

R-17176-4
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

ODPISANO

**OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**

1976

Letnik 23

4

23. LETNIK — ŠTEVILKA 4
OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 1976

Glavni urednik: Gabrijel Tomšič; odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Frane Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Škulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovich (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, Institut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Berto Žitko.

Naročnina: za posameznike 120.— din (za člane društva je že vračunana članarina 20.— din, za dijake in študente 50.— din, za ustanove in podjetja 150.— din, za tujino 10 \$ = 170.— din, posamezna številka 20.— din, dvojna številka 40.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 61-564/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 50100-620-107-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1600 izvodov.

Izdajo revije sofinacirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

VSEBINA

Članka	Stran
Točna numerična integracija (Marko Kranjc)	105
O neki novosti iz teorije Fourierovih vrst (Anton Suhadolc)	109
Nove knjige (Ciril Velkovich)	112
Novica	
Model šestih kvarkov (Janez Strnad)	113
Šola	
Rezultati sprejemnih izpitov iz fizike na medicinski fakulteti v Ljubljani (Saša Svetina)	117
Topologija v srednji šoli (Janez Rakovec)	119
Utrinki (Dušan Repovš)	116, 132
Domače vesti	
27. redni občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS (Marjan Hribar)	133
Finančno poročilo Komisije za tisk pri IMFA SRS (Janez Markelj)	135
Poročilo o matematičnem seminarju Topologija (Martina Koman)	III

CONTENTS

Articles	Page
Perfect numerical integration (Marko Kranjc)	105
On a recent result about Fourier series (Anton Suhadolc)	109
New books	112
News	113
School	117
Home news	133

TOČNA NUMERIČNA INTEGRACIJA

MARKO KRANJC

AMS Subj. Class. (1970) 65D30

V tem članku si bomo ogledali primer takih funkcij, ki se dajo natančno integrirati s trapeznim in Simpsonovim pravilom.

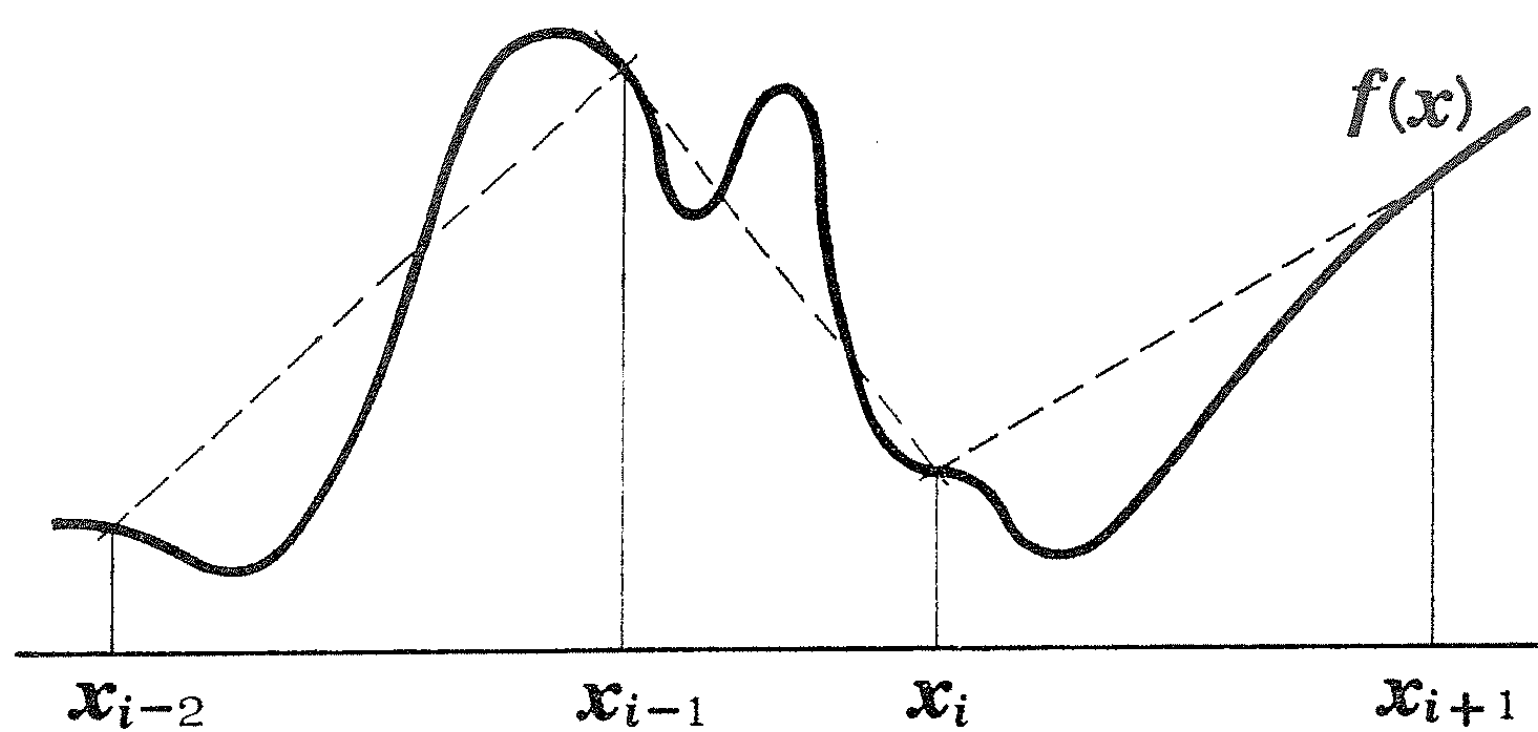
PERFECT NUMERICAL INTEGRATION

In this article we consider a type of functions which are exactly integrable by trapezium and Simpson's rule.

Poglejmo, kako lahko približno izračunamo integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

če je $[a, b]$ končen interval in f omejena funkcija, definirana na $[a, b]$. Recimo, da je f podana v $n + 1$ ekvidistantnih točkah $x_0, \dots, x_n$; naj bo $x_0 = a$ in $x_n = b$ ter $x_i - x_{i-1} = h$ za $i = 1, \dots, n$.



Sl. 1

Najprej izračunajmo integrale

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

tako, da funkcijo f aproksimiramo na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ s premico, ki gre skozi točki (x_{i-1}, y_{i-1}) in (x_i, y_i) , kjer je $y_k = f(x_k)$ za $k = 0, \dots, n$ (sl. 1).

Ta premica ima enačbo $y = (1/h)((x - x_{i-1})y_i - (x - x_i)y_{i-1})$. Če napravimo substitucijo $x - x_{i-1} = hs$, dobimo:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &\doteq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (y_i(x - x_{i-1}) - (x - x_i)y_{i-1}) dx = \\ &= h \int_0^1 (sy_i + (1 - s)y_{i-1}) ds = \frac{h}{2} (y_{i-1} + y_i) \end{aligned}$$

Torej je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \doteq \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Tako smo izpeljali kvadraturno formulo, ki se imenuje trapezno pravilo. Če je f dvakrat zvezno odvedljiva, se da videti, da je napaka pri integraciji enaka Mh^2 , pri čemer je M konstanta, ki se izraža z drugim odvodom funkcije f . Že iz izpeljave je očitno, da je formula točna za linearne funkcije.

Vzemimo sedaj, da je n sodo število, npr. $n = 2m$ in izračunajmo integrale $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx$ tako, da na intervalu $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ aproksimiramo funkcijo f s kvadratnim polinomom p_i skozi točke (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) in (x_{i+1}, y_{i+1}) . Ta polinom ima enačbo

$$p_i(x) = (1/(2h^2)) [(x - x_{i+1})(x - x_i)y_{i-1} - 2(x - x_{i+1})(x - x_{i-1})y_i + (x - x_i)(x - x_{i-1})y_{i+1}]$$

Če spet uvedemo novo spremenljivko $s = (x - x_i)/h$, dobimo:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx &\doteq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p_i(x) dx = \\ &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (s(s-1)y_{i-1} - 2(s+1)(s-1)y_i + s(s+1)y_{i+1}) ds = \\ &= \frac{h}{2} \left(\frac{2}{3}y_{i-1} + \frac{8}{3}y_i + \frac{2}{3}y_{i+1} \right) = \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \doteq \\ &\doteq \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

Dobljeno se imenuje Simpsonovo pravilo. Če je f štirikrat zvezno odvedljiva, je napaka pri integraciji enaka Mh^4 , pri čemer je konstanta M odvisna od četrtega odvoda funkcije f . Torej je Simpsonova formula natančna za polinome tretje stopnje.

V splošnem bi lahko ravnali tudi takole: kvadraturno formulo bi iskali z nastavkom

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R$$

pri čemer je R napaka, konstante A_k pa bi izračunali iz zahteve, da je formula natančna za polinome n -te stopnje. Lahko je videti, da na ta način dobimo za $n = 1$ trapezno pravilo, za $n = 2$ pa Simpsonovo.

Kot primer izračunajmo integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin(x + \pi/4)} dx = \pi/(2\sqrt{2})$$

s Simpsonovim pravilom in korakom $\pi/8$!

$$\begin{aligned} I &\doteq \frac{\pi}{24} \left(0 + \frac{4 \sin(\pi/8)}{\sin(3\pi/8)} + 2 \sin(\pi/4) + 4 \frac{\sin(3\pi/8)}{\sin(5\pi/8)} + \frac{1}{\sin(3\pi/4)} \right) = \\ &= \frac{\pi}{24} (4 \operatorname{tg}(\pi/8) + \sqrt{2} + 4 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ker je $\operatorname{tg}(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, dobimo $I \doteq \pi/(2\sqrt{2})$, kar je natančna vrednost.

Morda pa je samo naključje, da smo dobili točen rezultat. Vzemimo korak $\pi/4$:

$$I \doteq \frac{\pi}{12} \left(0 + 4 \sin(\pi/4) + \frac{1}{\sin(3\pi/4)} \right) = \frac{\pi}{12} (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Prav tako ni napake, če uporabimo trapezno formulo:

Korak $\pi/8$ nam da

$$I \doteq \frac{\pi}{16} \left(0 + 2 \operatorname{tg}(\pi/8) + 2 \sin(\pi/4) + 2 \frac{\sin(3\pi/8)}{\sin(5\pi/8)} + \frac{1}{\sin(3\pi/4)} \right) = \pi/(2\sqrt{2})$$

Korak $\pi/4$ da

$$I \doteq \frac{\pi}{8} \left(0 + 2 \sin(\pi/4) + \frac{1}{\sin(3\pi/4)} \right) = \pi/(2\sqrt{2})$$

V tem primeru se izkaže, da dasta obe kvadrturni formuli natančno vrednost zgornjega integrala pri poljubnem koraku h .

Vemo, da sta Simpsonova in trapezna formula točni za polinome tretje oziroma prve stopnje. Toda v našem primeru integrand ni polinom, zato bomo poskušali najti razlago za zgornje rezultate.

Izkaže se, da nam da vsaka »smiselna simetrična kvadrturna formula« točen rezultat, če je integrand primerne oblike.

Vzemimo, da so funkcije, s katerimi bomo imeli opravka, zvezne in omejene, integracijsko območje naj bo končno.

Definicija. M je smiselna simetrična kvadrturna formula, če ima obliko

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \doteq \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

pri čemer velja: $x_i - x_0 = x_n - x_{n-i}$, $w_i = w_{n-i}$ in

$$\int_{x_0}^{x_n} 1 \cdot dx = \sum_{i=0}^n w_i = x_n - x_0$$

kar pomeni, da je M natančna pri integraciji konstant.

IZREK 1. Če je

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$$

velja

- (i) $I = a/2$
- (ii) vsaka smiselna simetrična kvadrturna formula M , pri kateri je $x_0 = 0$ in $x_n = a$, nam da točen rezultat.

Dokaz.

- (i) Če naredimo substitucijo $y = a - x$, dobimo

$$I = \int_0^a \frac{f(a-y)}{f(y) + f(a-y)} dy$$

od tod sledi

$$2I = \int_0^a 1 \cdot dx = a$$

torej je res $I = a/2$.

(ii) Naj bo M taka smiselna simetrična kvadratura formula, da je $x_0 = 0$ in $x_n = a$. Če je

$$F(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(a - x)}$$

dobimo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a F(x) dx \doteq \sum_{i=0}^n w_i F(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (w_i F(x_i) + w_{n-i} F(x_{n-i})) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n w_i (F(x_i) + F(x_{n-i})) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n w_i (F(x_i) + F(a - x_i)) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n w_i = a/2 = I \end{aligned}$$

ker je $F(x_i) + F(a - x_i) = 1$ in $\sum_{i=0}^n w_i = x_n - x_0 = a$

Če je dolžina koraka taka, da moramo M večkrat uporabiti preden pokrijemo interval $(0, a)$, prav tako velja Izrek 1. To sledi od tod, ker je integral aditivna funkcija integracijskega območja.

Pa se vrnimo k prvotnemu primeru!

Ker je

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin(x + \pi/4)} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \sin(\pi/2 - x)} dx$$

in je I take oblike, kot jo zahteva Izrek 1 ter sta trapezno in Simpsonovo pravilo smiselni simetrični kvadraturni formuli, nam to pojasnjuje točnost računa.

Rezultat pa lahko še posplošimo.

IZREK 2. Če je $k(t)$ soda funkcija, potem je

$$I = \int_0^a \frac{k(a/2 - x) \cdot f(x)}{f(x) + f(a - x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^a k(a/2 - x) dx$$

Če izračunamo oba integrala s poljubno smiselno simetrično kvadraturno formulo, dobimo obakrat isto napako.

Dokaz Izreka 2 poteka na popolnoma isti način kot pri Izreku 1.

Primer. Izračunajmo integrala

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(x - \pi/4)^2 \sin x}{\sin x + \cos x} dx, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (x - \pi/4)^2 dx$$

s trapezno formulo, dolžina koraka naj bo $\pi/4$:

$$\begin{aligned} I &\doteq \pi/8 (0 + 2 \cdot 0 + (\pi/4)^2) = \pi^3/128 \\ J &\doteq \pi/16 ((\pi/4)^2 + 2 \cdot 0 + (\pi/4)^2) = \pi^3/128 \end{aligned}$$

Prava vrednost je

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (x - (\pi/4))^2 dx = \pi^3/192$$

Če uporabimo Simpsonovo formulo, dobimo točen rezultat.

LITERATURA

[1] R. F. Churchhouse, *Perfect numerical integration by Simpson's rule*, Math. Gaz. **59** (1975), 159—162.

[2] E. Isaacson, H. B. Keller: *Analysis of numerical methods*, New York, John Wiley & Sons 1966.

O NEKI NOVOSTI IZ TEORIJE FOURIEROVIH VRST

ANTON SUHADOLC

AMS Subj. Class. 42A20

Članek obravnava vprašanje konvergence Fourierovih vrst.

ON A RECENT RESULT ABOUT FOURIER SERIES

In the paper the question of convergence of Fourier series is discussed.

V matematiki je vedno dovolj novosti, velika večina pa je takih, da se o njih na kratko ne da poročati, ker zahtevajo preveč predznanja. Zato si bomo v sestavku ogledali neko novost iz teorije Fourierovih vrst. Trditev je razumljiva vsakemu matematiku, saj ne zahteva več kot znanje analize v obsegu predmeta višja matematika. Dokaz trditve pa je dolg in zahteven. V originalnem članku [1] obsega 22 strani, dostopnejši dokaz je izdelan v knjigi [3], kjer obsega 87 strani.

Za uvod bomo na kratko ponovili nekaj pojmov iz analize. Množica E na realni premici ima mero nič, če jo je mogoče pokriti z zaporedjem intervalov, katerih skupna dolžina ni večja od poljubnega naprej predpisanega $\varepsilon > 0$. Seveda ima množica, sestavljena iz števno mnogo točk, mero 0. Po drugi strani pa vemo, da obstajajo množice E na realni osi, katerih mera je 0, množica E pa sestoji iz več kot števno mnogo točk. Primer take množice je npr. Cantorjeva množica.

Prostori L^p . Študirali bomo periodične funkcije s periodo 2π , zato si oglejmo prostor $L^p(0, 2\pi)$, ki vsebuje vse realne ali kompleksne merljive funkcije, definirane na intervalu $(0, 2\pi)$, take, da je

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

kjer je p poljubno število, večje ali enako 1. Število

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

imenujemo p -ta norma funkcije f . V prostoru L^p moremo definirati konvergenco zaporedja na več načinov:

a) Konvergenca po normi (v p -tem povprečju). Zaporedje f_n konvergira proti f v p -ti normi, če velja $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, ali na dolgo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0$$

b) Enakomerna konvergenca. Zaporedje funkcij f_n konvergira enakomerno na intervalu $[0, 2\pi)$.

c) Konvergenca po točkah. Zaporedje $f_n(x)$ konvergira za vsak $x \in [0, 2\pi)$.

d) Konvergenca skoraj povsod. Zaporedje $f_n(x)$ konvergira skoraj povsod proti funkciji $f(x)$, če konvergira zaporedje števil $f_n(x)$ proti številu $f(x)$ za vse $x \in [0, 2\pi)$ razen morda za x -e iz neke množice $M \subset [0, 2\pi]$ z mero 0.

Seveda imamo zveze med temi pojmi konvergence. Iz b) sledi c), iz c) sledi d) in iz b) sledi a). Druge zveze nasploh ne veljajo.

Fourierove vrste. Trigonometrični sistem funkcij imenujemo funkcije $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$

Te funkcije so med seboj ortogonalne v temle smislu

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx \, dx = 0 \text{ za vse } k \text{ in } m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0 \text{ za } k \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0 \text{ za } k \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi \text{ za } k = 1, 2, \dots$$

Naj bo $f(x)$ periodična funkcija s periodo 2π in taka, da obstajajo integrali

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$n = 1, 2, \dots \quad (1)$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Števila a_n in b_n imenujemo Fourierove koeficiente funkcije $f(x)$. Funkciji priredimo njeno Fourierovo vrsto

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

Fourier je v prejšnjem stoletju trdil v delu [2], da je za »poljubno« periodično funkcijo vsota Fourierove vrste enaka $f(x)$, torej se da razviti »poljubna« funkcija v Fourierovo vrsto. To trditev je zelo uspešno porabil pri študiju enačbe za prevod toplote.

Prav v ta čas pa segajo napor matematikov, da bi matematično strogo definirali osnovne pojme analize kot limita zaporedja, vsota neskončne vrste, funkcija, zveznost, odvod, integral. Tudi Fourierova trditev je bila deležna kritične pozornosti.

Navedimo najprej vprašanja, ki si jih moremo zastaviti v zvezi s Fourierovo vrsto! Naj bo $f(x)$ dana periodična funkcija, njeni koeficienti naj bodo dani s formulo (1).

1. Ali konvergira vrsta (2) vsaj za en $x \in [0, 2\pi]$?
2. Ali konvergira vrsta (2) skoraj povsod na intervalu $[0, 2\pi]$?
3. Ali konvergira vrsta (2) za vse $x \in [0, 2\pi]$?
4. Ali konvergira vrsta (2) enakomerno na intervalu $[0, 2\pi]$?
5. Ali konvergira vrsta (2) po normi prostora L^p ?
6. Če je odgovor na katerokoli od prvih petih vprašanj pozitiven, ali je tedaj njena vsota enaka $f(x)$?

Zanimiva so še mnoga druga vprašanja, npr. dana naj bo vrsta oblike (2). Ali eksistira kakšna funkcija $f(x)$, katere Fourierovi koeficienti so prav dani koeficienti? Kako tako funkcijo poiskati tudi tedaj, ko vrsta (2) ni konvergentna?

Enega najenostavnejših pozitivnih odgovorov na vprašanje 3 daje tale izrek:

Izrek 1. Naj bo $f(x)$ na intervalu $(0, 2\pi)$ dvakrat zvezno odvedljiva. Tedaj vrsta (2) konvergira za vsak x na intervalu $(0, 2\pi)$. Njena vsota je enaka dani funkciji $f(x)$.

Izrek je resničen tudi pri milejših pogojih za funkcijo $f(x)$, npr. funkcija $f(x)$ naj bo zvezna in odsekoma monotona.

Za zvezne funkcije velja tudi izrek, ki pove, da vprašanje 3 nima vedno pritrdilnega odgovora.

Izrek 2. Naj bo E poljubna števna množica na intervalu $[0, 2\pi]$. Tedaj eksistira taka zvezna funkcija $f(x)$, da njena Fourierova vrsta ne konvergira v nobeni točki množice E .

Na vprašanje 6 imamo za zvezne funkcije delno pritrdilen odgovor, kot kaže naslednji izrek.

Izrek 3. Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$. Vrsta (2) naj konvergira pri nekem x_0 . Tedaj je vsota vrste (2) pri $x = x_0$ enaka $f(x_0)$.

Če študiramo Fourierove vrste za funkcije, ki so bolj splošne kot zvezne funkcije, je situacija še slabša.

Izrek 4. (Kolmogorov, Katznelson, Kahane). Eksistira integrabilna funkcija $f(x)$, katere Fourierova vrsta divergira za vsak $x \in [0, 2\pi]$.

Na vprašanje 6 imamo tudi sedaj delno pritrdilen odgovor.

Izrek 5. (Lebesgue). Naj bo funkcija $f(x)$ integrabilna in naj vrsta (2) konvergira skoraj za vsak $x \in [0, 2\pi]$. Tedaj je vsota vrste skoraj povsod enaka $f(x)$.

Malo lepši so rezultati za funkcije iz prostorov L^p , $p > 1$.

Izrek 6. Naj bo $f \in L^p [0, 2\pi]$, $p > 1$. Tedaj konvergira Fourierova vrsta (2) po normi v L^p proti funkciji $f(x)$, ali na dolgo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)|^p dx = 0$$

Posebno dobro je znan primer $p = 2$. Tedaj je $L^2 [0, 2\pi]$ Hilbertov prostor in zgornjega izreka ni težko dokazati. Izpeljemo ga npr. pri predavanjih iz Analize II.

Za $p = 1$ izrek nasploh ne velja. Obstajajo take integrabilne funkcije $f(x)$, katerih Fourierove vrste ne konvergirajo po normi prostora $L^1 [0, 2\pi]$.

Nekateri od zgornjih izrekov povedo, da Fourierove vrste integrabilnih funkcij ne konvergirajo vedno. Po drugi strani pa vemo, da limitirajo Fourierovi koeficienti a_n in b_n integrabilne funkcije $f(x)$ z rastočim n proti 0. Potreben pogoj (členi limitirajo proti 0) za konvergenco vrste (2) je torej izpolnjen. Kako »močno« lahko Fourierova vrsta divergira?

Izrek 7. Naj bo funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[0, 2\pi]$. Tedaj vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) / \log n$$

konvergira skoraj za vsak $x \in [0, 2\pi]$.

Dosedanji izreki niso novi, prav vsi izvirajo najmanj iz časa pred drugo vojno. Dokaze izrekov 1—7 najdemo npr. v knjigi [4]. Naslednji rezultat je razmeroma nov. Dokazan je v članku [1].

Izrek 8. (Carleson, Hunt). Naj bo funkcija $f \in L^p [0, 2\pi]$, $p > 1$. Tedaj njena Fourierova vrsta (2) konvergira skoraj povsod in njena vsota je skoraj povsod enaka $f(x)$.

Posledica: Če je $f(x)$ zvezna funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$, je seveda tudi element prostora L^p , zato zanjo tudi velja izrek 8. Za zvezno funkcijo konvergira torej Fourierova vrsta (2) skoraj za vsak x proti $f(x)$.

Če primerjamo to posledico z izrekom 2, vidimo, da je nerešeno še tole vprašanje: Ali obstaja zvezna funkcija, katere Fourierova vrsta ne konvergira na *NEŠTEVNI* množici z mero 0?

Za konec naj še na kratko omenimo sredstva, ki so potrebna za dokaz izreka 8: funkcionalna analiza, predvsem študij linearnih operatorjev v prostoru L^1 ; teorija mere in integrala in poznavanje lastnosti Hilbertove transformacije:

$$f \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-y} dx$$

LITERATURA

- [1] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. **116** (1966) 135—157.
- [2] J. Fourier, *Theorie analytique de la chaleur*, Paris, Didot 1822.
- [3] C. J. Mozzochi, *On the pointwise convergence of Fourier series*, Berlin, Springer 1971.
- [4] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge, Cambridge University Press 1959.

NOVE KNJIGE

Jože Grasselli, *Osnove teorije števil*, 2. predelana izdaja, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1975, 196 str., Knjižnica Sigma — 14, Cena 100.— din.

Avtor v predgovoru piše takole: Ta knjižica obravnava nekatere osnovne pojme in izsledke teorije števil. Namenjena je bralcu, ki se šele seznanja s to vejo matematike. Poglavja I—V so napisana tako, da za razumevanje ne zahtevajo posebnega prejšnjega znanja. V dodatku pa je nekoliko več stvari, ki so privzete kot znane.

V nadaljevanju pa je dodal naslednje: Druga izdaja se razločuje od prve, predelana so bila vsa poglavja. Snov ima drugačno razporeditev in je na več mestih razširjena. Na novo so pridejane tudi vse naloge. Izpadla sta razdelka o particiji števil in o van der Waerdenovem izreku. Sedaj se končuje knjižica z dodatkom, ki dejstva samo navaja. V njem je nekaj zgodovinskih podatkov in kratek opis prej dobljenih ugotovitev z algebraičnega stališča.

To je že šestnajsta knjižica iz zbirke Sigma, ki smo jo lahko ponatisnili in o tem skoraj v celoti ustregli prenekaterim bralcem, saj je tako večina knjižic še vedno v zalogi.

Ciril Velkovrh

MODEL ŠESTIH KVARKOV

Odkritje delcev Ψ je zelo poživilo fiziko visokih energij [1]. Novim domnevam in uganjanjem ni ne konca ne kraja. Za zdaj še ni dokončne teorije, ki bi pojasnila obstoj delcev Ψ , Ψ' in Ψ'' z lastno energijo 3,1 GeV, 3,7 GeV in 4,1 GeV in nepričakovano velik razpadni čas prvih dveh [2]. Vendar se že kaže nova pot: število različnih kvarkov, ki jih je treba vključiti v račune, narašča.

Na začetku so bili trije kvarki. Nato so vpeljali tri barve, tako da so nastopale tri raznobarvne trojice kvarkov. Pred kratkim so povečali število kvarkov na štiri, kar da ob upoštevanju barv tri raznobarvne četverice. Zdaj pa se zdi, da je tudi to premalo. Izmed večjega števila modelov s povečanim številom kvarkov je najbolj dodelan *Hararijev model s šestimi kvarki*: v njem nastopajo tri raznobarvne šesterice kvarkov. Opišimo na kratko to teoretično novost.

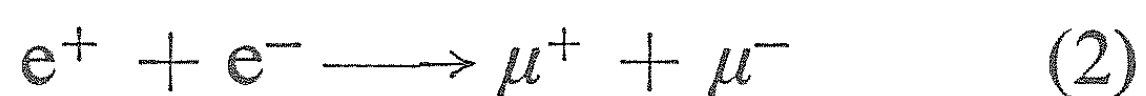
Pomembne nove podatke je dalo proučevanje reakcij med elektroni in pozitroni v nakopičevalniku. To je velika evakuirana obročasta cev, v kateri krožijo v prečnem magnetnem polju elektroni s kinetično energijo več GeV. V isti cevi, samo nadstropje nižje ali višje, krožijo v nasprotni smeri pozitroni z enako kinetično energijo. Nakopičevalnik napolnijo tako, da vanj najprej uvajajo iz pospeševalnika elektrone in nato še pozitrone. Na nekaj mestih, na primer na dveh, se poti elektronov in pozitronov križata. Tam pride do reakcij med elektroni in pozitroni. Nastale delce preiščejo z magnetnim spektrometrom in vrsto števecv.

Pri reakcijah med elektroni in pozitroni v nakopičevalniku je laboratorijski sistem kar težiščni sistem. Težiščna energija, ki je na razpolago za nastanek delcev, je enaka skupni energiji elektrona in pozitrona. Največ merjenj so napravili ob stanfordskem nakopičevalniku SPEAR, ki ima premer 83 m in dopušča največjo kinetično energijo. Elektroni in pozitroni dosežejo kinetično energijo po 4 GeV.

Med drugimi se zanimajo tudi za reakcije, pri katerih nastanejo hadron ali več hadronov in drugi delci



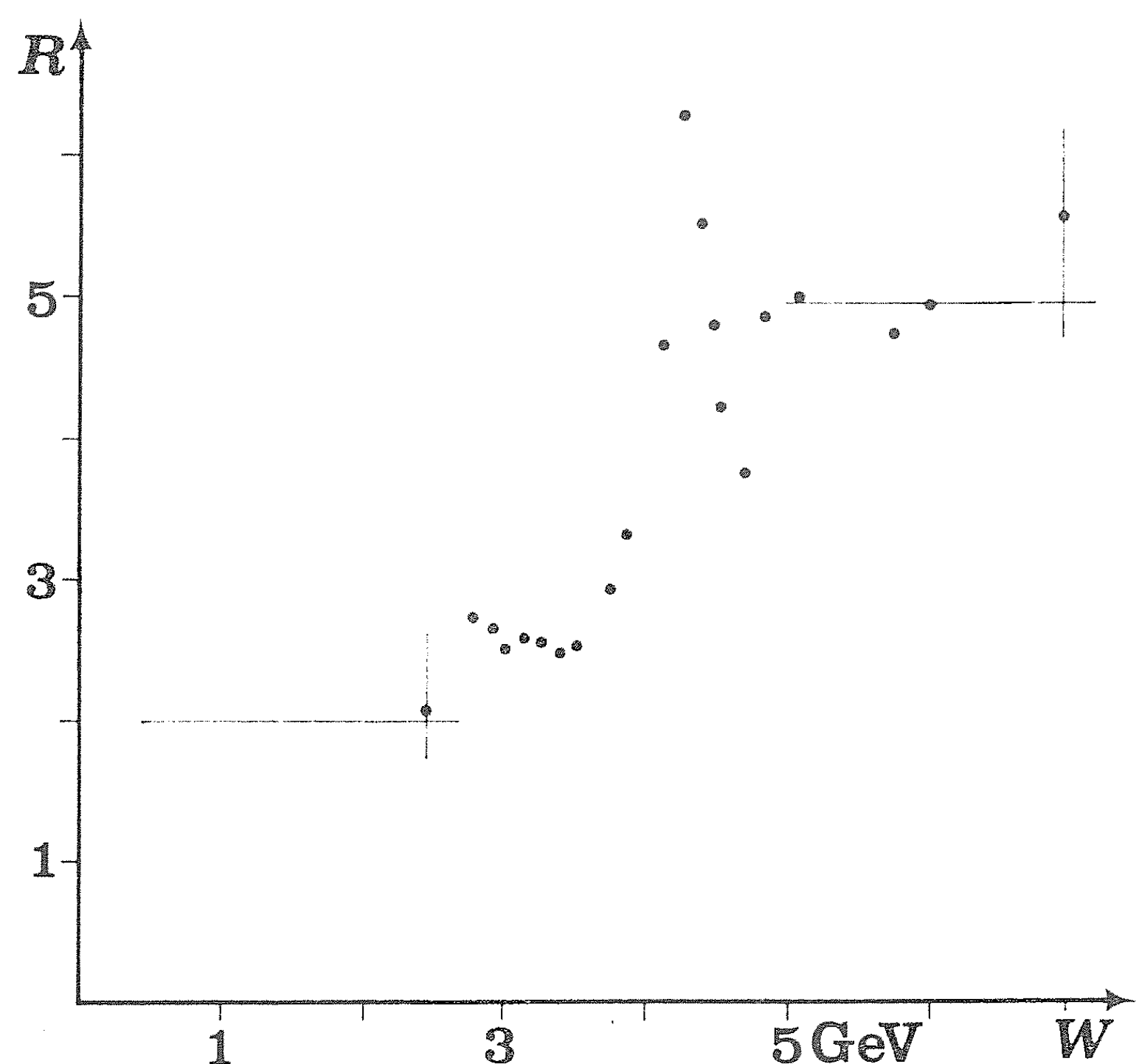
in za reakcije, pri katerih nastane mionski par



Eden izmed pomembnih preskusnih kamnov za kvarkovske modele je razmerje preseka za reakcije (1) in preseka za reakcijo (2)

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \longrightarrow \text{hadron})}{\sigma(e^+ e^- \longrightarrow \mu^+ \mu^-)} \quad (3)$$

Pri težiščni energiji do okoli 2 GeV namerijo razmerje R okoli 2 (sl. 1). Pri večji energiji začne razmerje naraščati in doseže okoli 4 GeV največjo vrednost 6. Pri še večji energiji pa zopet pade. Pri energiji med 5 in 7 GeV se ustali približno pri vrednosti 5.



Sl. 1 Izmerjeno razmerje R v odvisnosti od težiščne energije W elektronskega para. Podatki so posneti po merjenjih ob stanfordskem nakopičevalniku [6]

Razmerje R pri dovolj veliki energiji je mogoče izračunati. Reakcija (2) je čist elektromagnetni pojav, kot je na primer Rutherfordovo sipanje. Presek za takšen pojav je sorazmeren s produktom nabojev vseh štirih udeleženih delcev [3]. V primeru (2) je tedaj presek sorazmeren z $e_0(-e_0) \cdot e_0(-e_0) = e_0^4$. Tudi reakcija (1) je čist elektromagnetni pojav [4]. Poteka namreč v dveh korakih, od katerih je prvi popolnoma podoben reakciji (2). V tem koraku nastaneta kvark in njegov antidelec:



Nastala delca v vsakem primeru razpadeta in nastane vsaj en hadron: $q + \bar{q} \longrightarrow \text{hadron} + \dots$. Tako je tudi presek za reakcijo (1) sorazmeren s produktom nabojev vseh štirih udeleženih delcev v reakciji (1a), to je z $e_0(-e_0) \cdot e_q(-e_q) = e_0^2 e_q^2$. Mionski par je en sam, parov kvark-antikvark pa je več. Pri dovolj veliki težiščni energiji lahko nastane katerikoli par kvark-antikvark z notranjimi kvantnimi števili vakuuma. Zato je polni presek za reakcijo (1) pri dovolj veliki težiščni energiji sorazmeren z vsoto produktov $e_0^2 e_q^2$ za vse dopustne pare kvark-antikvark. Razmerje R je tedaj

$$R = 3 \sum_i e_{qi}^2 / e_0^2$$

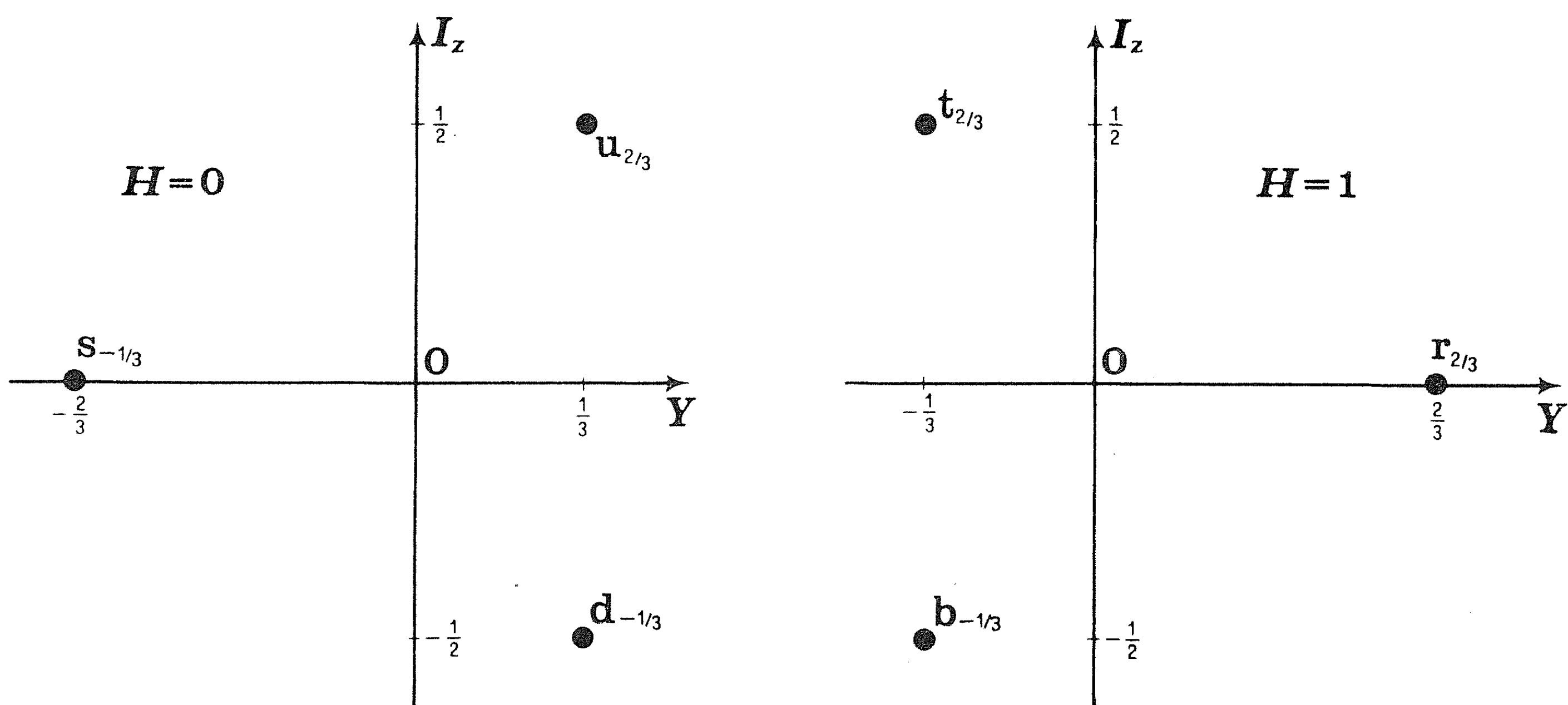
Faktor 3 že upošteva tri različne barve in je treba v vsoto vključiti samo kvarke, ki se razlikujejo po drugih kvantnih številih.

Pri treh Gell-Mannovih kvarkih u , d in s (pomen oznak je pojasnjen v besedilu sl. 2) z naboji $-\frac{1}{3}e_0$, $\frac{2}{3}e_0$ in $-\frac{1}{3}e_0$ je to razmerje enako

$$R = 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] = 2$$

Ti trije kvarki imajo majhne lastne energije, tako da lahko njihovi pari nastanejo pri težiščni energiji pod 2 GeV. Izmerjeno razmerje $R = 2$ pri tej težiščni energiji bi tedaj lahko imeli za potrditev modela treh barvastih kvarkov.

Porast razmerja R med energijama 3 GeV in 4 GeV je mogoče pojasniti z dodatnim povečanjem preseka za reakcije (1) zaradi resonančnih pojavov. Na tem območju energij je namreč postopno dosežen prag za nastanek mezonov Ψ , Ψ' in Ψ'' . Toda razmerja $R = 5$



Sl. 2 Stara trojica kvarkov s težkostjo 0 in nova trojica kvarkov s težkostjo 1 v Hararijevem modelu [6]. Naboj je nanosen kot indeks pri oznaki. Na ordinatno os je nanesena tretja komponenta izospina I_z in na abscisno os hipernaboj Y . Za naboj velja izpopolnjena Gell-Mann-Nishijimova enačba: $e = \frac{1}{2} Y + I_z + \frac{1}{3} H$, hipernaboj pa je $Y = B + S$. Pri tem je S čudnost, barionsko število B pa je za vse kvarke enako $\frac{1}{3}$. Kvarke t in b in kvarke u in d sestavljata izospinska dubleta, kvarke s in r pa sta izospinska singleta. Z risbe razberemo izvor oznak za kvarke: **up** — navzgor, **down** — navzdol, **sideways** — na stran (ali singlet), **top** — vrh, **bottom** — dno, **right** — desno

pri veliki energiji ni mogoče pojasniti, tudi če vključimo poleg kvarkov u, d in s še kvark c s čarom 1 [2] in z nabojem $\frac{2}{3}e_0$. S tem kvarkom dosežemo samo, da naraste razmerje na

$$R = 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = 10/3 = 3,3$$

Izmerjeno razmerje pri veliki energiji je precej večje.

Tolikšno razmerje R govori za obstoj dodatnih kvarkov. Razmišljali so o petih kvarkih [5], H. Harari pa se je odločil za šest kvarkov [6]. Poleg trojice kvarkov u, d in s je uvedel še trojico *težkih kvarkov* t, b in r z naboji $\frac{2}{3}e_0$, $-\frac{1}{3}e_0$ in $\frac{2}{3}e_0$ (sl. 2). Druga trojica se razločuje od prve po novem kvantnem številu *težkosti* H (angl. heaviness). Kvarki t, b in r imajo težkost 1, a kvarki u, d in s težkost 0. Težkost ima pri šesterici kvarkov podobno vlogo kot čar pri četverici. Kvark r ima take lastnosti kot kvark c. Seveda je treba tudi pri šesterici kvarkov upoštevati tri različne barve, tako da nastopajo tri raznobarvne šesterice kvarkov. S to šesterico kvarkov dobimo razmerje

$$R = 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = 5$$

ki se dobro ujema z izmerjeno vrednostjo.

Model štirih kvarkov u, d, s in c ima poleg premajhnega razmerja R še druge slabosti. Ta model pojasni mezon Ψ kot osnovno stanje čarmonija, to je vezanega kvarka c in njegovega antikvarka $\bar{c}$. Mezona Ψ' in Ψ'' pa naj bi bila vzbujeni stanji čarmonija. Toda vzbujenih stanj je brez števila. Mezoni Ψ , Ψ' in Ψ'' imajo vsi spin 1 in ustrezajo ortocharmoniju z vzporednima spinoma c in $\bar{c}$. Kako da ni ustreznih stanj paračarmonija z nasprotnima spinoma c in $\bar{c}$, se pravi delcev Ψ s spinom 0? V Hararijevem modelu pa so mezoni Ψ , Ψ' in Ψ'' sestavljeni iz mešanic treh stanj $t\bar{t}$, $b\bar{b}$ in $r\bar{r}$, enako kot so mezoni ρ , ω in Φ sestavljeni iz mešanic treh stanj $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ in $s\bar{s}$. Hararijev model ima še druge prednosti. Pojasni tudi verjetnosti za nekatere razpade. Izmerjena delna širina* za razpad Ψ v elektronski par je 4,8 keV, delna širina za razpad Ψ' v elektronski par je 2,2 keV in delna širina za razpad Ψ'' v elektronski par je 4 keV. Zadnja vrednost je zelo nezanesljiva in je mogoča celo za 50% večja vrednost. Če vzamemo prvi dve delni širini kot podatka, dobimo v Hararijevem modelu za tretjo približno 7 keV. To je precej bližje izmerjeni vrednosti kot v drugih modelih. Kaže, da tudi druge napovedi tega modela ne nasprotujejo eksperimentalnim ugotovitvam. Kot napoveduje model štirih kvarkov obstoj hadronov s čarom 1 in -1 , pa napoveduje Hararijev model obstoj hadronov s težkostjo 1 in -1 .

Omenimo še, da so tudi drugi razglabljali o modelu šestih kvarkov. Gürsey in sodelavci so izhajali pri tem od drugačnih predpostavk [7]. Poskušali so pojasniti, zakaj ne opazijo nekaterih razpadov, ki jih sicer pričakujejo, podobno kot so storili ob vpeljavi čara. Vendar so pripisali novi trojici kvarkov naboje $-\frac{1}{3}e_0$, $\frac{2}{3}e_0$ in $-\frac{1}{3}e_0$. To pa da za razmerje R premajhno vrednost 4.

Čeprav ima Hararijev model nekaj prednosti pred drugimi, ga ni mogoče imeti za edinega veljavnega. Dobrodošel pa je kot izhodišče za nadaljnje teoretične raziskave. Fritzsche, Gell-Mann in Minkowski so iskali model, v katerem bi bilo mogoče opisati šibko, elektromagnetno in močno interakcijo na podobni osnovi [8]. Ugotovili so, da vsebuje najpreprostejši model te vrste tri raznobarvne šesterice kvarkov in šesterico leptonov.** Poleg elektrona, elektronskega nevtrina, miona in mionskega nevtrina naj bi obstajala še dva dodatna leptona, na primer *težki lepton* in njegov nevtrino. Tako bi v modelu nastopale štiri šesterice elementarnih fermionov (delcev s polovičnim spinom). V tem modelu je mogoče opisati šibko interakcijo — poleg njenega dela z nabitim tokom tudi njen del z nevtralnim

* Delna širina Γ je povezana z verjetnostjo za izbrani razpad na časovno enoto $\Gamma/\hbar$.

** Leptonsko število ni nekakšna četrta barva, saj imajo leptoni cele naboje, kvarki pa tretjinske.

tokom — podobno kot elektromagnetno z vektorskim poljem in invariantno proti gradientni transformaciji. Celo močna interakcija gre neprisiljeno v ta model, le da jo opišejo z nekoliko drugačnim vektorskim poljem.

Kljub teoretični privlačnosti modela je priporočljiva zadržanost. Vprašanje o obstoju mezonov in barionov s težkostjo ali s čarom in težkih leptonov je še vedno nerešeno. Opazovanje reakcij med mionskimi nevtrini in nukleoni skoraj neizpodbitno kaže le, da obstajajo doslej neznani delci. Pri tem se zanimajo za reakcije, pri katerih nastaneta dva miona ali mion in pozitron. Te reakcije pričajo, da nastane delec, ki razpade z zelo kratkim razpadnim časom (recimo, manj kot 10^{-13} s) po šibki interakciji. Noben znani delec nima takih lastnosti. Do zdaj so opazovali s števci okoli sto reakcij, pri katerih sta nastala dva miona (v Bataviji), in sedem reakcij v mehurčni celici, pri katerih sta nastala mion in pozitron (3 v CERN in 4 v Bataviji). Vendar tolmačenja niso enotna, posebej glede na napovedi posameznih modelov. Treba bo počakati še na nove eksperimentalne podatke. Ne glede na to pa sta Hararijev model in razširitev Fritscha, Gell-Manna in Minkowskega vsaj koraka proti daljnemu cilju — poenotnemu obravnavanju interakcij med delci.

Janez Strnad

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Nova delca*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 42.
- [2] B. Golli, *Delci ψ v modelu kvarkov*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 193; *Barvni kvarki*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975) 198.
- [3] J. Strnad, *Moderna fizika*, Ljubljana 1973, str. 562.
- [4] D. H. Perkins, *Neutrinos and Nucleon Structure*, Contemp. Phys. **16** (1975) 173.
- [5] Y. Achiman, K. Koller, T. F. Walsh, *Five Quarks, New Particles and $V + A$ Currents*, Phys. Letters **59B** (1975) 261.
- [6] H. Harari, *A New Quark Model for Hadrons*, Phys. Letters **57B** (1975) 265; *An Analysis of a New Quark Model of Hadrons*, Ann. Physics **94** (1975) 391.
- [7] F. Gürsey, P. Ramond, P. Sikivie, *Six-Quark Model for the Suppression of $\Delta S = 1$ Neutral Currents*, Phys. Rev. **D12** (1975) 2166.
- [8] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, P. Minkowski, *Vectorlike Weak Currents and New Elementary Fermions*, Phys. Letters **59B** (1975) 256.

UTRINEK

DVE PREMICI IN ENA TOČKA

Znameniti ruski matematik *A. K. Vlasov* je med predavanjem o preseku dveh premic, danih z njunima enačbama, pri uri analitične geometrije povedal študentom tole anekdoto:

Nekoč sem šel po predavanju po hodniku in pri dvigalih nehote prisluhnil pogovoru dveh prvoletnikov, ki sta očitno prav pred tem poslušala moje predavanje iz tega poglavja.

Prvi je dejal: »Vidiš, Kolja, sedaj pa razumem, zakaj ima sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama v splošnem eno samo rešitev. To je zato, ker se premici sekata v eni točki.«

Drugi pa je odvrnil: »Pomisli, Ivan, jaz pa šele sedaj razumem, zakaj se dve premici sekata v eni točki. To je ravno zato, ker ima sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama eno rešitev.«...

Po reviji KVANT povzel
Dušan Repovš

REZULTATI SPREJEMNIH TESTOV IZ FIZIKE NA MEDICINSKI FAKULTETI V LJUBLJANI

Na medicinski fakulteti univerze v Ljubljani imajo novinci že vrsto let *sprejemno skušnjo* [1], [2]. Ta naj bi izbrala med prijavljenimi kandidati tiste, ki imajo največ upanja za uspeh pri študiju. Del sprejemne skušnje zajema tudi test iz fizike. Kandidati dobijo trideset vprašanj. Med petimi navedenimi odgovori je pri vsakem vprašanju vedno pravilen le en odgovor. Teste sestavljajo sodelavci Inštituta za biofiziko Medicinske fakultete po učnem programu za fiziko na srednjih šolah.

Čeprav je namen skušnje selekcija — za vpis na fakulteto ni treba preseči kakega absolutnega praga znanja, ampak je odločilen le boljši uspeh od drugih kandidatov — rezultati testov koristijo učiteljem predmeta biofizika pri načrtovanju nivoja pouka. Rezultati teh testov kažejo znanje dela abiturientov praktično vseh slovenskih gimnazij, zato utegnejo biti zanimivi tudi za bralce Obzornika. Primeri so s sprejemnih skušenj zadnjih treh let: 1973, 1974 in 1975.

Nekatere rezultate testov pripisujemo površnemu branju in razumevanju vprašanja. Tako je na primer 70 od 278 kandidatov obkrožilo odgovor, da je električni tok pri zaporedno vezanih treh upornikih sorazmeren z vsoto uporov. Le 101 jih je obkrožilo pravilen odgovor, da so padci napetosti na teh treh zaporedno vezanih uporih v razmerju uporov. 81 kandidatov je menilo, da spreminja volframova žarnica svetlobno energijo v električno, čeprav je bil naveden tudi odgovor, da spreminja električno energijo v toploto. Samo 79 odgovorov je bilo pravilnih. Za 8 kandidatov spreminja žarnica toploto v kinetično energijo, za 3 potencialno energijo v električno in za 8 zopet toploto v električno energijo. 99 kandidatov ni odgovorilo.

Da večina kandidatov ne razume pojavov, kažejo odgovori na naslednjo skupino vprašanj.

Enoto za masni tok, energijski tok, svetlobni tok, električni tok in toplotni tok dobimo tako, da delimo eno od enot kilogram, joule, lumen, ampersekunda, kelvin z enoto časa. V vsaki vrstici podčrtaj ustrezno enoto!

	kg	J	lm	As	K	ni odgovorilo
masni tok	232	1	1	0	1	21
energijski tok	1	207	2	5	2	39
svetlobni tok	0	2	220	2	2	30
električni tok	0	1	1	243	1	10
toplotni tok	1	21	1	4	192	37

Trditev, da se meri svetlobni tok v lumnih na sekundo, je skorajda odpustljiva, ne pa tudi druga, namreč da se meri toplotni tok v kelvinih na sekundo. Leto dni kasneje smo dali isto vprašanje v obliki testa padajočih stolpcev. Podčrtati je bilo treba stolpec z enotami, ki jih potrebujemo, da na opisani način dobimo enote za masni, energijski, svetlobni, električni in toplotni tok. Rezultat je bil nekoliko boljši.

	19	32	55	25	19	ni odgovorilo 127
J	J	J	J	J		
kg	kg	kg	kg	kg		
As	As	As	As			
lm	lm					
K						

Iz rezultatov testov je razvidno, da velik del kandidatov ne zna zares osnovnih stvari. Naštejmo še nekaj opaznih primerov. Pri mehaniki dela največ preglavic nihanje. Le 4 kandidati od 277 so vedeli, da lastna frekvenca nihala ni sorazmerna z amplitudo nihanja in da je celotna energija pri nihanju sorazmerna s kvadratom amplitude. Za nekatere kandidate (sicer samo 25) je nihajni čas pri matematičnem nihalu odvisen od amplitude nihanja. 67 kandidatov od 256 meni, da je tlak v posodi z idealnim plinom pri konstantni temperaturi sorazmeren s prostornino plina, in le 49, da je sorazmeren z gostoto plina. Le 65 jih je v isti skupini pravilno izbralo zmesno temperaturo med petimi navedenimi temperaturami. Le 23 od 278 kandidatov je odgovorilo pravilno na vprašanje:

če sta toplotna rezervoarja na temperaturah 27°C in 127°C , je izkoristek Carnotovega stroja 21, 2; 25; 35; 50; 78.

Pri vprašanjih iz elektrike je problem izbrati količine, ki nastopajo v izrazu za kapaciteto ploščatega kondenzatorja (79 pravih od 278 odgovorov). Le 69 kandidatov od 256 ve, da se kapaciteta kondenzatorja v nihajnem krogu ne spreminja s časom.

Zanimivi so tudi odgovori na vprašanja iz optike. Na vprašanje o sestavljanju leč je odgovorilo le 13 kandidatov od 256. V isti skupini je samo 50 kandidatov poznalo zvezo med kotom in valovno dolžino pri uklonu na uklonski mrežici. 98 od 277 jih je trdilo, da lomni kvocient stekla ni odvisen od valovne dolžine svetlobe. Pravih odgovorov je bilo le 84. Eksponentni zakon o absorpciji svetlobe pozna komaj 6 od 278 kandidatov. 102 kandidata menita, da je valovna dolžina infrardeče svetlobe manjša od valovne dolžine vidne svetlobe. Pravih odgovorov je le 109.

Najmanj pravih odgovorov je običajno iz atomike. Skoraj nobenega ni, če je treba povezati določen atomski proces s sevanjem izbrane vrste elektromagnetnega valovanja. 171 kandidatov od 278 meni, da je v **jedru** (podčrtano tudi v besedilu testa) atoma ${}_{92}\text{U}^{238}$ 92 protonov, 146 nevtronov in 92 elektronov, in le 96 odgovorov je pravih. Na vprašanje, katero od naštetih jeder (eno med njimi je ${}_{1}\text{H}^3$) ne razpada z razpadom β^+ , je odgovorilo le 93 od 277 kandidatov. Komaj 52 kandidatov pozna velikostno stopnjo valovne dolžine rentgenske svetlobe. Samo 81 od 256 kandidatov je odgovorilo na vprašanje, koliko elektronov ima dvakrat ionizirani atom berilija ${}_{4}\text{Be}^9$. Pri vprašanju o tem, katera od navedenih snovi ima največjo gostoto, smo dobili naslednje odgovore: les (0), svinec (57), voda (0), zrak pri temperaturi 0°C in tlaku 50 kp/cm^2 (11), jedro atoma (193); 66 je bilo nepodčrtanih odgovorov. Rentgensko svetlobo sestavljajo: pozitivni ioni (4), elektroni (23), fotoni (131), protoni (2), delci α (9); 109 kandidatov ni odgovorilo. Le 73 od 256 jih je pravilno odgovorilo, da katodna cev ni detektor ionizirajočih žarkov.

Znanje, ki ga pokažejo kandidati za študij medicine, se ne sklada z njihovimi sposobnostmi. So namreč relativno dobri dijaki. Od leta 1975 prijavljenih dijakov jih je bilo pri maturi 39% odličnih, 31% prav dobrih, 22% dobrih in 8% zadostnih. Kandidati so se še posebej pripravljali v pripravljalnem tečaju, v katerem so se tudi seznanili z obliko sprejemne skušnje in posebej s testi. Od 202 vpisanih leta 1974 jih je v predpisanem roku napravilo izpit iz biofizike 174, povprečna ocena pa je bila nekaj pod osem.

Saša Svetina

LITERATURA

[1] M. Kališnik, *Sprejem novincev na Ljubljansko medicinsko fakulteto*, Zdrav. vestn. 37 (1968) 441—442.

[2] M. Kališnik, *Razvoj sprejemnega postopka na medicinski fakulteti v Ljubljani*, Medicinski razgledi 14 (1975) 358—360.

TOPOLOGIJA V SREDNJI ŠOLI

Nekaj smernic in predlogov

A) Osnovni program topologije

1. Možnost in pomen pouka topologije

Od številnih poglavij topologije prihaja v poštev za srednjo šolo predvsem splošna topologija na premici, v ravnini in v trirazsežnem prostoru. Obdelaj naj se vsaj naslednje: okolice; notranjost, rob in zunanost množic; pojem odprte in zaprte množice; limita zaporedja in funkcije; zveznost funkcije.

Za razumevanje pravkar omenjene snovi morajo dijaki poznati osnovne pojme o množicah, imeti pa morajo tudi nekaj geometrijskega znanja. Naj jim ne bo tuje pojmovanje premic, ravnin, ravninskih likov ... kot množic točk in naj znajo ločevati med odprtimi in zaprtimi daljicami (oziroma krogi). Končno naj obvladajo realna števila ter povratno enolično zvezo med njimi in med točkami na premici. — Ker se z vsem tem dijaki seznaniijo v 1. razredu srednje šole, je mogoče že tedaj začeti tudi s topologijo.

Številna poglavja matematike v srednji šoli so tesno povezana s topologijo. Še posebej nastopa ta pri pojmi: približek, natančna zgornja meja, limita, zveznost, notranjost, rob, zunanost... Geometrijo spremlja topologija od aksiomov o urejenosti naprej (odprte in zaprte daljice), izrazito topološkega značaja je aksiom o zveznosti premice. — Tako je topologija navzoča že v dosedanjem pouku matematike, ponekod eksplicitno (npr. pri limiti in zveznosti v 4. razredu), drugod pa bolj implicitno oziroma skrito. Izrazitejši in celovitejši pouk topologije zato dijakom ne bo tuj, ampak jim bo še celo pomagal k boljšemu in globljemu razumevanju reči, ki so jih že srečali.

V naslednjih razdelkih je topološka snov, primerna za srednjo šolo, razporejena po razredih. Za vsak pojem iz topologije bom tako nakazal, kdaj ga lahko najprej vpeljemo. Kjer pa navedenega programa ni mogoče uresničiti (zaradi pomanjkanja časa ipd.), lahko npr. snov 1. razreda (morda tudi skrajšano) v celoti prenesemo v 4. razred.

2. Topologija v 1. razredu

a) Okolice

Pojem okolice realnega števila lahko vpeljemo pri algebri na koncu III. poglavja v [2], to je po obdelavi realnih števil in njih zveze s točkami na premici. V $\mathcal{R}$ definirajmo najprej odprti in zaprti interval: $(a, b) = \{x; a < x < b\}$, $[a, b] = \{x; a \leq x \leq b\}$, nato pa okolico števila a s polmerom ε : $\mathcal{O}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Definiciji okolice naj sledi ugotovitev (npr. v obliki naloge), da je $\mathcal{O}(a, \varepsilon) = \{x; |a - x| < \varepsilon\}$ *; glej [5], str. 58. Pri tej in pri nadaljnji obravnavi je treba števila, intervale in okolice ponazoriti na številski premici. Tako lahko pojmujeemo $\mathcal{O}(a, \varepsilon)$ tudi kot okolico točke — slike števila a , izraz $|a - x|$ pa pomeni razdaljo med a in x (kot točkama).

Vsako število ima seveda nešteto okolic; manjši vrednosti za ε ustreza manjša okolica. Okolice imamo lahko za merilo, kako blizu smo danemu številu (oz. točki). Za vajo naj dijaki spoznajo in dokažejo: če izberemo dve še tako bližnji števili, jima lahko poiščemo dovolj majhni okolici, katerih presek je prazen.

Pridobljeno znanje o realnih številih nam pove: v vsaki okolici danega števila $a \in \mathcal{R}$ lahko najdemo neko od a različno (realno) število kakor tudi neko racionalno število.** Iz definicije natančne zgornje meje μ za množico $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ pa sledi, da je v vsaki okolici števila μ neki $x \in \mathcal{M}$ (koristna vaja: določitev μ za konkretne $\mathcal{M}$). Pri teh primerih opazimo,

* Zaradi preglednosti uporabljam tu formalni zapis matematičnih izjav. Pri pouku ima seveda prednost besedno izražanje, podkrepljeno s primeri — formalni zapis pa vpeljemo v teku obravnave.

** V zvezi z drugo trditvijo glej [2], str. 61.

da smo z družino vseh okolic danega števila razložili intuitivni pojem »poljubno blizu«; ta je namreč ekvivalenten izrazu »v vsaki okolici«.

Okolice omenimo spet pri geometriji v IV. poglavju [7], takoj ko obdelamo dolžine in razdalje. Okolico $O(A, \varepsilon)$ točke A na premici p opredelimo kot množico $\{T \in p; \overline{AT} < \varepsilon\}$; pri tem poudarimo, da je ta, bolj geometrijska definicija ekvivalentna prvotni. Kot vaja sledi ugotovitev, da je $O(A, \varepsilon)$ odprta daljica s krajiščema B in C , kjer je $\overline{AB} = \overline{AC} = \varepsilon$. Po aksiomu II/2 lahko v vsaki okolici dane točke $A \in p$ najdemo neko točko $T \in p$, različno od A — pravimo, da je premica gosta v sebi ([6], str. 76 spodaj). Še enkrat se ozremo na aksiom o zveznosti premice ([7], str. 91) in se prepričamo: v vsaki okolici delitvene točke C najdemo neko točko iz prvega in neko iz drugega razreda. Torej segata oba razreda prav do točke C in se v C stikata; s tem je daljica — in prav tako premica — nepretrgana (povezana). Koristno je tudi ugotoviti, da je C natančna zgornja (oz. spodnja) meja prvega (oz. drugega) razreda.

Neposredno za IV. poglavjem v [7] vpeljemo okolico točke A v ravnini Π : $O(A, \varepsilon) = \{T \in \Pi; \overline{AT} < \varepsilon\}$. Torej je $O(A, \varepsilon)$ odprt krog s središčem A in polmerom ε (v [7] je za »odprt krog« uporabljen izraz »notranjost kroga«). Omenimo, da sta definiciji okolice na premici in v ravnini enaki, le da vzamemo za univerzum enkrat premico in drugič ravnino. Ugotovitve iz drugega odstavka točke (a) prenesemo na okolice v ravnini. Tudi ravnina je gosta v sebi, saj lahko v vsaki okolici danega $A \in \Pi$ najdemo neki $T \in \Pi$, $T \neq A$ (sledi iz aks. II/2). Naj bo p neka premica v ravnini Π in naj bo $A \in p$; z upoštevanjem aks. I/2 dokažemo, da nobena (ravninska) okolica za A ne leži vsa v p . To je značilna lastnost premic, ravninskih krivulj nasploh in tudi končnih množic (v nasprotju z dvorazsežnimi liki); primerjaj [1], str. 77. — Po seznanitvi s kroglo uvedemo okolice še v trirazsežni prostor; obravnava je prav taka kot za premico in ravnino.

b) Notranjost, rob in zunanost

Te pojme lahko uvedemo takoj po obravnavi okolic v ravnini. Opraviti imamo z univerzumom $\mathcal{U}$, ki je bodisi premica bodisi ravnina (pozneje tudi trirazsežni prostor), in s poljubno množico $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$. Dijaki naj poleg operacij unije in preseka poznajo tudi komplement. Nadalje naj ločijo med odprtim in zaprtim krogom (trikotnikom, daljico...). Tu je seveda še mišljena geometrijska odprtost oz. zaprtost: odprt krog je $\{T; \overline{ST} < r\}$, zaprt krog je $\{T; \overline{ST} \leq r\}$...

Za množico $\mathcal{A}$ definiramo notranje, zunanje in robne točke tako kot v [10], str. 3 (okolice so pri nas seveda le intervali oz. krogi). Glej tudi [5], str. 58. Množico notranjih (zunanjih, robnih) točk imenujemo notranjost (zunanost, rob) množice $\mathcal{A}$ in jo označimo npr. z $N(\mathcal{A})$ ($Z(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$).* Seveda je lahko katera teh množic tudi prazna (za premico p v ravnini je $N(p) = \emptyset$). Prav lahko se prepričamo o naslednjih odnosih, ki jih že pričakujemo: $N(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$ in $Z(\mathcal{A})$ so paroma disjunktne, skupaj pa pokrivajo ves univerzum ($N(\mathcal{A}) \cup R(\mathcal{A}) \cup Z(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$)**; $N(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$; $Z(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}\mathcal{A}$. Vse to kajpak povemo najprej z besedami, npr.: če je T notranja točka za $\mathcal{A}$, je tudi $T \in \mathcal{A}$ — itd.

Nato poiščemo notranjost, rob in zunanost zaprtega in odprtega kroga (polravnine, trikotnika...); isto napravimo tudi za daljice in poltrake na premici. Svoje ugotovitve seveda utemeljimo z dosedanjim geometrijskim znanjem. Tako npr. pri zaprtem krogu $\mathcal{K}(S, r)$ (sl. 1) dokažemo: če je $\overline{ST} < r$, je T notranja točka za $\mathcal{K}(S, r)$ — itd. Ob primerih vidimo, da lahko robna točka dane množice $\mathcal{A}$ sodi bodisi v $\mathcal{A}$ bodisi v $\mathcal{C}\mathcal{A}$.

* Namesto »rob« pravimo tudi »meja«. Namesto znaka $N(\mathcal{A})$ (oz. $R(\mathcal{A})$) rabimo pogosto $\mathring{\mathcal{A}}$ (oz. $\dot{\mathcal{A}}$).

** O enakosti $N(\mathcal{A}) \cup R(\mathcal{A}) \cup Z(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$ se prepričamo, brž ko dokažemo: če neka točka $T \in \mathcal{U}$ ni niti notranja niti zunanja za $\mathcal{A}$, potem je T robna točka za $\mathcal{A}$.

Odprte in zaprte množice definiramo kot v [10], str. 4 oziroma [5], str. 58. Ogledamo si primere množic, ki so odprte, zaprte ali pa niti eno niti drugo (slednje vsebujejo le del svojega roba). Univerzum $\mathcal{U}$ je hkrati odprt in zaprt. — Zanimive so še množice brez notranjih točk (npr. premica v ravnini) in take brez zunanjih točk; o slednjih pravimo, da so v univerzumu povsod goste (npr. racionalna števila na realni osi).

Če gledamo geometrijske like kot dele ravnine, se njihova geometrijska in topološka notranjost (rob, zunanost) ujemata. (O geometrijski notranjosti itd. glej [7], str. 33, 36, 95.) Prav tako se ujemata geometrijska in topološka odprtost oz. zaprtost: odprt krog $\{T; \overline{ST} < r\}$ je topološko odprt — itd. Enako velja pri množicah na premici. Vendar pa smo definirali geometrijsko notranjost itd. glede na stalen univerzum (premica za daljice, ravnina za like), pri topologiji pa univerzum pogosto menjamo. Tako npr. daljica v ravnini ali trikotnik v prostoru sploh nimata notranjih točk. Topološki pojmi kakor odprtost, notranjost... dane množice $\mathcal{A}$ torej niso odvisni le od $\mathcal{A}$, ampak tudi od univerzuma $\mathcal{U}$, v katerem opazujemo množico $\mathcal{A}$.

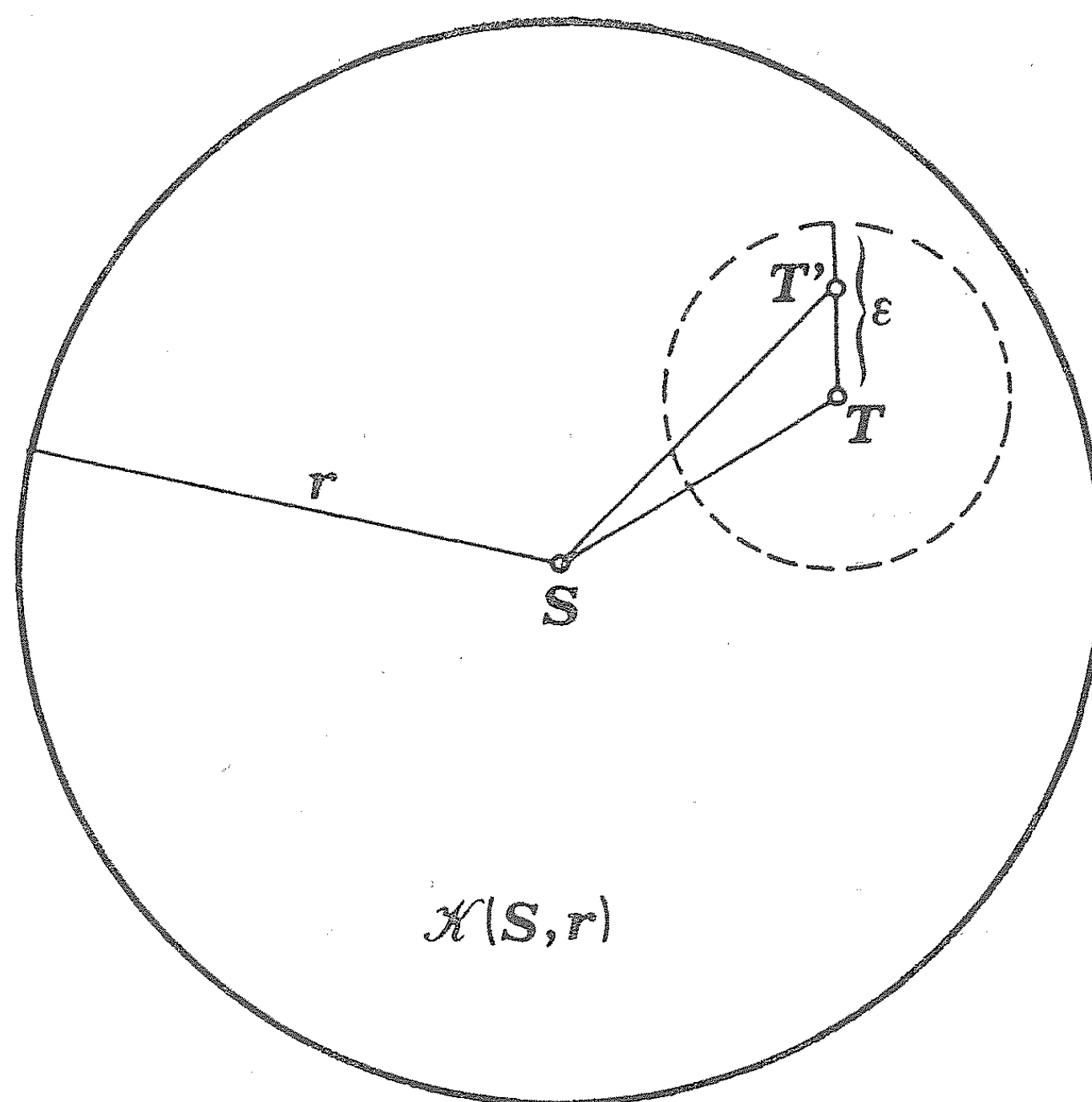
V nadaljnjem pouku geometrije lahko mimogrede uporabimo pridobljeno znanje pri obravnavi ravninskih likov in pozneje teles v prostoru. Topološke pojme seveda prav tako s pridom uporabljamo v analitični geometriji.

3. Nekaj pripomb

Ko smo vsaki točki T univerzuma $\mathcal{U}$ priredili družino okolic $\{O(T, \varepsilon); \varepsilon > 0\}$, smo s tem v $\mathcal{U}$ vpeljali topologijo — $\mathcal{U}$ je postal topološki prostor. Odprte množice v $\mathcal{U}$, ki so definirane na osnovi okolic, namreč zadoščajo aksiomom za topologijo (glej pogoje (A), (B), (C) v [10], str. 4 in 7). Nekaj več o tem, kaj je za topologijo značilno, pa nam pove naslednji premislek.

Glede na dosedanje izkušnje je smiselno reči: topološko je vse, kar temelji (vsaj posredno) na pojmu okolice, pri čemer nastopa beseda »okolica« v bistvu v eni od obeh naslednjih zvez: »vsaka okolica«; »vsaj ena okolica«. Primeri: V vsaki okolici danega realnega števila je neko racionalno število. V vsaki okolici dane robne točke za množico $\mathcal{A}$ je neka točka iz $\mathcal{A}$ in neka točka iz $\mathbb{C}\mathcal{A}$. Notranja točka množice $\mathcal{A}$ ima vsaj eno okolico, ki leži v $\mathcal{A}$. Če sta A in B različni točki, obstajata vsaj ena okolica za A in vsaj ena okolica za B , katerih presek je prazen. — Izraz »v vsaki okolici« pomeni isto kakor »poljubno blizu« (glej str. 120 zgoraj), zvezi »vsaj ena okolica« pa ustreza pojem »dovolj blizu«: če je $A \neq B$ in izberemo točko A' dovolj blizu A , točko B' pa dovolj blizu B , potem je tudi $A' \neq B'$. — Izraza »poljubno blizu« in »dovolj blizu« kažeta na kvalitativni značaj topologije. To kvalitativnost sicer nekoliko »moti« naša definicija okolice na osnovi razdalje; vendar pa nas zanima predvsem družina vseh okolic dane točke, ne glede na njihovo velikost — prav s tem nekako odvezujemo velikosti oz. kvantiteti njeno težo.

Obravnava topologije na premici, v ravnini in v trirazsežnem prostoru se seveda ne sme končati z njeno vpeljavo. Evklidski prostori se namreč ločijo od splošnih topoloških prostorov po svojih številnih posebnih lastnostih. Zato je prav, da se v šoli prepričamo o naslednjem (kar smo posamič že omenili): dve različni točki imata okolici, ki se ne sekata; premica,



Slika 1

$$\begin{aligned} \overline{ST} &< r \\ \varepsilon &\leq r - \overline{ST} \\ \overline{TT'} &< \varepsilon \\ \hline \overline{ST'} &< r \end{aligned}$$

ravnina in trirazsežni prostor so gosti v sebi; racionalna števila so povsod gosta v $\mathcal{R}$; premica je povezana (aks. o zveznosti premice)... Pomembna lastnost evklidskih prostorov je še kompaktnost zaprtih in omejenih množic, kar je na vrsti v 4. razredu (o kompaktnosti glej [10], str. 11—16).

Topologija nastopa tako v geometriji kakor v analizi, saj gre obakrat za iste evklidske prostore; tega naj se dijaki dobro zavedajo. Vendar številni temeljni topološki premisleki lepše potekajo »v geometrijskem okolju«, brez uporabe koordinatnega sistema. Po drugi strani pa je treba spoznati tesno povezavo topologije z analizo, saj je slednja že dolgo eno glavnih področij, na katerem se uporablja topologija.

Če utegnemo, se lahko pri obravnavi notranjosti, roba in zunanosti prepričamo še o naslednjih, splošnih trditvah, ki sledijo iz samih definicij. Trditve se nanašajo na poljubno množico $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$; $N(\mathcal{A}) = Z(\mathcal{C}\mathcal{A})$, $Z(\mathcal{A}) = N(\mathcal{C}\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{C}\mathcal{A})$; $\mathcal{A} \subset N(\mathcal{A}) \cup R(\mathcal{A})$ (to je posledica enakosti $N(\mathcal{A}) \cup R(\mathcal{A}) \cup Z(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$); množica $\mathcal{A}$ je odprta (oz. zaprta) natanko tedaj, ko je $\mathcal{A} \cap R(\mathcal{A}) = \emptyset$ (oz. $\mathcal{A} = N(\mathcal{A}) \cup R(\mathcal{A})$).

Dokazi raznih topoloških trditev, ki smo jih doslej srečali, večinoma niso posebno težki, zato se jih pri pouku načeloma ne izogibljimo. Dokazovanje v topologiji se da lepo povezati z nazornostjo, saj dokazom navadno utirajo pota prav nazorni premisleki. — Za vsestransko razumevanje splošne teorije je seveda še treba obdelati dovolj primerov (npr. v obliki nalog). Ob njih spoznavamo tudi zvezo med topologijo in drugo matematiko.

4. Topologija v 2. in 3. razredu

Znanje topologije iz 1. razreda uporabimo pri asimptotah funkcij, vpeljavi odvoda, posameznih primerih za limito zaporedja in pri obravnavi množic v ravnini in v prostoru.

Asimptote srečamo v [3] in [4] pri funkcijah $1/x^n$, a^x , $\log_a x$, $p(x)/q(x)$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ in pri hiperbolah. Premica $y = a$ je desna vodoravna asimptota funkcije $f(x)$, če gre $f(x)$ proti a , ko gre x proti ∞ ; to pomeni: če izberemo za a poljubno majhno okolico $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, leži v njej $f(x)$ za vse dovolj velike x . To ponazorimo grafično in preskusimo npr. pri $f(x) = 1/x$ (k izbranemu ε določimo ustrezne x). Analogno vpeljemo levo vodoravno asimptoto. — Premica $y = ax + b$ je desna (leva) poševna asimptota za $f(x)$, če gre razlika $f(x) - (ax + b)$ proti 0, ko gre x proti ∞ ($-\infty$). — Za desno navpično asimptoto $x = a$ funkcije $f(x)$ je značilno: če izberemo še tako velik $M > 0$, lahko najdemo takšno, dovolj majhno okolico $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, da je $|f(x)| > M$, če je le $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ in $x > a$. Definicija leve navpične asimptote $x = a$ je prav taka, le da pogoj $x > a$ nadomestimo s pogojem $x < a$. V šoli največkrat srečujemo desne navpične asimptote, ki so hkrati tudi leve; imenujemo jih kar navpične asimptote. S kakšnim preprostim zgledom za navpično asimptoto (npr. pri $f(x) = 1/x$) povežemo tudi grafično ponazoritev definicije.

Pri vpeljavi *odvoda* začnemo s pojmom tangente na graf poljubne funkcije $f(x)$ (glej [3]). Skušamo poiskati $f'(x_0)$, to je smerni koeficient tangente v točki x_0 . Vzamemo npr. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$. V smerni koeficient sekante $(x^2 - 1)/(x - 1)$ nima smisla vstavljati $x = 1$, zato se vrednosti 1 približujemo z 1,1; 1,01; 1,001; ...; pri računanju upoštevamo, da je $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$ za $x \neq 1$. Opazimo, da se sekanta približuje tangenti, njen smerni koeficient pa gre proti 2 — torej je v našem primeru $f'(1) = 2$. Zdaj je na dlani tale, analitična definicija odvoda, ki naj si jo dijaki tudi zapomnijo: $f'(x_0)$ je tisto število, ki se mu bliža $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, ko se x bliža x_0 . (Seveda $f'(x_0)$ ne obstaja vselej — primer: $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.) Ob konkretnih primerih razložimo navedeni pojem bližanja: izraz $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ je poljubno natančen približek za $f'(x_0)$, če le vzamemo x dovolj blizu x_0 . Z drugimi besedami: vrednost $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ pade v poljubno majhno okolico za $f'(x_0)$, če leži x v dovolj majhni okolici za x_0 .

Primeri omejenih naraščajočih oz. padajočih *zaporedij* nastopajo pri obsegu kroga, vpeljavi ploščine, ploščini kroga... v [8], pa tudi pri numeričnih metodah za reševanje enačb

v prvem poglavju [4]. Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots$ naj bo naraščajoče in omejeno. Po Dedekindovem aksiomu obstaja natančna zgornja meja a za to zaporedje (natančneje: za množico njegovih členov*). Iz definicije natančne zgornje meje sledi, da lahko v vsaki okolici $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ najdemo neki (dovolj pozen) člen a_n . Ker zaporedje narašča, so v tej okolici tudi vsi njegovi nadaljnji členi. Če števila a ne poznamo, lahko vendar dobimo zanj poljubno dobre približke z dovolj poznimi členi zaporedja (primer: približki za π). — Za omejena padajoča zaporedja veljajo analogne ugotovitve kot za naraščajoča; obstoj natančne spodnje meje sledi iz Dedekindovega aksioma. — Ker je natančna zgornja (spodnja) meja poseben primer limite, bi morda kazalo že ob teh primerih uvesti limito zaporedja čisto splošno (kot v 4. razredu).

Pojme kot so *odprtost*, *zaprtost*, *notranjost*... lahko mimogrede uporabimo pri geometrijskih telesih v [8], pri množicah v kompleksni ravnini in nasploh pri množicah, ki jih iz ravnine »izrežejo« razne krivulje. Na primer: množica $\{(x, y); x^2 \leq y < x\}$ ni ne odprta ne zaprta, njen rob je enak uniji

$$\{(x, y); x^2 = y < x\} \cup \{(x, y); x^2 \leq y = x\};$$

množica $\{(x, y); x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0\}$ je zaprt krog, njegova notranjost je $\{(x, y); x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 < 0\}$, rob je ..., zunanost je ...

5. Topologija v 4. razredu

Ob razdelku *Okolice* v [5] ponovimo topološke pojme in ugotovitve iz 1. razreda. Če pa se s topologijo še nismo eksplicitno srečali pred 4. razredom, jo vpeljemo sedaj; obravnavamo jo načeloma tako, kot bi jo sicer obravnavali v 1. razredu, le da bolj zgoščeno (izpustimo lahko tipično geometrijske reči).

Na koncu razdelka *Okolice* najdemo *Borelov izrek*, ki pove, da je poljuben zaprt interval kompaktna množica. O kompaktnosti nasploh glej v [10], str. 11—16; v šoli rabimo seveda isto definicijo tega pojma kot v [10], le da poteka vsa obravnava na realni osi in morda še v ravnini in trirazsežnem prostoru.** Poleg Borelovega je ugodno izpeljati še Izrek 6. v [10], str. 12, ki mu za naše namene damo tole obliko: Vsaka zaprta množica, ki leži v kompaktni množici, je kompaktna. Ta trditev nam skupaj z Borelovim izrekom pove, da so na premici vse omejene in zaprte množice tudi kompaktne. Brez dokaza pa omenimo, da so — obratno — vse kompaktne množice omejene in zaprte. — Tudi v ravnini in trirazsežnem prostoru so omejene in zaprte natanko vse kompaktne množice (kot prej na Borelov izrek se zdaj sklicujemo na kompaktnost zaprtih pravokotnikov in kvadrov; glej dokaz Izreka 10. v [10], str. 13, 14). — Navedene ugotovitve so odločilnega pomena pri obravnavi zveznih funkcij (ene ali več spremenljivk) na omejenih in zaprtih množicah. Za nas prihaja v poštev obravnava zveznih funkcij na zaprtih intervalih ([5], str. 63—65).

Do *limite funkcije* pridemo konkretno, npr. z opazovanjem funkcije $f(x) = (3x^2 - 3x)/(x - 1)$ v okolici $a = 1$. Ker je $1 \notin \mathcal{D}_f$, se omejimo na $x \neq 1$; pri teh x -ih lahko pišemo $f(x) = 3x$ in takoj opazimo, da se $f(x)$ bliža številu 3, ko se x bliža številu 1; zapišemo $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$. Obravnavani primer nas navede najprej na tole definicijo: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ je tisto število, ki se mu bliža $f(x)$, ko gre x proti a in je $x \neq a$. Omenimo, da $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne obstaja vselej. Nato formuliramo definicijo limite natančneje — tako kot v [5], str. 59. (Ko pravimo $x \in \mathcal{O}(a)$ oziroma $|x - a| < \delta$, seveda predpostavljamo, da je $x \neq a$.) — Za lažje razume-

* Zaporedje gledamo kot funkcijo iz $\mathcal{N}$ v $\mathcal{R}$; množica njegovih členov je tedaj množica vseh vrednosti te funkcije.

** Pojem kompaktnosti postane jasnejši, če navedemo primere nekompaktnih množic oz. prostorov: premico, ravnino, trirazsežni prostor. O njihovi nekompaktnosti se je lahko prepričati.

vanje limite je koristna vaja, pri kateri k danemu ε poiščemo tak δ , da bo $|f(x) - \beta| < \varepsilon$, če bo le $|x - a| < \delta$ in $x \neq a$ (pri tem je $\beta = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$); lahko za ε vzamemo vrednosti

0,1; 0,01 ... — Poleg vseh drugih ugotovitev o limiti omenimo še to, da ima funkcija v dani točki kvečjemu eno limito: $f(x)$ se namreč ne more hkrati bližati različnim vrednostma β in γ , saj imata β in γ okolici, ki se ne sekata.

Zveznost funkcije v dani točki definiramo z limito, nato pa izrazimo definicijo še v obeh drugih oblikah — glej [5], str. 63 zgoraj. Zveznost opišemo še »po domače«: ko gre x proti a , gre $f(x)$ proti $f(a)$. Sami teoriji lahko dodamo še takšno, bolj praktično nalogo: recimo, da merimo neko količino x in na podlagi meritev računamo $f(x)$; vprašamo se, koliko se smemo pri merjenju vrednosti $x = a$ zmotiti, da bo $f(x)$ oddaljen od pravega rezultata $f(a)$ manj kot za predpisan ε (0,1; 0,01 ...). Naloga je rešljiva pri poljubnem ε natanko tedaj, ko je funkcija $f(x)$ zvezna v točki $x = a$. — Obravnavi zveznih funkcij pridružimo še različne primere nezveznih funkcij: x/x , $x/|x|$, $1/x$, $\sin(1/x)$ itd. — Dobro je omeniti še, kako se zveznost funkcije odraža na njenem grafu: funkcija $f(x)$ je zvezna pri $x = a$ natanko tedaj, ko je njen graf nad točko $x = a$ nepretrgan. Ta lastnost nepretrganega grafa je nekak nazoren argument za trditev: če je funkcija $f(x)$ zvezna na $[a, b]$ ter je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$, je nujno $f(x) = 0$ za neki $x \in (a, b)$.

Limita zaporedja vpeljemo z raznimi zgledi; spomnimo se tudi na primere limit, ki smo jih srečali doslej. Definicijo limite najdemo v [5], str. 80 (poleg oblike $|a - a_n| < \varepsilon$ rabimo še: $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ali: $a_n \in \mathcal{O}(a, \varepsilon)$). Povemo tudi »po domače«: členi a_n se bližajo točki a , ko raste n čez vse meje. Za vajo poiščemo pri kakšnem konvergentnem zaporedju k danemu ε takšen $n(\varepsilon)$, da je $|a - a_n| < \varepsilon$ za vse $n > n(\varepsilon)$. — Limita zaporedja in limita funkcije sta v tesnem sorodstvu: definiciji sta podobni, obnašanje glede na vsoto, produkt... je pri obeh enako, tudi zaporedje ne more imeti dveh limit... V resnici sta obe limiti posebna primera limite preslikave po filtru ([6], str. 110—134). — Pomemben primer konvergentnih zaporedij so omejena naraščajoča (oz. padajoča) zaporedja; vsako tako zaporedje konvergira k svoji natančni zgornji (oz. spodnji) meji — glej četrti odstavek prejšnjega razdelka.

Prepričamo se lahko še, da vsako konvergentno zaporedje zadošča Cauchyjevemu pogoju, kar pomeni: pri poljubnem ε je $|a_m - a_n| < \varepsilon$ za vse dovolj velike m, n ; glej [9], str. 37. Cauchyjev pogoj je za konvergenco tudi zadosten; dokaz opustimo in povemo le, da temelji na Dedekindovem aksiomu. V obsegu racionalnih števil (kjer Dedekindov aksiom ne velja) pa Cauchyjev pogoj ni zadosten za konvergenco zaporedja.* To vidimo npr. pri zaporedju racionalnih približkov za število π : razlika med dvema dovolj poznima členoma je poljubno majhna, vendar zaporedje konvergira le v $\mathcal{R}$, ne pa v $\mathcal{Q}$ — saj je njegova limita π , ki je iracionalno število.

6. Homeomorfizmi in njihova vloga

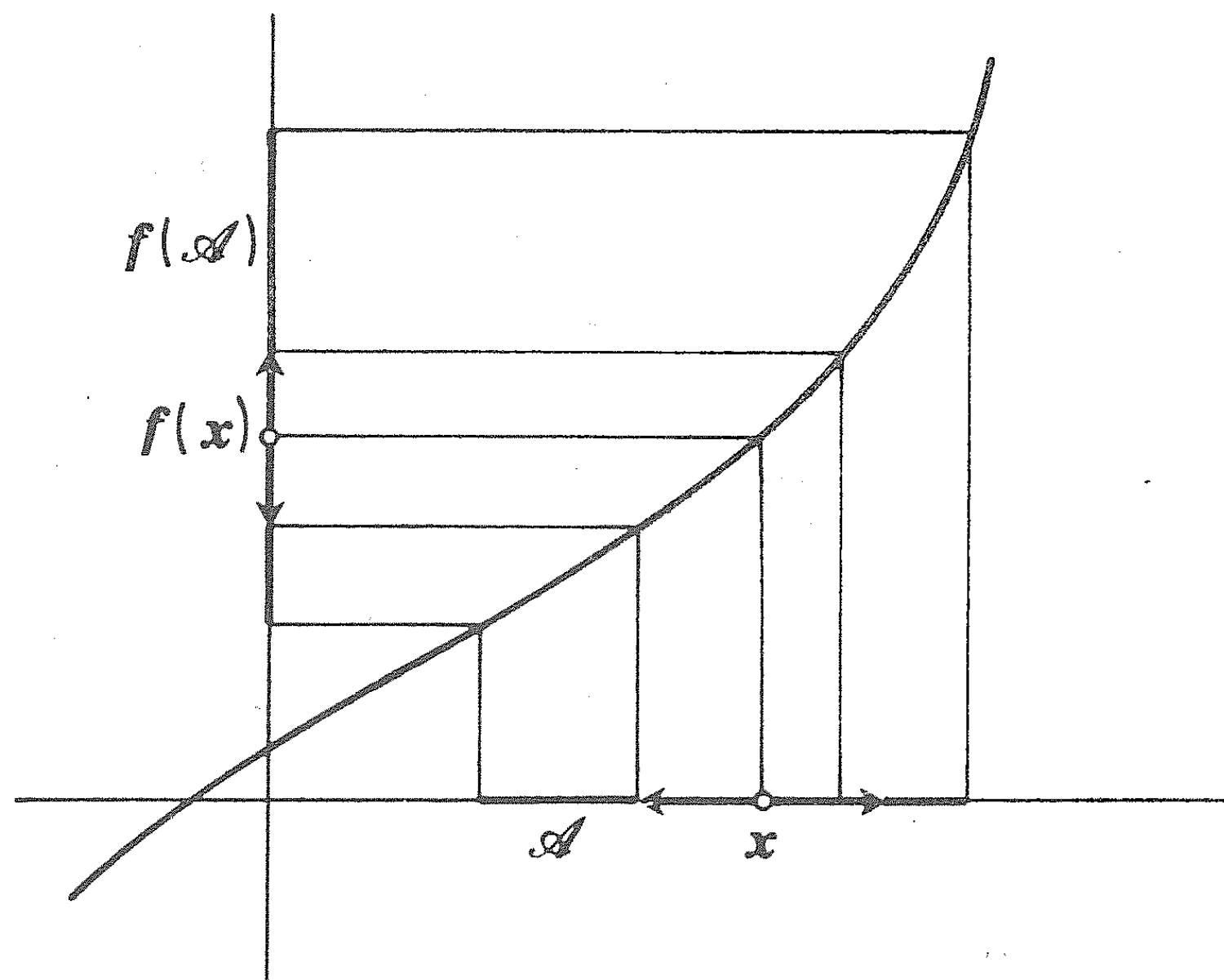
Pri obravnavi zveznih funkcij je koristno, če se posebej ustavimo še pri homeomorfizmih realne osi. Funkcijo $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ imenujemo *homeomorfizem* (realne osi), če je f bijektivna in če sta tako f kakor tudi f^{-1} zvezni funkciji v vseh točkah na $\mathcal{R}$. Če je f homeomorfizem, je seveda f^{-1} prav tako homeomorfizem. Zgled za homeomorfizem je npr. poljubna funkcija oblike $f(x) = ax^n + b$, kjer sta $a, b \in \mathcal{R}$ in je n liho naravno število.

Za vsak homeomorfizem $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ veljajo naslednje ugotovitve. Število $a \in \mathcal{R}$ je limita zaporedja $a_1, a_2, a_3, \dots$ natanko tedaj, ko je $f(a)$ limita zaporedja $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots$. Neki $x \in \mathcal{R}$ je notranja (robna, zunanja) točka za dano množico $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ natanko tedaj, ko je $f(x)$ notranja (robna, zunanja) točka za $f(\mathcal{A})$. Dana množica $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ je odprta (zaprta,

* V $\mathcal{Q}$ se definicija limite glasi enako kot v $\mathcal{R}$: število $a \in \mathcal{Q}$ je limita zaporedja $a_1, a_2, a_3, \dots$ racionalnih števil, če lahko za poljuben ε najdemo tak $n(\varepsilon)$, da je $|a - a_n| < \varepsilon$ za vse $n > n(\varepsilon)$.

povsod gosta, gosta v sebi, kompaktna, povezana) natanko tedaj, kadar velja isto za množico $f(\mathcal{A})$.

O veljavnosti omenjenih trditev se najprej prepričamo nazorno: narišemo graf kakšnega homeomorfizma, nato pa grafično predočimo še posamezne točke oz. množice in njihove slike. Nekaterih trditev tudi ni težko zares dokazati. Primer: naj bo neki $x \in \mathcal{R}$ notranja točka dane množice $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ (sl. 2). Tedaj ima x okolico, ki leži v $\mathcal{A}$. Če je $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ poljuben homeomorfizem, ima $f(x)$ takšno okolico, ki se z f^{-1} preslika v omenjeno okolico za x (upoštevali smo zveznost f^{-1}). Ta okolica točke $f(x)$ zato nujno leži v $f(\mathcal{A})$ in s tem je $f(x)$ notranja točka za $f(\mathcal{A})$. — Ob upoštevanju zveznosti funkcije f pa enako dokažemo obratno trditev: če je $f(x)$ notranja točka množice $f(\mathcal{A})$, je x notranja točka množice $\mathcal{A}$.



Slika 2

Videli smo, kako se pri poljubnem homeomorfizmu realne osi ohranja konvergenca zaporedij, odprtost oz. zaprtost množic itd. Seveda pa marsičesa vsi homeomorfizmi ne ohranjajo: dolžine daljic, skladnosti med daljicami, algebrskih operacij (vsota oz. produkt števil se v splošnem ne preslika v vsoto oz. produkt) ... Ni težko uginiti, kaj se ohranja pri vseh homeomorfizmi: natanko vse tisto, kar je na realni osi topološkega. Homeomorfizem je namreč tudi sam topološki pojem in skriva v sebi pojem okolice oziroma »bližine«: sliki dveh točk sta si »blizu« natanko tedaj, ko sta si blizu točki sami. Torej se ohranja pri vseh homeomorfizmi ravno vse tisto, kar temelji na pojmu »bližine«, to je vse, kar je topološko.

Trditve iz drugega odstavka veljajo (ustrezno prirejene) za poljuben homeomorfizem med dvema (splošnima) topološkima prostoroma. V šoli pa lahko omenimo vsaj njihovo veljavnost za homeomorfizme ravnine kakor tudi trirazsežnega prostora. Pri tem seveda nakažemo, kaj pomeni zveznost pri preslikavah ravnine oz. trirazsežnega prostora. Zgledi za homeomorfizme so poleg raznih gibanj, zrcaljenj in raztegov tudi vse preslikave oblike $F(x, y) = (f(x), g(y))$ oz. $G(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z))$, kjer so f, g, h homeomorfizmi realne osi. — Našo obravnavo sklenemo z ugotovitvijo, da je na realni osi (v ravnini, v trirazsežnem prostoru) topološko vse tisto, kar se ohranja pri vsakem homeomorfizmu realne osi (ravnine, trirazsežnega prostora).

B) NEKAJ VEČ TOPOLOGIJE

1. Za kaj gre

V prvem delu sem nakazal, kako vključiti osnove topologije v pouk matematike v srednji šoli. Pri obdelavi predlagane snovi naj bi dijaki spoznali, kaj je topologija in kakšno je njeno mesto v matematiki. Srečanje s topologijo in s primeri njene uporabe jim lahko pomaga k čimboljšemu razumevanju matematike nasploh.

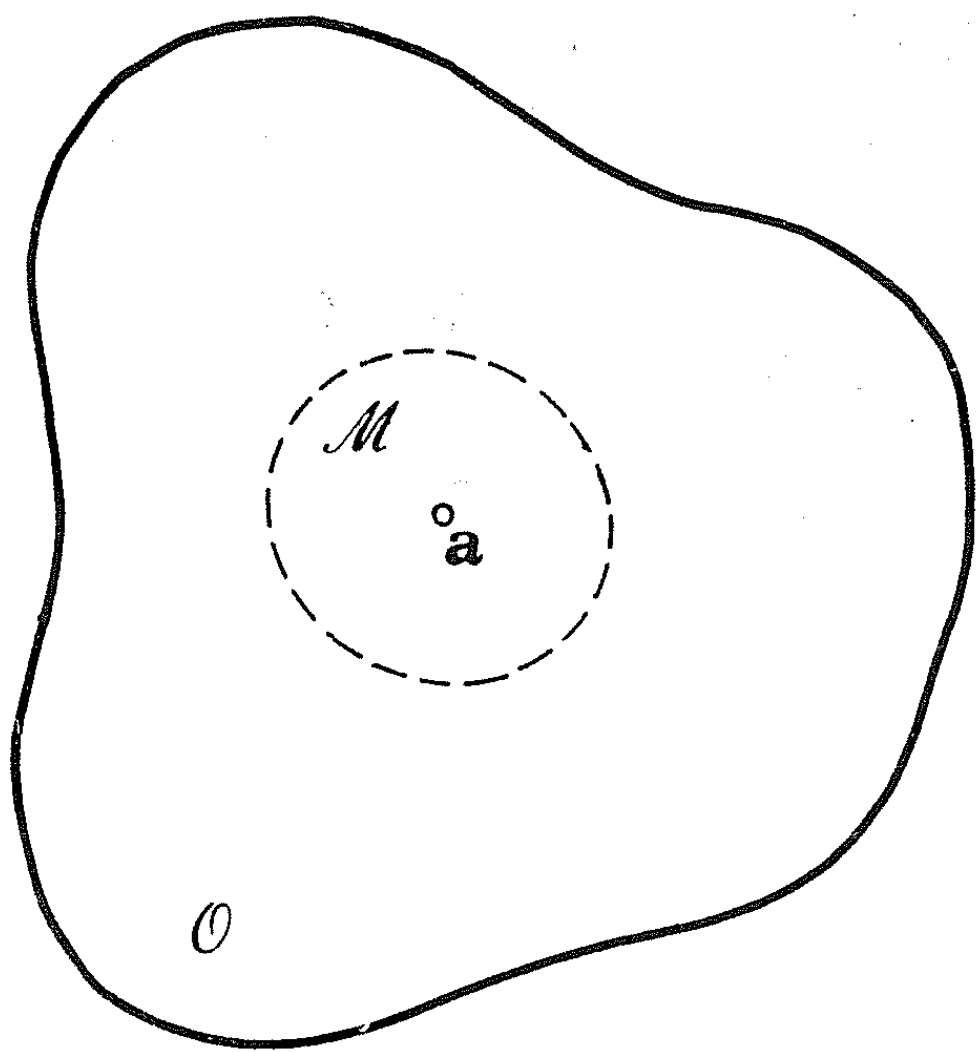
Pri podrobnejši obravnavi topologije kot samostojne teorije — na primer pri matematičnem krožku — pa pride v poštev še snov, navedena v naslednjih razdelkih. Seveda si lahko za obdelavo izberemo tudi le enega teh razdelkov. Pri pomanjkanju časa pa bo dobrodošla vsaj omemba katere od navedenih reči — ob primerni priložnosti.

2. Splošni topološki prostori

Da bi prišli do splošnih topoloških prostorov in njihove aksiomatične vpeljave, si najprej ogledamo lastnosti odprtih in zaprtih množic na premici, v ravnini in v trirazsežnem prostoru. Nekatere teh lastnosti bomo potem vzeli za aksiome topologije. — Podlaga našemu delu je poznavanje topološke snovi, ki sem jo predvidel za 1. razred (glej prvi del, 2. razdelek in peti odstavek 3. razdelka).

Obravnavamo poljubno množico $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, kjer je $\mathcal{U}$ premica, ravnina ali trirazsežni prostor. Z opazovanjem primerov pridemo do ugotovitve: množica $\mathcal{A}$ je odprta (oz. zaprta) natanko tedaj, ko je njen komplement $C\mathcal{A}$ zaprt (oz. odprt). Dokaz te trditve je na dlani, če upoštevamo, da imata $\mathcal{A}$ in $C\mathcal{A}$ isti rob in da vsebujejo zaprte množice ves svoj rob, odprte pa ne vsebujejo nobene svojih robnih točk. — Nato se prepričamo o veljavnosti trditev (A), (B), (C) in (A'), (B'), (C') v [10], str. 4; prav tam najdemo tudi njihove dokaze. (Za nas prihajajo v poštevi prostori $\mathcal{R}^n$ le za $n = 1, 2, 3$.) Povedati moramo seveda, kako je definirana unija (oz. presek) poljubno mnogih (lahko neskončno mnogih) množic. Obravnavo spremljamo z različnimi primeri. Prav je tudi, če pokažemo, da presek nešteti odprtih množic v splošnem ni odprt ($\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1, 1/n) = (-1, 0]$) in da unija nešteti zaprtih množic v splošnem ni zaprta ($\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1] = (0, 1]$).

Naše pojmovanje topologije zdaj posplošimo. Za univerzum $\mathcal{U}$ vzemimo kakršnokoli množico; poljubno družino $\mathcal{T}$ podmnožic iz $\mathcal{U}$, ki zadošča pogojem (A), (B), (C) kot aksiomom, imenujmo *topologijo* v $\mathcal{U}$; posameznim množicam iz $\mathcal{T}$ pravimo odprte množice (zato imenujemo $\mathcal{T}$ tudi družino odprtih množic). Par $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$ se imenuje *topološki prostor*. — Pri danem $\mathcal{U}$ pa topologija ni enolično določena z aksiomi (A), (B), (C); tako lahko iz istega univerzuma $\mathcal{U}$ napravimo več različnih topoloških prostorov — glej primere 1., 2., 3. v [10], str. 8 zgoraj. — Doslej obravnavani prostori (premica, ravnina, trirazsežni prostor) so le posebni primeri splošnih topoloških prostorov. Seveda pa lahko npr. na premici nadomestimo običajno topologijo s kakšno drugo (primeri 1., 2., 3.!) in tako napravimo iz premice topološki prostor, ki je drugačen od doslej obravnavanega.



Slika 3

V poljubnem topološkem prostoru $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$ definiramo zaprte množice kot komplemente odprtih množic. Iz aksiomov (A), (B), (C) izpeljemo — kot preproste izreke — lastnosti (A'), (B'), (C') za družino zaprtih množic. — Okolico dane točke $a \in \mathcal{U}$ imenujemo vsako množico $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$, ki vsebuje takšno odprto množico $\mathcal{M}$, da je $a \in \mathcal{M}$ (slika 3). S tako dobljenimi okolicami pa definiramo pojme: notranjost, rob, zunanost, limita ... na že znani način. — Okolice v tem, splošnejšem smislu lahko seveda vpeljemo tudi pri običajni topologiji na premici, v ravnini in trirazsežnem prostoru. Vendar se izkaže, da so tu prvotne, že znane okolice enakovredne »novim«, splošnejšim okolicam v temle pomenu: topološki pojmi (limita, notranjost...) se prav nič ne spremenijo, če v njihovih definicijah nadomestimo prvotne okolice z »novimi«.

Omenimo še, da lahko sami dobimo preproste primere topoloških prostorov, če za univerzum $\mathcal{U}$ vzamemo kakšno končno množico in nato poiščemo takšne družine njenih podmnožic, ki zadoščajo aksiomom (A), (B), (C). — V ravnini pa dobimo lep primer topologije, če proglasimo za odprte vse ravninske množice $\mathcal{A}$ s tole lastnostjo: za vsako točko $a \in \mathcal{A}$ obstaja odprt trikotnik, ki vsebuje a in leži v $\mathcal{A}$. Veljavnost pogojev (A), (B), (C) sledi

iz geometrijskih aksiomov I. in II. skupine. Za to topologijo očitno nič ne potrebujemo pojma razdalje. Ko pa potem (po IV. skupini aksiomov) vpeljemo v ravnini običajno, nam dobro znano topologijo, se izkaže, da vsebuje slednja natanko tiste odprte množice kot prejle omenjena topologija.

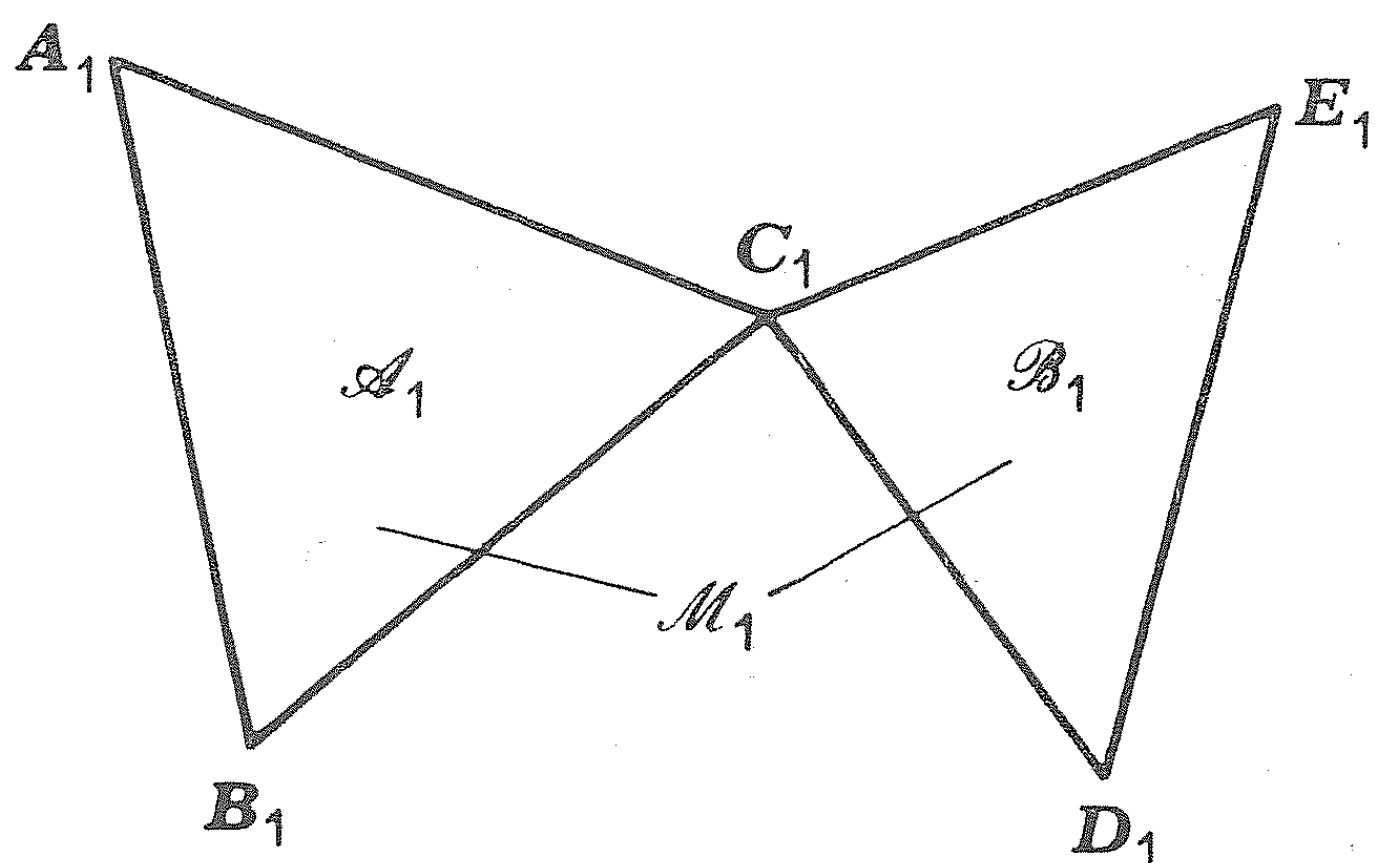
V naslednjih dveh razdelkih se bomo spet — tako kot v prvem delu — omejili na običajno topologijo na premici, v ravnini in v trirazsežnem prostoru.

3. Povezanost

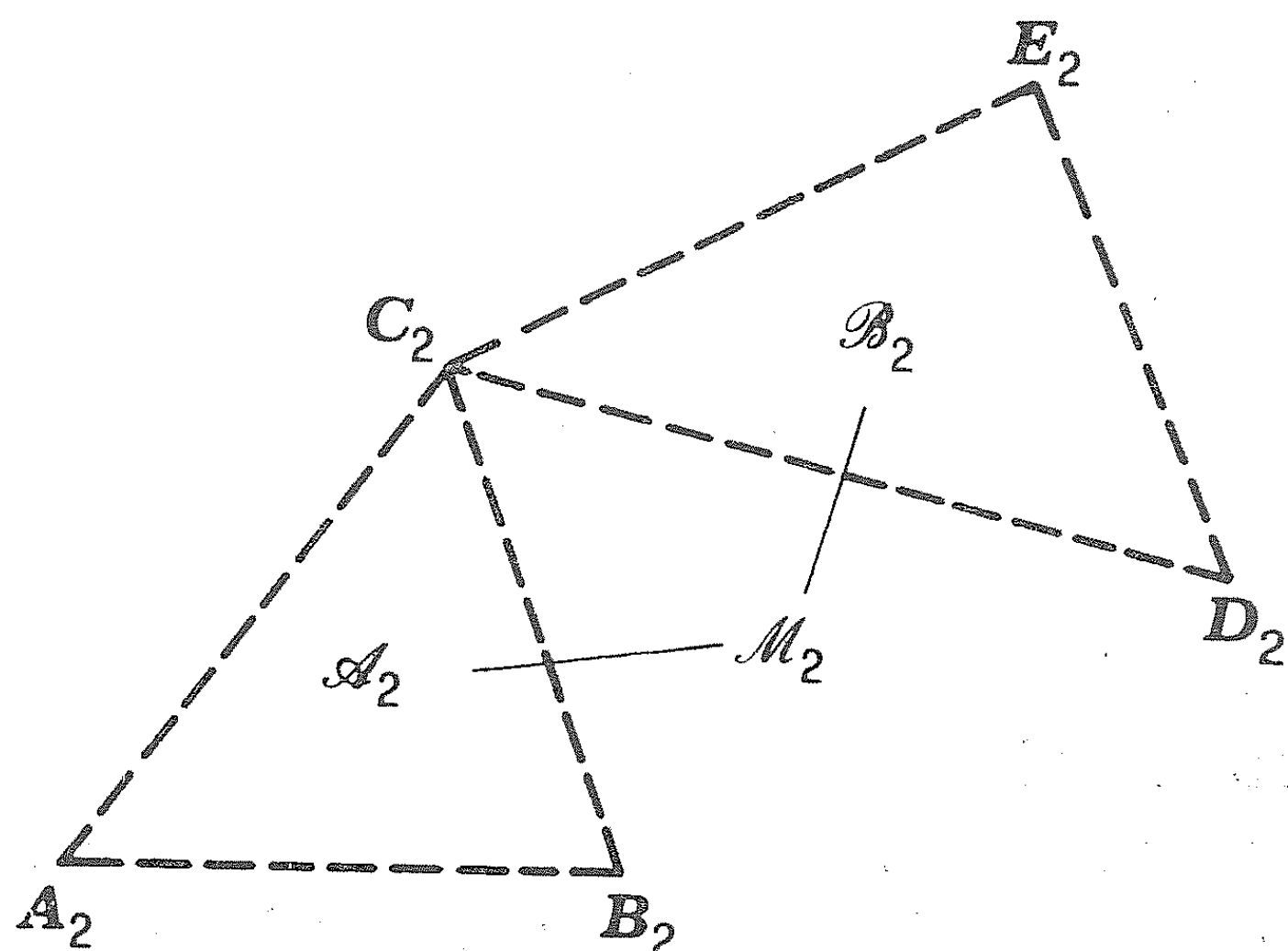
Želimo priti do takšne definicije za povezanost množic, ki bo čim bolj izhajala iz nazrnega pojmovanja povezanosti. Nazorno imamo za povezane tiste množice, ki so »nepretrgane«, to je »iz enega kosa«, za nepovezane pa imamo množice »iz dveh ali več kosov«. — Predmet našega razmišljanja bo poljubna množica $M \subset \mathcal{U}$, kjer je $\mathcal{U}$ premica, ravnina ali trirazsežni prostor. Seveda bomo potrebovali vse znanje topologije, predlagano za 1. razred (glej 2. razdelek prvega dela).

Za neko množico M pravimo, da smo jo *razdelili* na dela $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, če sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ neprazni množici ter je $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = M$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$; rečemo tudi, da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ določata neko *razdelitev* množice M . Med primeri za razdelitve si ogledamo vsaj naslednja dva: $M_1 = [a, b] \cup [c, d]$, kjer je $a < b < c < d$, $\mathcal{A}_1 = [a, b]$, $\mathcal{B}_1 = [c, d]$; $M_2 = [e, f]$, $\mathcal{A}_2 = [e, x)$, $\mathcal{B}_2 = [x, f]$, kjer je $e < x < f$. Množico M_1 smo razdelili na oba njena »kosa«, ki očitno ležita »narazen«; množica M_2 pa je »iz enega kosa« — njena dela $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{B}_2$ sta seveda disjunktna, vendar se očitno »dotikata«.

Izrazoma »dotikati se« in »ležati narazen« damo natančen pomen z naslednjo definicijo. Množica M naj bo razdeljena na dela $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$; oba dela *se dotikata*, če obstaja vsaj ena točka $T \in M$, ki je robna točka tako za $\mathcal{A}$ kakor tudi za $\mathcal{B}$; dela $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ *ležita narazen*, če se ne dotikata. V zgornjem primeru je v $[e, f]$ točka x robna za $[e, x)$ in $[x, f]$; v $[a, b] \cup [c, d]$ pa bi zaman iskali točko, ki bi bila robna hkrati za $[a, b]$ in za $[c, d]$. — Množica M_1 na sliki 4a je unija zaprtih trikotnikov $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{B}_1$ s skupnim ogliščem C_1 ; dela $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{B}_1$ se dotikata, saj je C_1 robna točka za oba. Množica M_2 na sliki 4b pa je unija odprtih trikotnikov $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{B}_2$ s skupnim ogliščem C_2 ; čeprav je C_2 robna točka za $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{B}_2$, ležita $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{B}_2$ narazen, saj C_2 očitno ne spada v M_2 .



Slika 4a



Slika 4b

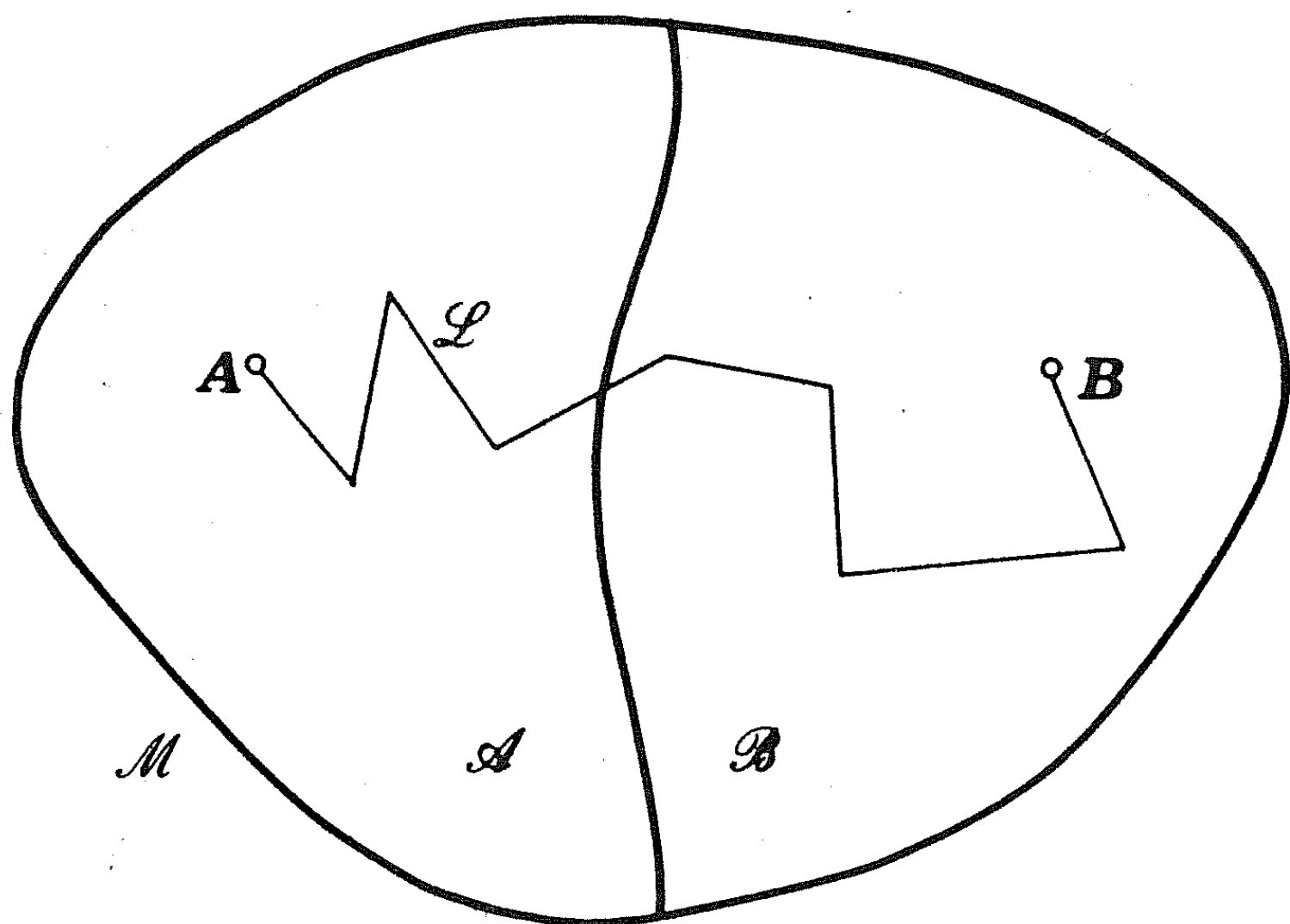
Seveda pa lahko tudi množico »iz dveh kosov« razdelimo na dva dela tako, da se le-ta dotikata. Tako npr. razdelimo unijo $[a, b] \cup [c, d]$ (kjer je $a < b < c < d$) na dela $\mathcal{A} = [a, x]$ in $\mathcal{B} = (x, b] \cup [c, d]$, kjer je $a < x < b$; očitno se $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ dotikata, saj je x robna točka za oba. — Ob tej izkušnji ugotovimo, da je pojem povezanosti smiselno definirati takole: neka množica je *povezana*, če se pri poljubni njeni razdelitvi oba dela dotikata; neka množica je *nepovezana*, če ni povezana, tj. če jo lahko razdelimo tako, da oba dela

ležita narazen. — Izkaže se, da je povezanost oz. nepovezanost dane množice odvisna le od nje same, nič pa od univerzuma, v katerem jo obravnavamo. (Tako je npr. množica $[a, b] \cup [c, d]$, kjer je $a < b < c < d$, nepovezana, naj jo gledamo kot del realne osi ali kot del ravnine ali kot del trirazsežnega prostora.) To spoznanje neposredno sledi iz definicije povezanosti v [10], str. 9, ki je ekvivalentna naši definiciji, vendar je za dijake zahtevnejša — tam namreč obravnavamo posamezno množico kot prostor, opremljen z relativno topologijo.

Lahko je najti najrazličnejše primere nepovezanih množic in se tudi prepričati o njihovi nepovezanosti na podlagi definicije (med temi primeri seveda ne pozabimo na množico celih števil in množico racionalnih števil). Neposredno dokazovanje povezanosti posameznih množic (npr. krogov, trikotnikov...) pa bi bilo zelo težko, saj bi morali pregledati vse možne razdelitve dane množice. Zato se rajši najprej prepričamo o povezanosti daljic in lomljenih črt, to pa nam potem pomaga k preprostemu dokazovanju povezanosti mnogih drugih množic.

Da je poljubna daljica povezana, sledi iz aksioma o zveznosti premice (glej [7], str. 91). Aksiom zagotavlja dotikanje obeh delov pri takšnih razdelitvah daljice, ki so omenjene v predpostavki samega aksioma (točka C je robna za oba dela oz. razreda). Na podlagi aksioma pa je mogoče dokazati, da se tudi pri poljubni razdelitvi daljice oba dela dotikata (dokaz opustimo). — Iz povezanosti daljice sledi povezanost poljubne lomljene (oz. poligonske) črte, saj je taka črta »večkrat nalomljena« daljica in velja tudi zanjo aksiom o zveznosti premice (v primerni obliki).

Pravkar navedena ugotovitev nas pripelje do naslednjega spoznanja. V dani množici $\mathcal{M}$ naj za poljubni točki $A, B \in \mathcal{M}$ obstaja takšna lomljena črta, ki veže točki A in B in ki vsa leži v $\mathcal{M}$. Tedaj je $\mathcal{M}$ povezana množica. — To dokažemo takole. Množico $\mathcal{M}$, za katero



Slika 5

velja navedena predpostavka, razdelimo kakorkoli na dva dela $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Izberemo poljubni točki $A \in \mathcal{A}$ in $B \in \mathcal{B}$ (slika 5). Po predpostavki obstaja lomljena črta $\mathcal{L}$, ki leži v $\mathcal{M}$ in veže A in B . Preseka $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ in $\mathcal{B} \cap \mathcal{L}$ očitno predstavljata neko razdelitev lomljenke $\mathcal{L}$. Ker je $\mathcal{L}$ povezana, se dela $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ in $\mathcal{B} \cap \mathcal{L}$ nujno dotikata. Lahko je videti, da se morata tedaj dotikati tudi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. S tem je množica $\mathcal{M}$ povezana.

Iz dokazanega izreka takoj sledi povezanost premice, ravnine, trirazsežnega prostora in sploh vseh konveksnih množic

(poljubni točki lahko povežemo z daljico). Nadalje uporabimo izrek pri dokazu povezanosti roba trikotnika, zunanosti trikotnika ali kroga... — Žal pa ta izrek odpove npr. pri krožnici. Da je le-ta povezana, »dokažemo« nazorno: krožnico dobimo, če »ukrivimo« rob trikotnika in pri tem se »nič ne pretrga«; za rob trikotnika pa seveda že vemo, da je povezan.

4. Več o zveznosti

Pojem zvezne preslikave (funkcije) je osrednjega pomena za topologijo samo in tudi za njeno uporabo v analizi. Zato je koristno, če dijaki spoznajo poleg zveznih funkcij ene spremenljivke še zvezne funkcije več spremenljivk, pa tudi zvezne preslikave ravnine (ali ene ravninske množice na drugo) itd. Vse to jim bo pomagalo k boljšemu razumevanju pojma zveznosti in njegove vloge v matematiki. Za takšno, splošnejšo obdelavo zveznosti je seveda

potrebno znanje topologije, ki sem ga predvidel za 1. razred. Koristno je tudi, če dijaki že poznajo definicijo in zglede zveznih funkcij na realni osi; v nasprotnem primeru pa vključimo to v našo obravnavo. — Za razumevanje navedene snovi moramo v začetku obdelati oz. ponoviti splošni pojem preslikave $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, njene surjektivnosti, injektivnosti oz. bijektivnosti: glej prvi razdelek v [5].

Naj $\mathcal{U}$ pomeni realno os $\mathcal{R}$ ali ravnino $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ali trirazsežni prostor $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$; podobno naj $\mathcal{V}$ pomeni eno od teh treh. Naj bo $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ poljubna preslikava, pri čemer je $\mathcal{D}$ njeno definicijsko območje in je $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$. Zalogo vrednosti funkcije f označimo z $\mathcal{Z}$; seveda je $\mathcal{Z} \subset \mathcal{V}$. Vzemimo poljubno točko $T_0 \in \mathcal{D}$. Pravimo, da je preslikava f zvezna v točki T_0 , če lahko k vsaki okolici $O(f(T_0), \varepsilon)$ najdemo takšno okolico $O(T_0, \delta)$, da je $f(T) \in O(f(T_0), \varepsilon)$, če je $T \in O(T_0, \delta)$. Pri tem je $O(T_0, \delta)$ okolica točke T_0 v $\mathcal{U}$; kot vemo, je $O(T_0, \delta)$ odprt interval oziroma krog oziroma krogla glede na to, ali je $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ ali $\mathcal{U} = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ali $\mathcal{U} = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Analogno velja za okolico $O(f(T_0), \varepsilon)$ točke $f(T_0)$ v $\mathcal{V}$. Točka T , ki nastopa v definiciji zveznosti, mora seveda ležati v $\mathcal{D}$, njena slika $f(T)$ pa spada v $\mathcal{Z}$. Zato je $T \in O(T_0, \delta)$ natanko tedaj, ko T leži v preseku $\mathcal{D} \cap O(T_0, \delta) = \{T \in \mathcal{D}; \overline{T_0 T} < \delta\}$; prav tako je $f(T) \in O(f(T_0), \varepsilon)$ natanko tedaj, ko $f(T)$ leži v preseku $\mathcal{Z} \cap O(f(T_0), \varepsilon) = \{f(T) \in \mathcal{Z}; \overline{f(T_0)f(T)} < \varepsilon\}$. Za ugotavljanje zveznosti sta torej od okolice $O(T_0, \delta)$ in $O(f(T_0), \varepsilon)$ merodajna le njuna preseka z $\mathcal{D}$ oziroma $\mathcal{Z}$.

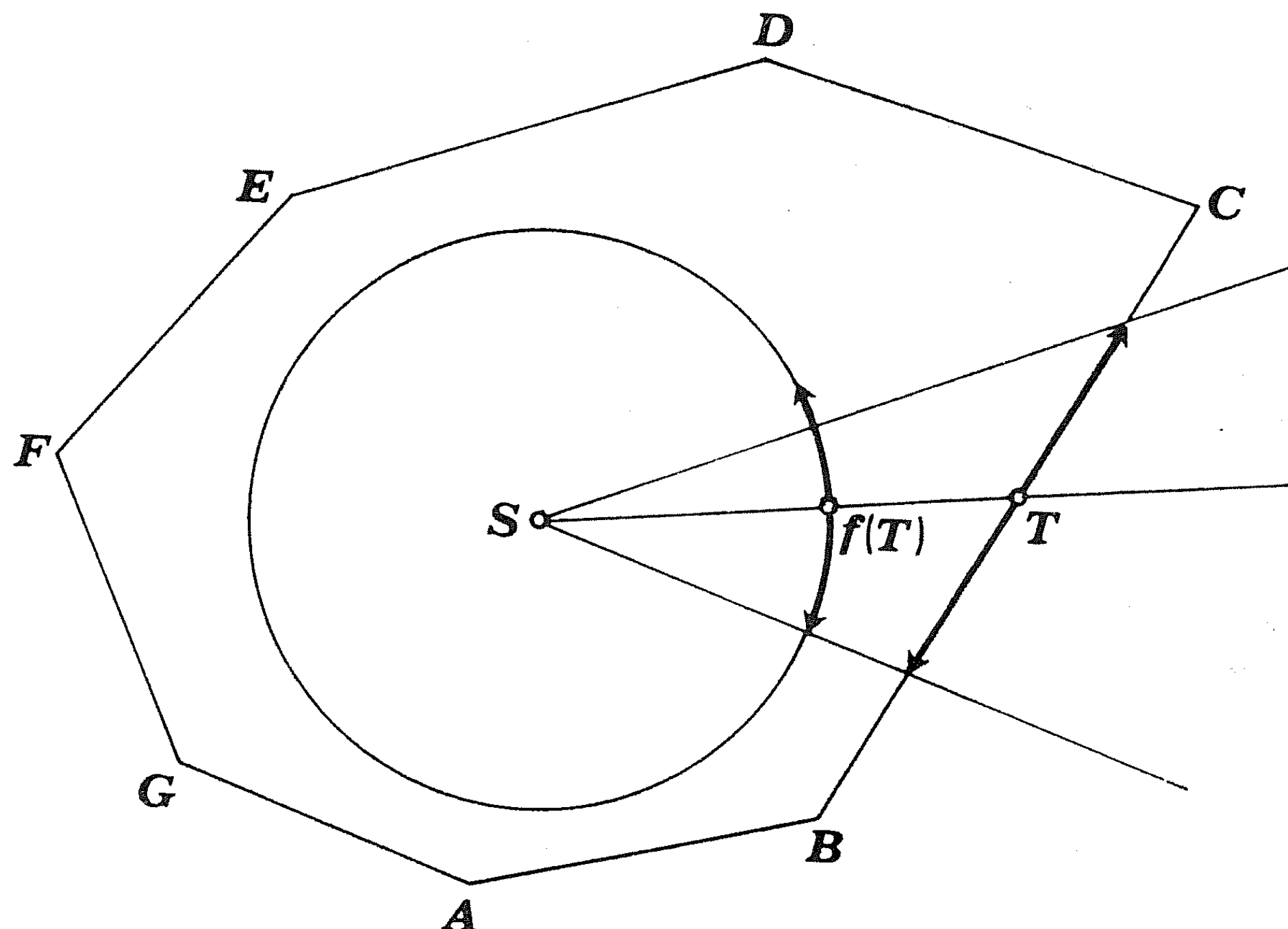
Našo obravnavo razvijamo postopoma, ob posameznih primerih preslikav (funkcij), za katere ugotavljamo, kje so zvezne. Začnemo seveda s preslikavami $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$, kjer je $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$; glej [5], str. 62 in naprej. Nato si ogledamo preslikave $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, kjer je še vedno $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$; glej [5], str. 73, 74. Na podlagi definicije je lahko dokazati, da je funkcija s predpisom $x = a + kt$, $y = b + lt$ zvezna na $\mathcal{R}^*$. Pri funkcijah, kot so: $x = t^2$, $y = 1/t$; $x = \cos t$, $y = \sin t$; $x = \log t$, $y = \sqrt{t} \dots$, pa ugotavljanje zveznosti rajši naslonimo na tole trditev: funkcija $f(t) = (x(t), y(t))$ je v dani točki t_0 zvezna natanko tedaj, ko sta v t_0 zvezni funkciji $x(t)$ in $y(t)$. Da je to res, se prepričamo nazorno — upoštevati moramo le, da se točka $(x(t), y(t))$ bliža točki $(x(t_0), y(t_0))$ natanko tedaj, ko gre $x(t)$ proti $x(t_0)$ in $y(t)$ proti $y(t_0)$. — Podobno kakor funkcije $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ obravnavamo tudi funkcije $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$.

Nato se ukvarjamo s funkcijami dveh oz. treh spremenljivk $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$, kjer je $\mathcal{D} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ oz. $\mathcal{D} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. O njih glej v XII. poglavju [9] (ukvarjamo se samo z enoličnimi funkcijami). Da je vsaka linearna funkcija dveh oz. treh spremenljivk zvezna na vsej ravnini oz. na vsem prostoru, se na podlagi definicije ni težko prepričati. Ogledati si moramo še, kako je z zveznostjo nekaterih drugih funkcij ($f(x, y) = xy$, $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$, $f(x, y, z) = xyz$, $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2) \dots$); natančno dokazovanje je tu zahtevnejše in ga lahko opustimo.

Zdaj pridejo na vrsto preslikave $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, kjer je $\mathcal{D} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Med preslikave, zvezne na vsej ravnini, spadajo razna gibanja, zrcaljenja in raztegi ravnine, kakor tudi pravokotna projekcija ravnine na neko premico v njej; dokazovanje njihove zveznosti nam ne dela težav. Vsako funkcijo $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ lahko tudi zapišemo kot par funkcij dveh spremenljivk; pri tem velja: funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ je zvezna v točki (x_0, y_0) natanko tedaj, ko sta v (x_0, y_0) zvezni funkciji $u(x, y)$ in $v(x, y)$ (glej podobno trditev zgoraj). — Slika 6 nam kaže delovanje preslikave, ki je definirana na robu nekega konveksnega mnogokotnika, njena zaloga vrednosti pa je krožnica, ki leži znotraj mnogokotnika. Dokaz, da je ta preslikava zvezna na vsem robu mnogokotnika, je tudi razviden iz slike (namesto celotnih okolice vzamemo le njuna preseka z robom mnogokotnika oziroma s krožnico — to sta odprta daljica oziroma lok). Preslikavo lahko razširimo do preslikave zaprtega mnogokotnika na zaprti krog, ki ga omejuje omenjena krožnica: poljubno daljico

* Neko funkcijo $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ imenujemo zvezno na $\mathcal{D}$, če je zvezna v vsaki točki iz $\mathcal{D}$.

ST preslikamo linearno na daljico $Sf(T)$. Ta, razširjena preslikava je zvezna na vsem zaprtem mnogokotniku, o čemer se prepričamo nazorno: »bližnji« točki se res preslikata v »bližnji« točki. (Pravi dokaz zveznosti tu opustimo.) — Vsemu temu bi seveda lahko dodali najrazličnejše primere zveznih preslikav, ki imajo definicijsko območje oz. zalogo vrednosti v tri-razsežnem prostoru. V šoli omenimo vsaj preslikavo, analogno tisti s slike 6, pri kateri namesto mnogokotnika in kroga vzamemo konveksen polieder in kroglo v njegovi notranjosti.



Slika 6

Poljubno preslikavo $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ lahko obravnavamo tudi kot preslikavo $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ali $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, saj imamo lahko realno os $\mathcal{R}$ za del ravnine $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ali prostora $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Če je $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$, lahko $\mathcal{D}$ gledamo tudi kot podmnožico v $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ali $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Podobno lahko $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ nadomestimo z $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, če imamo $\mathcal{D} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ oz. $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Vendar zveznost preslikave f v dani točki $T_0 \in \mathcal{D}$ ni nič odvisna od takega ali drugačnega načina gledanja. Resda vzamemo za $\mathcal{O}(T_0, \delta)$ oz. $\mathcal{O}(f(T_0), \varepsilon)$ zdaj interval, drugič krog in tretjič kroglo; vemo pa, da sta za zveznost merodajna le preseka teh okolic z $\mathcal{D}$ oz. $\mathcal{I}$ — preseka sta enaka $\{T \in \mathcal{D}; \overline{T_0 T} < \delta\}$ oz. $\{f(T) \in \mathcal{I}; \overline{f(T_0) f(T)} < \varepsilon\}$, torej nista odvisna od univerzuma, v katerem opazujemo $\mathcal{D}$ oz. $\mathcal{I}$.

Naj $\mathcal{U}$ — in prav tako $\mathcal{V}$ — pomeni realno os, ravnino ali trirazsežni prostor, naj bo $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ in $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ poljubna preslikava; zalogo vrednosti za f označimo spet z $\mathcal{I}$ (seveda je $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$). Naš f lahko obravnavamo tudi kot preslikavo $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{I}$, ki je očitno surjektivna. Preslikavo $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{I}$ imenujemo *homeomorfizem* (množice $\mathcal{D}$ na množico $\mathcal{I}$), če je f bijektivna in zvezna na $\mathcal{D}$ in če je inverzna preslikava $f^{-1}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ zvezna na $\mathcal{I}$. Poljubni množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, kjer je $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ in $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, imenujemo homeomorfni, če obstaja kakšen homeomorfizem množice $\mathcal{A}$ na množico $\mathcal{B}$. Hitro se izkaže, da je odnos homeomorfности ekvivalenčna relacija med množicami.

Med že obravnavanimi zveznimi preslikavami ni težko poiskati homeomorfizme. Nekateri od teh preslikajo realno os (oz. ravnino oz. trirazsežni prostor) nase. Poljubna eksponentna funkcija je homeomorfizem realne osi na poltrak $(0, \infty)$. Predpis $f(x) = x/(1 + |x|)$ določa homeomorfizem realne osi na interval $(-1, 1)$; z analogno formulo dobimo homeomorfizem ravnine (oz. prostora) na odprti enotni krog (oz. kroglo) — glej [10], str. 6, 7 (za nas pride v poštev $n = 1, 2, 3$). Preslikava, ki jo kaže slika 6, je homeomorfizem roba konveksnega mnogokotnika na krožnico, njena razširitev na zaprti mnogokotnik pa je homeomorfizem le-tega na zaprti krog. Od tod sklepamo, da je poljuben zaprt (oz. odprt) konveksen mnogokotnik homeomorfen poljubnemu zaprtemu (oz. odprtemu) krogu — saj sta poljubna zaprta (oz. odprta) kroga med seboj homeomorfna. Slednje lahko dokažejo

dijaki sami, s tem da poiščejo neki homeomorfizem med poljubno izbranimi krogoma. Podobno velja, da sta homeomorfni poljubni zaprti (oz. odprti) krogi in da je poljubna zaprta (oz. odprta) kroga homeomorfna poljubnemu zaprtemu (oz. odprtemu) konveksnemu poliedru. — Omeniti je treba še tole: zgodi se, da za dani množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ dobimo tak homeomorfizem f celotne realne osi (oz. ravnine oz. prostora), ki preslika $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$ (tj. $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$); zožitev f na množico $\mathcal{A}$, $f|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, je tedaj homeomorfizem množice $\mathcal{A}$ na množico $\mathcal{B}$.

Zanima nas še, v katerih lastnostih se morata ujemati poljubni dve homeomorfni množici. Seveda tu ne prihajajo v poštev kakšne kvantitativne lastnosti, saj sta npr. poljubna zaprta (oz. odprta) kroga homeomorfna, kljub različni velikosti. Previdni pa moramo biti tudi pri topoloških značilnostih množic. Da je neka množica $\mathcal{A}$ odprta, zaprta ali povsod gosta, namreč ni odvisno le od $\mathcal{A}$, ampak tudi od univerzuma, v katerem opazujemo $\mathcal{A}$. (Npr. neki interval na realni osi lahko gledamo kot del realne osi ali del ravnine, ki vsebuje realno os, ali tudi kot del trirazsežnega prostora, v katerem omenjena ravnina leži.) Odprtost, zaprtost ali povsod gostost smemo pojmovati kot lastnosti dane množice le, če jo obravnavamo kot del vnaprej izbranega univerzuma. — Nasprotno pa se izkaže, da je gostost v sebi, kompaktnost ali povezanost dane množice odvisna le od same množice, nič pa od univerzuma, v katerem jo opazujemo (to je lahko videti na primerih). Domenimo se, naj odslej izraz »topološka lastnost« pomeni tako, absolutno topološko lastnost dane množice.

Pri obravnavi dveh homeomorfni množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ se vprašamo po njunem ujemanju v topoloških lastnostih, saj navadno gledamo $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ samostojno, ne kot dela kakšnega univerzuma. Obstoj nekega homeomorfizma $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je namreč očitno odvisen le od $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ samih. — Za poljubni homeomorfni množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ velja: $\mathcal{A}$ je kompaktna (povezana, gosta v sebi) natanko tedaj, kadar velja isto za množico $\mathcal{B}$. (Trditev nas ne preseneča, če jo preizkusimo na primerih.) Nasploh velja: pri odnosu homeomorfности se ohranjajo ravno vse topološke lastnosti množic. To je razumljivo, saj homeomorfizmi ohranjajo vse, kar temelji na pojmu »bližine«, to je vse topološko. Pri tem pa gre seveda le za (absolutne) topološke lastnosti množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, saj je neki homeomorfizem $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ v splošnem definiran samo na $\mathcal{A}$ in zato »ve« le za to, kar je odvisno od $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ samih.

Ujemanje dveh homeomorfni množic glede njune povezanosti uporabimo npr. pri dokazu, da je poljubna krožnica povezana: upoštevati je le treba, da je krožnica homeomorfna robu nekega trikotnika in da je rob trikotnika povezan. (To smo — v nazorni obliki — nakazali že na koncu prejšnjega razdelka.) — Ujemanje homeomorfni množic v njunih topoloških lastnostih nam tudi pomaga pri ugotavljanju oz. dokazovanju, da kakšni množici nista homeomorfni. Tako npr. disjunktna unija zaprtih krogov (ki ni povezana) ne more biti homeomorfna nekemu zaprtemu krogu; noben zaprt interval ni homeomorfen realni osi, saj le-ta ni kompaktna; množica celih števil ni gosta v sebi, torej ni homeomorfna niti realni osi niti kakšnemu intervalu.

Opazujmo zdaj podmnožice izbranega univerzuma $\mathcal{U}$ (ki je realna os, ravnina ali tri-razsežni prostor). Naj bosta $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ in $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ homeomorfni množici. Vemo že, da se $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ujemata v svojih topoloških lastnostih. Vprašamo pa se še: ali je množica $\mathcal{A}$ odprta (zaprta, povsod gosta) natanko tedaj, ko velja isto za množico $\mathcal{B}$? Odgovor na vse to je pozitiven, če obstaja tak homeomorfizem vsega univerzuma, $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, da je $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$. (Glej 6. razdelek prvega dela.) — Vzemimo zdaj $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ in $\mathcal{B} = (-1, 1)$ kot podmnožici v $\mathbb{R}$. Vemo, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ homeomorfna, vendar je $\mathcal{A}$ očitno zaprt v $\mathbb{R}$, tj. v samem sebi, $\mathcal{B}$ pa ni zaprta množica. Tudi je $\mathcal{A}$ povsod gosta množica, $\mathcal{B}$ pa ne. Zaprtost in gostost povsod se tu ne ohranita, a to ne nasprotuje prejšnji trditvi: v našem primeru namreč ne moremo najti homeomorfizma, ki bi preslikal $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ in hkrati $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ na $\mathcal{B} = (-1, 1)$. Lahko rečemo: če med homeomorfni množicama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ posreduje le neki homeomor-

fizem $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, ne pa kak homeomorfizem vsega $\mathcal{U}$, ne moremo pri $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pričakovati ujemanja v rečeh, ki so odvisne tudi od $\mathcal{U}$. — Vendar velja tu izrek, ki je nekakšna izjema: če sta množici $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ in $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ homeomorfni, je $\mathcal{A}$ odprta v $\mathcal{U}$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{B}$ odprta v $\mathcal{U}$. Gre za *Brouwerjev izrek* ([10], str. 7), katerega dokaz je težak in ki ni posledica definicije homeomorfizma; ta izrek namreč velja le v evklidskih prostorih in temelji na njihovih posebnih lastnostih.

Janez Rakovec

LITERATURA

- [1] Boltjanski-Efremović, *Što je topologija*, Zagreb, Školska knjiga 1973.
- [2]—[5] F. Križanič, *Aritmetika, algebra in analiza za gimnazije I—IV*, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1968—1971.
- [6] N. Prijatelj, *Matematične strukture III*, Sigma, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1972.
- [7] I. Pucelj — I. Štalec, *Geometrija za I. razred gimnazije*, Maribor, Založba Obzorja 1970.
- [8] I. Pucelj — I. Štalec, *Geometrija za II. razred gimnazije*, Maribor, Založba Obzorja 1970.
- [9] I. Vidav, *Višja matematika I*, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1973.
- [10] I. Vidav, *Splošna topologija*, Obzornik mat. fiz., 23 (1976) 1—16.

UTRINEK

KAKO FIZIKI DOKAZUJEJO PITAGOROV IZREK

Če bi bil *Pitagora* fizik po duši, bi morebiti modroval takole:

»Če sta *hipotenuza* in *ostri kot* enega *pravokotnega* trikotnika enaka *hipotenuzi* in *ostremu kotu* drugega *pravokotnega* trikotnika, sta trikotnika enaka; to pa pomeni, da hipotenuza in ostri kot popolnoma določata pravokotni trikotnik.

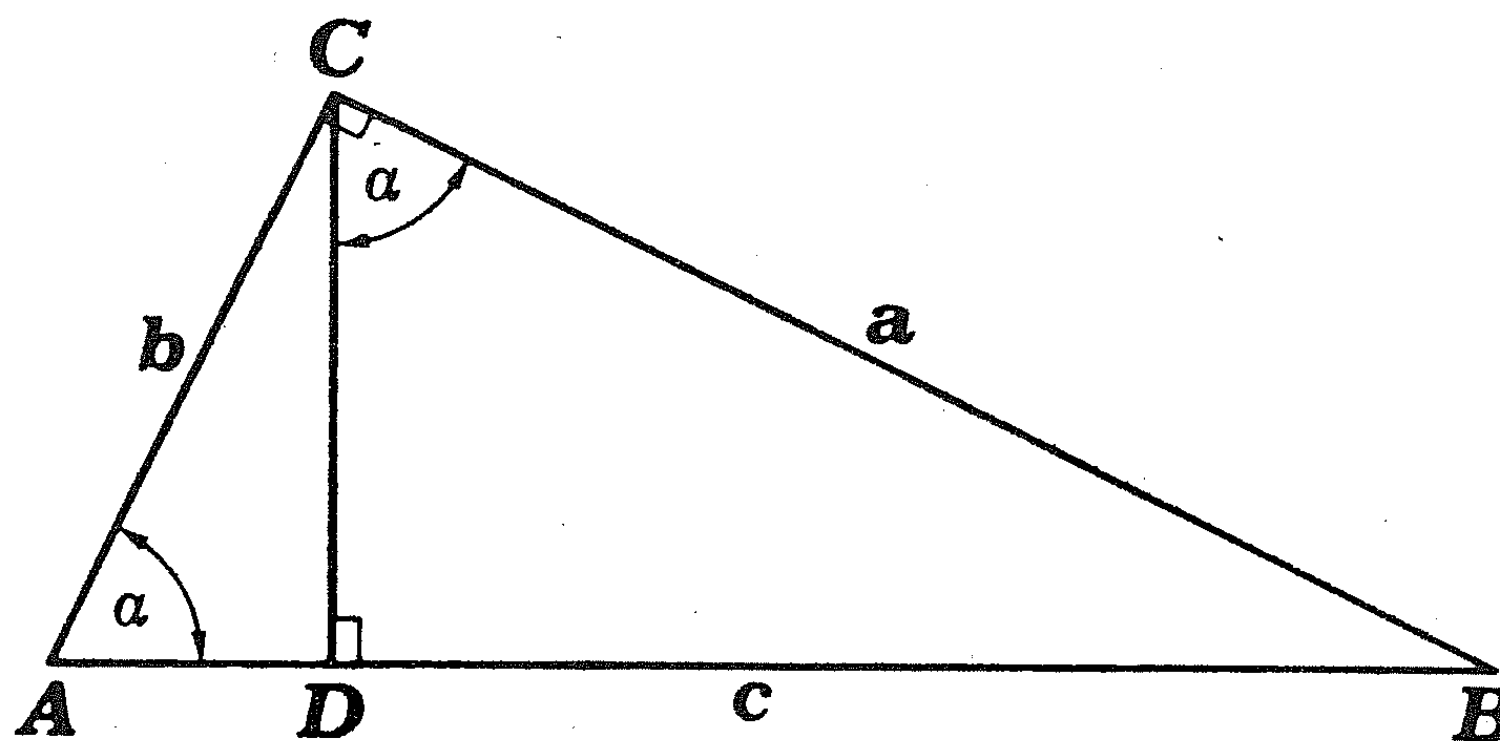
Iz našega sklepanja sledi, da lahko *ploščino* trikotnika ABC zapišemo kot produkt kvadrata hipotenuze c in funkcije kota α : $c^2 f(\alpha)$. Analogno operacijo napravimo za *podobne* trikotnike ADC in BCD , v katerih vlogo hipotenuze igrata kateti izhodnega trikotnika. Ker je ploščina trikotnika ABC enaka ploščini trikotnikov ADC in BCD , je

$$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha)$$

kjer je pač $f(\alpha)$ brezdimenzionalna funkcija kota α . Odtod dobimo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

in izrek je pred nami.«



po reviji KVANT povzel
Dušan Repovš

27. REDNI OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

27. redni občni zbor društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je bil dne 13. 12. 1975 na gradu Borl pri Ptuju v organizaciji ptujske podružnice društva. Udeleženci so se večinoma zbrali že dan prej. Dopoldanski čas so porabili za ogled ptujskega gradu, kleti in drugih znamenitosti, popoldne pa je bil krajši seminar. Predavali so: prof. A. Suhadolc o Fourierovih vrstah, prof. J. Strnad o novostih iz fizike, A. Čadež pa o novostih iz astronomije. Kljub mrzli dvorani — zaradi okvare na transformatorju je odpo vedala centralna kurjava — so udeleženci vzdržali. Po večerji, ko se je temperatura dvignila, pa se je razvil prijeten večer.

Občnega zbora se je udeležilo 117 članov. Po določilih o sklepčnosti se je pričel zbor pol ure po napovedanem času. Zbor je začel predsednik društva prof. N. Prijatelj, ki je predlagal v delovno predsedstvo prof. J. Strnada, prof. M. Potisek in prof. B. Tonejca. V imenu skupščine občine Ptuj je zbor pozdravil ing. S. Debeljak. Razdeljena so bila društvena priznanja učiteljem za delo z mladimi. Priznanja za leto 1975 so prejeli Angela Blaznik, profesorica matematike in fizike na II. gimnaziji v Ljubljani, Jože Kotnik, predmetni učitelj matematike in fizike na osnovni šoli Zvonka Runka v Ljubljani, Nikolaj Kontler, predmetni učitelj matematike na gimnaziji pedagoške smeri v Mariboru in Viljem Sladič, profesor matematike in fizike na tehniški srednji šoli v Ljubljani.

Ker so člani dobili tiskano poročilo o delu društva v preteklem letu že pred občnim zborom, so bila poročila odbornikov kratka in je zbor lahko hitro prešel na razpravo in sklepanje.

Zbor je na predlog upravnega zbora sprejel:

- finančni načrt za leto 1976
- sklep, da bo za leto 1976 članarina 20 din in naročnina za Obzornik 100 din
- osnutek prenovljenega pravilnika društva in pooblastilo upravnemu odboru, da vnese v pravilnik potrebne spremembe
- sklep, da društvo vstopi v Zvezo društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije. Društvo MFA Slovenije ostane enotno, tudi če se druga republiška društva razcepijo po strokah.

Po poročilu nadzornega odbora je zbor sprejel razrešnico upravnega odbora. Delovni predsednik prof. J. Strnad je podal predlog za novi upravni odbor. Razen nekaterih so vsi člani prejšnjega UO izrazili pripravljenost, da ostanejo v UO še eno leto. Občni zbor je soglasno izvolil novi odbor v sestavi:

predsednik: Niko Prijatelj

podpredsednik: Dušan Modic

tajnik: Marjan Hribar

blagajnik: Agata Tiegel

člani: Gabrijel Tomšič, Martina Koman, Mirko Dobovišek, Zvone Trontelj, Jože Povšič, Alojzij Vadnal, Milica Potisek, Pavle Zajc, Albina Rebolj, Peter Sekolonik

Izvoljeni so bili tudi člani komisij in sekcij društva:

Komisija za pedagoško dejavnost: tajnik: Martina Koman

člani: Aleksander Cokan, Marija Jemec, Neda Kotnik, Matilda Lenarčič, Tatjana Markelj, Ivan Pavliha, Miha Štalec, Rado Torkar, Jože Vogrinec, Pavle Zajc

Komisija za tisk: predsednik: Gabrijel Tomšič

podpredsednik: Janez Strnad

tajnik: Ciril Velkovrh

blagajnik: Janez Markelj

člani: Anton Suhadolc, Peter Petek, Jože Kotnik

Uredniki: glavni urednik: Gabrijel Tomšič

tehnični urednik: Ciril Velkovrh

Odgovorni uredniki:

OMF: Janez Strnad

PRESEK: Peter Petek

SIGMA: Ivan Vidav

MATEMATIKA-FIZIKA: France Križanič

Izbrana poglavja iz matematike: Ivan Vidav

Izbrana poglavja iz fizike: Janez Strnad

Postdiplomski seminar iz matematike: France Križanič

Uredniški odbori — člani:

OMF: France Avsec, Robert Blinc, France Kvaternik, Jože Lep, Anton Moljk, Jože Pahor, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc, Ivan Vidav

Presek: Vladimir Batagelj, Jože Dover, Tomaž Fortuna, Pavel Gregorc, Andrej Kmet, Ljubo Kostrevc, Jože Kotnik, Matilda Lenarčič, Biserka Mikoš, Franc Oblak, Tomaž Pisanski, Tomaž Skulj, Marjan Vagaja, Marjan Hribar (fiz.), Andrej Čadež (astr.)

Knjižne izdaje: matematika: Rajko Jamnik, Alojzij Vadnal, Ivan Vidav, France Križanič;
fizika: Ivan Kuščer, Janez Strnad, Mitja Rosina

Sekcija za bibliografijo: Jože Povšič

Sekcija za terminologijo: Alojzij Vadnal

Sekcija za znanstveno in aplikativno dejavnost na področju fizike: Zvone Trontelj, Janez Stepišnik

Sekcija za znanstveno in aplikativno dejavnost na področju matematike: Albina Rebolj, Marko Kranjc

Študentska sekcija: Zvonko Duplančič (ma II.), Peter Sekolonik (fi III.)

Komisija za popularizacijo: tajnik: Mirko Dobovišek (ma) in Bojan Golli (fi)

Komisija za Plemljev dom: Majda Andolšek, Zvonimir Bohte, Janez Markelj, Davorin Tomažič in Ciril Velkovrh.

V nadaljnji razpravi je bila izražena želja, da bi društvo bolj aktivno pritegnilo učitelje matematike in fizike na osnovnih šolah. Po končani razpravi se je predsednik novega upravnega odbora prof. Prijatelj zahvalil prisotnim za izkazano zaupanje, organizatorjem — članom podružnice v Ptuj, zlasti prof. Tonejcu — pa za trud pri pripravi občnega zbora. Predsednik delovnega predsedstva prof. Janez Strnad je zaključil občni zbor približno ob 11.30. Za precejšnje število članov pa se je občni zbor končal sredi lepe zimske narave v Poštarskem domu na Pohorju.

Marjan Hribar

FINANČNO POROČILO KOMISIJE ZA TISK pri DMFA SRS
za leto 1975 od 15. 11. 1974 do 15. 11. 1975

Tudi v tem letu se je promet pri Komisiji za tisk močno povečal (35%). Kratek pregled po posameznih partijah je naslednji:

	Dohodki	Izdatki	Saldo
Obzornik za matematiko in fiziko	284.688,30	250.242,60	+ 34.445,70 ¹⁾
Presek	499.747,20	332.094,55	+167.652,65 ²⁾
Matematika-Fizika	221.824,35	169.478,90	+ 52.345,45 ³⁾
Sigma	215.666,50	225.299,35	— 9.632,85 ⁴⁾
Postdiplomski seminar	17.029,10	17.029,10	0
Izbrana poglavja iz matematike	40.588,75	43.069,00	— 2.980,00 ⁵⁾
Izbrana poglavja iz fizike	54.341,00	44.069,00	+ 10.272,00 ⁶⁾
Publikacije IMFM	18.903,60	18.903,60	0
Publikacije DMFA SRS	12.961,00	12.961,00	0
Učbeniki za srednjo šolo	93.757,00	93.757,00	0
Prodaja knjig in skript	507.852,90	586.416,85	— 79.563,95 ⁷⁾
10% režija	182.233,95	138.465,60	+ 43.768,35 ⁸⁾
Skupaj	2.149.593,65	1.932.286,30	+217.307,35
Dolg odseku za matematiko	33.092,20		+ 33.092,20 ⁹⁾
Plemljev muzej	62.000,00	39.354,30	+ 22.645,70
Plemljev dom	97.669,50	39.462,95	+ 58.206,55 ¹⁰⁾
Skupaj	2.342.355,35	2011.103,55	+331.251,80
			Saldo na ŽR dne 15. 11. 1975

¹⁾ ²⁾ Podrobna razčlenitev dohodkov in izdatkov za obe reviji je takale:

Dohodki:	Obzornik mat. fiz.	Presek
Saldo 1974	— 26.002,90	+ 48.000,00
Republiška izobraževalna skupnost za 1974	12.590,00	40.000,00
za 1975	20.000,00	40.000,00
Raziskovalna skupnost SRS za 1974	33.400,00	
70% za 1975	49.000,00	70.000,00
za seminar 1975	25.113,00	
Temeljne izobraževalne skupnosti		17.125,00
Izvršni svet SRS za 1974	4.787,00	
Republiški sekretariat za urbanizem		20.000,00
Razno	4.500,00	4.500,00
Naročnine	135.298,30	260.122,20
Skupaj dohodki	258.685,40	499.747,20

Izdatki:

Tiskarski stroški	132.911,40	222.624,00
Avtorski honorarji	66.397,40	79.405,15
Akontacija članarine DMFA	5.000,00	
10% režija	19.930,90	30.065,40
Skupaj izdatki	224.239,70	332.094,55
Saldo	34.445,70*)	167.652,65**)

Število naročnikov v šolskem letu 1975/76 se je povečalo:

	Obzornik		Presek
člani	} 939	posamezniki	485
nečlani			
študenti	179	dijaki	15229
ustanove	86	ustanove	155
zamenjava	103		22
darila	18	darila	85
Skupaj	1325		15976

³⁾ S temi sredstvi smo do konca leta 1975 plačali še avtorske honorarje za Višjo matematiko III.

⁴⁾ Primanjkljaj smo pokrili z avtorskimi honorarji, ki nam jih je bila dolžna DZS.

⁵⁾ Do konca leta 1975 smo dobili od FNT 2.000,00 in od URC 980,00.

⁶⁾ Sredstva smo porabili za ponatis skript Moderne fizike I. del.

⁷⁾ Ta znesek nam je bila dolžna Mladinska knjiga.

⁸⁾ Sredstva so namenjena za režijske stroške za zadnje četrletje 1975 in prvo četrletje 1976.

⁹⁾ Odsek je ta sredstva namenil za subvencioniranje univerznih učbenikov.

¹⁰⁾ Republiška konferenca SZDL je za Plemelj dom nakazala še 50.000,00

V letu 1975 smo prodali:	število knjig	v vrednosti din
Sigma	10.880 ¹⁾	203.783
Matematika	722	88.800
Izbrana poglavja iz matematike	1.085 ²⁾	32.456
Univerzna skripta	733	13.457
Druga skripta	1.653 ³⁾	20.785
Spominske publikacije (J. Vega in J. Plemelj)	513	1.215
Razne knjige	224	11.563
Skupaj	15.810	372.059

¹⁾ 9.608 teh knjig je Logaritemskih tabel. Prodaja drugih knjig upada.

²⁾ Predvsem Fortran.

³⁾ Zbirka rešenih nalog iz aritmetike, algebre in analize za 4. razred gimnazij in Zbirka nalog za 8. razred osnovnih šol.

* Do konca leta 1975 smo plačali tisk in avtorske honorarje za 6. številko (30.000.—), dobili pa smo še 21.000,00 od RSS.

** Plačali smo še ponatis 1. št. (25.000,00), tisk in avtorske honorarje za 2. št. (70.000.—), dobili pa smo še 30.000,00 od RSS.

Vrednost našega imetja je naslednja:		Skupaj
Gotovina: v ročni blagajni	707,80	
na žiro računu	331.251,80	331.959,60
Dolžniki:		
Obzornik za matematiko in fiziko	27.725,00 ¹⁾	
Presek	163.348,00 ²⁾	
Sigma in druge knjige	177.484,50 ³⁾	
Avtorski honorarji DZS	123.000,00	
Subvencije RSS	92.000,00	583,557,50
Zaloga 38.192 knjig		615.885,00
Skupaj		1.531.402,10

¹⁾ Vrednost starih dolgov (1974 in nazaj) je le 10.000 din.

²⁾ Za drugi letnik je dolgov samo 2.948 din.

³⁾ Največji dolžnik je bila Mladinska knjiga (140.000 din); vsoto pa nam je do konca leta 1975 že nakazala.

Janez Markelj

POROČILO O MATEMATIČNEM SEMINARJU TOPOLOGIJA

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS je letos od 5. do 7. februarja za učitelje matematike na srednjih šolah organiziralo matematični seminar z naslovom Topologija. Pri organiziranju seminarja so sodelovali še odsek za matematiko ljubljanske univerze, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Inštitut Jožef Stefan in Zavod za šolstvo SRS. Že ustaljene sheme naših seminarjev nismo spreminjali. Strokovni del so pod vodstvom dr. Jožeta Vrabca pripravili na odseku za matematiko, za metodični del je poskrbel Zavod za šolstvo.

Letos so bila predavanja že pred seminarjem natisnjena v Obzorniku. Zato so udeleženci seminarja lažje sledili predavanjem, saj jim snov ni bila tuja, predavatelji pa so lahko težji in daljši dokaz takega izreka pri predavanju opustili. Ivan Vidav nas je v predavanju Splošna



Udeleženci seminarja ob zaključku seminarja pred vhodom v zgradbo IMFM v Ljubljani

topologija seznanil z osnovnimi pojmi topologije: z odprtimi in zaprtimi množicami, z zveznimi preslikavami, povezanimi in kompaktnimi prostori in na koncu še s homeomorfijo med enotno kroglo in omejeno zaprto konveksno množico z vsaj eno notranjo točko. Peter Petek je obravnaval fundamentalno grupo topološkega prostora. Po definiciji poti v prostoru je vpeljal še ekvivalenčno relacijo med potmi — homotopnost. Poseben primer poti so pentlje; fundamentalna grupa je množica homotopskih razredov pentelj z isto bazno točko. Kot primer je obdelal fundamentalno grupo krožnice; ta je izomorfna grupi celih števil. Jože Vrabec je v predavanju obravnaval ploskve. Čeprav se s pojmom ploskve srečamo že v osnovni šoli, stroga definicija ploskve ni enostavna. Navedel je nekaj lastnosti ploskev, se dalj časa ustavil ob orientabilnosti ploskve. Zanimivi so bili primeri orientabilnih in neorientabilnih ploskev. Končal je s topološko klasifikacijo sklenjenih in kompaktnih ploskev z robom. Strokovni del seminarja je zaključilo predavanje Franceta Križaniča o topološki dinamiki. S primeri iz fizike je avtor popestril predavanje, pri posebnem primeru dinamičnega sistema v faznem prostoru pa je pokazal, da se dajo rešitve s pridom uporabiti v gimnaziji.

Metodični del seminarja sta izpolnili dve predavanji. Janez Rakovec je govoril o topologiji v srednji šoli. Sistematično je obdelal tista poglavja, pri katerih se srečujemo s topologijo v srednjih šolah. Z osnovnimi pojmi topologije kot okolica, notranjost, rob, zunanost se srečamo že v prvem razredu, najbolj sistematično pa pojme iz topologije obdelamo v četrtem razredu pri obravnavi lastnosti funkcij kot limita funkcije, zveznost funkcije, limita zaporedja.

Drugo popoldansko predavanje je imel Stanko Uršič: O pouku matematike v srednji šoli. Najprej je govoril o organizacijski shemi usmerjenega izobraževanja, o predvideni razporeditvi ur za matematiko v prvih dveh letih. Za prvi dve leti po osnovni šoli bo značilna skupna programska osnova, vendar že s primarnimi programskimi usmeritvami. Za zadnji dve leti srednjih šol predvideva slovenski predlog pet usmeritev. Tu bodo imele mesto dosedanje poklicne, tehniške, ekonomske, umetniške šole in gimnazije. Poudaril je, da mora ta reforma ohranjati tisto, kar je v šolah že sedaj dobro urejeno. V razpravi je bilo čutiti nevoljo zaradi naglice, s katero se ta reforma uvaja, zlasti še, ker gre za bistveno organizacijsko reformo srednjih šol. Mnenje je bilo, da je snov iz matematike pretežka za neizbran sestav učencev. Prav tako bo treba pravočasno poskrbeti ne samo za učbenike, ampak tudi za druge učne pripomočke za boljši pouk matematike (npr. teste, vprašalne pole za individualni diferencirani pouk). Za zdaj komisija pri Zavodu za šolstvo pripravlja osnutek učnega načrta iz matematike. Za ves obseg dela, ki spremlja reformo, je to premalo.

Na koncu še nekaj statistike. Na seminarju je bilo 85 udeležencev iz 46 šol. Večinoma so to učitelji matematike na srednjih šolah, letos je bilo na seminarju tudi šest kolegov iz Trsta, od tega trije ves čas. Morda so prav podaljšane zimske počitnice na nekaterih šolah prispevale k lepi udeležbi. Nekateri učitelji so tožili, da je bilo za ravnatelje obvestilo v Obzorniku premalo, zahtevali so bolj uradno sporočilo Zavoda za šolstvo. Vabila smo poslali Zavodu za šolstvo (res dokaj pozno) z željo, da jih s priporočilom pošljejo vodstvu šol, žal pa jih šole niso dobile.

V anketi so udeleženci seminarja pohvalili dobro organiziranost, zlasti vnaprej natisnjena predavanja. Prav zato je bilo manj pripomb na previsok nivo predavanj. Največ udeležencev je za naslednji matematični seminar predlagalo uvod v matematično logiko.

Že tradicija je, da k seminarju spada tudi družabni večer. Kar precej nas je bilo v restavraciji Slavija, tako da je bila rezervirana soba skoraj premajhna. Razpoloženje ni bilo nič matematično resno, niti nas ni preveč motilo to, da smo znova ugotavljali, da nismo samo matematiki na Slovenskem »redko posejane rožce«, ampak so tudi natakari že prava redkost.