RUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

-17/1/77-

ODPISANO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1977
Letnik 24
1

24. LETNIK — ŠTEVILKA 1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1977

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Marjan Turk.

Naročnina: za posameznike 140.— din (za člane društva je že vračunana članarina 20.— din), za dijake in študente 60.— din, za ustanove in podjetja 180.— din, za tujino 12 $ = 216.— din, posamezna številka 25.— din, dvojna številka 50.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS,** 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 65-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 50100-620-107-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1600 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

Članki Stran

Preprosti zgledi iz topološke dinamike (France Križanič) 1
Toplotni vodniki (Riko Jerman) 10

Novici

Čarobni delci (Janez Strnad) 16
Gradientna teorija močne interakcije (Janez Strnad) 21

Šola

Konferenca nemškega fizikalnega društva o pouku fizike (Seta Oblak) 25
Šešti kongres mednarodne raziskovalne skupine za pouk matematike (Ignacij Smolec) 26

Domače vesti

Jubilej profesorja Antona Moljka (Janez Strnad) 27
Rezultati ankete, ki je bila poslana tehniškim fizikom (Janez Stepišnik in Zvonko Trontelj) 28
Deveto zvezno tekmovanje študentov matematike (Peter Legiša) 30
Vabilo na seminar iz astrofizike (Andrej Čadež, Martina Koman) IV
Nove knjige (Ivan Štalec, France Križanič, Jože Grasselli) ..... 9, 15, III
Prejeli smo v oceno (Zvonimir Bohte, Niko Prijatelj) 20

CONTENTS

Articles Page

Simple examples from topological dynamics (France Križanič) 1
Heat pipes (Riko Jerman) 10
News 16
School 25
Home news 27
New books ..... 9, 15, III

Obzornik mat. fiz. 24 (1977) 1

R-177/77-1
Inv. 87401

PREPROSTI ZGLEDI IZ TOPOLOŠKE DINAMIKE

FRANCE KRIŽANIČ

AMS Subj. Class. (1970) 34 C 35, 54 H 20, 58 F

Sestavek, ki je bil prebran na 6. seminarju iz matematike (5.—7. februarja 1976), vsebuje preproste linearne ravninske zglede k [2] in klasifikacijo takih sistemov.

SIMPLE EXAMPLES FROM TOPOLOGICAL DYNAMICS

The paper which was read at the 6th seminar of mathematics (5th—7th February 1976) contains simple linear plane examples to [2] and the classification of such systems.

V [2] smo pregledali nekaj osnovnih pojmov topološke dinamike. Dopolnimo jih s preprostimi — linearnimi ravninskimi zgledi, z nekakšnimi računskimi vajami.

Z $\mathbf{r}$ označimo krajevni vektor na ravnini, z $\mathbf{A}$ realno dvovrstno matriko

$$\mathbf{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Vmatrix}$$

Vprašajmo po krivuljah $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ki zadoščajo vektorski diferencialni enačbi

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{r} \tag{1}$$

ali sistemu dveh linearnih enačb prvega reda

$$\dot{x} = ax + by \qquad \dot{y} = cx + dy$$

Eksistenčni izrek za diferencialne enačbe pove, da je rešitev natanko določena z začetno točko $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, njeno definicijsko območje pa je vsa realna premica. Zato bomo zapisali

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{r}_0$$

$\mathbf{X}(t)$ je operator, ki začetno lego preslika v lego v času t.

Sistem (1) je avtonomen, čas v njem eksplicitno ne nastopa. Zato je hkrati z $\mathbf{r}(t)$ rešitev tudi premaknjena funkcija $\mathbf{r}(t + \tau)$. V trenutek $t + \tau$ prispemo od začetnega trenutka 0 v dveh korakih, najprej za t, potem za τ. To povzamemo v kompozicijsko pravilo — adicijski izrek

$$\mathbf{X}(t + \tau) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(\tau) \tag{2}$$

ki pove, da sestavljajo operatorji $\mathbf{X}(t)$ enoparametrično grupo, preslikava $t \to \mathbf{X}(t)$ pa je homomorfizem aditivne grupe realnih števil v grupo linearnih transformacij nad ravnino.

Kompozicijsko pravilo (2) je zgrajeno prav kakor adicijski izrek za eksponentno funkcijo. Rekli bomo, da je $\mathbf{X}(t)$ matrična eksponentna funkcija in označili

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

Množico $\mathbf{X}(t)r_0$, $t \geqq 0$ imenujemo pozitivni poltir skozi točko $\mathbf{r}_0$. Prav tako definiramo negativni poltir. Oba poltira združimo v tir.

Na ravnini uvedimo relacijo: točki ležita na istem tiru sistema (1) $\mathbf{r}_1 \sim \mathbf{r}_2$ natanko takrat, ko obstajajo $\mathbf{r}_0$, t_1, t_2, da je $\mathbf{r}_1 = \mathbf{X}(t_1)\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{X}(t_2)\mathbf{r}_0$. Odtod kaj lahko izločimo $\mathbf{r}_0$, imenujmo še $t = t_2 - t_1$, pa je $\mathbf{r}_2 \sim \mathbf{r}_1$ natanko takrat, ko obstaja t, da je $\mathbf{r}_2 = \mathbf{X}(t)\mathbf{r}_1$.

Grupne operacije zagotavljajo, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija:

1. V grupi $X(t)$ je enota $X(0)$, zaradi $\mathbf{r} = X(0)\mathbf{r}$ je $\sim$ refleksivna.

2. Element $X(t)$ ima inverzni element $X(-t)$; brž ko je $\mathbf{r}_2 = X(t)\mathbf{r}_1$, je $\mathbf{r}_1 = X(-t)\mathbf{r}_2$, $\sim$ je simetrična.

3. V grupi je definiran produkt $X(t)X(\tau) = X(t + \tau)$; brž ko je $\mathbf{r}_2 = X(t)\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1 = X(\tau)\mathbf{r}_0$, je $\mathbf{r}_2 = X(t + \tau)\mathbf{r}_0$, relacija $\sim$ je tranzitivna.

Ekvivalenčni razredi — tiri — se med seboj ne sečejo, lahko pa imajo skupne limitne točke. Razslojitvi ravnine v tire pravimo fazni portet sistema.

Tir lahko sestavlja ena sama točka, če je pač $X(t)\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0$ pri vsakem t. Taki točki pravimo negibna točka sistema.

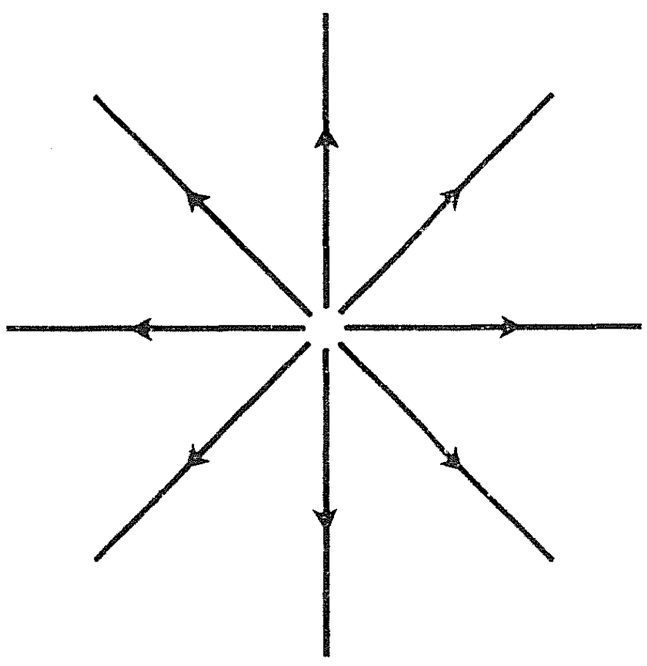
Pozornost posvetimo le linearnemu sistemu (1) z neizrojeno matriko A, tako, ki zadošča pogoju $\det \mathbf{A} \neq 0$. Vprašajmo najprej po negibni točki. Vstavimo $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ v (1), pa preberemo $\mathbf{A}\mathbf{r}_0 = 0$. Negibne točke leže v jedru operatorja A. Ker je le-ta neizrojen, je negibna točka ena sama $\mathbf{r}_0 = 0$.

Oglejmo si nekaj faznih portretov in ustreznih faznih tokov, transformacijskih grup ali eksponentnih funkcij. Najprej naj bo

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}$$

sistem torej

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \tag{3}$$



Sl. 1

V koordinatah razpade ta sistem v dve nepovezani enačbi $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$. Geometrijski ali kinematični občutek nam pove, da so tiri poltraki, ki izhajajo iz izhodišča (slika 1). Rešitev, ki poteka skozi točko $\mathbf{r}_0 \neq 0$, poiščimo kar z nastavkom $\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{r}_0$, pa dobimo za $\varphi(t)$ skalarno diferencialno enačbo $\dot{\varphi} = \varphi$ in začetni pogoj $\varphi(0) = 1$. Odtod $\varphi(t) = e^t$ in

$$\mathbf{r} = e^t \mathbf{r}_0$$

Ustrezno transformacijsko grupo sestavljajo preproste linearne transformacije

$$e^{\mathbf{E}t} = e^t \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} e^t, & 0 \\ 0, & e^t \end{Vmatrix} \tag{4}$$

V splošnem primeru bodo tiri pač ukrivljeni, vsaj kakšen — upajmo — pa bo le ostal raven. Naj bo $\mathbf{l}$ vektor na takem tiru, tir je torej

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{l}$$

Vstavimo v enačbo in upoštevajmo, da je A linearen operator: $\dot{\varphi}\mathbf{l} = \varphi\,\mathbf{A}\mathbf{l}$. Naloga je rešljiva le, če sta $\mathbf{l}$ in $\mathbf{A}\mathbf{l}$ kolinearna

$$\mathbf{A}\mathbf{l} = \lambda\mathbf{l} \tag{5}$$

Vstavimo vse to v enačbo (1), pa dobimo za φ enačbo $\dot{\varphi} = \lambda\varphi$ z rešitvijo $\varphi = e^{\lambda t}$. Ponovimo:

Na vektor $\mathbf{l}$ je napet tir sistema (1) le, če je $\mathbf{l}$ lastni vektor matrike A. Gibanje po tiru opisuje

$$\mathbf{r}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{l} \tag{6}$$

kjer je λ ustrezna lastna vrednost (glej (5)).

Lastne vektorje in lastne vrednosti dvovrstne matrike pa znamo izračunati; to nalogo dobro poznamo iz AAA III. Koordinati vektorja $\mathbf{l}$ imenujmo m in n, pa lahko sistem (5) prepišemo v koordinatah

$$(a - \lambda)m + bn = 0 \qquad cm + (d - \lambda)n = 0 \tag{7}$$

To je homogen sistem enačb za m in n. Netrivialno je rešljiv le če je determinanta enaka 0. Ta pogoj pa je kvadratna enačba za lastne vrednosti

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Brž ko je λ lastna vrednost, sta enačbi (7) odvisni, ustrezni lastni vektor preberemo že iz ene, na primer iz prve

$$\mathbf{l} = \left\| \begin{matrix} b \\ \lambda - a \end{matrix} \right\|$$

Ne pozabimo, da je lastni vektor določen le do konstantnega faktorja natanko, hkrati z $\mathbf{l}$ je lastni vektor tudi $c\mathbf{l}$ pri vsakem c.

Denimo, da ima $\mathbf{A}$ linearno neodvisna lastna vektorja $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ in ustrezni lastni vrednosti λ_1, λ_2. Tedaj lahko vsako rešitev razčlenimo v

$$\mathbf{r}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{l}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{l}_2 \tag{8}$$

Res! Vsaka rešitev je določena s svojo začetno vrednostjo $\mathbf{r}_0$. Izberimo konstanti c_1, c_2 tako, da bo rešitev (8) potekala skozi $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{r}_0 = c_1\mathbf{l}_1 + c_2\mathbf{l}_2$$

Konstanti sta s tem pogojem natanko določeni, ker sta lastna vektorja linearno neodvisna.

Ustavimo se najprej ob matriki z različnima realnima lastnima vrednostma. Rešitev smo razčlenili v komponenti v smeri lastnih vektorjev. Obe komponenti se spreminjata eksponentno. Če sta lastni vrednosti enako predznačeni, obe komponenti hkrati naraščata ali hkrati padata. Če pa sta predznaka lastnih vrednosti različna, ena narašča čez vsako mejo, druga pada proti 0. V prvem primeru pravimo, da je točka mirovanja 0 vozel, v drugem, da je sedlo.

Za primer, ko velja (8), izračunajmo še grupo $\mathbf{X}(t)$. Najprej pišimo kar $\mathbf{l}_k$ namesto $c_k\mathbf{l}_k$

$$\mathbf{r} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{l}_1 + e^{\lambda_2 t}\mathbf{l}_2 \qquad \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \mathbf{r}_0 \tag{9}$$

Uporabimo $\mathbf{A}$ na $\mathbf{r}_0$, potem pa iz

$$\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \mathbf{r}_0 \qquad \lambda_1\mathbf{l}_1 + \lambda_2\mathbf{l}_2 = \mathbf{A}\mathbf{r}_0$$

izračunajmo $\mathbf{l}_1$ in $\mathbf{l}_2$

$$\mathbf{l}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{r}_0 - \lambda_2\mathbf{r}_0) = \mathbf{A}_1\mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{l}_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{r}_0 - \lambda_1\mathbf{r}_0) = \mathbf{A}_2\mathbf{r}_0$$

Vstavimo v (9)

$$\mathbf{r}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{A}_1 + e^{\lambda_2 t}\mathbf{A}_2)\mathbf{r}_0$$

pa že preberemo

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{A}_1 + e^{\lambda_2 t}\mathbf{A}_2 \tag{10}$$

Matriki

$$\mathbf{A}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}) \qquad \mathbf{A}_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})$$

odlikujejo tele zanimive lastnosti

$$\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{A}_1 \qquad \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = 0 \qquad \mathbf{A}_2^2 = \mathbf{A}_2 \tag{11}$$

To vidimo kar na prvi pogled: $\mathbf{A}_1$ pomnoži $\mathbf{l}_1$ z 1, $\mathbf{l}_2$ pa z 0. Če to napravimo dvakrat zapored, smo opravili prav toliko kot prvič. Produkt $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ pomnoži oba bazna vektorja z 0, zato je 0. Bralec sam bo s pomočjo (11) še enkrat preskusil, da sestavlja (10) enoparametrično grupo.

Za zgled vzemimo sistem

$$\dot{x} = 5x - 3y \qquad \dot{y} = -x + 7y$$

z matriko in s karakterističnim polinomom

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 5, & -3 \\ -1, & 7 \end{Vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5-\lambda, & -3 \\ -1, & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 32 = (\lambda - 4)(\lambda - 8)$$

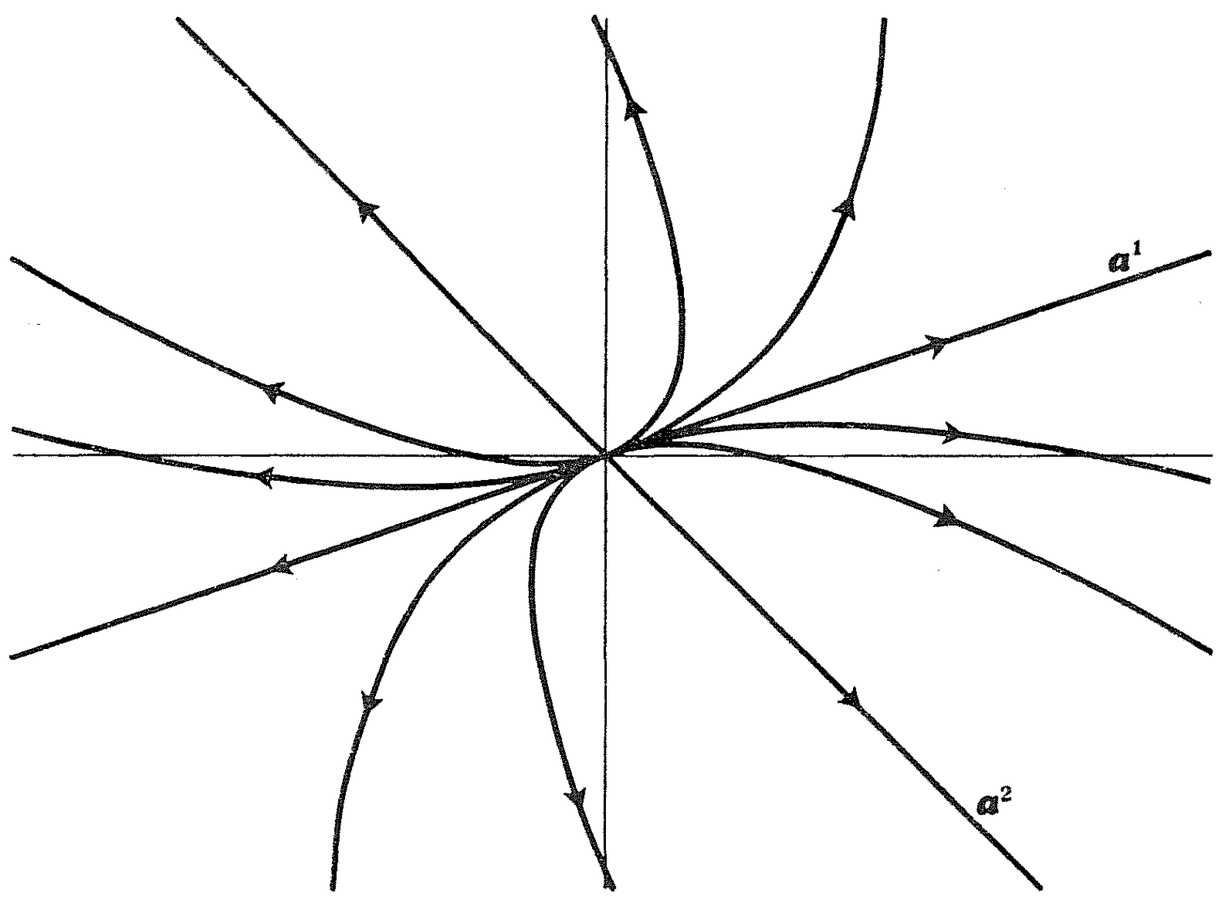
Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$, pomožni matriki

$$\mathbf{A}_1 = -\tfrac{1}{4}(\mathbf{A} - 8\mathbf{E}) = \tfrac{1}{4}\begin{Vmatrix} 3, & 3 \\ 1, & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \tfrac{1}{4}(\mathbf{A} - 4\mathbf{E}) = \tfrac{1}{4}\begin{Vmatrix} 1, & -3 \\ -1, & 3 \end{Vmatrix}$$

in

$$e^{\mathbf{A}t} = \tfrac{1}{4}\begin{Vmatrix} 3e^{4t} + e^{8t}, & 3e^{4t} - 3e^{8t} \\ e^{4t} - e^{8t}, & e^{4t} + 3e^{8t} \end{Vmatrix}$$

Bralec sam lahko zapiše rešitev, ki gre skozi $\mathbf{r}_0$, izračuna lastna vektorja in nariše fazni portret, ki je na sliki 2.



Sl. 2

Kaj pa, če sta ničli karakterističnega polinoma kompleksni števili

$$\lambda = \alpha + i\beta \qquad \lambda^* = \alpha - i\beta \qquad \beta > 0$$

Ves problem postavimo sprva v dvorazsežni kompleksni prostor. V njem ustrezata λ in λ^* konjugirana lastna vektorja, denimo

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} - i\mathbf{b} \qquad \mathbf{l}^* = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \qquad (12)$$

V kompleksnem zapišemo splošno rešitev kot linearno kombinacijo vektorjev $e^{\lambda t}\mathbf{l}$ in $e^{\lambda^* t}\mathbf{l}^*$. Realno rešitev dobimo, če sta koeficienta linearne kombinacije konjugirani števili

$$\mathbf{r}(t) = ce^{\lambda t}\mathbf{l} + c^* e^{\lambda^* t}\mathbf{l}^* = 2\,\mathrm{Re}\, ce^{\lambda t}\mathbf{l}$$

Konstanto c določimo tako, da bo izpolnjen začetni pogoj $2\,\mathrm{Re}\, ce^{\lambda t}\mathbf{l} = \mathbf{r}_0$. Tudi $c\mathbf{l}$ je lastni vektor matrike $\mathbf{A}$; pišimo kar $\mathbf{l}$ namesto $c\mathbf{l}$.

$$\mathbf{r}(t) = 2\,\mathrm{Re}\, e^{\lambda t}\mathbf{l} \qquad \mathbf{r}_0 = 2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{l} \qquad (13)$$

Upoštevajmo še, da je

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + ie^{\alpha t}\sin\beta t = \xi(t) + i\eta(t) \qquad (14)$$

Razčlenimo lastni vektor v (12), pa lahko (13) prepišemo takole

$$\mathbf{r}(t) = 2\xi\mathbf{a} + 2\eta\mathbf{b} \qquad \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{a} \qquad (15)$$

Izrazimo še $\mathbf{b}$ z $\mathbf{a}$. V ta namen upoštevajmo, da je $\mathbf{l}$ lastni vektor matrike $\mathbf{A}$, zato $\mathbf{Aa} + i\mathbf{Ab} = \mathbf{Al} = \lambda\mathbf{l}$, odtod $\mathbf{Aa} = \mathrm{Re}\,\lambda\,\mathbf{l} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Nazadnje

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ba} \qquad (16)$$

Z **B** smo označili matriko

$$\mathbf{B} = \beta^{-1}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})$$

Vektor **l** je lastni vektor matrike **B**, ustrezna lastna vrednost je $\beta^{-1}(\lambda - \alpha) = i$. Zato je **l** lastni vektor matrike $\mathbf{B}^2$, ustrezna lastna vrednost pa je —1. To pomeni, da $\mathbf{B}^2$ pomnoži vektorja **a** in **b** z —1. Ker sta linearno neodvisna, je nazadnje

$$\mathbf{B}^2 = -\mathbf{E} \tag{17}$$

Zložimo (15) in (16)

$$\mathbf{r}(t) = (\xi\mathbf{E} + \eta\mathbf{B})\mathbf{r}_0$$

pa smo našli ustrezno transformacijsko grupo

$$e^{\mathbf{A}t} = \xi(t)\mathbf{E} + \eta(t)\mathbf{B} \tag{18}$$

V koordinatnem sestavu, ki ima bazna vektorja **2a** in **2b**, opišemo krivuljo $\mathbf{r}(t)$ s koordinatama

$$\xi(t) = Ce^{\alpha t}\cos\beta(t - \tau) \qquad \eta(t) = Ce^{\alpha t}\sin\beta(t - \tau)$$

Uvedimo polarni koordinati

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}(\eta/\xi)$$

pa brž izračunamo $\rho = Ce^{\alpha t}$, $\varphi = \beta(t - \tau)$, nazadnje, če konstante malce preimenujemo

$$\rho = \rho_0 e^{(\alpha/\beta)(\varphi - \varphi_0)}$$

Tiri so torej vibe, ki se navijajo okoli izhodišča ali pa odvijajo z njega, kakršen je pač znak α, pozitiven ali negativen. V izjemnem primeru, ko je $\alpha = 0$, so tiri sklenjene krivulje, elipse. V prvem primeru pravimo točki mirovanja fokus, v drugem center.

Za zgled rešimo sistem

$$\dot{x} = 2x - 5y \qquad \dot{y} = 2x - 4y$$

z matriko in s karakterističnim polinomom

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2, & -5 \\ 2, & -4 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 2 - \lambda, & -5 \\ 2, & -2 - \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Karakteristični števili sta kompleksni, $\lambda = -1 + i$, pomožna matrika

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} 3, & -5 \\ 2, & -3 \end{Vmatrix}$$

komponenti rešitve v lastnem koordinatnem sistemu

$$\xi(t) = e^{-t}\cos t \qquad \eta(t) = e^{-t}\sin t$$

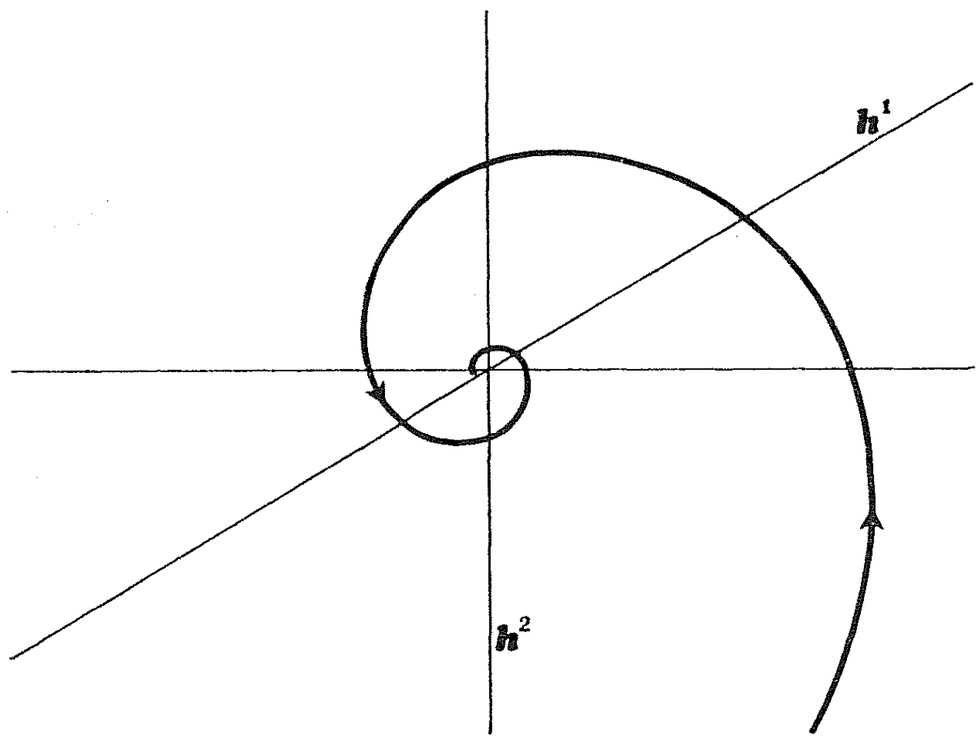
transformacijska grupa

$$e^{\mathbf{A}t} = \xi(t)\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix} + \eta(t)\begin{Vmatrix} 3, & -5 \\ 2, & -3 \end{Vmatrix}$$

ali

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t}\begin{Vmatrix} \cos t + 3\sin t, & -5\sin t \\ 2\sin t, & \cos t - 3\sin t \end{Vmatrix}$$

Fazni portret je na sliki 3, kjer je $\mathbf{h}_1 = 2\mathbf{a}$, $\mathbf{h}_2 = 2\mathbf{b}$.



Sl. 3

Primeri se, da ima matrika eno samo lastno vrednost, ustrezni lastni podprostor pa je enorazsežen. Tedaj je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \neq 0$, toda $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^2 = 0$. Bralec sam bo pokazal, da je tedaj

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda t}\,[\mathbf{E} + t(\mathbf{A} - \lambda)] \tag{19}$$

V drugem delu sestavka se ozrimo po klasifikaciji linearnih diferencialnih sistemov na ravnini. Ravnino lahko obravnavamo kot objekt različnih kategorij, na primer:

Ravnina je vektorski prostor.

Ravnina je diferenciabilna (gladka) mnogoterost.

Ravnina je topološki prostor.

Vsaka kategorija dovoljuje ali priznava le svoje preslikave ali morfizme med objekti. V kategoriji vektorskih prostorov so morfizmi linearne preslikave. V kategoriji gladkih mnogoterosti so morfizmi gladke (diferenciabilne) preslikave. V kategoriji topoloških prostorov so morfizmi zvezne preslikave.

Med morfizmi posebej odlikujemo obrnljive morfizme, preslikave, ki imajo tudi obratno preslikavo med morfizmi kategorije. Takim morfizmom pravimo izomorfizmi. V posameznih kategorijah damo izomorfizmom posebna imena: izomorfizmi vektorskih prostorov so neizrojene linearne transformacije, izomorfizmi gladkih mnogoterosti so difeomorfizmi, izomorfizmi topoloških prostorov homeomorfizmi.

Brž ko si nadenemo očala izbrane kategorije, postanemo slepi za razlike med izomorfnimi objekti. Tako poglejmo tudi na dinamične sisteme na ravnini. Nobene razlike med dvema sistemoma ne bomo videli, če ju lahko z izomorfizmom med ravninama preslikamo drugega v drugega. Razlike med njimi pa bodo osnova klasifikacije. Lotimo se bolj natančnih definicij.

Kadar bo treba poudariti kategorijo, v kateri klasificiramo sisteme, bomo govorili o linearni ekvivalenci, o gladki ekvivalenci, o topološki ekvivalenci. Očitno sta linearno ekvivalentna sistema tudi gladko ekvivalentna, gladko ekvivalentna tudi topološko ekvivalentna.

Dva dinamična sistema sta ekvivalentna, če obstaja izomorfizem med ravninama, ki prevede tire prvega sistema v tire drugega. Definicijo ekvivalence lahko povemo tudi z ustrezno transformacijsko grupo. Imejmo dva sistema

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{r} \qquad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{B}\mathbf{r} \tag{20}$$

prvega na ravnini P, drugega na ravnini Q. Sistema sta ekvivalentna, če obstaja tak izomorfizem s: $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "e^{\mathbf{A}t}"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \arrow[r, "e^{\mathbf{B}t}"'] & \mathrm{Q} \arrow[u, "s^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

pri vsakem t, ali

$$e^{\mathbf{A}t} = s^{-1}e^{\mathbf{B}t}s \tag{21}$$

Ker je s neodvisen od t, sta obe strani odvedljivi po t in $\mathbf{A} = s^{-1}\mathbf{B}s \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} = s^{-1}e^{\mathbf{B}t}s$, o čemer se bo lahko prepričal bralec sam ob (10), (18), (19). Če je s linearna transformacija in $\mathbf{A} = s^{-1}\mathbf{B}s$, pravimo, da sta si matriki podobni. Torej:

Sistema (20) sta linearno ekvivalentna natanko tedaj, ko sta si matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ podobni.

Za hip upoštevajmo le matrike z različnima lastnima vrednostma. Dve taki matriki sta si podobni natanko tedaj, ko imata skupne lastne vrednosti. Tako lahko rečemo: Invarianti sistema z različnima lastnima vrednostma sta v kategoriji linearnih prostorov lastni vrednosti matrike $\mathbf{A}$.

Gladka klasifikacija ne prinese nič novega. Ponovimo definicijo diferenciabilnosti: Preslikava $s\colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ je diferenciabilna v točki $\mathbf{r}$, če obstaja linearna transformacija $\mathbf{S}\colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$, da je

$$s(\mathbf{r} + \mathbf{h}) = s(\mathbf{r}) + \mathbf{S}\mathbf{h} + o(\mathbf{h})$$

kjer gre ostanek $o(\mathbf{h})$ proti 0 hitreje kot argument $\mathbf{h}$. Linearni transformaciji $\mathbf{S}$ pravimo odvod preslikave s v točki $\mathbf{r}$. Neposredno iz definicije preberemo pravilo za odvajanje superpozicije $ps(\mathbf{r}) = p(s(\mathbf{r}))$. Njen odvod v točki $\mathbf{r}$ je enak $\mathbf{PS}$, kjer je $\mathbf{S}$ odvod s v točki $\mathbf{r}$, $\mathbf{P}$ pa odvod preslikave p v točki $s(\mathbf{r})$. Obujeni spomini nam povedo:

Sistema (20) sta gladko ekvivalentna natanko takrat, ko sta ekvivalentna linearno.

Dokaz je v eno smer nepotreben. V drugo: Difeomorfizem s prevede negibno točko 0 prvega sistema v negibno točko drugega sistema. S premikom, ki je tudi difeomorfizem, lahko dosežemo $s(0) = 0$. Če je $\mathbf{B}$ neizrojena, pa je to tako edina možnost. Označimo z $\mathbf{S}$ odvod s v točki 0 in diferencirajmo (21) v točki 0

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{S}$$

Izrek je dokazan.

Pred topološko klasifikacijo nalogo še malce poenostavimo. Brž ko ima matrika linearno neodvisna lastna vektorja, lahko z linearno transformacijo preidemo k podobni matriki s pravokotnima in normiranima lastnima vektorjema. Ker je linearna transformacija tudi zvezna, lahko privzamemo, da je ta pogoj izpolnjen že od vsega začetka. Skalarni produkt dveh vektorjev računajmo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ tudi, če sta vektorja kompleksna. Pri dokazovanju si bomo pomagali s funkcijo Ljapunova

$$V(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*$$

$\mathbf{r}^*$ pomeni pač konjugirani vektor, če moramo delati v kompleksnem in kar $\mathbf{r}$, če zadošča realni okvir. $V(\mathbf{r})$ je očitno kvadrat razdalje točke $\mathbf{r}$ od izhodišča.

Poglejmo, kako se spreminja $V(\mathbf{r})$ vzdolž rešitve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Odvajajmo superpozicijo $V(\mathbf{r}(t))$ po t in odvod označimo z $\dot{V}(\mathbf{r})$.

$$\dot{V}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^* + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}^* = 2 \operatorname{Re} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^* = 2 \operatorname{Re} \mathbf{A}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*$$

Odvod vzdolž tira $\dot{V}(\mathbf{r})$ lahko torej izračunamo v točki $\mathbf{r}$, ne da bi poznali tir, ki poteka skozi $\mathbf{r}$.

Denimo najprej, da ima $\mathbf{A}$ konjugirani kompleksni lastni vrednosti. Realni vektor $\mathbf{r}$ razčlenimo po lastnih vektorjih in brž izračunajmo še $\mathbf{A}\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \zeta \mathbf{l} + \zeta^* \mathbf{l}^* \qquad \mathbf{A}\mathbf{r} = \lambda \zeta \mathbf{l} + \lambda^* \zeta^* \mathbf{l}^*$$

pa zvemo $V(\mathbf{r}) = \zeta\zeta^*$ in $\dot{V}(\mathbf{r}) = 2 \operatorname{Re} \lambda \, \zeta\zeta^*$. Odtod $\dot{V}(\mathbf{r}) = (2 \operatorname{Re} \lambda) V(\mathbf{r})$ in

$$\ln V(\mathbf{r}) = (2 \operatorname{Re} \lambda) t \tag{22}$$

Če sta lastni vrednosti realni, razčlenimo

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{l}_1 + \eta \mathbf{l}_2 \qquad \mathbf{A}\mathbf{r} = \xi \lambda_1 \mathbf{l}_1 + \eta \lambda_2 \mathbf{l}_2$$

izračunamo $V(\mathbf{r}) = \xi^2 + \eta^2$ in $\dot{V}(\mathbf{r}) = 2\lambda_1\xi^2 + 2\lambda_2\eta^2$. Odtod najprej ocenimo $0 < \lambda_1 \leqq \leqq \lambda_2 \Rightarrow 2\lambda_1 V(\mathbf{r}) \leqq \dot{V}(\mathbf{r}) \leqq 2\lambda_2 V(\mathbf{r})$, potem pa

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \Rightarrow 2\lambda_1 t \leqq \ln V(\mathbf{r}) \leqq 2\lambda_2 t \tag{23}$$

Brž ko ima A eno samo lastno vrednost z enorazsežnim lastnim podprostorom, je podobna matriki

$$\begin{Vmatrix} \lambda, & 1 \\ 0, & \lambda \end{Vmatrix}$$

Izberimo $\varepsilon > 0$ in še enkrat preslikajmo matriko v podobno matriko

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \varepsilon \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} \lambda, & 1 \\ 0, & \lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \varepsilon \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda, & \varepsilon \\ 0, & \lambda \end{Vmatrix}$$

V novem koordinatnem sestavu je $\dot{V}(\mathbf{r}) = 2\lambda(\xi^2 + \eta^2) + 2\varepsilon\,\xi\eta$. Upoštevajmo, da je $0 \leqq |\,\xi\eta\,|/(\xi^2 + \eta^2) \leqq \frac{1}{2}$, pa zvemo, da se $\dot{V}/V$ kvečjemu za ε loči od 2λ. Brž ko je λ pozitiven, lahko izberemo dovolj majhen ε, da velja ocena

$$\alpha \leqq \dot{V}/V \leqq \beta \tag{24}$$

kjer sta α in β pozitivni števili. Nazadnje lahko povzamemo:

Brž ko so realne komponente vseh lastnih vrednosti matrike A pozitivne, obstajata pozitivni konstanti α in β, da je

$$e^{\alpha t} \leqq V(t) \leqq e^{\beta t} \tag{25}$$

Dokaz je pač v (22), (23) in (24). Opozorimo le na tole: pri prehodu od $\dot{V}/V$ k $\ln V$ smo integracijsko konstanto izbrali vselej tako, da je $V(\mathbf{r}) = 1$ pri $t = 0$. Z drugimi besedami: V času $t = 0$ je točka na krogli s središčem 0 in s polmerom 1.

Po tej pripravi že lahko dokažemo:

Matrika A naj ima le lastne vrednosti s pozitivnimi realnimi komponentami. Tedaj je sistem $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{r}$ ekvivalenten sistemu $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$.

Dokaz: Iz (24) zvemo, da $V(\mathbf{r})$ vzdolž tira s časom monotono narašča čez vsako mejo. V izhodišču je $V(0) = 0$, drugod je pozitiven. Ker je $V(\mathbf{r}(t))$ zvezna funkcija, slej ko prej doseže vrednost 1, tir tedaj prebode kroglo $r = 1$. Očitno je tako prebodišče eno samo.

Sestavimo funkcijo s, ki preslika fazni portret prvega sistema v fazni portret drugega sistema. Oba portreta rišimo na isti ravnini. Vzemimo poljuben $\mathbf{r} \neq 0$. Skozenj poteka natanko določen tir prvega sistema, ki seka enotno kroglo v natanko določeni točki $\mathbf{r}_0$.

Naj bo $\tau(\mathbf{r})$ čas, ki ga potrebuje točka, da prispe iz $\mathbf{r}_0$ v $\mathbf{r}$. Funkcija $\tau(\mathbf{r})$ je zvezna, iz (25) pa preberemo, da teži proti $-\infty$, ko gre $\mathbf{r}$ proti 0.

Skozi $\mathbf{r}_0$ poteka natanko določen poltrak — tir drugega sistema. Po njem premaknimo točko za čas τ in končno točko proglasimo za $s(\mathbf{r})$

$$\mathbf{r} = e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{r}_0 \qquad s(\mathbf{r}) = e^{\mathbf{E}\tau}\mathbf{r}_0 \tag{26}$$

Dopolnimo definicijo s še z $s(0) = 0$, pa lahko povzamemo

$$s(0) = 0 \qquad \mathbf{r} \neq 0 \qquad s(\mathbf{r}) = e^{(\mathbf{E}-\mathbf{A})\tau(\mathbf{r})}\mathbf{r}$$

V točkah $\mathbf{r} \neq 0$ je $s(\mathbf{r})$ superpozicija samih zveznih funkcij. Zato je zvezna. Zvezna pa je tudi v izhodišču. Iz (26) in (25) izračunamo

$$V(s(\mathbf{r})) = e^{2\tau(\mathbf{r})} \leqq [V(\mathbf{r})]^{2/\alpha}$$

Ne pozabimo, da je $V(\mathbf{r})$ kvadrat dolžine, pa je dokaz končan.

Posledica: Sistema, ki imata le lastne vrednosti s pozitivnimi realnimi komponentami, sta topološko ekvivalentna.

Izrek velja prav tako za linearne sisteme poljubne razsežnosti. Kot drugo posledico — brez podrobnega dokazovanja — pridobimo topološko klasifikacijo sistemov, ki imajo le lastne vrednosti z realnimi komponentami, ki niso enake 0. Prostor, v katerem deluje taka matrika (in ustrezni sistem), razdelimo v premo vsoto dveh podprostorov, v prvem so realne komponente vseh lastnih vrednosti pozitivne, v drugem negativne. Prvi podprostor imenujemo nestabilni brk, drugemu pravimo stabilni brk. Dimenzijo nestabilnega brka označimo z n_-, dimenzijo stabilnega z n_+. Ker je $n_- + n_+ = n$, je dovolj, da poznamo n_-.

Pri ekvivalenčni preslikavi preide stabilni brk v stabilni brk. Iz definicije (21) preberemo pač, da teži slika proti 0, če gre tja original. Ker pa se tudi brk na brk preslika homeomorfno, gre to po Brouwerju le, če sta dimenziji obeh enaki. Topološko ekvivalentna sistema imata torej enako dimenzijo n_-. Ali:

Skupna večkratnost vseh lastnih vrednosti z negativno realno komponento n_- je edina topološka invarianta sistema (1).

Sisteme z neničelnimi realnimi komponentami lastnih vrednosti, ki delujejo na ravnini, razdelimo nazadnje le v tri topološke tipe $n_- = 0$, $n_- = 1$, $n_- = 2$.

LITERATURA

[1.] В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциалние уравнения, Наука, Москва 1971.

[2.] F. Križanič, *Topološka dinamika*, Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 48—72.

[3.] I. Vidav, *Višja matematika III*, DSZ, Ljubljana 1976.

NOVE KNJIGE

Batagelj V. in Pisanski T., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj II. del, 1967—1975, DZS 1976, Knjižnica Sigma 26, cena 90.— din (72.— din).

Težko pričakovana knjižica Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj II. del (1967—1975) je vendarle zagledala beli dan. Istoimenska zbirka I. del je bila toplo sprejeta pri učencih in učiteljih ter je bila hitro razprodana. Zato upam, da bo tudi II. del enako dobrodošel, saj vsebuje še zanimivejše in nekoliko težje naloge, kot so v I. delu.

Pestra zbirka obsega 156 rešenih nalog, 116 nalog je iz gradiva po učnem načrtu za gimnazije in srednje tehnične šole, 40 nalog pa je takih, ki ne spadajo v učni program in zahtevajo nekaj več bistrosti uma in več smisla za matematiko. 27 nalog je rešenih na dva načina (A in B), 4 naloge pa celo na tri načine (A, B in C). Metode reševanja nekaterih nalog bodo posebej zanimive tako za učitelje matematike kot za učence, ker se razlikujejo od metod, uporabljenih v učbenikih za srednje šole. Pestrost metod je treba posebej pohvaliti. Avtorja zbirke sta se zelo potrudila, da bi se mogel bralec pri reševanju čimveč naučiti.

Naj navedem namen knjižice kar iz njenega uvoda, ki sta ga napisala avtorja:

Knjižica je namenjena vsem ljubiteljem matematičnih nalog in matematičnim krožkom na srednjih šolah. V pomoč pri študiju in delu pa bo bodočim in sedanjim učiteljem in srednješolskim profesorjem. Dosti zanimivega bodo v njej našli tudi vsi tisti, ki želijo obnoviti in ohraniti svoje znanje srednješolske matematike. V mislih imava maturante in študente prvih letnikov.

Ivan Štalec

TOPLOTNI VODNIKI

RIKO JERMAN

UDK 536.24

Sestavek obravnava osnovne značilnosti toplotnih vodnikov, ki se odlikujejo po veliki toplotni prevodnosti. Lahko jim celo spreminjamo toplotno prevodnost. Na koncu je navedenih nekaj možnosti za uporabo.

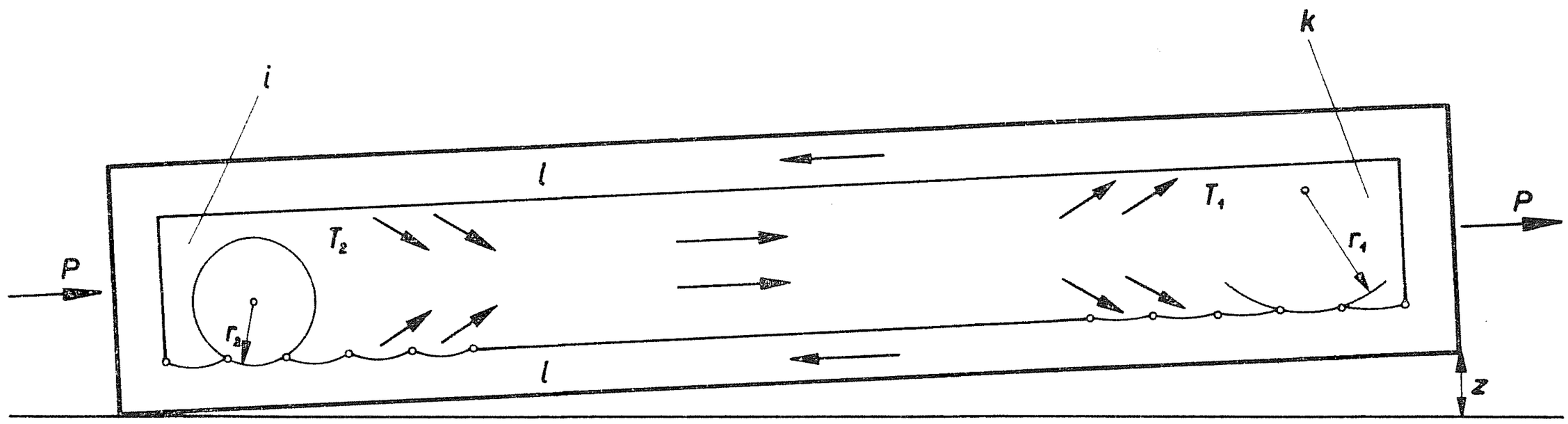
HEAT PIPES

In the paper basic aspects of heat pipes are considered. These are conductors of heat with very low and variable thermal resistance. Some applications are mentioned also.

Uvod

Prenos toplote z latentno toploto poznajo že nekaj časa. Kljub temu je zanimanje za *toplotne vodnike* naraslo šele pred dobrim desetletjem [1]. Obetajoče možnosti so pospešile nadaljnje izpopolnjevanje, tako da jih danes uporabljajo na zelo različnih področjih. Morda bi lahko celo rekli, da po raznolikosti uporabe prekašajo toplotne vodnike le laserji.

Toplotni vodniki so votla telesa, katerih notranjost obdaja plast luknjičave snovi — *stenja*. V stenju je kapljevina, preostali prostor pa napolnjuje njena para (sl. 1). Zanimajmo se



Sl. 1: Valjasti toplotni vodnik. Puščice kažejo tok pare in kapljevine: k — kondenzator, i — izparilnik, l — stenj, r_1, r_2 — krivinska radija gladine kapljevine v kapilari izparilnika in kondenzorja

za dogajanje v valjastem toplotnem vodniku, katerega krajišči imata različno temperaturo. Na krajišču z višjo temperaturo T_2 — *izparilniku* — izpareva kapljevina. Para teče proti krajišču z nižjo temperaturo T_1 — *kondenzatorju* — in se tam utekočini. Tak prenos toplote je zelo učinkovit, toda pomanjkljiv, če moramo izparilniku neprestano dovajati kapljevino iz okolice. Pri toplotnem vodniku pa se kapljevina vrača k izparilniku po stenju. Razlika nasičenih parnih tlakov $p_2 = p_s(T_2)$ in $p_1 = p_s(T_1)$ požene tok pare proti kondenzatorju. Površinska napetost pa povzroči tok kapljevine po stenju proti izparilniku. Tega je kriva razlika kapilarnih tlakov $2\gamma/r_2$ in $2\gamma/r_1$ v stenju, če je γ površinska napetost. r_2 in r_1 sta krivinska radija gladine kapljevine v kapilarah izparilnika in kondenzatorja. Ta radija sta večja ali enaka radiju največje kapilare, ki jo še napolnjuje kapljevina.

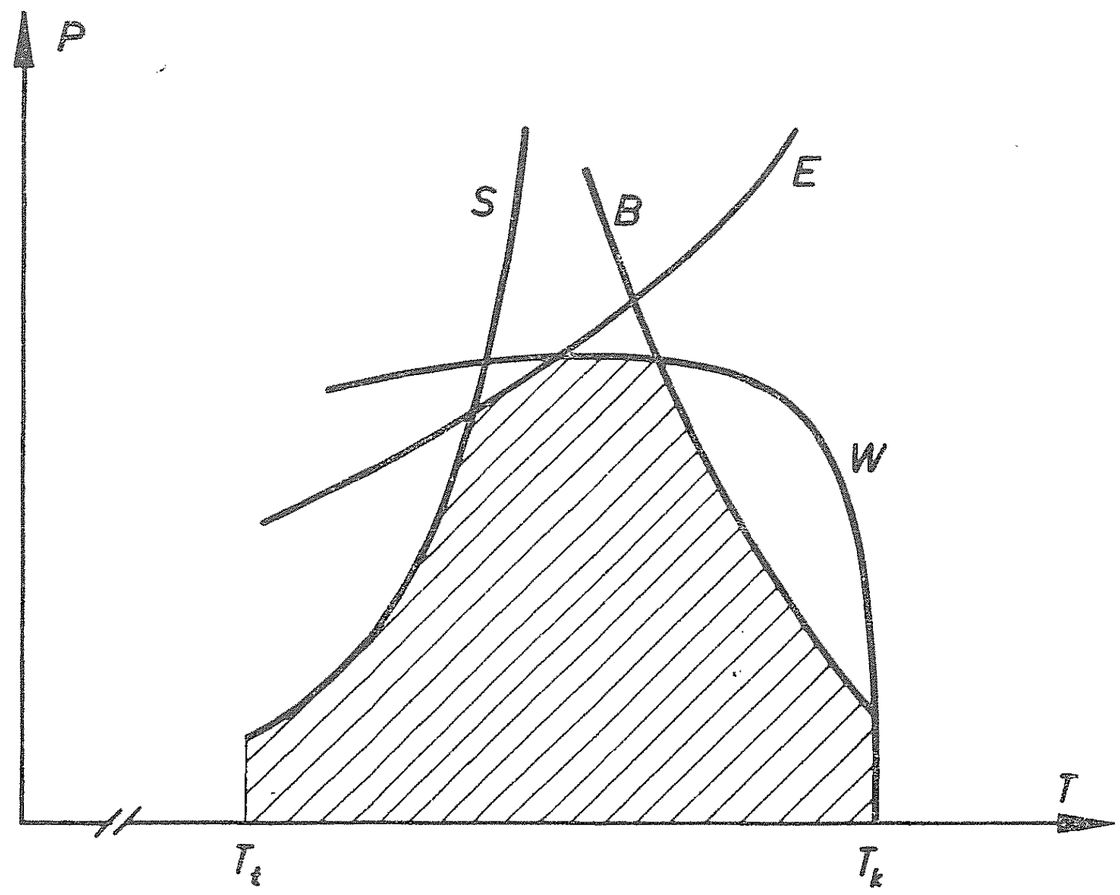
Tako je v kapljevini pri kondenzatorju tlak $p_1 - 2\gamma/r_1$, pri izparilniku pa $p_2 - 2\gamma/r_2 - \rho gz$, če je kondenzator v višini z nad izparilnikom. Razlika tlakov $p_1 - p_2 - 2\gamma(1/r_1 - 1/r_2) + \rho gz$ mora biti pozitivna, ker mora premagovati upor pri toku kapljevine skozi stenj. Zato mora biti izpolnjena zahteva

$$r_2/r_1 < 1 - |p_2 - p_1| r_2/2\gamma + \tfrac{1}{2}\rho gzr_2/\gamma \tag{1}$$

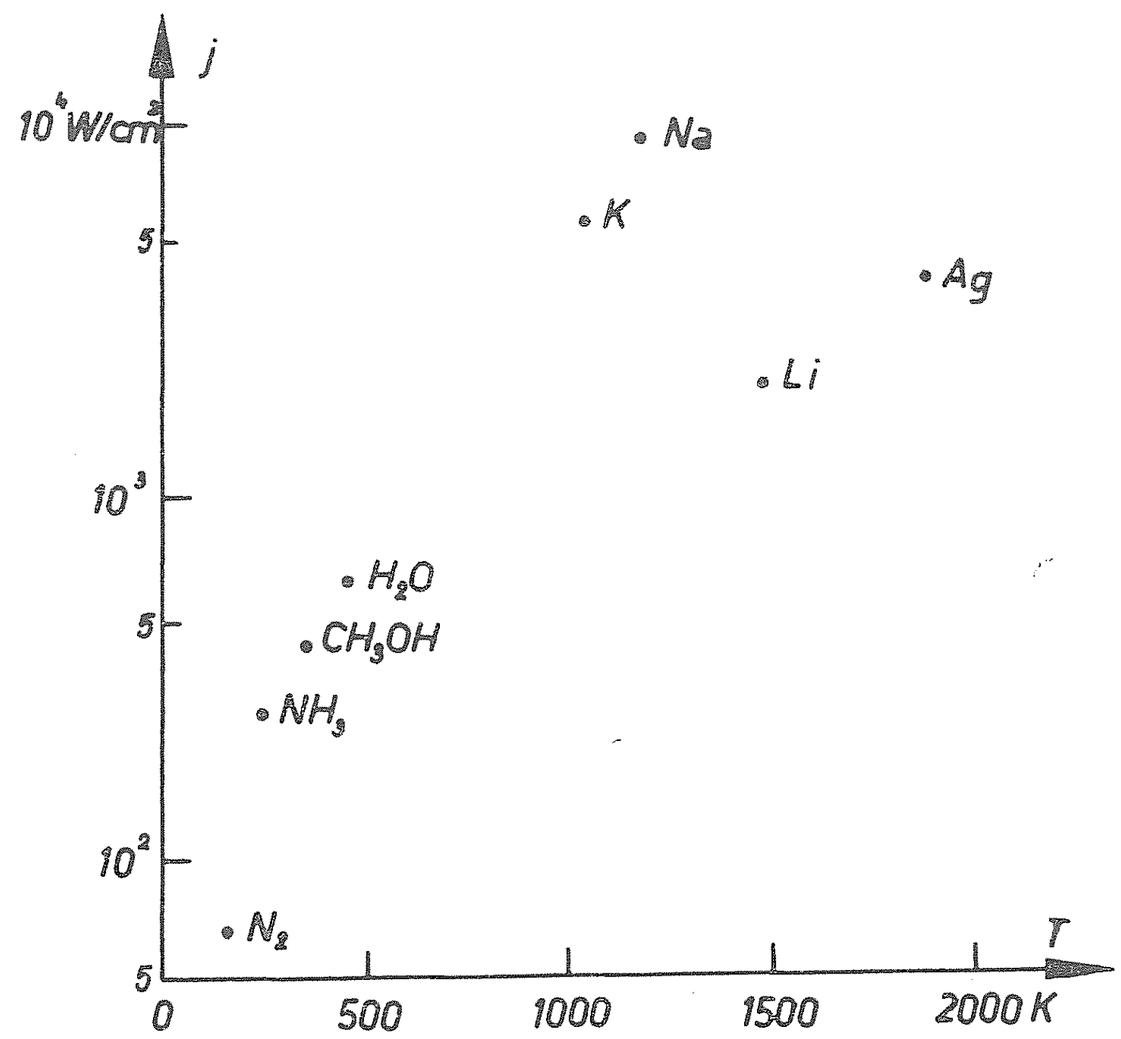
Ko kapljevina izpareva, se ugrezne v kapilare izparilnika in radij r_2 se zmanjša. Hkrati se poveča radij r_1 v kapilarah kondenzatorja zaradi utekočinjanja pare. Razlika kapilarnih tlakov vleče kapljevino k izparilniku.

Če je kondenzator nad izparilnikom ($z > 0$), teža pospešuje pretok kapljevine. V nasprotnem primeru ($z < 0$) se pri neki višini $|z_1|$ tok kapljevine ustavi. Zunaj gravitacijskega polja pa v omejitvi (1) odpade člen $\frac{1}{2}\rho g z r_2/\gamma$ ter dolžina in orientacija toplotnega vodnika ne vplivata na pretok kapljevine. Zato toplotne vodnike s pridom uporabljajo v umetnih satelitih.

Interval temperatur, na katerem je uporaben toplotni vodnik, določajo lastnosti kapljevine (sl. 2). Pri nizkih temperaturah omejuje prepustnost toplotnega toka majhna gostota masnega toka pare. Pri visokih temperaturah pa povzroča omejitev premajhna



Sl. 2: Toplotni tok P skozi toplotni vodnik je odvisen od temperature T (črtana ploskev). T_t — tališče, T_k — kritična temperatura. Različne vzroke za omejitev toplotnega toka podajajo krivulje: S — masni tok pare, W — prepustnost stenja za kapljevino, E — tok pare odvzema kapljevino iz stenja, B — izparevanje kapljevine v stenju



Sl. 3: Izmerjene gostote toplotnega toka j za različne kapljevine pri temperaturah, ki so navadno v rabi

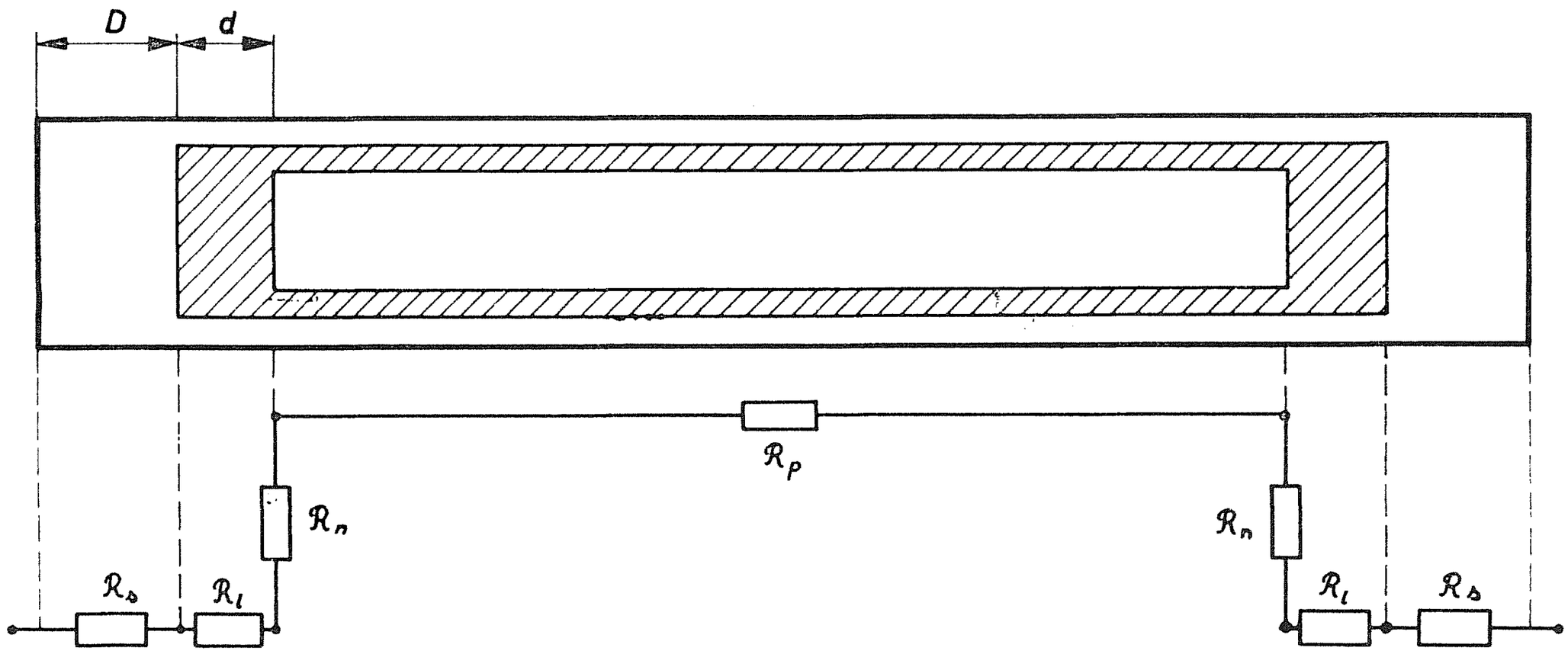
prepustnost stenja za kapljevino. Diagram (sl. 3) kaže največje izmerjene gostote toplotnega toka j za različne kapljevine [3]. Ker meri navadno tlak od 0,1 kp/cm² do 10 kp/cm², je omejena uporaba toplotnih vodnikov na primer z natrijem na interval od 650 °C do 1250 °C, z vodo od 45 °C do 180 °C, z amoniakom od —60 °C do 27 °C.

Primerjajmo toplotni vodnik z drugimi napravami za prenos toplote. Z litijem napolnjen toplotni vodnik s presekom 1 cm² pri temperaturi 1500 °C prevaja pri temperaturnem gradientu 0,1 K/cm toplotni tok 15 kW. Bakrena palica bi prevajala enak toplotni tok pri 40000-krat večjem temperaturnem gradientu. Pri nizkih temperaturah se čisti baker ne izkaže tako slabo: pri 10 K bi enak toplotni tok poganjal že 750-krat večji temperaturni gradient. Pri nekaterih jedrskih reaktorjih hladi sredico s konvekcijo talina natrija in kalija s temperaturno razliko 200 K med grelcem in hladilnikom. Pri hitrosti taline 1 m/s teče skozi 1 cm² preseka 15 kW. Prav tolikšen toplotni tok odda s sevanjem v prazen prostor ploščica s površino 1 cm², če jo segrejemo do temperature 6900 K.

Velika toplotna prevodnost toplotnih vodnikov ima dva vzroka. Dovedena toplota se spremeni v latentno toploto. Za poganjanje pare, ki nosi latentno toploto, pa zadostuje tlačni gradient, ki ga dosežemo že pri majhni razliki temperatur.

Toplotni upor

Prikladna količina pri obravnavi prenosa toplote je toplotni upor, ki ga vpeljemo kot $\mathcal{R} = \Delta T/P$. Pri tem razlika temperatur ΔT na krajiščih vodnika poganja po njem toplotni tok P. Upor toplotnega vodnika si mislimo sestavljen iz sedmih zaporedno vezanih delnih uporov (sl. 4). Opišimo podrobneje vsakega od njih in ocenimo njihovo velikost.



Sl. 4: Upor toplotnega vodnika kot vsota sedmih zaporedno vezanih delnih uporov. D je debelina stene, d pa debelina stenja pri izparilniku in pri kondenzatorju

Prva dva upora $\mathcal{R}_s$ in $\mathcal{R}_l$ ustrezata prehodu toplote skozi steno in skozi stenj, prepojen s kapljevino:

$$\mathcal{R}_s = D/\lambda_s S_i \qquad \mathcal{R}_l = d/\lambda_l S_i \tag{2}$$

λ je toplotna prevodnost, indeks l se nanaša na stenj, indeks s na steno izparilnika, S_i pa je površina izparilnika (glej sl. 4).

Upor $\mathcal{R}_n$ odraža bolj zapleteno dogajanje na meji kapljevina-para. Para in kapljevina imata enako temperaturo, če skozi vodnik ne teče toplotni tok. Pri prevajanju majhnih toplotnih tokov pa je razlika temperatur $T_2 - T_1$ na krajiščih vodnika sorazmerna z razliko tlakov $p_2 - p_1$. Velja namreč

$$p_2 - p_1 = Mhp_1/(RT_2^2)\,(T_2 - T_1) \tag{3}$$

M je kilomolska masa, h pa izparilna toplota.

Pri prenosu velikih toplotnih tokov pa mora biti izparevanje izdatno. To je mogoče doseči le, če pregrejemo kapljevino, tako da je temperatura kapljevine za ΔT večja od temperature pare. Gostota toplotnega toka, ki ga je treba dovesti za izparevanje kapljevine, je $j = \alpha\Delta T$. Koeficient α določijo z merjenjem. Pri znatnem izparevanju le s površine kapljevine dosežemo pri vodi temperaturno razliko le nekaj kelvinov, pri tekočih kovinah pa sto do dvesto kelvinov. Nasičeni parni tlak $p_s(T_2 + \Delta T)$ pri temperaturi pregrete kapljevine je večji od parnega tlaka pare nad kapljevino $p_s(T_2)$. Skozi mejo kapljevine in pare prehajajo molekule v vseh smereh. Nekaj jih gre iz kapljevine v paro, nekaj pa v nasprotni smeri. Tok molekul iz kapljevine v paro je $J_+ = S_i n \langle v \rangle/4 = S_i p_s(T_2 + \Delta T)\,(2\pi k T_2 m_0)^{-\frac{1}{2}}$. Tu smo uporabili enačbi kinetične teorije $n = p/kT$ in $\langle v \rangle = (8kT/\pi m_0)^{\frac{1}{2}}$, če je m_0 masa molekule. Pod korenom v izrazu za J_+ smo zanemarili ΔT v primeri s T_2. Tok molekul v nasprotni smeri je $J_- = S_i p_s(T_2)\,(2\pi k T_2 m_0)^{-\frac{1}{2}}$. Ko razliko obeh tokov $J_+ - J_-$ pomnožimo z maso molekule m_0 in izparilno toploto h, dobimo oceno za toplotni tok iz kapljevine v paro $P = S_i\, h\Delta p_s\,(2\pi R T_2/M)^{-\frac{1}{2}}$, če je $\Delta p_s = p_s(T_2 + \Delta T) - p_s(T_2)$.

Preglednica 1. Vrednosti $P/\Delta p_s$ za različne kapljevine pri vrelišču T in razliki tlakov $\Delta p_s = 1$ kp/cm²

Kapljevina	T	$P/\Delta p_s$
litij	1613 K	55 kW/kp cm^{-2}
cink	1180	18
natrij	1156	39
voda	373	21,5
etanol	351	13,5
amoniak	238	15,2

Preglednica 2. Približne vrednosti delnih uporov toplotnega vodnika z vodo

Delni toplotni upor	ocena
$\mathcal{R}_s$	10^{-1} K/W
$\mathcal{R}_l$	10
$\mathcal{R}_n$	10^{-5}
$\mathcal{R}_p$	10^{-8}
$\mathcal{R}_n$	10^{-5}
$\mathcal{R}_l$	10
$\mathcal{R}_s$	10^{-1}

Že pri majhnih tlačnih razlikah ΔP_s je toplotni tok P zelo velik (preglednica 1). Tlačno razliko povežemo s temperaturno z enačbo (3) in dobimo končno oceno za upor

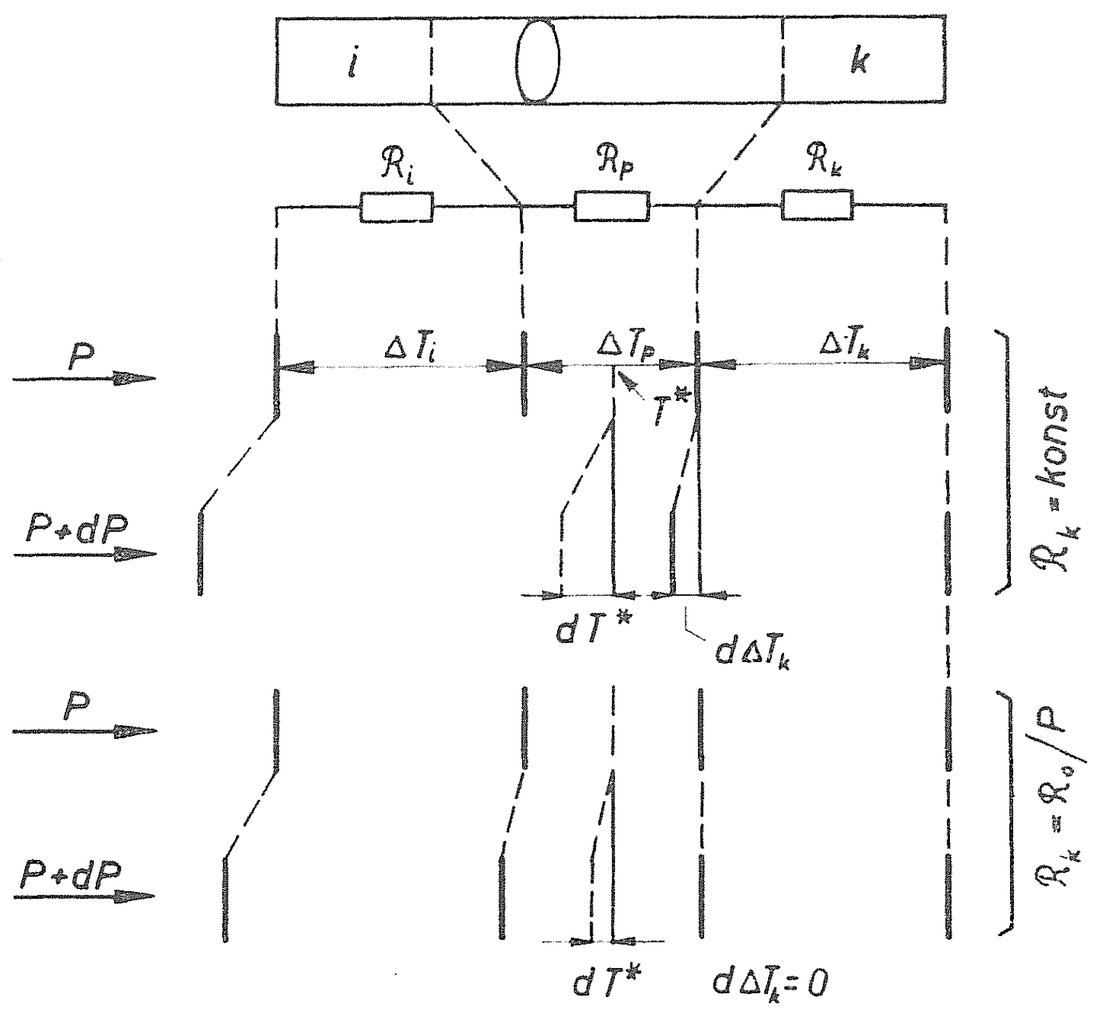
$$\mathcal{R}_n = \Delta T/P = (2R^3T_2^5/M^3)^{\frac{1}{2}}/S_i h^2 p_s(T_2) \tag{4}$$

pri majhni razliki Δp_s.

Nazadnje ocenimo še $\mathcal{R}_p$. Tok pare je posledica razlike nasičenih parnih tlakov $p_2 - p_1$. Nimamo opraviti z običajnim pretakanjem plina v cevi, saj so tu izviri in ponori v steni [2]*. Pri majhnih pretokih pare je $p_2 - p_1 = 4\eta l \Phi_V/\pi a^4$. Pri tem je Φ_V prostorninski tok pare ter η viskoznost, ρ gostota pare in l dolžina cevi. Tlačno razliko nadomestimo z razliko temperatur (3) in dobimo za toplotni upor pri pretoku pare:

$$\mathcal{R}_p = (T_2 - T_1)/P = RT_2^2 \cdot 4\eta l/\pi a^4 p_2 h^2 \rho \tag{5}$$

Drugi delni toplotni upori imajo enako obliko. V preglednici 2 so ocene za velikost posameznih delnih uporov toplotnega vodnika z vodo. Upori, ki izvirajo iz prenosa pare, so zanemarljivi v primeri z upori v steni vodnika in v stenju. Deset do tisočkrat večji od slednjih so upori v napravah za dovod toplote od zunaj, ki jih nismo opisali.



Sl. 5: Spreminjanje srednje temperature pare T^* pri konstantnem toplotnem uporu $\mathcal{R}_k$ in spreminjanje T^*, ko je $\mathcal{R}_k$ obratno sorazmeren s P

Toplotni vodniki s spremenljivo prevodnostjo

Nekateri toplotni vodniki imajo spremenljivo toplotno prevodnost. Pri njih je toplotni tok močno odvisen od srednje temperature pare T^* (sl. 5). *Temperaturna občutljivost* dP/dT^* takega toplotnega vodnika je velika. To pomeni, da ostane pri velikih spremembah toplotnega toka temperaturna razlika domala

* Pri izpeljavi vzdolžnega hitrostnega profila in tlačnega gradienta uporabimo kontinuitetno enačbo in Navier-Stokesovo enačbo za laminarni tok nestisljivega plina v cevi. Pri nastavitvi robnih pogojev za radialno in vzdolžno komponento hitrosti upoštevamo izvire v steni cevi. Pokaže se, da je gradient tlaka $\frac{1}{2}\beta z^2/l^2$. Tu je l dolžina cevi ter $\beta = -4$, če je stena izvir, in $\beta = -\pi^2$, če je stena ponor. Vzdolžni hitrostni profil je v prvem približku sorazmeren s $\cos[\pi/2(r/a)^2]$, če je stena izvir in je $2a$ premer cevi.

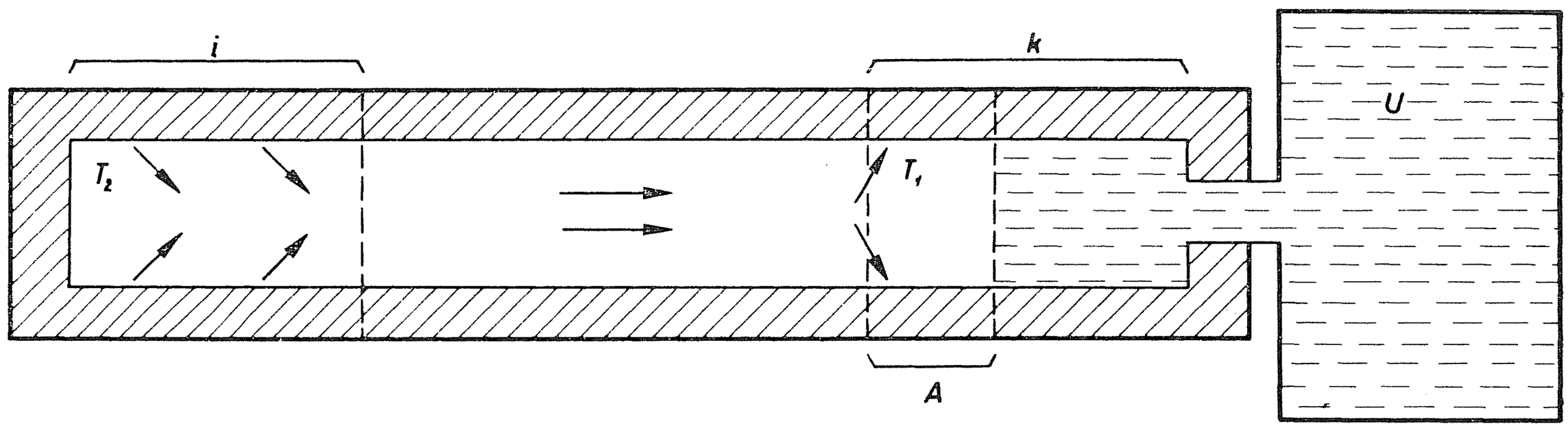
konstantna. Zanima nas, kaj povzroča veliko temperaturno občutljivost toplotnega vodnika. $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{R}_k$ in $\mathcal{R}_p$ naj bodo toplotni upori izparilnika, kondenzatorja in vmesnega prostora, po katerem teče para. Iz izpeljave za posamezne toplotne upore sledi, da sta upora $\mathcal{R}_i$ in $\mathcal{R}_k$ enaka, če sta enaki površini izparilnika in kondenzatorja: $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_k = \mathcal{R}_s + \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_n$. Ustrezne padce temperature izrazimo podobno kot pri električnem toku padce napetosti: $\Delta T_i = P\mathcal{R}_i$, $\Delta T_p = P\mathcal{R}_p$ in $\Delta T_k = P\mathcal{R}_k$. Predpostavimo, da so upori $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{R}_p$ in $\mathcal{R}_k$ neodvisni od toplotnega toka. Ko toplotni tok naraste za dP, se poveča srednja temperatura pare za (sl. 5) $dT^* = d\Delta T_k + \frac{1}{2}d\Delta T_p$. Temperaturna občutljivost je:

$$dP/dT^* = 1/(dT^*/dP) = 1/(d\Delta T_k/dP + \tfrac{1}{2}d\Delta T_p/dP) = 1/(\mathcal{R}_k + \tfrac{1}{2}\mathcal{R}_p)$$

Temperaturno občutljivost lahko povečamo z manjšanjem uporov $\mathcal{R}_k$ in $\mathcal{R}_p$.

Izpeljavo moramo ponoviti, če je toplotni upor $\mathcal{R}_k$ odvisen od toplotnega toka P. V tem primeru dobimo $dP/dT^* = [\mathcal{R}_k(P) + Pd\mathcal{R}_k(P)/dP + \frac{1}{2}\mathcal{R}_p]^{-1}$. Najmanjšo vrednost $\frac{1}{2}\mathcal{R}_p$ doseže obratna vrednost toplotne občutljivosti, ko sta spremenljiva člena enaka nič, to je pri $\mathcal{R}_k$ = konst/P. Takrat se temperatura kondenzatorja ne spreminja, saj je $\Delta T_k = P\mathcal{R}_k(P)$ = konst.

Toplotni tok, ki ga oddaja kondenzator, je sorazmeren z njegovo površino: $\mathcal{R}_k$ = konst/S_k. Površino kondenzorja lahko spreminjamo tako, da prostor s paro povežemo z rezervoarjem plina, ki se ne utekočini. Razlika temperatur $T_2 - T_1$ požene tok pare proti kondenzatorju in stisne dodani plin v del vodnika z nižjim tlakom (sl. 6). Efektivna



Sl. 6: Toplotni vodnik s spremenljivo toplotno prevodnostjo: A — aktivna površina kondenzatorja, U — rezervoar dodanega plina

površina kondenzatorja se zmanjša in postane zelo odvisna od tlaka pare. Ta je namreč eksponentno odvisen od temperature, dodani plin pa sledi plinski enačbi. Iz plinske enačbe izpeljemo, da mora biti prostornina dodanega plina $V = \Delta V/(T_2' p_1/T_1' p_2 - 1)$, če se za ΔV spremeni prostornina plina, ko naraste toplotni tok za $P_2 - P_1$. Pri tem se spremeni temperatura pare za $T_2 - T_1$, njen tlak za $p_2 - p_1$, temperatura plina pa za $T_2' - T_1'$. Vzemimo poenostavljen primer $T_2' = T_1'$ in $T_1 = T_2$, tako da je tudi $p_1 = p_2$. V tem primeru je prostornina dodanega plina mnogo večja od prostornine toplotnega vodnika. Ker prevaja slednji toploto pri konstantnem tlaku, se pokaže, da ima največjo toplotno občutljivost. Efektivna površina kondenzatorja je namreč sorazmerna s toplotnim tokom. S spreminjanjem prostornine dodanega plina torej spreminjamo toplotni upor vodnika. Masa dodanega plina pa določa temperaturo, pri kateri se začne prevajanje. Pri malo nižji temperaturi, ko prevajanje še ne nastopi, dodani plin ravno napolnjuje kondenzator in preprečuje utekočinjanje pare. Pri vodniku z največjo toplotno občutljivostjo, ki dela pri konstantnem tlaku 1 kp/cm², rabi za zbiralnik plina kar ozračje. Od nekdaj znane naprave za destilacijo so zgled takšnega toplotnega vodnika brez povratne vezi za kapljevino.

Uporaba

Povzemimo: toplotni vodniki se odlikujejo predvsem z veliko toplotno prevodnostjo. Izvir toplote in hladilnik sta lahko daleč vsaksebi. Toplotni vodnik je lahko transformator gostote toplotnega toka, kadar imata izparilnik in kondenzator različni površini. Te lastnosti toplotnih vodnikov s pridom uporabljajo. Uporabo zmogljivih izotopskih električnih generatorjev, v katerih radioaktivni izvir segreva enega izmed stikov termoelementa, je omogočila prav koncentracija toplotnega toka s toplotnim vodnikom. Grelcu sodobnega Stirlingovega stroja je treba dovajati toplotni tok več 100 kW pri temperaturi približno 800 °C. Potrebi po razmeroma majhni površini grelca in po velikih toplotnih tokovih najbolje ustreže toplotni vodnik s tekočim natrijem. S takšnim dovajanjem toplote je temperatura po vsej površini grelca domala konstantna. Tako se izognejo termičnim napetostim, ki bi jih povzročile velike temperaturne razlike na površini grelca, če bi ga ogrevali neposredno s plamenom. Šele s tovrstnim ogrevanjem je postal Stirlingov stroj konkurenčen drugim toplotnim strojem.

Z vesoljskih ladij je treba odvajati toploto s sevanjem. Hladilnik, ki ga sestavljajo na primer cevasti toplotni vodniki — površina le-teh sama seva — tehta le 8,5 kg in seva 50 kW pri 730 °C. Podobni hladilniki, ki sevajo pri 120 °C, hladijo elektronske naprave v satelitih.

Čeprav so toplotne vodnike na začetku uporabljali izključno pri vesoljskih raziskavah, so se do danes že razširili na druga področja, na katerih je pomemben prenos toplote; uporabljajo se predvsem v strojništvu, elektroniki, metalurgiji in v gospodinjstvu.

LITERATURA

[1] G. M. Grover, T. P. Cotter, G. F. Ericson, *Structures of Very High Thermal Conductance*, J. Appl. Phys., **35** (1964) 1990.

[2] W. E. Wageman, F. A. Guevara, *Fluid Flow through a Porous Channel*, Phys. Fluids, **3** (1960) 878.

[3] G. A. A. Asselman, D. B. Gren, *Das Wärmerohr*, Philips Technische Rundschau, **33** (1973/74) (4, 5).

[4] C. H. Jr. Dutcher, M. R. Burke, *Heat pipes — a cool way to cool circuitry*, Electronics, **16** (1970) 94.

NOVE KNJIGE

Mirko Dobovišek, Milan Hladnik in Matjaž Omladič, Rešene naloge iz analize I, 1. in 2. del. 88 str., cena 25.— din (20.— din)

Zbirka nalog iz analize I obsega okrog petsto dve nalogi. Naloge so razdeljene po poglavjih: funkcije, realna in kompleksna števila, metrični prostori, zaporedja, limita funkcije, grafi, zveznost, kompaktnost, zaporedja funkcij, odvod, določeni integral, logaritemska in eksponentna funkcija, uporabe integralskega računa, posplošeni integral, integracijske metode, Taylorjeva vrsta, številske vrste, funkcijske vrste, krivulje v polarni in parametrični obliki, funkcije več spremenljivk. Pri vseh nalogah so podane rešitve, kjer je potrebno, je dodano navodilo za reševanje. Naloge so izbrane in sestavljene tako, da dobro ponazarjajo pojme in izreke iz omenjenih področij analize. Zbirka bo zlasti koristna študentom prvega letnika; zanimiva bo pa tudi drugim, ki se srečujejo z obravnavano snovjo.

Jože Grasselli

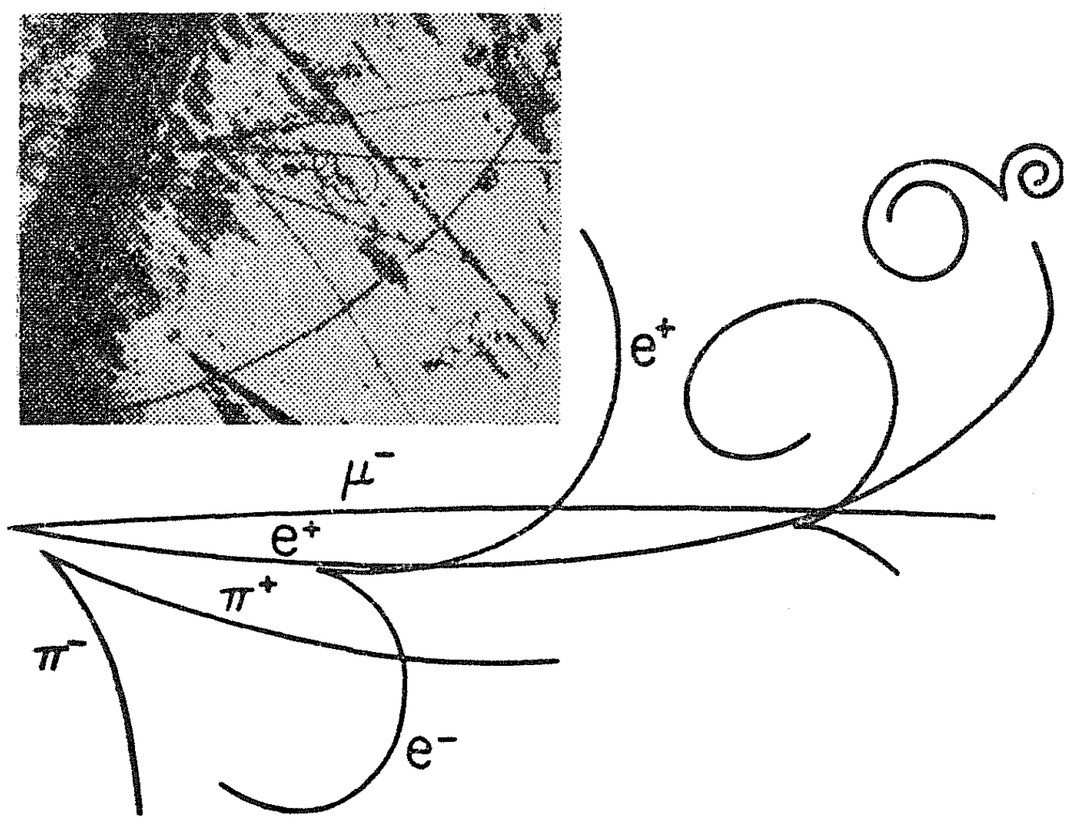
ČAROBNI DELCI

Odkar so pred dvema letoma odkrili mezon Ψ, imenovan tudi mezon J, niso ponehale razprave o *čaru*. To je novo aditivno kvantno število, podobno čudnosti. Zanj velja ohranitveni zakon pri močni in elektromagnetni interakciji, pri šibki interakciji pa ne. V modelu kvarkov zahteva novo kvantno število, da je treba dodati kvarkom d, u in s s čarom 0 četrti kvark c s čarom 1 [1]. Mezon Ψ s spinom 1 in čarom 0 naj bi bil *ortočarmonij*, to je sestav kvarka c in njegovega antikvarka $\bar{c}$ [2].

Iz teoretičnih razlogov sta J. Bjorken in S. L. Glashow načela vprašanje o čaru in četrtem kvarku že precej časa pred odkritjem mezona Ψ. Ugotovila sta, da bi tako dosegli simetrijo med kvarki in leptoni (1964). Štirim kvarkom bi ustrezali štirje leptoni ν_e, e^-, ν_μ, μ^-. S. L. Glashow, J. Iliopoulos in L. Maiani pa so predlagali vpeljavo četrtega kvarka, da bi rešili v zvezi s šibko interakcijo vprašanje tako imenovanega *nevtralnega toka, ki spreminja čudnost* (1970). Nekateri pojavi, pri katerih sodelujejo hadroni in leptoni in pri katerih se skupni naboj hadronov ne spremeni, skupna čudnost pa se spremeni za 1, so bili namreč mnogo redkejši, kakor so pričakovali. To so bili na primer razpadi $K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}$, $K^+ \rightarrow \pi^+ + e^+ + e^-$ in $K^\circ \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, katerih deleži med razpadi kaonov so bili nepričakovano majhni, manjši kot milijonina. Če bi obstajal četrti kvark, bi se prejšnji poti, po kateri potekajo ti pojavi, pridružila še ena. Z interferenco bi se lahko uničila prispevka, ki ustrezata obema potema.

Dokončni dokaz o obstoju čara in četrtega kvarka s čarom bi dali *čarobni hadroni*. To so mezoni in barioni, ki se razlikujejo od doslej znanih po tem, da imajo od nič različen čar. Nekaj poskusov je namigovalo na obstoj takih hadronov. Ob protonskem sinhrotronu za 300 GeV Fermijevega državnega laboratorija FNAL v Batavii (ZDA) so s števci preiskali reakcije med mionskimi nevtrini in nukleoni. Zanimali so se za tiste, pri katerih sta v razmiku, manjšem kot nekako 10^{-12} s nastala poleg drugih delcev dva miona. Eden od obeh naj bi nastal skupaj s čarobnim hadronom po šibki interakciji, drugi pa ob razpadu čarobnega hadrona po šibki interakciji. Nobeden od doslej znanih hadronov s čarom 0 ne razpade po šibki interakciji s tako kratkim razpadnim časom. Vendar je bilo mogoče reakcije te vrste tolmačiti tudi drugače, na primer z nastankom in razpadom doslej neznanega *težkega leptona* s precej večjo lastno maso od mionove.

Do enakega sklepa so prišli pri nekoliko zanesljivejših poskusih z mehurčno celico. V evropskem središču CERN v Ženevi so preiskali reakcije mionskih nevtrinov z nukleoni v mehurčni celici Gargamelle, napolnjeni s freonom. Halogenirani ogljikovodik so upo-



Sl. 1: Povečan izrez iz fotografije domnevnega nastanka in razpada čarobnega delca: $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + e^- + \nu_e + K^\circ +$ nevtralni delci. Vidne so sledi negativnega miona, pozitrona ter pozitivnega in negativnega piona, na katera razpade nevtralni kaon. Fotografija je ena od štirih podobnih iz množice 1500 fotografij, ki so jih dobili s petmetrsko mehurčno celico. V njej je bila mešanica vodika in neona (neona je bilo za eno petino prostornine), J. von Krogh in sodelavci, *Observation of $\mu^- e^- K_s^\circ$ Events Produced by a Neutrino Beam*, Phys. Rev. Letters **36** (1976) 710

rabili namesto vodika, da bi bila gostota jeder večja in reakcije verjetnejše. Opazili so štiri reakcije, pri katerih sta izhajali iz ene točke poleg drugih sledi sled negativnega miona in sled pozitrona. Mion naj bi nastal skupaj s čarobnim hadronom po šibki interakciji. Ta hadron naj bi imel sorazmerno dolg razpadni čas — ker razpade po šibki interakciji, o čemer priča pozitron — a vendar tako kratkega, da ne bi zapustil vidne sledi, saj sta izvirali sledi miona in pozitrona navidez iz iste točke.

Podoben poskus so napravili v Batavii. Uporabili so veliko mehurčno celico, napolnjeno z mešanico vodika in neona. Tudi v tem primeru so opazili več reakcij med mionskimi nevtrini in nukleoni z omenjenimi značilnostmi (sl. 1).

Pri naštetih poskusih je bila verjetnost za reakcije zelo majhna. Uporaben dogodek v mehurčni celici je prišel na primer na stotisoč fotografij ali več. Prednost teh reakcij pa je v preglednosti, saj pri reakcijah te vrste po šibki interakciji lahko nastane en sam hadron s čarom, ker se čar ne ohrani. Pri reakcijah po močni ali po elektromagnetni interakciji pa se čar ohrani in nastane par hadronov, od katerih ima prvi čar 1 in drugi čar —1. Za to je potrebna sicer večja energija, a tudi verjetnost je večja.

Pred nedavnim so sporočili — to poročilo je zašlo tudi v naše dnevnike — da je uspelo zanesljiveje ugotoviti obstoj čarobnega hadrona in prvič določiti njegovo lastno energijo [3], [4]. Poskus so napravili ob stanfordskem nakopičevalniku za pozitrone in elektrone SPEAR. Skupina 41 fizikov pod vodstvom G. Goldhaberja in F. Pierra je preiskovala reakcije

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{hadron s čarom } 1+ \text{ hadron s čarom } -1 + \ldots \qquad (1)$$

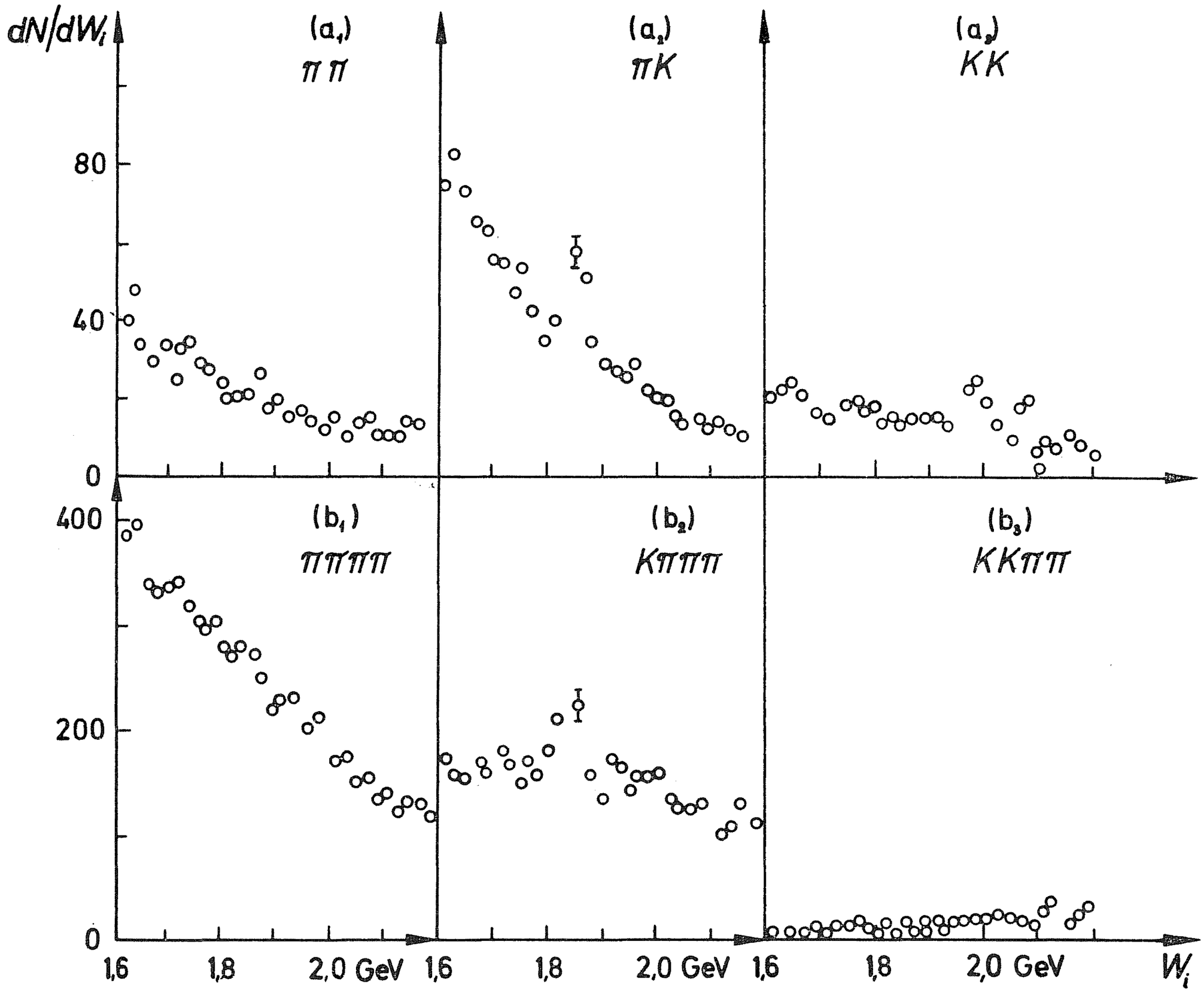
Omejili so se na nevtralne mezone in so se zanimali za razpade

$$\text{mezon}^\circ \text{ s čarom } +1 \text{ ali } -1 \longrightarrow \begin{cases} \pi^+ + K^- \text{ ali } \pi^- + K^+ \\ \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + K^- \text{ ali } \pi^- + \pi^+ + \pi^- + K^+ \end{cases} \qquad (2)$$

Naloga, ki so se je lotili, ni bila lahka. Magnetni spektrometer ob delu nakopičevalnikove cevi, kjer se križata curek pozitronov in curek elektronov, je namreč le slabo razločeval kaone od pionov. To pomanjkljivost so precej odpravili z dodatnim obročem 48 scintilacijskih števcev. Ti števci s kristali v obliki prizem z razsežnostmi 2,5 cm × 20 cm × × 260 cm so, razvrščeni po tvornicah v plašču valja s premerom 3 m, obdajali druge števce magnetnega spektrometra. Na vsaki od obeh osnovnih ploskev so imeli fotopomnoževalko. Sunki s fotopomnoževalk so dali dodatne podatke o času preleta za delce, ki so nastali pri reakcijah ob osi obroča števcev. Pioni so namreč dospeli do števcev za kake pol nanosekunde pred kaoni z enako kinetično energijo.

Časovna ločljivost števcev je merila okoli 0,4 ns. Zato kakega sunka niso mogli pripisati naravnost pionu ali naravnost kaonu. Pač pa so sunku, ki ga je zaznal magnetni spektrometer in ki je ustrezal predpisanim pogojem, pripisali določeno verjetnost, da gre za pion, in določeno verjetnost, da gre za kaon. Verjetnosti so na koncu ponovno normirali in tako za dvojice pozitivnega in negativnega delca določili verjetnost, da gre za dva piona ali za pion in kaon ali za dva kaona. Podobno so ravnali pri nevtralnih četvericah delcev $\pi\pi\pi\pi$, $\pi\pi\pi K$ in $\pi\pi KK$.

Preiskali so 29 tisoč reakcij (1) s polno energijo med 3,9 GeV in 4,6 GeV. S tem je mišljena skupna polna energija pozitrona in elektrona v težiščnem sistemu, ki se v tem primeru ujema z laboratorijskim. Izmerili so porazdelitev vseh mogočih nevtralnih dvojic in vseh mogočih nevtralnih četveric delcev po invariantni energiji, to je po skupni polni energiji dvojic ali četveric v njihovem težiščnem sistemu. V dveh od šestih takih spektrov in sicer v spektru dvojic π^+K^- ali π^-K^+ in v spektru četveric $\pi^+\pi^-\pi^+K^-$ ali $\pi^-\pi^+\pi^-K^+$ so opazili izrazita vrhova (sl. 2). Oba vrhova sta ležala v okviru nezanesljivosti pri merjenju $\pm 0{,}015$ GeV pri enaki invariantni energiji 1,865 GeV. Zgornja meja za razpolovno širino



Sl. 2: Spektri delcev, ki so nastali pri reakcijah med pozitroni in elektroni v stanfordskem nakopičevalniku. Na ordinatno os je naneseno število vseh možnih kombinacij nevtralnih dvojic (a) in nevtralnih četveric (b) na 20 MeV širokih intervalih v odvisnosti od invariantne energije W_i: $\pi^+ + \pi^-(a_1)$, $\pi^+ + K^-$ in $\pi^- + K^+(a_2)$, $K^+ + K^-(a_3)$ ter $\pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^-(b_1)$, $\pi^+ + \pi^- + \pi^+ + K^-$ in $\pi^- + \pi^+ + \pi^- + K^+(b_2)$, $\pi^+ + \pi^- + K^+ + K^-(b_3)$. Vrhova pri invariantni energiji 1,865 GeV v spektrih (a_2) in (b_2) pričata o nastanku in razpadu nevtralnih mezonov D° in $\overline{D^\circ}$ s čarom 1 in —1 [4]

obeh vrhov je merila 40 MeV. V spektrih dvojic $\pi^+\pi^-$ ali K^+K^- in četveric $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ ali $\pi^+\pi^-K^+K^-$ ni bilo takih vrhov. Prav tako ni bilo vrhov v spektrih nabitih dvojic ali četveric, na primer π^+K^+.

Preiskali so še spektre hadronov, ki so nastali pri reakciji (1) skupaj z mezonom (2). Po teh je bilo mogoče sklepati, da so nastali skupaj z mezonom z lastno energijo 1,86 GeV še mezoni z lastno energijo okoli 2 GeV. Mezoni z manjšo lastno energijo kot 1,86 GeV, ki bi razpadli po enačbi (2), niso nastali.

Vse to kaže, da nastane pri reakcijah med pozitroni in elektroni nevtralni mezon z lastno energijo okoli 1,86 GeV. Razpade po enačbi (2) z razpadnim časom, daljšim kot $\hbar/40\ \mathrm{MeV} = 1{,}5 \cdot 10^{-23}$ s, a krajšim od razpadnega časa mezonov s čarom 0 po šibki interakciji. Da potekajo razpadi (2) po šibki interakciji, sklepamo po spremembi čudnosti: kaže, da je na začetku čudnost enaka nič, na koncu pa je —1, če nastane pozitivni kaon, in 1, če nastane negativni kaon. To pojasnimo takole: po reakciji (1) je nastal mezon D° s čarom 1, ki ga sestavljata kvark c in antikvark $\bar{u}$, ali mezon $\overline{D^\circ}$ s čarom —1, ki ga sestavljata kvark u in antikvark $\bar{c}$. Opazovani razpadi ustrezajo prehodu vezanega kvarka c ali vezanega antikvarka $\bar{c}$ v vezani kvark s ali vezani antikvark $\bar{s}$. Po pričakovanju je to najpogostejši prehod kvarkov s čarom pri razpadih po šibki interakciji.

Izmerjena lastna energija mezona D° ali $\overline{D^\circ}$ se dobro ujema z napovedjo *gradientne teorije močne interakcije* (1,83 ± 0,03) GeV za lastno energijo najlažjega mezona s čarom

± 1 in s spinom 0 [5]. Merjenja niso tako dramatično potrdila napovedi te teorije, kot je odkritje bariona Ω^- potrdilo simetrijo SU (3) [6]. Ta teorija tudi ni naletela na tako nedeljeno priznanje kot simetrija SU (3). Vseeno pa je tako zanimiva, da jo bomo orisali v naslednji novici [7].

Našteti razlogi kažejo, da je domneva o čaru in o štirih kvarkih uspešna. Pred izidom poročila se je zdelo že nenavadno, da še niso zasledili čarobnih hadronov pri reakcijah pozitronov in elektronov, saj pri tem izdatno nastajajo mezoni Ψ, sestavljeni iz čarobnih kvarkov. Zdaj je jasno, zakaj čarobnih hadronov niso odkrili prej. Magnetni spektrometer je preslabo razločeval kaone od pionov. Poleg tega čarobni hadroni večinoma razpadejo na več kot dva delca, magnetni spektrometer pa je najpripravnejši za zaznavanje dveh delcev.

Po najnovejših vesteh so našli tudi nabita različka mezonov D° in $\overline{D^\circ}$ [8]. To sta pozitivni mezon D^+ s čarom 1, ki ga sestavljata kvark c in antikvark $\bar{d}$, in negativni mezon D^- s čarom —1, ki ga sestavljata kvark d in antikvark $\bar{c}$. Njuni razpadi odločneje potrjujejo domnevo o čaru kot razpad nevtralnih čarobnih mezonov. Če se pri razpadih čarobnih hadronov po šibki interakciji zares spremeni čarobni kvark c v čudni kvark s, so nekateri razpadi dovoljeni, drugi, na videz podobni, pa ne. Tako nastane na primer nevtralni antikaon $\overline{K^\circ}$ iz kvarka s in antikvarka $\bar{d}$, ko se kvark c spremeni v kvark s. Nevtralnega antikaona ni mogoče neposredno zaznati, zato je zanimivejši razpad, pri katerem spremlja spremembo kvarka c v kvark s nastanek kvarkovskega para $u\bar{u}$. Antikvark $\bar{u}$ zamenja antikvark $\bar{d}$, tako da nastane negativni kaon iz kvarka s in antikvarka $\bar{u}$, antikvark $\bar{d}$ in kvark u pa se združita v pozitivni pion. Da se ohrani naboj, mora ob tem nastati na primer še en pozitivni pion. Razpad

$$D^+ \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^+$$

je tedaj dovoljen. Na videz podobni razpad $D^+ \rightarrow K^+ + \pi^+ + \pi^-$ pa ni dovoljen. Pri njem bi namreč moral preiti čarobni kvark c v čudni antikvark $\bar{s}$, ki sestavlja poleg kvarka u pozitivni kaon. Skladno s to napovedjo so opazili razpad pozitivnih mezonov D^+ na negativni kaon in dva pozitivna piona, niso pa opazili razpada na pozitivni kaon in pionski par.

Pred kratkim so iz Fermijevega državnega laboratorija sporočili, da so zasledili tudi prvi čarobni barion. To je barion z lastno energijo 2,26 GeV, ki je nastal pri obstreljevanju jeder berilija s fotoni z visoko energijo. Imel je negativni naboj, njegovega različka s pozitivnim nabojem pa niso našli. Po vsej verjetnosti je bil to negativni antibarion, ki so ga sestavljali antikvarki $\bar{u}$, $\bar{d}$ in $\bar{c}$. Razpadel je na delec antilambda, dva negativna piona in en pozitivni pion. Pri tem razpadu se je antikvark $\bar{c}$ — po napovedi — spremenil v čudni antikvark $\bar{s}$, saj sestavljajo nevtralni delec antilambda antikvarki $\bar{u}$, $\bar{d}$ in $\bar{s}$.

Kot je po odkritju čudnosti 1953 napočilo obdobje čudnih hadronov, kaže, da bo zdaj napočilo obdobje čarobnih hadronov. Optimisti napovedujejo, da bo mogoče kmalu vsaj okvirno razumeti spektroskopijo hadronov. Pripravljajo se že na naslednji korak, na spektroskopijo leptonov in kvarkov, v kateri lastne energije leptonov in kvarkov ne bodo več podatki.

Janez Strnad

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Kvarki*, Obzornik mat. fiz. **12** (1965) 76; *Model šestih kvarkov*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 113.

[2] B. Golli, *Delci ψ v modelu kvarkov*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 193.

[3] *Naked charm revealed at Stanford*, New Scientist **70** (1976) 413; *SPEAR confirms charm discovery*, New Scientist **70** (1976) 636.

[4] G. Goldhaber, F. M. Pierre in sodelavci, *Observation in* e^+e^- *Annihilation of a Narrow State at* 1865 *MeV/c*^{2} *Decaying to* $K\pi$ *and* $K\pi\pi\pi$, Phys. Rev. Letters **37** (1976) 255.

[5] A. De Rujula, H. Georgi, S. L. Glashow, *Hadron Masses in a Gauge Theory*, Phys. Rev. D **12** (1975) 147.

[6] J. Strnad, *Odkritje delca Ω^-*, Obzornik mat. fiz. **11** (1964) 26.

[7] J. Strnad, *Gradientna teorija močne interakcije*, Obzornik mat. fiz. **24** (1976) 20.

[8] *SPEAR hits the jackpot with two charged charmsters*, New Scientist **71** (1976) 173; *Chicago physicists come on with a charmed baryon*, New Scientist **71** (1976) 282; F. E. Close, *Iliopoulos wins his bet*, Nature **262** (1976) 537.

PREJELI SMO V OCENO

G. I. Marchuck, Methods of Numerical Mathematics, Applications of Mathematies, vol. 2, Springer Verlag, Berlin 1975, 316 p., DM 72,80

Knjiga je izšla pri založbi Springer-Verlag leta 1975 v zbirki Applications of Mathematics kot prevod iz ruščine. Avtor knjige je eden najbolj znanih sovjetskih numeričnih matematikov, ki se ukvarja predvsem z uporabo matematičnih metod pri reševanju znanstvenih problemov na področjih, kot so reaktorska in jedrska fizika, meteorologija in hidrodinamika. Akademik G. I. Marčuk je profesor na univerzi v Novosibirsku in direktor računskega centra sibirske podružnice sovjetske akademije znanosti.

Vsebinska osnova knjige so avtorjeva predavanja, v zadnjih letih na univerzi v Novosibirsku. Avtor se je osredotočil na obravnavanje tistih zapletenih problemov iz matematične fizike, ki se dajo med reševanjem prevesti na preprostejše in teoretično dobro obdelane probleme, ki omogočajo učinkovito reševanje s sodobnimi računalniki. Knjiga je namenjena znanstvenikom pa tudi inženirjem, ki imajo solidno osnovo za reševanje praktičnih problemov, pogrešajo pa sistematično znanje na področju numerične matematike in bolj splošen teoretični okvir.

Poglavja v knjigi so tale: Osnove teorije diferenčnih shem. Metode za konstrukcijo diferenčnih shem za diferencialne enačbe. Metode za reševanje stacionarnih problemov matematične fizike. Metode za reševanje nestacionarnih problemov. Numerične metode za nekatere inverzne probleme. Najpreprostejši problemi matematične fizike. Numerične metode v teoriji sevalnega prenosa. Pregled metod numerične matematike.

Zadnje poglavje je razširjeno predavanje, ki ga je imel avtor na svetovnem kongresu matematikov v Nici leta 1970. Knjiga ima 316 strani. Seznam literature obsega 435 del.

Zvonimir Bohte

Günter Schorn, Mengen und Algebraische Strukturen, R. Oldenbourg Verlag München, Wien 1976, 193 strani

Nemcem pripada ne ravno zavidljiva zasluga, da so med prvimi, če že ne prvi, uvedli tako imenovano »novo« matematiko v osnovne šole. Negativna kritika načina tega poučevanja je danes že tudi v Nemčiji nasploh sprejeta. Namen pričujoče knjige pa je podoben poskus na malo višjem nivoju. Njen podnaslov je namreč Osnove moderne matematike za naravoslovje in tehniko na visokih in visokih strokovnih šolah, obravnava pa v dveh poglavjih teorijo množic in algebrske strukture. Vse kaže tako, da tudi ta poizkus ne bo uspešen. Z že dobro znanimi »pripomočki« — puščicami, tabelami in Vennovimi diagrami nam avtor zapleteno in presenetljivo nesistematično predstavi osnovne pojme teorije množic in temeljne algebrske strukture. V potrdilo naj za zgled omenim le tale nenavadni vrstni red obravnave: funkcije — moč množic — enakost množic — unija in presek množic — kartezični produkt — ekvivalenčna relacija. Knjiga preseneča še toliko bolj, ker so v dodani bibliografiji navedena nekatera izvrstna — razume se, da tudi nemška — dela iz teorije množic in algebre.

Niko Prijatelj

GRADIENTNA TEORIJA MOČNE INTERAKCIJE

Pred kakima dvema desetletjema, ko so začeli fiziki podrobneje spoznavati močno interakcijo med nukleonoma, so bili presenečeni nad njeno zapletenostjo in raznoličnostjo. Že tedaj so nekateri trdili, da te interakcije ne smemo vzporejati z električno silo, na primer med protonom in elektronom, ampak z bolj zapleteno interakcijo med na zunaj nevtralnima sestavljenima delcema, na primer z van der Waalsovo silo med molekulama. Zdaj je pred nami začetna oblika teorije, ki se ravna po tej zamisli. Teorija si šele utira pot in bo morda doživela še kakšne spremembe. Vendar je že zdaj dosegla nekaj uspehov, tako da kaže o njej na kratko poročati.

Teorija gradi na točkastih kvarkih s spinom $\frac{1}{2}$ in barionskim številom $\frac{1}{3}$. Navadne hadrone sestavljata kvark u z nabojem $\frac{2}{3}e_0$ in kvark d z nabojem $-\frac{1}{3}e_0$, oba s čudnostjo 0 in čarom 0. Za čudne hadrone je treba dodati še čudni kvark s z nabojem $-\frac{1}{3}e_0$ s čudnostjo -1 in čarom 0, za čarobne hadrone pa še čarobni kvark c z nabojem $\frac{2}{3}e_0$ s čarom 1 in čudnostjo 0. Pri višjih energijah bo verjetno treba vključiti še nove kvarke. Kvarki nastopajo v treh barvah: »rdeči«, »modri« in »zeleni«. A vsi hadroni so beli, to je po barvi nevtralni. Kvantno število *barva* ima tu podobno vlogo kot naboj pri elektromagnetni interakciji. Barione sestavljajo po trije kvarki, antibarione po trije antikvarki (v obeh primerih po eden vsake barve), mezone pa po en kvark in en antikvark.

Med kvarkom in kvarkom ali kvarkom in antikvarkom deluje zelo močna sila, ki jo posredujejo virtualni *gluoni*. To so delci polja zelo močne sile brez lastne mase in s spinom 1, ki nastopajo v osmih različnih vrstah in v treh različnih barvah. Zelo močna sila ustreza elektromagnetni sili med nabitima delcema in virtualni gluoni ustrezajo virtualnim fotonom: oboji so brez lastne mase in imajo spin 1.

Zelo močne interakcije ne poznamo v podrobnosti. Poskusi pa kažejo, da je pri velikih gibalnih količinah kvarkov in majhnih razdaljah šibka in odvisna od spinov. Če naraste gibalna količina čez vsako mejo, postane sila zanemarljivo majhna. Tej lastnosti pravimo *asimptotska prostost*. Zaradi nje se zdijo kvarki v hadronu za delec z veliko gibalno količino nevezani. To se sklada z merjenji neprožnega sipanja leptonov z zelo veliko energijo na hadronih, na primer elektronov na protonih. Nasprotno pa je sila pri majhnih gibalnih količinah in velikih razdaljah močna, neodvisna od spina in najbrž tudi od razdalje. To lastnost imenujemo *infrardečo sužnost*. Zaradi nje ni prostih kvarkov in prostih gluonov, sploh stanj, ki bi jim lahko določili barvo. Preden namreč dovedemo kvarku v hadronu dovolj energije, da ga znatno odmaknemo od drugih kvarkov, se dovedena energija porabi za nastanek pionov in drugih mezonov. Vezani kvarki imajo različne lastne energije, ki jih vzame teorija za podatke.

*Gradientno teorijo močne interakcije** naslonimo na gradientno teorijo elektromagnetne interakcije, to je na kvantno elektrodinamiko. Teorijo imenujejo večkrat tudi *kvantno kromodinamiko* po zgledu kvantne elektrodinamike, ker ima pač barva podobno vlogo kot naboj. V njej uporabimo nekatere prijeme in nastavke elektrodinamike. Nerelativistični približek te teorije so precej podrobno izdelali J. De Rujula, H. Georgi in S. L. Glashow [1]. Hamiltonko za kvarke v hadronu so zapisali v obliki

$$H = D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) + \sum_i (m_i c^2 + \mathbf{p}_i^2/2m_i) + \hbar c \sum_i \sum_{j<i} (\alpha q_i q_j + k\alpha_s) S_{ij}$$

---

* Ime izvira od *gradientne transformacije*, proti kateri so invariantne enačbe klasične elektrodinamike. V njih lahko nadomestimo četverec potenciala $A = (\mathbf{A}, \Phi/c)$ s četvercem $A + \Box\chi$, ki mu je dodan četverni *gradient* poljubne skalarne funkcije χ, ne da bi se spremenili končni rezultati. $\mathbf{A}$ je vektorski in Φ skalarni potencial, $\Box = (\nabla, \partial/c\partial t)$ in c hitrost svetlobe. S to transformacijo preide vektorski potencial $\mathbf{A}$ v $\mathbf{A} + \nabla\chi$ in skalarni potencial Φ v $\Phi - \partial\chi/\partial t$.

Prvi člen zajema potencialno energijo kvarkov zaradi zelo močne sile z dolgim dosegom, ki veže kvarke v hadron. Drugi člen obsega skupno lastno in skupno kinetično energijo kvarkov v hadronu. Tretji člen vsebuje dva prispevka. Obema je skupen tako imenovani *Fermi-Breitov nastavek* S_{ij}, v katerem nastopa kot prvi statični člen $1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, nadaljnji členi pa izvirajo od interakcije med gibalnima količinama obeh delcev, med spinom enega izmed njiju in tirno vrtilno količino drugega (v elektrodinamiki privede ta člen do sklopitve spin-tir in do fine razcepitve), med spinoma obeh delcev (v elektrodinamiki privede ta člen do hiperfine razcepitve) ... Prvi prispevek $\hbar c \alpha q_i q_j S_{ij}$ s konstanto fine strukture α (s sklopitveno konstanto elektromagnetne interakcije) in kvantnima številoma nabojev q_i in q_j sam opiše potencial elektromagnetne interakcije v celoti. Dodatni drugi člen $\hbar c k \alpha_s S_{ij}$ s sklopitveno konstanto zelo močne interakcije α_s pa opiše potencial zelo močne interakcije s kratkim dosegom. (Potencial te interakcije z dolgim dosegom je zajet že v prvem členu.) Koeficient k je enak $-\frac{4}{3}$ za kvark in antikvark v mezonu ter $-\frac{2}{3}$ za kvark in kvark v barionu ali za antikvark in antikvark v antibarionu.

Prvima dvema členoma hamiltonke ustrezajo lastna stanja degeneriranih hadronskih supermultipletov v razširjeni simetriji SU (6) [2], če vzamemo, da imajo vsi kvarki enako lastno energijo. Najnižji supermultiplet mezonov združuje 36 stanj, najnižja supermultipleta barionov pa 56 in 70 stanj. Prispevek tretjega člena in različnih mas kvarkov upoštevamo v teoriji motenj v prvem redu. Rezultati so seveda samo približni. Kratek premislek pokaže, kolikšno natančnost smemo pričakovati od računov. Razlika lastnih energij med različnimi supermultipleti SU (6) z enako parnostjo meri kak GeV, na primer N (1780) — — N (940), razlika lastnih energij med člani istega supermultipleta zaradi različnih lastnih energij kvarkov in zaradi močne hiperfine razcepitve pa sto do dvesto MeV, na primer K* (892) — ρ (770) ali Σ^* (1385) — Σ (1190). Po tem si lahko obetamo le na 10% do 20% zanesljive rezultate.

V prvem redu teorije motenj izrazimo matrični element operatorja lastne energije s preprostejšimi matričnimi elementi, ki pa jih tudi ne poznamo. Zato zapišemo enačbe za vse mogoče delce, za katere razpolagamo z eksperimentalnimi podatki, in iz dobljenega sistema enačb odpravimo neznane matrične elemente. Ker je delcev in s tem enačb več kot neznanih matričnih elementov, dobimo tako zveze med lastnimi energijami znanih delcev. Do podobnih zvez pridemo tudi za magnetne momente znanih delcev. Račun je treba napraviti posebej za barione s pozitivno parnostjo, za barione z negativno parnostjo, za mezone s pozitivno parnostjo in za mezone z negativno parnostjo.

Rezultatov je toliko, da jih vseh ne utegnemo omeniti. Nekatere od njih poznamo že od prej. Med temi so znane zveze iz simetrije SU (3). To so: Gell-Mann-Okubovi zvezi med lastnimi energijami barionov okteta ter med lastnimi energijami barionov dekupleta in Glashow-Colemanove zveze med lastnimi energijami članov istega izospinskega multipleta zaradi elektromagnetne interakcije. Novo je razmerje med lastnimi energijami vezanih kvarkov

$$m_d c^2/m_s c^2 = m_u c^2/m_s c^2 = 2\,(\Sigma^* - \Sigma)/(2\Sigma^* + \Sigma - 3\Lambda) = 0{,}62_2$$

in še zveza

$$\Sigma - \Lambda = \tfrac{2}{3}\,(1 - m_d c^2/m_s c^2)\,(\Delta - \mathrm{N}) \approx \tfrac{1}{4}\,(\Delta - \mathrm{N})$$

ki je dobro izpolnjena (leva stran: 77 MeV, desna stran: 73 MeV). Tu smo s simbolom hadrona označili njegovo lastno energijo.

Za magnetne momente vezanih kvarkov, ki so kot pri vsakem Diracovem delcu sorazmerni s specifičnim nabojem, obvelja znana zveza $\mu_n = -\frac{2}{3}\,\mu_p$. Namesto enačbe za magnetni moment hiperona Λ $\mu_\Lambda = -\frac{1}{3}\,\mu_p = -0{,}93\,\mu_j$ pa dobimo $\mu_\Lambda = -\frac{1}{3}\,\mu_p(m_d c^2/ /m_s c^2) = -0{,}6\,\mu_j$, kar je znatno bliže izmerjenemu podatku $\mu_\Lambda = (-0{,}67 \pm 0{,}06)\,\mu_j$. Po tej poti pridemo do lastnih energij vezanih kvarkov:

$$m_d c^2 = m_u c^2 = m_p c^2/(\mu_p/\mu_j) = 336\ \mathrm{MeV}$$

in $$m_s c^2 = m_u c^2/0{,}62_2 = 540 \text{ MeV}$$

Za mezone z izospinom, različnim od 0, sledi nova zveza

$$(K^* - K)/(\rho - \pi) = m_u c^2/m_s c^2 = 0{,}62_2$$

ki je dobro izpolnjena (leva stran: $0{,}62_4$).

Pri mezonih se pokažeta dve pomanjkljivosti približka. Napovedi za razlike lastnih energij med člani istega izosponskega multipleta zaradi elektromagnetne interakcije se ne ujemajo z izmerjenimi podatki. To je predvsem posledica možnosti, da se nevtralni pion virtualno anihilira v foton in gluone, česar približek ne upošteva. Poleg tega so tudi izmerjeni podatki dokaj nezanesljivi.

Druga pomanjkljivost se pokaže le pri nevtralnih mezonih. Ti se namreč lahko virtualno anihilirajo v kvark in njegov antikvark, česar približek tudi ne upošteva. Zaradi tega pojava se nonet mezonov razcepi na oktet in singlet. Pojav je izrazit pri lahkih mezonih s spinom 0. Tako napovedi, ki vsebujeta lastne energije mezonov η, η', π° in K° s spinom 0, nista izpolnjeni:

$\eta = \pi^\circ$ (leva stran: 548 MeV, desna stran: 138 MeV)
$\eta' = 2K^\circ - \pi^\circ$ (leva stran: 958 MeV, desna stran 854 MeV)

Ustrezni napovedi, ki vsebujeta lastne energije mezonov ω, φ, ρ° in $K^{\circ *}$ s spinom 1, pa sta dobro izpolnjeni:

$\omega = \rho^\circ$ (leva stran: 784 MeV, desna stran 770 MeV)
$\varphi = 2K^{*\circ} - \rho^\circ$ (leva stran: 1019 MeV, desna stran: 1014 MeV)

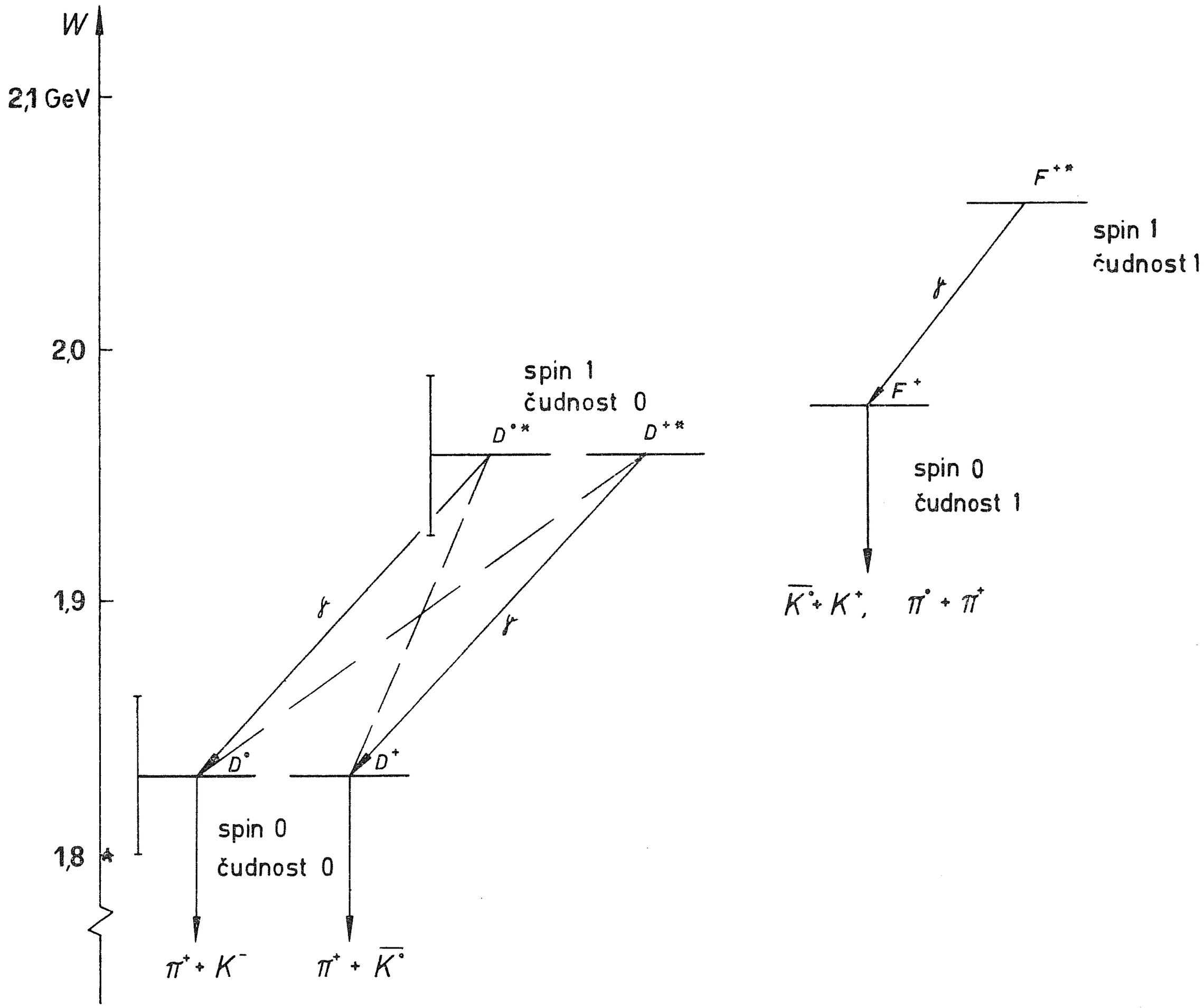
Iz podatka za lastno energijo mezona Ψ sledi ocena za lastno energijo kvarka c: $1630 \text{ MeV} \leqq m_c c^2 \leqq 1690 \text{ MeV}$. Podobno sledi za lastni energiji mezonov $D^\circ = (c\bar{u})^\circ$ in $D^+ = (c\bar{d})^+$ s spinom 0 in čudnostjo 0 napoved: od 1,80 GeV do 1,86 GeV. Napovedi za nekatere druge mezone s čarom, v katerih ne nastopa ločeno prispevek z lastno energijo kvarka c, so zanesljivejše: za mezon $F^{+*} = (c\bar{s})^{+*}$ s spinom 1 in čudnostjo 1 sledi $\frac{1}{2}(\varphi + \Psi) = 2060$ MeV, za mezona $D^{\circ *} = (c\bar{u})^{\circ *}$ in $D^{+*} = (c\bar{d})^{+*}$ s spinom 1 in čudnostjo 0 pa 1,98 GeV. Mezoni s spinom 1 naj bi z izsevanjem fotona ali piona razpadli najprej na ustrezne mezone s spinom 0. Ti pa naj bi razpadli dalje pretežno tako, da bi se v njih kvark s čarom c spremenil v čudni kvark s in antikvark $\bar{c}$ v antikvark $\bar{s}$ (sl. 1), na primer:

$$D^{\circ *} \to D^\circ + \gamma \qquad \overline{D}^{\circ *} \to \overline{D}^\circ + \gamma \qquad D^\circ \to \pi^+ + K^- \qquad \overline{D}^\circ \to \pi^- + K^+$$

Omenimo še, da napove teorija za lastno energijo najlažjega bariona s čarom 1, ki ga sestavljajo kvarki ddc, uuc ali udc, 2,2 GeV.

Pozneje so De Rujula, Georgi in Glashow [3] v poenostavljenem modelu podrobneje raziskali razpade, ki imajo vlogo pri merjenjih [4]. Pri anihilaciji pozitrona in elektrona nastane virtualni foton, ki razpade na težki kvarkovski par $c\bar{c}$. Nato se rodita lahka antikvark in kvark, na primer $\bar{u}$ in u, ki se vežeta s kvarkom c in antikvarkom $\bar{c}$ v čarobna mezona. Verjetnost, da sta nastala mezona nabita, je enaka verjetnosti, da sta nevtralna. Spina težkih kvarkov nista sklopljena s spinoma lahkih kvarkov. Mezona nastaneta v stanju s kvantnim številom tirne vrtilne količine 1. Račun napove, da so pogostosti stanj $D^\circ\overline{D}^\circ$, $D^\circ\overline{D}^{\circ *} + D^{\circ *}\overline{D}^\circ$ in $D^{\circ *}\overline{D}^{\circ *}$ v razmerju 1 : 4 : 7.

Pri presoji deležev posameznih razpadov so pomembne razlike lastnih energij, ki so posledica elektromagnetne interakcije. Na osnovi novih podatkov o mezonu D° [4] so



Sl. 1: Masni spekter mezonov s čarom 1 in nekateri razpadi po napovedi De Rujule, Georgija in Glashowa [1]

prišli do ocen za lastne energije mezona D^+: 1,875 GeV, mezona $D^{*\circ}$: 2,00 GeV in mezona D^{*+}: 2,015 GeV. Za deleže razpadov so v tem primeru napovedali:

$$D^{*+} \to D^\circ + \pi^+ \quad 0{,}9 \qquad D^{*\circ} \to D^\circ + \pi^\circ \quad 0{,}9$$
$$D^{*+} \to D^+ + \pi^\circ \quad 0{,}1 \qquad D^{*\circ} \to D^\circ + \gamma \quad 0{,}1$$

Mezon D° lahko nastane skupaj z mezonom $\overline{D^\circ}$ ali z mezonom $\overline{D^{*\circ}}$ ali pri razpadu mezona D^{*+} ali mezona D^+. Po teh ocenah je mogoče neprisiljeno pojasniti vrh pri lastni energiji okoli 2 GeV v odrivnem spektru [4]. V glavnem gre na račun mezonov $D^{*\circ}$ in D^{*+}. Pokaže se tudi, da je treba pričakovati okoli sedemkrat več nevtralnih mezonov D° in $\overline{D^\circ}$ kot nabitih mezonov D^+ in D^-. Vse to dodatno potrjuje sklep, da so z merjenji ugotovili obstoj čarobnih mezonov.

Janez Strnad

LITERATURA

[1] A. De Rujula, H. Georgi, S. L. Glashow, *Hadron Masses in a Gauge Theory*, Phys. Rev. D **12** (1975) 147.

[2] J. Strnad, *Nov uspeh v fiziki delcev*, Obzornik mat. fiz. **12** (1965) 40.

[3] A. De Rujula, H. Georgi, S. L. Glashow, *Is Charm Found?* Phys. Rev. Letters **37** (1976) 398.

[4] G. Goldhaber, F. M. Pierre in sodelavci, *Observation in e^+e^- Annihilation of a Narrow State at 1865 MeV/c^2 Decaying to $K\pi$* and *$K\pi\pi\pi$*, Phys. Rev. Letters **37** (1976) 255.

KONFERENCA NEMŠKEGA FIZIKALNEGA DRUŠTVA O POUKU FIZIKE

Nemško fizikalno društvo (Deutsche Physikalische Gesellschaft — DPG) priredi vsako pomlad konferenco, posvečeno didaktiki fizike. Taka konferenca je bila od 31. marca do 2. aprila 1976 na inštitutu za fiziko univerze v Giessnu, oddaljenem 60 km od Frankfurta. Organiziral in vodil jo je profesor za didaktiko fizike W. Kuhn. Udeležili so se je predvsem Nemci. Poleg nekaterih Nizozemcev in Avstrijcev sem se udeležila konference tudi jaz. Ker utegnejo nekatera od vprašanj, ki so jih načeli, biti zanimiva za učitelje fizike pri nas, naj o konferenci na kratko poročam.

Dopoldne so se vrstila daljša glavna predavanja, nekatera tudi z demonstracijami. Med najzanimivejšimi naj omenim predavanji o didaktiki specialne teorije relativnosti prof. Hooymana iz Utrechta in prof. Fleischmanna iz Erlangena. Za izhodišče sta izbrala poskus z nevtralnimi pioni v CERN. Pri tem poskusu razpadejo pioni π° s hitrostjo okoli 0,99 c na dva fotona γ. Hitrost fotona γ, ki odleti v smeri naprej, izmerijo s časom preleta in ugotovijo, da je enaka c (in ne $2c$). Vse pomembnejše zveze, npr. dilatacija časa in Lorentzove transformacije, se dajo izpeljati enotno s sklicevanjem na poskuse z radarskimi signali. Zvezo med kinetično energijo in hitrostjo delcev dobimo pri poskusu, pri katerem se gibljejo nabiti delci iz pospeševalnika v električnem in v prečnem magnetnem polju. Dodati moramo samo še, da naboj delca ni odvisen od hitrosti.

Zelo zanimivo je bilo predavanje o granulaciji laserske svetlobe, ki je bilo didaktično vzorno pripravljeno. Z raznimi prozornimi in prosojnimi snovmi, skozi katere usmerjamo laserski curek, nazadnje »odkrijemo«, da mleko prepreči granulacijo laserske svetlobe. Ob tem pokažemo učencem, kako se v znanosti počasi in po korakih bližamo rešitvi problema: najprej postavimo hipotezo, napravimo poskus, na osnovi rezultata popravimo ali ovržemo hipotezo itd. Z lečami in režami, ki jih razdelimo med učence, pa še dodatno spodbudimo njihovo aktivnost.

Zanimivo je bilo tudi predavanje o Fourierovi analizi zvoka: med dvema zvočnikoma je bil premičen mikrofon, ki je dajal sliko valov v prostoru med izviroma.

Po mnenju prof. Hechta iz Kiela se lotevamo poučevanja fizike preveč z znanstvenega stališča, posebno na nižji stopnji. Vprašanje je, ali vzgajamo *za* fiziko ali *s* fiziko. Najbrž je narobe, da vzgajamo bodoče fizike, namesto da bi učili vse učence fizikalno misliti. Učencem vsiljujemo miselno strukturo profesorjev, ki je na previsokem nivoju s preveliko mero matematike. To pride še posebej do izraza na nižji stopnji usmerjenega izobraževanja.

Vsa predavanja niso bila na tako visoki ravni. Neki profesor kemije je na primer razlagal svojo »genialno« izpeljavo Lorentzovih transformacij, pri kateri je izračunal tudi sklopitveno konstanto šibke interakcije. Povedali so mi, da ponavlja isto temo že leto za letom.

Predavanj žal nismo dobili razmnoženih, kakor smo se pri nas že navadili. Izšla bodo šele 1977 v knjigi. Poslušalci smo bili navezani na tisto, kar smo slišali. Nekateri predavatelji so bili tako prijazni, da so mi na posebno prošnjo dali kopijo svojega prispevka.

Popoldne je potekalo delo v dveh skupinah. Na sporedu so bila krajša poročila, na primer o drugih konferencah, o problemih v šolstvu, o novostih pri laboratorijskih vajah, o vlogi filmov pri pouku, predvsem pa o novih demonstracijskih poskusih. S popoldanskega sporeda je bil zelo zanimiv na primer prikaz polprevodnikov in stika p-n z majhnimi magnetki na zračni blazini. Pripravo je izdelal prof. Schwarz iz Giessna in tovarna Phywe jo je že začela serijsko izdelovati.

Iz Berlina so poročali o skupinskem praktikumu, pri katerem šest študentov pod mentorjevim vodstvom samostojno razvije poskus, na primer modulacijo laserskega curka

z zvokom, napravi načrt zanj, ga opravi in obdela teorijo. Študenti imajo v takem praktikumu več dela in tudi asistenti so bolj obremenjeni, nasploh pa je uspeh zelo dober. Ocen ni. Tako samostojno delo je še posebej zanimivo za učitelje fizike.

Vsak večer smo se vsi udeleženci srečali v restavraciji sredi mesta. Tam smo se pogovarjali med drugim o usmerjenem izobraževanju v Nemčiji in o njegovih posledicah, predvsem o tem, da zanimanje za fiziko upada. V tej zvezi nastopa še poseben problem, ker je vpis na univerzo omejen. Potrebne so visoke ocene iz vseh predmetov, zato si učenci, ki se ne zanimajo posebej za fiziko, izberejo raje lažje predmete, pa še tisti, ki se zanimajo zanjo in imajo iz nje dobro oceno, vpišejo po 2. razredu raje kak drug predmet, npr. biologijo, da si še tam izboljšajo oceno. Med konferenco je v avli inštituta nekaj nemških založb razstavilo najnovejše učbenike iz fizike.

Razkazali so mi Inštitut za didaktiko fizike, ki leži sredi lepega parka zunaj mesta. V bližini so tudi študentski domovi. Tu študirajo skupaj nekdanji študenti pedagoške akademije — oddelka za fiziko — in študenti pedagoške fizike, tako da je izobraževanje učiteljev fizike enotno. Za učitelje nižjih šol do 10. leta šolanja velja to seveda le za fiziko, drugi izbirni predmet, npr. kemijo, pa poslušajo drugje. Študenti lahko nadaljujejo študij, če jih to veseli. Oddelek za didaktiko fizike ima v celoti okrog 200 študentov in štiri profesorje. V inštitutu so poleg laboratorijev tudi delavnice, v katerih študenti sami izdelujejo modele poskusov, in posebna učilnica, opremljena s tremi televizijskimi kamerami. Tja pripeljejo razred od drugod, potek pouka pa lahko spremljajo tudi poslušalci v sosednji sobi skozi polprepustno zrcalo. Učno uro snemajo na magnetoskopski trak. Pri praktikumu iz didaktike fizike delajo študenti poskuse, ki so kasneje predpisani v šolah. Vaje si sestavljajo sami.

Didaktika fizike je v Giessnu in tudi drugod po Evropi v zadnjem času postala enakovredna drugim vejam fizike. Inštitut za didaktiko fizike ima zagotovo precej izkušenj pri šolanju učiteljev fizike, zato so stiki z njim za nas zelo koristni. Že lani se je udeležil konference eden od študentov fizike pedagoške smeri na 3. stopnji. Sprejeli so me zelo prisrčno in me bogato obdarili s knjigami. Izrazili so željo po tesnejših stikih in predlagali, naj bi imeli tudi pri nas kako konferenco za didaktiko fizike, npr. po zgledu poletnih šol za teoretično fiziko v Hercegnovem ali za jedrsko magnetno resonanco v Pulju.

Seta Oblak

ŠESTI KONGRES MEDNARODNE RAZISKOVALNE SKUPINE ZA POUK MATEMATIKE

Društvo matematičara i fizičara SRH nam je poslalo v objavo naslednje obvestilo:

Od 10. do 17. aprila bo v Dubrovniku 6. kongres mednarodne raziskovalne skupine za pouk matematike (Groupe international de recherche en pédagogie de la mathématique, kratica GIRP).

Naslovna tema kongresa je: Najnovejši uspehi pri pouku matematike (od otroških vrtcev do univerze). Uradni jeziki bodo francoščina, angleščina in vsi jugoslovanski jeziki.

Število udeležencev je omejeno na 50. Kotizacija za udeležbo je 700,00 dinarjev, obvestilo o stroških bivanja in program kongresa pa bomo poslali vsem tistim, ki bodo najkasneje do 31. 12. 1976 vplačali kotizacijo Društvu matematičara i fizičara SRH na tekoči račun 30102-678-4202 z oznako: za 6. kongres GIRP

Udeležence, ki žele imeti na kongresu predavanje, prosimo, da pošljejo povzetek na eni tipkani strani v francoščini ali angleščini na naslov: Prof. R. Dieschbourg, 145 rue Pierre Krier, Luxembourg

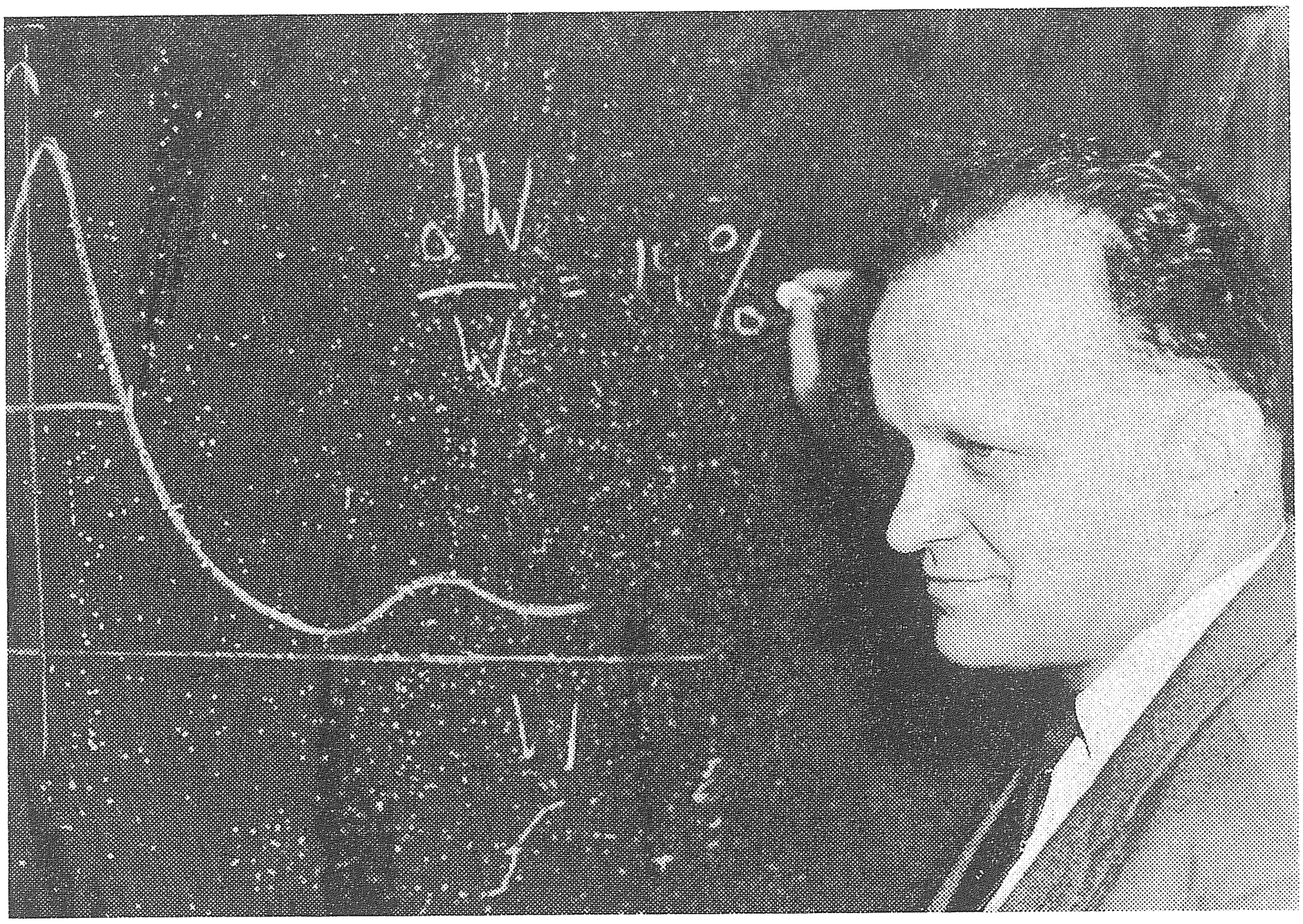
Ignacij Smolec
prev. in prir. *Marija Vencelj*

DOMAČE VESTI

JUBILEJ PROFESORJA ANTONA MOLJKA

Čas, ki nas po Aristotelu »prizadene kot nekakšno minevanje in spreminjanje«, poteka zvezno. Kljub temu so lahko nekateri trenutki pomembnejši od drugih. Tak trenutek je šestdesetletnica profesorja dr. Antona Moljka, enega izmed začetnikov in dolgoletnega delavca društva ter člana uredniškega odbora Obzornika.

Anton Moljk je bil rojen na Vrhniki 1916. Po maturi na klasični gimnaziji v Ljubljani in diplomi iz matematike in fizike je postal asistent-pripravnik na fizikalnem inštitutu tehniške fakultete. Velik del vojne je preživel v ujetniških taboriščih in v internaciji. Po osvoboditvi je postal docent za fiziko na tehniški fakulteti, kjer je več let učil fiziko v prvem letniku. Mnogo truda je vložil v eksperimentalno opremo teh predavanj in jo za takratne razmere spravil na zavidljivo raven. Občasno se je strokovno izpopolnjeval v tujini, tako v Baslu in Parizu, nato pa dalj časa na univerzi v Glasgowu. Kot profesor na sedanjem oddelku za fiziko fakultete za naravoslovje in tehnologijo predava fizikalna merjenja študentom tehnične fizike in didaktiko fizike učiteljem fizike na podiplomskem študiju.



Eksperimentalni fiziki ga poznajo po proporcionalnih števcih, ki jih je razvil v Glasgowu in jih dalje izpopolnjeval v Ljubljani. Ti števci so zmanjšali na najmanjšo možno mero vpliv ozadja in stene. A. Moljk in sodelavci so z njimi raziskovali dolgožive radioaktivne izotope in proučevali nekatere atomske in jedrske pojave. Med drugim so s prej nedosegljivo zanesljivostjo izmerili fluorescenčni pridelek v lupini K za elemente med silicijem in kriptonom. Za to delo je dobil A. Moljk skupaj s sodelavci 1974 nagrado Sklada Borisa Kidriča. Svoje prispevke je predstavil na več mednarodnih znanstvenih srečanjih, nekajkrat kot povabljeni govornik. Ukvarjal se je tudi z Mössbauerjevo spektroskopijo, ki jo je skupaj s sodelavci uporabil za proučevanje notranjega magnetnega polja v feritih.

Dosti se je posvečal vprašanju o pomenu raziskovalnega dela pri nas, organizaciji znanstvenega dela in vlogi univerze. Bil je pobudnik in organizator konferenc *Znanost*

in družba o znanstvenem in tehničnem napredku in njegovem vplivu na družbo. Pri tem mu je uspelo prvič povezati v strokovnem okviru naravoslovce in družboslovce z vzhoda in zahoda. Sodeloval je še na drugih podobnih mednarodnih konferencah, na primer na konferencah o raziskovanju prihodnosti in o enotnosti znanosti.

Bil je med ustanovitelji odseka za tehnično fiziko, ki je prerasel v sedanji oddelek za fiziko. Od ustanovitve je sodeloval na inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko. Njegove so bile osnovne zamisli pri načrtovanju stavbe in predvsem njegova zasluga je, da ima ta današnjo podobo.

Pri društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS deluje od ustanovitve in je imel več pomembnih funkcij. Bil je predsednik društva in vsem nam je še v spominu Plemljeva proslava, ki jo je organiziral ob občnem zboru na Bledu. Od ustanovitve je predsednik komisije za tekmovanje srednješolcev v fiziki. Aktiven je tudi v zvezi društev in v evropskem fizikalnem društvu.

V zadnjem času se je močneje posvetil vprašanjem pouka fizike. V skupini učiteljev fizike na tretji stopnji vodi pripravo zahtevnejših demonstracijskih poskusov in poglobljeno razpravo o novih učnih načrtih in programih za fiziko. Sodeloval je v komisiji za uskladitev učnih načrtov za zadnje razrede osnovne šole, v podobni komisiji za gimnazije in v komisiji za pripravo učnega načrta za fiziko za prve razrede usmerjenega izobraževanja.

Bil je med pobudniki za ustanovitev društvenega glasila *Obzornika za matematiko in fiziko* in je od začetka član uredniškega odbora. Bil je med ustanovitelji jugoslovanskega znanstvenega časopisa — zagrebške *Fizike* — in je njen glavni urednik. Bil je med ustanovitelji glasila zvezne komisije za jedrsko energijo — beograjske *Nuklearne energije* — in njen glavni urednik.

Od številnih drugih pomembnih funkcii omenimo samo nekatere. Bil je član zvezne komisije za jedrsko energijo, predsednik njenega strokovnega odbora, predsednik sveta za naravoslovne znanosti pri zveznem svetu za koordinacijo znanstvene dejavnosti in pozneje predsednik komisije za fiziko v tem svetu.

Bil je štirikrat odlikovan, zadnjič 1975 z redom republike s srebrnim vencem.

Uredniški odbor Obzornika in upravni odbor društva čestitata slavljencu in mu kličeta: »Še na mnoga leta.«

Janez Strnad

REZULTATI ANKETE, KI JE BILA POSLANA TEHNIŠKIM FIZIKOM

Na občnem zboru DMFA SRS 1974 v Portorožu je bila ustanovljena sekcija za raziskovalno in aplikativno dejavnost v fiziki. Ta sekcija naj bi povezovala nekatere skupine fizikov, ki doslej niso dovolj sodelovale v društvu.

Uspeh take sekcije je precej odvisen od delovnega programa. Zato smo želeli zvedeti mnenje tistih, ki naj bi v sekciji sodelovali. Kakim 250 tehniškim fizikom po Sloveniji smo poslali anketne liste s temi vprašanji:

1. a Področje(a) vašega dela
   b Vrsta delovne organizacije, kjer ste zaposleni
   c Koliko fizikov zaposluje vaša delovna organizacija
2. Ali ste član Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS
3. a Ali prejemate Obzornik za matematiko in fiziko
   b Kaj pogrešate v njem
   c Ali je Obzornik primerna revija za objavo prispevkov z vašega delovnega področja
4. Menite, da bi moral v okviru DMFA potekati del obveščanj med fiziki, ki delajo v raziskovalnih in razvojnih organizacijah, birojih ter v industrijskih laboratorijih v naslednjih oblikah:
   a občasni seminarji iz raznih področij fizike, ki se uveljavljajo pri nas
   b predavanja o perspektivah in novejših dosežkih v fiziki

c poletne šole
d občni zbor DMFA, združen z delovnim simpozijem ali poletno šolo
e druge oblike dela

Obkrožite obliko dela, ki se vam zdi primerna ali odgovorite obširneje na posebnem listu

5. a Ali ste pripravljeni aktivno sodelovati v dejavnostih, omenjenih v prejšnji točki
   b Kakšno bi bilo vaše sodelovanje (referat, predavanje, udeležba na omenjenih sestankih itd.)
   c Ali lahko predlagate temo za seminar ali predavanje
   d O čem bi lahko poročali
6. a Ali ste se udeležili 1. simpozija o uporabni fiziki v Škofji Loki
   b Ali naj v prihodnje nadaljujemo s takimi seminarji v slovenskem ali pa v jugoslovanskem okviru
   c Kako pogosto naj bodo ti seminarji
7. Kakšni so vaši predlogi za delo Sekcije za raziskovalno in aplikativno dejavnost na področju fizike pri DMFA?

Dobili smo 42 odgovorov, od teh precej več kot polovico od fizikov, ki so zaposleni v industriji. Žal moramo ugotoviti, da je znaten del fizikov (30%), ki so odgovorili na anketo, prenehal biti ali pa še ni član DMFA SRS. Upamo, da se bo to kmalu izboljšalo. Iz odgovorov povzemamo, da si ti fiziki žele različnih seminarjev, predavanj in možnosti, da poročajo o svojem delu. Skoraj vsi so pripravljeni aktivno sodelovati pri delu sekcije.

Preveč prostora bi porabili, če bi analizirali vse točke v anketi. Ustavili bi se le pri zadnji — pri predlogih za delo sekcije. Naj navedemo nekatere od njih.

— Pomagati pri zbližanju osnovnih in aplikativnih raziskav ter pri boljši povezavi med fiziki, ki delajo na različnih področjih (ta predlog se ponovi nekajkrat)

— vpeljati stalno rubriko v Obzorniku

— posredovati pri zaposlitvah fizikov, skrbeti za strokovno obveščanje članov, povezati se s sorodnimi sekcijami drugod

— organizirati strokovne seminarje in poletne šole

— posredovati, da se prilagodi program študija na vseh stopnjah potrebam slovenske industrije

— poskrbeti, da bo univerza seznanjena z delom in potrebami po znanju tistih fizikov, ki so v industriji

— računalništvo naj dobi večji poudarek v učnih načrtih oddelka za fiziko

— objaviti delovni program sekcije.

Predlogov je bilo še več, vendar so tako sorodni zapisanim, da jih ne kaže posebej naštevati.

Omeniva naj še to, da bo sekcija to jesen pričela s seminarjem, namenjenim fizikom, ki se ukvarjajo z aplikativno dejavnostjo. Prav tako bo sekcija v maju ali juniju 1977 organizirala simpozij, podoben škofjeloškemu. Podrobnosti o seminarju in simpoziju bodo pravočasno objavljene.

Janez Stepišnik in *Zvone Trontelj*

Med nagrajenci AVNOJ za leto 1976 je tudi matematik dr. Djuro Kurepa, profesor na beograjski univerzi.

Čestitkam se pridružuje uredništvo Obzornika za matematiko in fiziko.

DEVETO ZVEZNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Letošnje študentsko tekmovanje iz matematike je bilo 3. aprila v Beogradu in je bilo — kot že vsa leta — združeno z mednarodnim študentskim tekmovanjem iz analitske kemije. Z udeležbo ekip iz Poljske (tokrat iz Łodza in Poznańa) je bila konkurenca tudi pri matematikih deloma mednarodna. Posamezne univerze so letos pošiljale v ekipi po tri tekmovalce, z izjemo Ljubljane, od koder jih je prišlo pet. Iz Zagreba sta bili dve ekipi, iz Beograda tri. Med nastopajočimi so bili še tekmovalci iz Novega Sada, Prištine, Sarajeva in Skopja.

Organizacija tekmovanja samega je že tradicionalno nekoliko anarhična in odvisna od dobre volje in prostega časa nekaj beograjskih asistentov, večinoma bivših tekmovalcev (omenimo M. Ašića, M. Božića in V. Jankovića), ki pripravijo naloge in skupaj z nekaterimi vodji ekip pregledujejo rezultate. Tokrat je bil zaradi nesporazuma med študentsko organizacijo (ki je uradni organizator) in asistenti seznam področij za tekmovanje izredno širok. (To je bilo v pravem nasprotju s kemijskim prvenstvom, ki je omejeno na eno samo ozko področje.) Vsak udeleženec je iz omenjenega seznama (narejenega po programu beograjske univerze) že doma izbral dva predmeta, ki naj bi ju poslušal to šolsko leto. Iz vsakega področja sta bili dve nalogi, skupni čas reševanja pa štiri ure. Nekaj tekstov je objavljenih na koncu tega članka.

Čeprav je bilo rezultate prav zaradi različne izbire področij večkrat težko ali nemogoče primerjati, le ima uradni vrstni red posameznikov določeno težo. Kot lani je bil tudi letos najboljši Andrzejczak Gregorz iz Łodza, ki je pri algebri II in topologiji dosegel 95 točk od stotih. Takoj za njim je Jožef Varga iz Beograda (analiza I in algebra I) z 90 točkami. Potem so še Siniša Vrečica (funkcionalna analiza in topologija) ter Pavle Mladenović (analiza II in analitična geometrija) s 55 ter Riszard Donecki (algebra II in topologija) in Marko Tadić (funkcionalna analiza in topologija) s 50 točkami. Med Slovenci je bil najboljši Dušan Repovš (algebra II in topologija) s 47 točkami, solidni pa so bili še Franci Forstnerič, Bojan Mohar in Mirjam Cvetič (vsi analiza I in algebra I). Ekipno smo zasedli četrto do peto mesto.

Ker se na našem oddelku večkrat pojavljajo dvomi o koristnosti takih tekmovanj, še posebej za naše študente, bom izkoristil to priložnost za nekaj komentarjev. Popolnoma res je, da so naši študentje, predvsem v primerjavi z beograjskimi, na tekmovanju običajno v slabšem položaju. Celo pri tako osnovnih predmetih, kot je analiza I, se programi razlikujejo, v višjih letnikih pa večkrat sploh ni ekvivalentnih predmetov. Tudi način poučevanja tam je marsikje bližji takim tekmovanjem kot pri nas. Nekaj omenjenih slabosti bi odpadlo, če bi tekmovali le študentje prvih dveh letnikov in če bi skrčili izbor predmetov. (Sicer pa že tako in tako četrtih letnikov na tekmovanju skoraj ni mogoče opaziti). Teže je premišljevati čisto splošno o smislu takega merjenja moči. Vsekakor je to — nekoliko enostranska — preizkušnja znanja in sposobnosti in tako možnost za uveljavitev. Hkrati je to za naše študente ena od redkih priložnosti, da se seznanijo s kolegi z drugih univerz. Seveda pa ni prijetno doživeti na takem tekmovanju neuspeh. Ker pa sicer pri nas (in tu ne mislim samo matematike) konkurenca ni kdo ve kako ostra, ima taka konfrontacija včasih tudi ugoden učinek.

Naloge

Analiza I

1. Naj bosta f in g realni funkciji, definirani na intervalu $[a, \infty]$ in h pozitivno število. Denimo, da sta f in g omejeni na vsakem končnem intervalu $[a, b]$, da g z rastočim x narašča čez vse meje in da obstaja (končna ali neskončna) limita

$$\lim_{x \to \infty} (f(x + h) - f(x))\,(g(x + h) - g(x))^{-1}$$

Dokaži, da je potem ta limita enaka $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\,(g(x))^{-1}$.

2. Naj bo $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in naj bo (x_n) zaporedje realnih števil, določeno z $x_{n+2} + a_n x_{n+1} + x_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Dokaži, da je v zaporedju (x_n) neskončno mnogo pozitivnih in neskončno negativnih členov.

Algebra I

1. Dva korena polinoma s celimi koeficienti sta 1 in 2. Dokaži, da vsaj en koeficient tega polinoma ni večji od —2.

2. Dokaži, da v n-razsežnem realnem evklidskem prostoru ne moremo najti $n + 2$ vektorjev, ki bi med sabo oklepali tope kote.

Matematična logika

1. Naj bosta A in B izjavi in naj bo izjava $A \Rightarrow B$ tavtologija. Dokaži, da obstaja izjava C, ki vsebuje samo tiste spremenljivke, ki so skupne za A in B, tako da sta $A \Rightarrow C$ in $C \Rightarrow B$ tavtologiji.

2. Dokaži, da je vsaka izjava ekvivalentna izjavi, ki vsebuje samo veznike $\Rightarrow$, $\vee$, &, ali pa negaciji take izjave.

Analiza II

1. Naj bo (a_n) tako zaporedje in f: $[0, \infty] \to \mathfrak{R}$ taka funkcija, da je

(i) $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(ii) $f > 0$, f monotona in $\int\limits_{a_1}^{\infty} f(x)dx = \infty$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_1 + \ldots + a_n)\,(f(a_1 + \ldots + a_{n-1}))^{-1} = 1$

Dokaži, da je

$$a_1 f(a_1) + a_2 f(a_1 + a_2) + \ldots + a_n f(a_1 + \ldots + a_n) \sim \int\limits_{a_1}^{a_1+\ldots+a_n} f(x)dx$$

(se pravi, da gre kvocient obeh izrazov z naraščajočim n proti 1).

2. Naj bo F: $\mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R}$ zvezna funkcija, ki zadošča pogojem $F(u, 0) = u$; $F(u, u) = 0$; $F(F(u, w), F(v, w)) = F(u, v)$ za poljubne u, v, w. Dokaži, da obstaja strogo monotona funkcija f: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, tako da je $f(x - y) = F(f(x), f(y))$.

Osnove sintetične geometrije

1. Če lahko vsaki stranici konveksnega mnogokotnika najdemo enako paralelno stranico, se da ta poligon razdeliti na paralelograme.

2. Vpiši v kocko krog z največjim polmerom.

Analitična geometrija

1. Skozi točko P, ki leži v ravnini enakostraničnega trikotnika ABC, potekajo premice g_1, g_2, g_3 vzporedno stranicam BC, CA, CB. Te premice sekajo druge stranice v treh parih točk: A_1, A_2; B_1, B_2 in C_1, C_2.

(i) Dokaži, da teh šest točk leži na neki krivulji drugega reda, ki jo označimo s c.

(ii) Določi tiste točke P, za katere c razpade na dve premici.

(iii) Določi območja za P, pri katerih je c elipsa, hiperbola, parabola.

2. Po krogu s polmerom 6 se z zunanje strani kotali krog s polmerom 3. V manjšem krogu izberimo v razdalji 1 od izhodišča neko točko. Ko manjši krog obkroži večjega, ta točka opiše neko sklenjeno krivuljo. Treba je

(i) dokazati, da se lahko enakostraničen trikotnik T, vpisan v to krivuljo, giblje tako, da njegova oglišča istočasno opišejo celo krivuljo;

(ii) izračunati stranico trikotnika T;

(iii) opisati krivuljo, po kateri se giblje središče trikotnika T, če se trikotnik pomika tako kot v (i).

Algebra II

1. Naj bo $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ univerzalna algebra in $a, b \in A$, $a \neq b$. Dokaži, da obstaja kongruenca R v $\mathcal{A}$, tako da ne velja aRb in da je R maksimalna s to lastnostjo.

2. Naj bo $\mathcal{K} = (K, +, .)$ kolobar. Definirajmo: množica $A \subset K$ je adeal, če iz $x \in A$, $y \in K$ sledi $xy \in A$ ter iz $x \in A$, $y \in A$ sledi $x + y \in A$.

(a) Ali obstaja končen kolobar z adealom, ki ni ideal?

(b) Ali obstaja neskončen kolobar z isto lastnostjo?

Topologija

1. V $\mathfrak{R}^3$ imamo šest točk: A, B, C, D, E, F, med katerimi nobene štiri ne ležijo v isti ravnini. Če z XY označimo daljico, ki spaja točki X in Y, naj bosta L in M podprostora v $\mathfrak{R}^3$, določena z

$$L = AB \cup AC \cup BC \cup DE \cup DF \cup EF \cup AD \cup BE \cup CF$$

$$M = AB \cup AC \cup AD \cup BE \cup BF \cup CE \cup CF \cup DE \cup DF$$

Ugotovi, ali sta L in M homeomorfna.

2. Naj bo prostor X produkt topoloških prostorov, med katerimi je neskončno mnogo nekompaktnih.

(a) Dokaži: vsaka kompaktna podmnožica v X ima prazno notranjost.

(b) Ali morda vsaka kompaktna podmnožica K v X ni nikjer gosta, se pravi, da ima zaprtje množice K prazno notranjost?

Verjetnost

1. Imamo dve škatli in v vsaki belo in črno kroglico. Iz prve škatle na slepo izvlečemo kroglico in jo vržemo v drugo. Potem iz druge škatle na slepo izvlečemo kroglico in jo vržemo nazaj v prvo. Označimo ta postopek s T.

(a) Naj bo X_n število belih kroglic v drugi škatli po n ponovitvah postopka T. Določi porazdelitveni zakon za X_n.

(b) Y_n naj bo število belih kroglic v škatli, v katero smo n-tič vrgli kroglico (tu n ni nujno sod). Določi porazdelitev za Y_n.

2. Dano je zaporedje slučajnih spremenljivk X_n $(n = 1, 2, \ldots)$, tako da je $P(X_n = \pm 1/(2n)) = 1/2$. Dokaži, da zaporedje porazdelitvenih funkcij slučajnih spremenljivk $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ (po točkah) konvergira k enakomerni porazdelitvi na $[-1, 1]$, in sicer brez uporabe karakterističnih funkcij.

Funkcije kompleksne spremenljivke

1. Naj bo $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ konformna preslikava polja $D = \{z; |z| < 1\}$. Če je m standardna Lebesguova mera, dokaži, da je

(a) $m(f(D)) \geq \pi$.

(b) $m(f(D)) = \pi$ natanko takrat, ko je $f(z) = z$.

2. Dana sta krožna kolobarja $K = \{z; 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\}$ in $K' = \{z; 0 < R_1 < |z| < R_2 < \infty\}$. Dokaži, da obstaja konformna preslikava K na K' natanko takrat, ko je $R_2/R_1 = r_2/r_1$.

Diferencialne in integralske enačbe

1. Ali ima integralska enačba

$$f(x) = \int_0^1 \exp(x(t+1)) \cos(xt)\,(1 + f^2(t))dt$$

realne rešitve $f \in C\,[0, 1]$?

2. Dana je enačba

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^x z = 0$$

z začetnimi pogoji $z\Big|_{x=0} = u(y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0} = v(y)$, kjer sta $u, v\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ omejeni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, oddelek za fiziko fakultete za naravoslovje in tehnologijo, zavod za šolstvo SRS, inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko ter inštitut J. Stefan prirejajo od 3. do 5. februarja 1977

9. SEMINAR IZ FIZIKE

ASTROFIZIKA

Seminar je namenjen učiteljem srednjih in tudi osnovnih šol za strokovno izpopolnjevanje, vabljeni pa so tudi drugi člani društva. Seminar bo v veliki fizikalni predavalnici, Jadranska 26, v Ljubljani.

Urnik predavanj:

Četrtek 3. 2. ob 9.30: Otvoritev seminarja
9.30—10.15, 10.45—11.30, 11.45—12.30 Andrej Čadež: Življenje zvezd

15.00—15.45 Andrej Čadež: Življenje zvezd
16.00—16.45 Vladimir Čadež: Sonce

Petek 4. 2. ob 8.30— 9.15, 9.30—10.15, 10.45—11.30 Fran Dominko: Planetni sistem
11.45—12.30 Janez Strnad: Vesolje

15.00—15.45, 16.00—16.45 Janez Strnad: Vesolje

Sobota 5. 2. ob 8.30— 9.15 Ivan Kuščer: Astronomija kot del pouka fizike
9.30—10.15 Razgovor
10.45—11.30 Alojz Kodre: Nekateri idejni problemi pri pouku naravoslovja
11.45—12.30 Razgovor

V petek, 4. februarja ob 19.00 bo družabni večer DMFA v restavraciji Urška. Na ta večer vljudno vabimo vse člane društva in njihove zakonce, ne samo udeležence seminarja.

Prispevek je 100 din na udeleženca seminarja. Vodstva šol in organizacije združenega dela prosimo, da prispevek nakažejo vnaprej na žiro račun društva matematikov, fizikov in astronomov SRS št. 50101-678-47233, lahko pa ga plača udeleženec na seminarju.

Za seminar se prijavite z dopisnico do 21. januarja 1977 na naslov: Martina Koman, gimnazija, 66230 Postojna.

Sekretarka seminarja:
Martina Koman

Vodja seminarja:
Andrej Čadež

Dokaži, da obstaja rešitev (dvakrat zvezno odvedljiva, definirana na celi ravnini), ki je omejena na (odprti) desni polravnini.

Funkcionalna analiza

1. Naj bo S vektorski podprostor v $L^\infty = L^\infty[0, 1]$ in naj obstaja realno število $M > 0$, da je $\|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2$ za vsak $f \in S$. Dokaži, da je $\dim S \leqslant M^2$.

2. Naj bo funkcija f definirana na $[0, 1)$ z $f(0 \cdot d_1 d_2 \ldots) = 17$, če je $d_n \neq 0$ za vsak n, $f(0 \cdot d_1 d_2 \ldots) = 1$, če je prvi n, za katerega je $d_n \neq 0$, sod, in $f(0 \cdot d_1 d_2 \ldots) = 0$, če je prvi n, za katerega je $d_n \neq 0$, lih. (Tu je $0 \cdot d_1 d_2 \ldots$ desetiški zapis, v katerem ni $d_n = 9$ od nekega n_0 naprej.) Pokaži, da je f merljiva in izračunaj $\int_0^1 f(x)dx$.

Peter Legiša

NOVE KNJIGE

Alojzij Vadnal, Diskretno dinamično programiranje, Knjižnica Sigma 26, DZS 1976, cena 115.— din (92.— din).

Knjižica obsega dvanajst poglavij. Prvo podaja teoretske osnove diskretnega dinamičnega programiranja, zadnjih enajst pa je posvečenih posameznim primerom.

Teoretske osnove vsebujejo vse potrebne pojme o vodenih diskretnih sistemih, tako determinističnih kot stohastičnih, definicijo optimalnega vodenja in dinamično programiranje: Bellmanovo načelo in Bellmanovo enačbo ter napotke za njeno reševanje.

Primeri so preprosti modeli, ki se jih da obvladati z računanjem brez elektronike. Kljub temu dobro ponazarjajo Bellmanovo metodo dinamičnega programiranja in odpirajo pogled v pisani svet njene uporabe. Preglejmo naslove: Najkrajša pot, Planiranje proizvodnje, Investicijska politika, Valjanje pločevine, Vlaganje proizvodnih faktorjev, Nadomeščanje strojev, Rast dveh gospodarskih panog, Najhitrejša pot, Trasiranje poti, Problem kooperacije, Zaloge.

Knjiga po zgradbi in slogu spominja na avtorjeve Rešene probleme linearnega programiranja, ki je že izšla v knjižni zbirki Sigma. Ker pa je po pripomočkih še bolj elementarna — bralec se mora potruditi le, da dojame osnovne pojme — bo zlahka našla pot tudi med srednješolce. Prav gotovo pa bo dobrodošel vodnik vsem, ki jih zanima uporaba matematike v ekonomiji.

France Križanič

Rajko Jamnik, Uvod v matematično statistiko, Zbirka izbranih poglavij iz matematike 5., cena 70.— din (56.— din).

Delo obsega 219 tipkanih strani, v seznamu literature navaja 13 virov. Razdeljeno je v pet poglavij: Uvod, Ocenjevanje parametrov, Preskušanje hipotez, Korelacije in regresije, Analiza variance.

Delo se ukvarja le s teoretičnimi pogledi statistike in je predvsem namenjeno študentom matematike. Postavljeno je v širši okvir, kot ga ima trenutni program statistike v okviru predmeta Verjetnostni račun in statistika. Študentom bo rabil za učbenik pri sprotnem in pri dopolnilnem študiju.

France Križanič