je že uveljavil v medicini; z njim so že posneli magnetokardiogram, z njim merijo gradiente magnetnega polja, ki se pojavijo ob bitju srca. Prav tako so z njim merili valove alfa, ki jih možgani oddajajo v začetni fazi spanja. Gradiometer je pomemben tudi v geofiziki, ker z merjenjem majhnih sprememb gradientov zemeljskega magnetnega polja morda lahko napovejo potrese ali vulkanske izbruhe.

Skvid lahko uporabimo tudi za *supraprevodni voltmeter* (sl. 9). Krog  $RL$  in skvid sta zaprta v ohišju iz supraprevodnika. Napetost, ki jo hočemo meriti, povzroči tok  $I = V/R$  v tuljavi in magnetni fluks v skvidu. Tako zaznamo tokove do  $10^{-9}$  A, kar pri uporabi  $10^{-8}\ \Omega$  ustreza napetostni občutljivosti  $10^{-17}$  V. Toda pri 4 K onemogoča merjenje termični šum, ki povzroči napetost  $10^{-15}$  V.

Sl. 10 kaže *radiofrekvenčni skvid*. Tudi tega uporabljamo za merjenje zunanjega magnetnega polja. V radiofrekvenčnem skvidu je le en Josephsonov spoj v supraprevodnem krogu.

Krog je induktivno sklopljen z nihajnim krogom, ki ima lastno frekvenco nekaj 10 MHz. Radiofrekvenčni skvid se v glavnem uporablja za merjenje zunanjih magnetnih polj, ki v skvidu povzročijo fluks z velikostno stopnjo  $10^{-17}$  do  $10^{-15}$  Tm<sup>2</sup>, kar je manj od enega fluksona. Induktivnost skvida izberemo tako, da je pri fluksu  $\Phi_0$  inducirani tok ravno enak  $I_c$ . Pri merjenju najprej ugotovimo, kolikšna amplituda toka skozi tuljavo inducira v skvidu radiofrekvenčni fluks z amplitudo  $\Phi_0$ , ko ni zunanjega magnetnega polja. Da je inducirani



Sl. 9



Sl. 10



fluks skozi skvid enak  $\Phi_0$ , se pokaže po spremembah v radiofrekvenčnem krogu: skvid preide v normalno stanje in črpa moč iz radiofrekvenčnega kroga. Če skupni zunanji fluks pade pod  $\Phi_0$ , preide skvid zopet v supraprevodno stanje in inducirani fluks izravna zunanji. Nato dodamo zunanje magnetno polje, ki se sešteje z magnetnim poljem tuljave radiofrekvenčnega kroga. Amplitudo toka v tuljavi priredimo tako, da je maksimalni skupni fluks skozi skvid enak  $\Phi_0$ . Izmerjeni zunanji fluks dobimo, če  $\Phi_0$  pomnožimo z razmerjem  $(I_{rf} - I_{rf}')/I_{rf}$ , če sta  $I_{rf}'$  in  $I_{rf}$  amplitudi radiofrekvenčnega toka v zunanjem magnetnem polju in brez njega.

Radiofrekvenčni skvid dostikrat večemo v povratno vez, zato da merimo fluktuacije polj, ki jim ustrezajo manjše spremembe fluksa kot  $\Phi_0$ . Tok iz skvida pošljemo v drugo supraprevodno zanko tako, da v njej teče v obratni smeri kot v skvidu. Polje zanke uniči magnetni fluks skozi skvid do  $\pm \Phi_0$  zanesljivo. V tem primeru deluje skvid kot ničelni detektor in zaznava le spremembe zunanjega magnetnega polja, ki povzročijo v skvidu spremembe fluksa, manjše od  $\Phi_0$ .

*Merjenje visokofrekvenčnega elektromagnetnega sevanja.* Omenili smo dejstvo, da steče po Josephsonovem spoju tok z zelo visoko frekvenco, ko damo nanj napetost  $V_0$ . Napetosti 1 mV ustreza frekvenca 483,6 GHz. Zato so pomislili, da bi Josephsonov spoj lahko uporabljali kot visokofrekvenčni generator na širokem frekvenčnem območju. Spreminjali bi le  $V_0$ , med  $V_0$  in  $v_0$  pa je preprosta zveza  $V_0 = v_0 \Phi_0$ . Vendar so moči tako majhne, da to ni izvedljivo. Vseeno pa Josephsonov spoj lahko uporabimo kot detektor visokofrekvenčnega elektromagnetnega sevanja, ker se karakteristika  $I = I(V)$  pri obsevanju spremeni.

Imejmo na Josephsonov spoj priključeno konstantno napetost  $V_0$  in spustimo nanj enobarvno valovanje z visoko frekvenco. Izmenični Josephsonov tok se pri tem frekvenčno modulira, ker se zaradi sevanja inducira v spoju izmenična napetost z amplitudo  $V_1$ , sorazmerna z amplitudo valovanja. Torej sta fazna razlika:

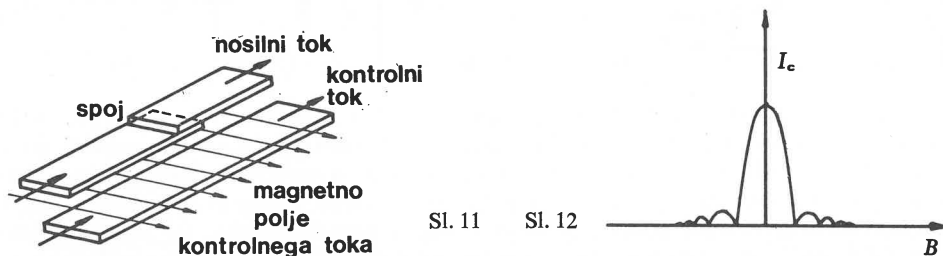
$$\delta(t) = \int_0^t (2e_0 V(t)/\hbar) dt = \delta_0 + (2e_0 V_0/\hbar)t + (2e_0 V_1/\hbar\omega) \sin \omega t$$

in tok

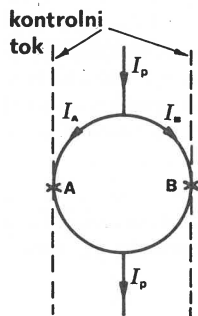
$$I = I_c \sin(\delta_0 + (2e_0 V_0/\hbar)t + (2e_0 V_1/\hbar\omega) \sin \omega t)$$

$\omega = 2\pi\nu_1$  je krožna frekvenca vpadnega valovanja. Izmenični tok ima od nič različno časovno povprečje le pri napetostih  $V_0$ , pri katerih je frekvenca  $\nu_0 = 2e_0 V_0/\hbar$  enaka mnogokratniku frekvence  $\nu_1$ . Amplituda povprečnega toka je pri napetosti  $V_0 = n\nu_1 \hbar/2e_0 = n\nu_1 \Phi_0$  enaka  $(-1)^n J_n(2e_0 V_1/\hbar\nu_1)$ , če je  $n = \nu_0/\nu_1$  in je  $J_n$  Besslova funkcija reda  $n$ . Frekvenco elektromagnetnega valovanja izmerimo tako, da večamo napetost  $V_0$  in pogledamo, kdaj je povprečni tok različen od nič. Po razliki  $\Delta V_1$  dveh sosednjih napetosti s povprečnim tokom, različnim

od nič, določimo frekvenco vpadnega valovanja:  $\nu_1 = \Delta V_0 / \Phi_0$ . Moč vpadnega valovanja lahko izmerimo po amplitudi povprečnega toka. Lahko pa izmerimo spremembo kritičnega toka, ki se zaradi valovanja zmanjša podobno kot zaradi statičnega magnetnega polja. Poleg tega je kritični tok periodična funkcija moči vpadnega valovanja, podobno kot je  $I_c$  periodična funkcija statičnega magnetnega polja. S točkastimi spoji merijo valovanja z valovno dolžino od okoli 1 cm do 0,1 mm, to je od mikrovalov do infrardeče svetlobe. Ravno na tem območju manjka občutljivih detektorjev. Ločljivost Josephsonovega spoja je  $10^{-14}$  W. Stopničasto karakteristiko so uporabili za najzanesljivejše merjenje razmerja  $e_0/h$  s tem, da so spoj obsevali z elektromagnetnim sevanjem z znano frekvenco. To je doslej najzanesljivejše merjenje te količine. Podatek iz 1974 je  $2e_0/h = (483,593718 \pm 0,000060)$  MHz/ $\mu$ V.



**Uporaba Josephsonovega spoja v računalništvu.** Josephsonov spoj ima dva režima delovanja, ki se dobro razlikujeta: če je  $I > I_c$ , je  $V \neq 0$ , če je  $I < I_c$ , pa je  $V = 0$ . Poleg tega je čas za preskok iz enega stanja v drugo zelo kratek: okoli  $10^{-10}$  s. Prve korake v uporabi Josephsonovega spoja v računalništvu je naredil J. Matisso s tunelskim spojem (sl. 11). Tunelske spoje z dobro definirano karakteristiko lahko proizvajamo v velikem številu. Za komuniciranje uporabimo lastnost, da se  $I_c$  spreminja z zunanjim magnetnim poljem (sl. 12). Vzemimo, da skozi spoj teče tok, ki je manjši od toka  $I_c$ , ko ni zunanjega magnetnega polja. Brž ko dodamo dovolj močno zunanje magnetno polje, je tok  $I_c$  znatno manjši od toka, ki teče skozi spoj. Torej preide napetost na spoju od vrednosti nič, ko ni zunanjega magnetnega polja, na neko končno vrednost v magnetnem polju. To magnetno polje povzročimo s kontrolnim tokom v supraprevodnem traku, ki ga postavimo pod spoj.



Sl. 13

V računalniku potrebujemo še elemente, ki v zelo kratkem času zamenjajo tok med dvema krogoma. Tak element je flip-flop, ki je sestavljen iz dveh Josephsonovih spojev in njunega komandnega kroga (sl. 13). Nosilni tok  $I_p$  naj bo manjši od kritičnega toka  $I_c$  obeh spojev. Privzemimo, da se na začetku tok  $I_A$  približno ujema s tokom  $I_p$  in je tok  $I_B$  praktično enak nič. To se da doseči s primernim poljem skozi zanko, tako da je izpolnjen pogoj (5). Ko nastane ob spoju A magnetno polje zaradi sunka kontrolnega toka, se na spoju A pojavi napetost, ki povzroči, da tok  $I_p$  steče v spoj B. Takšno stanje je ravnovesno, ker ni več nobene napetosti, ki bi pogajala tok v spoj A in ker zaradi pogoja (5) lahko teče tok  $I_p$  le skozi en spoj. Sunek kontrolnega toka k spoju B pa povzroči prehod v drugo ravnovesno stanje, v katerem je  $I_A \sim 0$  in  $I_B \sim I_p$  in sta zopet oba spoja na napetosti nič. Eno izmed obeh ravnovesnih stanj imamo za logično ena, drugo stanje pa za logično nič. Josephsonovi spoji omogočajo veliko hitrost računalnikov in veliko kapaciteto spomina. Flip-flop (sl. 13) je velik  $150 \mu\text{m}$ , čas za preklop pa je  $10^{-9}$  s. S še manjšimi bodo dosegli še krajše čase. Če bodo veliki 1 do  $2 \mu\text{m}$ , jih bodo spravili  $10^6$  na ploskev  $1 \text{ cm}^2$ . Poleg tega ta vezja rabijo zelo malo moči  $10^{-15}$  W/flip-flop.



## LITERATURA

- [1] P.G. de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, New York, Benjamin 1966, str. 118.
- [2] A.C. Rose-Innes, E.H. Rhoderick, *Vvedenje v fiziku sverhprovodnosti*, Moskva, Mir 1972.
- [3] J. Clarke, *La cryoélectronique*, La recherche **38** (1973) 845.
- [4] *Superconducting quantum electronics*, prospekt finske firme Instruments for Technology Ltd., (januar 1976).

## NOVE KNJIGE

---

**Ivan Kuščer in Slobodan Žumer, Statistična mehanika, 156 str. (Zbirka izbranih poglavij iz fizike, 11). Cena 50.— din (40.—din).**

Skripta *Statistična mehanika* so zapis drugega dela predavanj iz toplote, ki jih poslušajo študenti fizike v tretjem letniku. Predavanja so se razvijala in izpopolnjevala dolgo let. To se čuti pri branju, saj so skripta pedagoško zelo lepo izpeljana in dognana. Svežino jim daje živahen slog in nazorni komentarji, ki se prepletajo skozi osnovne izpeljave.

Večji del skript se ukvarja z izpeljavo osnovnih pojmov in zakonov ravnovesne statistične mehanike. Izpeljave so temeljite, logične, s pravo mero komentarjev in s pravo mero pojasnil o sprejetih približkih (večina učbenikov gre ali v skrajnost dolgih matematičnih dokazovanj ali v skrajnost, da približkov in idej sploh ne komentira). Primeri za ilustracijo so preprosti, nazorni, toda šolski. Le tu in tam se dotaknejo sodobnih problemov. Kot je zapisano v predgovoru, manjka mnogo poglavij, kot so teorije faznih prehodov, plazme itd. Toda to je najbrž težko podati v kratki obliki, polna obravnava bi pa precej presegala obseg predavanj.

Na koncu sta poglavji o transportnih pojavih in kinetični teoriji plinov. Nivo je elementarnejši kot pri drugih poglavjih. Zbirka pojavov je pregledna in koristna. Ti poglavji sta pravzaprav dodatek skriptom o ravnovesni statistični mehaniki, namesto prvotno planiranega tretjega dela skript iz toplote, ki naj bi pripeljal bralca do Boltzmannove enačbe in njene uporabe.

*Mitja Rosina*

**Janez Strnad, Poskusi v posebni in splošni teoriji relativnosti, Ljubljana, DMFA SRS 1977, 44 str. (Postdiplomski seminar iz fizike; 4). Cena 20.— din (16.— din).**

Četrty zvezek v zbirki Postdiplomski seminar iz fizike, ki nosi naslov »Poskusi v posebni in splošni teoriji relativnosti«, je precej razširjen zapis predavanj iz izbranih poglavij iz fizike za podiplomske študente didaktike fizike. Vsebinsko tega zvezka lahko razdelimo na dva dela. Prvi del, kjer je govor o razpadu delcev v letu in sorodnih poskusih, o gibalni količini in načelu o hitrosti svetlobe, se nanaša na posebno teorijo relativnosti. V drugem, zahtevnejšem delu, ki se nanaša na teorijo gravitacije in splošno teorijo relativnosti, pa je govor o enakosti vztrajnostne in težke mase, gravitacijskem premiku spektralnih črt, odklonu in zakasnitvi elektromagnetnega valovanja, vrtenja perihelija in drugih poskusih.

Odlika tega dela seveda ni teorija ampak primerno urejeni opisi značilnih poskusov v posebni in splošni teoriji relativnosti. Prvi del, ki se nanaša na posebno teorijo relativnosti, bo v polnosti razumljiv širšemu krogu bralcev. Drugi del pa bo za večino trd oreh, kajti pri nas se teorija gravitacije in splošna teorija relativnosti ne predavata v rednih kurzih. Vendar je tudi branje drugega dela vredno truda že zaradi opisov občudovanja vrednih poskusov, ki sodijo v sam vrh fizikalnih merjenj.

*Sergej Pahor*

# NOVICE

## ZANIMIVA UPORABA BROUWERJEVEGA IZREKA

Obzornik je že pisal o *Brouwerjevem izreku o negibni točki* — navedena je bila inačica za krog ([1], str. 26). Analogno je mogoče dokazati splošnejšo inačico:

*Izrek (Brouwer): Vsaka zvezna preslikava  $f: B^n \rightarrow B^n$   $n$ -razsežne krogle  $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$  v  $B^n$  ima vsaj eno negibno točko (tj. obstaja taka točka  $\mathbf{x}_0 \in B^n$ , za katero velja  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ).*

Odtod takoj sledi, da velja enaka trditev za prostore, ki so *homeomorfni* kakšni  $n$ -razsežni krogli:

*Posledica: Naj za topološki prostor  $X$  obstaja tako naravno število  $n$ , da je prostor  $X$  homeomorfen  $n$ -razsežni krogli  $B^n$ . Potem ima vsaka zvezna preslikava iz  $X$  v  $X$  vsaj eno negibno točko.*

Z Brouwerjevim izrekom lahko sedaj zlahka dokažemo znani izrek iz linearne algebre ([3], str. 66—67).

*Izrek (Frobenius): Naj ima realna  $n$ -vrstna kvadratna matrika  $A$  same nenegativne elemente. Potem ima  $A$  vsaj eno realno nenegativno lastno vrednost.*

Skicirajmo dokaz: Privzeti smemo, da je matrika  $A$  nesusingularna, kajti v nasprotnem primeru je že 0 lastna vrednost. Matrika  $A$  nam določa linearno preslikavo  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $n$ -razsežnega evklidskega prostora  $\mathbb{R}^n$  v  $\mathbb{R}^n$ . Naj bo  $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} = \partial B^n$   $(n-1)$ -razsežna sfera,  $Q = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_i \geq 0 \text{ za } 1 \leq i \leq n\}$  pa njen »prvi kvadrant«. Ker je matrika  $A$  nesusingularna, za vsako točko  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  velja  $A\mathbf{x} \neq 0$ . Zato je s predpisom  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} / \|A\mathbf{x}\|$  ( $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ ) definirana zvezna preslikava  $g: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Ker pa ima matrika  $A$  same nenegativne elemente, očitno velja  $g(Q) \subset Q$ . Zato imamo lahko zožitev preslikave  $g$  na  $Q$  tudi za preslikavo iz  $Q$  v  $Q$ .

Označimo s  $p: Q \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  projekcijo množice  $Q$  v  $(n-1)$ -razsežni evklidski prostor  $\mathbb{R}^{n-1}$ , podan s predpisom  $p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Očitno je  $p(Q)$  prvi kvadrant krogle  $B^{n-1}$  (to je množica točk v krogli, ki imajo vse koordinate nenegativne) in  $p: Q \rightarrow p(Q)$  je homeomorfizem — inverzna preslikava  $q: p(Q) \rightarrow Q$  projekcije  $p$  je dana s predpisom

$$q(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2})$$

Lahko je videti, da je  $p(Q)$  konveksna, zaprta in omejena množica z neprazno notranjostjo. Po izreku 13 v [2] je potem množica  $p(Q)$  homeomorfna  $B^{n-1}$ . Tako smo ugotovili, da je  $Q$  homeomorfen  $B^{n-1}$  in zato ima po poprej navedeni posledici preslikava  $g: Q \rightarrow Q$  vsaj eno negibno točko v  $Q$ . Obstaja torej taka točka  $\mathbf{x}_0 \in Q$ , za katero je  $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ; zato je  $\|A\mathbf{x}_0\|$  nenegativna lastna vrednost matrike  $A$ .

Dušan Repovš

## LITERATURA

- [1] Petek P., *Fundamentalna grupa topološkega prostora*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1-2, 17—26.
- [2] Vidav I., *Splošna topologija*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1-2, 1—16.
- [3] Guillemin V., Pollack A., *Differential Topology*, Prentice Hall, New Jersey 1974.

## STRJEVANJE PODHLAJENE KAPLJEVINE

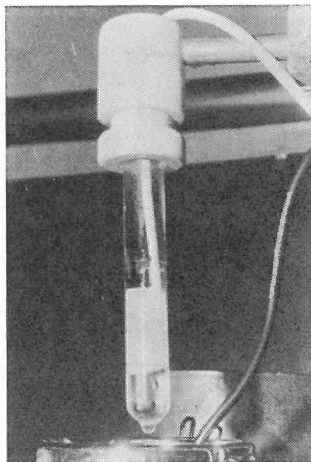
Od poskusov s podhlajeno kapljevino je za demonstracijo pri uvodnem predavanju iz fizike najpripravnější poskus z natrijevim tiosulfatom. Prispevek nekoliko podrobneje opisuje izvedbo tega poskusa, ki ga je mogoče napraviti tudi na srednjih šolah, morda celo pri praktičnih vajah iz fizike.

Natrijev tiosulfat pentahidrat ( $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ ) ima tališče pri temperaturi  $48,5^\circ\text{C}$  in ga je mogoče podhladiti za več deset stopinj. Z nabavo soli ni težav. Natrijev tiosulfat je namreč glavna sestavina fotografskega fiksirja, ki ga lahko kupimo v trgovini s fotografskim materialom (kisli fiksir FF1 tovarne Fotokemika). V papirni vrečki sta dve polivinilasti vrečki. Uporabimo le vsebino večje.

Natrijev tiosulfat je treba temeljito pripraviti. Sol vsujemo v stekleno čašo, ki jo prej temeljito umijemo, oplaknemo z razredčeno žvepleno kislino, speremo z destilirano vodo in posušimo. Čašo s soljo postavimo v vodo s temperaturo okoli  $80^\circ\text{C}$  in počakamo, da se vsa sol stali. Talino pustimo v vroči vodi še približno pol ure, da se nečistoče sesedajo na dno ali priplavajo na površino. Nečistoče s površine posnamemo s koščkom filtrirnega papirja in talino odlijemo v pripravljeno segreto čisto epruveto. Pri tem pazimo, da ostanejo usedline v čaši. Epruveto s talino damo v centrifugo in jo centrifugiramo 2 do 3 minute pri frekvenci okoli  $3000\text{ min}^{-1}$ . Nato centrifugo ustavimo, spet posnamemo nečistoče s površine in previdno odlijemo talino v drugo segreto čisto epruveto. Epruveto zapremo in skozi odprtino v pokrovu potisnemo v talino enega izmed obeh stikov termoelementa baker-konstantan. Epruveto nato potopimo v mešanico vode in ledu tako, da je ves del s talino pod gladino vode. Počakamo približno četrt ure. Če se je talina strdila, moramo postopek čiščenja ponoviti. Če pa je ostala tekoča, vržemo vanjo zrnce natrijevega tiosulfata. Tedaj se mora talina strditi.

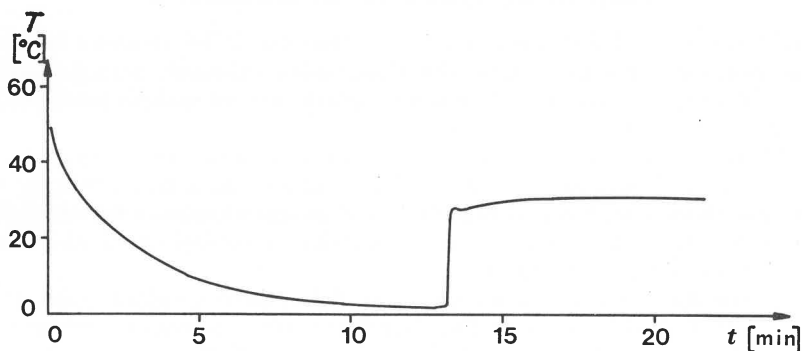
Pri poskusu damo najprej epruveto z očiščenim natrijevim tiosulfatom v vodo s temperaturo okoli  $80^\circ\text{C}$  in počakamo, da se vsa sol stali. Nato jo potopimo v mešanico vode in ledu. Temperaturo med ohlajanjem merimo s termoelementom, katerega prvi stik je v talini, drugi pa v mešanici vode in ledu. Časovni potek temperature spremljamo s pisalnim instrumentom  $x - y$  ali z voltmetrom, s katerim je mogoče zaznati vsaj še spremembe napetosti za  $0,1\text{ mV}$ . Instrument moramo pred poskusom umeriti. (Temperaturna razlika  $10^\circ\text{C}$  med stikoma termoelementa baker-konstantan povzroči napetost  $0,4\text{ mV}$ .) Termoelement priključimo na vhod  $y$  pisalnega instrumenta. Na vhod  $x$  pa priključimo izvir napetosti, ki linearno narašča s časom. Tako se pisalo enakomerno pomika v smeri osi  $x$ .

Ko se sol ohladi pod  $5^\circ\text{C}$ , izvlečemo epruveto iz hladilne kopeli in sprožimo strjevanje z zrcem natrijevega tiosulfata. Potek kristalizacije (sl. 1) pokažemo s televizijo. Namesto televizije je mogoče uporabiti tudi grafoskop. V tem primeru moramo namesto epruvete vzeti kiveto, ker notranjosti epruvete ne moremo uspešno projicirati z grafoskopom. Če je dijakov malo, lahko pojav opazujejo neposredno. Strjevanje poteka hitro. Pri našem poskusu, ko je bilo v epruveti okoli  $20\text{ cm}^3$  taline z gostoto  $1,73\text{ g/cm}^3$ , je trajalo strjevanje kakih 10 sekund. Temperatura soli med strjevanjem hitro naraste do končne temperature (sl. 2).



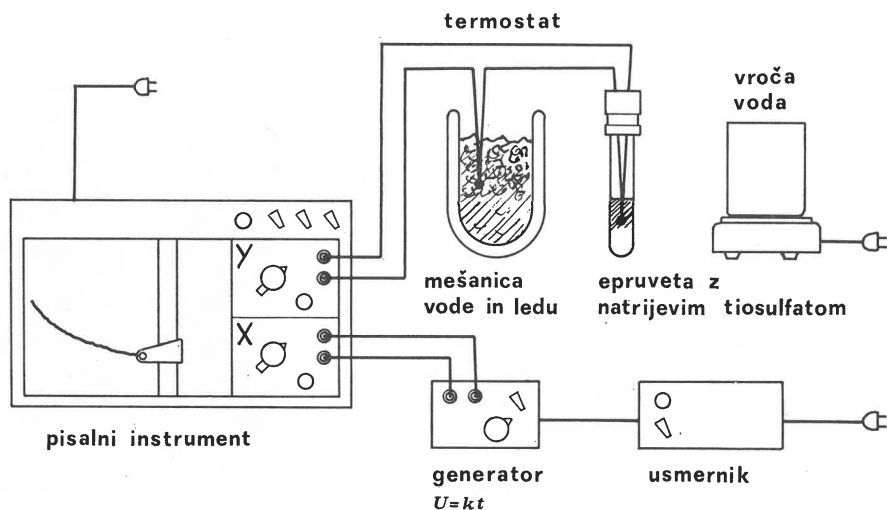
Sl. 1. Epruveta z natrijevim tiosulfatom med strjevanjem soli

Opišimo strjevanje s termodinamičnega stališča. Podhlajena kapljevina pri temperaturi  $T_1$  je v metastabilnem stanju, a ko sprožimo strjevanje, se hitro vzpostavi ravnovesno končno stanje in naraste temperatura do  $T_2$ .



Sl. 2. Časovna odvisnost temperature

Mislimo si, da imamo v ravnovesnem začetnem stanju kapljevino z maso  $m$  in specifično toploto  $c_p$  pri tališču  $T_0$ . Med podhlajevanjem do temperature  $T_1$  moramo odvesti toploto  $Q = mc_p(T_1 - T_0)$ . Strjevanje, ki ga sprožimo z zrcnem soli, je tako hitro, da med njim ni znatnega izmenjavanja toplote z okolico. Pri prehodu iz ravnovesnega začetnega stanja v ravnovesno končno stanje preko metastabilnega stanja je treba torej odvesti toploto  $Q$ . Iz istega začetnega stanja v isto končno stanje pa lahko pridemo tudi preko samih ravnovesnih stanj — brez podhlajevanja. Tedaj se kapljevina najprej strdi pri tališču, ko odvedemo od nje talilno toploto  $Q' = mq_t$ , in se nato trdnina ohladi do končne temperature  $T_2$ , ko odvedemo toploto  $Q'' = mc_p''(T_0 - T_2)$ . Pri tem je  $c_p''$  specifična toplota trdnine in  $q_t$  specifična talilna toplota. Odvedena toplota pri spremembi preko samih ravnovesnih stanj



Sl. 3 Shema aparature

$Q' + Q''$  mora biti enaka odvedeni toploti  $Q$  pri spremembi iz istega začetnega stanja v isto končno stanje preko metastabilnega stanja. Iz tega sledi enačba

$$mc_p(T_0 - T_1) = mq_t + mc_p''(T_0 - T_2)$$

Iz nje lahko izračunamo končno temperaturo:

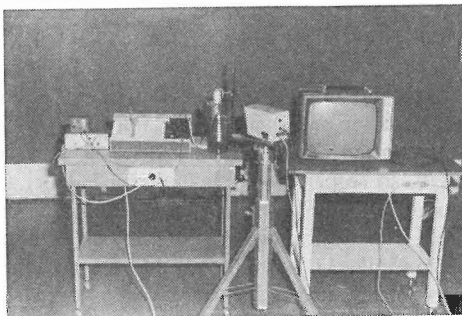
$$T_2 = T_0 - c_p(T^* - T_1)/c_p'' \quad (1)$$

Tu smo vpeljali temperaturo

$$T^* = T_1 - q_t/c_p$$

ki ima pomembno vlogo.

Sl. 4. Aparatura, pripravljena za demonstracijo poskusa



Končna temperatura  $T_2$  namreč ne more biti višja od tališča. Če je temperatura  $T_1$ , do katere smo podhladili kapljevino, nižja od temperature  $T^*$ , je v končnem stanju samo trdnina pri temperaturi  $T_2$ , ki je nižja od tališča. Če smo podhladili kapljevino ravno do temperature  $T^*$ , je v končnem stanju samo trdnina pri tališču. Če pa smo podhladili kapljevino do temperature, ki je višja od temperature  $T^*$ , je na koncu samo del snovi strjen. Tedaj je toplota, ki smo jo odvedli pri spremembi preko samih ravnovesnih stanj, v celoti enaka  $Q' = m'q_t$ . Pri tem je

$$m' = mc_p(T_0 - T_1)/q_t \quad T_1 > T^*$$

masa trdnine v končnem stanju.

Toplota v splošnem ni termodinamična spremenljivka, se pravi enolična funkcija stanja. V splošnem torej ni mogoče trditi, da dovedemo ali odvedemo pri kaki spremembi enako toploto kot pri drugi spremembi, ki poteka sicer iz istega začetnega stanja v isto končno stanje, a preko drugih vmesnih stanj (po drugi »poti«). Vendar je v našem primeru tlak ves čas konstanten. Tedaj pa je izjemoma dovedena ali odvedena toplota enaka spremembi entalpije, se pravi, da lahko računamo izjemoma z dovedeno ali odvedeno toploto kot s termodinamično spremenljivko.

Za natrijev tiosulfat pentahidrat najdemo v tabelah [1] naslednje podatke:  $T_0 = 48,5^\circ\text{C}$ ,  $c_p = 2,39 \text{ kJ/kgK}$ ,  $q_t = 94,4 \text{ kJ/kg}$  in  $c_p'' = 1,45 \text{ kJ/kgK}$ .

Za temperaturo  $T^*$  dobimo  $9^\circ\text{C}$ . Pri poskusu smo podhladili kapljevino do temperature  $T_1 = 2^\circ\text{C}$ . V tem primeru velja enačba (1), iz katere sledi  $T_2 = 37^\circ\text{C}$ .

Pri poskusu smo izmerili nekoliko nižjo končno temperaturo  $T_2' = 30^\circ\text{C}$ . V resnici namreč sol med strjevanjem odda nekaj toplote steklu, iz katerega je epruveta. Steklo se segreje skupaj s soljo od  $T_1$  do  $T_2'$ . Toplota, ki jo pri tem odda sol, je enaka toploti, ki jo prejme steklo:

$$mc_p''(T_2 - T_2') = m_{st}c_{p\ st}(T_2' - T_1) \quad (2)$$

$m_{st}$  je masa stekla v delu epruvete, ki je v stiku s soljo in ki jo po masi vse epruvete cenimo na 15 g.  $c_{p\ st}$  je specifična toplota stekla  $750 \text{ J/kgK}$ . Temperaturo  $T_2'$  izračunamo iz enačbe (2):

$$T_2' = (mc_p''T_2 + m_{st}c_{p\ st}T_1)/(mc_p'' + m_{st}c_{p\ st}) = 303 \text{ K} = 30^\circ\text{C}$$

Izračunana vrednost se dobro ujema z izmerjeno temperaturo.

Aleš Jereb

# DOMAČE VESTI

## JUBILEJ MATEMATIKE V ZAGREBU

V letošnjem maju so v Zagrebu slavili stoletnico pouka in organiziranega znanstvenega dela v matematiki na njihovi univerzi. Proslavo tega jubileja je organiziral odsek za matematiko Prirodoslovno-matematične fakultete in Društvo matematikov in fizikov SR Hrvatske. Ob tej priliki je bila izdana brošura, ki natanko podaja zgodovino in sedanje stanje matematike na univerzi v Zagrebu, [1]. Dve leti po obnovitvi vseučilišča v Zagrebu, to je 1876, so se pričela predavanja na katedri za matematiko in s tem so bili seveda dani tudi pogoji za strokovno in znanstveno delo. Prvi profesorji na katedri za matematiko so bili Čehi: K. Zahradnik, Č. Dvorak in G. Janaček. Najpomembnejši med njimi je bil Karel Zahradnik, ki je predaval algebrsko analizo, diferencialni in integralni račun, analitično geometrijo, diferencialno geometrijo in teorijo determinant. Zahradnik je bil tudi utemeljitelj znanstvenega dela na zagrebški univerzi. Med njegovim delovanjem so bile obranjene prve doktorske disertacije domačinov Hrvatov (D. Segen, V. Varičak, O. Kučera in J. Majcen), ki so zatem prevzeli delo na univerzi. Do leta 1945 je bilo obranjenih skupaj 13 disertacij iz teoretične in aplikativne matematike. V tem času je bila zagrebška matematika znana po močni geometrijski šoli.

Danes deluje odsek za matematiko v okviru Prirodoslovno-matematične fakultete in je razdeljen na tri oddelke: matematični oddelek (zavod), geometrijski oddelek in oddelek za uporabno matematiko. Tu sedaj dela čez 30 matematikov (natanko 19 učiteljev in 17 asistentov). Področje njihovega strokovno-znanstvenega dela je zelo različno; poleg šolskega dela se ukvarjajo z vsemi važnejšimi vejami matematike. Posebno intenzivna je znanstvena aktivnost v topologiji (S. Mardešić) in funkcionalni analizi (S. Kurepa). Tudi na drugih fakultetah (tehničnih in ekonomski) zagrebške univerze deluje veliko matematikov, ki se poleg pedagoškega dela ukvarjajo z raznimi področji teoretične in uporabne matematike. Nasploh je znanstveno-raziskovalno delo matematikov na zagrebški univerzi zelo intenzivno, saj so matematiki objavili v teh 100 letih nekako 1000 znanstvenih del. Tudi število diplomantov matematike je v teh 100 letih blizu 1000, po osvoboditvi pa je doktoriralo 58 kandidatov.

Ob bežnem pregledu dela matematikov na zagrebški univerzi jim ob jubileju želimo pri nadaljnjem pedagoškem in znanstvenem delu še veliko lepih rezultatov in uspehov.

*Gabrijel Tomšič*

[1] *Stogodišnjica nastave i organiziranog znanstvenog rada iz područja matematičkih znanosti na Sveučilištu u Zagrebu*, urednik Ž. Dadić, Zagreb 1977.

## DELO KOPRSKE PODRUŽNICE DMFA SRS

Koprska podružnica društva matematikov, fizikov in astronomov je imela 30. junija zadnji sestanek v tem šolskem letu. Na sestanku so pregledali delo in podelili knjižne spominske nagrade predsednikom občinskih tekmovalnih komisij obalnega območja za srebrna Vegova priznanja. Nagrade je prispeval obalni sindikalni svet, nagrajencem pa jih je izročil podpredsednik občinskega sindikalnega sveta tovariš *Jurij Bevk*. Nagrade so dobili:

*Marija Sedmak* za občinsko tekmovanje v Postojni, *Rudi Turšič* za občinsko tekmovanje v Sežani, *Ana Sojak* za občinsko tekmovanje v Kopru, *Zora Grbac* za občinsko tekmovanje v Izoli, *Vilma Kač* za občinsko tekmovanje v Piranu, *Sonja Čeligoj* za občinsko tekmovanje v Ilirski Bistrici in *Sergio Stipančič* za italijanske osnovne šole.

Pri organizaciji tekmovanj so prispevala podjetja Iplas, Stavbenik-Koper, Ljubljanska banka-podružnica Koper, Kreditna banka-ekspozituri Koper in Sežana, Mehanotehnika, Tomos-tovarna in inštitut, Polimer, Splošna plovba-Piran in šole, na katerih so bila tekmo-  
vanja. Zlasti je treba pohvaliti Pomorski šolski center v Piranu, na katerem je bilo republiško  
tekmovanje. Poleg tega so se izkazali še koprski enota Zavoda za šolstvo, Temeljna izobra-  
ževalna skupnost, Občinska skupščina Koper, Kovinski šolski center v Koprju in zava-  
rovalnica Croatia.

*Bogomila Kolenko*

## PLEMLJEVA SPOMINSKA SOBA

Ko so dediči na željo zeta prof. dr. Josipa Plemlja ing. Kajetana Kavčiča, ki je bil dolga  
leta direktor Centralne tehniške knjižnice v Ljubljani, prepustili 5/6 njegove hiše na Bledu  
Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS, se je to obvezalo, da bo pri urejanju  
hiše v rekreacijske in strokovne namene uredilo tudi Plemljevo spominsko sobo. To obljubo  
je društvo izpolnilo 21. junija 1977, ko je predsednik društva prof. dr. Sergej Pahor dokončno  
urejeno sobo tudi odprl za javnost.

Slovesnosti so se udeležili nekateri člani društva, med katerimi jih je bilo največ z odseka  
za matematiko fakultete za naravoslovje in tehnologijo, sorodniki, novinarji ter domačini  
z Bleda. Goste je s pozdravnim govorom sprejel predsednik skupščine občine Radovljica  
ing. Leopold Pernuš, in po slovesnosti ostal z njimi v prijateljskem pogovoru. Za njim sta  
govorila prof. dr. Ervin Prelog, rektor ljubljanske univerze, ter akademik prof. dr. Anton  
Kuhelj, podpredsednik Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Oba sta poudarila  
Plemljev pomen za matematično znanost in njegove zasluge za razvoj slovenske univerze.  
Z najpomembnejšimi podatki iz življenja in dela je obudil spomin nanj prof. dr. Ivan Vidav.

V sobi so razstavljena vsa Plemljeva dela, dva rokopisa, najpomembnejša državna odliko-  
vanja, diplome, priznanja in imenovanja, slikovni pano s kratkim življenjepisom, vsi znani  
portreti, plaketa in doprsni kip. Med razstavljenimi predmeti je tudi več osebnih predmetov.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS se želi zahvaliti vsem, ki so sodelovali  
pri urejanju Plemljeve spominske sobe, med njimi ing. arh. Janezu Suhadolcu, ki je sobo  
uredil, akademskemu slikarju Božidarju Jakcu, ki je posodil originalni portret prof. Plemlja,  
Nadi Jesse, ki je zbirala Plemljeve osebne predmete, ter Plemljevim znanec na Bledu,  
ki so s pripovedovanjem osvežili spomin nanj ter tako v marsičem olajšali delo komisije.  
Še posebej pa se želimo zahvaliti družini ing. Bena Plemlja na Bledu, ki bo v prihodnje  
skrbela, da bo soba skoraj v vsakem času dostopna obiskovalcem. Prav tako se moramo  
zahvaliti raziskovalni skupnosti Slovenije, Kulturni skupnosti Slovenije ter anonimnemu  
darovalcu za finančna sredstva, s čimer so nam omogočili sobo opremiti in urediti.

*Ciril Velkovrh*

## BIBLIOGRAFIJA ČLANKOV IN DRUGIH PUBLIKACIJ, OBJAVLJENIH V JUGOSLAVIJI, POSVEČENIH PROFESORJU DR. JOSIPU PLEMLJU IN NJEGOVEMU DELU\*

11. Peterlin A(nton), *Sedamdesetpetгодиšnjica prof. dr. Josipa Plemlja*, Nauka i priroda 3 (1949)  
225—228 (S fotografijo).
13. Čermelj L(avo), *Vprašanje štev. 6*, Proteus 12 (1950) št. 4/5, str. 166 — Rešitve: Proteus 12 (1950)  
št. 7, str. 234—245, 285.

\* Bibliografija člankov o prof. dr. J. Plemlju je bila prvič objavljena v Obzornik mat. fiz. 20 (1973)  
157. Dopolnjeni seznam člankov pa smo pripravili za Plemljevo spominsko sobo na Bledu. V tem  
sestavku objavljamo le nove naslove z zaporednimi številkami in celotni do sedaj zbrani bibliografiji.

34. Akademik prof. dr. Josip Plemelj častni doktor, Ljubljanski dnevnik **13** (26. 11. 1963), str. 3
35. Visoko priznanje ob življenjskem jubileju, Ljubljanski dnevnik **13** (12. 12. 1963) št. 337, str. 21
36. Visoko odlikovanje za prof. Plemlja, Delo **5** (1963) št. 338, str. 1.
37. Kališnik S., *Priznanje velikemu matematiku*, Delo **5** (1963) št. 339, str. 1.  
(Šnuderl Maks), *Zvestoba poklicu in narodu. Iz nagovora rektorja ljubljanske univerze ob podelitvi častnega doktorata Josipu Plemlju*, Delo **5** (1963) št. 339, str. 5.
40. Prof. dr. Josip Plemelj častni doktor ljubljanske univerze, Intervju v TV studiu, Kulturna panorama 11. 12. 1963.
41. Vidav Ivan, *Predavanje ob jubileju Josipa Plemlja* 16. 12. 1963 v oddaji Družba in čas I. radijskega programa od 18.45—19h.
42. Željeznov Dušan, *Urlico prej, preden je prof. dr. J. Plemelj odšel »Pod lipico«*, Nedeljski dnevnik **13** (22. 12. 1963) št. 347, str. 3.
45. *Josip Plemelj*, Matematični priručnik za takmičenje srednješkolca i prijemne ispite na fakultetima, Beograd, Građevinska knjiga 1965, str. 208.
55. Prijatelj Niko, *Ob smrti nestorja slovenskih matematikov — akademika Josipa Plemlja*, Radijski dnevnik, 23. maja 1967.
61. *Spomenik Josipu Plemlju odkrije pred vhodom v univerzitetno stavbo Ivan Vidav* 8. 12. 1969, TV dnevnik.
63. Mikuž M(etod), *Gradivo za zgodovino univerze v letih 1919—1945*, Petdeset let slovenske univerze v Ljubljani, 1969, str. 53—92.
65. Pomembnejši učenci novomeške gimnazije. 225 let novomeške gimnazije, 1971, str. 378.
70. (Križanič France), *(Posvetilo)*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 130, (S portretom B(ožidar) Jakac: Josip Plemelj — risba iz l. 1952, str. 129).
71. Vidav Ivan, *Josip Plemelj*, (Ob stoletnici rojstva), Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 131—132.
72. Vekua N. P., *Uporaba nekaterih izsledkov J. Plemlja v teoriji singularnih integralskih enačb in robnih nalog linearne konjugiranosti*, prev. France Križanič, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 133—144.
73. Hvedelidze B. V., *O Couchyjevih integralih in o robnih nalogah linearne konjugiranja*, prev. France Križanič, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 145—152, (s fotografijami: Josip Plemelj, 1904 in naslovna stran Plemljeve razprave iz leta 1908.)
74. (Križanič France), *Častni odbor za proslavo stoletnice profesorja Plemlja*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 153—154, (S fotografijama: Plemelj Josip, 1953 in naslovna stran Plemljeve knjige, 1953.)
75. K(rižanič) F(rance), *Integralske, diferencialne in funkcionalne enačbe, Poročila o delu mednarodnega simpozija*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 155—157.
76. Velkovrh Ciril, *Seznam člankov in drugih publikacij, objavljenih v Jugoslaviji, posvečenih profesorju dr. Josipu Plemlju in njegovemu delu*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 157—159.
77. Velkovrh Ciril, *Seznam del prof. J. Plemlja (Nadaljevanje)*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 160.
78. Velkovrh Ciril, *Seznam umetniških del — portretov prof. Plemlja*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) str. 160.
79. *Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije vabi na Bled 7.—8. decembra 1973 na 100-letnico rojstva slovenskega matematika prof. Josipa Plemlja...*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973) št. 5, ovoj IV.
80. *Beli lokvanj, glasilo učencev osnovne šole Bled* (1973) (Prispevki učencev) 1—14 str.
81. Žnidaršič M., *Stoletnica prof. Josipa Plemlja. Razgovor ob njegovi 80-letnici* (ponovitev). Diagonale TV 4. 12. 1973.
82. Likar Peter, *Razgovor s prof. Ivanom Vidavom o prof. Plemlju in njegovem delu*. Plemljjev spomenik in dokumentarni posnetki iz njegove mladosti. Diagonale TV 4. 12. 1973.
83. Pogačnik Bogdan, *Sto let Josipa Plemlja, Matematika življenjska radost*, 25. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Bled, 8. decembra 1973, str. 3—8.
87. Ribičič Mitja, *Stoletnica rojstva matematika Josipa Plemlja*. Odkritje spomenika 7. 12. 1973. TV.
88. Vovk Bogdan, *O Plemlju kot Blejcu*. Govor na proslavi ob 100-letnici rojstva J. Plemlja na Bledu 7. 12. 1973.
89. Pogačnik Bogdan, *Matematika, življenjska radost. Sto let Josipa Plemlja* (Z ilustr.) Delo **15** 8. 12. 1973 št. 331, str. 20.
90. Anderle Manja, *Umetniški užitek ob matematiki, Ob stoletnici rojstva prof. Plemlja*, Dnevnik **22** (1973) 10. 12., št. 335, str. 12.
91. Tarman Slavko, *Matematika mu je bila življenjska potreba in umetniški užitek* (S sliko na 4. str.), List **3** (1973) št. 14., str. 5.
92. Tarman Slavko, *Dr. Josip Plemelj, nestor slovenske matematike*, Ilustr. Obzornik (1973) št. 6., str. 436—437.



93. Čermelj Lavo, *Ob stoletnici rojstva Josipa Plemlja* (S portretom), *Proteus* **36** (1973/74) št. 8, str. 366—388.
94. Vagaja Marjan, *Ob stoletnici rojstva matematika Josipa Plemlja* (S fotografijami: Plemelj s sošolci v gimnaziji, Plemelj na Dunaju 1904, Prof. Plemelj s študenti zadnjih treh letnikov v Ljubljani 1956 in karikaturu Boruta Pečarja) *Presek* **1** (1973/74) str. 65—68.
95. Vidav Ivan, (*Dve anekdoti iz življenja prof. J. Plemlja*), *Presek* **1** (1973/74) str. 107 in 111.
96. (*Posvetilo ob stoletnici rojstva balkanskih matematikov: Josip Plemelj in dr.*), *Mathematica Balkanica* **3** (1973).
97. Ribičič Mitja, *Slavnostni nagovor na proslavi stoletnice rojstva prof. dr. Josipa Plemlja*, *Obzornik mat. fiz.* **21** (1974) št. 1/2, str. 1—4.
98. Tarman Slavko, *Matematika mu je bila življenjska potreba in užitek. Ob stoletnici rojstva učenjaka Josipa Plemlja*, *Obzornik* (1974) št. 112, str. 102—104.
99. Vagaja Marjan, *Ob stoletnici rojstva matematika Josipa Plemlja* (s sliko), *Prosvetni delavec* **24** (1974) 26. 10. št. 17, str. 13.
100. Moljk A(nton), *Spomenik Josipu Plemlju na Bledu*, *SPIN* **1** (1974) št. 1, str. 20—21.
101. Vidav Ivan, *Josip Plemelj (Ob stoletnici rojstva)*, *Nova proizvodnja* **25** (1974) št. 1/2, str. 52.
102. Čermelj Lavo, *Ob stoletnici rojstva matematika Josipa Plemlja*, *Zbornik za zgodovino naravoslovja in tehnike* **2** (1974) str. 189—190. (S sliko.)
103. Jakac Božidar, *Prof. dr. Josip Plemelj — slovenski matematik* — risba 1952, razglednica, Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1975.
104. Vidav Ivan, *Josip Plemelj — Ob stoletnici rojstva* (ponatis), Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije 1975, 64. str.

Ciril Velkovrh

## NOVE KNJIGE

**Janez Strnad, Fizika, 1. del., Mehanika, Toplota. Državna založba Slovenije 1977, 284 str., cena pl. 300.— din (240.— din), br. 250.— din (200.— din). (Matematika — Fizika, Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij; 9).**

Za univerzo razen skript dolgo nismo imeli nobenega slovenskega učbenika fizike. Potem pa smo skoraj hkrati (1966 in 1967) dobili kar dve deli, ki sta kasneje izšli še v lepših izdajah. O obeh delih je Ivan Kuščer napisal v *Obzorniku za matematiko in fiziko* **20** (1973) 122 poročilo, v katerem je pohvalil delo Janeza Strnada. Na pobudo uredniškega odbora zbirke univerzitetnih učbenikov in monografij pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je avtor to delo pripravil za tisk.

Iz uvoda sledi, da je knjiga namenjena predvsem študentom, ki jim je fizika glavni predmet. Obseg dela se je povečal na tri knjige — *Mehanika in toplota*, *Elektrika in optika* ter *Posebna teorija relativnosti in kvantna fizika*. Prvi dve deli vsebujeta klasično, tretji del pa moderno fiziko. Ni več posebnega poglavja *Atomika*, atomska zgradba snovi je uvedena sproti. V učbenik so privzeli nekateri odstavki iz skript *Moderna fizika*, ki so rabila študentom drugega letnika fizike, nekateri zahtevnejši odstavki iz *Uvoda v fiziko* pa so izpuščeni.

V knjigi ni posebnih vaj. Avtor priporoča vaje iz fizike, ki so navedene v obširnem seznamu literature na začetku.

To je prvo fizikalno delo v razširjeni zbirki univerzitetnih učbenikov in monografij z novim imenom MATEMATIKA — FIZIKA. Zaradi povečanega formata 17 cm × 24 cm in jasnih slik Berta Žitka daje knjiga lep vtis.

S prvo knjigo fizike v dosedANJI matematični zbirki so fiziki napravili prvi korak. Upajmo, da ne bo zadnji.

Ciril Velkovrh

## SPOŠTOVANI ČLANI DRUŠTVA, DRAGI KOLEGI!\*

Malo je podobnih obveznosti, ki sem jih sprejela s tolikšnim veseljem, kot je tale dolžnost, da vam ob 150. publikaciji in 300. izdaji čestitam v imenu Raziskovalne skupnosti Slovenije in vam zaželim obilo uspehov tudi v bodoče. Vzrok zato je bogata bera vašega dela v treh desetletjih, ki nam je danes predstavljena, pa tudi dejstvo, da je večina med nami šla vsaj delno skozi vašo matematično-fizikalno šolo ter iz dneva v dan bolj občuti in bolj spoštuje njene dosežke tudi pri lastnem delu.

Kar trije bistveni razlogi so, da je vašemu ustvarjanju treba priznati poseben pomen.

Prvi je v znanosti sami, saj ne le s svojo eksponentno rastjo števila dosežkov, temveč tudi z vse večjo abstraktnostjo in zategadelj vse manjšo razumljivostjo svojih zakonitosti za večino ljudi terja posebne napore. Če postane svet znanosti privilegij ozke skupine, to ogroža človeka, ogroža pa tudi znanost samo, saj je za svoj razvoj vedno potrebovala širine duha in črpala ustvarjalnost iz vsega človeštva.

Vi ste se tega zavedali. S svojim duhom in trdim delom ste z novimi znanstvenimi dosežki bogatili našo in svetovno zakladnico matematičnih, fizikalnih in astronomskih ved. Obenem pa ste s številnimi publikacijami prenašali te in druge znanstvene resnice med ljudi na način, ki je sicer terjal od njih resno delo, ki pa je vendarle vodil v razumevanje in s tem v potrebno samozaupanje.

In tu že zadenemo na drugi pomen vaših dosežkov: na vzgojne vrednote. Naš čas ni le obdobje hitre rasti znanosti in tehnologije, naglica na vseh področjih je njegova glavna značilnost. Ta pa prinaša s seboj tudi senčne strani: površnost, premajhno kritičnost, neodgovorno improvizacijo, ki ne ogrožajo prenekaterikrat le naših gospodarskih in drugih odločitev, temveč tudi vnašajo nezaupanje v odnose med ljudi.

Prav matematično-fizikalna šola se z vsem svojim delom postavlja po robu tem spontanim tokovom navzdol: z razvijanjem preciznih raziskovalnih metod, z nepopustljivim terjanjem natančnega, kvantitativnega pristopa, z zahtevo po načrtnem reševanju problemov, ki se tudi v teh vedah vse bolj pomikajo od začetnih šolskih proti realnim problemom življenja, bodi za posameznika bodi za celotno družbo, in še z gojenjem objektivne, z argumenti podprte kritike, potrebne ne le vsaki znanosti, temveč tudi vsaki zdravi družbi.

Končno naj poudarim še pomen vašega dela za slovensko kulturo. Minili so časi, ko smo jo predstavljali le z Levstikom, Prešernom, Cankarjem. Kakorkoli bodo le-ti vselej ostali velikani našega naroda, se z znanstveno-tehničnim razvojem pridružuje lepim umetnostim vrsta dosežkov, ki jih doslej nekako nismo šteli med kulturno bogastvo, čeprav bistveno prispevajo k samobitnosti in mednarodnemu ugledu dežele in njenih ljudi.

Matematično-fizikalne in astronomske vede so med njimi zlasti s temi 150 publikacijami, z vašimi 300 izdajami, ki se jih danes veselimo tudi zato, ker so bogati, originalni prispevek k slovenski kulturi.

Narod, ki je tako majhen, kot smo mi, in je obenem doma na koščku prečudovite, žal tudi strateško pomembne zemlje, tak narod je vedno izpostavljen viharjem. Globoke korenine so mu potrebne, da preživi — in te korenine lahko vraščajo le v njegovo kulturo, pojmovano v najširšem smislu.

Hvala vam za te naše slovenske dosežke, za njih izvirne misli. Hvala tudi za nesebično delo in polet, ki sta vam prenekateri delovni dan prevesila v pozno noč.

Zavedam se, da so te besede skromna zahvala. Več pove dejstvo, da vas vsi, ki ste jim bili osebno ali skozi te publikacije učitelji, srečujejo s spoštovanjem. Generacije, ki ste jih vzgojili, bodo znale prenašati vaše delo kot štafeto iz roda v rod.

*Aleksandra Kornhauser*

\* Misli, ki jih je povedala prof. dr. Aleksandra Kornhauser, predsednica skupščine Raziskovalne skupnosti Slovenije, na proslavi ob 150. publikaciji Komisije za tisk DMFA SRS, 16. 6. 1977.

V LETU 1976 SMO PREJELI NASLEDNJE REVIIJE V ZAMENO ZA  
OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1. ACTA ARITHMETIKA, Warszawa 1976, Vols 29, 30, 31.
2. ACTA UNIV. CAROLINAE, Math. Phys., Praga 1976, Vol. 17, No. 1, 2.
3. ALGEBRA I LOGIKA, Novosibirsk 1976, T. 15. No. 1—6.
4. ANALELE STI. UNIV. AL. I. CUZA DIN IASI, Math., Iasi 1976, T. 22, F. 1, 2.
5. ANALELE UNIV. BUCARESTI, Mat.-mec., Bucuresti 1975, Anul 24, 1976, Anul 25.
6. ANNALES ACAD. SCI. FENNICAE, Math., Helsinki 1976, Vol. 2.
7. ANNALES ACAD. SCI. FENNICAE, Math. Dissertationes, Helsinki 1976, 7—11.
8. ANNALES POLONICI MATH., Warszawa 1976, T. 32, 33.
9. ARHIMEDES — naučno popularni matematički časopis za učenike V—VIII. razreda osnovne škole, Beograd 1975/76, god. 3, br. 1—5.
10. ARKIV MATH., Stockholm 1976, Vol. 14, Nu. 1, 2.
11. ASTRO AMATER, Sarajevo 1976, Br. 1—6.
12. ASTRONOMSKE EFEMERIDE, Ljubljana 1976.
13. ASTRONOMSKI GLASNIK, BOLID, Zagreb 1976, God. 3, br. 8/9.
14. BERICHTER DER GESELLSCHAFT FÜR MATH., Bonn 1976, Nr. 106—109.
15. BILTEN UNIVERZE V LJUBLJANI, Ljubljana 1976, L. 6, št. 10.
16. BOLETIN ACAD. CIENC. FIS. MAT. NATURALES, Caracas 1975, T. 35, No. 105, 106.
17. BONNER MATH. SCHRIFTEN, Bonn 1975, Bd. 78—81, 1976, Bd. 82—89.
18. BULLETIN ACAD. POLONAISE SCI., Math. astr. phys., Varsovie 1976, Vol. 24, Nu. 1—12.
19. BULLETIN FUKUOKA UNIV. EDUC. NATURAL SCI., Fukuoka 1976, Vol. 26.
20. BULLETIN INST. MATH., Taipei 1976, Vol. 4, Nu. 1, 2.
21. BULLETIN SCI., Zagreb 1976, Vol. 21, No. 3—12.
22. CERCETARI OPERATIONALE STATISTICA, Timisoara 1975, Nu. 1, 2, 3.
23. COLLOQUIUM MATH., Warszawa 1976, Vol. 35, 36.
24. COMMENTATIONES MATH. UNIV. CAROLINAE, Praga 1976, T. 17.
25. COMMUNICATIONS ROY. SOC. EDINBURG, Edinburg 1975, 3—5, 1976, 6—9.
26. DEUTSCHE BIBLIOGRAPHIE, Frankfurt 1976, H. 1, 3, 4, 5, 6.
27. DIFFERENCIAL'NYE URAVNENIJA, Minsk 1976, T. 12.
28. DOKLADY BOLGARSKOJ AN., Sofija 1976, T. 29.
29. ECONOMIC COMPUT. ECONOM. CYBERNETIC STUD. RES., Bucuresti 1976.
30. ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK, Ljubljana 1976, leto 43.
31. FARMACEVTSKI VESTNIK, Ljubljana 1976, leto 27.
32. FIZIKA, A Journal exper. theor. physics, Zagreb 1976, Vol. 8.
33. FIZYKA, Gdańsk 1976, Z. 18, Nr. 250.
34. GALAKSIJA, Časopis za popularizaciju nauke, Beograd 1976, 4, 9—12.
35. GLASNIK MAT., Zagreb 1976, T. 11.
36. HIROSHIMA MATH. JOURNAL, Hiroshima 1976, Vol. 6.
37. IDRIJSKI RAZGLEDI, Idrija 1976, leto 21, št. 1/2.
38. INFORMATION PROCESSING IN JAPAN, Tokyo 1975, Vol. 15.
39. INTERNATIONALE MATH. NACHRICHTEN, Wien 1976, Nr. 113, 114.
40. JOURNAL FRANKLIN INST., Philadelphia 1976, Vols 301, 302.
41. LUCRARILE SEMINARULUI GEOM. TOPOLOGIE, Timisoara 1976.
42. MATEMATIČKI LIST ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE, Beograd 1975/76, god. 10, br. 1—6.
43. MATEMATIČKI VESTNIK, Beograd 1976, god. 13, sv. 1, 2.
44. MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST, Zagreb 1975/76, god. 26.
45. MATEMATIKA A FYZIKA VE ŠKOLE, Olomuc 1975/76, ročník 6.
46. MATEMATYKA, Gdansk 1976, Nr. 10.
47. MATHEMATICA SLOVACA, Bratislava 1976, Vol. 26.
48. MATHEMATICAL GAZETTE, London 1976, Vol. 60. Nu. 411, 413, 414.
49. MEMORIAS MAT. UNIV. FED., Rio de Janeiro 1976, Nu. 62—75.
50. METODY DISKRETNOGO ANALIZA, Novosibirsk 1976, T. 28, 29.

51. NASTAVA MATEMATIKE, Beograd 1976, g. 3.
52. NAUČNI PODMLADAK, Društvene nauke, Niš 1976, g. 8, br. 1/2.
53. NOTICES AMER. MATH. SOC., Providence 1976, Vol. 23.
54. NOTIZIARIO UNIONE MAT. ITALIANA, Bologna 1976, Anno 3, N. 6—12.
55. NOVICE IJŠ, Ljubljana 1976, leto 14.
56. NOVICE RRC, Ljubljana 1976, leto 5, št. 1, 2.
57. OSAKA J. MATH., Osaka 1976, Vol. 13.
58. PIONIR, Ljubljana 1975/76, leto 31.
59. PREPRINT SERIES DEPARTMENT MATH., Ljubljana 1976, Vol. 14.
60. PROCEEDINGS AMER. MATH. SOC., Providence 1976, Vols 54—61.
61. PROCEEDINGS FAC. SCI. TOKAI UNIV., Tokyo 1976, Vol. 10.
62. PROSVETNI DELAVEC, Ljubljana 1976, št. 1—4.
63. PROTEUS, Ljubljana 1975/76, letnik 38.
64. PUBLICATIONS DEPART. MATH., Ljubljana 1976, Vol. 12.
65. PUBLICATIONS INST. MATH., Beograd 1976, Vol. 20.
66. PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAK., Beograd 1976, No. 542—576.
67. RADIOTEHNIKA, Har'kov 1975, vyp. 32—34, 1976, vyp. 36—38.
68. RAZPRAVE, Društvo meteorologov Slovenije, Ljubljana 1976, Vol. 20, št. 1, 2.
69. RENDICONTI INST. MAT. UNIV. TRIESTE, Trieste 1976, Vol. 8.
70. REVISTA MATH. HISPANO-AMER., Madrid 1976, Vol. 36.
71. REVISTA UN. MAT. ARGENTINA, Buenos Aires 1975, 1976, Vol. 27, Nu. 3, 4.
72. REVUE ROUMAINE MATH. PURES APPL., Bucarest 1976, T. 21.
73. REVISTA MAT. UNIV. PARMA, Parma 1974, Vol. 3, 1975, Vol. 1, ser. 4.
74. RUDARSKO-METALURŠKI ZBORNIK, Ljubljana 1976.
75. SCRIPTA F. S. N. U. P. B., Physica, Brno 1975, ročník 5, 1976, ročník 6.
76. SEMINARUL ECUATII FUNCTIONELE, Timisoara 1976.
77. SEMINARUL TEORIA FUNCTIILOR MAT. APLICATE, Timisoara 1976.
78. SERDIKA, Sofija 1976, Vol. 2.
79. STUDIA UNIV. BABES-BOLYAI, Math. mech., Cluj 1976, T. 21.
80. STUDIA UNIV. BABES-BOLYAI, Physica, Cluj 1976, T. 21.
81. STUDII CERT. MAT., Bucuresti 1976, T. 28.
82. TEHNIČKA FIZIKA, Beograd 1976, Vol. 14.
83. TEORIJA FUNKCIJ, FUNKCIONAL'NYJ ANALIZ I IH PRILOŽENIJA, Har'kov 1976, vyp. 25, 26.
84. TIM, Ljubljana 1975/76, št. 2—10.
85. TRIBUNA, Ljubljana 1975/76, leto 25.
86. UČENYE ZAPISKI TARTUSKOGO GOS. UNIV., Trudy po mat. meh., Tartu 1976, T. 18.
87. UKRAINSKIJ MAT. ŽURNAL, Kiev 1976, T. 28.
88. USPEHI MAT. NAUK, Moskva 1976, T. 31.
89. VARILNA TEHNIKA, Ljubljana 1976, letnik 25.
90. VESCI AN BELORUSKOG SSR, Fiz. mat., Minsk 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1976.
91. VESTNIK HAR'KOVSKOGO UNIV., Astr., Har'kov 1976.
92. VESTNIK LENIGRADSKOGO UNIV., Fiz. him., Leningrad 1976.
93. VESTNIK MOSKOV. UNIV., Mat. meh., Moskva 1976.
94. VZGOJA IN IZOBRAŽEVANJE, Ljubljana 1976, let. 6.
95. ZBORNIK RADOVA, Beograd 1976, knj. 1.
96. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK., Fiz., Novi Sad 1976.
97. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK., Mat., Novi Sad 1976.
98. ZDRAVSTVENI VESTNIK, Ljubljana 1976, letnik 45.
99. ŽIVLJENJE IN TEHNIKA, Ljubljana 1976, letnik 27.

Stanislav Zorko