IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

R-177/76-P/6
ODPISANO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1976
Letnik 23
5—6

23. LETNIK — ŠTEVILKA 5/6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1976

Glavni urednik: Gabrijel Tomšič; **odgovorni urednik:** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Franc Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Škulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, Institut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Berto Žitko.

Naročnina: za posameznike 120.— din (za člane društva je že vračunana članarina 20.— din), za dijake in študente 50.— din, za ustanove in podjetja 150.— din, za tujino 10 $ = 170.— din, posamezna številka 20.— din, dvojna številka 40.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS,** 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 65-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 50100-620-107-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1600 izvodov.

Izdajo revije sofinacirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

VSEBINA

Članki — Stran

Jordanov in Schoenfliesov izrek (Jože Vrabec) 137
O nekem ekstremalnem problemu (Milan Hladnik) 146
Nastanek latentne slike v fotografski emulziji (Stane Arh) 151
Sončni veter (Igor Majerle) 156

Šola

Raztegi in ulomki (France Križanič) 159
Zorno polje daljnogleda (Marijan Prosen) 162

Domače vesti

Nagrajenci Sklada Borisa Kidriča v letu 1976 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 164
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko (Zbral in uredil Anton Suhadolc) 166
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter resumeji doktorskih disertacij v letu 1975 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 170
Seznam novih članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS (Vinko Pavlič in Ciril Velkovrh) 175
Mednarodne matematične olimpiade srednješolcev (Dušan Repovš) 176
Moskovska študentska matematična olimpiada (Dušan Repovš) 179
Poročilo o delu seminarja LAAR GETNI v šolskem letu 1975/76 (Dušan Repovš) 180
Srečanje slovenskih matematikov in fizikov v Trstu (Ciril Velkovrh) 180

Odgovori na vprašanje 104, 105, 108 (Dušan Repovš) 181
Prejeli smo v oceno (Franc Lebedinec, France Križanič, Niko Prijatelj, Janez Strnad) 174, 186
Nove knjige (Ivan Kuščer, Stanislav Zorko) 189
Utrinka (Dušan Repovš) 150, 155
Obvestilo (Martina Koman) 161

CONTENTS

Articles — Page

Jordan and Schoenflies theorems (Jože Vrabec) 137
On an extremum problem (Milan Hladnik) 146
The photographic latent image (Stane Arh) 151
Solar wind (Igor Majerle) 156
School 159
Home news 164
Answers 181
New books 174, 186

Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 5/6

JORDANOV IN SCHOENFLIESOV IZREK*

JOŽE VRABEC

AMS Subj. Class. (1970): 57-01, 57 A 05, 57 A 35, 57 A 50

Članek obravnava klasični Jordanov in Schoenfliesov izrek ter njuni posplošitvi za prostore višjih dimenzij. Večina dokazov je izpuščenih.

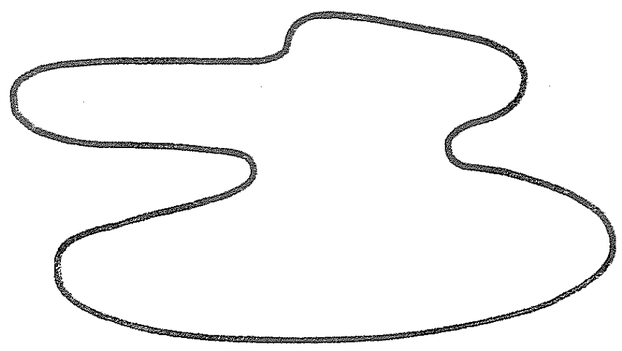
JORDAN AND SCHOENFLIES THEOREMS

This article discusses the classical Jordan and Schoenflies theorems and their generalizations to higher dimensions. Most proofs are omitted.

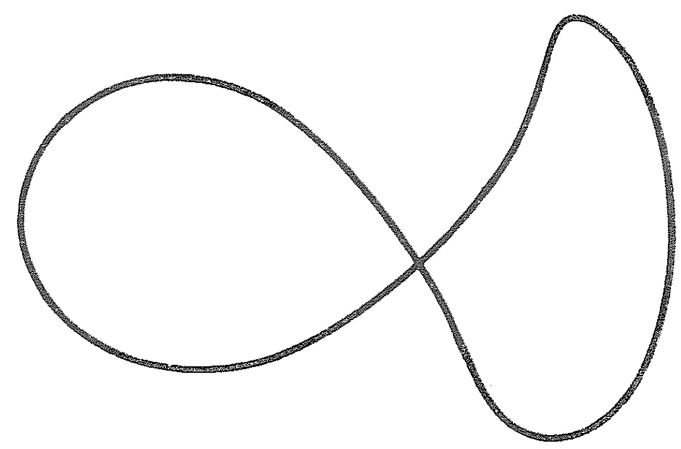
1. Jordanov izrek

Ker je v Obzorniku nedavno izšel članek [18], ki podaja osnovne pojme topologije, bomo tu privzeli, da so ti pojmi znani.

Enostavna sklenjena krivulja je topološki prostor, ki je homeomorfen enotski krožnici S^1 v ravnini $\boldsymbol{R}^2$. Slika 1 prikazuje primer take krivulje. Beseda *enostavna* naznačuje, da gre za »sklenjeno krivuljo«, ki »sama sebe ne seka« (narekovaji so tu zato, ker uporabljamo nejasne pojme; vsaj tu jih nismo definirali). Za primerjavo je na sliki 2 »sklenjena krivulja«, ki ni enostavna.



Slika 1



Slika 2

Leta 1893 je C. Jordan v [11] formuliral tale izrek, ki ga danes imenujemo (klasični) Jordanov izrek:

1.1. Jordanov izrek. *Vsaka enostavna sklenjena krivulja v ravnini deli ravnino na dve polji in je rob obeh teh dveh polj.*

Dokaz, ki ga je podal Jordan za ta izrek, ni bil pravilen. Kasneje je izrek pravilno dokazal L. E. J. Brouwer. Kljub temu se izrek po pravici imenuje po Jordanu, kajti on je prvi spoznal, da tu ne gre za očitno resnico, ampak je treba nekaj dokazati. Ker se tudi danes marsikomu zdi pravilnost Jordanovega izreka sama po sebi razumljiva, ne bo odveč, če izrek malo komentiramo. Najprej ga povejmo precizneje:

1.2. Jordanov izrek. *Če je K enostavna sklenjena krivulja v $\boldsymbol{R}^2$, potem je komplement $\boldsymbol{R}^2 - K$ unija dveh nepraznih, disjunktnih, odprtih, povezanih množic, recimo U in V, in K je rob tako za U kot za V (z drugimi besedami: zaprtji $\overline{U}$ in $\overline{V}$ sta enaki $U \cup K$ oziroma $V \cup K$).*

Ta izrek gotovo močno sugerira naša intuicija, ni pa nobenega razloga, zakaj naj bi bila njegova pravilnost očitna. Bralcu priporočam, da poizkusi dokazati izrek za $K = S^1$; ta dokaz je zelo lahek, toda še vedno je treba nekaj dokazati.

* Predavanje s tem naslovom je imel avtor na aktivu matematikov 9. 10. 1974. v Ljubljani.

Izrek 1.2 vsebuje več trditev. Pokazali bomo, katere od njih je lahko dokazati, da bo bolj vidno jedro problema.

Bodi X poljuben topološki prostor. *Komponenta* prostora X je vsaka maksimalna povezana podmnožica v X; to je torej taka povezana množica $C \subset X$, da je vsaka množica $Y \subset X$, ki vsebuje C kot pravo podmnožico, nepovezana. Seveda je X povezan prostor tedaj in le tedaj, ko je X edina komponenta v X. Nepovezani prostori pa morejo imeti poljubno mnogo komponent, tudi neskončno mnogo. V vsakem primeru pa velja:

1.3. Lema. *Komponente poljubnega prostora X so paroma disjunktne in njihova unija je ves prostor X.*

To je posebno lahko dokazati, če je X odprta množica v $\boldsymbol{R}^2$ ali v poljubnem prostoru $\boldsymbol{R}^n$. S podobnim premislekom kot v dokazu izreka 4 v [18] namreč lahko pokažemo, da je za poljubno točko $x \in X$ komponenta, ki vsebuje x, enaka množici vseh točk iz X, ki jih je mogoče povezati z x s kako poligonalno črto.

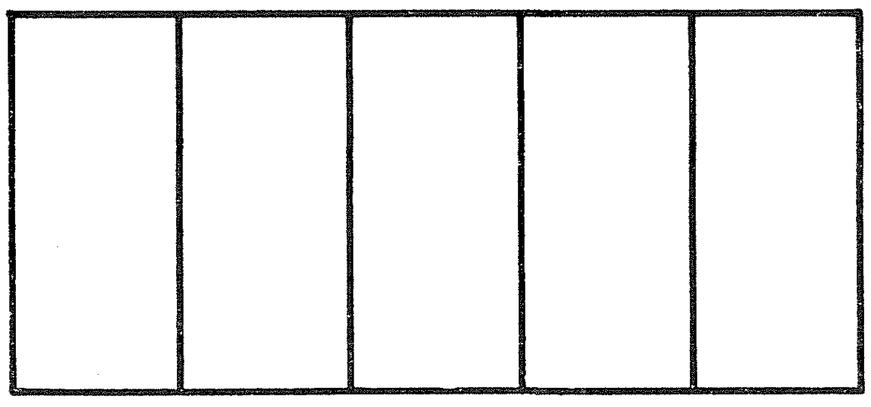
1.4. Lema. *Komponente odprte množice v $\boldsymbol{R}^2$ (ali v poljubnem prostoru $\boldsymbol{R}^n$) so odprte množice.*

Dokaz. Naj bo U poljubna odprta množica v $\boldsymbol{R}^2$ in C komponenta množice U. Vzemimo poljubno točko $x \in C$. Ker je množica U odprta, vsebuje krog, recimo D, s središčem x. Vsako točko iz D lahko zvežemo z x z daljico (ki leži v D in zato v U), zato je $D \subset C$. Množica C vsebuje torej hkrati z vsako svojo točko še dovolj majhen krog okoli te točke, zato je C odprta množica v $\boldsymbol{R}^2$.

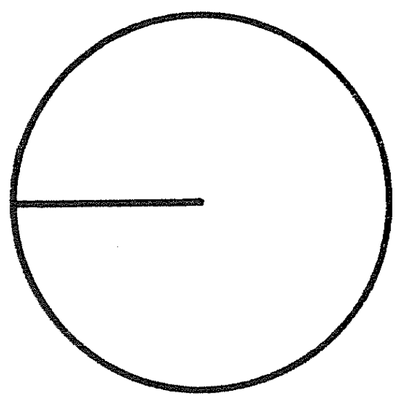
1.5. Lema. *Naj bo X kompaktna množica v $\boldsymbol{R}^2$ (ali v poljubnem prostoru $\boldsymbol{R}^n$) in naj bo U poljubna komponenta komplementa množice X. Potem rob množice U leži v X (in zato zaprtje $\bar{U}$ leži v $U \cup X$).*

Dokaz. Naj bo $x \in \boldsymbol{R}^2 - X$. Treba je pokazati, da x ni robna točka za U. Označimo z V komponento množice $\boldsymbol{R}^2 - X$, ki vsebuje x. Po 1.3 je bodisi $V = U$, bodisi $V \cap U = \emptyset$. Če je $V = U$, je x notranja točka za U, če pa je $U \cap V = \emptyset$, je x zunanja točka za U; po 1.4 sta namreč množici U in V odprti. V nobenem primeru torej x ni robna točka na U.

Vrnimo se zdaj k Jordanovemu izreku 1.2. Enostavna sklenjena krivulja K je homeomorfna enotski krožnici, torej je kompaktna. Iz zgornjih lem zato sledi, da je komplement $\boldsymbol{R}^2 - K$ unija disjunktnih povezanih in odprtih množic — komponent množice $\boldsymbol{R}^2 - K$ — in da je rob vsake od teh komponent vsebovan v K. Nedokazani ostaneta še dve trditvi izreka, namreč, da ima $\boldsymbol{R}^2 - K$ natančno dve komponenti in da rob vsake od njiju pokrije celo krivuljo K. Nobena od teh dveh trditev ni kar očitno pravilna in je tudi ni lahko dokazati (kar se tiče števila komponent, ni lahko pokazati niti, da je množica $\boldsymbol{R}^2 - K$ nepovezana, niti, da število njenih komponent ni večje od 2). Jasno je tudi, da nobena od teh dveh trditev ne bo nujno držala, če zamenjamo enostavno sklenjeno krivuljo K s splošnejšo kompaktno množico. Slika 3 prikazuje 1-razsežno kompaktno množico v $\boldsymbol{R}^2$, katere komplement ima več kot dve komponenti, na sliki 4 pa je kompaktna množica X, katere komplement ima sicer dve komponenti, vendar rob ene od njiju ne pokrije vse množice X. Bolj presenetljivo je, da obstaja v $\boldsymbol{R}^2$ tudi taka kompaktna množica X, da ima njen komplement več kot dve komponenti, pa je vseeno vsaka točka iz X robna za vse komponente iz $\boldsymbol{R}^2 - X$.



Slika 3



Slika 4

Običajni dokazi Jordanovega izreka so čisto elementarni, tako da ne zahtevajo nič kaj več znanja topologije, kot ga bralec dobi iz [18]; so pa razmeroma dolgi in zapleteni. Zato tu dokaza ne bomo napravili. Kogar dokaz zanima, si ga lahko ogleda npr. v knjigah [1], [12], [13]. V [3] pa je zelo lep in preprost dokaz (ki bi bil razumljiv tudi dijakom srednjih ali celo osnovnih šol) Jordanovega izreka za primer, da je K poligonalna enostavna sklenjena črta.

Še dve opombi. Če je X poljubna kompaktna množica v $\mathbf{R}^2$, je natanko ena od komponent iz $\mathbf{R}^2 - X$ neomejena, torej taka, da je ne pokrije noben krog. Množica X je namreč omejena in zato jo lahko pokrijemo s kakim krogom D. Zunanjost kroga je potem odprta množica v $\mathbf{R}^2 - X$ in je očitno povezana in neomejena. Zato ta množica leži v neki komponenti iz $\mathbf{R}^2 - X$. Vse druge komponente iz $\mathbf{R}^2 - X$ pa potem ležijo v D, torej so omejene. Če je K enostavna sklenjena krivulja v $\mathbf{R}^2$, imenujemo omejeno komponento iz $\mathbf{R}^2 - K$ *notranje polje* krivulje K, neomejeno komponento pa *zunanje polje*.

Druga opomba je tale. Označimo z S^2 enotsko 2-razsežno sfero, torej rob enotske krogle v $\mathbf{R}^3$. Bodi K enostavna sklenjena krivulja na S^2. Če je x_0 poljubna točka v $S^2 - K$, lahko $S^2 - \{x_0\}$ preslikamo s stereografsko projekcijo homeomorfno na $\mathbf{R}^2$ [18; str. 7]. Pri tem se seveda K preslika na neko enostavno sklenjeno krivuljo v $\mathbf{R}^2$. Zato iz 1.1 brez težav dobimo:

1.6. Posledica. *Če je K enostavna sklenjena krivulja v S^2, ima komplement $S^2 - K$ natanko dve komponenti in K je rob obeh teh komponent.*

2. Schoenfliesov izrek

Pojdimo zdaj k drugemu izreku, ki ga omenja naslov članka. Označimo z E zaprti enotski krog v $\mathbf{R}^2$. Topološki prostor, homeomorfen E, bomo imenovali *disk*. Leta 1908 je A. Schoenflies [16] dokazal tole dopolnitev Jordanovega izreka:

2.1. Schoenfliesov izrek. *Če je K enostavna sklenjena krivulja v $\mathbf{R}^2$, je zaprtje njenega notranjega polja disk.*

Schoenfliesov dokaz je bil čisto topološki. Nekaj let kasneje pa je Caratheodory pokazal, da se Schoenfliesov izrek da izpeljati iz Riemannovega izreka o konformnih preslikavah.

Verjetno se tudi Schoenfliesov izrek marsikomu zdi očiten. Enostavna sklenjena krivulja je namreč nekakšna zverižena krožnica. In če krožnico S^1 lahko deformiramo v K, »gotovo« lahko obenem deformiramo notranje polje krožnice S^1 na notranje polje krivulje K. Kasneje bomo videli, da je tak »sklep« zmoten.

Schoenfliesov izrek je ekvivalenten vrsti drugih trditev (in zato tudi vsaki od teh trditev pravimo Schoenfliesov izrek):

2.2. Izrek. *Tele trditve so ekvivalentne:*

a) *Za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $K \subset \mathbf{R}^2$ je zaprtje notranjega polja krivulje K disk.*

b) *Za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $K \subset \mathbf{R}^2$ obstaja homeomorfizem $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ki preslika K na enotsko krožnico S^1.*

c) *Za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $K \subset S^2$ sta zaprtji obeh komponent komplementa $S^2 - K$ diska.*

d) *Za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $K \subset S^2$ obstaja homeomorfizem $S^2 \to S^2$, ki preslika K na »ekvator« sfere S^2, to je na množico točk v S^2, ki imajo 3. koordinato enako 0.*

Ta izrek bomo dokazali bolj površno. Pokazali bomo, da veljajo implikacije (a) $\to$ (c) $\to$ $\to$ (d) $\to$ (b) $\to$ (a).

Da iz (a) sledi (c), dokažemo takole: Krivulja K deli S^2 na dve odprti množici, recimo U in V (glej 1.6). Izberimo poljubno točko $x_0 \in V$ in naj bo $h: S^2 - \{x_0\} \to \boldsymbol{R}^2$ poljuben homeomorfizem (recimo stereografska projekcija). Potem je $h(K)$ enostavna sklenjena krivulja v $\boldsymbol{R}^2$ in $h(U)$ je njeno notranje polje. Po (a) je zato $h(U) \cup h(K)$ disk, torej je tudi $U \cup K$ disk. Analogno dokažemo, da je $V \cup K$ disk.

Dokaz, da iz (c) sledi (d): Bodita D_1 in D_2 zaprtji komponent množice $S^2 - K$. Po (c) sta D_1 in D_2 diska. Naj bosta B_1 in B_2 zaprta zgornja in spodnja hemisfera na S^2, torej diska, ki ju ekvator omejuje v S^2. Izberimo homeomorfizem g krivulje K na ekvator. Po [19; 7.2] je g mogoče razširiti do homeomorfizma $h_1: D_1 \to B_1$ in do homeomorfizma $h_2: D_2 \to B_2$. Ta dva homeomorfizma skupaj sestavljata homeomorfizem $h: S^2 \to S^2$, ki seveda K preslika na ekvator.

Dokaz, da iz (d) sledi (b): Bodi s »severni pol« na S^2 in naj bo $f: S^2 - \{s\} \to \boldsymbol{R}^2$ stereografska projekcija. Če je K dana enostavna sklenjena krivulja v $\boldsymbol{R}^2$, je $f^{-1}(K)$ enostavna sklenjena krivulja na S^2 in zato po (d) obstaja homeomorfizem $h: S^2 \to S^2$, ki $f^{-1}(K)$ preslika na ekvator. Iz [19; 3.6] zlahka sledi, da obstaja homeomorfizem $g: S^2 \to S^2$, ki ne premakne nobene točke na ekvatorju, točko $h(s)$ pa preslika nazaj v s. Kompozitum $g \circ h: S^2 \to S^2$ je spet homeomorfizem, ki $f^{-1}(K)$ preslika na ekvator, in poleg tega je $g \circ h(s) = s$. Kompozitum $f \circ g \circ h \circ f^{-1}$ pa je potem homeomorfizem $\boldsymbol{R}^2$ na $\boldsymbol{R}^2$, ki K preslika na S^1.

Dokaz, da iz (b) sledi (a), je še najlažji in ga bomo izpustili.

Pri začetni formulaciji Schoenfliesovega izreka (2.1) smo se sklicevali na Jordanov izrek. Za formulacijo trditve (b) iz 2.2 pa nam Jordanov izrek ni potreben, pač pa Jordanov izrek očitno sledi iz 2.2 (b). Ker lahko tudi dokažemo 2.2 (b) brez sklicevanja na Jordanov izrek, ubijemo tako dve muhi na en mah. Po tem lahko pričakujemo, da je dokaz Schoenfliesovega izreka težji kot dokaz Jordanovega, in res je tako. Zato tu seveda tudi Schoenfliesovega izreka ne bomo dokazovali. Bralec si dokaz lahko ogleda npr. v [9], [10], [12] ali [13] (ti dokazi si niso enaki). Dokaz Schoenfliesovega izreka za poligonalne enostavne sklenjene krivulje je mnogo lažji kot dokaz splošnega izreka in bi nam bil čisto dostopen (glej npr. [4]). Vendar tudi tega dokaza ne bomo napravili, da se nam članek ne bo preveč razvlekel.

Iz Schoenfliesovega izreka z lahkoto dobimo:

2.3. Posledica. *Če sta J in K poljubni enostavni sklenjeni krivulji v R^2, obstaja homeomorfizem $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, ki J preslika na K.*

Dokaz. Iz 2.1 in 2.2 sledi, da obstajata taka homeomorfizma f in g iz $\boldsymbol{R}^2$ na $\boldsymbol{R}^2$, da je $f(J) = S^1$ in $g(K) = S^1$. Kompozitum $g^{-1} \circ f$ je potem homeomorfizem iz $\boldsymbol{R}^2$ na $\boldsymbol{R}^2$, ki J preslika na K.

3. Jordanov izrek v višjih dimenzijah

Pri topologiji štejemo homeomorfne prostore za enake, ekvivalentne. Zato bomo vsak prostor, ki je homeomorfen standardni n-sferi S^n, to je enotski sferi v $\boldsymbol{R}^{n+1}$, imenovali *topološka n-sfera*. Topološka 1-sfera je torej isto kot enostavna sklenjena krivulja.

Leta 1912 je Brouwer [5] dokazal tole naravno posplošitev klasičnega Jordanovega izreka:

3.1. Jordan-Brouwerjev izrek o separaciji. *Če je K poljubna topološka $(n-1)$-sfera v $\boldsymbol{R}^n (n \geq 2)$, potem ima komplement $\boldsymbol{R}^n - K$ natanko dve komponenti in K je rob vsake od njiju.*

Originalni Brouwerjev dokaz je bil težak. Po mogočnem razvoju, ki ga je algebraična topologija napravila od tistih časov, pa je dokaz postal preprosta topološka vaja. Mi tule sredstev algebraične topologije nimamo in zato nam je dokaz izreka 3.1 nedostopen. No, kljub temu lahko povemo o njem nekaj besed. Če je U odprta množica v $\boldsymbol{R}^n$, je število njenih komponent določeno z ničto homološko grupo $\tilde{H}_0(U)$. Če je U komplement kompaktne množice K, je po Alexandrovem dualnostnem izreku grupa $\tilde{H}_0(\boldsymbol{R}^n - K)$ izomorfna

$(n-1)$-ti Alexander-Čechovi kohomološki grupi $H^{n-1}(K)$, ta pa je odvisna le od topološkega tipa množice K (celo samo od njenega homotopskega tipa). Tako dobimo:

3.2. Izrek. *Če sta K in L homeomorfni kompaktni množici v $\mathbf{R}^n$, imata njuna komplementa $\mathbf{R}^n - K$ in $\mathbf{R}^n - L$ isto število komponent.*

Komplement sfere S^{n-1} v $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ ima dve komponenti. Zato iz 3.2 sledi:

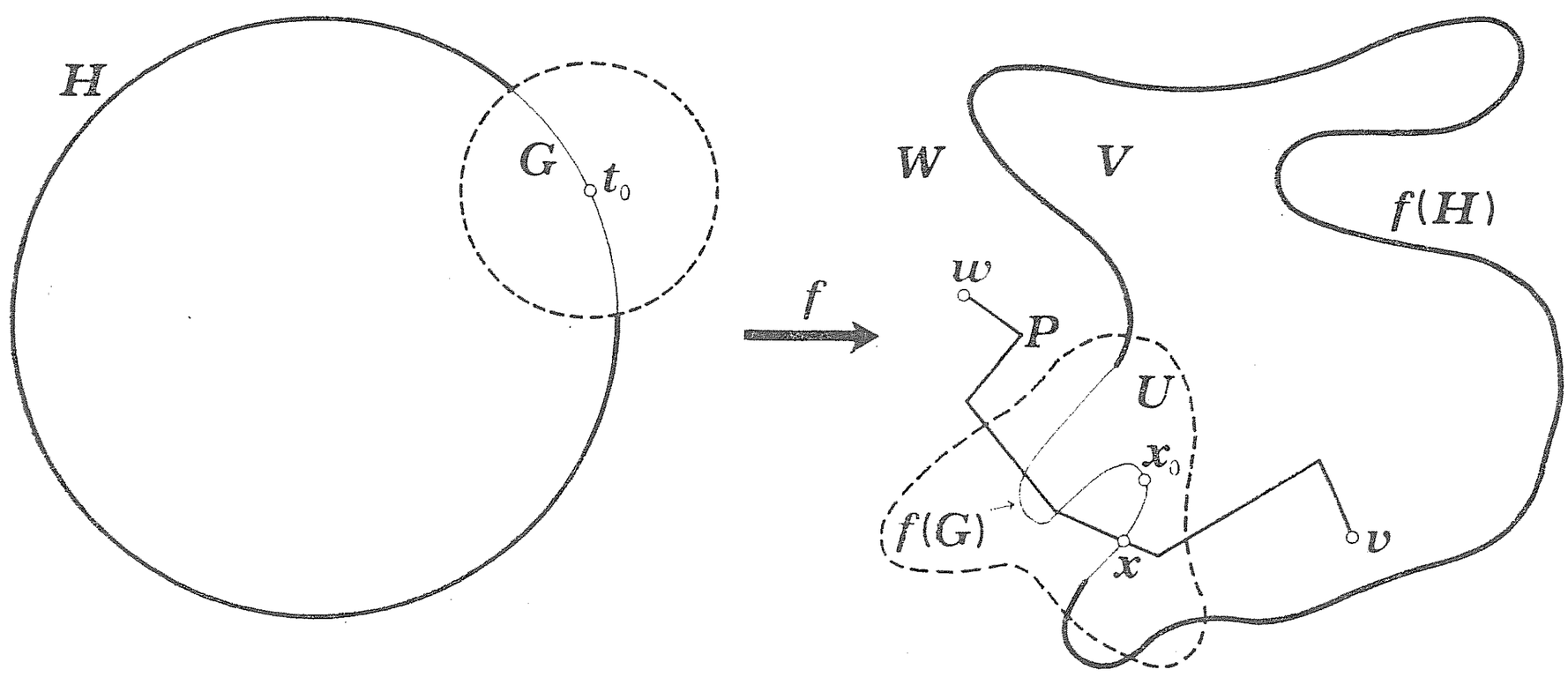
3.3. Posledica. *Če je K topološka $(n-1)$-sfera v $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$, ima $\mathbf{R}^n - K$ dve komponenti.*

Če je $k < n$, identificirajmo vsako točko $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbf{R}^k$ s točko $(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, ki ima prvih k koordinat enakih koordinatam točke x, zadnjih $n-k$ koordinat pa enakih 0. S to identifikacijo postane $\mathbf{R}^k$ k-razsežna koordinatna ravnina v $\mathbf{R}^n$ in obenem postaneta zaprta enotska krogla $B^k \subset \mathbf{R}^k$ in enotska $(k-1)$-sfera $S^{k-1} \subset \mathbf{R}^k$ podmnožici prostora $\mathbf{R}^n$. Ta dogovor bomo upoštevali do konca članka.

Prav lahko je videti, da je pri $k \leq n$ komplement krogle B^k v prostoru $\mathbf{R}^n$ povezan. Zato iz 3.2 sledi:

3.4. Posledica. *Če je množica $B \subset \mathbf{R}^n (n \geq 2)$ homeomorfna zaprti enotski krogli B^k prostora $\mathbf{R}^k (k \leq n)$, je njen komplement $\mathbf{R}^n - B$ povezan.*

Z rezultatom 3.3 že imamo del izreka 3.1. Pri dokazovanju ostalega si pomagamo s 3.4 (verjetno ni mogoče dokazati izreka 3.1, ne da bi spotoma dokazali 3.4 vsaj za $k = n-1$; zato nekateri vključijo 3.4 kar v formulacijo Jordan-Brouwerjevega izreka). Naj bo torej $K \subset \mathbf{R}^n$ in naj obstaja homeomorfizem $f: S^{n-1} \to K$. Po 3.3 ima $\mathbf{R}^n - K$ dve komponenti, recimo V in W. Dokazati moramo še, da je vsaka točka iz K robna za V in W. Pa recimo, da točka $x_0 \in K$ ne leži na robu množice V. Potem obstaja odprta okolica U točke x_0 v $\mathbf{R}^n$, ki množice V ne seka. Ker je preslikava f zvezna, ima točka $t_0 = f^{-1}(x_0)$ tako okolico G v S^{n-1}, da je $f(G) \subset U$. Pri tem lahko vzamemo za G kar presek sfere S^{n-1} z dovolj majhno odprto kroglo v $\mathbf{R}^n$, ki ima središče v t_0 (glej sliko 5 za primer $n = 2$).



Slika 5

Pri takem G pa je množica $H = S^{n-1} - G$ (in prav tako $\overline{G}$) homeomorfna B^{n-1} (to je prav lahko pokazati neposredno; ne potrebujemo kakega Schoenfliesovega izreka). Seveda je tudi množica $f(H)$ homeomorfna B^{n-1} in zato je po 3.4 njen komplement $\mathbf{R}^n - f(H)$ povezan. Če si torej izberemo poljubni točki $v \in V$ in $w \in W$, obstaja po izreku 4 iz [18] poligonska črta $P \subset \mathbf{R}^n - f(H)$ od v do w. Ker v in w pripadata različnima komponentama množice $\mathbf{R}^n - K$, mora P nekje sekati K. Naj bo x prva točka na P (če gremo od v proti w), ki leži v K. Seveda je $x \in f(G) \subset U$. Ker je množica U odprta, je okolica za x in zato vsebuje vse točke na P, ki so dovolj blizu x. Toda vse točke na P med v in x so v V (po definiciji točke x), torej je $U \cap V \neq \emptyset$. S tem pa smo prišli do protislovja, torej je bil privzetek, da x_0 ni robna točka za V, napačen. Enako pokažemo, da je vsaka točka iz K robna za W.

V [18; str. 7] je bil brez dokaza naveden tale izrek:

3.5. Brouwerjev izrek o invarianci odprtih množic. *Če sta U in V homeomorfni podmnožici prostora $\boldsymbol{R}^n$ in če je množica U odprta, potem je tudi V odprta.*

To je eden najosnovnejših izrekov v topologiji evklidskih prostorov in mnogoterosti (glej npr. [18], str. 7 in str. 15, ter [19], str. 27 in dokaz izreka 2.2). Pokažimo, da 3.5 dokaj preprosto sledi iz 3.3 in 3.4 (za $k = n$).

Vzemimo poljubno točko $y \in V$. Treba je pokazati, da je y notranja točka za V. Izberimo homeomorfizem $f: U \to V$ in naj bo $x = f^{-1}(y)$. Ker je množica U odprta, obstaja taka zaprta krogla Q s središčem x, da je $Q \subset U$. Označimo z S rob krogle Q, s Q° pa njeno notranjost.

Oglejmo si podmnožici $f(Q^\circ)$ in $\boldsymbol{R}^n - f(Q)$ množice $\boldsymbol{R}^n - S$. Množica $f(Q^\circ)$ je povezana (ker je zvezna slika povezane množice Q°) in zato vsa leži v eni sami komponenti množice $\boldsymbol{R}^n - S$. Tudi množica $\boldsymbol{R}^n - f(Q)$ je povezana (in sicer po 3.4 za $k = n$), torej tudi ta leži vsa v eni sami komponenti iz $\boldsymbol{R}^n - S$. Toda $\boldsymbol{R}^n - S$ ima po 3.3 natanko dve komponenti in ker $f(Q^\circ)$ in $\boldsymbol{R}^n - f(Q)$ skupaj pokrivata vso množico $\boldsymbol{R}^n - S$, ni druge možnosti, kot da je vsaka od množic $f(Q^\circ)$, $\boldsymbol{R}^n - f(Q)$ kar enaka eni od komponent v $\boldsymbol{R}^n - S$. Iz 1.4 zato sledi, da je množica $f(Q^\circ)$ odprta v $\boldsymbol{R}^n$. Seveda je $y = f(x) \in f(Q^\circ) \subset V$, torej je y res notranja točka množice V.

4. Schoenfliesov izrek v višjih dimenzijah

Pri Schoenfliesovem izreku je manj jasno kot pri Jordanovem, kaj naj bi bila »prava« posplošitev na višje dimenzije. Za splošne prostore $\boldsymbol{R}^n$ lahko namreč formuliramo več različnih trditev, za katere je klasični Schoenfliesov izrek (ali kaka ekvivalentna trditev iz 2.2) poseben primer. Najbolj direktna posplošitev pa bi bila najbrž tale:

4.1. Domneva. *Za vsako topološko $(n-1)$-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$ je zaprtje njenega notranjega območja homeomorfno B^n.*

Ta domneva je napačna za vsak $n > 2$. Menim, da je to eden od primerov, ko nas »zdrava pamet« vara. Domnevo 4.1, recimo za $n = 3$, je namreč mogoče »dokazati« prav tako kot klasični Schoenfliesov izrek: če je K zverižena sfera, potem tisto, kar je znotraj, ne more biti nič drugega kot zverižena krogla. Prvi primer topološke 2-sfere v $\boldsymbol{R}^3$, za katero je domneva 4.1 napačna, je leta 1924 konstruiral Alexander [2]; tista topološka 2-sfera je kasneje dobila ime *Alexandrova rogata sfera*, ker jo konstruiramo tako, da na okroglo sfero nataknemo neskončno mnogo »rogov«, ki se med seboj prepletajo. Tu bomo rajši pokazali neki drug primer, ki ga je laže opisati in narisati.

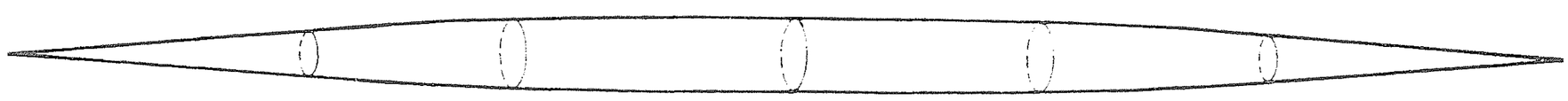
Najprej pa tale opomba: za vsak n lahko formuliramo trditve, analogne (a), (b), (c) in (d) iz 2.2, in potem lahko dokažemo (s praktično istim dokazom kot pri 2.2), da so vse te posplošene trditve med seboj ekvivalentne — le da so pri $n \geq 3$ vse napačne. Tako je npr. trditev iz 4.1 ekvivalentna tejle (za $n \geq 3$ napačni) trditvi:

4.2. Domneva. *Za vsako topološko $(n-1)$-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$ obstaja homeomorfizem $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, ki K preslika na S^{n-1}.*

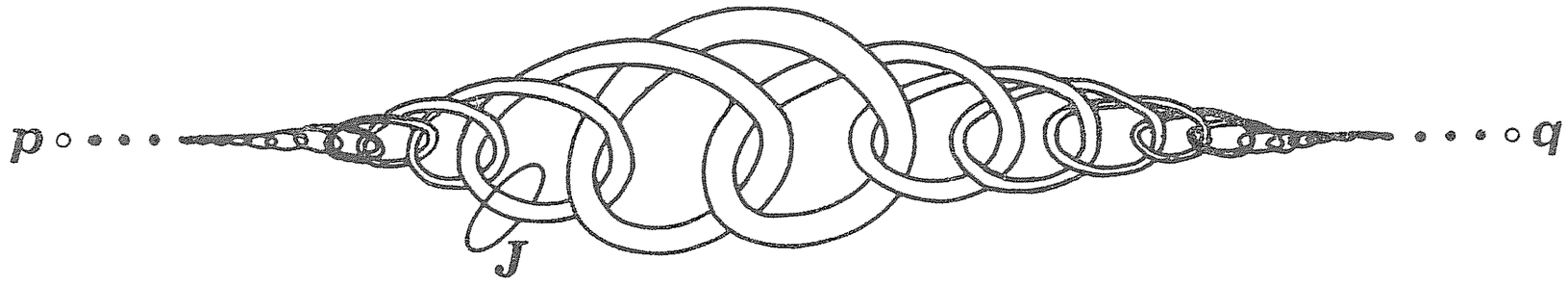
Opozorimo, da sta trditvi 4.1 in 4.2 ekvivalentni le tako, kot sta napisani: če je za *vsako* topološko $(n-1)$-sfero v $\boldsymbol{R}^n$ zaprtje njenega notranjega območja homeomorfno B^n, potem je *vsako* topološko $(n-1)$-sfero v $\boldsymbol{R}^n$ mogoče preslikati na S^{n-1} s homeomorfizmom vsega prostora $\boldsymbol{R}^n$; in obratno. Za kako *posamezno* topološko $(n-1)$-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$ pa se lahko zgodi, da je zaprtje njenega notranjega območja homeomorfno B^n, pa vseeno ni homeomorfizma $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, ki bi K preslikal na S^{n-1}. Prav sfera, ki jo nameravamo zdaj pokazati, je taka.

V skladu s splošno rabo bomo topološko $(n-1)$-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$ imenovali *krotko*, če obstaja kak homeomorfizem $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, ki K preslika na S^{n-1}; če pa takega homeomorfizma ni, je K *divja* topološka sfera.

Vzemimo kroglo B^3 in jo razsvaljkajmo v dolgega, tankega, na obeh koncih zašiljenega črva (slika 6). Ta črv je homeomorfen B^3 in njegov rob je homeomorfen S^2. Zdaj pa tega črva na obeh koncih neskončnokrat zavozlajmo (podobno kot delamo z nitjo pri kvačkanju);



Slika 6



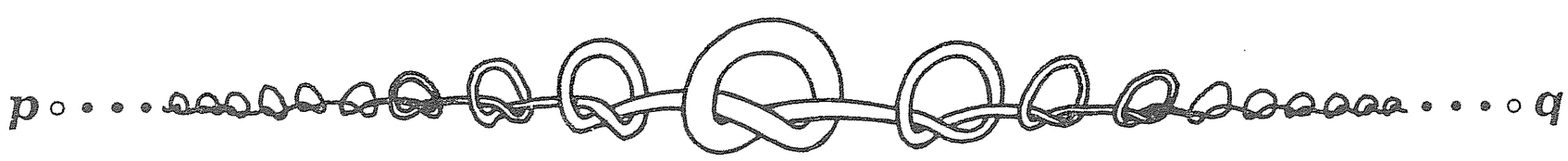
Slika 7

proti koncu naj vozli postajajo vse manjši in naj na vsaki strani konvergirajo proti eni sami točki (p oziroma q) — glej sliko 7. Črv, čeprav zavozlan, je še vedno homeomorfen B^3 in njegov rob — imenujmo ga K — je homeomorfen S^2. Topološka 2-sfera K je divja. Da se namreč pokazati, da njeno zunanje območje ni homeomorfno zunanjemu območju za S^2 (to je $\boldsymbol{R}^3 - B^3$). To najlaže dokažemo s homotopskimi sredstvi. Lahko se je prepričati, da je množica $\boldsymbol{R}^3 - B^3$ enostavno povezana, tj. vsako sklenjeno krivuljo, ki leži v $\boldsymbol{R}^3 - B^3$, lahko znotraj $\boldsymbol{R}^3 - B^3$ zvezno stisnemo v točko. Če bi bil komplement črva na sliki 7 homeomorfen $\boldsymbol{R}^3 - B^3$, bi bil tudi sam enostavno povezan; da pa se pokazati, da npr. krožnice J, kot je narisana na sliki 7, ni mogoče zvezno stisniti v točko v komplementu črva.

Opozoriti moramo, da pravkar omenjena homotopska metoda ne da natančnega kriterija za razločevanje med divjimi in krotkimi topološkimi sferami. Če npr. črva na sliki 7 presekamo na pol in nato levo polovico odvržemo, bo desna polovica še vedno homeomorfna B^3; za njen komplement v $\boldsymbol{R}^3$ pa se da pokazati, da je ne samo enostavno povezan, ampak celo homeomorfen $\boldsymbol{R}^3 - B^3$. Kljub temu se izkaže, da je tudi desni »polčrv« divji.

Pokazali smo primer topološke 2-sfere v $\boldsymbol{R}^3$, katere zunanje območje je »slabo«. Od tod lahko takoj dobimo topološko sfero, pri kateri zaprtje notranjega območja ne bo homeomorfno B^3: prejšnjo topološko sfero K preslikajmo z inverzijo glede na poljubno sfero, ki ima središče v notranjosti našega črva (manj učeno povedano: če si črva na sliki 6 mislimo praznega, tj. brez notranjosti, mu konice lahko zavihamo navznoter in potem znotraj napravimo tistih neskončno mnogo vozlov).

Še na nekaj bi bilo treba opozoriti: neskončno mnogo vozlov črva ne napravi nujno divjega. Razmeroma lahko je pokazati, da je površina črva na sliki 8 krotka topološka 2-sfera.



Slika 8

Bralec more najti v [8] odlično in pristopno napisano ter obenem dokaj izčrpno poročilo o znanih rezultatih glede topoloških 2-sfer v $\boldsymbol{R}^3$. Ta teorija je najbolj cvetela v letih od 1955 do 1970. Do danes se je težišče premaknilo bolj na študij višjih dimenzij.

Divje topološke sfere v višjih dimenzijah dobimo iz nižje dimenzionalnih s konstrukcijo, ki se ji pravi suspenzija. Zaradi nazornosti začnimo v ravnini. Vzemimo poljubno topološko

1-sfero (enostavno sklenjeno krivuljo) K v $\boldsymbol{R}^2$. Izberimo točki $u, v \in \boldsymbol{R}^3 - \boldsymbol{R}^2$ tako, da bo u »nad« ravnino $\boldsymbol{R}^2$, v pa »pod« njo. *Suspenzija* nad K z vrhovoma u in v — označili jo bomo s ΣK — je unija daljic od u do vseh točk iz K in daljic od v do vseh točk iz K; to je torej dvojni stožec z bazo K. Vsak homeomorfizem $K \to S^1$ očitno lahko razširimo do homeomorfizma $\Sigma K \to S^2$ (tvorilke suspenzije preslikamo na meridianske polkroge na S^2); ΣK je torej topološka 2-sfera v $\boldsymbol{R}^3$. Analogno konstruiramo za vsak n in za vsako topološko $(n-1)$-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$ suspenzijo $\Sigma K \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ in ta je potem topološka n-sfera.

Vzemimo zdaj tako (divjo) topološko $(n-1)$-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$ $(n \geq 3)$, da ena od komponent množice $\boldsymbol{R}^n - K$ ni enostavno povezana. Dokaj lahko je pokazati, da tudi ustrezna komponenta množice $\boldsymbol{R}^{n+1} - \Sigma K$ ni enostavno povezana; natančneje, fundamentalna grupa (glej [14]) vsake komponente množice $\boldsymbol{R}^{n+1} - \Sigma K$ je izomorfna fundamentalni grupi ustrezne komponente množice $\boldsymbol{R}^n - K$. Z indukcijo torej lahko pokažemo, da za vsak $n \geq 3$ obstajajo divje topološke $(n-1)$-sfere v $\boldsymbol{R}^n$.

Kadar je kaka smiselna domneva — v našem primeru 4.1 oziroma 4.2 — v splošnem napačna, se vedno vprašamo, kdaj je pa le pravilna. M. Brown je leta 1960 našel dovolj zadovoljiv odgovor na to vprašanje v našem primeru. Da bi mogli formulirati njegov izrek, moramo najprej uvesti pojem lokalne ploščatosti.

Vsaka točka na S^{n-1} ima v S^{n-1} kako okolico (npr. presek sfere S^{n-1} s poljubno dovolj majhno odprto kroglo v $\boldsymbol{R}^n$), ki je homeomorfna $\boldsymbol{R}^{n-1}$ (primerjaj [19]). Ker gre za topološko lastnost, velja ista trditev za vsak prostor, ki je homeomorfen S^{n-1}. Če je torej K poljubna topološka $(n-1)$-sfera v $\boldsymbol{R}^n$, ima vsaka njena točka x v K odprto okolico U, ki je homeomorfna $\boldsymbol{R}^{n-1}$. Ali pa se da tak homeomorfizem $U \to \boldsymbol{R}^{n-1}$ razširiti do homeomorfizma kake okolice množice U v $\boldsymbol{R}^n$ na kako okolico hiperravnine $\boldsymbol{R}^{n-1}$ v $\boldsymbol{R}^n$? V splošnem ne; če pa, pravimo, da je sfera K v točki x lokalno ploščata. Natančneje, topološka $(n-1)$-sfera $K \subset \boldsymbol{R}^n$ je *lokalno ploščata v točki* $x \in K$, če obstajata taka odprta okolica V za x v $\boldsymbol{R}^n$ in tak homeomorfizem $h: V \to \boldsymbol{R}^n$, da je $h(V \cap K) = \boldsymbol{R}^{n-1}$. Dalje pravimo, da je topološka sfera K *lokalno ploščata*, če je lokalno ploščata v vsaki svoji točki.

Sfera S^{n-1} je lokalno ploščata. Tu namreč lahko vzamemo za okolico V poljubne točke $x \in S^{n-1}$ kar odprti polprostor v $\boldsymbol{R}^n$, omejen z $(n-1)$-razsežno ravnino, ki je pravokotna na vektor od izhodišča do x. Homeomorfizem h konstruiramo tako, da odprto hemisfero $V \cap S^{n-1}$ preslikamo na $\boldsymbol{R}^{n-1}$, radialne poltrake iz izhodišča, ki ležijo v V, pa na premice, ki $\boldsymbol{R}^{n-1}$ sekajo pravokotno. Zapišimo h za primer, da je x »severni pol« $(0, \ldots, 0, 1)$: če vsako točko iz $\boldsymbol{R}^n$ predstavimo kot par (y, t), pri čemer je $y \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ in $t \in \boldsymbol{R}$, potem je homeomorfizem h dan s formulo $h(y, t) = (y/t, \log(\| y \|^2 + t^2))$. Od tod zdaj očitno sledi, da je lokalno ploščata tudi vsaka krotka topološka $(n-1)$-sfera v $\boldsymbol{R}^n$. Brownov izrek ([6] in [7]) pa pravi, da velja tudi obratno:

4.3. Posplošeni Schoenfliesov izrek. *Topološka $(n-1)$-sfera v $\boldsymbol{R}^n$ je krotka tedaj in le tedaj, ko je lokalno ploščata.*

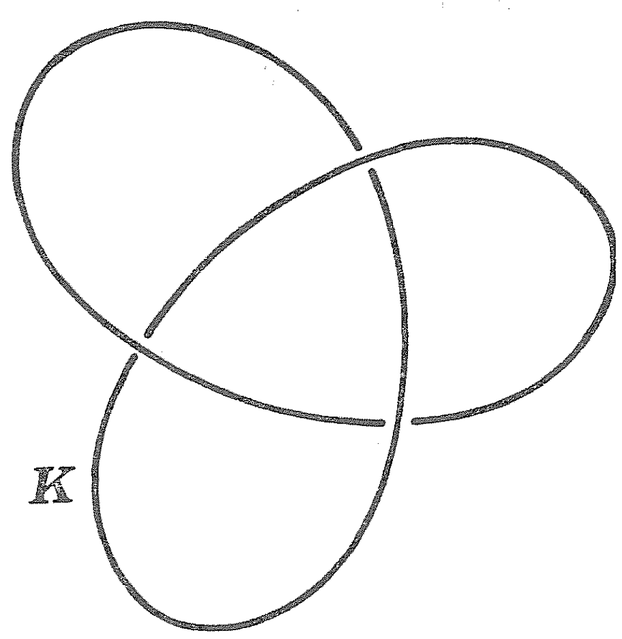
Površina črva na sliki 7 torej ni lokalno ploščata. V resnici je ta topološka 2-sfera lokalno ploščata povsod razen v točkah p in q. Površina črva na sliki 8 pa je lokalno ploščata povsod, tudi v p in q, pa če se to zdi še tako neverjetno.

Za konec si oglejmo še tole posplošitev domneve 4.2 (ki je zato tudi posplošitev klasičnega Schoenfliesovega izreka):

4.4. Domneva. *Za vsako topološko k-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$ $(k < n)$ obstaja homeomorfizem $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, ki K preslika na $S^k \subset \boldsymbol{R}^{k+1} \subset \boldsymbol{R}^n$.*

Povedali smo že, da je ta domneva napačna, če je $n \geq 3$ in $k = n - 1$. Pa je napačna tudi za vsak drug $k > 0$, če je le $n \geq 3$. Kot zgoraj nas zato zanima, ali je morda ta domneva pravilna vsaj za kak razred »lepih« topoloških k-sfer v $\boldsymbol{R}^n$, npr. za gladke ali, splošneje,

za lokalno ploščate (lokalno ploščatost pri poljubnem k definiramo podobno kot pri $k = n - 1$). Res se izkaže (glej [17]), da je domneva 4.4 pravilna za vsako lokalno ploščato topološko k-sfero $K \subset \boldsymbol{R}^n$, če je le $k \neq n - 2$. Če pa je $k = n - 2$, je domneva 4.4 napačna za še tako lepe topološke k-sfere v $\boldsymbol{R}^n$. Tu se namreč pojavijo vozli. Gladke topološke 1-sfere K v $\boldsymbol{R}^3$, ki jo prikazuje slika 9, ni mogoče preslikati na S^1 z nobenim homeomorfizmom



Slika 9

$\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$. Pri dokazu te trditve se moramo spet zateči k homotopskim metodam. Ni težko pokazati, da je fundamentalna grupa $\pi_1(\boldsymbol{R}^3 - S^1)$ izomorfna grupi $\pi_1(S^1)$ in s tem aditivni grupi celih števil $\boldsymbol{Z}$ (glej [14]). Če bi obstajal kak homeomorfizem $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, ki bi K preslikal na S^1, bi bila seveda tudi komplementa $\boldsymbol{R}^3 - K$ in $\boldsymbol{R}^3 - S^1$ homeomorfna in bi zato imela izomorfni fundamentalni grupi. Da pa se pokazati, da grupa $\pi_1(\boldsymbol{R}^3 - K)$ ni izomorfna $\boldsymbol{Z}$.

Bralcu, ki bi ga zanimali problemi, kakršne smo obravnavali v tem članku, priporočam Rushingovo knjigo [15].

LITERATURA

[1] P. S. Aleksandrov, *Kombinatornaja topologija*, Moskva, OGIZ 1947.

[2] J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1924) 8—10.

[3] B. H. Arnold, *Intuitive Concepts in Elementary Topology*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1962.

[4] R. H. Bing, *Elementary point set topology*, Amer. Math. Monthly **67** (1960) 1—58.

[5] L. E. J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum*, Math. Ann. **71** (1912) 314—319.

[6] M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960) 74—76.

[7] M. Brown, *Locally flat imbeddings of topological manifolds*, Ann. of Math. (2) **75** (1962) 331—341.

[8] C. E. Burgess, J. W. Cannon, *Embeddings of surfaces in E^3*, Rocky Mountain J. Math. **1** (1971) 259—344.

[9] S. S. Cairns, *An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951) 860—867.

[10] D. W. Hall, G. L. Spencer, *Elementary Topology*, New York, Wiley 1959.

[11] C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Paris, Gauthier-Villars 1893.

[12] B. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, Berlin, Springer 1923.

[13] M. H. A. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge, Cambridge Univ. Press 1951.

[14] P. Petek, *Fundamentalna grupa*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 17—26.

[15] T. B. Rushing, *Topological Embeddings*, New York, Academic Press 1973.

[16] A. Schoenflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, II*, Leipzig, Teubner 1908.

[17] J. R. Stallings, *On topologically unknotted spheres*, Ann. of Math. (2) **77** (1963) 490—503.

[18] I. Vidav, *Splošna topologija*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1—16.

[19] J. Vrabec, *Ploskve*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 27—47.

Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 5/6

O NEKEM EKSTREMALNEM PROBLEMU

MILAN HLADNIK

AMS Subj. Class. (1970): 50 A 30, 28 A 75

Članek obravnava, skupaj z nekaterimi sorodnimi vprašanji, naslednji problem, ki ga je zastavil Kakeya: Poiskati lik z minimalno ploščino, v katerem je mogoče daljico dane dolžine obrniti za 180°.

ON AN EXTREMUM PROBLEM

How to find a plane figure of least area on which a line segment of a certain length can be moved so that it returns to its original position but with its direction reversed? This old problem of Kakeya is treated together with some related questions.

Zastavimo si naslednjo nalogo: Orientirano daljico želimo tako premikati po ravnini, v kateri leži, da se vrne v prvotno lego z nasprotno orientacijo. To seveda lahko storimo na veliko načinov, vprašanje pa je, koliko »prostora« za tako gibanje potrebujemo. Daljico dolžine a lahko npr. obrnemo v krogu s polmerom $a/2$, v četrtini kroga s polmerom a, v polovici astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, v enakostraničnem trikotniku z višino a itd. Ploščine naštetih likov so po vrsti $\pi a^2/4$, $\pi a^2/4$, $3\pi a^2/16$, $a^2/\sqrt{3}$. Pa si predpišimo še pogoj, da je treba daljico zavrteti na čim manjši površini. To pa je že pravi problem, ki ga lahko formuliramo takole:

Problem 1. *Poiskati lik z minimalno ploščino, v katerem je mogoče daljico dane dolžine obrniti za* 180°.

V matematični literaturi je problem znan od leta 1917, ko ga je postavil japonski matematik S. Kakeya. Čeprav ni ostal dolgo nerešen, je zaradi svoje zanimivosti še danes, po skoraj šestedesetih letih, sem in tja deležen pozornosti. V dvajsetih letih tega stoletja so se s problemom ukvarjali nekateri znani matematiki in A. S. Besicovitch ga je leta 1928 rešil v vsej splošnosti [1]. Njegova rešitev je morda presenetljiva. Pokazal je, da lahko obrnemo daljico na poljubno majhni površini. Metode, ki jih je uporabljal pri dokazovanju, so sicer popolnoma elementarne, dokaz sam pa je precej zamotan. Šele pred nedavnim ga je B. Fisher poenostavil [2]. V članku si bomo najprej ogledali Besicovitchevo rešitev, nato pa bomo omenili še nekaj sorodnih problemov.

Besicovitch je ugotovil, da je njegov rezultat posledica naslednje trditve:

Izrek 1. *V trikotniku ABC razdelimo osnovnico AB na 2^n enakih delov in povežemo delilne točke z ogliščem C. Tako smo trikotnik razdelili na 2^n elementarnih trikotnikov. Pri primerni izbiri števila n je mogoče elementarne trikotnike premakniti vzdolž daljice AB tako, da je skupna površina, ki jo prekrivajo v novi legi, poljubno majhna.*

Dokaz. Ploščina trikotnika ABC naj bo S, dolžina osnovnice AB pa c. Označimo delilne točke osnovnice z $A = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_m = B$, kjer je $m = 2^n$. Premaknimo vsak trikotnik $X_{2i}X_{2i+1}C$ $(i = 0, 1, \ldots, 2^{n-1})$ vzdolž osnovnice AB v desno za dolžino $xc2^{-n}$, kjer je $0 < x < 1$. V novem položaju naj bodo oglišča X'_{2i}, X'_{2i+1} in C'. Ta trikotnik deloma prekriva trikotnik $X_{2i+1}X_{2i+2}C$, presečišče stranic $X'_{2i}C'$ in $X_{2i+2}C$ označimo z Y_i (glej sliko 1). Elementarni račun nam pove, da je ploščina trikotnika $X'_{2i}X_{2i+2}Y_i$ enaka $2^{1-n}S(1 - \frac{1}{2}x)^2$ in ploščina preostalega dela lika, ki ga tvorita trikotnika $X'_{2i}X'_{2i+1}C'$ ter $X_{2i+1}X_{2i+2}C$, $2^{-n}Sx^2$. Ker so oglišča Y_i vseh 2^{n-1} trikotnikov $X'_{2i}X_{2i+2}Y_i$ v isti višini nad osnovnico in imata sosednja

dva vzporedni stranici, lahko s translacijo vzdolž osnovnice iz njih sestavimo nov trikotnik $A_1B_1C_1$, tako da jih poravnamo na desno (pri tem je $C_1 = Y_{m/2-1}$, $m = 2^n$). Njegova ploščina znaša

$$S_1 = S(1 - \tfrac{1}{2}x)^2$$

Če s T_1 označimo preostalo ploščino, ki jo pokrivajo premaknjeni elementarni trikotniki, pa velja

$$T_1 < Sx^2/2$$

Proces sedaj nadaljujemo na trikotniku $A_1B_1C_1$, ki je sestavljen iz 2^{n-1} trikotnikov. Na isti način kot prej najdemo trikotnik $A_2B_2C_2$ s ploščino

$$S_2 = S_1(1 - \tfrac{1}{2}x)^2 = S(1 - \tfrac{1}{2}x)^4$$

medtem ko je ploščina, ki jo pokriva 2^n prvotnih elementarnih trikotnikov in ki leži izven $A_2B_2C_2$,

$$T_2 < Sx^2/2 + S_1x^2/2 = S(x^2/2)\,(1 + (1 - \tfrac{1}{2}x)^2)$$

Postopek ponavljamo, dokler gre.

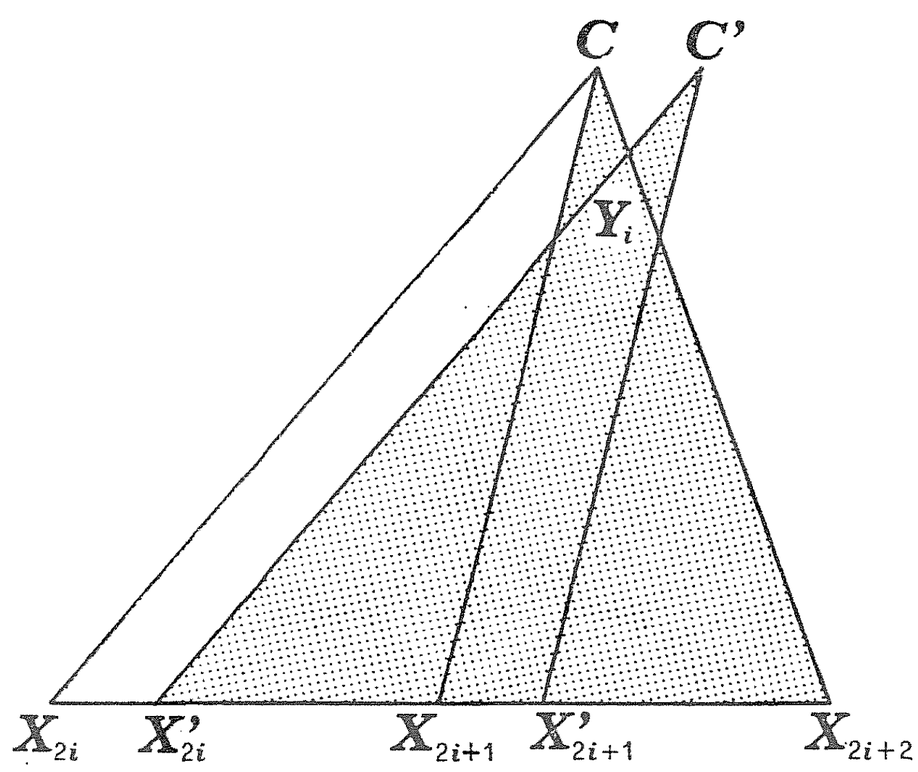
Na r-tem koraku imamo

$$S_r = S(1 - \tfrac{1}{2}x)^{2r}$$

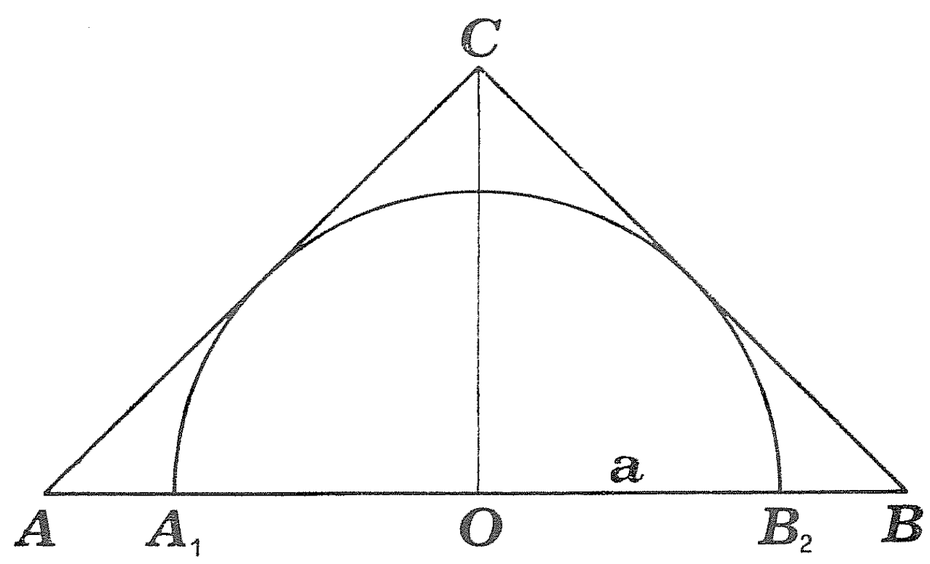
in

$$T_r < S(x^2/2)\,(1 + (1 - \tfrac{1}{2}x)^2 + \ldots + (1 - \tfrac{1}{2}x)^{2r-2})$$

Za vsak r je tako $T_r < 2Sx/(4 - x)$. Če pri poljubnem $\varepsilon > 0$ izberemo x dovolj majhen, bo tedaj $T_r < \varepsilon/2$. Zaradi $\lim\limits_{r\to\infty} S_r = 0$ pa obstaja tudi tako naravno število N, da je $S_r < \varepsilon/2$, brž ko je $r > N$. Če torej vzamemo $n > r > N$, je ploščina lika, ki ga sestavlja prvotnih 2^n elementarnih trikotnikov po r korakih opisane transformacije, manjša od ε. Dokaz izreka je s tem končan.



Slika 1



Slika 2

Sedaj nam preostane še naloga, da pokažemo, kako je mogoče daljico dane dolžine obrniti za 180° na površini, manjši od poljubnega vnaprej predpisanega števila ε. Dolžino daljice označimo z a. Polkrogu s polmerom a očrtajmo enakokrak trikotnik, kot kaže slika 2.

Na trikotnikih CAO in BCO izvedemo transformacijo, opisano v izreku 1, tako da vzamemo za osnovnici CA oz. BC. Naj bo skupna ploščina obeh likov, ki jih dobimo na ta način, manjša od $\varepsilon/2$. Nazadnje enega izmed obeh likov po potrebi še vzporedno premaknemo, tako da se daljici A_1O in OB_1 (glej sliko 2) ujemata. S tem skupne ploščine nismo povečali.

Rezultat opisanega postopka je ta, da imamo tudi polkrog razdeljen na končno število krožnih izsekov, ki pa so premaknjeni tako, da pokrivajo površino, manjšo od $\varepsilon/2$. Naj bo njihovo število N.

Vzemimo dva izseka $O_1D_1E_1$ in $O_2D_2E_2$, ki sta bila pred transformacijo sosednja. Seveda ni treba, da ležita drug ob drugem (slika 3). Ker sta stranici O_1E_1 in O_2D_2 vzporedni, lahko izberemo na loku D_1E_1 točko F_1 dovolj blizu E_1 in na loku D_2E_2 točko F_2 dovolj blizu D_2, tako da polmera O_1F_1 in O_2F_2 oklepata poljubno majhen kot α, npr. $\alpha < \varepsilon/(N-1)a^2$. Polmera O_1F_1 in O_2F_2 podaljšamo do presečišča O in načrtamo še izsek OG_1G_2 s polmerom a in vrhom v O. Ploščina tega krožnega izseka je manjša od $\varepsilon/2(N-1)$. V liku, ki ga tvorijo vsi trije krožni izseki in obe zveznici OF_1 in OF_2, lahko premaknemo daljico dolžine a iz položaja O_1D_1 v položaj O_2E_2, tako da jo najprej zavrtimo okoli točke O_1 v položaj O_1F_1, nato vzdolžno premaknemo, tako da se pokrije z OG_1, to zavrtimo v OG_2, spet porinemo vzdolžno v položaj O_2F_2 ter zavrtimo končno v O_2E_2.

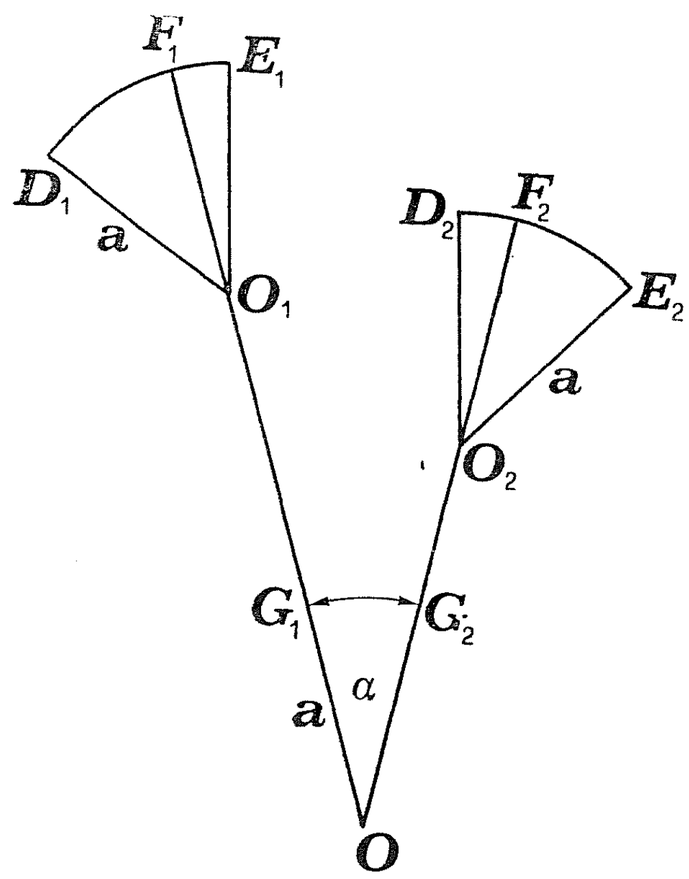
Če napravimo enako konstrukcijo za vsak par sosednjih krožnih izsekov, lahko v tako dobljenem liku premaknemo daljico dolžine a iz začetne lege OA_1 v končno lego $OB_1 = A_1O$ (slika 2). Ker je dodatna površina, ki jo pri opisanem postopku na novo pridobimo, manjša od $(N-1)\,\varepsilon/2\,(N-1)$, smo tako dosegli svoj cilj, to je, na površini, manjši od ε, smo daljico obrnili za 180°.

Na podlagi izreka 1 je mogoče ugnati tudi tale problem:

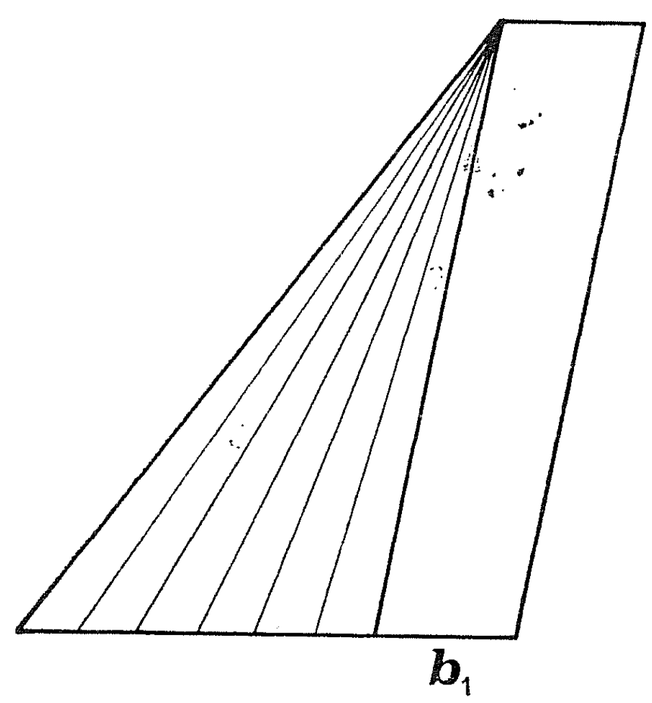
Problem 2. *V ravnini konstruirati množico z (Lebesguovo) mero* 0, *ki v vsaki smeri vsebuje daljico dane dolžine.*

Očitno zadošča, da najdemo množico z mero 0, ki vsebuje daljico dane dolžine, npr. v vseh smereh med 0° in 120°. Imejmo torej trikotnik ABC z osnovnico AB in vrhom C. Kot ob vrhu C naj bo 120° in višina na osnovnico enaka a.

Trikotnik lahko opazujemo kot množico daljic, ki vežejo vrh C s točkami osnovnice AB. Denimo, da imamo neskončno zaporedje transformacij, pri katerih se poljubna daljica XC, ki v začetku veže točko X na osnovnici AB z vrhom C, vzporedno premika na desno, tako da spodnji konec daljice ves čas ostane na osnovnici AB. Pri prvem koraku naj se daljica XC vzporedno premakne v daljico X_1C_1, pri čemer naj točka X preide v točko X_1, ki je enaka X ali pa leži desno od nje na osnovnici AB, točka C pa v točko C_1. Drugi korak naj prevede daljico X_1C_1 v daljico X_2C_2, katere spodnji konec X_2 spet leži na osnovnici AB desno od točke X_1 itd. Tako imamo zaporedje točk $X, X_1, X_2, \ldots$, ki vse leže na osnovnici AB in vsaka kvečjemu desno od prejšnje. Ker je to zaporedje točk monotono in omejeno, obstaja na AB neka limitna točka, ki jo označimo s T_X. Prav tako obstaja limitna točka zaporedja C,



Slika 3



Slika 4

$C_1, C_2, \ldots$, ki jo zaznamujmo s T_C. $T_X T_C$ je tako daljica, v katero po vseh transformacijah preide začetna daljica XC. Obe daljici sta seveda vzporedni. Tako vidimo, da vsaki daljici XC pripada neka vzporedna limitna daljica $T_X T_C$. Množico točk, ki jih pokrivajo vse limitne daljice, imenujmo E. Torej je $E = \bigcup_{X \in AB} T_X T_C$. V množici E so daljice, ki leže v vseh smereh med 0° in 120°.

Sedaj bomo opisano zaporedje transformacij konstruirali na poseben način in sicer tako, da bo iz konstrukcije sledilo, da je Lebesgueova mera limitne množice E enaka 0. Množica E bo tedaj rešitev Problema 2.

Naj bo $\{\varepsilon_k\}$ poljubno monotono padajoče zaporedje pozitivnih števil, za katero velja $\varepsilon_{k+1} \leqq \varepsilon_k/2$, $k = 1, 2, \ldots$ Po izreku 1 prevedemo trikotnik ABC v lik S_1, katerega ploščina $p(S_1)$ znaša manj kot $\varepsilon_1/2$. Denimo, da smo pri tem morali razdeliti trikotnik na n_1 elementarnih trikotnikov. Zaradi določenosti vzemimo, da desni rob spada k elementarnemu trikotniku (in ga zato hkrati z njim premaknemo), levi pa ne (razen pri trikotniku na skrajni levi). Postavimo $b_1 = \varepsilon_1/2an_1$ in vsak elementarni trikotnik povečajmo za paralelogram z osnovnico b_1, kot kaže slika 4. Vsi tako popravljeni trikotniki tvorijo lik T_1, katerega ploščina $p(T_1)$ ne presega ε_1.

Osnovnice elementarnih trikotnikov, ki sestavljajo lik S_1, so vse enake. Vsako izmed njih razdelimo na enake dele, katerih dolžina je manj kot $b_1/2$, in delišča povežemo z vrhom ustreznega trikotnika, ki mu osnovnica pripada. Tako dobimo večje število pomožnih trikotnikov (glej sliko 4), ki skupaj sestavljajo ravno vse elementarne trikotnike.

Na vsakem izmed pomožnih trikotnikov posebej izvršimo transformacijo iz izreka 1, tako da je skupna ploščina $p(S_2)$ lika S_2, ki ga na ta način dobimo, manj kot $\varepsilon_2/2$. Pri tej transformaciji se vsaka daljica, ki veže vrh pomožnega trikotnika s točko na njegovi osnovnici, premakne v desno kvečjemu za toliko, kolikor znaša dolžina osnovnice pomožnega trikotnika, torej kvečjemu za $b_1/2$. Denimo, da je sedaj skupno število vseh trikotnikov, ki sestavljajo lik S_2, $n_2 \geqq n_1$. Spet postavimo $b_2 = \varepsilon_2/2an_2$ in tvorimo kot prej lik T_2, katerega ploščina $p(T_2)$ znaša manj kot ε_2.

Kar smo napravili na liku S_1, napravimo sedaj na liku S_2, to je. razdelimo vsakega izmed trikotnikov, ki sestavljajo S_2, na pomožne trikotnike, ki jih transformirajmo tako kot v izreku 1, da dobimo lik S_3 s ploščino $p(S_3) < \varepsilon_3/2$. Vsi pomiki so sedaj manjši od $b_2/2$. Na koncu vdelamo lik S_3 podobno kot prej v lik T_3, katerega ploščina znaša $p(T_3) < \varepsilon_3$.

Če postopek tako nadaljujemo v neskončnost, dobimo zaporedje likov $S_1, S_2, \ldots$ in $T_1, T_2, \ldots$, tako da velja za vsak $r = 1, 2, \ldots$ $S_r \subset T_r$ in $p(T_r) < \varepsilon_r$. Pri transformaciji $S_r \to S_{r+1}$ se vsaka daljica, ki veže vrh kakega elementarnega trikotnika iz S_r s točko na njegovi osnovnici, premakne za manj kot $b_r/2$ v desno ($b_r = \varepsilon_r/2an_r$).

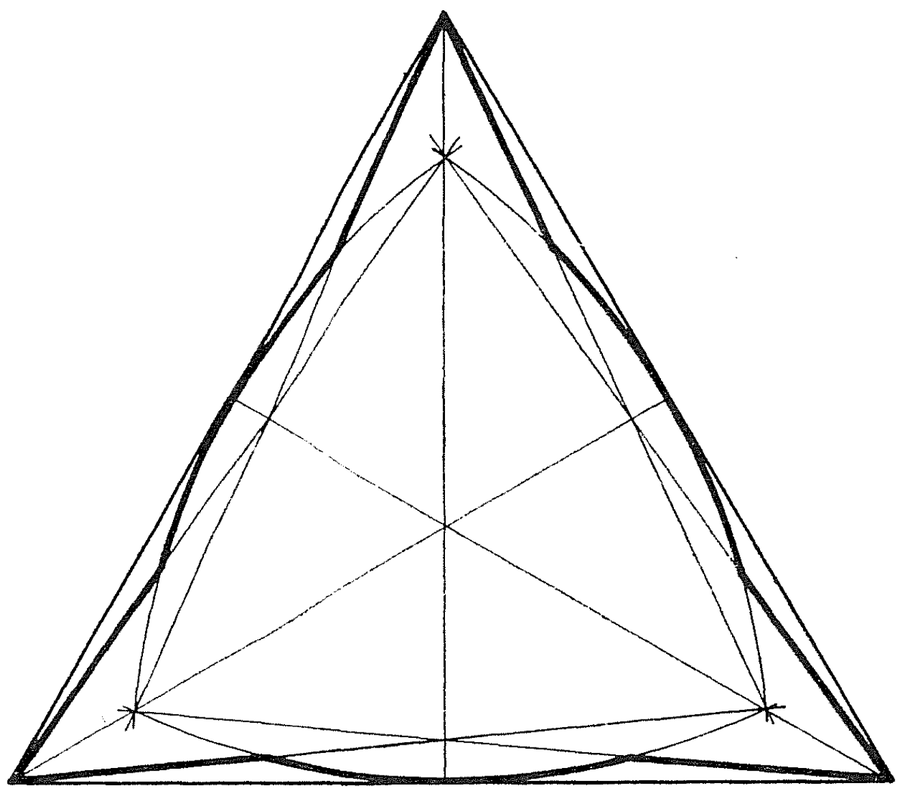
Zasledujmo, kaj se pri zaporedju transformacij $ABC \to S_1 \to S_2 \to \ldots$ dogaja z daljicami XC, ki na začetku povezujejo točko X na osnovnici AB z vrhom C! Pri vsakem koraku ostanejo pri miru ali pa se vzporedno premaknejo v desno, tako kot smo opisali na začetku obravnave problema 2. Še več, ker velja

$$b_r/2 + b_{r+1}/2 + \ldots = (\tfrac{1}{4}a)(\varepsilon_r/n_r + \varepsilon_{r+1}/n_{r+1} + \ldots) \leqq (\varepsilon_r/4an_r)(1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \ldots) = \\ = \varepsilon_r/2an_r = b_r,$$

ostane taka daljica, ko je enkrat v liku T_r, vse do konca v njem. Torej je limitna množica E, kakor smo jo opredelili na začetku, vsebovana v T_r za vsak $r = 1, 2, \ldots$ Od tod sledi $E \subset \bigcap_{r=1}^{\infty} T_r$ in ker je mera $m(\bigcap T_r) = \lim_{r \to \infty} p(T_r) = 0$, je tudi $m(E) = 0$. Dokaz je končan.

Ob koncu se še enkrat pomudimo ob problemu, ki ga je zastavil Kakeya. Besicovitcheva splošna rešitev nam zagotavlja eksistenco lika s poljubno majhno ploščino, v katerem

moremo obrniti dano daljico za 180°. Vendar ta lik ni enostaven; sestavljen je iz velikega števila krožnih izsekov, ki so drug od drugega lahko zelo oddaljeni. Če se hočemo takim rešitvam izogniti in ostati v mejah nazornosti, se moramo pri reševanju Problema 1 omejiti na »lepše« like. Tako se npr. izkaže, da ima izmed vseh *konveksnih* likov, v katerih je mogoče daljico z dolžino a obrniti za 180°, najmanjšo ploščino ($a^2/\sqrt{3}$) enakostranični trikotnik z višino a. To je pokazal J. Pál, še preden je Besicovitch objavil svojo rešitev (glej [3]).



Slika 5

Jasno pa je, da obstajajo preprosti liki s ploščino, manjšo od $a^2/\sqrt{3}$, v katerih je tudi mogoče obrniti daljico. Tak je npr. lik, ki je na sliki 5 včrtan enakostraničnemu trikotniku z višino a. Seveda ni več konveksen. Iz množice problemov, ki imajo svoj izvor v Kakeyinem in se nanašajo na določeno vrsto likov, omenimo le enega, ki je v zvezi z zadnjim primerom: Rešiti Problem 1 z omejitvijo na like, včrtane enakostraničnemu trikotniku z višino a. Besicovitcheva rešitev tu seveda ne pride v poštev.

LITERATURA

[1] A. S. Besicovitch, *On Kakeya's problem and a similar one*, Math. Zeit. **27** (1928), 312—320.

[2] B. Fisher, *On a problem of Besicovitch*, The Amer. math. monthly **80** (1973), 785—787.

[3] J. Pál, *Ein Minimumproblem für Ovale*, Math. Ann. **83** (1921), 311—319.

UTRINEK

»TEŽAVE NE SMEJO BITI OVIRA«

Sloviti matematik *P. S. Aleksandrov* občasno priredi na MGU[1]) »večere Aleksandrova«. Zbranim študentom in profesorjem nestor sovjetske topološke šole pripoveduje najzanimivejše prigode iz svojega pisanega življenja. Nekoč je med drugim tudi dejal, da po njegovem mnenju ni za dobrega matematika okolje nič važno, torej da se da tudi v izredno slabih okoliščinah kaj zanimivega odkriti. Kot zgled je navedel, da je do enega najpomembnejših izrekov prišel v mrzli zimski noči, ko se je stiskal med dvema vagonoma, polnima vojnih internirancev, ki so jih nemški vojaki namenili v taborišča. Sedel je na odbijačih vagonov, se drgetajoč zavijal v strgano suknjo in pihal v premrle roke — v glavi pa dokazoval čudovit izrek...

...»Res je,« bi dejal *N. G. Čebotarjov*, »tudi jaz sem, ko sem bil še kratkohlačnik-šestošolec, rešil mali Fermatov problem šele v neki soparni poletni noči, ko mi nadležni komarji niso dali spati...«[2])

Dušan Repovš

[1] Moskovskij gosudarstvennyj univerzitet im. M. V. Lomonosova

[2] N. G. Čebotarjov, *Matematičeskaja avtobiografija*, Uspehi matematičeskih nauk, **4** (1948) 3, § 1. Školjnye gody.

Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 5/6

NASTANEK LATENTNE SLIKE V FOTOGRAFSKI EMULZIJI

STANE ARH

UDK 77.01:53

Članek obravnava latentno sliko v fotografski emulziji. Opiše njen nastanek in vlogo centrov latentne slike. Vpelje kvantni izkoristek in razčleni vzroke, zaradi katerih je ta izkoristek nepričakovano velik.

THE PHOTOGRAPHIC LATENT IMAGE

In this article the photographic latent image is considered. Its formation and the role of latent image specks are described. The quantum efficiency is introduced and causes of its unexpectedly high value are discussed.

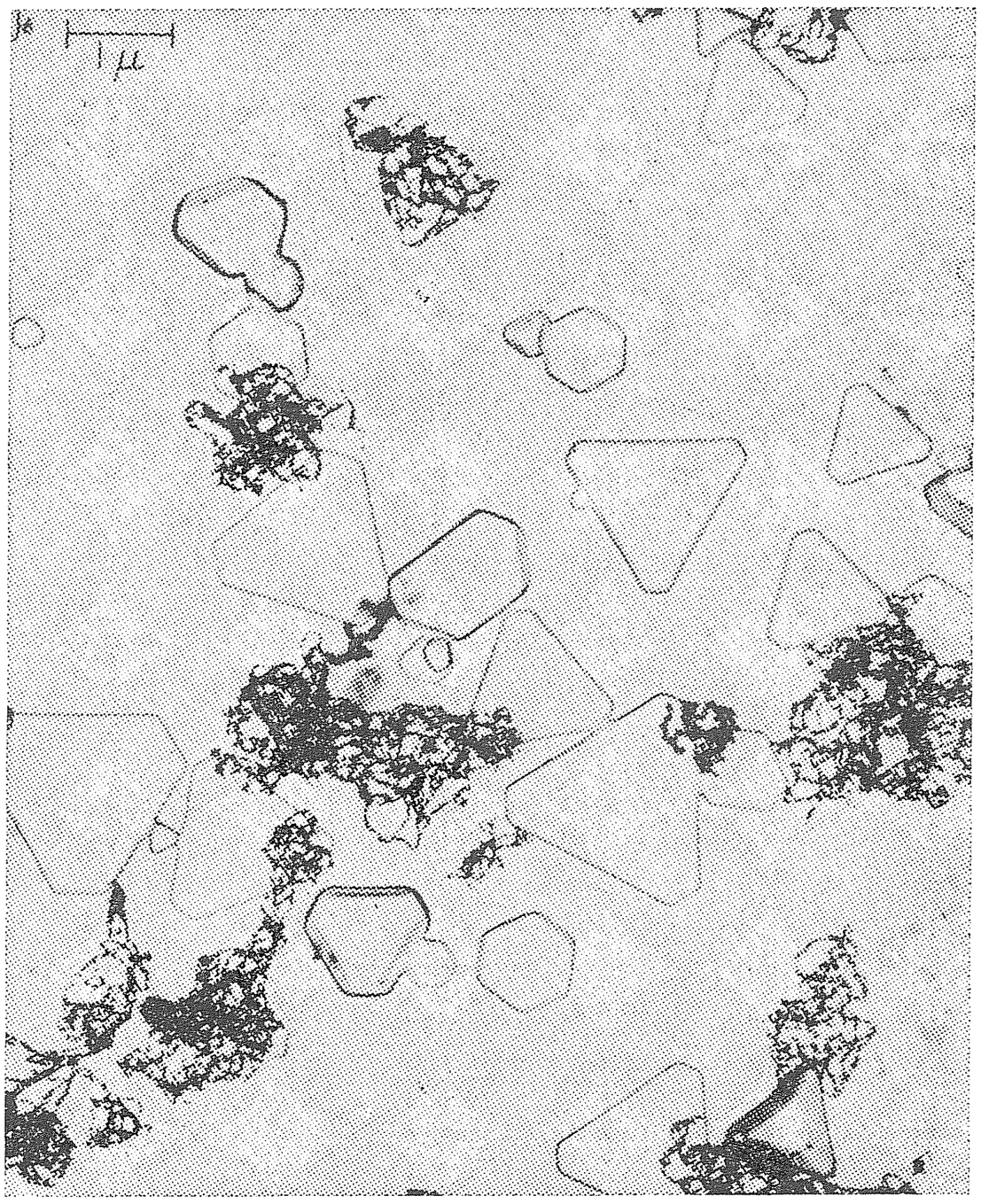
Uvod

Danes poznamo že vrsto različnih načinov za zapis vidne slike predmeta. Nobeden od njih pa se po občutljivosti, uporabnosti in ekonomičnosti ne more primerjati s fotografijo, ki je zato prodrla skoraj v vse veje sodobnega življenja in postala del vsakdanjosti.

Navadni fotografski film sestavlja celuloidna osnova, na katero je nanesena tanka plast *emulzije*. To je suspenzija kristalčkov srebrovega halogenida v želatini. Najpogosteje uporabljajo srebrov klorid AgCl ali srebrov bromid AgBr. Navadno so kristalčki ploščati s trikotno osnovno ploskvijo z odsekanimi oglišči (sl. 1). Velikost kristalčkov je odvisna od načina priprave in se spreminja od stotinke mikrona do nekaj mikronov, njihova debelina pa je desetkrat manjša [1]. Lastnosti fotografskega filma so odvisne predvsem od velikosti kristalčkov.

Ko fotografsko emulzijo osvetlimo z vidno svetlobo, nastanejo v njej trajne spremembe. Teh sprememb pa ne opazimo niti z elektronskim mikroskopom. Šele ko osvetljeni film potopimo za nekaj časa v razvijalec, se pokaže vidna slika. Prvotnemu, nevidnemu zapisu slike, ki nastane med osvetljevanjem, pravimo *latentna slika*. Sestavljajo jo *centri latentne slike*. To so skupki atomov srebra na površini kristalčkov srebrovega halogenida.

Pri razvijanju ima center vlogo *prevodne linije*. Od reducenta, ki je raztopljen v razvijalcu, posreduje elektrone do kationov srebra Ag^+ v kristalčku srebrovega halogenida. Elektron in kation se združita v atom srebra. Združevanje elektronov in kationov poteka, dokler ves kristalček ne razpade v srebro. Če je čas razvijanja pravilno izbran, vsi kristalčki s centrom po-



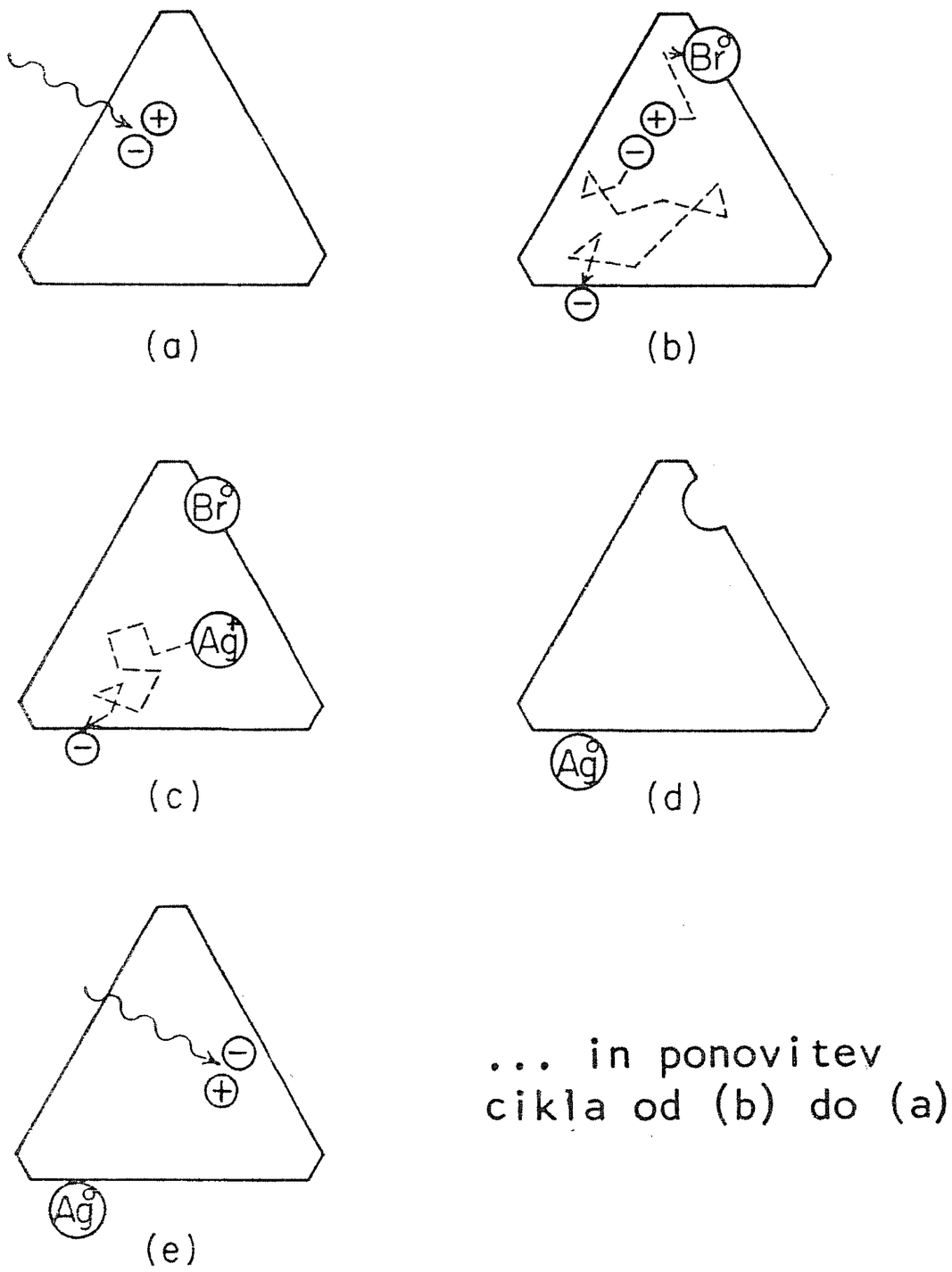
Sl. 1. Mikroskopska slika razvite fotografske emulzije, v kateri je razpadla na črno kovinsko srebro okoli polovica kristalčkov [3]

polnoma razpadejo na kovinsko srebro. Zaradi drobne zrnatosti vidimo nastalo srebro črno. Direkten prehod elektrona od reducenta do kationa srebra Ag^+ v kristalčku ni mogoč. Zato se pri razvijanju kristalčki brez centra ne spremene. Iz emulzije jih odstranimo s fiksiranjem v raztopini, ki raztaplja kristalčke srebrovega halogenida. Tako preprečimo svetlobi nadaljnje učinkovanje in dobimo obstojno sliko.

Nastanek centra latentne slike

Oglejmo si, kako nastane center latentne slike v kristalčku srebrovega halogenida, ko ga osvetlimo.

Kristal srebrovega halogenida sestavljajo ioni. Osnovna celica je ploskovno centrirana kocka. Vsak kation srebra Ag^+ ima šest bližnjih sosedov halogenskih anionov in vsak halogenski anion ima šest bližnjih sosedov kationov srebra Ag^+. Kristali srebrovega halogenida brez primesi in brez napak so skoraj prozorni. Absorpcija svetlobe se v njih zelo poveča zaradi nečistoč in nepravilnosti v kristalni zgradbi. Absorpcijski koeficient kristalčkov v fotografski emulziji je od $10^4\ cm^{-1}$ do $10^5\ cm^{-1}$ [2], [3], tako da že plast z efektivno debelino 1 μm absorbira pretežni del vpadne svetlobe.

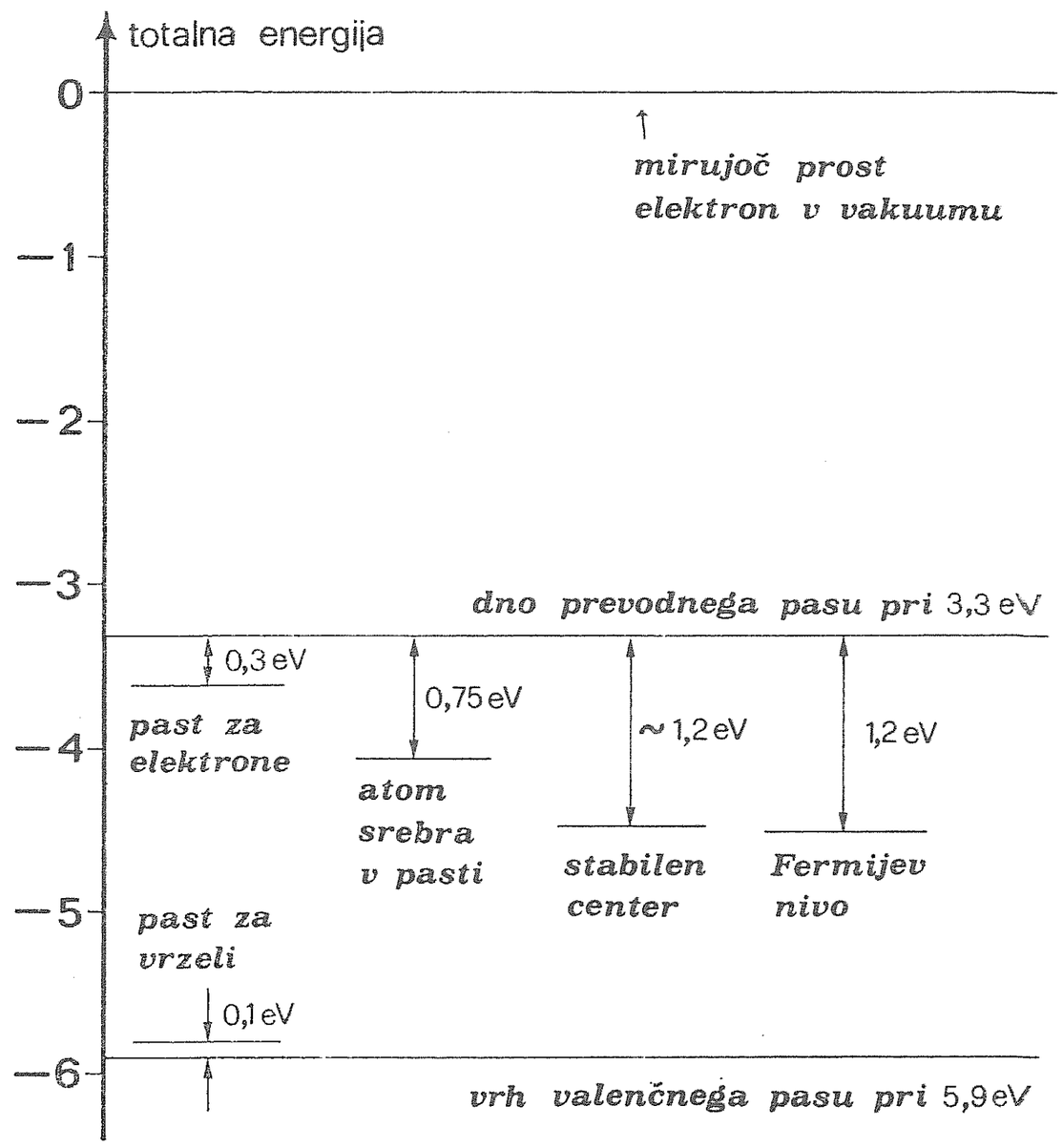


Sl. 2. Nastanek centra latentne slike: absorpcija fotona povzroči nastanek prostega elektrona in vrzeli (a), elektron in vrzel potujeta na površino kristala in se ujameta vsak v svojo past (b), v pasti ujeta vrzel se veže na aminsko kislino iz emulzije (c), kation srebra Ag^+ potuje k ujetemu elektronu in se združi z njim v atom srebra (d). Ob absorpciji drugega fotona se pojav ponovi (e) [3]

Foton z zadostno energijo, ki se absorbira v kristalčku, sprosti elektron iz halogenskega aniona (sl. 2). Ta elektron preide iz valenčnega pasu v prevodni pas in se skoraj prosto giblje po kristalu. V srebrovih halogenidih potrebuje elektron za prehod preko energijske špranje energijo 2 do 3 eV. Zaradi sodelovanja mrežnega nihanja pri prehodu te energije ne moremo zanesljivo določiti. Odvisna je še od temperature. Pri 300 K vzamemo navadno 2,6 eV pri srebrovem bromidu [2] in 2,9 eV pri srebrovem kloridu [1]. To ustreza mejnima valovnima dolžinama 4750 Å in 4200 Å. Za vzbujenim elektronom ostane nevtralni halogenski atom. Ustreza mu pozitivna vrzel v valenčnem pasu, ki je mnogo manj gibljiva kot elektron v prevodnem pasu.

Nečistoče in nepravilnosti kristalne mreže so pasti za elektrone in vrzeli. Elektron in vrzel se ne moreta več prosto gibati po kristalčku, če se ujemata v past. Pasti za elektrone in pasti za vrzeli se med seboj razlikujejo. V pasti, ki jim ustreza energijski nivo za okoli 0,1 eV nad vrhom valenčnega pasu, se ujamejo vrzeli. V pasti z nivojem za okoli 0,1 eV do 0,3 eV [5] pod dnom prevodnega pasu pa se ujamejo elektroni (sl. 3). Zaradi nihanja kristalne mreže lahko postaneta ujeti elektron ali ujeta vrzel zopet prosta. Elektron ostane v pasti povprečno le po 10^{-9} sekunde [5]. V tem času se elektron lahko združi s prosto vrzeljo ali s prostim gibljivim kationom srebra Ag^+, ki je vrinjen med ione v mreži. Oba privlači zasedena past zaradi negativnega naboja elektrona.

Z *rekombinacijo*, to je z združitvijo elektrona in vrzeli, izgubimo podatek o tem, da se je absorbiral foton. Zato moramo zmanjšati verjetnost za rekombinacijo. To storimo tako, da odstranimo čim več vrzeli iz kristala. V želatini so snovi, ki se rade vežejo s halogenskimi atomi. To so aminske kisline z žveplom, ki so že v živalih, iz katerih delajo želatino. Večkrat pa jih dodajajo želatini še posebej. Te snovi se spojijo s halogenskimi anioni, brž ko se ti ujamejo v katero izmed površinskih pasti za vrzeli.



Sl. 3. Energijska nivoja pasti in centra latentne slike ter Fermijev nivo v kristalčku srebrovega halogenida. Energijski nivo stabilnega centra se skoraj pokriva s Fermijevim nivojem [2], [5]

Sorazmerno trajen zapis absorpcije fotona dobimo, če se elektron v pasti nevtralizira s kationom srebra Ag^+, ki je vrinjen med ione v mreži. Nastali atom srebra zniža nivo pasti na okoli 0,75 eV pod dno prevodnega pasu [5]. Zaradi večje globine pasti se poveča verjetnost, da se bo vanjo ujel nov elektron. Poleg tega se podaljša povprečni čas, ki ga preživi ujeti elektron v pasti. Novi, v pasti ujeti elektron se nevtralizira z drugim vrinjenim kationom srebra Ag^+. Pojav se mora večkrat ponoviti, preden skupek atomov srebra v pasti doseže zadostno velikost, da lahko nastali center rabi za prevodno linijo pri razvijanju.

Spodnje meje števila atomov srebra v stabilnem centru ni težko oceniti. Center ima lastnosti prevodnika in mora prevajati elektrone v vseh smereh. To pomeni, da mora imeti prostorsko zgradbo. Za tako zgradbo so potrebni vsaj štirje atomi, razporejeni v ogliščih tetraedra. Ali je ta ocena pravilna, pa lahko povedo le merjenja. Najmanjše število atomov srebra v centru ugotavljajo z merjenjem *kvantnega izkoristka*, to je najmanjšega števila fotonov, ki se morajo absorbirati v kristalčku, da ta pri razvijanju razpade na srebro.

Kvantni izkoristek

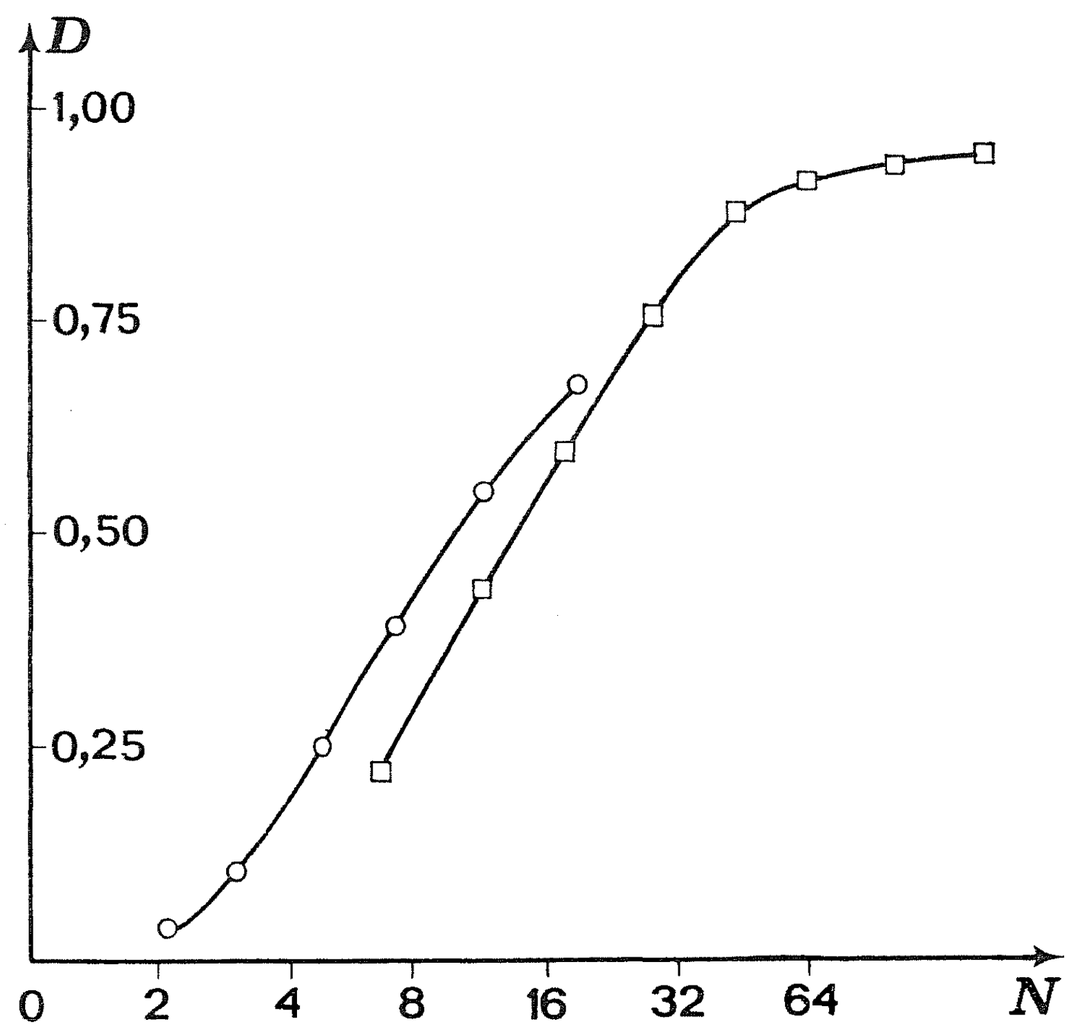
Najmanjše število fotonov, ki se morajo absorbirati v enem kristalčku, da nastane v njem center, je pomembno iz dveh razlogov. Preko njega ocenimo največjo občutljivost, ki jo lahko dosežemo z izbrano emulzijo. Poleg tega rabi za podatek pri določitvi najmanjšega števila atomov srebra v centru, kar je pomembno predvsem za teorijo o nastanku latentne slike.

Predpostavimo, da osvetlimo kristalček z enobarvno svetlobo, katere valovna dolžina je krajša od mejne. V tem primeru vsak absorbirani foton vzbudi elektron v prevodni pas. O izkoristku se poučimo, če pregledamo mogoče izgube elektronov v kristalu: elektron se lahko združi z vrzeljo takoj po nastanku, preden se ločita; elektron se lahko ujame v notranjosti kristala in nikoli ne pride na površino; elektron dospe na površino, a se združi s kationom srebra Ag^+ v kateri od različnih površinskih pasti.

Podrobneje si oglejmo vsako izmed mogočih izgub. Pri vzbuditvi elektrona iz valenčnega pasu v prevodni pas se v kristalih srebrovega halogenida spremeni tudi nihanje kristalne mreže. Elektron in vrzel se takoj po nastanku gibljeta v različnih smereh in verjetnost za takojšnjo rekombinacijo je majhna.

Skupek atomov srebra, ki se izoblikuje v notranjosti kristalčka, ne more priti v stik z razvijalcem. Kot prevodna linija med reducentom v razvijalcu in kationi srebra Ag^+ lahko deluje le skupek srebra na površini. Vsi med osvetlitvijo nastali elektroni, ki se združijo s kationi srebra Ag^+ v notranjosti, so tako za nastanek latentne slike izgubljeni. Na srečo je verjetnost za ujetje elektrona v notranjosti majhna. Srebrovi halogenidi imajo — v nasprotju z drugimi ionskimi kristali — veliko dielektričnost ε, okoli 13. Zaradi tega v večji razdalji od pasti v kristalu ni čutiti njenega električnega polja. Elektrostatični potencial pade na termično vrednost kT v razdalji $R = e_0^2/4\pi\varepsilon_0\varepsilon kT$. Pri temperaturi 300 K dobimo za R okoli 40 Å. Kristal se vede, kot da bi bil v notranjosti brez nepravilnosti.

Velikost kristalčka v emulziji je okoli stokrat večja od razdalje R. Tako zajame past le desettisočino površine kristalčka. Po tem sklepamo, da se izoblikuje v kristalčku več centrov. Ker se ujamejo prosti elektroni v različne pasti na površini, se mora absorbirati veliko fotonov, da preseže skupek srebra na enem mestu kritično vrednost. Pričakovali bi, da pobegne zaradi kratkega dosega elektrostatičnega potenciala pasti nekaj elektronov iz kristala. Vendar izgub te vrste niso opazili ne pri siliciju in ne pri germaniju, ki imata tudi veliko dielektrično konstanto.



Sl. 4. Odvisnost deleža razvitih kristalčkov D od števila absorbiranih fotonov N v posameznem kristalčku. Kvadrati se nanašajo na kristalčke s povprečno prostornino 5,5 μm^3, krožci pa na kristalčke s povprečno prostornino 0,69 μm^3 [6]

Razprava o izgubah elektronov torej pokaže, da se absorbirani fotoni izgubijo predvsem zaradi velikega števila površinskih pasti.

Fernel, Chanter [6] in Marriage [7] so ugotovili, da razpade v emulziji z majhnimi kristalčki pri razvijanju na atome srebra 10% vseh kristalčkov, če se v vsakem izmed njih absorbira le štiri do šest fotonov. Iz tega sledi, da za center latentne slike zares zadostujejo že štirje atomi srebra. 50% vseh kristalčkov se razvije, če se v vsakem od njih absorbira od 10 do 25 fotonov (sl. 4). Merjenja kvantnega izkoristka so torej potrdila napovedane majhne izgube zaradi rekombinacije elektrona z vrzeljo in zaradi ujetja elektrona v notranjosti kristalčka. Čisto nepričakovano pa so pokazala, da se izoblikuje v vsakem kristalčku le en center ali kvečjemu dva.

Zakaj nastane v kristalčku samo en center latentne slike ali kvečjemu dva in zakaj jih ne nastane več, tako kot so pričakovali, so pojasnili [3] z električnim poljem pod površino ionskega kristala. Na površini ionskih kristalov je namreč vedno električni naboj. Izvira iz napak v kristalni mreži, kakršne so luknje, vrinjeni ioni ter dvovalentni kationi. *Luknje*, to so prazna mesta v kristalni mreži, se v določeni meri pojavljajo v vseh kristalih. Nastanejo, ko ion zaradi termičnega nihanja skoči s svojega mesta v kristalni mreži v medmrežni prostor. Dobimo *vrinjeni ion* in luknjo, ki ima nasproten naboj kot pobegli ion. Izviri lukenj so lahko tudi dvovalentni kationi, ki se v kristalih pojavljajo kot nečistoče. Vsak izmed njih nadomesti v kristalni mreži po dva kationa srebra Ag^+ in povzroči s tem nastanek ene luknje. Pri sobni temperaturi število takih lukenj presega število drugih napak kristala. Med luknjami deluje odbojna coulombska sila. Ta povzroči, da se zgostijo luknje na površini kristalčkov. Manjkajoči kation srebra Ag^+ v kristalni mreži ustreza negativnemu naboju, zato postane

površina negativno nabita. Negativni površinski naboj uravnoveša naboj pozitivnih dvovalentnih kationov. Ti segajo do nekaj sto ångstrømov pod površino kristalčka. Opisana porazdelitev naboja povzroči močno električno polje v 0,05 μm debeli plasti pod površino. Polje, ki naraste od nič v sredini kristalčka na več kot 10^5 V/cm na površini, zmanjša globino površinskih pasti. Elektroni se zato ujamejo le v eni ali dveh izmed najglobjih pozitivno nabitih pasti. Negativni naboj hkrati preprečuje elektronom pobeg iz kristala. Elektroni se od površine odbijajo, dokler se ne ujamejo v globoki pasti.

Pri razvijanju je negativna površina tista pregrada, ki preprečuje direkten prehod elektronov od reducenta v razvijalcu h kationom v kristalčku. Center latentne slike je za elektrone edini vhod v notranjost kristala.

Med površino in notranjostjo kristala je zaradi električnega polja potencialna razlika 0,1 V do 0,15 V. Blizu površine zniža negativni potencial potrebno energijo za nastanek vrinjenega kationa srebra Ag^+ za 0,1 eV do 0,15 eV. Lokalna koncentracija vrinjenih kationov srebra Ag^+ se zato poveča za stokrat. S tem se poveča verjetnost, da se združita v pasti ujeti elektron in vrinjeni kation srebra Ag^+. Obenem se skrajša čas, ki preteče od ujetja elektrona v past do njegove nevtralizacije. Past lahko prej sprejme novi elektron, s tem pa se zmanjša verjetnost za nastanek več centrov v kristalčku. Skrajša se tudi potrebni čas, v katerem skupek srebra doseže kritično vrednost.

Nastanka latentne slike ni bilo mogoče zadovoljivo pojasniti, dokler niso spoznali posebnosti kristalčkov srebrovih halogenidov. Še danes je nerešenih nekaj vprašanj o podrobnostih pri nastanku latentne slike in čakajo odgovora.

LITERATURA

[1] C. F. Brown, *The Physics of Solids*, New York, W. A. Benjamin, 1967, str. 263, 374 in dalje.

[2] C. R. Berry, *Determination of Energy Levels in AgBr Emulsion Crystals from Optical Measurements*, J. photogr. Sci. **18** (1970) 169.

[3] L. M. Slifkin, *The Photographic Latent Image*, Sci. Prog. **60** (1972) 151.

[4] P. Kowaliski, *The Present Status of Photographic Sensitivity*, J. photogr. Sci. **21** (1973) 166.

[5] C. R. Berry, *Electron and Hole Traps in AgBr*, J. photogr. Sci. **21** (1973) 202.

[6] G. C. Farnell, J. B. Chanter, *The Quantum Sensitivity of Photographic Emulsion Grains*, J. photogr. Sci. **9** (1961) 73.

[7] A. Marriage, *How Many Quanta*, J. photogr. Sci. **9** (1961) 93.

[8] C. E. K. Mees, *The Theory of the Photographic Process*, ur. T. H. James, New York, Macmillan 1966.

UTRINEK

NOV VIR VPRAŠANJ IN NALOG

V znani monografiji S. Langa: *Algebra* (Addison-Wesley, Mass. 1965) je v poglavju *Homologija* pod razdelkom *Naloge* (str. 105) naslednja naloga:

Vzemi poljubno knjigo o homološki algebri in dokaži vse izreke, ne da bi pri tem pogledal dokaze v njej.

Ruski prevod (Mir, Moskva 1968, str. 126) navodilo dosledno prevaja, a ima pod črto hudomušno pripombo:

Priporočamo, da pri prvem branju knjige te naloge izpustite.

Dušan Repovš

Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 5/6

SONČNI VETER

IGOR MAJERLE

UDK 538.7, 538.3

Članek obravnava sončni veter in interakcijo sončnega vetra z zemeljskim magnetnim poljem. Od posledic te interakcije navaja nesimetričnost zemeljskega magnetnega polja, magnetni rep in plazmo v ionosferi.

SOLAR WIND

In this article the solar wind and its interaction with the geomagnetic field are considered. Among the consequences of this interaction the unsymetric geomagnetic field, the geomagnetic tail and plasma in the ionosphere are briefly discussed.

Ob spremljanju vesoljskih poletov po televiziji ali časopisih smo postali pozorni na *sončni veter*. Med drugim smo zvedeli za folijo, ki so jo vesoljci izpostavili temu vetru na Luni. V članku je na kratko opisan ta zanimivi pojav.

Sončno korono sestavlja plazma vodikovih ionov in elektronov. Izredno visoka temperatura okoli milijon stopinj je glavni vzrok, da se giblje ta plazma v smeri od Sonca s hitrostjo nekaj sto metrov na sekundo. Širjenje plazme v vesolje imenujemo sončni veter.

Sončni veter prihaja tudi do *magnetosfere* — do prostora, v katerem zaznamo zemeljsko magnetno polje — in jo stiska in pači. Zato magnetosfera ni simetrična. Na sončni strani sega do razdalje okoli deset zemeljskih radijev, a na senčni strani do pet do sedemkrat tolikšne razdalje. Poleg tega ima še ogromen rep, katerega dolžina je okoli tisoč zemeljskih radijev [1].

Teorije o teh pojavih so nastale precej pozno. Prvo sta postavila Chapman in Ferraro [2]. Pozneje jo je dopolnil Parker [3]. S poskusi so potrdili teoretične napovedi šele po 1957, ko je bil izstreljen prvi umetni satelit. 1961 so določili meje magnetosfere, podroben potek gostotnic pa so narisali šele po 1963. Huda ovira pri teh merjenjih je časovna odvisnost, saj se orientacija, razsežnost, oblika in vsebina magnetosfere neprestano spreminjajo. To je posledica dnevnih izbruhov na Soncu, 27-dnevne rotacije Sonca, 11-letnega cikla sončne aktivnosti...

Interakcijo med sončnim vetrom in zemeljskim magnetnim poljem opišejo enačbe magnetohidrodinamike. Za naš namen zadostuje *izrek o ohranitvi celotne gostote toka gibalne količine* [4]:

$$\rho v^2 + p + \tfrac{1}{2}B^2/\mu_0 = \text{konstantno} \tag{1}$$

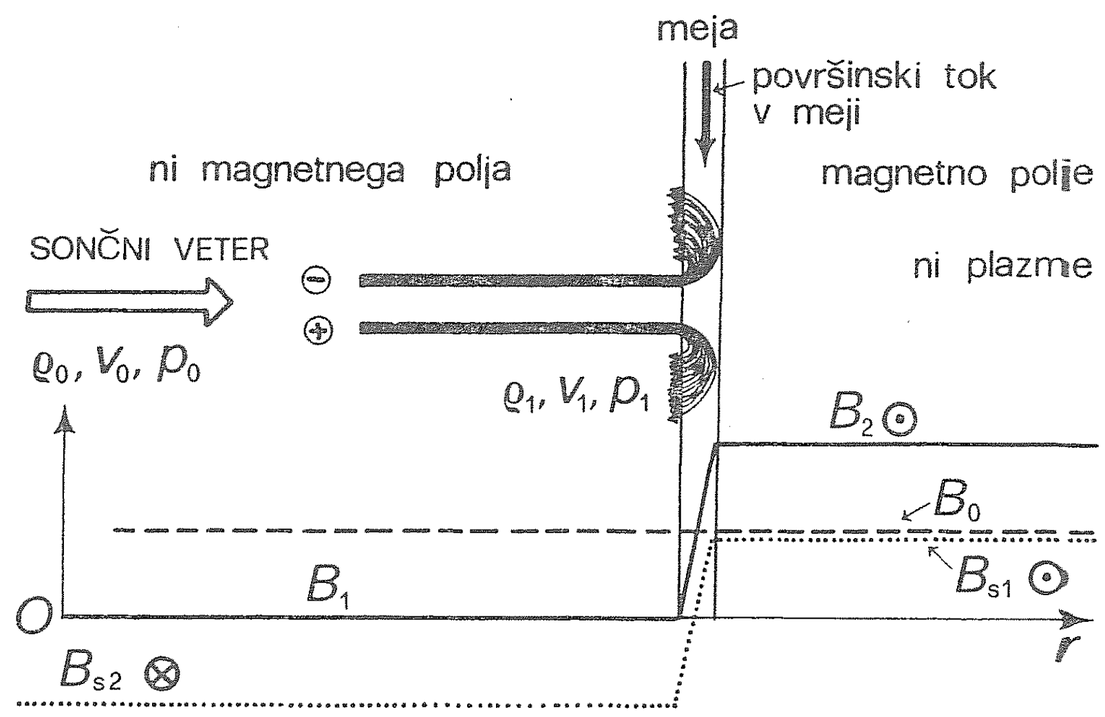
Običajnima členoma $\rho v^2 + p$ dodamo v njem še tretji člen, ki ustreza magnetnemu tlaku v prečnem magnetnem polju z gostoto B. Plazmo obravnavamo kot idealni plin: v je njena hitrost, $\rho = n_e m_e + n_i m_i$ gostota in $p = n_e kT_e + n_i kT_i$ tlak. Pri tem je n_e gostota elektronov z maso m_e in n_i gostota ionov z maso m_i.

Vzemimo, da pada curek plazme iz območja, v katerem ni magnetnega polja in so v nemotenem toku gostota, hitrost in tlak ρ_0, v_0 in p_0, pravokotno na mejo območja, v katerem ni plazme, a je magnetno polje. Iz enačbe (1) sledi

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \tfrac{1}{2}B_2^2/\mu_0 \tag{2}$$

Pri tem se nanašajo količine z indeksom 1 na razmere tostran meje in z indeksom 2 na razmere onstran meje (sl. 1). Na meji med obema območjema mora teči električni tok, saj

zavrne magnetno polje v drugem območju vse nabite delce nazaj v prvo območje. Ta površinski tok ustvari svoje sekundarno magnetno polje z gostoto B_s, ki prispeva skupaj s prvotnim magnetnim poljem z gostoto B_0 k polnemu magnetnemu polju. Tostran meje je gostota prvotnega magnetnega polja B_0 nasprotno enaka gostoti sekundarnega polja B_{s1} in je njuna vsota enaka nič: $B_1 = B_{s1} + B_0 = 0$ in $B_{s1} = -B_0$. Tako mora biti, če naj bo izpolnjena začetna trditev, da tostran meje ni magnetnega polja. Onstran meje je gostota sekundarnega magnetnega polja B_{s2} po velikosti enaka gostoti B_{s1}, le da ima nasprotno smer.



Sl. 1. Razmere na meji območja s plazmo brez magnetnega polja in območja brez plazme s prečnim magnetnim poljem

Tam dobimo za gostoto polnega magnetnega polja $B_2 = B_{s2} + B_0 = 2B_0$. Ker zavrne meja vse nabite delce, je gostota elektronov in ionov tostran meje tik ob meji približno enaka dvakratni gostoti v nemotenem toku, iz česar sledi $\rho_2 = 2\rho_0$ in $p_2 = 2p_0$. Tako dobimo končno iz $2\rho_0 v_0^2 + 2p_0 = \frac{1}{2}(2B_0)^2/\mu_0$ enačbo

$$\rho_0 v_0 + p_0 = B_0^2/\mu_0 \tag{3}$$

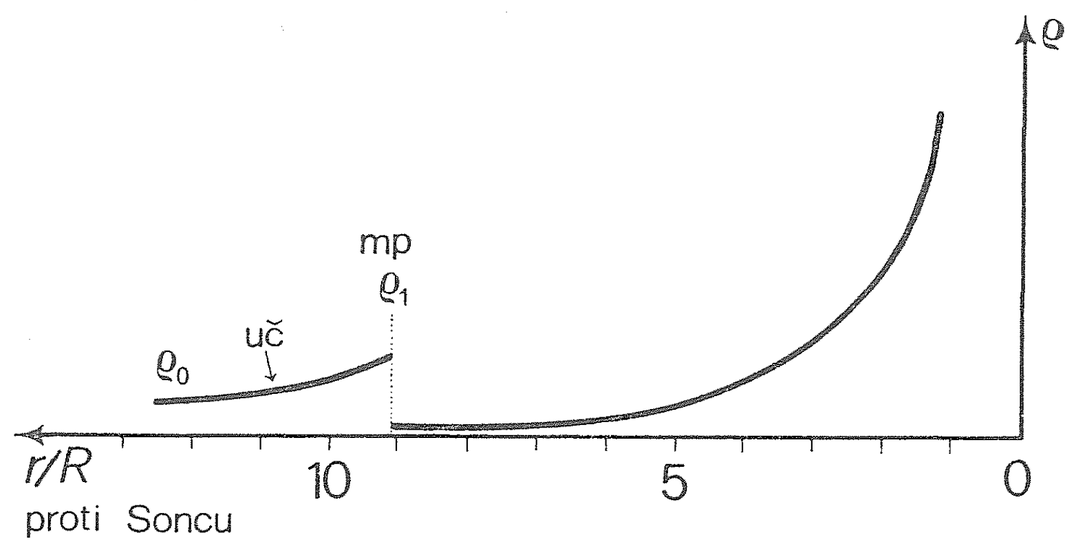
Iz nje lahko izračunamo razsežnost magnetosfere v smeri proti Soncu. Vemo, da bi imelo nepopačeno zemeljsko magnetno polje dipolno obliko. V ekvatorski ravnini tega polja bi bila gostota

$$B_0(r) = B_z(R/r)^3$$

usmerjena po meridianu, to je pravokotno na ekvatorsko ravnino, od severa proti jugu. r je razdalja od osi, R radij Zemlje, in $B_z = 0{,}312$ gauss gostota magnetnega polja ob ekvatorju na površini Zemlje. Iz zahteve $B_2 = 2B_0$ sledi

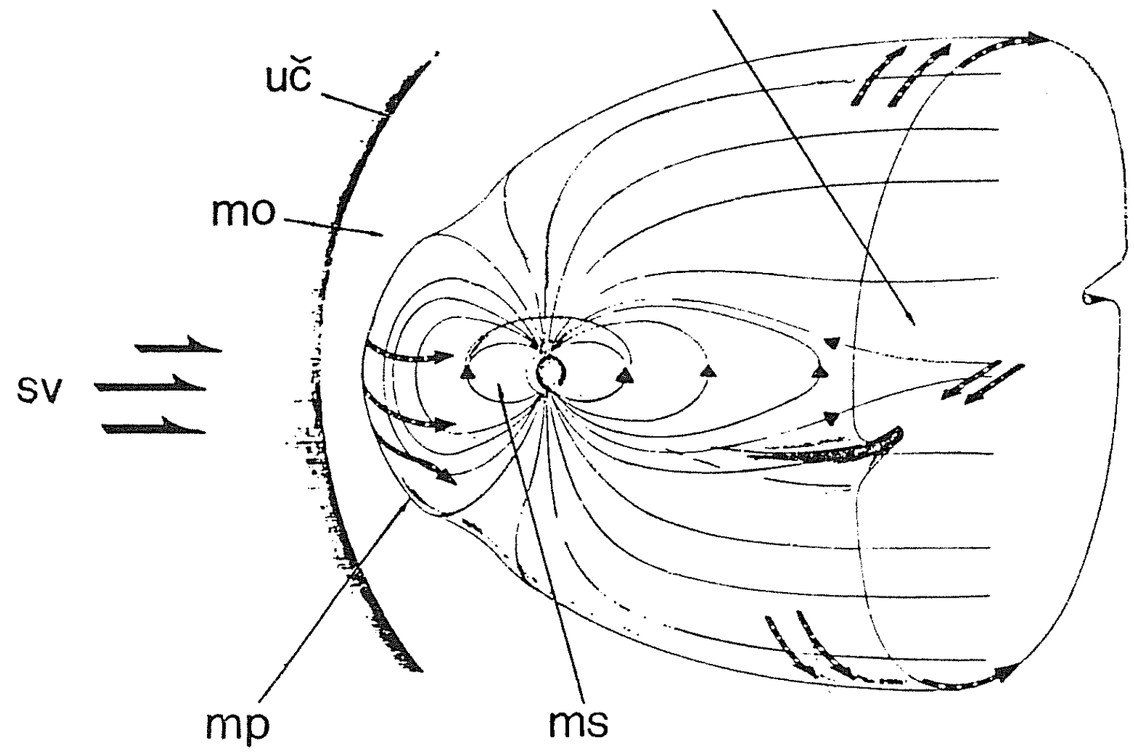
$$B_2 = B_0(r_b) = 2B_z(R/r_b)^3$$

r_b je *radij magnetosfere* in B_2 gostota magnetnega polja na robu magnetosfere. Izmerjeni podatki z Explorerja 18 se skladajo z rezultati, ki jih dajo zapisane enačbe. Izmerjena hitrost sončnega vetra je 380 km/s, gostota elektronov in ionov 5 cm^{-3} in radij magnetosfere od 10,3 R do 11,1 R. Hitrost sončnega vetra je precej večja od hitrosti zvoka v plazmi. Tako nastane na robu magnetosfere udarno čelo (sl. 2). Med čelom in magnetosfero narasteta gostota in temperatura sončnega vetra, hitrost pa se zmanjša.

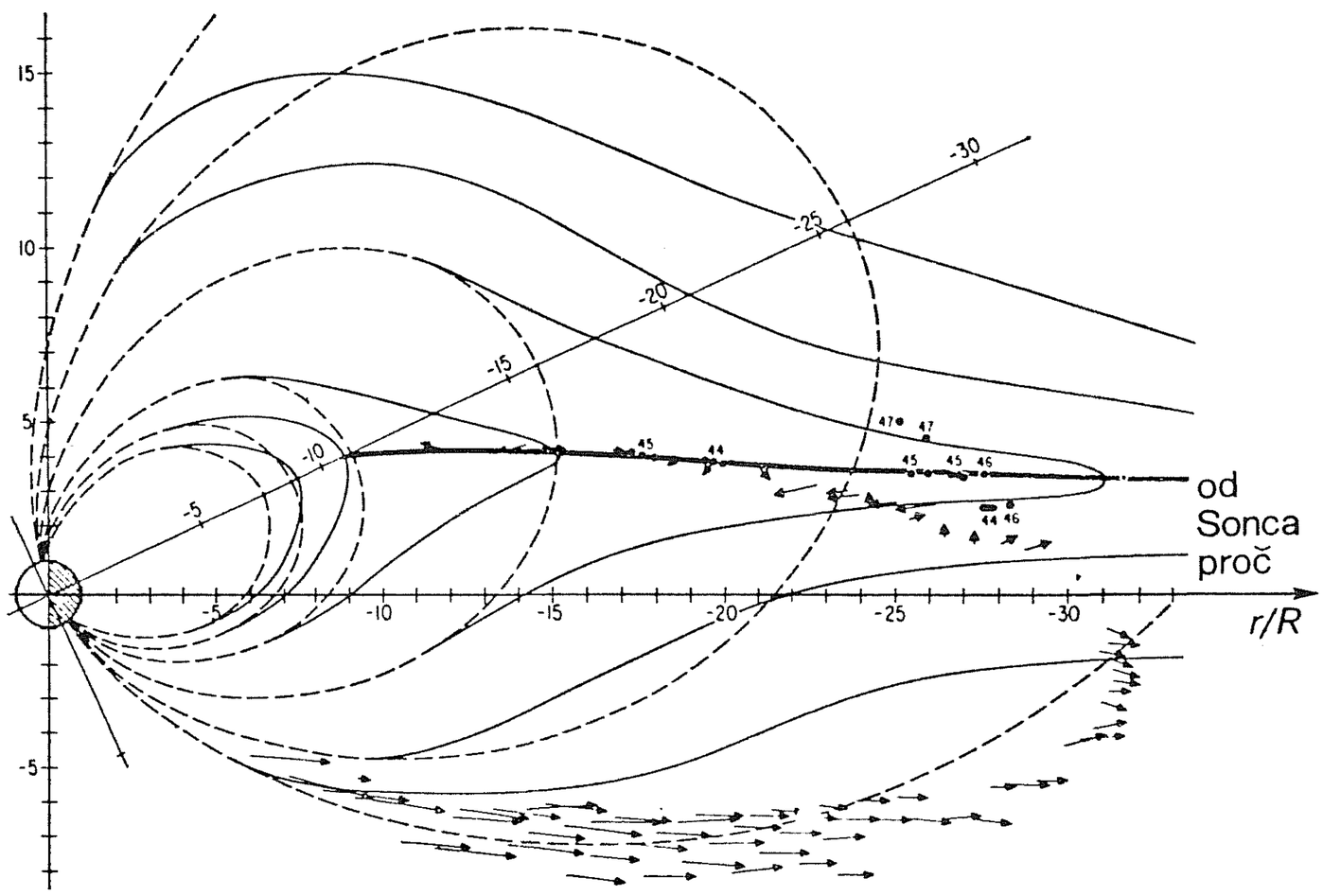


Sl. 2. Poenostavljen diagram gostote plazme v odvisnosti od razdalje od Zemlje v smeri proti Soncu. mp je rob magnetosfere ali *magnetopavza* in uč udarno čelo

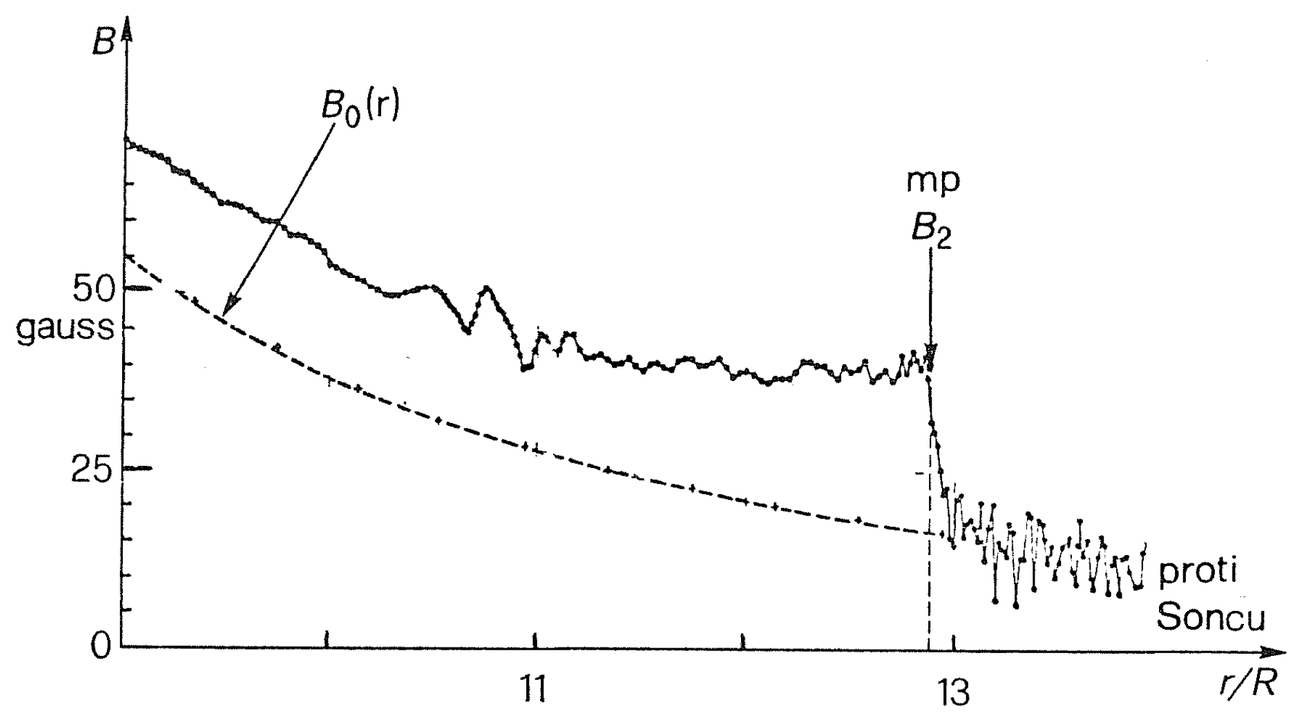
S sl. 3 razberemo, da so magnetne gostotnice v repu vzporedne, vendar kažejo v nasprotno smer. To pomeni, da je nekje na sredini simetrijska ravnina. V njej ni magnetnega polja, je pa močno električno polje. To polje pospešuje plazmo, ki vstopa v rep, po magnetnih gostotnicah proti tečajema (sl. 4). Lin in Anderson sta dokazala, da točka, v kateri plazma vstopa v rep, ne sme biti dlje kot 5000 R [5]. Ker plazma ne more vstopati v magnetosfero s sončne strani, je rep izrednega pomena, saj lahko le po njem pride plazma v ionosfero.



Sl. 3. Magnetno polje okoli Zemlje. S tankimi črtami so narisane gostotnice magnetnega polja in z debelimi tokovi, ki vplivajo na magnetno polje. ms magnetosfera, mp magnetopavza, mo mejno območje, sv sončni veter, mr magnetni rep in uč udarno čelo [1]



Sl. 4. Gostotnice magnetnega polja v preseku skozi Zemljo. Simetrijska ravnina, v kateri ni magnetnega polja, je nakazana z debelo črto. Neprekinjene gostotnice ustrezajo polnemu polju, črtkane pa nepopačenemu dipolnemu polju [1]



Sl. 5. Meritve gostote polnega magnetnega polja, ki jih je napravil Pioneer 6, ko je 16. decembra 1965 letel skozi magnetosfero. Črtkana krivulja je ekstrapolirana gostota dipolnega magnetnega polja [1]

Elektroni iz plazme vzbujajo ione v ionosferi in tako nastaja značilno sevanje, ki ga poznamo kot *polarni sij*.

Po sl. 5, ki je bila napravljena po meritvah Pioneerja 6, vidimo, da je gostota magnetnega polja B_2 na meji magnetosfere zares enaka $2B_0$.

Na koncu omenimo še težave, ki nastanejo pri merjenjih. Zaradi gibanja ladje v magnetnem polju se na njej inducira napetost, ki moti plazmo v okolici. Pri opazovanju Pioneerja 6 je Wolfe [6] ugotovil, da ladjo na sončni strani spremlja oblak elektronov, ki jih izbije svetloba iz kovine. Zato površina Pioneerja 6 ni ekvipotencialna ploskev, ampak meri napetost med sončno in senčno stranjo 10 V do 15 V. Prav tako motijo polje v okolici [7] oddajniki in sprejemniki na ladji, sončne celice in razni merilni instrumenti. Zaradi teh pojavov so meritve še vedno dokaj nezanesljive.

LITERATURA

[1] F. L. Scarf, *Plasma in the magnetosphere*, Advances in Plasma Physics, vol I., ur. A. Simon in W. B. Thompson, Interscience Publ., New York 1968, str. 101.

[2] S. Chapman, V. C. Ferraro, J. Terr. Magnetism Atmos. Elec., **36** (1931) 77, 171; **28** (1933); **45** (1940) 245.

[3] E. N. Parker, Astrophys. J., **128** (1958) 664.

[4] J. Strnad, *Pojavi pri nadzvočnih hitrostih in udarni valovi*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 3.

[5] R. P. Lin, N. F. Anderson, J. Geophys. Res., **71** (1966) 4213.

[6] G. P. Serbu, E. J. R. Maier, J. Geophys. Res., **71** (1966) 3755.

[7] F. L. Scarf, R. W. Fredricks, G. M. Crock, J. Geophys. Res., **73** (1968).

RAZTEGI IN ULOMKI

Posodabljanje pouka odpira nove poglede na stare reči. Poglejmo tako še enkrat na ulomke. Kakorkoli jih že uvedemo, vselej končamo s pari naravnih števil, z znanimi operacijami nad njimi. Tu seveda nimamo kaj spreminjati, iščemo lahko le nove pobude za uvedbo ulomkov, nova ponazorila za operacije nad njimi. V srednji šoli, ko dijaki delo z ulomki že obvladajo, poznajo razmere v njihovem svetu, lahko uberemo kako aksiomatsko pot. Naloga osnovne šole je težja. Vse do poglavja o ulomkih je šola učenca urila v rečeh, ki jih je poznal iz vsakdanjega življenja. Ulomek pa mu mora šola sama skorajda prvič predstaviti, ga navaditi nanj in izuriti v računanju.

Običajna modela, ki naj navedeta učenca na pravilno dojetje definicij, sta naravni, geometrijski model »rezanje hlebca« in drugi, aritmetični model, ki uvede ulomek kot »nakazano deljenje« ali posplošeno rešitev enačbe s celimi števili $ax = b$. V zadnjih letih pa nam moda veleva, da povsod vidimo množice in preslikave med njimi. Pričujoči zapis naj bo davek takim pogledom. Sestavili bomo model ulomkov, v katerem bo ulomek preslikava množice naravnih števil vase. Tak model pravkar spoznavajo učenci naših osnovnih šol. Zato ne bo napak, če z njim seznanimo tudi bralce Obzornika. Odveč je najbrž pripomba, da je sestavek prilagojen bralcu.

Kot vselej je $\mathcal{N}$ množica naravnih števil, $\mathcal{N}^0 = \{0\} \cup \mathcal{N}$.

Vsakemu $a \in \mathcal{N}^0$ priredimo razteg $\mathbf{R}_a$ nad $\mathcal{N}^0$, ki pomnoži vsak $x \in \mathcal{N}^0$ z a

$$\mathbf{R}_a : \mathcal{N}^0 \to \mathcal{N}^0 \qquad \mathbf{R}_a x = ax$$

Graf preslikave $\mathbf{R}_a$ je podmnožica premega produkta $\mathcal{N}^0 \times \mathcal{N}^0$, sestavljena iz parov (x, ax), $x \in \mathcal{N}^0$. Očitno leži $(0, 0)$ v grafih vseh raztegov. Razteg $\mathbf{R}_a$ je natanko določen s parom $(1, a)$. Zaradi asociativnosti množenja in $x = 1 \cdot x$ lahko zapišemo $ax = (a \cdot 1)x$. Brž ko poznamo sliko števila 1, poznamo ves razteg.

Sestavimo kompozitum preslikav $\mathbf{R}_a\mathbf{R}_b$. Asociativnostni zakon $a(bx) = (ab)x$ pove, da je kompozitum dveh raztegov spet razteg in še

$$\mathbf{R}_a\mathbf{R}_b = \mathbf{R}_{ab}$$

V $\mathcal{N}^0$ je še druga operacija — vsota. Z njo definiramo vsoto raztegov, kakor pač definiramo vsoto funkcij

$$(\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b)x = \mathbf{R}_a x + \mathbf{R}_b x$$

Razčlenitveni zakon $ax + bx = (a + b)x$ pove, da je vsota raztegov spet razteg in

$$\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b = \mathbf{R}_{a+b}$$

Razteg $\mathbf{R}_a$ odlikujejo tri lastnosti: 1. Razteg je definiran za vsak $x \in \mathcal{N}^0$. 2. Razteg je homogen $\mathbf{R}_a(kx) = k(\mathbf{R}_a x)$. 3. Razteg je aditiven $\mathbf{R}_a(x + y) = \mathbf{R}_a x + \mathbf{R}_a y$.

Bralec sam vidi, katere lastnosti naravnih števil tiče za njimi. Posplošimo pojem raztega tako, da popustimo pri prvi lastnosti. Ne zahtevamo več, da bodi razteg definiran pri vseh naravnih številih. Odslej naj razteg pomeni preslikavo $\mathbf{R} : \mathcal{N}^0 \to \mathcal{N}^0$, ki zadošča pogojem:

1. Naj bosta x in y v definicijskem območju $\mathbf{R}$. Tedaj sta v njem tudi $x + y$ in kx pri vsakem $k \in \mathcal{N}^0$. Če sta v definicijskem območju vsota in en njen člen, je v njem tudi drugi člen. Brž ko je kx v definicijskem območju in je $\mathbf{R}(kx) = ky$, je tudi x v definicijskem območju.

2. Razteg je homogen: $\mathbf{R}(kx) = k(\mathbf{R}x)$.

3. Razteg je aditiven: $\mathbf{R}(x + y) = \mathbf{R}x + \mathbf{R}y$.

Dokažimo tri izreke:

Naj bo a najmanjše naravno število v definicijskem območju raztega. Tedaj je definicijsko območje množica večkratnikov $\{ka, k \in \mathcal{N}^0\}$.

Res! Naj bo tudi b v definicijskem območju. Delimo: $b = ka + c$, $0 \leqq c < a$. Po prvi zahtevi je v definicijskem območju najprej ka, potem pa še c. To gre le, če je $c = 0$. Izrek je dokazan.

a je najmanjše naravno število v definicijskem območju raztega natanko takrat, ko je tuje proti $\mathbf{R}a$.

Res! Imenujmo $\mathbf{R}a = b$. Brž ko je d skupni delitelj števil a in b, je $a = da_0$, $b = db_0$, iz $\mathbf{R}(da_0) = db_0$ pa po prvi lastnosti sledi, da je a_0 v definicijskem območju $\mathbf{R}$. Če je a najmanjše naravno število, pri katerem je definiran $\mathbf{R}$, gre to le pri $d = 1$. Po prvem izreku je $\mathbf{R}$ definiran na večkratnikih ka, zaradi homogenosti je $\mathbf{R}(ka) = k\mathbf{R}a$, argument in vrednost imata skupni faktor k. Izrek je dokazan.

Razteg $\mathbf{R}$ *je natanko določen že z enim parom* $(a, \mathbf{R}a)$, $a \neq 0$.

Res! Naj bo D največji skupni delitelj števil a in $b = \mathbf{R}a$. Zaradi $a = Da_0$, $b = Db_0$ je par tujih si števil (a_0, b_0) že v grafu raztega, a_0 pa najmanjše število v definicijskem območju. Ker poznamo $\mathbf{R}a_0 = b_0$, poznamo $\mathbf{R}$ povsod, kjer je definiran.

Zadnji izrek lahko povemo še z drugimi besedami: vsaka točka premega produkta $\mathcal{N} \times \mathcal{N}^0$ leži v grafu natanko določenega raztega. To pa že odpira pot do relacije v $\mathcal{N} \times \mathcal{N}^0$ ki jo označimo kar z enačajem in definiramo takole:

$(a, b) = (c, d)$ natanko takrat, ko sta točki na grafu istega raztega. Dokažimo:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Izračunajmo na dva načina $\mathbf{R}(ac) = (\mathbf{R}a)c = bc$, $\mathbf{R}(ac) = a(\mathbf{R}c) = ad$, pa je dokaz končan.

Razteg je natanko določen s točko na svojem grafu. Zato ga odslej označimo kar z (a, b), $a \neq 0$. Ponovimo: (a, b) pomeni razteg, ki preslika a v b.

Produkt dveh raztegov definirajmo s kompozitom preslikav, vsoto pač kot vsoto funkcij. Prav lahko je pokazati, da sta produkt in vsota raztegov spet raztega.

Vzemimo raztega (a, b) in (c, d). Definicijsko območje njunega produkta vsebuje prav gotovo točko ac, bolj podroben opis definicijskega območja pa prepustimo bralcu. Računajmo takole

$$(c, d)(a, b) = (bc, bd)(ac, bc) = (ac, bd)$$

Da smo podprli drugi enačaj, smo sklepali takole: prvi razteg (desni faktor) preslika ac v bc, drugi (levi faktor) pa bc v bd, sestavljena preslikava tedaj ac v bd.

Če sta oba para okrajšana, sestavljajo definicijsko območje vsote skupni večkratniki števil a in c. Poiščimo spet njeno vrednost v točki ac

$$(a, b) + (c, d) = (ac, bc) + (ac, ad) = (ac, bc + ad)$$

Par (a, a), $a \neq 0$, je očitno ekvivalenten paru $(1, 1)$. Ustrezni razteg je identična transformacija in enota pri množenju

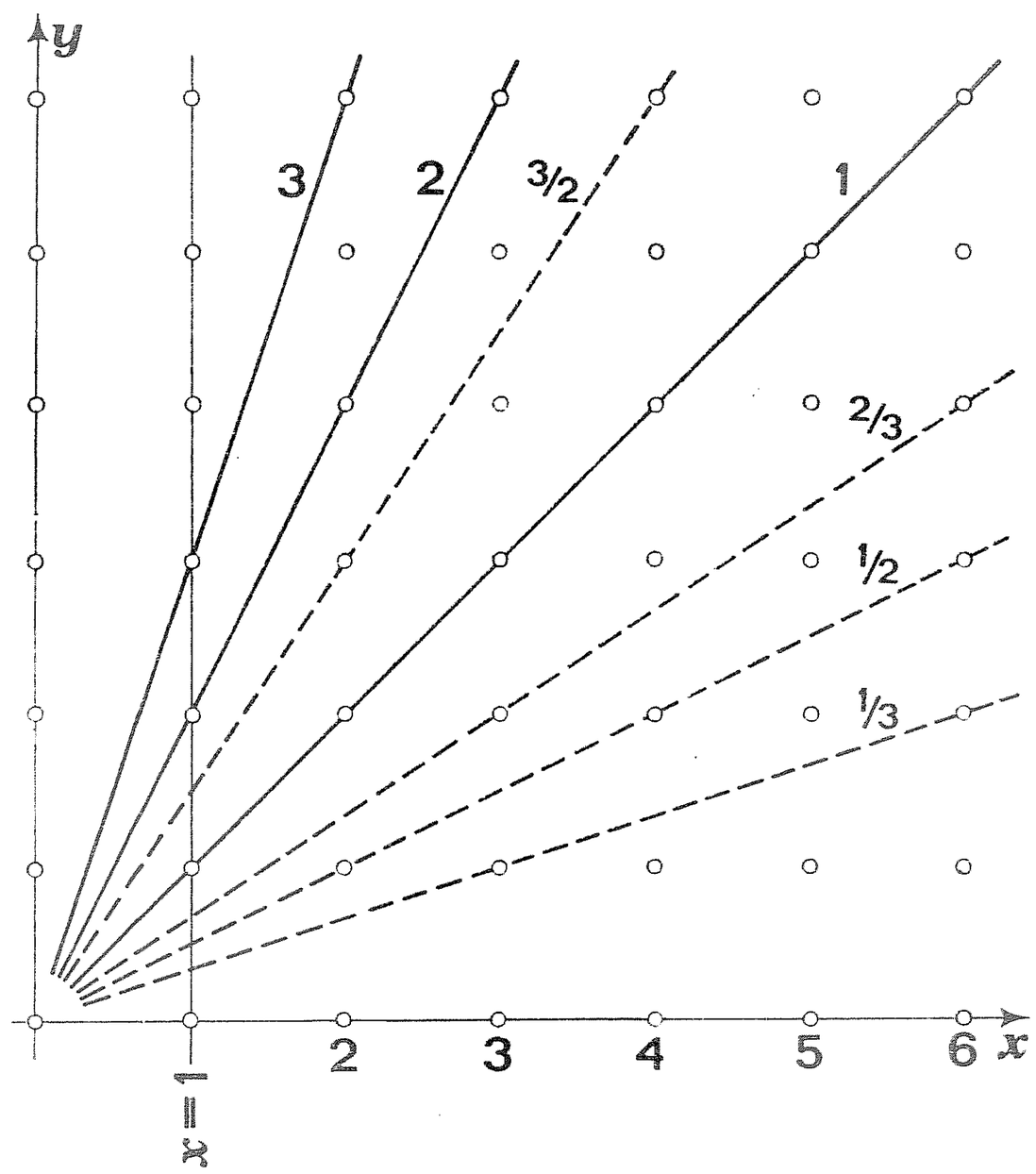
$$(a, b)(1, 1) = (a, b)$$

Razteg (a, b), $b \neq 0$, ima obratni razteg (b, a)

$$(a, b)\,(b, a) = (ab, ab) = (1, 1)$$

Preslikava $a \to \mathbf{R}_a$ preslika naravna števila v raztege. Razteg $\mathbf{R}_a$ je očitno določen s parom $(1, a)$. Pri tej vključitvi naravnih števil med raztege se ohranjata vsota in produkt.

Še enkrat spremenimo imena in zapis. Razteg (a, b) imenujmo ulomek, abscisi a recimo imenovalec, ordinati b števec ulomka in zapišimo $(a, b) = b/a$, pa smo že v domačem svetu.



Predočimo raztege in ulomke še grafično. Narišimo $\mathcal{N}^0 \times \mathcal{N}^0$ kot mrežo celih točk (točk s celimi koordinatami) na ravnini. Grafu raztega recimo kar premica. Premica v $\mathcal{N}^0 \times \mathcal{N}^0$ je pač diskretna množica. Vse premice, ki ustrezajo raztegom, gredo skozi izhodišče (0, 0). Raztegi, katerih grafi sečejo premico $x = 1$ (tudi ta je diskretna), ustrezajo naravnim številom in številu 0.

Pa naj bo $x = 1$ premica, kot jo vidi geometrija. Izberimo jo za model številske premice. Točke, v katerih sekajo premico grafi raztegov, so slike ustreznih ulomkov.

France Križanič

RAZPIS NAGRAD

Na podlagi pravil o podeljevanju priznanja učiteljem matematike, fizike in astronomije za delo z mladimi (Obzornik 1974 št. 5) vabimo podružnice DMFA, aktive matematikov in fizikov na šolah, da do 1. oktobra 1976 predlagajo kandidate za priznanje za delo z mladimi.

Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: DMFA SRS, Komisija za pedagoško dejavnost, Ljubljana, Jadranska 19, p. predal 227.

Martina Koman

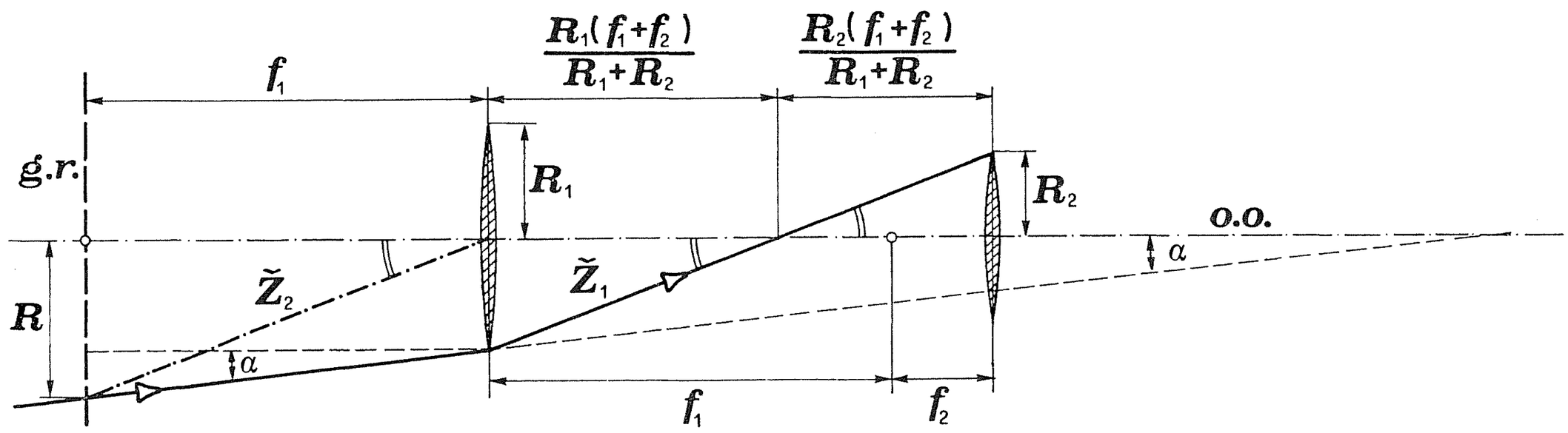
ZORNO POLJE DALJNOGLEDA

Poleg povečave, ločljivosti in zmogljivosti [1] je pomemben podatek o daljnogledu *zorno polje*. Podamo ga z zornim kotom 2α ob vrhu osnega preseka prostorskega kota, ki ga zajame daljnogled.

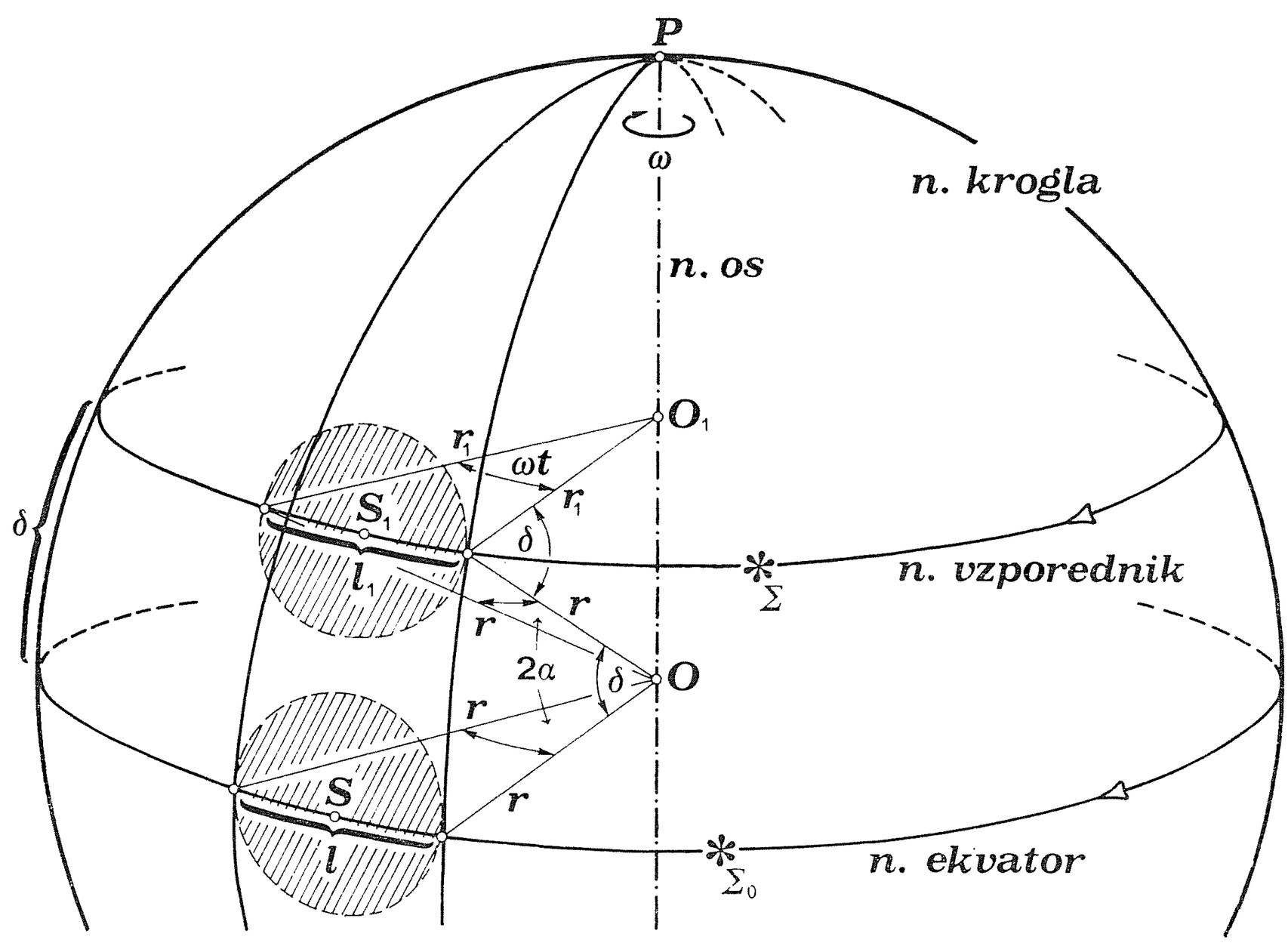
Vzemimo astronomski daljnogled s premerom objektiva $2R_1$, premerom okularja $2R_2$, goriščno razdaljo objektiva f_1 in goriščno razdaljo okularja f_2. Kratek račun (sl. 1) pokaže, da velja:

$$\operatorname{tg}\alpha = (R_2 f_1 - R_1 f_2)/f_1(f_1 + f_2) = [R_2(f_1/f_2) - R_1]/(f_1/f_2)(f_1 + f_2) \qquad (1)$$

Pri velikih povečavah f_1/f_2 je torej zorno polje majhno.



Sl. 1. K izvajanju izraza za zorno polje astronomskega daljnogleda. $\check{Z}_1$ je žarek, ki gre skozi spodnji rob objektiva in zgornji rob okularja in deli razdaljo med objektivom in okularjem $f_1 + f_2$ v razmerju $R_1 : R_2$. Žarek je pred lomom na objektivu nagnjen za kot α proti optični osi (o.o.) in prebode goriščno ravnino (g. r.) objektiva v razdalji R od optične osi. S slike razberemo, da velja $\operatorname{tg}\alpha = (R - R_1)/f_1$ in $R/f_1 = R_1/[R_1(f_1 + f_2)/(R_1 + R_2)] = (R_1 + R_2)/(f_1 + f_2)$, iz česar sledi (1). $\check{Z}_2$ je z $\check{Z}_1$ vzporedni žarek skozi središče objektiva



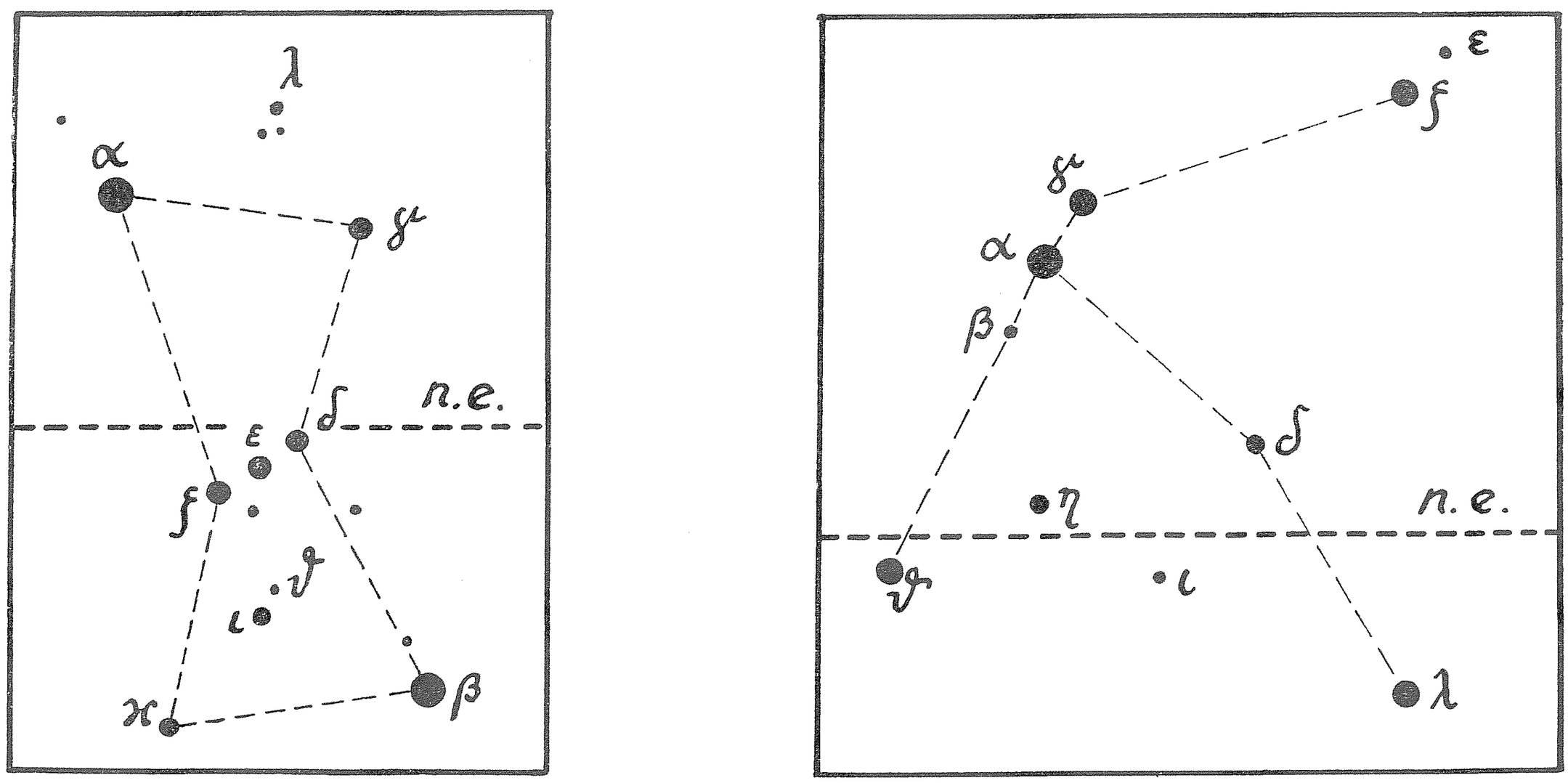
$l = l_1 \qquad r_1 = r\cos\delta \qquad 2\alpha = \omega t_0 = l/r = l_1/r$

Sl. 2. Črtkan krog označuje zorno polje daljnogleda. S je sredina zornega polja, O pa opazovališče. Zorno polje je $2\alpha = l_1/r = (l_1/r_1)\cos\delta = \omega t \cos\delta$. Za ekvatorsko zvezdo je $2\alpha = l/r = \omega t_0$; t_0 je čas prečkanja ekvatorske zvezde

Mali astronomski daljnogled, izdelek tovarne Vega iz Ljubljane, ima takele podatke: $2R_1 = 46$ mm, $2R_2 = 14$ mm, $f_1 = 700$ mm in $f_2 = 16$ mm. Iz njih izračunamo $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}0091$ in $2\alpha = 62'$.

Zorno polje pa lahko določimo tudi z opazovanjem. Izmerimo *čas prečkanja* zvezde čez sredino zornega polja. Zvezda se giblje v zornem polju nepremičnega daljnogleda zaradi navideznega vrtenja neba. Čas prečkanja ni za vse zvezde enak. Za zvezdo Σ z deklinacijo δ je večji kot za zvezdo Σ_0 na ekvatorju z deklinacijo 0. Zorno polje daljnogleda je $2\alpha = \omega t \cos\delta$, če je t čas prečkanja zvezde z deklinacijo δ in $\omega = 15°/\mathrm{h}$ kotna hitrost navideznega vrtenja nebesne krogle (sl. 2).

Daljnogled postavimo v ravnino krajevnega nebesnega meridiana, ga utrdimo, naravnamo na neskončnost in usmerimo proti zvezdi z znano deklinacijo [2]. S stoparico izmerimo čas prečkanja. Meritev ponovimo z isto zvezdo ali z drugimi zvezdami. Za šolske namene zadostuje, da določimo zorno polje na 0,1° natančno. Za določevanje zornega polja so prikladne zvezde blizu nebesnega ekvatorja (sl. 3).



Sl. 3. Za meritev zornega polja daljnogleda so prikladne zvezde blizu nebesnega ekvatorja (n. e.), npr. Rimščice (δ, ε in ζ) v ozvezdju Oriona (zimska opazovanja) in zvezde v Orlu (poletna opazovanja). Kot pomoč pri oceni zornega polja so podane kotne razdalje med nekaterimi zvezdami teh ozvezdij [5]

Orion (levo): $\alpha - \zeta$ 10,0°; $\delta - \beta$ 8,3; $\alpha - \gamma$ 7,8; $\alpha - \lambda$ 5,7; $\delta - \zeta$ 2,8
Orel (desno): $\alpha - \lambda$ 18,0°; $\alpha - \zeta$ 12,6; $\eta - \delta$ 7,1; $\beta - \gamma$ 4,8; $\alpha - \gamma$ 2,2

Z Veginim daljnogledom sem meril aprila 1976. Čas prečkanja Sirija ($\delta = -16°\,40'$) je bil 4 min. 20 s, ene izmed zvezd v Rimščicah (Koscih) ($\delta \approx 0°$) pa 4 min. 4 s. Iz tega sledi povprečna vrednost kota α 61,6′, ki se lepo ujema z izračunano.

Marijan Prosén

LITERATURA

[1] M. Prosén, *Ločljivost in zmogljivost daljnogleda*, Obzornik mat. fiz. 17 (1970) str. 79.

[2] F. Avsec in M. Prosén, *Astronomija*, Ljubljana, DZS 1975, str. 11—14 in 171.

[3] *Astronomske efemeride* 1976, Ljubljana, AGO in PDS, MK 1975.

[4] J. Grujić, Z. Ivanović in N. Živanović, *Karta severnog neba za epohu* 1950.0, Beograd, Astr. društvo R. Bošković 1971.

[5] P. G. Kulikovskij, *Spravočnik ljubitelja astronomii*, Moskva, Nauka 1971, str. 276.

DOMAČE VESTI

NAGRAJENCI SKLADA BORISA KIDRIČA V LETU 1976

Sklad Borisa Kidriča pri Raziskovalni skupnosti je v letošnjem letu za pomembne znanstveno-raziskovalne dosežke v Sloveniji podelil pet nagrad Borisa Kidriča in šestnajst nagrad Sklada Borisa Kidriča. Med nagrajenci so tudi štirje člani Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Ciril Velkovrh

KIDRIČEVA NAGRADA

Docent dr. Josip Globevnik — za dela na področju analitičnih vektorskih funkcij, zajeta v devetih člankih.

Doc. dr. Josip Globevnik se že nekaj let ukvarja s teorijo analitičnih funkcij, katerih vrednosti so elementi Banachovega prostora. S tega področja je objavil sam ali kot glavni soavtor 9 del v mednarodnih matematičnih časopisih. Od teh del sta dve izšli v letu 1973, dve v letu 1974 in pet v letu 1975.

Vektorske analitične funkcije se v marsikaterem oziru vedejo drugače kakor skalarne analitične funkcije. Tako npr. v nekaterih prostorih zanje ne velja strogi princip maksima. V treh člankih (*A note on normal-operator-valued analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973) 619—621; *On vector-valued analytic functions with constant norm*, Studia Math. **LIII** (1975) 29—37; *On a class of vector-valued analytic functions*, Annales Pol. Math. **XXXI** (1975) 73—81) je avtor obravnaval vprašanje, v katerih prostorih velja strogi princip maksima; nadalje je študiral lastnosti analitičnih funkcij s konstantno normo, oz. funkcij, katerih norma je enaka absolutni vrednosti skalarne analitične funkcije v prostorih, kjer ta princip ne velja. Dokazal je vrsto zanimivih lastnosti takih funkcij. Posebne rezultate je dobil v primeru, ko so vrednosti analitične funkcije elementi Banachove algebre ali omejeni operatorji Hilbertovega prostora.

Obravnavanje omenjenih problemov ga je privedlo na študij Banachovih prostorov, ki se odlikujejo s striktno ali enakomerno c-konveksnostjo. V članku *On complex strict and uniform convexity*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975) 175—178 je dokazal, da so prostori L_1 enakomerno c-konveksni. Nadalje je obravnaval posplošitve Schwarzove leme na vektorske funkcije (*Schwarz's lemma for the spectral radius*, Rev. Roumaine de Math. **XIX** (1974) 1009—1012). Našel je pogoje, pri katerih velja ta lema tudi tedaj, ko nadomestimo normo s spektralnim radijem.

V dveh člankih (*Norm-equalities of vector-valued analytic functions*, Math. Ann. **206** (1973) 295—302; *Norm-equalities of analytic mappings into Hilbert spaces*, Monatshefte f. Math. **79** (1975) 299—301) je obravnaval avtor analitične funkcije, ki imajo vse isto normo, njihove vrednosti pa so omejeni operatorji Hilbertovega prostora. Dokazal je, da se take funkcije med seboj razlikujejo le za parcialno izometrijo kot faktor. Isto velja za posplošene analitične preslikave.

V članku *The Rudin-Carleson theorem for vector-valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975) 250—252 se je avtor ukvarjal s posplošitvijo Rudin-Carlesonovega izreka. Dana je zvezna funkcija, definirana za zaprti množici točk enotne krožnice z mero nič, njene vrednosti pa so vektorji, ki leže v enotni krogli Banachovega prostora. Vsaka taka funkcija se da razširiti tako, da je zvezna na zaprti krožni plošči, analitična v notranjosti, njene vrednosti pa leže v enotni krogli.

Zadnji izrek je pripomoček pri reševanju Patilovega problema; poiskati je treba funkcijo, ki je zvezna na zaprti krožni plošči, analitična v notranjosti, njene vrednosti pa leže v enotni krogli separabilnega Banachovega prostora in so v njej goste.

NAGRADE SKLADA BORISA KIDRIČA:

Docent dr. Andrej Čadež — za tri članke s področja splošne teorije relativnosti.

Prva dva članka obravnavata problem dveh črnih lukenj, to je zvezd, ki sta tako gosti, da ju ne more zapustiti niti svetloba. V prvem članku (*Apparent Horizons in the Two-Black-Hole Problem*, Annals of Physics **83** (1974) 449) je dr. Čadež ugotovil lego navideznih horizontov na prostorski hiperploskvi. Zanesljiveje kot drugi avtorji je določil kritično vrednost parametra razmika, pri kateri izgine zunanji navidezni horizont in se za oddaljenega opazovalca črni luknji zlijeta. Izračunal je

površino notranjega navideznega horizonta in dobil preprosto enačbo, ki mu jo je uspelo razložiti s fizikalnimi argumenti.

V drugem članku (*Some Remarks on the Two-Body-Problem in Geometrodynamics*, Annals of Physics **91** (1975) 58) je identificiral gravitacijsko potencialno in deformacijsko energijo črnih lukenj. Ugotovil je, da lahko oddasta črni luknji pri trku okoli tisočkrat večji energijski tok gravitacijskega valovanja kot naslednji najmočnejši izvir. Ugotovil je tudi, da privedejo nekateri koordinatni pogoji pri reševanju Einsteinovih enačb do singularnosti in predložil uporabo harmoničnih koordinatnih pogojev v krajevnih rezinah, ki so maksimalne.

V tretjem članku (*Non-Causal Chains*, General Relativity and Gravitation **5** (1974) 467) je skupaj s sodelavko s tehniko Feymanovih diagramov raziskal nekatere pojave, ki utegnejo biti pomembni pri kvantizaciji gravitacijskega polja.

Dr. Branimir Borštnik — za dela s področja molekulske dinamike, ki so bila objavljena v letu 1975, in z njimi povezana dela iz leta 1974.

V prvem delu (*The numerical solution of the BGYB equation for the liquid-vapour interface*, Molecular Physics **29** (1975) 1165) je Borštnik uporabil BGYB intergrodiferencialno enačbo za določitev gostotnega profila plasti na meji med tekočino in plinom. Analiziral je možne vzroke nasprotujočih si rezultatov prejšnjih avtorjev, zlasti negotovost v približku za parsko porazdelitveno funkcijo. Problema gostote plasti na meji med kristalom in tekočino se je lotil v naslednjem delu (*The numerical solution of the BGYB equation for the liquid interacting with the rigid wall*, Molecular Physics **30** (1975) 1565). Izkaže se, da je pri renormalizirani temperaturi gostotni profil oscilirajoč. V nadaljnjem delu (*Molecular dynamics simulation of the liquid-solid transition, The dynamical properties of the liquid-solid interface*, Chemical Physics Letters **32** (1975) 153), je Borštnik prvi pokazal, da se da metoda molekulske dinamike uporabiti tudi za študij nehomogenih sistemov. Ker običajna izvedba molekulske dinamike za takšne primere ni uporabna, je Borštnik vpeljal dodatne robne pogoje za stabilizacijo nehomogenosti. Delo obravnava dinamične lastnosti in je nadaljevanje dela, o katerem je že poprej poročal v uvodnem predavanju na konferenci *Computer in Chemical Research and Education* (Ljubljana 1973). Rezultati omenjenih del so pomembni v teoriji kristalizacije in nukleacije, v kateri je poznavanje vmesne plasti nujno potrebno. Doslej so privzeli gostoto plasti ad hoc, brez kakršne koli utemeljitve, Borštnik pa je pokazal, kako se dajo ti podatki izračunati. O problemih medfaznih plasti je Borštnik imel uvodno predavanje na kongresu jugoslovanskih kristalografov (Kumrovec 1975).

V uvodnem predavanju na kongresu o dinamiki tekočin v Orsayu leta 1973 je pokazal, da je mogoče z metodo molekulske dinamike določiti reorientacijsko in vibracijsko relaksacijo (*Vibrational and reorientational relaxation of hydrogen-bonded systems*. Prispevek za knjigo *Molecular Motion in Liquids*, J. Lascombe (urednik), D. Reidel Publ. Co., 1974, Dordrecht-Holland).

V naslednjih dveh delih (Chemical Physics Letters, **26** (1974) 56; **31** (1975) 225) je obravnaval problem neurejenega sistema z vodikovo vezjo in razložil, v katerem frekvenčnem območju infrardečega spektra lahko pričakujemo vpliv neurejenosti.

Dr. Janez Korenini, dr. Rudolf Murn in ing. Tomo Pisanski — za publikacije in raziskave s področja diagnostike napak v digitalnih vezjih.

Rezultate večletnih raziskav so avtorji objavili v več publikacijah. Ključnega pomena sta razpravi: *Metoda za diagnozo večkratnih napak v prostih mrežah* (Proceedings of the international symposium on fault-tolerant computing, Paris 1975) in *Uporaba diagnoze napak v prostih mrežah na splošna omrežja* (Proceedings of the international seminar Applied aspects of the automata theory, vol. 2, str. 542—551. Varna 1975).

Pomembnost dela raziskovalne skupine ni samo v znanstvenem reševanju problematike, ampak tudi v neposredni uporabnosti rezultatov pri reševanju diagnostike digitalnih vezij domače proizvodnje.

RAZISKOVALNE NALOGE MATEMATIČNEGA ODDELKA INŠTITUTA ZA MATEMATIKO, FIZIKO IN MEHANIKO

O raziskovalnih nalogah matematičnega oddelka IMFM smo poročali v Obzorniku za matematiko in fiziko **21** (1974), str. 56—58. Danes navajamo še nekatere naloge. Financirala jih je (razen prve) Raiskovalna skupnost Slovenije.

Anton Suhadolc

Stabilnost numeričnih procesov linearne algebre

Nosilec te triletne naloge, ki jo je financiral Zvezni fond za znanstveno raziskovalno delo, je bil Z. Bohte.

V delu so z Wilkinsonovo metodo obratne analize napak analizirani nekateri procesi numerične linearne algebre. Z enotnega stališča so ocenjene zaokrožitvene napake pri metodi Choleskega za reševanje sistemov linearnih enačb s pozitivno definitno matriko, pri ortogonalnih metodah za reševanje sistemov linearnih enačb z elementarnimi zasuki in zrcaljenji, pri Givensovi in Householderjevi metodi za redukcijo simetrične matrike na tridiagonalno obliko in pri redukciji splošne matrike na Hessenbergovo obliko z eliminacijami. Vse ocene so izpeljane tudi v primeru, ko je matrika pasovna. Dobljene ocene niso direktno uporabne za oceno napak izračunanih rešitev, pač pa omogočajo primerjavo raznih metod glede stabilnosti računanja.

Nosilec bo iz obdelane snovi napisal skripta za predavanja iz predmeta Specialni kurz in za predavanja, ki jih je imel v okviru tretjestopenjskega študija na zagrebški univerzi.

Zvonimir Bohte

Adicijski izreki v teoriji grup in v teoriji števil

Nosilec je bil J. Grasselli.

V prvem delu je podan kratek pregled nekaterih pojmov in znanih izsledkov obravnavanega področja. Opisani sta prema in obratna naloga, razne njune posplošitve in nerešena vprašanja.

V drugem delu je izpeljanih nekaj izrekov o vsoti in pozitivnih diferencah množice, ki jo sestavlja končno mnogo celih števil. Dana je ocena za število razredov izomorfnih množic celih števil.

Jože Grasselli

Avtomatizacija faktorske analize

Nosilec naloge je bil E. Zakrajšek, sodelavci pa K. Momirovič, J. Kozak, A. Kmet in J. Štalec.

Statistični paket SS smo si pred leti zamislili kot paket programov za računalnik IBM 1130, s katerim bi lahko reševali standardne statistične naloge z najrazličnejših področij, kot so sociologija, psihologija, kineziologija in podobno. Še preden je bil program do kraja izdelan, smo dobili pri nas vrsto modernejših in večjih računalnikov. Tako smo preliminarno verzijo programa predelali za potrebe novih računalnikov in danes eksistirata dve verziji programa, ena na računalniku CYBER 72, druga na računalniku UNIVAC 1106. Obe verziji se še vedno spreminjata. V paket vgrajujemo nove module, obenem pa program stalno moderniziramo.

Egon Zakrajšek

Nove kvadraturne formule

Nosilec naloge je bil A. Suhadolc, sodelavec M. Omladič.

Delo obravnava eksistenco in konstrukcijo kvadraturnih formul, ki uporabljajo kot podatek o integrandu povprečja integranda po nekaj majhnih podintervalih.

Najprej je dokazana eksistenca kvadraturnih formul po povprečjih za n podintervalov, ki se ne prekrivajo; te formule so eksaktne najmanj za vse polinome do vključno stopnje $n - 1$.

V drugem delu je konstruiran neki operator povprečenja, ki omogoča, da se definira posplošeni skalarni produkt na prostoru polinomov dveh spremenljivk. Definirani so tudi posplošeni oskulacijski polinomi in polinomi, ortogonalni glede na posplošeni skalarni produkt. Ti polinomi omogočajo konstrukcijo Gaussovih kvadraturnih formul po povprečjih.

Idejo za obdelavo takih kvadraturnih formul je dobil prof. S. Pahor pri študiju nekega fizikalnega problema.

Iz obravnavane snovi je sodelavec pripravil tudi diplomsko nalogo. V tisku je članek, ki povzema prvi del naloge.

Anton Suhadolc

Metrične lastnosti analitičnih funkcij in izometrije v Banachovih prostorih

Nosilca naloge sta bila I. Vidav in J. Globevnik, sodelavca pa G. Tomšič in P. Legiša.

Naloga je sestavljena iz štirih delov. V prvem je obdelan tale problem:

Naj bo D odprta povezana množica v kompleksni ravnini in X kompleksen Banachov prostor. Naj bosta $F, G: D \to X$ analitični funkciji, za kateri velja $\| F(z) \| = \| G(z) \|$ $(z \in D)$. Če je prostor X Hilbertov, obstaja izometričen linearen operator $W: X \to X$, da je $F = WG$. Obratno, če je za vsaki funkciji F, G z zgornjimi lastnostmi mogoče najti izometričen linearen operator $W: X \to X$, da je $F = WG$, in če je X končnodimenzionalen, je X Hilbertov prostor.

Drugi del obravnava grupe izometrij in strukturo končno razsežnih Banachovih prostorov.

Naj bo X končno razsežen Banachov prostor, G grupa vseh linearnih izometrij na X, G_0 povezana komponenta identitete grupe G in $\mathcal{H}$ množica vseh hermitskih operatorjev na X. Osrednja tema so zveze med strukturami teh objektov. Najprej je dokazan tale rezultat: $\mathcal{H} + i\mathcal{H}$ je algebra natanko tedaj, ko obstaja na X toliko od nič različnih pravokotnih hermitskih idempotentov, kot je rang Liejeve grupe G_0. Nato vzame avtor poljubno tako C^*-podalgebro $\mathcal{B}$ v $\mathcal{H} + i\mathcal{H}$, ki vsebuje identiteto prostora X. Razcepu algebre $\mathcal{B}$ na faktorje ustreza razcep prostora X na podprostore, recimo $X_1, \ldots, X_j$. Pokazano je, da je vsak X_k direktna vsota Hilbertovih podprostorov iste dimenzije. Če je $\mathcal{B} = \mathcal{H} + i\mathcal{H}$, vsaka izometrija prostora X ohranja ali le zamenja podprostore X_k.

Iz zgornjega se da izvesti nov dokaz izreka H. Schneiderja in R. E. L. Turnerja o vprašanju, kdaj je X direktna vsota pravilno vloženih Hilbertovih podprostorov. Končno je podan pregled spektralnih lastnosti hermitskih operatorjev na končno razsežnih prostorih.

Tretje poglavje se imenuje Hilbertovi podprostori v C^*-algebrah. V njem je najprej ugotovljena struktura pravilno vloženih Hilbertovih podprostorov v C^*-algebrah. Ostanek daje odgovor na vprašanje, kakšni so tisti Hilbertovi podprostori v C^*-algebri vseh omejenih linearnih operatorjev na nekem Hilbertovem prostoru, ki vsebujejo minimalne desne ideale.

Četrto poglavje ima naslov Poševno simetrični operatorji v realnih Banachovih prostorih. Omejen linearen operator A v realnem Banachovem prostoru imenujemo poševno simetričen, če je $\| I + tA \| = 1 + o(t)$, $t \to 0$, $t \in R$. Poševno simetričen operator je generator neke enoparametrične grupe izometrij v realnem Banachovem prostoru in obratno. Če je A poševno simetričen operator v realnem $2n$ dimenzionalnem Banachovem prostoru in če so lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ prirejenega hermitskega operatorja v kompleksnem prostoru racionalno neodvisne, potem je $A = \Sigma - \lambda_k JP_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, kjer so P_k projektorji, J poševno simetričen operator in $J^2 = -I$.

O rezultatih naloge bodo avtorji poročali v šestih člankih. *Peter Legiša*

Aciklične mnogoterosti

Nosilec naloge je bil J. Vrabec, sodelavci pa P. Petek, M. Kranjc, J. Malešič, J. Rakovec in J. Šrekel.

Delo obravnava tri sorodne, vendar neodvisne teme:

1. vložitve $(k-1)$-povezanih, sklenjenih $2k$-mnogoterosti v $(2k+1)$-mnogoterosti, ki so aciklične v dimenziji k, in kompaktne n-podmnogoterosti acikličnih n-mnogoterosti;
2. nekompaktne ploskve v 1-acikličnih 3-mnogoterostih;
3. sklenjene ploskve in kompaktne 3-podmnogoterosti v neorientabilnih 3-mnogoterostih, ki so 1-aciklične ali aciklične nad Z_n.

Povzetek obravnavane snovi bodo avtorji izdelali v enem članku.

Jože Vrabec

Cele analitične funkcije, katerih vrednosti so obrnljivi operatorji

Nosilec naloge je bil I. Vidav, sodelavec P. Mizori-Oblak.

Teorija celih analitičnih funkcij je za skalarni primer podrobno izdelana. Med osnovne spadajo izreki o izražanju cele funkcije brez ničel in cele funkcije z neskončno mnogo ničlami. Zanimalo nas je vprašanje, ali je mogoče podobno izraziti tudi cele funkcije, katerih vrednosti so obrnljivi elementi neke Banachove algebre.

Cele funkcije z vrednostmi v Banachovei algebri se v marsikaterem pogledu vedejo drugače kakor skalarne cele funkcije, zato ne preseneti rezultat, da tu ne moremo vedno izraziti celo obrnljivo funkcijo v obliki eksponentne funkcije. V splošnem se taka funkcija ne more zapisati niti kot produkt končnega ali neskončnega števila eksponentnih funkcij.

Polinomske obrnljive matrike in cele funkcije, ki so po vrednosti obrnljive matrike, pa je vedno mogoče zapisati kot produkt končnega števila eksponentnih funkcij. Pri polinomski obrnljivi matriki smo našli potreben in zadosten pogoj za rešljivost enačbe

$$e^{X(z)} = A(z),$$

kjer je rešitev $X(z)$ spet cela funkcija.

Iz obravnavane snovi bosta avtorja pripravila članek.

Pavla Mizori-Oblak

Splošna metoda reševanja bilinearnih programov

Nosilec naloge je bil A. Vadnal, sodelavci pa V. Rupnik, S. Indihar in M. Simončič.

Pri bilinearnem programiranju iščemo ekstrem bilinearne namenske funkcije, kjer zadoščajo spremenljivke pogojem nenegativnosti in sistemu neodvisnih neenačb ali enačb. Pri reševanju bilinearnih programov so bile doslej znane metode, ki privedejo, izhajajoč od znane možne rešitve z iteracijami do lokalnega, ne pa vselej do globalnega optimuma. Raziskava podaja novo iterativno metodo, ki privede v vsakem primeru do globalnega optimuma.

Raziskava vključuje tudi strojni program za elektronski računalnik, po katerem je mogoče numerično izračunati globalni optimum vsakega bilinearnega programa.

Iz obravnavane snovi je izdelal S. Indihar doktorsko disertacijo in jo tudi uspešno obranil.

Stanko Indihar

Računalniško orientirane matematične metode III

Nosilec je bil I. Grad, sodelavci Z. Breška, E. Zakrajšek in B. Žitko.

V prvem poglavju je dokazan izrek o eksistenci in enoličnosti točke minimuma enakomerno povezanega funkcionala. Obravnavana je konvergenca metod spusta za iskanje minimuma funkcionala.

V drugem poglavju je analizirana kombinirana redukcija polinoma s kvadratičnim faktorjem, dobljenim s parom približkov konjugirano kompleksnih korenov začetnega polinoma. Rezultati osvetlijo problem določitve optimalne točke, v kateri naj se izvrši redukcija.

V tretjem poglavju so obravnavane stabilnostne lastnosti (ničelna, absolutna in relativna stabilnost) numeričnih metod za reševanje začetnega problema pri navadnih diferencialnih enačbah, pri sistemih navadnih diferencialnih enačb prvega reda in pri parcialnih diferencialnih enačbah. Podan je kratek pregled različnih tipov numeričnih metod in najpomembnejših pojmov, ki so potrebni za razumevanje teorije stabilnosti.

Ivo Grad

Metrične lastnosti normiranih prostorov — posebnosti v kompleksnih prostorih

Nosilec je bil J. Globevnik, sodelavci pa I. Hafner, M. Hladnik, V. Lampret, M. Omladič, A. Suhadolc in G. Tomšič.

Lastnosti funkcij, katerih vrednosti leže v danem normiranem prostoru, so odvisne od metrične strukture prostora. Še posebej je to pomembno pri študiju analitičnih funkcij. Raziskovalna naloga obravnava metrične lastnosti kompleksnega normiranega prostora, to je, strukturo ekstremnih točk in točk gladkosti enotne krogle.

Naloga je razdeljena na tri dele. Prvi definira kompleksne ekstremne točke in kompleksne točke gladkosti. Raziskane so lastnosti strogo c-konveksnih in c-gladkih prostorov ter zveze med njimi. Precej pozornosti je posvečeno vprašanju, kdaj je podprostor c-gladkega prostora spet c-gladek. Drugi del vpelje pojem enakomerno c-konveksnega prostora in dokaže, da je tak prostor $L^1(S, \sigma, \mu)$. Kot uporaba so navedene lastnosti analitičnih funkcij z vrednostmi v strogo in enakomerno c-konveksnih prostorih. Zadnji, tretji del pa obravnava metrično strukturo nekaterih konkretnih normiranih prostorov.

Iz obravnavane snovi so bili pripravljeni za objavo trije članki in poročilo na kongresu v Novem Sadu.

Josip Globevnik

Iteracijske metode za reševanje sistemov linearnih enačb in teorija zlepkov

Nosilec naloge je bil Z. Bohte, sodelavca J. Kozak in A. Kmet.

V prvem delu naloge so obravnavane iterativne metode za reševanje eliptičnih problemov. Poleg pregleda teorije so na posebnem zgledu blok-tridiagonalne matrike izračunane lastne vrednosti vseh obravnavanih iteracijskih metod in izračunana optimalna vrednost pospeševalnega parametra. Na numeričnem zgledu so primerjane nekatere znane metode.

V drugem delu je podan pregled osnovnih lastnosti zlepkov, ki so definirani na realni osi. Obdelani so predvsem posplošeni naravni zlepki z dopustno defektnostjo. Podan je pregled aproksimacije linearnih funkcionalov s posebnimi linearnimi funkcionali, za katere je aproksimacija v Sardovem smislu optimalna. Opisane so tudi nekatere metode za reševanje navadnih diferencialnih enačb prvega reda z zlepki.

V tretjem delu je podan pregled novejših dosežkov v analizi zlepkov nad eno in dvodimenzionalnimi območji. Za različne interpolacijske predpise so obravnavane eksistenca in konvergenčne lastnosti interpolacijskih zlepkov. Zajeti so tudi problemi, ki še niso rešeni in ki bi jih kazalo še nadalje raziskovati.

Zvonimir Bohte

SEZNAM DIPLOMANTOV PRVE, DRUGE IN TRETJE STOPNJE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE TER RESUMEJI DOKTORSKIH DISERTACIJ V LETU 1975

na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani ter na obeh Pedagoških akdemijah

Pedagoška akademija Maribor

Matematika-fizika

119. Mihorič Miljenka
120. Muzek Kristina
121. Nemeš Ludvik
122. Jović Miroslava
123. Kocet Danica
124. Tišler Elza

Pedagoška akademija Ljubljana

Matematika-fizika

376. Bezek Danijel
377. Govek Marija
378. Hiti Marija
379. Sodja Janez
380. Novak Ivanka
381. Gomezel Doris
382. Makuc Anica
383. Žižek Bojan
384. Selič Albina
385. Troha Cirila
386. Černelič Anica
387. Zavnik Alenka
388. Draginc Terezija
389. Peljhan Danica
390. Bizjak Sonja
391. Kovač Alenka
392. Ribič Vida
393. Škornik Rozalija
394. Žnidar Anica
395. Viler Zora
396. Dolenc Silva
397. Stojko Dragica
398. Lipovšek Franc
399. Zevnik Marija
400. Koren Sonja
401. Špilak Zorislava
402. Cesar Jožica
403. Poljanšek Marija
404. Vončina Danica

Tehnični pouk — fizika

405. Godler Lojze
406. Verovnik Ivo
407. Miholič Vesna
408. Toman Srečko

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

Matematika — pedagoška smer

274. Cuder Bernard
275. Prešeren Marjeta
276. Lupše Janez

Matematika — tehniška smer

87. Štrubelj Miroslav	Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb paraboličnega tipa
88. Dobovišek Mirko	Numerična zaloga vrednosti operatorja in bilinearne forme
89. Kraigher Marko	Posebne kvadraturne formule
90. Kralj Drago	Metoda analitičnega nadaljevanja za reševanje operatorskih enačb
91. Kafol Irena	Ocenjevanje korelograma in parametrov pri stacionarnih slučajnih procesih
92. Simšič Miljenka	Metoda najmanjših kvadratov
93. Kužnik Vanja	Korelacija in regresija
94. Dieng J. N'doffene	Diferencialne enačbe v Banachovih prostorih
95. Slivnik Tomaž	Singularne integralske enačbe
96. Žitko Berto	Stabilnost numeričnih metod za reševanje navadnih diferencialnih enačb
97. Loštrek Olga	Dedekindovi kolobarji
98. Čibej Jože Andrej	Oscilacijski izreki
99. Kutnjak Milan	Diskretni robni problem
100. Čučnik Sonja	Nepristranski testi
101. Klančar-Berlič Barbara	Kompaktni operatorji
102. Kavkler Marjan	Teorija informacije
103. Gorenšček Nevenka	Potenčna metoda in inverzna iteracija
104. Marinček Maja	Iterativne metode za reševanje nelinearnih enačb
105. Mezek Boženslava	Optimizacija v lokalno konveksnih prostorih
106. Orel Bojan	Diferenčne metode v numeričnem reševanju diferencialnih enačb drugega reda
107. Kuštrin Borut	Potrebni pogoji za ekstrem
108. Mihelič France	Sumacijske metode
109. Stojanovski Dame	Testi soglasja
110. Vezočnik Ivan	Riemannov problem

Fizika — pedagoška smer

41. Jereb Aleš
42. Cvahte Miroslav

Fizika — tehniška smer

243. Gavrič Vojin	Tehnologija podkolektorskih in kolektorskih plasti za izdelavo bipolarnega integriranega tranzistorja
244. Poljšak Matjaž	Ocena vezavne energije tritona z metodo gostotnih matrik
245. Kranjc Tomaž	Prehodi med nivoji iona Li^+ v kristalu KCl
246. Lužnik Janko	Študij in gradnja zvezno delujočega oscilatorja za meritve jedrske resonance v območju 1—5 MHz
247. Vuk Marko	Uporaba holografske interferometrije pri študiju mehanskih vibracij
248. Filipič Cene	Dielektrične lastnosti kristalov CsH_2PO_4 in CsD_2PO_4
249. Žerjal Aljoša	Atenuacija doze v vodi, merjena s termoluminiscenco LiF
250. Erjavec Bojan	Preiskave dinamične metode za določanje množine v sunku sproščenega plina v visokem in ultra visokem vakuumu
251. Starc Vito	Študij prenosa informacije po katetru, polnjenem s tekočino
252. Solomun Brane	Plima v Jadranu
253. Ratnik Viktor	Magnetofononski efekt v n-InSb
254. Trošt Stojan	Študij elastičnih lastnosti kristalov $NaH_3(SeO_3)_2$ v bližini feroelektričnega faznega prehoda z metodo Brillouinovega sipanja
255. Rankel Karel	Študij urejenosti molekul tekočih kristalov v električnem polju z metodo elektronske spinske resonance
256. Prešern Saša	Vpliv tlaka na nihalne trakove vodikove vezi
257. Gajšek Janez	Uporaba Fresnelove zonske plošče za preslikave
258. Ravnik Matjaž	Model izgorevanja v homogenem ploščnem reaktorju
259. Peternel Mitja	Kvadrupolni delež pri sevalnem zajetju hitrih nevtronov v ^{33}Sr
260. Sevšek Franc	Študij gradienta električnega polja na mestu jedra Fe^{2+} v spojini $N_2H_5(Fe(N_2H_3COO)_3) \cdot H_2O$

Matematika — III. stopnja

4. Vukman Joso — **Involutorične Banachove algebre**

Snov je razdeljena na štiri dele. V prvem, algebraičnem, se seznanimo s strukturo algebre in vpeljemo pojme, kot so: spekter, maksimalni ideal, radikal itd. Nato preidemo na algebre, na katerih je definirana preslikava $x \to x^*$ z lastnostmi:

$$(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad (x^*)^* = x$$

Preslikavi s takimi lastnostmi pravimo involucija, algebri pa involutorična algebra. V drugem delu vpeljemo poleg Gelfandove reprezentacije iz splošne teorije Banachovih algeber vse, kar potrebujemo pozneje. Tretji del nosi naslov Involutorične Banachove algebre. Težišče je na hermitskih algebrah, to je na algebrah, v katerih je spekter vsakega elementa x, za katerega velja $x^* = x$, realen. Najprej se ukvarjamo s splošnimi hermitskimi algebrami, potem pa z dvema posebnima primeroma; s C^* algebrami in pa algebrami, ki imajo ekvivalentno C^* normo. Posebno pozornost posvečamo karakterizacijami hermitskih algeber, C^* algeber in pa algeber z ekvivalentno C^* normo. Poglavje zaključimo z Gelfandovo reprezentacijo hermitskih algeber. Četrti del je dodatek, v katerem so izreki in definicije, na katere se večkrat sklicujemo, ki pa ne sodijo v teorijo Banachovih algeber.

5. Rakovec Janez — **Obstoj homemorfizmov med trorazsežnimi mnogoterostmi**

Delo obravnava kosoma linearno trorazsežne mnogoterosti in kosoma linearne preslikave med njimi. Preslikava med mnogoterostma določa neki homomorfizem njunih fundamentalnih grup; če je ta preslikava krovna (oziroma homeomorfizem), je ustrezni homomorfizem fundamentalnih grup monomorfizem (oziroma izomorfizem).

Za dve 3-mnogoterosti M in N naj bo dan neki homomorfizem $\varphi: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$. Znano je, da tedaj, — pri določenih pogojih — obstaja preslikava $f: M \to N$, ki inducira φ. Kaj pa, če je φ monomorfizem (oziroma izomorfizem) — ali lahko tedaj izberemo za f krovno preslikavo (oziroma homeomorfizem)? Ta problem je osrednja tema dela; odgovor na vprašanje je pritrdilen za kompaktne 3-mnogoterosti posebne vrste: v njih mora poljubna 2-sfera omejevati neko 3-celico, v njih ne sme biti dvostranskih projektivnih ravnin, vsebovati pa morajo vsaj eno tako imenovano inkompresibilno ploskev. Za te mnogoterosti rešujemo naš problem tako, da jih vzdolž inkompresibilnih ploskev razrežemo na same 3-celice in iskano krovno preslikavo oziroma homeomorfizem definiramo

na teh 3-celicah, nakar jo sestavimo v celoto. Pri tem nam pomaga dejstvo, da so analogni problemi že rešeni za ploskve, to je za dvorazsežne mnogoterosti.

Dokazani izreki dajejo popolnejšo zvezo med topološko in algebraično karakterizacijo mnogoterosti, ki ustrezajo omenjenim pogojem: za te mnogoterosti je s fundamentalno grupo določen njihov homeomorfnostni razred.

Fizika — III. stopnja

32. Jamšek-Vilfan Marija	Spin-mrežna relaksacija v nematičnih tekočih kristalih
33. Pirš Janez	Študij dinamike faznih prehodov s pomočjo spin-mrežne relaksacije v dipolnem sistemu
34. Burgar Matija Iko	Določevanje reda faznega prehoda feroelektrikov tipa KDP z dielektričnimi meritvami
35. Čerček Milan	Nelinearno sklapljanje ionsko zvočnega valovanja v plazmi
36. Pušnik Franc	Študij dinamike tekočih kristalov z elektronsko paramagnetno resonanco
37. Stanovnik Aleš	Kotne porazdelitve in energijski spektri pri reakciji $^{90}Zr\ (\gamma, p)^{89}Y$
38. Budnar Miloš	Sevalno zajetje hitrih nevtronov v težkih elementih
39. Pavšič Matej	Nezvezna metoda analize meritev življenjskih dob jedrskih vzbujenih stanj s pomočjo Dopplerjevega premika

Matematika — doktorske disertacije

13. **Indihar Stanko** — **Splošne metode reševanja bilinearnih programov**

Problem bilinearnega programiranja (bilinearni program) se formulira v obliki:

$$\max \{a^T x + b^T y + x^T C y \mid Ax = p, \quad By = q, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

a, b, x, y, p, q so vektorji, A, B, C pa matrike ustreznih dimenzij. V delu je najprej razvit algoritem za računanje lokalnega ekstrema, nato pa sta s pomočjo dveh pomožnih nalog izdelani dve metodi (metoda odsečnih ravnin, metoda postopnega pokrivanja poliedra) za iskanje globalnega ekstrema. Predzadnje poglavje je namenjeno problemu maksimiranja konveksne kvadratne funkcije pri linearnih omejitvah, zadnje pa posplošitvi metode reševanja bilinearnih programov na multilinearne programe.

Fizika — doktorske disertacije

55. **Vilfan Igor** — **Vpliv mrežnih nihanj na gibljivost elektronov v molekulskih kristalih**

Disertacija obravnava sklopitev elektrona z molekulskimi in mrežnimi nihanji v molekulskih kristalih. Molekulska nihanja zožijo elektronski pas, medtem ko mrežna nihanja povzročijo dušenje elektrona. Gibljivost elektrona je izračunana v lokalizirani sliki, ko elektroni le občasno, nekoherentno skačejo z ene molekule na drugo. Poleg standardnega prispevka h gibljivosti obravnava disertacija še gibljivost, ki nastopi zaradi močne odvisnosti elektronskih tunelskih integralov od medmolekulske razdalje. Posebej obravnava gibljivost elektronov v smeri osi c' v antracenu. Elektroni preskočijo v tej smeri, ko se molekuli (0, 0, 0) in (1/2, 1/2, 0) zavrtita druga proti drugi. Zato je gibljivost μ_c' elektronov določena s frekvenco rotacijskih nihanj. Avtor primerja dobljene odvisnosti gibljivosti od temperature, tlaka in devteracije kristala z objavljenimi meritvami.

56. **Cevc Pavel** — **Študij dinamike protonov v vodikovih vezeh s pomočjo elektronske paramagnetne resonance**

Meritev kotne in temperaturne odvisnosti EPR spektrov vgrajenih paramagnetnih centrov ter meritev ustreznih elektron spin-mrežnih relaksacijskih časov je avtor uporabil za študij sprememb kristalne strukture in dinamike protonov v vodikovih vezeh O-H-O pri feroelektričnem faznem prehodu v KH_2AsO_4 in antiferoelektričnem prehodu v $NH_4H_2AsO_4$. Z istim pristopom je študiral zgradbo zobne sklenine in ugotovil povezavo med urejenostjo anorganskih mikrokristalov in rezistenco proti kariesu.

Meritev dinamike izmenjave protonov med šestimi Slaterjevimi H_2AsO_4 konfiguracijami je pokazala, da poteka v feroelektričnih kristalih KDA in ADA fazni prehod vrste red-nered.

Meritve spin-mrežnih relaksacijskih časov in temperaturnega poteka prehoda kvintet-triplet so pokazale obstoj »centralnega nihajnega načina« v KH_2AsO_4 s frekvenčnim območjem $10^7\ s^{-1}$ poleg »mehkega nihajnega načina« na frekvenčnem območju okoli $10^{13}\ s^{-1}$.

Meritve razcepa najnižje As črte z $m_I = 3/2$ iz singleta v dublet, ki sta pri navadnem in devteriranem KDA v istem temperaturnem območju, kažejo ,da so frekvence centralnega načina na istem temperaturnem območju enake za oba vzorca za razliko od mehkega načina, za katerega ima devteriran vzorec za velikostni red višje frekvence.

Meritve na mešanih kristalih KDA-KDP so pokazale, da se temperatura prehoda kvintet-triplet linearno veča z rastočo Curiejevo temperaturo, iz česar sledi, da določajo širino centralnega načina predvsem fononske, ne pa protonske ali devteronske fluktuacije.

Centralni del spektra EPR obsevane sklenine pripišemo centru CO_3^{3-}, preko katerega lahko študiramo urejenost mikrokristalov hidroksiapatita v sklenini. V sklenini, ki je odpornejša proti zobni gnilobi, je boljša urejenost mikrokristalov.

Študij prevodnosti sklenine za razne molekule dopušča sklep, da raztopine, ki korodirajo zobno sklenino, napadajo mikrokristale le na površini. Avtor je določil hitrost prodiranja molekul spinskega označevalca v sklenino ($D \cong 10^{-7}$ cm²/s) in stopnjo vezanja teh molekul: za nevezani del je korelacijski čas 10^{-8} s do 10^{-9} s.

57. Osredkar Radko — Dvojna jedrska resonanca v bioloških sistemih

Disertacija obravnava metode dvojne jedrske magnetne resonance, ki so primerne za meritve NQR spektrov dušika, klora, kisika itd. v bioloških sistemih, in uporabo teh metod pri nekaterih izmed njih. Avtor podrobno opiše in analizira metodo križanja nivojev v laboratorijskem sistemu in metodo »solid efekta«, ki ju je pri eksperimentalnem delu tudi uporabljal. Ugotavlja, da sta obe metodi za meritve NQR spektrov polikristalnih vzorcev primerni, vendar pa manj občutljivi, kot bi pričakovali. Poleg tega sta omejeni z relaksacijskimi časi vzorcev; ti morajo biti reda velikosti ene sekunde. Tipični vzorci, ki jih avtor v eksperimentalnem delu disertacije obravnava, so nukleinske baze, aminokisline ter tekoči kristali. V posameznih primerih obravnava uporabnost rezultatov za karakterizacijo vzorcev, za študij notranje dinamike, stopnje polimerizacije. V zaključku dela avtor našteje nekatere izboljšave, ki bi povečale uporabnost metod.

58. Šentjurc Marjeta — Študij strukture termotropnih in liotropnih tekočih kristalov z metodo elektronske paramagnetne resonance

Avtorica je uporabila različne spinske označevalce kot sonde, preko katerih je elektronsko paramagnetno resonanco proučevala tekoče kristale, biološke membrane in encime. Pri študiju tekočih kristalov je ugotovila, da se nekateri spinski označevalci vgradijo med centralne aromatske dele molekul tekočih kristalov, nekateri pa med periferne ogljikovodikove verige. Z uporabo različnih spinskih označevalcev je lahko odkrila nekatere do sedaj še neopažene razlike v ureditvi in dinamiki centralnih in perifernih delov molekul v raznih fazah termotropnih in liotropnih tekočih kristalov.

Proučevala je tudi ureditev termotropnih tekočih kristalov v električnem polju. Pokazala je, da lahko z dodajanjem različnih primesi skoraj poljubno spreminjamo orientacijo molekul glede na smer električnega polja. Ta ugotovitev je pomembna pri iskanju novih materialov za elektrooptične pokazatelje (displaye) na osnovi tekočih kristalov in za študij prehoda ionov skozi biološke membrane.

Liotropni tekoči kristali so dobri modeli za biološke membrane. Tako je avtorica uporabila izkušnje pri proučevanju tekočih kristalov za študij membran in encimov, ki so nanje vezani. Študirala je ureditev in dinamiko lipidnih slojev membran normalnih in malignih celic. Ugotovila je, da so molekule v membranah malignih celic bolj urejene kot v membranah normalnih celic. V to vrsto bioloških raziskav spada tudi študij konformacijskih sprememb acetilholinesteraze — encima, ki je vezan v membrano električnega organa skata, pod vplivom raznih fizikalno-kemičnih faktorjev. S primerno izbiro spinskega označevalca ji je uspelo selektivno označiti esterazni center encima. Pokazala je, da je ta center v »žepu« in ne na površini encima, kot so to mislili dosedaj. Dokazala je tudi alosterično povezavo med holinoreceptorjem in hidrolitskim centrom na membranski acetilholinesterazi.

59. Prelovšek Peter — Vpliv močne elektronsko-fononske interakcije na gibljivost elektronov v polprevodnikih in izolatorjih

V disertaciji je avtor po perturbacijskem razvoju enodelčne Greenove funkcije za elektron uvedel novo metodo za določitev parametra $f\lambda$, ki določa velikost mrežne deformacije v bližini dodanega elektrona. Pokazal je, da je $f\lambda$ najmočneje odvisen od razmerja med polaronsko skupinsko hitrostjo in fononsko fazno hitrostjo ter od dušenja Γ polaronskih stanj. Iz polaronskih stanj in njihovega dušenja je izračunal elektronski spekter za neadiabatni in adiabatni primer. Rezultati ne kažejo na možnost naglih temperaturnih sprememb v spektru.

Pri računu elektronske gibljivosti v navzočnosti močne interakcije s fononi je avtor vpeljal metodo koherentnega potenciala (CPA). V območju kvazilokaliziranih stanj, kjer analogija s statično neurejeno mrežo ni primerna, je izpeljal izraze za energijsko odvisno gibljivost na modelu dveh mest. Ugotovil je pogoje, pri katerih je mogoče razširiti uporabo metode CPA tudi na to območje.

60. **Pirš Janez** **Difuzija v tekočih kristalih**

Disertacija obravnava translacijsko lastno difuzijo v tekočih kristalih. Avtor je obdelal difuzijo vode v heksagonalni in lamelarni fazi liotropnega tekoče-kristalnega sistema Na-palmitat/H_2O in tudi anizotropne lastnosti tenzorja translacijske lastne difuzije molekul parametoksi-benziliden-butil anilina (-nematska faza), 4n-butoksi-benziliden-4'n-oktil-anilina (-smektična faza A) in tereftal-bis-4n-butil-anilina (-smektična faza A in C).

Pri tem je avtor uporabil standardne pulzne metode NMR za merjenje translacijske lastne difuzije. Poleg tega pa je prav za ta namen razvil večpulzno metodo, ki omogoča meritve difuzije v primerih, ko odpovedo standardne metode NMR zaradi dipolarne razširitve absorpcijske krivulje NMR.

PREJELI SMO V OCENO

Imre Pál, Raumgeometrie in der technischen Praxis, Akadémiai Kiadó, Budapest 1974. Aus dem Ungarischen übersetzt von M. Marosszéki, deutsche Bearbeitung von H. Stark. 176 strani, 555 slik.

Avtor tega dela se že dve desetletji ukvarja s tako imenovanimi anaglifskimi slikami, to je ravninskimi slikami prostorskih tvorb, ki nam z ustreznimi optičnimi pripomočki dajejo vtis tridimenzionalnosti. Prednost njegovih anaglifov je v tem, da nam dajo ta vtis pri običajnem gledanju knjige, pri večini drugih pa dobimo vtis prostornosti pri pravokotnem gledanju slik. Stereoskopija je sicer zelo zanimiv način ravninskega podajanja prostorskih objektov, vendar se v svetu razen redkih izjem (geodezija, kartografija) ni uveljavil. Spomnimo se samo poskusov v umetniški in strokovni fotografiji, kinematografiji, televiziji. Vzrokov za to je verjetno več. Zahtevnost izdelave, dodatni pripomočki, togost opazovanja (objekt kljub vsemu lahko opazujemo le z ene strani, z določene pozicije) in ne nazadnje prostorska predstava opazovalca, to je sposobnost prostorske rekonstrukcije objekta že ob gledanju običajne ravninske slike.

Palova dela so morda v tem izjema, saj je njegovo glavno delo Opisna geometrija v prostorskih slikah, ki je prevedeno v sedem jezikov, doživelo doslej že petnajst izdaj. V Prostorski geometriji v tehniški praksi je zbral zanimive primere iz strojništva, stavbarstva, kemije, matematike, jih nevsiljivo razmestil po prostoru in jih prikazal v njihovih najbolj značilnih legah. Objekti zažive kot da imamo pred seboj okusno in skrbno izdelane modele. Vsako sliko posebej opremi avtor z najpotrebnejšim komentarjem. Knjiga je pravzaprav zbirka, da ne rečem atlas, vestno izbranih modelov iz omenjenih strok. Razdeljena je v glavnem na dve poglavji: Osnovni pojmi, Uporabe. V prvem poglavju, ki zavzema dobro tretjino vsega obsega, nas avtor seznani z elementi prostorske geometrije, telesi, omejenimi z ravnimi ploskvami, s krivimi ploskvami in načini projekcij. Po drugem poglavju knjiga nosi naslov. Oglejmo si nekaj primerov iz posameznih strok! Strojništvo — struženje in rezkanje, stavbarstvo — lupinaste in predalčne konstrukcije, primeri iz statike, kemija — zgradba atomov in molekul, struktura kristalov, matematika — koordinatni sistem, krivulje drugega reda, ploskve drugega reda, konoidi.

V vsesplošni težnji po popestritvi in posodobitvi pouka na šolah vseh stopenj je Prostorska geometrija Imra Pála vsekakor pomemben doprinos v strokah, iz katerih so vzeti primeri, ter v opisni geometriji kot posredniku. Zavedati pa se moramo, da nam knjiga ne bo v nobenem primeru služila niti kot učbenik niti kot strokovno delo, temveč le kot pripomoček za vzbujanje prostorske predstave. Če upoštevamo odlično tehnično izdelavo in čudovito opremo knjige, potem ni pretirana trditev, da jo bo z veseljem vzel v roke ne samo strokovnjak, ampak bo v njej našel mnogo zadovoljstva tudi laik.

Franc Lebedinec

SEZNAM NOVIH ČLANOV DMFA SRS

V zadnjih dveh letih se je naročilo na Obzornik za matematiko in fiziko 156 novih naročnikov, ki so postali tudi člani našega društva. Njihova imena so navedena v spodnjem seznamu, zadnji ima zaporedno številko 1019. Od leta 1970, ko smo prvič objavili seznam članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije v naši reviji, smo prenehali pošiljati Obzornik za matematiko in fiziko 132 članom društva. Vzrok je v večini primerov odpoved ali pa neredno plačevanje naročnine in članarine. Slednje bomo ponovno uvrstili v naš seznam naročnikov takoj, ko nam bodo poravnali zakasnele obveznosti. V društvu je trenutno 887 članov, ki prejemajo društveno glasilo ter 77 članov-študentov, ki plačujejo polovično naročnino za revijo. *Vinko Pavlič in Ciril Velkovrh*

864 Abrahamsberg Metod
865 Ambrožič Albina
866 Ambruš Srečko
867 Antončič Borut
868 Barle Janez
869 Battestin Radojka
870 Bernik Marija
871 Bezeljak Sonja
872 Bole Marta
873 Bradač Zlatko
874 Bras Etbin
875 Bratina Marta
876 Bratina Vinko
877 Brešar Franc
878 Breznik Šarika
879 Britovšek Tone
880 Brvar Andrej
881 Car Martin
882 Casar Štefan
883 Celec Štefan
884 Curl Jožica
885 Čakš Marija
886 Čarni Koloman
887 Čibej Jože
888 Djokić Vlada
889 Dornik Marija
890 Dovgan Milica
891 Dragan Anton
892 Drenšek Anica
893 Dušić Mišo
894 Fakin Igor
895 Gole Frančiška
896 Golobič Darinka
897 Gorc Anton
898 Gorenšček Nevenka
899 Gornik Lidija
900 Guštin Adrijana
901 Hohnec Erna
902 Hribar Anka
903 Hvastija Rada
904 Jarc Darinka
905 Javornik Ladislava
906 Jensterle Rado
907 Jerebic Vera
908 Jug Zdenko
909 Kham Boris
910 Klemenič Iztok
911 Klopčič Anka
912 Knez Viktorija
913 Kocet Danica
914 Kofjač Milan
915 Kontler Tončka
916 Koprivnikar Gabi
917 Korošec Jože
918 Kotnik Ana
919 Kožar Milena
920 Kralj Jasna
921 Kraševec Viktor
922 Kristan Vito
923 Krumberger Lojze
924 Kuhar Andrej
925 Kuhar Franc
926 Kuhar Ljuba
927 Kumar Karel
928 Lah Pavla
929 Lastrič Ljiljana
930 Likar Dragica
931 Lipovec Marija
932 Lončarič Dušanka
933 Lopuh Milka
934 Mali Franc
935 Manojlovič Štefka
936 Markelj Sonja
937 Markič Marija
938 Marsetič Angela
939 Mestnik Jerica
940 Meterc Nada
941 Mihalič Edvard
942 Mihalič-Klemen Karmela
943 Mikeln Peter
944 Miklavc Pavlina
945 Mitrovič Angela
946 Mizori-Oblak Pavlina
947 Mladenovič Nada
948 Mlakar Janez
949 Moge Rudolf
950 Moravec Vida
951 Murgel Anda
952 Murovec Stanko
953 Musek Alenka
954 Nikolič Vid
955 Novak Ivanka
956 Ohman Cilka
957 Orešnik Božidar
958 Ostrež Frančiška
959 Paunović Dušanka
960 Pavšek Dragica
961 Perič Egon
962 Petek Leopold
963 Petek Francka
964 Polajnar Jože
965 Prelovšek Avrelija
966 Prinčič Silvija
967 Pristov Ljudmila
968 Prša Jože
969 Razpet Nada
970 Rebolj Stanka
971 Rojko Marija
972 Rojko Roman
973 Roškar Stanka
974 Rudaš Irena
975 Saje Jožica
976 Selevšek Jelka
977 Sep Anton
978 Sovič Marija
979 Smrdelj Jožica
980 Stanič Marica
981 Starc Vito
982 Stare Janez
983 Stepančič Julka
984 Strel Silva
985 Studnička Niko
986 Šajna Adela
987 Šantel Jasna
988 Šifrer Francka
989 Škodnik Jože
990 Šobar Tatjana
991 Špacapan Nada
992 Štalec Miha
993 Štrbac Zoran
994 Tonejc Branko
995 Toplak Ernest
996 Udir Vinko
997 Urbanc Jani
998 Urbančič Silvan
999 Uršnik Franc
1000 Uršnik Jana
1001 Vertot Peter
1002 Vižintin Emilija
1003 Vučko Jože
1004 Vuga Marija
1005 Vukelič Milan
1006 Zajc Rudolf
1007 Zajni Marija
1008 Zakrajšek Franc
1009 Založnik Ivana
1010 Zrim Jože
1011 Zupanc Slavko
1012 Zupančič Polona
1013 Žagar Olga
1014 Žiberna Gorazd
1015 Žitnik Janez
1016 Žižek Bojan
1017 Žnidar Janina
1018 Žnidaršič Marija
1019 Žontar Jasna

MEDNARODNE MATEMATIČNE OLIMPIADE SREDNJEŠOLCEV

Obzornik je nazadnje poročal o 13. mednarodni matematični olimpiadi*, sedaj pa še poročamo o naslednjih treh.

14. olimpiada-Torun 1972

Sodelovalo je 14 držav: Avstrija, Bolgarija, ČSSR, Nizozemska, SFRJ, Kuba, Madžarska, Mongolija, NDR, Poljska, Romunija, SZ, Švedska in Velika Britanija. Našo ekipo so sestavljali naslednji dijaki: *Boris Lavrič* iz Kranja, *Dragoslav Ljubić*, *Pavle Mladenović*, *Srđan Ognjanović* in *Vladimir Vulović* iz Beograda ter *Uroš Milutinović*, *Ivan Mirković* in *Marko Tadić* iz Zagreba. Ekipa se je dobro uvrstila, saj je delila sedmo in osmo mesto z Avstrijci, posamično pa so *trije* tekmovalci osvojili **tretjo nagrado** (*Lavrič*, *Mirković* in *Vulović*).

Poglejmo si naloge:

1. *dan*:

1. Naj bo dana množica desetih različnih dvomestnih naravnih števil. Dokaži, da vedno obstajata dve disjunktni podmnožici te množice, za kateri velja, da je vsota števil v eni izmed njiju enaka vsoti števil v drugi. (SZ, 5 točk)

2. Dokaži naslednjo trditev za vsako naravno število n, večje od 3: Vsak tetivni četverokotnik lahko razdelimo na n tetivnih četverokotnikov. (Nizozemska, 6 točk)

3. Dokaži, da je pri poljubnih nenegativnih celih številih m in n izraz:

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

celo število! (Velika Britanija, 7 točk)

2. *dan*:

1. Reši sistem neenačb:

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqq 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqq 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqq 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqq 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqq 0$$

če so x_1, x_2, x_3, x_4 in x_5 pozitivna realna števila (Nizozemska, 7 točk)

2. Naj bosta f in g realni funkciji, definirani na vsej (razširjeni) realni osi in naj ustrezata enačbi:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

za vsak par realnih števil x in y. Dokaži, da je za vsak y $|g(y)| \leq 1$, brž ko je $|f(x)| \leq 1$ in f ni identično enaka nič. (Bolgarija, 7 točk)

3. V prostoru naj bodo dane štiri vzporedne ravnine. Dokaži, da obstaja pravilni tetraeder, ki ima po en vrh v vsaki izmed njih. (Velika Britanija, 8 točk)

---

* Obzornik **19** (1972) 1, str. 31.

** Prvi podatek nam pove, katera država je predlagala nalogo, drugi koliko točk je nalogi prisodila olimpijska žirija in tudi kriterij za težavnost naloge.

15. olimpiada-Moskva 1973

Sodelovalo je 16 držav: poleg lanskih udeleženk še Finska in Francija. V naši ekipi so tekmovali: *Boris Lavrič* iz Kranja, *Sava Krstić*, *Pavle Mladenović* in *Miodrag Živković* iz Beograda, *Uroš Milutinović* in *Ivan Mirković* iz Zagreba, *Siniša Vrečica* iz Karlovca ter *Rade Živaljević* iz Sarajeva. Uspeh iz preteklega leta so krepko popravili, saj so prejeli kar **pet tretjih nagrad** (*Lavrič*, *Živković*, *Milutinović*, *Mirković* in *Mladenović*). (Malo je manjkalo, pa bi dobili tudi šesto, saj je Vrečici manjkala samo ena točka).

1. *dan*:

1. Točka O naj leži na premici l in $\boldsymbol{OP}_1, \boldsymbol{OP}_2, \ldots, \boldsymbol{OP}_n$ naj bodo enotski vektorji, pri čemer leže točke P_i v isti ravnini kot l in se vse nahajajo na istem bregu. Dokaži, da je za vsak lih n res:

$$\| \boldsymbol{OP}_1 + \boldsymbol{OP}_2 + \ldots + \boldsymbol{OP}_n \| \geq 1$$

(ČSSR, 6 točk)

2. Ali obstaja v prostoru taka množica nekoplanarnih točk M, da za poljubni dve njeni točki A in B obstajata v M drugi dve točki C in D, da sta premici skozi A in B ter C in D vzporedni, a ne identični. (Poljska, 6 točk)

3. Poišči minimalno vrednost izraza $a^2 + b^2$, če sta a in b taki realni števili, pri katerih ima enačba:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

vsaj en realen koren. (Švedska, 8 točk)

2. *dan*:

1. Vojak mora pregledati minsko polje, ki ima obliko trikotnika, pri tem pa so mine lahko skrite tudi na mejah. Minski detektor ima omejen doseg, in sicer ima akcijski radij enak polovici trikotnikove višine. Vojak krene na pot iz enega izmed trikotnikovih vrhov. Kakšno pot naj ubere, da bo najhitreje preiskal ves teren? (Jugoslavija, 6 točk)

2. Naj neprazna množica G funkcij realne spremenljivke x, ki imajo obliko $f(x) = ax + b$, kjer sta a in b realni števili in $a \neq 0$, ustreza naslednjim pogojem:

1° če sta $f, g \in G$, potem je njun kompozitum $fg \in G$

2° če je $f \in G$, je tudi inverzna funkcija k f, torej $f^{-1} \in G$. Ta ima obliko:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

3° za vsak $f \in G$ obstaja tak $x_f \in \mathfrak{R}$, da je $f(x_f) = x_f$

Dokaži, da obstaja tak realen k, da je $f(k) = k$ za vsak $f \in G$. (Poljska, 6 točk)

3. Naj bo q dano realno število, ki ustreza zahtevi $0 < q < 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pa naj bodo dana pozitivna števila. Poišči tako realno n-terico $b_1, b_2, \ldots, b_n$, da bo res:

1° $a_k < b_k$ pri vsakem $k = 1, \ldots, n$

2°

$$q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < q^{-1} \qquad \text{za vsak } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

3° $b_1 + \ldots + b_n < \dfrac{1+q}{1-q}(a_1 + \ldots + a_n)$

(Švedska, 8 točk)

16. **olimpiada-Erfurt** 1974

Sodelovalo je 18 držav, novinki sta bili DR Vietnam in ZDA. Nas so zastopali: *Jozsef Varga*, *Miroslav Jovanović*, *Miomir Kostić*, *Sava Krstić*, *Vladimir Liščević*, *Pavle Mladenović* in *Miodrag Živković* iz Beograda ter *Darko Šifrer* iz Ljubljane. Na tem tekmovanju so mladi jugoslovanski matematiki dosegli doslej *največji* uspeh v zgodovini mednarodnih tekmovanj: *Varga* in *Živković* sta dobila **prvo nagrado**, *Jovanović* **drugo**, *Krstić* in *Mladenović* pa **tretjo nagrado**. *Ekipno* smo zasedli odlično 5. **mesto**, više so se uvrstili le *Rusi*, *Američani*, *Madžari* in domačini — *Vzhodni Nemci*. Poglejmo si naloge:

1. *dan*:

1. Oglejmo si igro za trojico: na treh kartah so napisana naravna števila p, q in r, ki ustrezajo zahtevi $0 < p < q < r$. Karte se premešajo in razdele — vsak izmed igralcev A, B in C dobi toliko kroglic, kolikor je napisano na njegovi karti. Potem se karte vrnejo na kup in igra teče dalje. Po n ($n \geqq 2$) mešanjih in razdeljevanjih ima A 20 kroglic, B 10 in C 9. Vemo, da je pri poslednjem razdeljevanju B dobil r kroglic. Kdo je dobil v prvem razdeljevanju q kroglic? (ZDA, 5 točk)

2. Dokaži, da velja v trikotniku ABC naslednja neenakost

$$\sin \alpha \sin \beta \leq \sin^2 \gamma/2$$

natanko takrat, ko na stranici AB obstaja taka točka D, da je daljica CD ravno geometrijska sredina daljic AD in BD. (Finska, 6 točk)

3. Dokaži, da število

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

pri nobenem n ni deljivo s 5. (Romunija, 8 točk)

2. *dan*:

1. Šahovsko desko (8×8) lahko razstavimo na p pravokotnikov, in sicer tako, da so izpolnjeni naslednji pogoji:

1° pravokotniki so paroma disjunktni

2° vsak pravokotnik obsega enako število belih in črnih polj

3° če z a_i označimo število belih polj v i-tem pravokotniku, potem velja

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_p$$

Poišči največji možni p in zanj poišči vsa možna končna zaporedja števil $a_1, a_2, \ldots a_p$. (Bolgarija, 6 točk)

2. Poišči množico vseh možnih vrednosti izraza:

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

kjer so a, b, c in d poljubna pozitivna realna števila. (Nizozemska, 7 točk)

3. P naj bo polinom s celimi koeficienti, različen od konstante, $n(P)$ naj bo število vseh različnih števil k, za katera je

$$(P(k))^2 = 1$$

Dokaži, da je

$$n(P) - s(P) \leq 2$$

kjer $s(P)$ pomeni stopnjo polinoma. (Švedska, 8 točk)

Dušan Repovš

LITERATURA

Kvant **3** (1972) 11, str. 58, **4** (1973) 11, str. 64, **5** (1974) 12, str. 60.
Matematičko-fizički list za srednje škole **23** (1972/73) 1, str. 20, **24** (1973/74) 1, str. 20, **25** (1974/75) 1, str. 20.

MOSKOVSKA ŠTUDENTSKA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Spomladi 1975 je bila v Moskvi študentska olimpiada. Tekmovanje je bilo sestavljeno iz dveh delov. Na prvega je imel vstop vsak slušatelj višjih šol, na drugega pa tisti, ki so se dobro odrezali na prvem delu. *Matematiki* so seveda tekmovali ločeno od drugih, posebno skupino pa so sestavljali predstavniki neprirodoslovnih fakultet.

Oglejmo si *naloge matematikov:*

I. letnik

1. Poišči razdaljo točk (0,4) in (0,6) ravnine (x, y) do parabole $y = x^2/10$. (Razdalja točke do parabole je razdalja te točke do najbližje točke parabole).

2. Koliko največ ničel ima lahko na realni osi funkcija

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(a_k x)$$

kjer so a_k in c_k realni koeficienti?

3. Kaj je večje

$$\prod_{n=1}^{25} \left(1 - \frac{n}{365}\right) \qquad \text{ali} \qquad 1/2\,?$$

4. Skozi središče pravilnega petkotnika nariši tako premico, da bo vsota kvadratov razdalj od vrhov tega petkotnika do premice najmanjša.

5. Naj bo dano številsko zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ in za vsak $g > 1$ naj podzaporedje

$$[a_{[g^n]}], \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad ([x] = \text{celi del } x)$$

konvergira k 0. Ali je potem tudi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

II.—VI. letnik

1. Ali vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

enakomerno konvergira na intervalu $[0, \infty)$?

2. Ista naloga kot 2. za I. letnik.

3. Poišči vrednost izraza:

$$\frac{1 + \dfrac{a^4}{5!} + \dfrac{a^8}{9!} + \dfrac{a^{12}}{13!} + \ldots}{\dfrac{1}{3!} + \dfrac{a^4}{7!} + \dfrac{a^8}{11!} + \dfrac{a^{12}}{15!} + \ldots}$$

za $a = \pi$.

4. Ista naloga kot 4. za I. letnik.

5. Izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch} x - 0{,}99}}$$

z relativno napako največ 20%. Dati je treba odgovor, ne pa oceno napake.

Na koncu bi se rad zahvalil *doc. dr. M. A. Šubinu* s katedre za diferencialne enačbe (meh-mat., MGU) za izredno zanimiv razgovor o študentskih olimpiadah v SZ in za obilo materialov s tekmovalnimi nalogami.

Dušan Repovš

POROČILO O DELU SEMINARJA LAAR GETNI V ŠOLSKEM LETU 1975/76

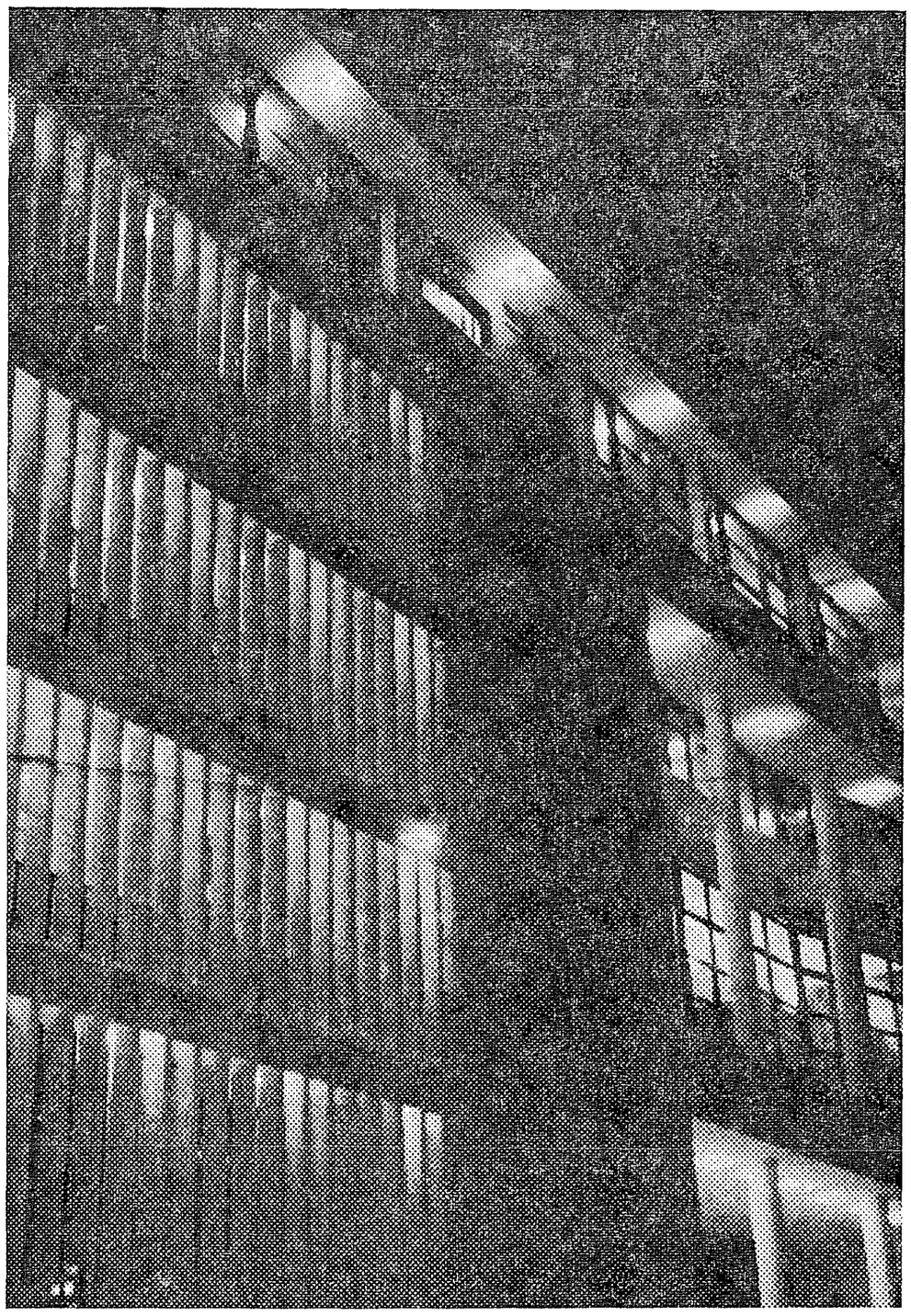
Seminar obstaja že dve leti in deluje v okviru Odseka za matematiko. Letos smo študenti pripravili dveurna predavanja:

23. 10. 1975 D. Repovš: *Moskovska državna univerza M. V. Lomonosova*
6. 11. 1975 B. Magajna: *O Schefferjevih funkcijah*
20. 11. 1975 B. Lavrič: *Problem iz teorije števil*
18. 12. 1975 D. Marušič: *Grupe in grafi*
17. 3. 1976 Z. Magajna: *Disekcija*
31. 3. 1976 A. Malnič: *O neskončnih zaporedjih grup*
8. 4. 1976 D. Repovš: *O teoriji dimenzij*
15. 4. 1976 D. Repovš: *O particijah naravnih števil in maksimalnih produktih sumandov*
22. 4. 1976 D. Repovš: *Cantorjeva množica*

Seminar je obiskovalo v povprečju 10 študentov, v glavnem iz tretjega letnika. Na začetku so prišli tudi prvoletniki, vendar so kmalu odnehali. Zanimivo je, da letos enako kot lani ni bilo nobenega študenta iz drugega letnika. Pohvalimo se lahko, da so nas nekajkrat obiskali tudi asistenti. Laar Getni je bil sicer ustanovljen z namenom, da bi obdeloval težja poglavja elementarne matemtike. Naslovi predavanj pa pričajo o načrtnem odklonu od te zamisli. Menimo, da je taka programska politika dobra: Naj študenti višjih letnikov pripravljajo referate iz bolj »oddaljenih« področij, elementarni problemi pa naj ostanejo prvemu in drugemu letniku. Glavna ovira za boljše delo seminarja je torej nezanimanje mlajših kolegov za samostojno delo zunaj šole, ozdraviti te lenobe pa ne znamo.

Dušan Repovš

SREČANJE SLOVENSKIH MATEMATIKOV IN FIZIKOV V TRSTU



Slovenski kulturni dom v Trstu, foto Magajna

Na predvečer slovenskega kulturnega praznika — obletnice smrti največjega slovenskega pesnika dr. Franceta Prešerna — je devet članov razširjenega upravnega odbora Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije obiskalo svoje kolege v Trstu. Srečanja v prostorih slovenskega Kulturnega doma se je udeležilo več učiteljev matematike in fizike na slovenskih višjih in nižjih srednjih šolah na Tržaškem in Goriškem. Ob tej priliki je republiško društvo podarilo vsem trinajstim šolam na Tržaškem in štirim šolam na Goriškem paket 35 slovenskih matematičnih in fizikalnih knjig, predvsem iz zbirke Sigma, zbirke univerzitetnih učbenikov iz matematike, nekaterih skript ter komplet vseh številk Preseka — lista za mlade matematike, fizike in astronome. To akcijo je v celoti financiral republiški komite za vzgojo in izobraževanje, srečanje pa je bilo organizirano ob pomoči svetovalca za slovenske šole v Italiji prof. Janeza Sivca. Predsednik društva dr. Niko Prijatelj je v uvodnem nagovoru poudaril, da je zelo vesel, ker je s to akcijo

društvo lahko naredilo prvi korak pri širjenju slovenske matematične in fizikalne literature med vsemi slovenskimi učitelji matematike in fizike. S tem je upravni odbor navezal stike z zamejci in se v dvournem razgovoru dogovoril za nadaljnje sodelovanje. V imenu domačinov se je za lepo darilo zahvalil prof. Karel Bajc, Aljoša Volčič, profesor na tržaški univerzi, pa je izrazil željo večine, da bi na Tržaškem ustanovili podružnico slovenskega društva matematikov, fizikov in astronomov. Večje sodelovanje s slovenskimi matematiki v Italiji je prva predlagala Bogomila Kolenko pred dvema letoma, ko je na letni občni zbor našega društva tudi povabila tržaške kolege. Od tedaj se posamezniki udeležujejo naših predavanj in seminarjev v Ljubljani. 7. maja letos smo z istim namenom obiskali tudi kolege na celovški gimnaziji.

Ciril Velkovrh

ODGOVORI

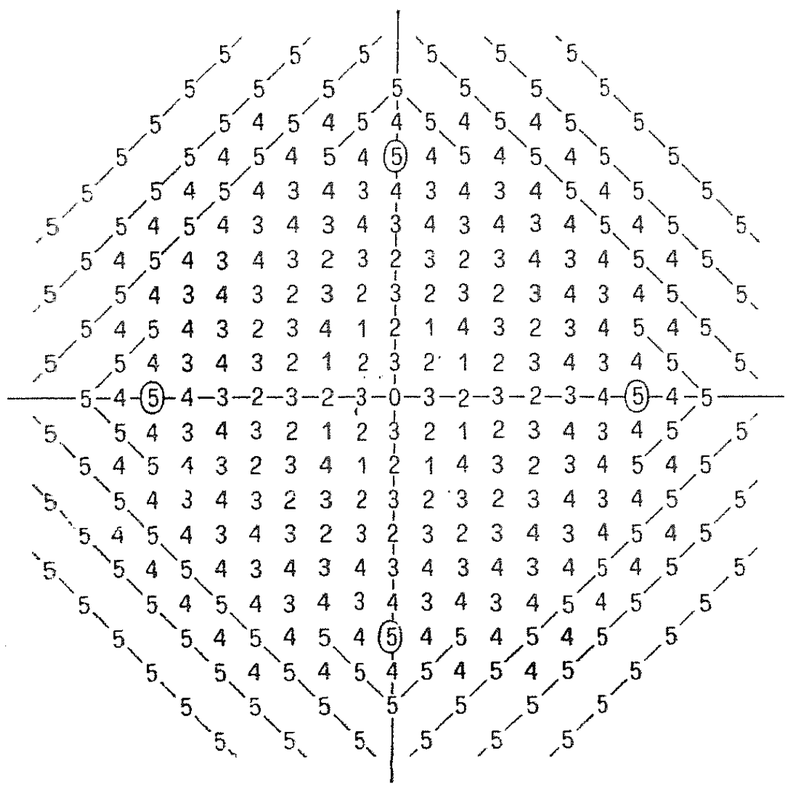
VPRAŠANJE ŠT. 104, Obzornik 16 (1969) 2, str. 94

Vprašanje:

Na šahovski deski neskončnih dimenzij stoji šahovski konj. Na koliko različnih polj lahko pride v največ **n** *skokih?*

Odgovor:

1° Uvedimo priročne oznake: P_n naj bodo polja, na katera lahko konj pride v natanko n korakih, R_n njihovo število, N_n pa naj bo število polj, dosegljivih z največ n skoki. $\left(\text{Torej je } N_n = \sum_{k=0}^{n} R_k\right)$. Začetnemu položaju dajmo priročno ime — recimo mu izhodišče. Narišimo sliko šahovske deske: na vsako polje vpišemo najmanj kolikokrat mora konj skočiti iz izhodišča, da ga doseže.



Sl. 1

2° Iz slike (slika 1) kmalu razvidimo, da se naloga cepi v dva kraja:

I. $n < 5$

II. $n \geqq 5$

I. a) $N_0 = 1$ (namreč izhodišče).

b) $N_1 = 9$, kajti očitno je $R_1 = 8$.

c) $N_2 = 41$. Iz poljubnega P_1 lahko konj skoči na 7 novih polj, vendar na 6 izmed njih lahko skoči tudi iz kakega drugega P_1: Zato je $R_2 = 8 + \frac{8 \cdot 6}{2} = 32$.

d) $N_3 = 109$. Na deski narišemo koordinate z izhodiščem v P_0. Opazujmo enega izmed kvadrantov: P_3 leže na premicah $\frac{x}{k} + \frac{y}{k} = 1$, $k = 1, 3, 5, 7, 9$. $R_3 = 4(2 \cdot 4 + 6) + 4 \cdot 3 = 68$.

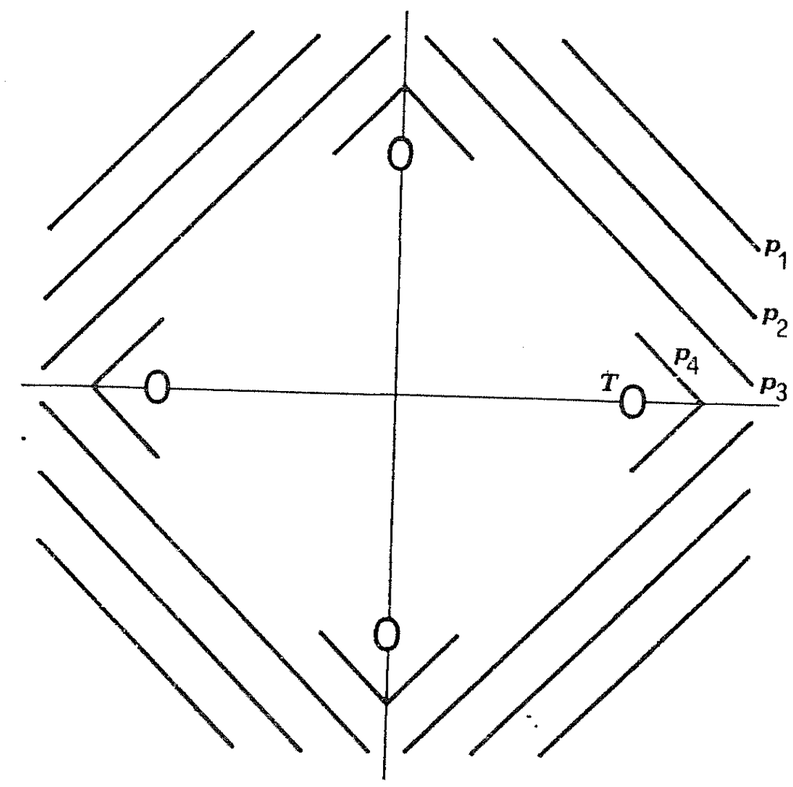
e) $N_4 = 205$. P_4 leže na premicah (namreč v I. kvadrantu): $\frac{x}{2k} + \frac{y}{2k} = 1$, $2 \leqq k \leqq 6$; $R_4 = 4(1 + 2 + 2 \cdot 7 + 5) + 2 \cdot 4 = 96$.

II. Za $n > 4$ konj skače lahko samo še na polja z višjimi koordinatami (po absolutni vrednosti). Premice, na katerih leže P_k, nam dajo lepo sliko (slika 2). V I. kvadrantu leže polja P_k na premicah

$$p_r^{(k)} = x + y - k + 2(r - 6) = 0 \qquad 1 \leqq r \leqq 5$$

Nič težko ni videti, da je razlika $R_{k+1} - R_k = 28$ stalna. Zato je $R_n = 28\,n - 20$ in odtod

$$N_n = N_4 + \sum_{j=5}^{n} (28j - 20) = 14n^2 - 6n + 5$$



Sl. 2

3° Splošen odgovor se glasi:

$$N_n = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ -\frac{4}{3}n^3 + 26n^2 - \frac{110}{3}n + 21; & 0 < n \leq 4 \\ 14n^2 - 6n + 5 & ; \quad n > 4 \end{cases}$$

Dušan Repovš

VPRAŠANJE ŠT. 105, Obzornik mat. fiz. 16 (1969) str. 94

Ali obstaja na šahovski deski 4×4 *taka začetna pozicija, da more konj, ki začne v njej skakati, nadaljevati pot tako, da skoči na vsako polje natanko enkrat?*

REŠITEV:

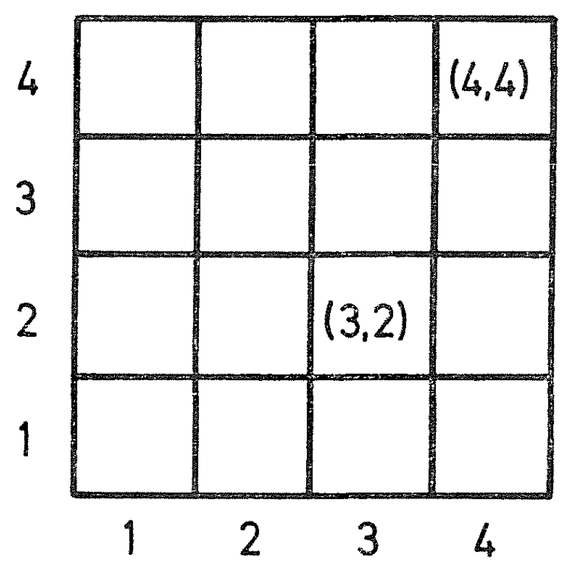
Ne. Dokažimo! Recimo, da taka pot obstaja in jo skušajmo najti.

1. Postavimo na desko *koordinatni sistem* z začetkom na polju v njenem levem spodnjem oglišču. Vsakemu polju priredimo par koordinat (i, k), kjer naj bo i abscisa in k ordinata njegove lege (slika 1).

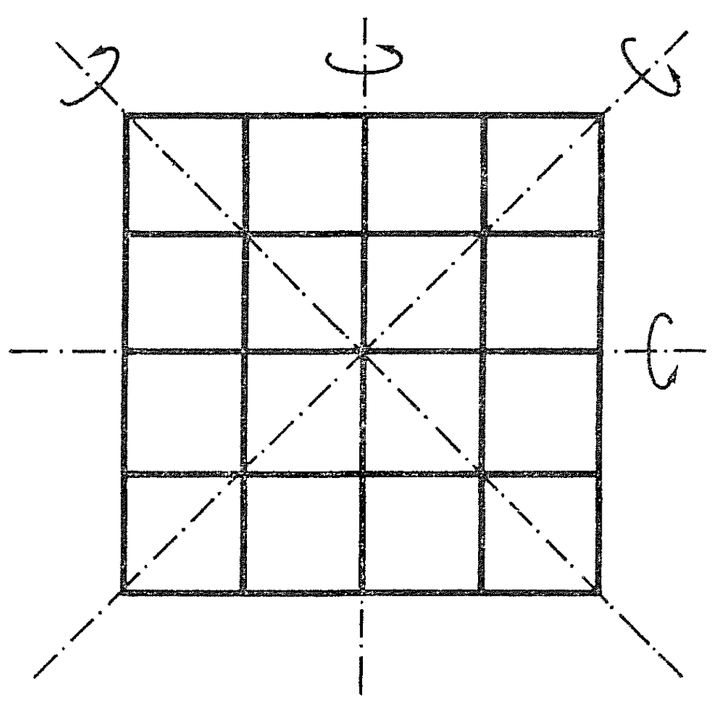
2. Očitno je res dvoje:

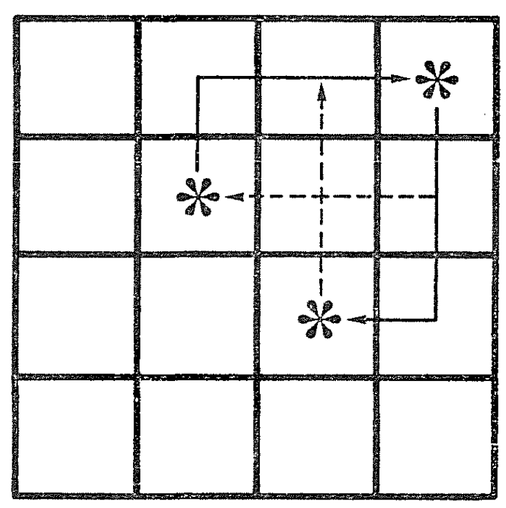
a) *Deska ima štiri osi simetrije*, zato lahko, na primer, izmed vseh štirih polj v ogliščih obravnavamo samo eno (skupaj s poljem v diametralno ležečem oglišču (slika 2). Za vselej izberimo polje v oglišču (1,1).

b) *Na vsako polje v oglišču deske lahko pridemo z natanko dveh polj in samo preko njiju lahko tudi odidemo z njega* (slika 3).



Sl. 1


Sl. 2


Sl. 3

3. Vpeljimo oznake:

V = množica vseh polj v ogliščih deske $= \{(i, k) \mid i = 1, 4;\ k = 1, 4\}$;

$\mathbf{S}_0$ = množica vseh polj ob stranicah deske =

$$= \{(k, 1),\ (1, k),\ (4, k),\ (k, 4) \mid k = 1, 2, 3, 4\};$$

$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 - \mathbf{V}$

$\mathbf{H}$ = množica vseh polj v središču deske $= \{(i, k) \mid i = 2, 3;\ k = 2, 3\}$;

$\mathbf{H}_{i,k}$ = množica vseh polj, s katerih lahko pridemo na polje v oglišču (i, k);

Očitno veljajo naslednje *zakonitosti:*

a) $\mathbf{H}_{1,1} = \mathbf{H}_{4,4}$ in $\mathbf{H}_{1,4} = \mathbf{H}_{4,1}$

b) $\mathbf{H}_{i,k} \subset \mathbf{H}$

c) $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{1,1} \cup \mathbf{H}_{1,4}$

4. Lema 1: *Konj mora začeti pot po deski na enem izmed polj v ogliščih deske.*

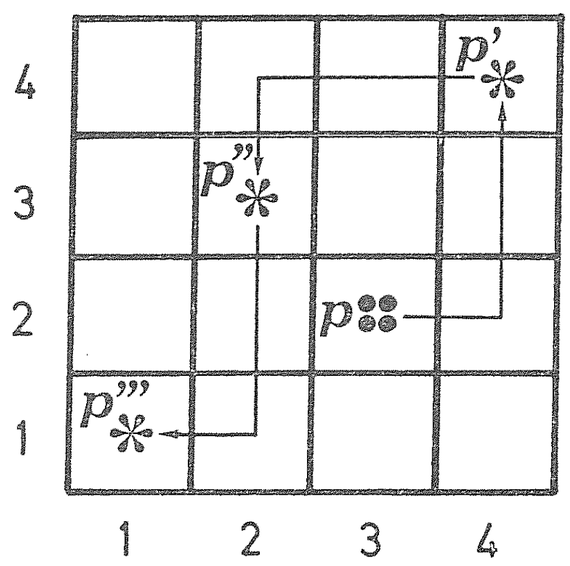
Dokaz: *a*) Če začnemo na polju $p \in \mathbf{H}$, moramo nadaljevati na $p' \in \mathbf{V}$. Če tega ne storimo, potem ne bomo mogli skočiti na nobeno polje v kakem izmed oglišč. Recimo na primer, da stojimo na začetku na polju $p = (3, 2)$. Toda $p \in \mathbf{H}_{1,1}$ in zaradi zakonitosti (3./*a*) velja tudi $p \in \mathbf{H}_{4,4}$. Množica $\mathbf{H}_{1,1}$ vsebuje samo še (2,3). Če torej skočimo drugam kot na (1,1) ali (4,4), bomo potem, ko bomo pač enkrat prišli na (2,3), morali končati ali na (1,1) ali na (4,4). Seveda pa bo potem eno izmed obeh polj ostalo neobiskano.

Torej moramo skočiti na $p' \in \mathbf{V}$. Od tod moremo seveda samo na $p'' \in \mathbf{H}_{i,k}$ (isti $\mathbf{H}_{i,k}$ kot oni, iz katerega je bilo polje p). Od tod smo prisiljeni skočiti v past, iz katere ni izhoda: $p''' \in \mathbf{V}$ (slika 4).

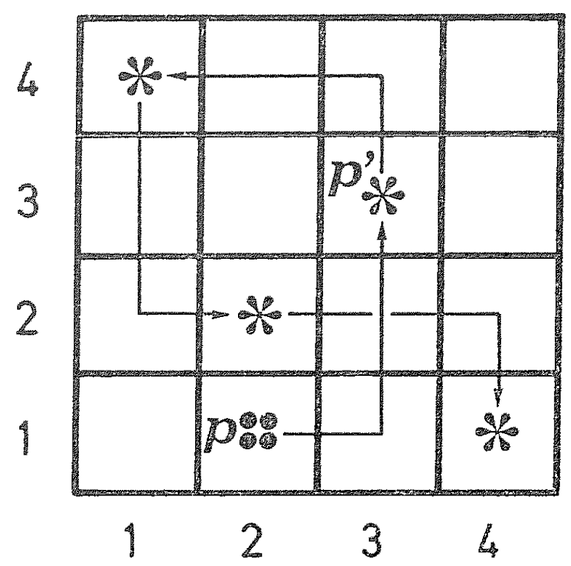
b) Če začnemo na $p \in \mathbf{S}$, se nam ponujata dve možnosti:

1. skočiti na $p' \in \mathbf{H}$ — od tod ni poti naprej, kot smo ravnokar pokazali (slika 5);

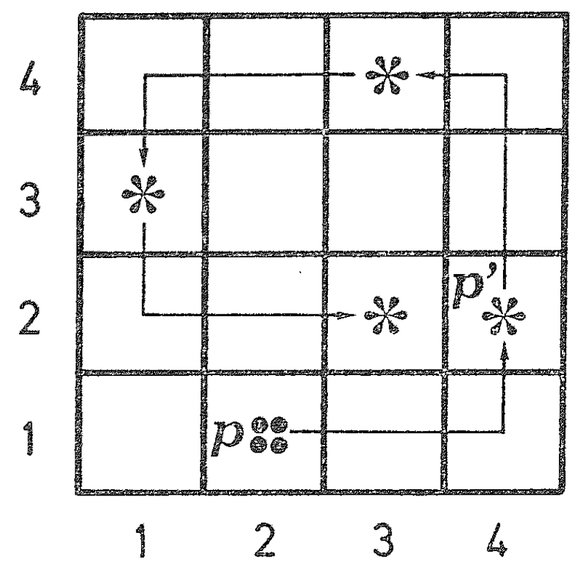
2. skočiti na $p' \in \mathbf{S}$ — to pa se lahko zgodi največ trikrat, potem pa smo prisiljeni skočiti na primer 1. (slika 6). Lema je dokazana. Dokažimo naslednjo.



Sl. 4



Sl. 5



Sl. 6

Lema 2: *Konj mora končati svojo pot na enem izmed polj v ogliščih deske.*

Dokaz: Naj obstaja pot konja po deski. Po ravnokar dokazani lemi se mora začeti na polju v enem izmed oglišč. Toda očitno obstaja tudi obratna pot in ta se mora po isti lemi takisto začeti na polju v oglišču deske. Torej je končna postaja konja vedno polje v enem izmed oglišč. Dokaz je končan.

5. Upoštevajmo, da velja naslednja

Resnica: *Konj pri vsakem skoku preide s polja ene barve na polje druge barve.*

Preostane nam le še dokaz, da je resnična naslednja

Lema 3: *Skakanje se nikoli ne konča na polju, ki leži v diametralno nasprotnem oglišču izhodnemu polju.*

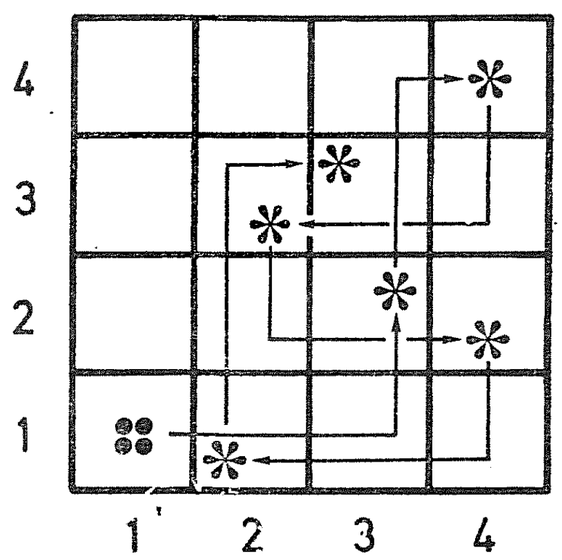
Dokaz: Pobarvajmo desko. Očitno sta obe omenjeni polji, začetno in končno, iste barve. Recimo, da konj prične pot na temnem polju v levem spodnjem oglišču. Napraviti mora natanko 15 skokov, da obhodi vso desko. Torej bo poslednjikrat pristal na svetlem polju, saj je tako pri vsakem lihem skoku. Naša lema je torej pravilna.

6. Ampak res je tudi tole:

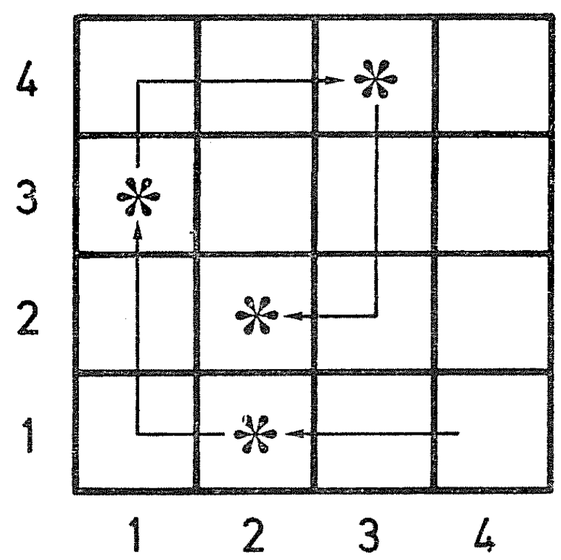
Lema 4: *Skakanje se lahko konča kvečjemu na polju, ki leži v oglišču, diametralno nasprotnem oglišču, v katerem leži začetno polje.*

Na primer, če začnemo skakati na polju (1,1) (oziroma na (1,4)), lahko končamo kvečjemu na oglišču (4,4) (oziroma na (4,1)).

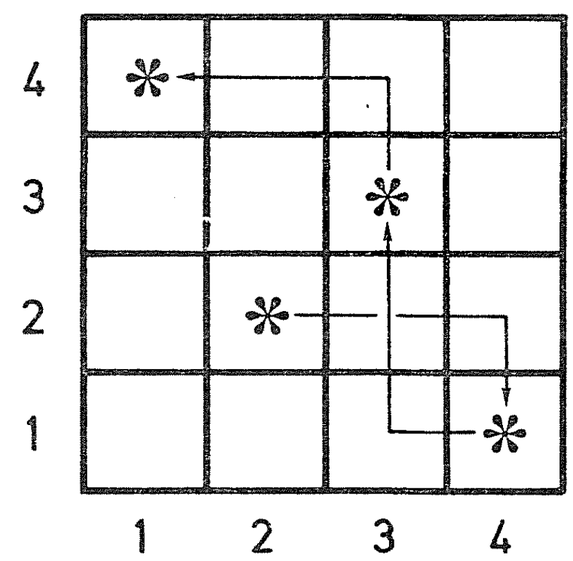
Dokaz: Recimo, da to ne drži. Če začnemo pot na (1,1), jo moramo potem nujno nadaljevati po stezi (3,2) → (4,4) → (2,3). Od tu gremo dalje, na primer na polje (4,2). Od tod smemo skočiti na (2, 1). Sedaj imamo na izbiro ali takojšen skok na eno izmed polj v središču deske (slika 7) (→ (3,3)) ali pa nadaljevanje po robu (slika 8) (→ (1, 3) → (3, 4)). Hitro vidimo, da nam ne pomaga ne ena ne druga, kajti brž ko skočimo v sredino, kar slej ko prej moramo, se zavrtimo v krog: → (2, 2) → (4, 1) → (3, 3) → (1, 4) in se prisilno zaustavimo (slika 9). In tako je tudi zadnja lema dokazana.



Sl. 7



Sl. 8



Sl. 9

Naš dokaz je končan. Pogumni konjenik lahko še tako spretno suka vajeti in išče konju pot — ukazane poti ne bo našel... *Dušan Repovš*

REŠITEV IN POSPLOŠITEV VPRAŠANJA ŠT. 108, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 2, str. 37

Vprašanje:

Dokaži neenakost $\cos A + \sqrt{2}(\cos B + \cos C) \leq 2$, *če so* A, B *in* C *koti trikotnika.*

Rešitev:

Nalogo posplošimo v dveh korakih: velja namreč splošnejša resnica

$$\cos A + q(\cos B + \cos C) \leq 1 + q^2/2 \qquad (*)$$

pri vseh trojkah A, B in C, ki predstavljajo kote trikotnika in vseh realnih q.

Drugi korak: *za vse trojice pozitivnih realnih števil* x, y *in* z *velja*

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z} \qquad (**)$$

čim je $A + B + C = 180°$.

Dokažimo neenakost (**): Če so x, y in z ter A in B realna števila, je res

$$(xz \cos A + yz \cos B - xy)^2 + (xz \sin A - yz \sin B)^2 \geqq 0$$

to pa lahko takole prepišemo

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2\,xyz^2 \cos(A + B) - 2x^2yz \cos A - 2xy^2z \cos B \geqq 0$$

Ker je $A + B = \pi - C$, dobimo odtod

$$2x^2yz \cos A + 2xy^2z \cos B + 2xyz^2 \cos C \leq y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2$$

Če je $xyz > 0$, dobimo po deljenju z $2xyz$ neenakost (**), v nasprotnem primeru pa se znak neenakosti obrne.

Pripomba: neenakost (**) in njen dokaz sem našel v [1] po nasvetu prof. D. S. Mitrinovića. Pri reševanju zastavljene neenakosti sem se namreč vprašal, kakšna mora biti funkcija realne spremenljivke x, da za kote trikotnika velja neenakost $\cos A + x(\cos B + \cos C) \leq f(x)$. Po tej poti sem prišel do neenakosti (*). Ker naprej nisem vedel (namreč kako najti tak $f(x, y)$, da bo $\cos A + x \cos B + y \cos C \leq f(x, y)$, kar je pravzaprav (**)), sem pisal v Beograd. Prejel sem prijazne napotke za iskanje in zvedel, da je isto pot dokazovanja že pred leti ubral nekdo drug [3], naše vprašanje pa je prof. Mitrinović zastavil že nekaj let prej [2]. Vsi ti rezultati so zbrani v knjigi [4]. Mimogrede naj še dodam tole resnico, na katero sem naletel pri listanju *Publikacij EF Univerze v Beogradu* (bralcu, ki ga neenakosti posebno zanimajo, to revijo toplo priporočam):

Če so x, y in z realna števila, ki zadoščajo zahtevi $xyz > 0$, potem velja

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)$$

pri čemer velja enakost natanko takrat, kadar veljata enačbi

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \text{ in } \cos A : \cos B : \cos C = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$$

Dokaz tega zanimivega izreka najdemo v [5]. *Dušan Repovš*

Viri

[1] Radovan R. Janić — *On a Geometric Inequality of D. F. Barrow*, Publ. Fac. El. Univ. Belgrade, Ser. Math. et Phys. No. **19.4** (1967), 73.

[1] Radovan R. Janić — *On a Geometric Inequality of D. F. Barrow*, Pub. Fac. Univ. Belgrade, No. 194 (1967), 73.

[2] D. S. Mitrinović — *Problem* 78, Matematički vesnik, **3** (1966) 18, 138.

[3] Žarko Mitrović — *Rešitev problema št.* 78, Ibid.

[4] O. Bottema, R. Ž. Đordević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić — *Geometric Inequalities*, Gröningen 1969.

[5] Petar M. Vasić — *Some Inequalities For the Triangle*, Publ. Fac. El. Univ. Belgrade, Ser. Math. et Phys. No. **293** (1969), 121.

VPRAŠANJE ŠT. 108, Obzornik, 22 (1975) 2, str. 37

Uredništvo Obzornika je prejelo še en elementaren dokaz neenakosti, po katerem sprašuje naloga št. 108. Poslal ga je *Boštjan Hostnik* iz Šmartnega pri Litiji. V *posplošeni* rešitvi sem izpustil dokaz manj splošne neenakosti

$$\cos \alpha + q(\cos \beta + \cos \gamma) \leqq 1 + q^2/2 \tag{1}$$

saj to ni bilo potrebno. *Hostnik* dokazuje sicer *le* zastavljeno neenakost $\cos \alpha + \sqrt{2}(\cos \beta + \cos \gamma) \leqq 2$, njegova metoda pa je analogna metodi, s katero sem prišel do neenakosti (1) (glej komentar k dokazu).

Poiščimo tako funkcijo $f(q)$, da bo pri pogoju $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ veljala neenakost

$$\cos \alpha + q(\cos \beta + \cos \gamma) \leqq f(q) \tag{2}$$

Preuredimo (2): upoštevajmo pogoj, ki povezuje vse tri kote, uporabimo izrek o kosinusu dvojnega kota in pravila za seštevanje kosinusov, pa po nekaj korakih dobimo neenačbo (2) v novi preobleki:

$$-2\cos^2((\beta + \gamma)/2) + 2q \cos((\beta - \gamma)/2) \cos((\beta + \gamma)/2) + 1 - f(q) \leqq 0$$

Delimo neenakost z (—2) in dobimo kvadratno neenakost; ta je izpolnjena, če je njena diskriminanta negativna

$$q^2 \cos^2((\beta - \gamma)/2) - 2(f(q) - 1) \leqq 0$$

Vedno velja ocena $\cos^2((\beta - \gamma)/2) \leqq 1$, zato je iskana funkcija

$$f(q) = q^2/2 + 1$$

Hostnikov dokaz dobimo iz zgornjega tako, da q izenačimo s $\sqrt{2}$. Zanimivo bi bilo zvedeti še za kakšno *geometrijsko* rešitev.

Dušan Repovš

PREJELI SMO V OCENO

Lie Groups and their Representations, edited by I.M. Gelfand, Akadémiai Kiadó, Budapest 1975, strani 726.

Teorija Liejevih grup in njihovih upodobitev je eno najlepših in najbolj zagnanih poglavij sodobne matematike. Po mnenju I. M. Gelfanda je to srčica matematične analize. Res je dvakrat vsestranska. Kdor hoče prodreti vanjo, se mora dobro oborožiti več ali manj z vso matematiko, ali vsaj z algebro, s klasično in s funkcionalno analizo, s topologijo in z geometrijo. Kdor pa je v njej doma, si lahko izbira pot v mnoge strani. V uvodu v obravnavano delo piše urednik:

Bralec bo že v naslovih opazil ozko povezanost teorije upodobitev s teorijo števil. Zaradi vezi s kvantno mehaniko in s teorijo obsegov, s harmonično analizo in s teorijo števil, zaradi globokih idej, ki so skupne z algebrsko in z diferencialno topologijo, pa tudi z algebrsko geometrijo, je teorija upodobitev pomemben del matematike.

Teoriji Liejevih grup in njihovih upodobitev je bila posvečena letna šola, ki jo je leta 1971 organiziralo v Budimpešti Matematično društvo J. Bolyai. Zbrali so se mnogi delavci na tej njivi: A. N. Andrijanov, I. N. Bernstein, T. S. Bhanu Murthy, G. van Dijk, M. Duflo, I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, R. Godement, M. Goto, G. Harder, D. A. Kajdan, A. A. Kirillov, B. Kostant, J. P. Labesse, G. Lachaud, G. W. Mackey, G. A. Margulis, F. I. Mautner, G. D. Mostow, R. Parthasarathy, I. I. Pjateckij-Šapiro, F. Rodier, T. A. Springer, S. Tanaka, D. N. Verma, D. P. Želobenko.

Delo šole je potekalo v dveh sekcijah, A in B (A — Advanced, B — Beginners). Obravnavani zbornik obsega dela, prebrana v sekciji A. Uvodna poglavja, podana za B, bodo priobčena v posebni knjigi. Tam bo tudi predavanje, ki ga je posebej za fizike pripravil G. W. Mackey: Inducirane upodobitve in njihova uporaba v kvantni mehaniki.

Preglejmo le nekaj naslovov iz bogate vsebine: Funkcija zeta in Sieglove modularne forme. Diferencialni operatorji na osnovnem afinem prostoru in $\mathfrak{g}$-moduli. Konstrukcija primitivnih idealov v asociativni lupini. Upodobitve grupe $GL(n, K)$, kjer je K lokalni obseg. Upodobitve splošne linearne grupe nad končnim obsegom. Kohomologija $SL(2, \mathfrak{o})$. O aritmetičnih mnogoterostih. Metoda orbit v teoriji upodobitev. Obstoj in nerazcepnost nekaterih serij upodobitev. Neenakomerne mreže v polenostavnih algebrskih grupah. Sferne funkcije in Heckejevi operatorji. Diskretna podgrupa z geometrijskega stališča. Fourierova transformacija karakterjev drugega reda.

France Križanič

Sibe Mardešić, Matematična analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, prvi dio, Zagreb 1974, Školska knjiga, VIII + 272 str.

Knjiga je izšla v zbirki UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU. V tem prvem delu obravnava avtor realna števila, konvergenco zaporedij in vrst ter zvezne funkcije, napovedani drugi del pa bo obsegal poglavja o integralu, odvedljivosti in o diferencialnih formah. Natančnejši pregled prvih treh poglavij je naslednji:

I. Realna števila.

Uvodni razdelek je namenjen osnovnim pojmom iz teorije množic. V drugem razdelku so navedeni aksiomi realnih števil in izpeljani so osnovni računski zakoni. Naravna, cela in racionalna števila so definirana kot posebne podmnožice realnih števil. Na kratko so konstruirana tudi kompleksna števila. Tretji razdelek obravnava Peanove aksiome, princip induktivne definicije, končne, neskončne in števne neskončne množice. V zadnjem razdelku pa je dokazana eksistenca (pogojna) in enoličnost realnih števil.

II. Konvergenca zaporedij in vrst

Prvi razdelek govori o realnih vektorskih prostorih končne razsežnosti in temeljnih pojmih, kot so linearna neodvisnost, baza, podprostor, dimenzija, linearna mnogoterost itd. Nadalje so definirani normirani in unitarni prostori, pokazan je postopek ortonormiranja in dokazana je Schwarzova neenakost. Drugi razdelek je posvečen metričnim in topološkim prostorom ter njihovim osnovnim lastnostim. Na podlagi homeomorfizma sta opredeljena tudi pojma topološke in enakomerne ekvivalence dveh metrik v isti množici. Obravnavan je tudi produkt dveh topoloških prostorov in ustrezna produktna topologija. Šele na sklepu razdelka so uvedeni temeljni topološki pojmi: notranjost množice, okolica točke, zaprtje množice, stekališče itd. Tretji razdelek obravnava konvergenco zaporedij v topoloških in posebej v metričnih prostorih, enostavno in enakomerno konvergenco zaporedja funkcij in ustrezne temeljne izreke. Polnim metričnim prostorom je namenjen naslednji razdelek. Med drugim so izpeljani izrek o fiksni točki, Baerov izrek in izrek o napolnitvi prostora. Peti razdelek obravnava splošno teorijo vrst v normiranih oziroma Banachovih prostorih in konvergenco vrste realnih funkcij. Vpeljan je prostor l_2.

III. Zvezne funkcije

Najprej je definirana zvezna preslikava med topološkima prostoroma in izpeljane so njene karakteristične lastnosti. Navedeni so različni primeri nezveznih funkcij. Limita funkcije je definirana na osnovi zveznosti. Nadalje je opisan odnos med zveznostjo in konvergenco vrste funkcij, pojem enakomerne zveznosti in problem razširitve zveznih funkcij. V drugem razdelku je govor o povezanih prostorih in množicah, o povezanih komponentah množic in o pojmu poti in poligonske črte v normiranih vektorskih prostorih. Tretji razdelek obravnava kompaktne prostore in množice, dokazan je Dinijev izrek in podana je karakterizacija kompaktov v metričnih prostorih. Na sklepu je obravnavana tudi lokalna kompaktnost in kompaktifikacija prostorov. Zadnji razdelek pa obravnava algebro zveznih funkcij, dokazan je Weierstrass-Stonov izrek o aproksimaciji in pokazana je njegova uporaba.

Vsakemu razdelku je dodana zbirka vaj, ki so večidel teoretične narave in načrtno navajajo bralca k samostojnemu razmišljanju o prikazani snovi. Na koncu knjige je pregled uporabljene literature in stvarno kazalo.

Knjiga je napisana v jasnem in jedrnatem jeziku. Ponekod preseneča vrstni red, v katerem je snov obravnavana, vendar je to pač stvar avtorjevega okusa in njegovega videnja predmeta, ki ga opisuje. Vsekakor pa se mi zdi, da je sam naslov knjige preozek, saj ga vsebina krepko presega. Glede na študijski program matematike na ljubljanski univerzi knjigo toplo priporočam študentom drugega letnika, prizadevnejšim pa je lahko prijetno berilo že v drugem semestru.

Niko Prijatelj

Nikola Cindro, Fizika 1, prvi dio: mehanika — valovi — toplina. Zagreb (Školska knjiga) 1975, 334 strani, 210.— dinarjev.

Število učbenikov za uvodno predavanje iz fizike po svetu hitro narašča. To velja tudi za knjige v jugoslovanskih jezikih. Bežen pogled na police v knjigarnah odkrije na primer tele knjige: R. Kladnik, *Osnove fizike*, Ljubljana (DZS) 1969 — (v dveh delih); B. Djurić,

Ž. Ćulum, *Fizika*, Beograd (Naučna knjiga) 1967 — (v petih delih, novosadska univerza); S. Šljivić, *Uvod u fiziku*, Beograd (Naučna knjiga) 1965 — (v enem delu, za študente farmacije); D. K. Jovanović, D. M. Kirić, *Fizika za medicinare i stomatologe*, Beograd — Zagreb (Medicinska knjiga), 1970 — (v dveh delih). Poleg tega obstaja v srbohrvaščini še precej prevodov tujih knjig. Med njimi omenimo samo prevod znanega Searsovega učbenika v treh delih. Seznam pa nikakor ni popoln.

Tem knjigam se je zdaj pridružila še Cindrova, o katere prvem delu nam je poročati. Ta del vsebuje mehaniko, valovanje in toploto. Mehaniki posvečeni razdelek ima poglavja: merjenje fizikalnih količin in merski sistemi, kinematika, dinamika, delo in energija, kroženje, ravnotežje, gravitacija, prožnost, statika tekočin, dinamika tekočin in viskoznost in površinska napetost. Razdelek, ki je posvečen mehaniki valov in zvoku, vsebuje poglavja nihanje, valovanje in zvok, razdelek, ki je posvečen toploti, pa poglavja fenomenološka kalorika, kinetično molekulska teorija toplote, spremembe agregatnega stanja in termodinamika. Seznam kaže, da se razpored snovi le malo razlikuje od tradicionalnega. Avtor pravi, da je njegov prispevek skoraj izključno v organizaciji gradiva. Vsebina je prirejena za študente tehničnih fakultet in poudarja »tiste dele fizike, ki so omogočili razvoj tehničnih vej znanosti«. Zasnova knjige je dobra. To velja tudi za podajanje, ki je jasno in večinoma brez ovinkov. Tisk je pregleden in slikovno gradivo je sorazmerno izbrano. Knjigi se pozna, tudi po slikah, da se je avtor naslonil — tako pravi v predgovoru — na znani učbenik Searsa in Zemanskega.

Če bi kdo iskal pomanjkljivosti, bi jih najbrž tudi našel, saj ni knjige brez vsakršnega spodrsljaja. V kratkem poročilu se ne moremo spuščati v podrobnosti. Pri bežnem pregledu knjige pa mi je udarila v oči trditev na strani 285: »Za katero koli telo z maso m se sme zapisati

$$\textit{notranja energija} = m \cdot \textit{specifična toplota} \cdot \textit{temperatura}$$

ker se povečanje prostornine z naraščajočo temperaturo pri trdnih snoveh in kapljevinskih telesih lahko po pravilu zanemari.« Nekaj vrstic više je rečeno, da se specifična toplota ujema s specifično toploto pri konstantni prostornini. Dejstvo, da najdemo podobne trditve tudi v nekaterih drugih učbenikih, ne bi smelo biti opravičilo. Morda je v knjigi še nekaj šibkih mest, vendar je sodba o njih odvisna tudi od okusa. Mimogrede pa naj omenim, da je izvajanje popravka pri tlaku v van der Waalsovi enačbi s silami (str. 298) zadnje čase prišlo na slab glas. [1]

Zagrebški študenti se bodo razveselili knjige. S širšega gledišča je vsekakor pozitiven prispevek k domači fizikalni literarni in metodiki pouka fizike na univerzah. V tej zvezi naj omenim izkušnjo, da je ne glede na morebitno sorodnost učbenikov vendarle koristno za univerzo, fakulteto ali celo katedro, če ima svoj učbenik. To je najbrž povezano z dejstvom, da je treba vložiti v pisanje učbenika veliko dela in to deluje na avtorja-predavatelja in na študenta spodbudno. Pa tudi študentom se zdi lažje učenje po knjigi, ki ustreza predavanjem in zahtevam pri izpitu. Ni mogoče tajiti, da se vse to, ta »fizikalna« kultura, od šole do šole mnogo bolj spreminja, kot se spreminja vsebina učbenikov.

Janez Strnad

[1] E. R. Tuttle, *The Cohesion Term in van der Waals's Equation of State*, Am. J. Phys. **43** (1975) 644.

NOVE KNJIGE

KONFERENCA ZA STATISTIČNO FIZIKO

IUPAP international conference on statistical physics. Budapest, August 25—29, 1975. Abstracts of the contributed papers. Akadémia Kiadó, Budapest 1975. 269 str.

Mednarodna unija za čisto in uporabno fiziko (IUPAP) organizira vsako drugo leto mednarodno konferenco za statistično fiziko. Osma je bila avgusta 1975 v Budimpešti s sodelovanjem Madžarske akademije znanosti, Eötvösove univerze v Budimpešti in Eötvösovega fizikalnega društva. Za zdaj smo prejeli samo brošuro z izvlečki prispevkov.

Iz 30 držav je prišlo 343 ljudi (7 Jugoslovanov), ki so z 218 dvanajstminutnimi prispevki zasedli 4 dvorane za 5 popoldnevov. Bolj privlačni so bili dopoldnevi s 13 večidel prvovrstnimi preglednimi predavanji. Samo ta bodo tiskana kot poročilo konference, prispevki pa bodo pač šli normalno pot preko revij. Menda že prodira spoznanje, da je dvojno objavljanje potratno.

Program je bil precej pisan in je segal od fundamentalnih problemov statistične mehanike do teorije faznih sprememb in transportnih pojavov. Celo o statistični teoriji turbulence je bilo slišati. Kako tretjino vsega časa pa je zasedla teorija kritičnih pojavov. Nemara bi bilo bolje, če bi eno vseobsegajočo konferenco nadomestili s tremi bolj specializiranimi, od katerih bi bila ena za kritične pojave. Tako bi bila gneča manjša in omogočeno bi bilo bolj neposredno srečanje sorodnih strokovnjakov. Saj pravijo, da je to bolj pomembno kot predavanja in poslušanje.

Ivan Kuščer

DOSTOPNEJŠE NOVE KNJIGE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

J. Clarke, *Upoznajmo skupove*, Zagreb, Školska knjiga 1972, str. 155. (16897*)

V. Devide, *»Stara« i »nova« matematika*, Zagreb, Školska knjiga 1975, str. 270. (17741)

Z. P. Dienes, E. W. Golding, *Metodika moderne matematike*, Ljubljana, Mladinska knjiga 1974, str. 126. (16893)

S. B. Prešić, *Savremeni pristup nastavi matematike*, Beograd, Naučna knjiga 1975, str. 188. (17743)

Matematika. Učbenik dlja 4-go klassa srednej školy, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 239. (cir.) (17735)

Matematika. Učbenoe posobie dlja 5-go klassa srednej školy, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 238. (cir.) (17736)

Ju. N. Makaryčev, N. G. Mindjuk, K. S. Muravin, *Algebra. Učbenoe posobie dlja 6-go klassa srednej školy*, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 222. (cir.) (17737)

Algebra. Učbenoe posobie dlja 8-go klassa srednej školy, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 254. (cir.) (17733)

Algebra i načala analiza. Učbenoe posobie dlja 9-go klassa srednej školy, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 221. (cir.) (17876)

Matematika. Sbornik statej, Moskva, Vysšaja škola 1975, str. 142. (cir.) (17925)

Geometrija. Učbenoe posobie dlja 6-go klassa srednej školy, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 125. (cir.) (17732)

Geometrija. Učbenoe posobie dlja 8-go klassa srednej školy, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 110. (cir.) (17730)

Didaktičeskie materialy po geometrii dlja 8-go klassa, Moskva, Prosveščenie 1974, str. 125. (cir.) (16940)

Vneklasnaja rabota po matematike v 4—5 klassah, Moskva, Prosveščenie 1974, str. 190. (cir.) (17934)

Dopolnitel'nye glavy po kursu matematiki. Sbornik statej, Moskva, Prosveščenie 1974, str. 141. (cir.) (17169)

S. W. Golomb, *Polimino*, Moskva, Izd-vo Mir 1975, str. 206. (cir.) (17866)

---

* V oklepajih so inventarne številke knjig v matematični knjižnici.

Ju. G. Stojan, *Razmeščenie geometričeskih ob''ektov*, Kiev, Izd-vo Naukova dumka 1975, str. 237. (cir.) (17602)

Ju. G. Kozlovskij, *Osnovy načertatel'noj geometrii v kratkom i populjarnom izloženii*, Minsk, Izd-vo Vyšejšaja škola 1974, str. 222. (cir.) (17302)

A. D. Posvjanskij, *Kratkij kurs načertatel'noj geometrii*, Moskva, Vysšaja škola 1974, str. 191. (cir.) (17932)

Diofant Aleksandrijskij, *Arifmetika i knjiga o mnogougol'nyh čislah*, Moskva, Izd-vo Nauka 1974, str. 324. (cir.) (16828)

A. I. Borodin, *Čislo i mistika*, Doneck, Izd-vo Donbas 1975, str. 150. (cir.) (17764)

N. N. Moiseev, *Matematik zadaet voprosy...*, Moskva, Izd-vo Znanie 1974, str. 189. (cir.) (17292)

P. Ja. Kočina, *Vospominanija*, Moskva, Izd-vo Nauka 1974, str. 298. (cir.) (17874)

V. N. Kastkin, A. F. Verlan', I. A. Perehod, *Elementy kibernetiki — škol'niku*, Kiev, Izd-vo Radjans'ka škola, 1974, str. 110. (cir.) (17034)

A. Kubesov, *Matematičeskoe nasledie alf-Farabi*, Alm-Ata, Izd-vo Nauka Kazahskoj SSR 1974, str. 246. (cir.) (17500)

M. I. Moro, I. F. Vapnjar, *Kartočki s matematičeskimi zadanijami dlja 3-go klassa*, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 317. (cir.) (17644)

E. S. Kanin, *Algebraičeskie upražnenija, 6 klass*, Moskva, Prosveščenie 1975, str. 78. (cir.) (17924)

E. A. Beljaev, N. A. Kiseleva, V. Ja. Perminov, *Nekotorye osobennosti razvitija matematičeskogo znanija*, Moskva, Izd-vo Moskov. univ. 1975, str. 110. (cir.) (17926)

M. N. Gorejko, A. B. Antonevič, K. S. Filipovič, *Posobie po matematike*, Minsk, Izd-vo BGU im. V. I. Lenina 1974, str. 157. (cir.) (17301)

Ju. A. Urmancev, *Simetrija prirody i priroda simetrii*, Moskva, Mysl' 1974, str. 228. (cir.) (17051)

A. B. Vasilevskij, *Metody rešenija zadač*, Minsk, Izd-vo Vyšejšaja škola 1974, str. 234. (cir.) (17300)

E. S. Kočetkov, E. S. Kočetkova, *Algebra i elementarnye funkcii*, Moskva, Izd-vo Prosveščenie 1970, str. 285. (cir.) (17713)

B. V. Bolgarskij, *Očerki po istorii matematiki*, Minsk, Izd-vo Vyšejšaja škola 1974, str. 286. (cir.) (17322)

S. P. Pul'kin, *Vyčislitel'naja matematika*, Moskva, Prosveščenie 1974, str. 238, (cir.) (17937)

A. G. Kuroš, *Algebraičeskie uravnenija proizvol'nyh stepenej*, Moskva, Izd-vo Nauka 1975, str. 31. (cir.) (17991)

M. Wenninger, *Modeli mnogogrannikov*, Moskva, Izd-vo Mir 1974, str. 236, (cir.) (17590)

Fizika. Vselennaja, Čast' I., Moskva, Izd-vo Nauka 1973, str. 430. (cir.) (16035)

Fizika. Optika i volny, Čast' II., Moskva, Izd-vo Nauka 1973, str. 398. (cir.) (16036)

Fizika. Mehanika, Čast' III., Moskva, Izd-vo Nauka 1974, str. 430. (cir.) (16031)

Fizika. Električestvo i stroenie atoma, Čast' IV., Moskva, Izd-vo Nauka 1974, str. 526. (cir.) (17501)

B. Finetti, *Die Kunst des Sehens in der Mathematik*, Basel, Birkhauser 1974, str. 91. (17060)

W. G. Scherwatow, *Hyperbelfunktionen*, Berlin, VEB Deutscher Verlag 1974, str. 53. (17905)

M. Wittoch, *Neue Methoden im Mathematikunterricht*, Hannover, Hermann Schroedel Verlag 1973, str. 180. (17806)

H. Meschkowski, *Einfuhrung in die moderne Mathematik*, Mannheim, Bibl. Ins. 1971, str. 214. (17574)

H. Meschkowski, G. Lessner, *Aufgaben zur Einführung in die moderne Mathematik*, Mannheim, Bibl. Ins. 1969, str. 136. (17573)

D. Laugwitz, H.-J. Vollrath, *Schulmathematik vom höheren Standpunkt*, Mannheim, Bibl. Ins. 1969, str. 195. (17572)

Mathematiker über die Mathematik, Berlin, Springer Verlag 1974, str. 481. (17805)

Geometrie I. Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie, Berlin, VEB Deutscher Verlag 1974, str. 129. (17904)

V. Boltianski, *Enveloppes*, A. Fétissov, *Demonstrations geometriques*. I. Doubnov, *Erreurs dans les demonstrations geometriques*, Moscou, Mir 1974, str. 264. (16829)

A. Kurosh, *Equations algebriques de degré quelconque*. G. Chilov, *Analyze mathematique dans la classe des fonctions rationnelles*. V. Boltianski, *Que'st-ce que la derivation?* Moscou, Mir 1974, str. 182. (16948)

A. E. Hallerberg, *Mathematical proof: An elementary approach*, New York, Hafner press 1974, str. 104. (16835)

A. E. Hallerberg, *Logic in mathematics: An elementary approach*, New York, Hafner press 1974, str. 90. (16836)

Stanislav Zorko

V LETU 1975 SMO PREJELI NASLEDNJE REVIJE V ZAMENO ZA OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1. ACTA ARITHMETIKA, Warszawa 1975, Vols 27, 28.
2. ACTA FAC. RERUM NATUR. UNIV. COMENIANAE, Math., Bratislava 1975, Vols 30, 31, 32.
3. ACTA FAC. RERUM NATUR. UNIV. COMENIANAE, Astr. geophy., Bratislava 1975, Vol. 1.
4. ACTA FAC. RERUM NATUR. UNIV. COMENIANAE, Chim., Bratislava 1975, Vols 21, 22.
5. ACTA FAC. RERUM NATUR. UNIV. COMENIANAE, Physica, Bratislava 1975, Vols 15, 16.
6. ACTA FAC. RERUM NATUR. UNIV. COMENIANAE, Physiologia Plantarum I., Bratislava 1975, Vol. 10.
7. ACTA GEOGRAPHICA UNIV. COMENIANAE, Econ.-geographica, Bratislava 1975, Nr. 13.
8. ACTA UNIV. CAROLINAE, Math. Phys., Praga 1974, Vol. 15, No. 1/2, 1975, Vol. 16, No. 1, 2.
9. ALGEBRA I LOGIKA — seminar, Novosibirsk 1972, T. 11, No. 1-6, 1973, T. 12. No. 1-6, 1974, T. 13. No. 1-6, 1975, T. 14. No. 1-6.
10. ANALELE STI. UNIV. AL. I. CUZA DIN IASI, Math. Iasi 1975, T. 21, F. 1.
11. ANALELE UNIV. TIMISOARA, Mat., Timisoara 1974, T. 23, 1975, T. 24.
12. ANNALES ACAD. SCI. FENNICAE, Math., Helsinki 1975, 591—600, Vol. 1, F. 1, 2.
13. ANNALES ACAD. SCI. FENNICAE, Math. Dissertationes, Helsinki 1975, 1-6.
14. ANNALES POLONICI MATH., Warszawa 1975, T. 31.
15. ARHIMEDES — naučno popularni matematički časopis za učenike V.—VIII. razreda osnovne škole, Beograd 1974/75, g. 2.
16. ARKIV MATH., Stockholm 1975, Vol. 13.
17. ASTRO AMATER, Sarajevo 1975, Br. 1-6.
18. ASTRONOMSKE EFEMERIDE, Ljubljana 1975.
19. BERICHTE DER GESELLSCHAFT FÜR MATH., Bonn 1975, H. 96—105.
20. BILTEN NA DRUŠTVOTO NA MATEMATIČARITE I FIZIČARITE, Skopje 1974, T. 24.
21. BILTEN UNIVERZE V LJUBLJANI, Ljubljana 1975, L. 5, št. 9.
22. BOLETIN ACAD. CIENC. FIS. MAT. NATURALES, Caracas 1974, T. 34. No. 101, 102.
23. BOLETIN SOC. MAT. MEXICANA, Mexico 1974, T. 19.
24. BONNER MATH. SCHRIFTEN, Bonn 1973, Bd. 66—68, 1974, Bd. 69—76, 1975 Bd. 77.
25. BULLETIN ACAD. POLONAISE SCI., Math. astr. phys., Varsovie 1975, Vol. 23.
26. BULLETIN FUKUOKA UNIV. EDUC. NATURAL SCI., Fukuoka 1975, Vol. 25.
27. BULLETIN INST. MATH., Taipei 1975, Vol. 3.
28. BULLETIN SCI., Zagreb 1975, Vol. 20.
29. COLLOQUIUM MATH., Warszawa 1975, Vol. 33, 34.
30. COMMENTATIONES MATH. UNIV. CAROLINAE, Praga 1975, T. 16.
31. DEUTSCHE BIBLIGRAPHIE, Frankfurt 1975, H. 1, 2, 4.
32. DIFFERENCIAL'NYE URAVNENIJA, Minsk 1975, T. 11.
33. DISKRETNYJ ANALIZ, Novosibirsk 1975, T. 27.
34. DOKLADY BOLGARSKOJ AN., Sofija 1975, T. 28.
35. ECONOMIC COMPUT. ECONOM. CYBERNETIC STUD. RES., Bucaresti 1975.
36. ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK, Ljubljana 1975, leto 42.
37. FARMACEVTSKI VESTNIK, Ljubljana 1975, leto 26.
38. FIZIKA, A Journal exper. theor. physics, Zagreb 1974, Vol. 6, 1975, Vol. 7.
39. FIZIKO-MATEMATIČESKO SPISANIE, Sofija 1975, T. 18. knj. 1.
40. GLASNIK MAT., Zagreb 1975, T. 10.
41. GODIŠEN ZBORNIK, Skopje 1974, Knj. 7.
42. GODIŠNIK VISŠ. TEHN. UČEB. ZAVED., Sofija 1974, T. 10.
43. HIROSHIMA MATH. JOURNAL, Hiroshima 1975, Vol. 5.
44. IDRIJSKI RAZGLEDI, Idrija 1975, leto 20.
45. INFORMATION PROCESSING IN JAPAN, Tokyo 1974, Vol. 14.
46. INTERNATIONALE MATH. NACHRICHTEN, Wien 1975, Nr. 109—112.
47. JAHRESBERICHT, Bonn 1974.
48. JOURNAL FRANKLIN INST., Phyladelphia 1975, Vols 299, 300.
49. LUCRARILE SEMINARULUI GEOM. TOPOLOGIE, Timisoara 1975.
50. MATEMATICKY ČASOPIS, Bratislava 1975, ročnik 25.
51. MATEMATIČKI LIST ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE, Beograd 1974/75, g. 9.

52. MATEMATIČKI VESTNIK, Beograd 1975, g. 12.
53. MATEMATIČKI ZABAVNIK, Beograd 1974/75, g. 2.
54. MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST, Zagreb 1974/75, g. 24.
55. MATEMATIKA A FYZIKA VE ŠKOLE, Olomuc 1974/75, ročnik 5.
56. MATHEMATICAL GAZETTE, London 1975, Vol. 59. Nu. 407—410.
57. MEMORIAS MAT. UNIV. FED., Rio de Janeiro 1975, Vol. 59.
58. NASTAVA MATEMATIKE, Beograd 1974, g. 1. 1975, g. 2.
59. NATURA, Plovdiv 1974, T. 7.
60. NAUČNI PODMLADAK, Tehn. nauke, Društvene nauke, Medicinske nauke, Niš 1975, g. 7. Br. 1/2.
61. NAUČNI TRUDOVE, Plovdiv 1974, T. 12, Knj. 1.
62. NOTICES AMER. MATH. SOC., Providence 1975, Vol. 22.
63. OSAKA J. MATH., Osaka 1975, Vol. 12.
64. PERIODICO MAT., Roma 1975, Vol. 51.
65. PROCEEDINGS AMER. MATH. SOC., Providence 1975, Vol. 47—53.
66. PROCEEDINGS FAC. SCI. TOKAI UNIV., Tokyo 1975, Vol. 10.
67. PROCEEDINGS MATH. PHYS. SOC. EGYPT, Kairo 1974.
68. PROSVETNI DELAVEC, Ljubljana 1975, letnik 26.
69. PROTEUS, Ljubljana 1974/75, letnik 37.
70. PUBLICATIONS DEPART. MATH., Ljubljana 1974, Vol. 10, 1975, Vol. 11.
71. PUBLICATIONS INST. MATH., Beograd 1975, Vol. 18, 19.
72. PUBLICATIONS MATH., Bordeaux 1974/75, annee 3, No. 1/2.
73. PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAK., Beograd 1975, No. 498—541.
74. RADIOTEHNIKA, Har'kov 1975, Vyp. 32, 33, 34.
75. RAZPRAVE, Društvo meteorologov Slovenije, Ljubljana 1974, št. 16, 17, 1975, št. 18, 19.
76. RENDICONTI INST. MAT. UNIV. TRIESTE, Trieste 1974, Vol. 6, 1975, Vol. 7.
77. REVISTA MATH. HISPANO-AMER., Madrid 1975, Vol. 35.
78. REVISTA UN. MAT. ARGENTINA, Buenos Aires 1974, Vol. 27.
79. REVUE ROUMANE MATH. PURES APPL., Bucarest 1975, T. 20.
80. REVISTA MAT. UNIV. PARMA, Parma 1973, Vol. 2.
81. ROZHLEDY MAT.-FYZ., Praga 1974.
82. RUDARSKO-METALURŠKI ZBORNIK, Ljubljana 1974/75.
83. SCRIPTA F. S. N. U. P. B., Physica, Brno 1974, ročnik 4, No. 1.
84. SEMINARUL ECUATII FUNCTIONELE, Timisoara 1975.
85. SEMINARUL TEORIA FUNCTIILOR MAT. APLICATE, Timisoara 1975.
86. SERDIKA, Sofija 1975, Vol. 1, Fasc. 1-4.
87. STUDIA UNIV. BABES-BOLAI, Math. mec., Cluj 1975, T. 20.
88. STUDIA UNIV. BABES-BOLAI, Physica 1974, 1975.
89. STUDII CERT. MAT., Bucaresti 1975, T. 27.
90. TEHNIČKA FIZIKA, Beograd 1974, 1975.
91. TEORIJA FUNKCIJ, FUNKCIONAL'NYJ ANALIZ I IH PRILOŽENIJA, Har'kov 1974, 1975.
92. TIM, Ljubljana 1974/75, št. 1-8.
93. UČENYE ZAPISKI TARTUSKOGO GOS. UNIV., Trudy po mat. meh., Tartu 1975, T. 15, 16, 17.
94. UKRAINSKIJ MAT. ŽURNAL, Kiev 1975, T. 27.
95. USPEHI MAT. NAUK, Moskva 1975, T. 30.
96. VARILNA TEHNIKA, Ljubljana 1975, letnik 24.
97. VASIONA, Beograd 1975, g. 23.
98. VESCI AN BELORUSKOG SSR, Fiz. mat., Minsk 1975.
99. VESTNIK HAR'KOVSKOGO UNIV., Astr., Har'kov 1974, vyp. 9.
100. VESTNIK LENINGRADSKOGO UNIV., Fiz. him., Leningrad 1975.
101. VESTNIK MOSKOV. UNIV., Mat. meh., Moskva 1975.
102. VZGOJA IN IZOBRAŽEVANJE, Ljubljana 1975, let. 6.
103. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK., Fiz., Novi Sad 1975.
104. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK., Hem., Novi Sad 1975.
105. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK., Mat., Novi Sad 1975.
106. ZDRAVSTVENI VESTNIK, Ljubljana 1975, letnik 44.
107. ŽIVLJENJE IN TEHNIKA, Ljubljana 1975, letnik 26.
108. ŽURNAL PRIKLADNOJ SPEKTROSKOPII, Minsk 1975, T. 23. vyp. 6.

Stanislav Zorko

VSEBINA OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO 23 (1976) ŠT. 1—6

Članki

Splošna topologija (Ivan Vidav) 1
Fundamentalna grupa topološkega prostora (Peter Petek) 17
Ploskve (Jože Vrabec) 27
Topološka dinamika (France Križanič) 48
O robnih problemih za nelinearne diferencialne enačbe drugega reda (Milan Hladnik) 73
Rombergova tabela (Mirko Dobovišek) 81
Točna numerična integracija (Marko Kranjc) 105
O neki novosti iz teorije Fourierovih vrst (Anton Suhadolc) 109
Jordanov in Schoenfliesov izrek (Jože Vrabec) 137
O nekem ekstremalnem problemu (Milan Hladnik) 146
Nastanek latentne slike v fotografski emulziji (Stane Arh) 151
Sončni veter (Igor Majerle) 156

Novice

Spektroskopija ionskih curkov (Janez Strnad) 86
Model šestih kvarkov (Janez Strnad) 113

Šola

Meritev absorpcijskega koeficienta zemeljskega ozračja (Marijan Prosen) 90
Rezultati sprejemnih testov iz fizike na medicinski fakulteti v Ljubljani (Saša Svetina) 117
Topologija v srednji šoli (Janez Rakovec) 119
Raztegi in ulomki (France Križanič) 159
Zorno polje daljnogleda (Marijan Prosen) 162

Domače vesti

6. seminar iz matematike z naslovom Topologija — vabilo (Martina Koman) ..... III/1—2
Letno poročilo oddelka za matematiko IMFM za študijsko leto 1974/75 (Jože Vrabec) 93
Pravila o urejanju in izdajanje publikacij Komisije za tisk DMFA SRS (Ciril Velkovrh) 97
Kratko razmišljanje o krožkih ob zaključku šolskega leta (Dušan Repovš) 100
Šesti kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije (Ciril Velkovrh) 101
27. redni občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS (Marjan Hribar) 133
Finančno poročilo Komisije za tisk pri DMFA SRS za leto 1975 od 15. 11. 1974 do 15. 11. 1975 (Janez Markelj) 135
Poročilo o matematičnem seminarju Topologija (Martina Koman) III/4
Nagrajenci Sklada Borisa Kidriča v letu 1976 (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 164
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko (Zbral in uredil Anton Suhadolc) 166
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje iz matematike in fizike ter resumeji doktorskih disertacij v letu 1975 na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani ter na obeh pedagoških akademijah (Zbral in uredil Ciril Velkovrh) 170
Seznam novih članov DMFA SRS (Vinko Pavlič in Ciril Velkovrh) 175
Mednarodne matematične olimpiade srednješolcev (Dušan Repovš) 176
Moskovska študentska matematična olimpiada (Dušan Repovš) 179
Poročilo o delu seminarja LAAR GETNI v šolskem letu 1975/76 (Dušan Repovš) 180
Srečanje slovenskih matematikov in fizikov v Trstu (Ciril Velkovrh) 180

Nove knjige

Izbrana poglavja iz matematike in fizike (Ciril Velkovrh) ..... IV/1—2
Anton Suhadolc, O kolokaciji (Zvonimir Bohte) 103
Egon Zakrajšek, UPDATE (Jernej Kozak) 104
Oton Sajovic, Terminološki slovar opisne geometrije (Franc Lebedinec) 104
Publikacije, ki so izšle pri Komisiji za tisk DMFA SRS v letu 1975 (Ciril Velkovrh) III/2
Oblikovanje prodajne cene matematičnim knjigam (Ciril Velkovrh) IV/2
Jože Grasselli, Osnove teorije števil (Ciril Velkovrh) 112
IUPAP International conference on statistical physics (Ivan Kuščer) 189
Dostopnejše nove knjige v matematični knjižnici (Stanislav Zorko) 189
V letu 1975 smo prejeli naslednje revije v zameno za Obzornik za matematiko in fiziko (Stanislav Zorko) 191

Prejeli smo v oceno

Proceedings of the First European Astronomical Meeting (Andrej Čadež) 102
Gerrit L. Verschnur, The invisible universe. The story of radio astronomy (Andrej Čadež) 103
Imre Pal, Raumgeometrie in der technischen Praxis (Franc Lebedinec) 174
Lie groups and their representations, Ed. by I. M. Gelfand (France Križanič) 186
Sibe Mardešič, Matematična analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, prvi dio (Niko Prijatelj) 186
Niko Cindro, Fizika I (Janez Strnad) 187

Odgovori

104, 105, 108 (Dušan Repovš) 181

Utrinki

Starostne meje (Ivan Kuščer) 89
Dve premici in ena točka (Priredil Dušan Repovš) 116
Kako fiziki dokazujejo Pitagorov izrek (Priredil Dušan Repovš) 132
Težave ne smejo biti ovira (Dušan Repovš) 150
Nov vir vprašanj in nalog (Dušan Repovš) 155

Obvestila

Obvestilo naročnikom Obzornika za matematiko in fiziko (Ciril Velkovrh) 89
Srečanje matematikov in fizikov (Špela Bratož) IV/3
Razpis nagrad (Martina Koman) 161