IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

R-17776-1/2

ODPISANO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1976
Letnik 23
1—2

23. LETNIK — ŠTEVILKA 1—2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 1976

Glavni urednik: Gabrijel Tomšič; **odgovorni urednik:** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, Institut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Berto Žitko.

Naročnina: za posameznike 120.— din (za člane društva je že vračunana članarina 20.— din, za dijake in študente 50.— din, za ustanove in podjetja 150.— din, za tujino 10 $ = 170.— din, posamezna številka 20.— din, dvojna številka 40.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS,** 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 61-564/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 50100-620-107-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1600 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

VSEBINA

Članki Stran

Splošna topologija (Ivan Vidav) 1

Fundamentalna grupa topološkega prostora (Peter Petek) 11

Ploskve (Jože Vrabec) 31

Topološka dinamika (France Križanič) 51

Domače vesti

Vabilo na seminar iz topologije (Martina Koman) III

Nove knjige IV

CONTENTS

Article Page

General topology (Ivan Vidav) 1

The fundamental group of a topological spaces (Peter Petek) 11

Surffaces (Jože Vrabec) 31

Topological dynamics (France Križanič) 51

Home news III

New books IV

Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 1/2

R-1771/76

SPLOŠNA TOPOLOGIJA

IVAN VIDAV

Ymw 8686p

AMS Subj. Class. (1970): 54-01, 54 D 05

Članek obravnava osnovne pojme splošne topologije: odprte in zaprte množice, zvezne preslikave, povezane prostore in kompaktne prostore.

GENERAL TOPOLOGY

This is an elementary exposition of the basic notions of the general topology: open and closed sets, continuous maps, connected spaces and compact spaces.

1. **Evklidski prostori.** V običajnem prostoru je lega točke določena s tremi koordinatami. Koordinate so realna števila, koordinatni sistem pa naj bo pravokoten. Ker tudi narobe vsaka trojka (ξ_1, ξ_2, ξ_3) realnih števil določa neko točko v prostoru, pravimo pogosto kar trojki točka. Izhodišče koordinatnega sistema o je točka s koordinatami nič. Oddaljenost točke (ξ_1, ξ_2, ξ_3) od izhodišča je enaka pozitivnemu kvadratnemu korenu izraza $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$.

Posplošimo: točka n-razsežnega prostora je urejena n-terka realnih števil $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, n-razsežen prostor, označimo ga z $\mathbf{R}^n$, pa ni nič drugega kakor množica vseh urejenih n-terk. Na kratko bomo zaznamovali točke z malimi latinskimi črkami, npr. $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Števila $\xi_1, \ldots, \xi_n$ so koordinate točke x, ξ_1 je prva koordinata, ξ_2 druga itd., ξ_n n-ta koordinata.

Pri $n = 1$ je $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ kar številska premica. Točka ima samo eno koordinato. $\mathbf{R}^2$ je ravnina. Vse slike bomo risali v ravnini, tj. za $n = 2$.

Množica vseh urejenih n-terk je množica elementov kartezičnega produkta $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$, kjer je faktorjev n. Zato lahko rečemo, da je prostor $\mathbf{R}^n$ kartezični produkt n premic.

Pogosto bomo n-terko $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ imenovali vektor. Števila $\xi_1, \ldots, \xi_n$ so v tem primeru komponente vektorja x. Vektor x sega od izhodišča o do točke s koordinatami $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Vektorje lahko seštevamo in množimo s števili. Seštevamo jih tako, da seštevamo istoležne komponente, množimo s skalarjem pa tako, da pomnožimo vse komponente s skalarjem. Če sta torej $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ poljubna vektorja in α poljubno število, je

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$$

$$x = (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n)$$

Razdalja točke x od izhodišča je enaka pozitivnemu kvadratnemu korenu iz vsote kvadratov koordinat. Ta razdalja je obenem dolžina oz. norma vektorja x. Označimo jo z $\| x \|$, torej

$$\| x \|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$$

Če pomnožimo vektor x s skalarjem α, se norma pomnoži z $| \alpha |$, tedaj $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$. Razdalja dveh točk x in y v prostoru $\mathbf{R}^n$ pa je enaka normi razlike $x - y$:

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \ldots + (\xi_n - \eta_n)^2} \qquad (1)$$

Razdalja ima tele lastnosti:

1. $d(x, y) \geqq 0$; $d(x, y) = 0$ natanko tedaj, kadar točki x in y sovpadata.
2. Razdalja je simetrična: $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Velja trikotniška neenačba. Če so x, y, z poljubne točke, je

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) \tag{2}$$

Tri točke x, y, z imamo lahko za oglišča trikotnika. Razdalje $d(x, y)$, $d(y, z)$ in $d(x, z)$ so dolžine njegovih stranic. V trikotniku je vsaka stranica manjša od vsote drugih dveh stranic. Zato imenujemo (2) trikotniško neenačbo.

Lastnosti 1. in 2. sta neposredno razvidni iz definicije (1). Trikotniška neenačba se da tudi izpeljati iz definicije (1), je pa pri tem potrebno nekaj računanja. Enačaj nastopi v (2) tedaj, kadar so točke x, y, z na isti premici in leži y med x in z.

Evklidski prostor $\mathbf{R}^n$ je množica vseh urejenih n-terk realnih števil, pri čemer računamo razdaljo med točkami po formuli (1).

Naj bo a točka prostora $\mathbf{R}^n$ in r pozitivno število. Množica vseh točk $x \in \mathbf{R}^n$, ki so od a oddaljene za manj kakor r, je odprta krogla $K(a, r)$ s središčem a in polmerom r:

$$K(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n, \; || \, x - a \, || < r\}$$

Množica vseh točk, ki imajo oddaljenost r od a, je sfera $S(a, r)$ s središčem a in polmerom r:

$$S(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n, \; || \, x - a \, || = r\}$$

Če upoštevamo definicijo norme, sestavljajo kroglo točke x, katerih koordinate ustrezajo neenačbi

$$(\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2 < r^2$$

Sfero pa sestavljajo vse točke, ki ustrezajo enačbi

$$(\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2 = r^2$$

Tu so $a_1, \ldots, a_n$ koordinate središča a.

V dvorazsežnem prostoru je množica $K(a, r)$ krožna plošča s polmerom r, $S(a, r)$ pa je krožnica.

V enorazsežnem prostoru ima točka eno samo koordinato. Razdalja dveh točk je absolutna vrednost razlike koordinat. Enorazsežna krogla s središčem a in polmerom r je interval $(a - r, a + r)$ z dolžino $2r$. Sfero $S(a, r)$ pa sestavljata dve točki, namreč krajišči $a - r$ in $a + r$.

Množica točk $\{x \in \mathbf{R}^n, \; || \, x - a \, || \leqq r\}$ je zaprta krogla s središčem a in polmerom r. Zaprta krogla sestoji iz odprte krogle $K(a, r)$ in sfere $S(a, r)$.

Oglejmo si še definicijo kvadra. Imejmo dve n-terki $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, pri čemer naj bo $\alpha_k < \beta_k$ za vsak k. Kvader K je množica vseh točk $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, pri katerih leži prva koordinata ξ_1 med α_1 in β_1, druga ξ_2 med α_2 in β_2, itd., zadnja koordinata ξ_n pa med α_n in β_n. Robovi tega kvadra so $\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n$. Če so med seboj enaki, je K n-razsežna kocka. V ravnini je množica K pravokotnik, na premici pa daljica (interval).

2. **Topologija v prostoru $\mathbf{R}^n$.** Okolico točke a sestavljajo vse točke, ki so »blizu« točke a. Že v vsakdanjem pomenu okolica ni nekaj natanko določenega. Za okolico mesta vzamemo lahko npr. vse kraje, kamor pridemo iz mesta peš v manj kakor eni uri, ali vse kraje, kamor pridemo s kolesom v manj kakor eni uri ali z avtom v manj kakor eni uri. Tudi v matematiki ima vsaka točka več okolic.

V prostoru $\mathbf{R}^n$ je vsaka krogla s središčem v točki a okolica točke a. Na splošno pa imenujemo *okolico točke a* vsako množico točk, ki vsebuje kako kroglo s središčem a. Torej ima vsaka točka prostora celo družino okolic. Ta družina ima tele lastnosti:

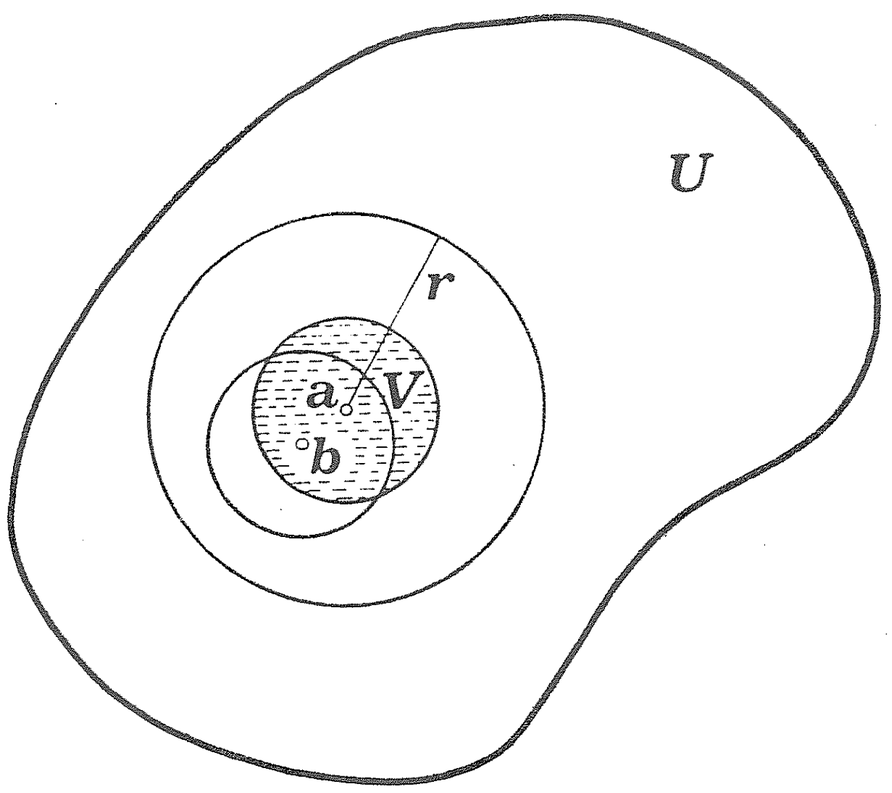
(1) Vsaka okolica U točke a vsebuje a, tedaj $a \in U$.

(2) Presek dveh okolic točke a je okolica točke a.

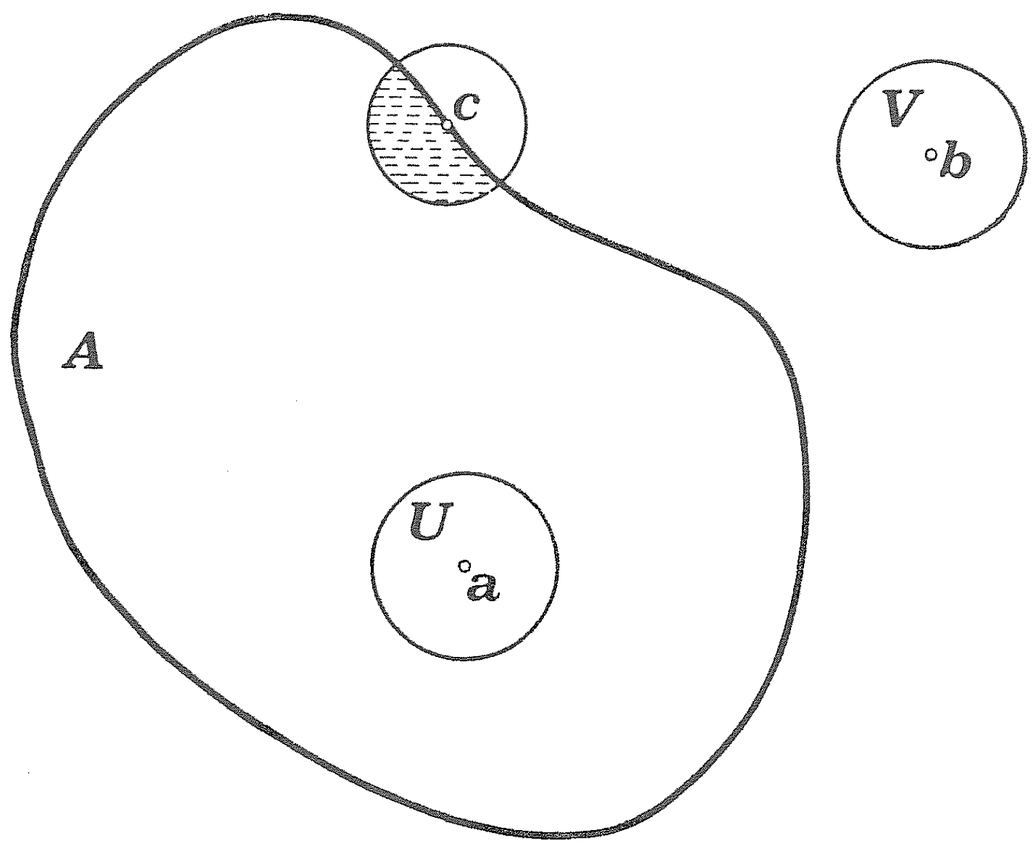
(3) Če množica V vsebuje kako okolico U točke a, je V okolica točke a.

(4) Naj bo U poljubna okolica točke a. Obstaja taka okolica V točke a, da je U okolica za vsako točko množice V.

Lastnosti (1), (2) in (3) so neposredno razvidne. Da velja tudi (4), ugotovimo takole: okolica U točke a vsebuje neko kroglo $K(a, r)$ s središčem a in polmerom $r > 0$. Naj bo V krogla $K(a, \frac{1}{2}r)$. Množica U je okolica za vsako točko b krogle $K(a, \frac{1}{2}r)$, saj leži krogla $K(b, \frac{1}{2}r)$ v krogli $K(a, r)$, torej pripada množici U (glej sliko 1).



Sl. 1



Sl. 2

Navedimo še eno lastnost okolic:

(5) Naj bosta a in b različni točki. Obstaja taka okolica U točke a in okolica V točke b, da nimata U in V nobene skupne točke, torej $U \cap V = \emptyset$.

Označimo namreč z d razdaljo točk a in b in postavimo $r = \frac{1}{4}d$. Krogli $K(a, r)$ in $K(b, r)$ sta okolici točk a in b in nimata skupne točke.

Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zaporedje točk v prostoru $\mathbf{R}^n$. Definicija konvergence je običajna: zaporedje $\{a_k\}$ konvergira proti točki a, če vsaka okolica limitne točke a vsebuje od nekega člena naprej vse točke tega zaporedja. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo tak indeks k_0, da je $\| a_k - a \| < \varepsilon$ za vsak $k > k_0$. Hitro vidimo, da v konvergentnem zaporedju $\{a_k\}$ konvergirajo posamezne koordinate členov a_k proti ustrezni koordinati limitne točke a.

Naj bo A poljubna množica točk prostora $\mathbf{R}^n$. Točka iz $\mathbf{R}^n$ ima glede na A lahko tri različne lege (sl. 2):

a) Točka a je *notranja* točka množice A, če obstaja vsaj ena okolica U točke a, ki leži vsa v množici A.

b) Točka b je *zunanja* točka, če obstaja vsaj ena okolica V te točke, ki nima nobene točke množice A.

c) Točka c je *robna* točka, če so v vsaki njeni okolici točke iz množice A in točke, ki niso v A.

Notranja točka pripada množici A, zunanja točka pa ni v A. Robna točka je lahko v množici A ali pa tudi ne.

Označimo z A^c komplementarno množico od A (na kratko komplement od A), to je množico vseh točk prostora $\mathbf{R}^n$, ki niso v A. Množici A in A^c nimata skupne točke, združeni pa sestavljata ves prostor, torej $A \cap A^c = \emptyset$ in $A \cup A^c = \mathbf{R}^n$. Notranja točka množice A je zunanja točka za A^c, zunanja za A pa je notranja za A^c. Vsaka robna točka množice A je robna točka tudi za A^c.

Primeri. 1. Če je $A = \mathbf{R}^n$, so vse točke notranje, zunanjih in robnih točk tu ni.

2. Naj bo A množica vseh točk na premici, prostor $\mathbf{R}^n$ pa naj ne bo enorazsežen. Tu notranjih točk ni. Vsaka točka na premici je robna, vse točke zunaj premice pa so zunanje.

3. Če je $A = K(a, r)$, to je krogla s središčem a in polmerom r, ima množica notranje, zunanje in robne točke. Vse robne točke sestavljajo sfero $S(a, r)$.

4. Imenujmo točko $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ racionalno, če so vse njene koordinate ξ_k racionalna števila. Množica vseh racionalnih točk nima niti notranjih niti zunanjih točk. Vse točke prostora so robne. V vsaki okolici vsake točke so namreč racionalne točke in točke, ki niso racionalne.

Definicija. Množica O je odprta, če je vsaka njena točka notranja.
Množica Z je zaprta, če vsebuje vse svoje robne točke.

Odprta krogla $K(a, r)$ je odprta množica, sfera $S(a, r)$ je zaprta množica. Ves prostor $\mathbf{R}^n$ je hkrati odprta in zaprta množica. Robnih točk pri tej množici sploh ni.

Iz definicije je takoj razvidno, da je komplementarna množica odprte množice zaprta, komplementarna množica zaprte množice pa odprta. Komplement vsega prostora $\mathbf{R}^n$ je prazna množica. Ker je $\mathbf{R}^n$ odprta in zaprta množica, štejemo tudi prazno množico za odprto in zaprto.

Iz definicije okolice in odprte množice se takoj vidi, da je neprazna odprta množica okolica za vsako svojo točko.

Označimo z $\mathcal{O}$ družino vseh odprtih množic in z $\mathcal{Z}$ družino vseh zaprtih množic prostora $\mathbf{R}^n$. Družina $\mathcal{O}$ ima tele lastnosti:

(A) *Prostor $\mathbf{R}^n$ in prazna množica $\emptyset$ pripadata družini $\mathcal{O}$*
(B) *Unija odprtih množic je odprta množica*
(C) *Presek dveh odprtih množic je odprta množica*

Družina $\mathcal{Z}$ ima podobne lastnosti:

(A′) *Množici $\mathbf{R}^n$ in $\emptyset$ pripadata družini $\mathcal{Z}$*
(B′) *Presek zaprtih množic je zaprta množica*
(C′) *Unija dveh zaprtih množic je zaprta množica*

Dokažimo lastnosti za odprte množice! Lastnosti (A′), (B′) in (C′) dobimo iz (A), (B), (C), če upoštevamo, da je zaprta množica komplement odprte, da je presek komplementov komplement unije in unija komplementov komplement preseka.

Da velja (A), že vemo.

Naj bo zdaj $\{O_i\}$ poljubna družina odprtih množic in O unija te družine. Vzemimo v O poljubno točko a. Ta točka je vsaj v eni množici družine $\{O_i\}$, npr. $a \in O_{i_0}$. Ker je O_{i_0} odprta množica, je okolica točke a. Unija O pa vsebuje množico O_{i_0}. Od tod sledi, da je a notranja točka v O. Torej je O odprta množica, ker so vse njene točke notranje.

Naj bosta O_1 in O_2 odprti množici. Če je presek $O_1 \cap O_2$ prazna množica, je odprta. Naj bo $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Vzemimo v preseku poljubno točko a. Ta točka leži v O_1 in O_2. Ker sta O_1 in O_2 odprti, obstajata taki okolici U_1 in U_2 točke a, da je prva v O_1, druga v O_2. Presek $U = U_1 \cap U_2$ je tudi okolica točke a, leži pa v preseku $O_1 \cap O_2$. Torej je a notranja točka preseka $O_1 \cap O_2$, ki je res odprta množica.

Iz lastnosti (C) takoj sledi, da je presek končnega števila odprtih množic odprta množica.

Množico vseh notranjih točk dane množice $A \subset \mathbf{R}^n$ označimo z A^0. Očitno je A^0 odprta množica in leži v A. To je največja odprta množica v A. Imenuje se *notranjost* množice A. Množica A je odprta natanko tedaj, ko je $A = A^0$.

Prav tako sestavljajo vse zunanje točke množice A odprto množico. To je notranjost komplementa A^c.

Dodajmo množici A vse njene robne točke. Dobljena množica $\overline{A}$ vsebuje množico A in je zaprta. Njen komplement sestoji namreč iz vseh zunanjih točk množice A in je odprta množica. $\overline{A}$ se imenuje *zaprtje* množice A. Očitno je A najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A.

Množico vseh robnih točk bomo označili z $R(A)$. To je obenem množica robnih točk komplementa A^c. $R(A)$ imenujemo *rob* množice A. Rob $R(A)$ je zaprta množica, ker je presek zaprtih množic $\overline{A}$ in zaprtja komplementa A^c.

Naj bo X poljubna množica točk prostora $\mathbf{R}^n$. Okolica točke $a \in X$ glede na X je presek množice X z okolico točke a v prostoru $\mathbf{R}^n$. Taka okolica je npr. množica vseh točk iz X, ki leže v notranjosti krogle s polmerom r in središčem a. Podmnožico $A \subset X$ bomo imenovali *relativno odprto*, če obstaja taka odprta množica O prostora $\mathbf{R}^n$, da je $A = O \cap X$. Podobno je podmnožica $B \subset X$ *relativno zaprta*, če je enaka preseku množice X s kako zaprto množico prostora $\mathbf{R}^n$. Družina relativno odprtih množic množice X ima, kakor družina odprtih množic prostora $\mathbf{R}^n$, lastnosti (A), (B) in (C), družina relativno zaprtih množic pa lastnosti (A′), (B′) in (C′). Množico točk $X \subset \mathbf{R}^n$ bomo imenovali podprostor prostora $\mathbf{R}^n$ ali na kratko kar prostor.

V posebnem primeru, ko je X odprta množica prostora $\mathbf{R}^n$, so relativno odprte množice vse odprte množice, ki leže v X. Če pa je X zaprta v $\mathbf{R}^n$, so relativno zaprte vse zaprte množice, ki leže v X.

Primeri. 1. Množico vseh točk na premici imamo lahko za enorazsežen prostor $\mathbf{R}^1$. Relativno odprte (zaprte) množice se tu ujemajo z odprtimi (zaprtimi) množicami prostora $\mathbf{R}^1$. Isto velja, če je X množica vseh točk na neki ravnini prostora $\mathbf{R}^n$. Relativno odprte in zaprte množice se ujemajo z odprtimi in zaprtimi množicami prostora $\mathbf{R}^2$.

2. Sfera $S(a, r)$ je zaprta množica. Zato so relativno zaprte množice kar zaprte množice točk na tej sferi. Odprta množica na $S(a, r)$ pa je presek odprte množice prostora $\mathbf{R}^n$ s sfero $S(a, r)$.

Naj bosta $X \subset \mathbf{R}^m$ in $Y \subset \mathbf{R}^n$ poljubni množici točk. Preslikava $f : X \to Y$ je predpis, po katerem pripada vsaki točki $x \in X$ natanko določena točka prostora Y kot slika. To točko bomo označili z $f(x)$. Preslikava f je injektivna, če upodobi različne točke prostora X v različne točke prostora Y, surjektivna, če je vsaka točka prostora Y slika neke točke iz X, in bijektivna ali povratno enolična, če je hkrati injektivna in surjektivna. Bijektivna preslikava ima inverzno preslikavo f^{-1}, ki preslika prostor Y na X.

Če je A množica točk prostora X, označimo z $f(A)$ množico njenih slik, torej $f(A) = \{f(x), x \in A\}$. Posebej je $f(X)$ množica vseh slik pri upodobitvi f. $f(X)$ imenujemo zalogo vrednosti upodobitve f. Če je $f(X) = Y$, je upodobitev surjektivna.

Naj bo B množica točk prostora Y. Njena inverzna slika, označimo jo $f^{-1}(B)$, je množica vseh tistih točk prostora X, katerih slika pripada množici B. Torej $f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}$.

Kako se preslikava f izraža s koordinatami? Naj bo $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ in $f(x) = y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ustrezna točka v Y. Njene koordinate so funkcije koordinat točke x:

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, \eta_n = f_n(\xi_1, \ldots, \xi_m)$$

Narobe je tudi res. Funkcije $f_1(\xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, f_n(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, ki naj bodo definirane, če pripada točka $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ množici X, določajo neko preslikavo množice X v prostor $\mathbf{R}^n$.

Prostor $\mathbf{R}^1$ je številska premica. Preslikava $f : X \to \mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ je torej realna funkcija, ki je definirana na množici X.

Kdaj je preslikava $f : X \to Y$ zvezna? Zvezna je lahko v posameznih točkah, pa tudi povsod na definicijskem območju X. Definicija zveznosti v točki je običajna:

Definicija. Preslikava $f : X \to Y$ je v točki $x_0 \in X$ zvezna, če pripada vsakemu pozitivnemu številu ε tak pozitiven δ, da velja ocena

$$\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$$

za vse točke $x \in X$, ki ustrezajo pogoju $\| x - x_0 \| < \delta$.

Vse točke $x \in X$, za katere velja $\| x - x_0 \| < \delta$, sestavljajo okolico U_δ točke x_0 v prostoru X. Vse točke $y \in Y$, ki ustrezajo pogoju $\| y - f(x_0) \| < \varepsilon$, pa sestavljajo okolico V_ε slike $f(x_0)$. Pozitivno število ε si smemo poljubno izbrati. Od tod sledi, da lahko povemo definicijo zveznosti tudi takole:

Preslikava f je v točki $x_0 \in X$ zvezna, če za vsako okolico V slike $f(x_0)$ obstaja taka okolica U točke x_0, da se vse točke okolice U preslikajo v izbrano okolico V točke $f(x_0)$, torej velja $f(U) \subset V$.

Preslikava $f : X \to Y$ je na prostoru X zvezna, če je zvezna v vsaki točki.

Izrek 1. *Preslikava $f : X \to Y$ je zvezna natanko tedaj, kadar je inverzna slika vsake odprte množice prostora Y odprta množica prostora X.*

Dokaz. Naj bo f zvezna, torej zvezna v vsaki točki prostora X. Vzemimo v Y poljubno odprto množico O. Denimo, da njena inverzna slika $f^{-1}(O)$ ni prazna. Naj bo $a \in f^{-1}(O)$, tedaj $f(a) \in O$. Ker je množica O odprta, je okolica točke $f(a)$. Ker je f zvezna povsod, torej tudi v točki a, obstaja taka okolica U točke a, da je $f(U) \subset O$. Od tod sledi $U \subset f^{-1}(O)$. Torej je a notranja točka množice $f^{-1}(O)$. Ker je bila a poljubna, je $f^{-1}(O)$ res odprta množica.

Naj bo zdaj f taka preslikava, da je inverzna slika vsake odprte množice odprta množica. Izberimo si poljubno točko $a \in X$ in poljubno odprto okolico V slike $f(a)$. Njena inverzna slika $f^{-1}(V) = U$ je odprta množica. Ker je $a \in U$ in U odprta, je U okolica točke a. Nadalje velja $f(U) \subset V$. Torej je f v točki a zvezna. S tem je izrek 1 dokazan.

Pogosto definiramo, da je zvezna preslikava taka preslikava, pri kateri je inverzna slika vsake odprte množice odprta množica. Izrek 1 pove, da je ta definicija ekvivalentna z definicijo zveznosti v vsaki točki.

Definicija. Bijektivna zvezna preslikava $f : X \to Y$, pri kateri je tudi inverzna preslikava $f^{-1} : Y \to X$ zvezna, se imenuje homeomorfizem.

Prostora X in Y sta homeomorfna, če obstaja kak homeomorfizem f prostora X na prostor Y.

Inverzna preslikava f^{-1} homeomorfizma f je seveda tudi homeomorfizem. Zato je homeomorfnost prostorov simetrična lastnost. Topologija študira tiste lastnosti prostorov, ki se ohranjajo pri homeomorfizmu.

Naj bo f homeomorfizem prostora X na prostor Y. Ker je f zvezna preslikava, preslika f^{-1} vsako odprto množico prostora Y na odprto množico prostora X. Ker je tudi f^{-1} zvezna in je f njena inverzna preslikava, preslika tudi f odprte množice prostora X na odprte množice prostora Y. Zato obstaja pri homeomorfnih prostorih povratno enolična korespondenca med odprtimi množicami prvega in drugega prostora.

Oglejmo si dva primera homeomorfizmov. Prvič naj bo $X = \mathbf{R}^n$ in Y odprta enotna krogla v $\mathbf{R}^n$, torej $Y = \{x \in \mathbf{R}^n, \| x \| < 1\}$. Preslikavo f definirajmo takole

$$f(x) = (1 + \| x \|)^{-1} x, \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

(Koordinate točke $f(x)$ dobimo tako, da vse koordinate točke x delimo s številom $1 + || x ||$.) Preslikava f je očitno zvezna. Če pišemo $f(x) = y$, dobimo

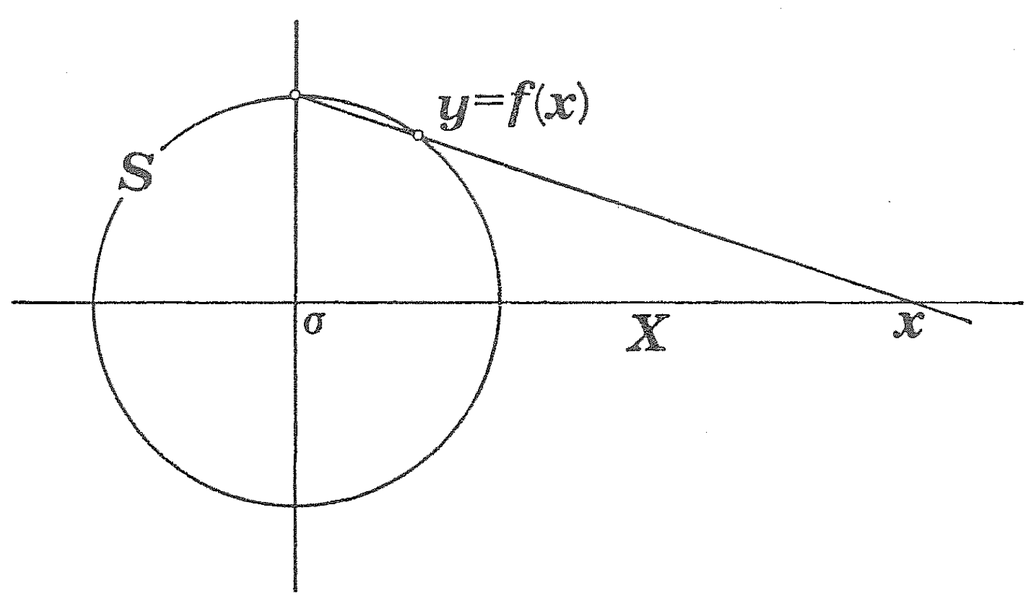
$$|| y || = (1 + || x ||)^{-1} || x || < 1$$

Torej $y \in Y$. Od tod izračunamo $|| x || = || y ||/(1 - || y ||)$. Inverzna preslikava pa se glasi

$$f^{-1}(y) = (1 - || y ||)^{-1} y, \quad y \in Y$$

Ker je $|| y || < 1$ za vsako točko y enotne krogle Y, je tudi f^{-1} zvezna preslikava. Zato je f homeomorfizem in prostor $\mathbf{R}^n$ je homeomorfen odprti enotni krogli v tem prostoru. Od tod takoj vidimo, da je $\mathbf{R}^n$ homeomorfen vsaki odprti krogli tega prostora (s poljubnim središčem in poljubnim radijem).

Drugič naj bo prostor X hiperravnina prostora $\mathbf{R}^n$, določena z enačbo $\xi_n = 0$. Torej je X množica vseh n-terk $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$, pri katerih je zadnja koordinata enaka nič. Prostor Y naj bo enotna sfera $S = \{x \in \mathbf{R}^n, || x || = 1\}$, iz katere smo odstranili severni pol, tj. točko $(0, \ldots, 0, 1)$. Stereografična projekcija f hiperravnine X na sfero S je določena takole: Točko $x \in X$ zvežemo s severnim polom (sl. 3). Presečišče te zveznice s sfero S je točka $f(x) = y$. Zaloga vrednosti preslikave f je vsa sfera S z izjemo severnega pola, torej prostor Y. Hitro vidimo, da je stereografična projekcija povratno enolična in v obeh smereh zvezna. Torej je hiperravnina X homeomorfna punktirani sferi (sferi brez severnega pola). Bralec naj sam poišče, kako se stereografična projekcija izraža analitično.



Sl. 3

Poljubno izbrana prostora nista vselej homeomorfna, tudi če obstaja bijektivna preslikava med točkami obeh prostorov. Brez dokaza navedimo izrek:

Brouwerjev izrek o invarianci odprtih množic. Naj bosta množici U in V homeomorfna podprostora prostora $\mathbf{R}^n$. Če je množica U odprta v $\mathbf{R}^n$, je tudi V odprta v $\mathbf{R}^n$.

Od tod sledi, da je dimenzija topološka lastnost. Če $m \neq n$, prostora $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$ nista homeomorfna. Denimo namreč, da je $n < m$. Prostor $\mathbf{R}^n$ imamo lahko za podprostor prostora $\mathbf{R}^m$. Sestoji iz vseh točk $x \in \mathbf{R}^m$, pri katerih je zadnjih $m - n$ koordinat enakih nič. Ker $\mathbf{R}^n$ ni odprta množica v $\mathbf{R}^m$, prostora $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$ nista homeomorfna. Pač pa je G. Cantor dokazal, da obstaja bijektivna preslikava med točkami številske premice in točkami prostora $\mathbf{R}^n$ za vsak $n > 1$.

3. **Splošni topološki prostori.** Oglejmo si na kratko doslej prehojeno pot. S pomočjo razdalje med točkami evklidskega prostora smo za vsako točko definirali sistem okolic. Od tod smo prišli do pojma odprtih in zaprtih množic. Zveznost preslikav smo lahko definirali samo z okolicami oz. odprtimi množicami. Če ta spoznanja posplošimo, pridemo do pojma splošnega topološkega prostora.

Definicija. Topološki prostor je par $(X, \mathcal{O})$, kjer je X neprazna množica, katere elemente imenujemo točke, $\mathcal{O}$ pa je družina podmnožic množice X. Družina $\mathcal{O}$ naj ima tele lastnosti:

(A) *Ves prostor X in prazna množica $\emptyset$ pripadata družini $\mathcal{O}$*

(B) *Unija poljubne družine množic iz $\mathcal{O}$ je v $\mathcal{O}$*

(C) *Presek dveh množic iz družine $\mathcal{O}$ je v $\mathcal{O}$*

Množice iz družine $\mathcal{O}$ imenujemo odprte množice točk topološkega prostora X.

Ce pri dani množici X družino $\mathcal{O}$ spremenimo, dobimo drugačen topološki prostor. Kljub temu bomo na kratko rekli kar topološki prostor X, ne da bi posebej navajali družino $\mathcal{O}$.

Primeri. 1. Družino $\mathcal{O}$ naj sestavljajo vse delne množice točk prostora X. Ta družina očitno ustreza pogojem (A), (B) in (C) in zato določa topologijo. Ker je tu vsaka množica z eno samo točko odprta, imenujemo to topologijo diskretna topologija prostora X. Zgled za tak prostor je množica $\mathbf{Z}$ celih števil na številski premici v relativni topologiji. Interval $(n - \varepsilon, n + \varepsilon)$ je okolica števila n in edino celo število v njej je n, če je $\varepsilon < 1$. Ta okolica je odprta množica, torej je vsaka točka v množici $\mathbf{Z}$ odprta. Potem pa je vsaka podmnožica v $\mathbf{Z}$ odprta.

2. Družino $\mathcal{O}$ naj sestavljata samo prostor X in prazna množica. Tudi ta družina določa topologijo v prostoru X.

3. Naj bo X neskončna množica. Družino $\mathcal{O}$ naj sestavljajo vse tiste podmnožice $O \subset X$, katerih komplement je končna množica (v komplementu je samo končno število točk). Ni težko videti, da ta družina ustreza pogojem (A), (B), (C) in zato določa topologijo prostora X.

Zaprta množica topološkega prostora X je komplement odprte množice. Družina $\mathcal{Z}$ zaprtih množic ima tele lastnosti (glej str. 4): Prostor X in prazna množica sta zaprti množici. Presek zaprtih množic je zaprta množica. Unija končnega števila zaprtih množic je zaprta množica.

Kaj je okolica točke a v topološkem prostoru X? Okolico imenujemo vsako množico točk $U \subset X$, ki vsebuje tako odprto množico O, da je točka a v O, torej $a \in O \subset U$. Po tej definiciji je odprta množica okolica za vsako svojo točko. Bralec se lahko brez težave prepriča, da ima sistem okolic dane točke v topološkem prostoru X lastnosti (1) — (4), ki smo jih našteli na str. 3 za okolice v evklidskih prostorih.

Naj bo A množica točk topološkega prostora X. Kakor na str. 3 opredelimo notranje, zunanje in robne točke množice A, notranjost A^0 in zaprtje $\overline{A}$.

Tudi zveznost in homeomorfizem definiramo kakor pri evklidskih prostorih: preslikava f topološkega prostora X v topološki prostor Y je zvezna, če je inverzna slika vsake odprte množice prostora Y odprta množica prostora X. Prostora X in Y sta homeomorfna, če obstaja povratno enolična, v obeh smereh zvezna preslikava prostora X na prostor Y.

Konstantna preslikava je taka, da se vse točke prostora X preslikajo v isto točko c prostora Y. Konstantna preslikava je vselej zvezna.

Brez težave vidimo, da je vsaka preslikava $f : X \to Y$ zvezna, če sta v prostoru Y edini odprti množici Y in $\emptyset$.

Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ zvezni preslikavi. Kompozitum $g \circ f$ je preslikava prostora X v prostor Z. Točki $x \in X$ pripada točka $g(f(x)) \in Z$. Kompozitum je zvezna preslikava. Naj bo namreč $O \subset Z$ odprta množica. Ker je g zvezna, je $O_1 = g^{-1}(O)$ odprta množica v Y. Prav tako je tudi $O_2 = f^{-1}(O_1)$ odprta množica v X. Torej je $(g \circ f)^{-1}(O) = O_2$ odprta množica. Od tod sledi zveznost kompozita $g \circ f$. Posledica tega je, da je homeomorfnost tranzitivna relacija: če je prostor X homeomorfen prostoru Y, Y pa prostoru Z, je X homeomorfen prostoru Z.

Naj bo A poljubna množica točk v topološkem prostoru X. Na množici A definiramo *relativno topologijo* kakor pri evklidskih prostorih. Podmnožica $B \subset A$ je odprta v relativni topologiji, če je B presek množice A s kako odprto množico prostora X. Tako določena družina (relativno) odprtih množic ustreza pogojem (A), (B) in (C) na str. 7 in določa na množici A topologijo, ki jo imenujemo relativna topologija. Prostor A v tej topologiji imenujemo podprostor prostora X.

Imejmo topološka prostora X in Y. Homeomorfizem prostora X na podprostor $X' \subset Y$ imenujemo *vložitev* prostora X v prostor Y. Posebno pomembne so vložitve topoloških prostorov v evklidske prostore $\mathbb{R}^n$.

Sistem okolic v evklidskem prostoru ima tudi lastnost (5) (glej str. 3). V nekaterih topoloških prostorih (5) ne velja. Kar oglejmo si prostor X iz primera 3 (str. 8). Naj bosta a in b različni točki tega prostora, U poljubna odprta množica, v kateri je a, in V poljubna odprta množica, v kateri je b. Komplementa od U in V sta končni množici. Zato je tudi komplement preseka $U \cap V$ končna množica. Ker ima X neskončno točk, presek $U \cap V$ ni prazen. Poljubni okolici točk a in b imata torej neprazen presek, tako da (5) ne velja.

Definicija. Topološki prostor X je Hausdorffov ali T_2 prostor, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja taka okolica U točke a in taka okolica V točke b, da je njun presek prazen, tedaj $U \cap V = \emptyset$.

Evklidski prostori so vsi Hausdorffovi.

Če je X Hausdorffov prostor in $A \subset X$ množica točk, je A v relativni topologiji Hausdorffov prostor.

4. **Povezani prostori.** V vsakem topološkem prostoru X sta prazna množica in množica X odprti in zaprti. Ali je še kaka druga množica točk odprta in zaprta? Pa naj bo O odprta in zaprta množica. Komplement $O^c = O'$ je potem tudi odprta in zaprta množica. Velja $X = O \cup O'$ in $O \cap O' = \emptyset$. Prostor X smo razstavili v dve disjunktni odprti množici O in O'. Narobe, naj bo $X = O \cup O'$, $O \cap O' = \emptyset$, kjer sta O in O' odprti množici. Ker je O komplement od O', je tudi zaprta množica. Isto velja za O'.

Definicija. Topološki prostor X je povezan, če sta v njem prazna množica $\emptyset$ in množica X edini odprti in zaprti množici.

Tudi takole lahko povemo:

Topološki prostor je povezan, če ga ne moremo zapisati kot unijo dveh odprtih (zaprtih) nepraznih disjunktnih množic.

Nepovezan prostor X pa lahko razstavimo vsaj na en način v unijo $X = O_1 \cup O_2$ nepraznih disjunktnih odprtih množic O_1 in O_2. Množici O_1 in O_2 sta v tem primeru tudi zaprti.

Diskretni prostor je nepovezan, če ima več kakor eno točko. Vsaka množica z eno točko je namreč v takem prostoru odprta in zaprta.

Naj bo $X \subset \mathbb{R}^n$ podprostor, ki sestoji iz dveh krogel $K(a, r)$ in $K(b, R)$. Če je vsota polmerov $R + r$ manjša od razdalje središč a in b, je prostor X nepovezan. Krogli $K(a, r)$ in $K(b, R)$ sta v tem primeru v X odprti in zaprti.

Množica X vseh racionalnih točk na številski premici je nepovezan prostor. Vzemimo namreč poljubno iracionalno število α. Označimo z O_1 množico vseh racionalnih števil, manjših od α, in z O_2 množico vseh racionalnih števil, večjih od α. O_1 in O_2 sta v prostoru X odprti. Prva je presek množice X z odprtim intervalom $(-\infty, \alpha)$, druga presek z odprtim intervalom (α, ∞). Velja $X = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Torej je X nepovezan.

Ali sploh obstajajo povezani prostori, ki imajo več kakor eno točko? Prostor X, v katerem sta edino $\emptyset$ in X odprti množici, je očitno povezan. Toda ta prostor ni Hausdorffov, če ima več kakor eno točko. Videli bomo, da so vsi evklidski prostori povezani. Najprej pa poglejmo, kako se vede povezan prostor pri zvezni preslikavi.

Izrek 2. Naj bo X povezan topološki prostor in f zvezna surjektivna preslikava prostora X na prostor Y. Potem je tudi Y povezan prostor.

Pripomba. Pogosto je X množica točk v nekem topološkem prostoru. Množica X je povezana, če je povezana kot prostor v relativni topologiji. Tudi Y je pogosto le množica

točk v kakem topološkem prostoru. Zato lahko izrek 2 na kratko povemo takole: zvezna slika povezane množice je povezana množica.

Dokaz izreka je preprost. Če Y ni povezana množica, jo lahko zapišemo kot unijo dveh nepraznih odprtih disjunktnih množic O_1 in O_2. Inverzni sliki $f^{-1}(O_1)$ in $f^{-1}(O_2)$ sta brez skupnih točk in odprti neprazni množici, ker je f zvezna surjektivna preslikava. Nadalje je $X = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$. Tak zapis pa ni mogoč, ker je X povezan. Zato je tudi Y povezan prostor.

Izrek 3. *Na številski premici so vsi intervali, končni in neskončni, odprti, zaprti in napol zaprti, povezane množice. To so poleg množic z eno samo točko edine povezane množice na premici.*

Dokaz. Vzemimo poljuben interval I s krajišči a in b, pri čemer je $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$. Če I ne bi bil povezana množica, bi lahko pisali $I = Z_1 \cup Z_2$, kjer sta Z_1 in Z_2 neprazni disjunktni relativno zaprti množici. Izberimo si v Z_1 število u in v Z_2 število v. Naj bo npr. $u < v$. Zaznamujmo z M množico točk, ki so v Z_1 in leže na intervalu $[u, v]$. Ta množica ni prazna, ker je $u \in M$, in je zaprta. Naj bo c njena natančna zgornja meja. Ker je M zaprta, leži c v $M \subset Z_1$. Torej $c < v \in Z_2$. Vse točke med c in v so v Z_2. Zato je c robna točka množice Z_2 in c je tudi v Z_2, ker je Z_2 zaprta. Torej imata Z_1 in Z_2 skupno točko c in nista disjunktni. To protislovje dokazuje, da je interval I povezana množica.

Naj bo zdaj M poljubna povezana množica na številski premici in naj sestoji iz več kakor ene točke. Vzemimo spet v M poljubni točki u in v, $u < v$. Vse točke intervala $[u, v]$ so v M. Denimo namreč, da točka $c \in [u, v]$ ne bi bila v M. Preseka množice M z intervaloma $(-\infty, c)$ in (c, ∞) sta relativno odprti množici O_1 in O_2, ki nista prazni in nimata skupne točke. Ker je $M = O_1 \cup O_2$, množica M ni povezana, kar nasprotuje privzetku. Torej je ves interval $[u, v]$ v množici M. Naj bo a natančna spodnja meja množice M in b njena natančna zgornja meja ($a = -\infty$, če M ni navzdol omejena, in $b = \infty$, če M ni navzgor omejena). Iz prejšnjega sledi, da so vse točke intervala (a, b) v množici M, saj lahko najdemo $u \in M$, ki je poljubno blizu krajišča a in $v \in M$, ki je poljubno blizu krajišča b. Torej je M interval (odprt, zaprt ali napol zaprt). Izrek 3 je dokazan.

Oglejmo si preprosto posledico izrekov 2 in 3. Naj bo f zvezna realna funkcija, definirana na topološkem prostoru X. Če je X povezan prostor, je po izreku 2 zaloga vrednosti $f(X)$ povezana množica točk na številski premici. Po izreku 3 pa je $f(X)$ interval. Od tod sledi: če zavzame zvezna funkcija na povezanem topološkem prostoru vrednosti α in β, zavzame tudi vse vrednosti med α in β. V posebnem primeru, če zavzame pozitivno in negativno vrednost, zavzame nekje tudi vrednost 0.

Enačbi $\xi_1 = r \cos t$, $\xi_2 = r \sin t$ določata pri danem r zvezno preslikavo številske premice v ravnino $\mathbf{R}^2$. Zaloga vrednosti je množica vseh točk na krožnici $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$. Torej je krožnica zvezna slika številske premice, ki je povezan prostor. Zato je tudi krožnica povezan prostor.

Na premici smo našli vse povezane množice. V prostorih $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, je družina povezanih množic neprimerno bogatejša. Tu bomo poiskali samo odprte povezane množice.

Naj bosta a in b poljubni točki prostora $\mathbf{R}^n$. Daljico, ki veže a in b, opiše točka $x = a + t(b - a)$, ko gre t od 0 do 1. Pri $t = 0$ dobimo krajišče a, pri $t = 1$ krajišče b. Daljica je kot zvezna slika intervala [0, 1] povezana množica točk.

Poligonska črta je končno zaporedje daljic

$$a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_{n+1}$$

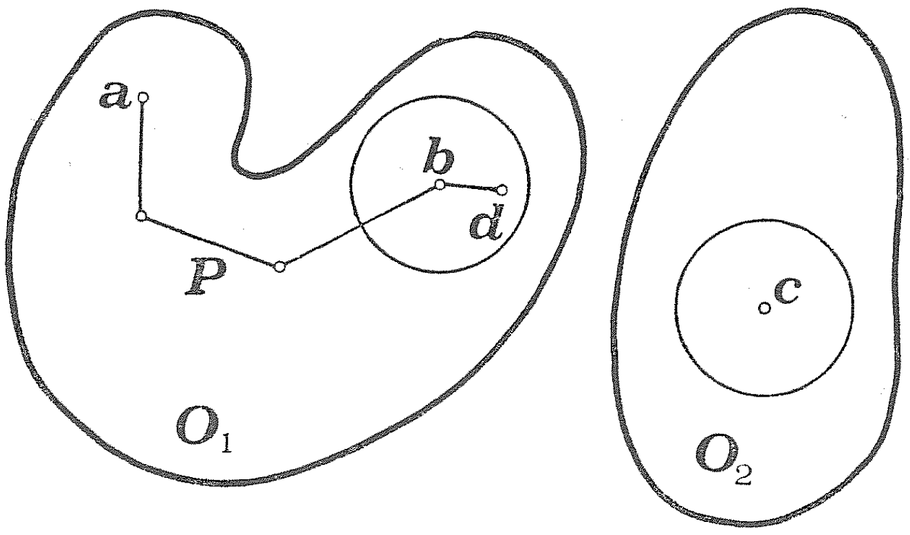
v katerem je končna točka vsake daljice začetna točka naslednje daljice. Pravimo, da poligonska črta veže prvo točko a_1 s končno točko a_{n+1}.

Naj bo O neprazna odprta množica točk prostora $\mathbf{R}^n$. Točki $a, b \in O$ se dasta zvezati s poligonsko črto v množici O, če obstaja poligonska črta, ki poteka vsa po množici O in ima začetno točko a, končno točko pa b. Na sl. 4 sestoji množica O iz dveh delov O_1 in O_2. Poljubni točki a in b iz O_1 se dasta zvezati s poligonsko črto, nobena točka a iz O_1 pa se ne da povezati z nobeno točko c iz O_2. Dokažimo zdaj

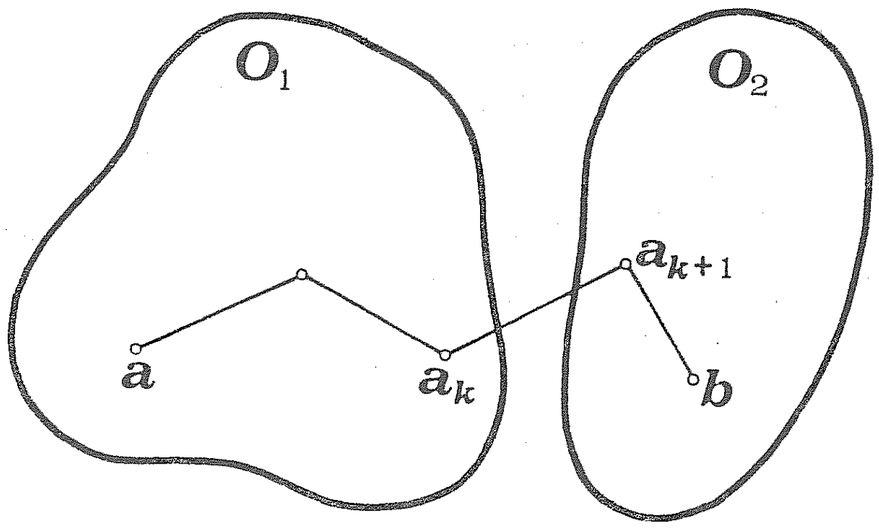
Izrek 4. Neprazna odprta množica $O \subset \mathbf{R}^n$ je povezana natanko takrat, kadar se dasta poljubni njeni točki povezati s poligonsko črto, ki poteka v O.

Dokaz. Denimo, da je množica O povezana. Izberimo si v njej poljubno točko a. Označimo z O_1 množico tistih točk iz O, ki se dajo zvezati z a s poligonsko črto v O, z O_2 pa množico tistih točk $c \in O$, ki se ne dajo povezati z a s poligonsko črto. Očitno velja $O = O_1 \cup O_2$ in $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Množici O_1 in O_2 sta odprti. Naj bo namreč točka b v O_1. Obstaja poligonska črta P, ki veže a in b in poteka v O (sl. 4). Ker je množica O odprta, je krogla $K(b, \varepsilon)$ z dovolj majhnim polmerom ε vsa v O. Točko $d \in K(b, \varepsilon)$ zvežimo najprej z daljico do središča b, nato pa točko b z a s črto P. Tako dobimo poligonsko črto P_1, ki veže a in d. Torej pripada okolica $K(b, \varepsilon)$ točke b množici O_1. To pomeni, da je O_1 odprta. Drugič vzemimo točko $c \in O_2$ in njeno okolico $K(c, \delta)$, ki leži vsa v O. Nobene točke d te okolice ne moremo zvezati z a s poligonsko črto. Če bi taka črta P obstajala, bi krajišče d zvezali s središčem c in dobili črto P_1, ki veže a in c. Take črte pa ni, ker je $c \in O_2$. Torej je tudi množica O_2 odprta. Ker je O povezana in $O = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, mora biti ena od množic O_1 in O_2 prazna. Toda $a \in O_1$ in je zato $O_2 = \emptyset$, $O = O_1$. To pomeni, da se dasta poljubni točki povezane množice O povezati s poligonsko črto, ki poteka v O.

Vzemimo zdaj, da se dasta poljubni točki odprte množice O povezati s poligonsko črto in dokažimo, da je v tem primeru O povezana. Če ni povezana, lahko pišemo $O = O_1 \cup O_2$, kjer sta O_1 in O_2 disjunktni neprazni odprti množici. Naj bo $a \in O_1$, $b \in O_2$ in $a_1 a_2 \ldots$



Sl. 4



Sl. 5

$\ldots a_{n+1}$, $a_1 = a$, $a_{n+1} = b$ poligonska črta, ki veže a in b in poteka vsa v O (sl. 5). Naj bo $a_k a_{k+1}$ taka stranica te črte, da je krajišče a_k v množici O_1, krajišče a_{k+1} pa v O_2. Daljica $a_k a_{k+1}$ leži seveda v O. Če imenujemo U_1 presek te daljice z O_1 in U_2 presek z O_2, je daljica enaka uniji $U_1 \cup U_2$. Tu sta U_1 in U_2 relativno odprti množici brez skupnih točk. Ker $a_k \in U_1$ in $a_{k+1} \in U_2$, sta U_1 in U_2 neprazni. Toda daljica je povezana množica točk in smo tako prišli do protislovja. Torej je množica O povezana in izrek 4 dokazan.

Posledica izreka 4 je, da so vsi prostori $\mathbf{R}^n$ povezani. Poljubni točki v $\mathbf{R}^n$ zvežemo lahko kar z daljico. Tudi vsaka krogla je povezana množica.

5. **Kompaktni prostori.** Odslej bodo vsi topološki prostori Hausdorffovi. Naj bo X topološki prostor in $M \subset X$ množica točk. Točka $a \in X$ je *stekališče* množice M, če vsaka okolica točke a vsebuje neskončno točk iz M. Množica M premore kako stekališče kvečjemu tedaj, kadar ima sama neskončno točk. Lahko pa se zgodi, da stekališča ni, čeprav je v množici neskončno točk.

Naj bo X prostor, $A \subset X$ množica točk in $\{B_i,\ i \in I\}$ poljubna družina podmnožic množice X. Z I smo označili množico indeksov, ki označujejo posamezne člane družine. I je lahko končna, števna ali neštevno neskončna množica. Če velja $A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, bomo imenovali družino $\{B_i\}$ *pokritje* množice A. Vsaka točka $a \in A$ pripada vsaj eni množici družine. Če je v družini $\{B_i\}$ le končno število množic, jo imenujemo končno pokritje, če so vse množice B_i odprte, pa je odprto pokritje. Naj bo $\{B_i\}$ poljubno pokritje za A. Če so $B_{i_1}, \ldots, \ldots, B_{im}$ take množice iz te družine, da velja $A \subset B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{im}$, pravimo, da smo našli v $\{B_i\}$ končno podpokritje.

Definicija. Množica točk A topološkega prostora X je kompaktna, če obstaja v vsakem odprtem pokritju množice A končno podpokritje.

V primeru, ko je $A = X$, pravimo, da je prostor X kompakten.

Če je torej množica A kompaktna in družina odprtih množic $\{O_i\}$ pokriva A, lahko najdemo v tej družini končno družino $\{O_{i_1}, \ldots, O_{im}\}$, ki pokriva A.

Očitno je vsaka končna množica točk kompaktna.

Komplement odprte množice je zaprta množica, komplement unije pa je presek komplementov. Naj bo $\{O_i\}$ odprto pokritje množice A in $Z_i = O_i^c$. Ker unija množic O_i pokriva A, presek zaprtih množic Z_i nima nobene skupne točke z A. Zato opredelimo pojem kompaktnosti z zaprtimi množicami takole: množica A je kompaktna, če ima tole lastnost: naj bo $\{Z_i\}$ poljubna družina zaprtih množic. Če presek teh množic nima nobene točke množice A, obstaja v družini $\{Z_i\}$ končno število množic $Z_{i_1}, \ldots, Z_{im}$, katerih presek nima skupne točke z A.

Izrek 5. Vsaka neskončna množica točk kompaktnega prostora ima vsaj eno stekališče.

Dokaz. Naj bo M neskončna množica točk kompaktnega prostora X. Če točka $a \in X$ ni stekališče, obstaja taka njena okolica $U(a)$, ki vsebuje kvečjemu končno število točk množice M. Smemo vzeti, da je $U(a)$ odprta okolica. Če M ne bi imela stekališča, bi za vsako točko $a \in X$ dobili tako okolico $U(a)$. Družina $\{U(a),\ a \in X\}$ je odprto pokritje prostora X, ker velja $a \in U(a)$. Zaradi kompaktnosti prostora X lahko izberemo iz te družine končno podpokritje $\{U(a_1), \ldots, U(a_m)\}$. Vsaka od teh m okolic ima le končno število točk iz M, vsaka točka iz M pa je vsaj v eni izmed teh okolic. Torej je v M končno število točk. To nasprotuje privzetku. Izrek 5 je dokazan.

Zastavili bi si lahko vprašanje, ali je prostor kompakten, če ima vsaka neskončna množica njegovih točk vsaj eno stekališče. Tak prostor je v splošnem le števno kompakten. To pomeni, da obstaja v vsakem odprtem pokritju, ki vsebuje le števno neskončno množic, končno podpokritje.

Dokažimo zdaj nekaj preprostih lastnosti kompaktnih množic in prostorov.

Izrek 6. Vsaka zaprta množica kompaktnega prostora je kompaktna.

Dokaz. Naj bo Z zaprta množica točk kompaktnega prostora X in $\{O_i\}$ naj bo poljubno odprto pokritje množice Z. Komplement $Z^c = O_0$ je odprta množica. Če družini $\{O_i\}$ dodamo množico O_0, dobimo odprto pokritje prostora X. Ker je X kompakten, obstaja v njem končno podpokritje, ki sestoji npr. iz množic $O_0, O_{i_1}, \ldots, O_{im}$. Zadnjih m množic je iz prvotnega pokritja množice Z. Torej je Z kompaktna.

Izrek 7. Kompaktna množica topološkega prostora je zaprta.

Dokaz. Naj bo $A \subset X$ kompaktna množica točk in $c \in X$ njena robna točka. Denimo, da $c \notin A$. Vzemimo poljubno točko $a \in A$. Ker je prostor X Hausdorffov, obstaja taka okolica $U(a)$ točke a in taka okolica V točke c, da je $U(a) \cap V = \emptyset$. Vse te okolice vzemimo odprte. Družina $\{U(a),\ a \in A\}$ je odprto pokritje množice A. Ker je A kompaktna, obstaja v tej družini končno podpokritje $\{U(a_1), \ldots, U(a_m)\}$. Naj bodo $V_1, \ldots, V_m$ ustrezne okolice

točke c. Presek $V_1 \cap \ldots \cap V_m = V$ je okolica točke c. Ta presek nima nobene skupne točke z unijo $U(a_1) \cup \ldots \cup U(a_m)$, torej tudi ne z množico A. Potem pa c ni robna točka, ker okolica V nima nobene točke množice A. To protislovje dokazuje, da je vsaka robna točka c v A in je množica A zaprta.

Izrek 8. Naj bo f zvezna preslikava topološkega prostora X v topološki prostor Y in $A \subset X$ kompaktna množica. Njena slika $f(A)$ je kompaktna množica v Y.

Na kratko povedano: Zvezna slika kompaktne množice je kompaktna.

Dokaz. Naj bo $\{O_i'\}$ poljubno odprto pokritje množice $A' = f(A)$. Ker je f zvezna preslikava, so inverzne slike $f^{-1}(O_i')$ odprte množice prostora X. Družina $\{f^{-1}(O_i')\}$ je odprto pokritje množice A. Ker je A kompaktna, obstaja končno podpokritje $\{f^{-1}(O_{i_1}'), \ldots, f^{-1}(O_{im}')\}$. Množice $O_{i_1}', \ldots, O_{im}'$, ki so iz prvotne družine $\{O_i'\}$, pa pokrivajo $A' = f(A)$. Torej je tudi $f(A)$ kompaktna množica.

Izrek 9. Zvezna povratno enolična preslikava f kompaktnega prostora X na prostor Y je homeomorfizem.

Dokaz. Ker je f zvezna preslikava in je X kompakten, je po izreku 8 tudi $f(X) = Y$ kompakten prostor. Vsaka zaprta množica $Z \subset X$ je kompaktna. Zato je tudi njena slika $Z' = f(Z)$ kompaktna, torej zaprta v prostoru Y. Od tod sledi, da preslika f zaprte množice na zaprte množice in ker je f bijektivna, preslika tudi odprte množice prostora X na odprte množice prostora Y. To pa pomeni, da je inverzna preslikava f^{-1} zvezna in je f homeomorfizem.

Če prostor X ni kompakten, potem zvezna povratno enolična preslikava f prostora X na prostor Y ni vselej homeomorfizem. Naj bo npr. X napol odprti interval $[0, 1)$, Y pa krožnica $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ v ravnini. Enačbi $\xi_1 = \cos 2\pi t$, $\xi_2 = \sin 2\pi t$ določata zvezno povratno enolično preslikavo intervala $[0, 1)$ na krožnico. Ta preslikava ni homeomorfizem, ker obratna preslikava ni zvezna v točki s koordinatama $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = 0$. Če je namreč točka (ξ_1, ξ_2) na krožnici blizu točke $(1, 0)$ in je $\xi_2 > 0$, je ustrezni t blizu krajišča 0, če pa je $\xi_2 < 0$, je ustrezni t blizu krajišča 1. Interval $[0, 1)$ in enotna krožnica sploh nista homeomorfna prostora. Po izreku 10, ki ga bomo zdaj dokazali, je namreč krožnica kompaktna množica, napol odprti interval pa ni kompakten.

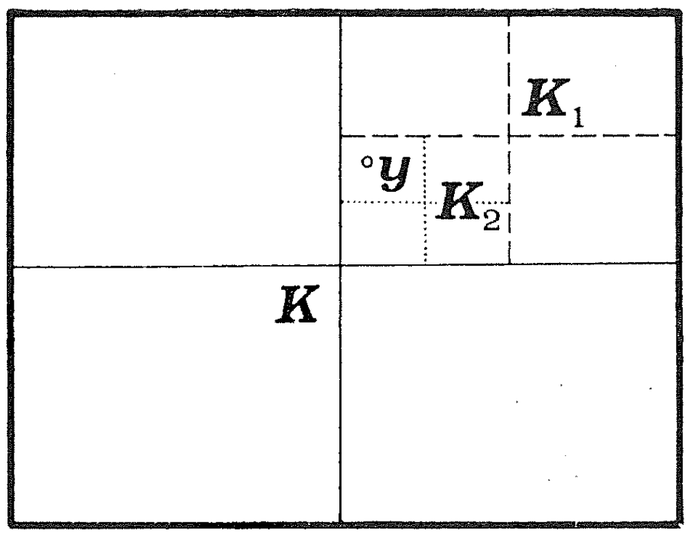
Kako je s kompaktnostjo evklidskih prostorov? Takoj vidimo, da noben prostor $\mathbf{R}^n$ ni kompakten. Vzemimo namreč družino odprtih koncentričnih krogel $\{K(a, r),\ r > 0\}$. Ta družina je odprto pokritje prostora $\mathbf{R}^n$. V njem pa očitno ni končnega podpokritja.

Izrek 10. Množica točk evklidskega prostora $\mathbf{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, kadar je zaprta in omejena.

Pripomba. Množica točk A evklidskega prostora je omejena, če obstaja dovolj velika krogla $K(a, R)$, ki vsebuje vse točke množice A. Omejena množica je seveda vsebovana tudi v dovolj velikem kvadru.

Dokaz. Naj bo množica $A \subset \mathbf{R}^n$ kompaktna. Po izreku 7 je zaprta. Družina krogel $\{K(a, r),\ r > 0\}$ je pokritje množice A. Torej je v njem končno podpokritje. Ker so pa te krogle vložene druga v drugo, obstaja krogla $K(a, R)$, ki pokriva množico A. Torej je A omejena.

Naj bo zdaj množica A omejena in zaprta. Ker je omejena, obstaja dovolj velik kvader K, ki vsebuje A. Naj sestoji K iz vseh točk $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, katerih koordinate ustrezajo pogojem: $\alpha_1 \leqq \xi_1 \leqq \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqq \xi_n \leqq \beta_n$. Robovi kvadra K so enaki $\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n$. Množica K je zaprta. Če dokažemo, da je kompaktna, je po izreku 6 tudi množica A kompaktna, ker je zaprta in leži v K.



Sl. 6

Naj bo torej $\{O_i\}$ poljubno odprto pokritje kvadra K. Denimo, da v njem ni končnega podpokritja. Razrežimo K na manjše kvadre tako, da razpolovimo vsak rob. Koordinata ξ_k vsake točke delnega kvadra leži bodisi na intervalu $[\alpha_{ki},\gamma_k]$ bodisi na intervalu, $[\gamma_k,\beta_k]$, kjer je $\gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$. Delnih kvadrov je 2^n (glej sl. 6). Če kvadra K ne moremo pokriti s končnim številom množic družine $\{O_i\}$, potem vsaj enega izmed delnih kvadrov ne bomo mogli pokriti s končnim številom teh množic. Izberimo en tak delni kvader in ga označimo s K_1. Tega spet razdelimo na 2^n kvadrov s polovičnimi stranicami in med njimi poiščimo takega, ki ga ne moremo pokriti s končnim številom množic družine $\{O_i\}$. Označimo ta kvader s K_2. Razpolavljanje nadaljujmo. Dobimo zaporedje vloženih kvadrov

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \tag{3}$$

v katerem je vsak člen kvader, ki ima polovico manjše robove od prejšnjega člena. Zaporedje (3) konvergira proti neki točki y, ki leži v notranjosti ali na robu prvotnega kvadra K. Vsaka okolica točke y vsebuje od nekega člena naprej vse kvadre zaporedja (3). Družina $\{O_i\}$ pokriva kvader K, torej tudi točko y. Naj bo npr. y v množici O_{i_0}. Ker je O_{i_0} odprta množica, je okolica točke y. Torej pokriva O_{i_0} vse kvadre zaporedja (3) od dovolj poznega naprej. To pa je v protislovju s tem, da nobenega kvadra K_m ne moremo pokriti s končnim številom množic družine $\{O_i\}$. Od tod sklepamo, da je zaprti kvader K kompaktna množica točk. Izrek 10 je dokazan.

Naj bo f zvezna realna funkcija definirana na kompaktnem prostoru X. Zaloga vrednosti $f(X)$ je po izreku 8 kompaktna množica točk na številski premici, torej po izreku 10 zaprta in omejena. Od tod sledi, da je funkcija f na obe strani omejena. Natančna spodnja in zgornja meja zaprte množice $f(X)$ sta elementa te množice. To pomeni, da sta ti dve meji funkcijski vrednosti. Torej funkcija f doseže v neki točki prostora X maksimum in v neki točki minimum. Tako smo dokazali

Izrek 11. *Zvezna realna funkcija definirana na kompaktnem prostoru je na obe strani omejena. Maksimalno in minimalno vrednost res doseže.*

Primer. Končen zaprt interval je kompaktna množica točk na številski premici. Realna zvezna funkcija je na takem intervalu omejena in na njem zavzame največjo in najmanjšo vrednost.

Izreka 5 in 10 povesta, da ima vsaka omejena neskončna množica točk evklidskega prostora vsaj eno stekališče.

Imejmo neskončno omejeno zaporedje med seboj različnih točk $\{a_k\}$ prostora $\mathbf{R}^n$. To zaporedje ima vsaj eno stekališče c. Okolica $K(c, 1)$ stekališča c vsebuje neskončno točk zaporedja $\{a_k\}$. Naj bo npr. a_{k_1} taka točka. Tudi v okolici $K(c, \frac{1}{2})$ je neskončno točk zaporedja. Zato lahko najdemo tako točko a_{k_2}, ki leži v tej okolici in je njen indeks $k_2 > k_1$. Potem izberemo v zaporedju točko a_{k_3}, $k_3 > k_2$, ki leži v okolici $K(c, \frac{1}{3})$ itd. Tako dobimo zaporedje a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, ..., ki je podzaporedje prejšnjega zaporedja in konvergira k stekališču c. Dokazali smo torej

Izrek 12. *Iz vsakega neskončnega omejenega zaporedja točk evklidskega prostora lahko izberemo konvergentno podzaporedje.*

Prostor $\mathbf{R}^n$ ni kompakten, vsaka omejena zaprta množica točk pa je. Torej je kompaktna vsaka zaprta krogla. Krogla s središčem v točki a je okolica točke a. Zato ima vsaka točka prostora $\mathbf{R}^n$ nešteto okolic, ki so kompaktne. Pravimo, da je prostor $\mathbf{R}^n$ lokalno kompakten.

Definicija. Topološki prostor X je lokalno kompakten, če ima vsaka njegova točka vsaj eno okolico, ki je kompaktna.

Na str. 7 smo ugotovili, da je odprta krogla prostora $\mathbf{R}^n$ homeomorfna prostoru $\mathbf{R}^n$ in punktirana sfera v $\mathbf{R}^n$ homeomorfna hiperravnini tega prostora. Zaprta krogla pa ni homeomorfna prostoru $\mathbf{R}^n$ in ravno tako ni sfera homeomorfna hiperravnini. Zaprta krogla in sfera sta namreč kompaktna prostora, $\mathbf{R}^n$ in hiperravnina, ki je v bistvu $\mathbf{R}^{n-1}$, pa nista kompaktna prostora.

Zaprti interval [0, 1] in krožnica sta oba povezana in kompaktna prostora dimenzije 1, pa kljub temu nista homeomorfna. To vidimo takole: homeomorfizem f bi preslikal krajišči 0 in 1 intervala v različni točki a in b na krožnici. Če krajišči odvzamemo, dobimo odprt interval, ki je še vedno povezana množica. Če pa odvzamemo na krožnici ustrezni točki a in b, dobimo množico, ki sestoji iz dveh odprtih disjunktnih krožnih lokov in ni povezana množica. Homeomorfizem f bi torej preslikal interval (0, 1) na nepovezan prostor. Ker to ni mogoče, zaprti interval in krožnica nista homeomorfna.

Zvezna injektivna preslikava f kompaktnega prostora X je po izreku 9 homeomorfizem prostora X na množico $f(X)$. Zvezna injektivna slika intervala [0, 1] v prostor $\mathbf{R}^n$ se imenuje jordanski lok. To je krivulja, ki je v relativni topologiji homeomorfna intervalu [0, 1]. Zvezna injektivna slika enotne krožnice v prostor $\mathbf{R}^n$ pa se imenuje enostavno sklenjena jordanska krivulja. Lahko tudi rečemo, da je jordanski lok topološka vložitev intervala [0, 1], sklenjena jordanska krivulja pa vložitev enotne krožnice v prostor $\mathbf{R}^n$.

Enotna sfera $S(o, 1) = S$ je $(n-1)$-razsežna hiperploskev v n-razsežnem prostoru $\mathbf{R}^n$. Torej je S vložena v $\mathbf{R}^n$. Ali se da morda sfera vložiti že v prostor $\mathbf{R}^{n-1}$? Spoznali bomo, da to ni mogoče. Pa denimo, da bi vložitev $f : S \to \mathbf{R}^{n-1}$ obstajala. Tu je f zvezna injektivna preslikava. Množica slik $f(S)$ bi bila homeomorfna enotni sferi S. Od prej vemo (str. 7), da je sfera brez severnega pola homeomorfna prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$. Sfera brez severnega pola je odprta okolica za južni pol. Torej ima vsaka točka na sferi odprto okolico, ki je homeomorfna prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$. Naj bo $a \in S$ poljubna točka, $f(a)$ njena slika pri vložitvi f, U pa naj bo taka odprta okolica točke a, ki je homeomorfna prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$. Ker je f homeomorfizem sfere S na množico $f(S) \subset \mathbf{R}^{n-1}$, je tudi množica $f(U)$ homeomorfna prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$. Toda $f(U)$ leži v prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$. Zato je po Brouwerjevem izreku odprta množica. Od tod sledi, da je $f(U)$ okolica točke $f(a)$ v prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$ in je $f(a)$ notranja točka množice $f(S)$. Ker je bila točka $a \in S$ poljubna, je $f(S)$ odprta množica točk v $\mathbf{R}^{n-1}$. Obenem pa je $f(S)$, ki je zvezna slika sfere S, kompaktna množica, torej zaprta in omejena. Toda prostor $\mathbf{R}^{n-1}$ je povezan in v njem ni omejene odprte in zaprte neprazne množice. To protislovje dokazuje, da ne moremo vložiti sfere S v prostor $\mathbf{R}^{n-1}$.

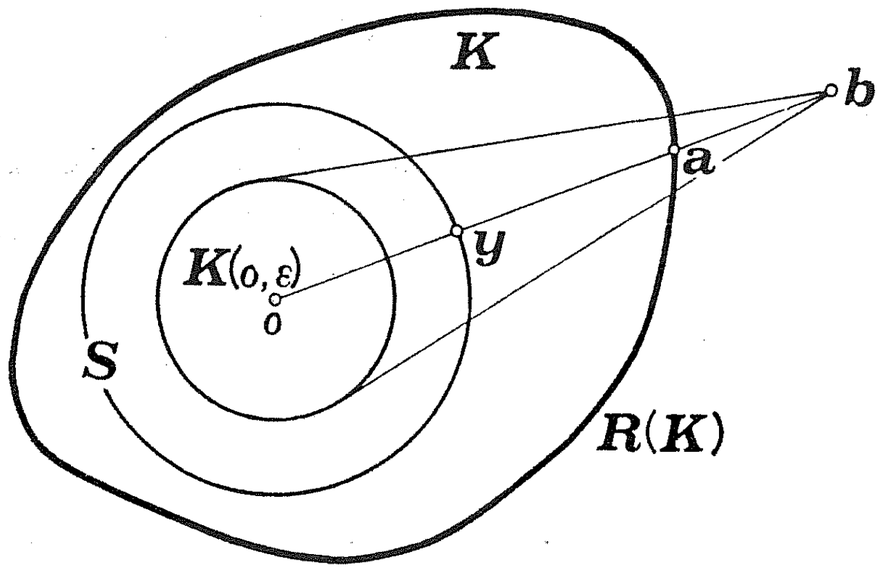
Na koncu si oglejmo še en primer za uporabo izreka 9. Najprej pa povejmo, kaj je *konveksna množica*. Množica točk $K \subset \mathbf{R}^n$ je konveksna, kadar ima tole lastnost: če sta točki a in b v množici K, so v množici K vse točke na daljici, ki veže a in b. Trikotnik, tetraeder, krogla, prostor $\mathbf{R}^n$ so primeri konveksnih množic.

Izrek 13. *Omejena zaprta konveksna množica točk prostora $\mathbf{R}^n$ z vsaj eno notranjo točko je homeomorfna zaprti enotni krogli prostora $\mathbf{R}^n$.*

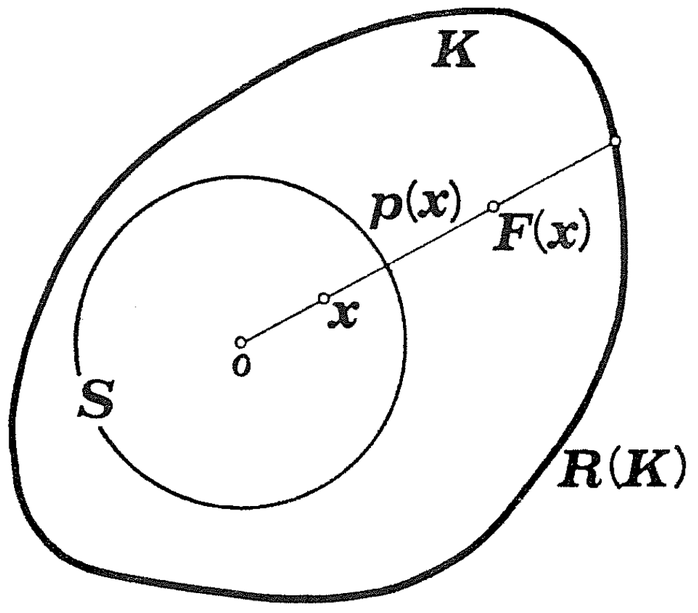
Dokaz. Naj bo $K \subset \mathbf{R}^n$ omejena zaprta konveksna množica, ki ima vsaj eno notranjo točko. Vzeti smemo, da je izhodišče o notranja točka. Krogla z dovolj majhnim polmerom ε in središčem o leži vsa v množici K. Vsaka robna točka množice K je torej oddaljena od izhodišča za najmanj ε. Rob $R(K)$ je zaprta in omejena množica. Zato je kompaktna. Oglejmo si tole preslikavo f roba $R(K)$ v prostor $\mathbf{R}^n$:

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|}, \qquad x \in R(K)$$

Preslikava f je očitno povsod na množici $R(K)$ zvezna. Slika $f(x)$ ima normo $\| f(x) \| = \| x \| / \| x \| = 1$, torej leži $f(x)$ na enotni sferi $S = S(o, 1)$ prostora $\mathbf{R}^n$. Dokažimo, da f preslika rob $R(K)$ povratno enolično na sfero S. V ta namen zvežimo izhodišče o s poljubno točko y na sferi S. Dobimo poltrak, ki prebode S v točki y. Ker je točka o v množici K in je K omejena, seče ta poltrak rob $R(K)$ vsaj v eni točki a (sl. 7). Slika točke a je izbrana točka y na sferi. Zato je f surjektivna preslikava. Denimo, da bi poltrak sekal rob $R(K)$ še v eni točki b, $b \neq a$. Točki a in b bi imeli isto sliko y na sferi. Naj bo a bliže izhodišču kakor b. Ker je množica K zaprta, je b v K. Zvežimo zdaj poljubno točko krogle $K(o, \varepsilon)$ (ta krogla leži v K) s točko b. Vse tako dobljene daljice leže v K, ker je K konveksna. Množica vseh točk na vseh teh daljicah je neke vrste stožec z vrhom v b (njegova osnovna ploskev je del sfere s polmerom ε) in a je notranja točka v tem stožcu (sl. 7). Od tod sledi, da a ni



Sl. 7



Sl. 8

robna točka množice K. To pritislovje dokazuje, da vsak poltrak iz izhodišča seče rob $R(K)$ v natanko eni točki. Torej je f povratno enolična preslikava množice $R(K)$ na sfero S. Ker je f zvezna in $R(K)$ kompaktna množica, je f po izreku 9 homeomorfizem. Ugotovili smo:

Rob omejene zaprte konveksne množice z vsaj eno notranjo točko je homeomorfen sferi S.

Označimo z $g : S \to R(K)$ inverzno preslikavo od f. Naj bo $x \neq o$. Zaznamujmo s $p(x)$ dolžino daljice, ki gre skozi točko x in sega od izhodišča do roba množice K (sl. 8). Ker je $p(x) = \| g(x/\| x \|) \|$, je $p(x)$, $x \neq o$, zvezna in omejena funkcija. Definirajmo zdaj preslikavo F prostora $\mathbf{R}^n$ vase takole

$$F(x) = \begin{cases} p(x)x, & x \neq o \\ o, & x = o \end{cases}$$

Preslikava F je povsod zvezna. Iz pomena funkcije $p(x)$ takoj sledi, da F preslika zaprto kroglo s središčem v izhodišču in polmerom 1 povratno enolično na množico K. F namreč linearno raztegne vsak radij krogle do roba množice K. Ker je zaprta krogla kompaktna, je F homeomorfizem enotne krogle na množico K. Izrek 13 je dokazan.

Rekli smo, da topologija študira lastnosti prostorov, ki se ohranjajo pri vsakem homeomorfizmu. Spoznali smo nekaj takih osnovnih lastnosti: povezanost, kompaktnost in lokalno kompaktnost prostorov.

Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 1/2

FUNDAMENTALNA GRUPA TOPOLOŠKEGA PROSTORA

PETER PETEK

AMS Subj. Class. (1970) 55-01

Topološkemu prostoru X priredimo grupo $\pi_1(X)$, imenovano fundamentalna grupa. Začnemo z množico poti v prostoru X, se nato omejimo na pentlje v izbrani točki x_0 in nazadnje vpeljemo ekvivalenčno relacijo — homotopnost. Kot primer izračunamo fundamentalno grupo krožnice in izvedemo nekaj posledic.

THE FUNDAMENTAL GROUP OF A TOPOLOGICAL SPACE

To a topological space X the group $\pi_1(X)$ is assigned and called its fundamental group. We begin with the set of paths in the space X, then we limit ourselves to the loops in the base point x_0, and finally introduce an equivalence relation through homotopy. As an example the fundamental group of the circle is computed and a few corollaries deduced.

Naš namen je prirediti vsakemu topološkemu prostoru X neko grupo $\pi_1(X)$ in vsaki zvezni preslikavi $f\colon X \to Y$ homomorfizem grup $\pi_1(f)\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$, tako da

1. kompoziciji zveznih preslikav $X \to Y \to Z$ ustreza kompozicija homomorfizmov $\pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to \pi_1(Z)$ in

2. identični preslikavi $X \to X$ ustreza identični izomorfizem $\pi_1(X) \to \pi_1(X)$.

Mimogrede, takole prirejanje se imenuje funktor iz kategorije topoloških prostorov v kategorijo grup.

Pot v prostoru

Kaj je pot v prostoru? Tako imenujemo vsako zvezno preslikavo γ enotskega intervala $I = [0, 1]$ v topološki prostor X. Simbolično zapišemo $\gamma : I \to X$.

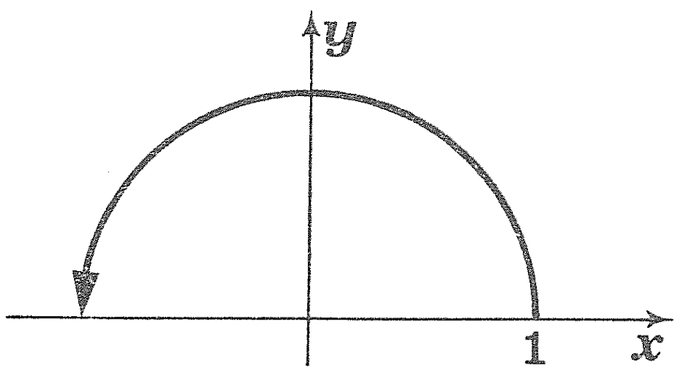
Zakaj ime pot? No, lahko si predstavljamo, da imamo na razpolago enoto časa in se sprehajamo po topološkem prostoru. Vrednost $\gamma(t)$ nam v vsakem trenutku t med 0 in 1 pove, kje v prostoru se nahajamo.

Primer. Prostor X naj bo ravnina R^2, vsaka njena točka je določena s parom koordinat (x, y). Primer poti v ravnini je preslikava $\gamma : I \to R^2$, dana s predpisom

$$\gamma(t) = (\cos \pi t,\ \sin \pi t).$$

Pot je narisana na sliki 1.

Z enakomerno hitrostjo se pomikamo po zgornji polovici krožnice v pozitivnem smislu.



Sl. 1

Seveda, če hočemo poznati pot, nam ne zadošča sama slika, ta nam da le tir poti; za vsak trenutek med 0 in 1 moramo vedeti, kje se nahajamo.

Prav lahko se zgodi, da v kakšni točki za krajši ali daljši čas obstanemo. Če sploh ves čas ostanemo v točki x_0, imenujemo tako pot *konstantno pot v točki* x_0 in jo označimo z ω_{x_0}. Potopis te poti je preprost:

$$\omega_{x_0}(t) = x_0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Če se slučajno zgodi, da se konec poti α ujema z začetkom poti β: $\alpha(1) = \beta(0)$, lahko poti sestavimo. Seveda moramo potem vsako od poti preteči že v polovici časa. Sestavljeno pot označimo z $\alpha * \beta$. To je spet preslikava $\alpha * \beta : I \to X$, določena takole:

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Poti $\alpha * \beta$ bomo rekli tudi produkt poti α in β. Pozor! Produkt ni komutativen $\alpha * \beta \neq \neq \beta * \alpha$.

Če obrnemo tok časa, dobimo nasprotno pot. Naj bo $\alpha : I \to X$ pot; nasprotna pot $\bar{\alpha}$ je določena s predpisom

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t).$$

Brez težav uvidimo, da je nasprotni poti nasprotna prvotna pot; $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$:

$$\bar{\bar{\alpha}}(t) = \bar{\alpha}(1-t) = \alpha(1-(1-t)) = \alpha(t)$$

in konstantna pot ω_{x_0} nasprotna sama sebi: $\bar{\omega}_{x_0} = \omega_{x_0}$.

Nasprotna pot produkta dveh poti je enaka produktu nasprotnih poti, ampak v obrnjenem vrstnem redu $\overline{\alpha * \beta} = \bar{\beta} * \bar{\alpha}$.

Za dokaz moramo prepisati definicije sestavljene poti in nasprotne poti. Najprej zapišimo sestavljeno pot

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

nato njej nasprotno pot

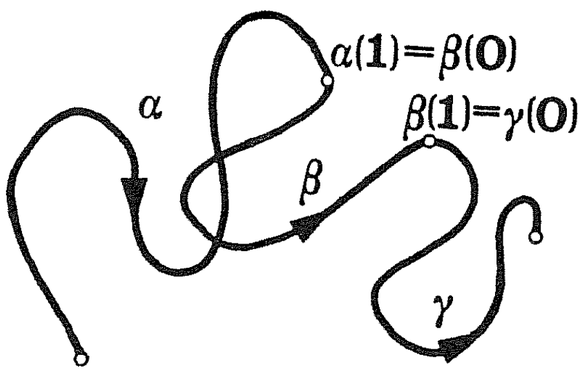
$$\overline{\alpha * \beta}(t) = \alpha * \beta(1-t) = \begin{cases} \alpha(2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ \beta(1-2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Produkt nasprotnih poti $\bar{\beta}$ in $\bar{\alpha}$ pa je enak

$$\bar{\beta} * \bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \bar{\beta}(2t) = \beta(1-2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2t-1) = \alpha(2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Oba izraza sta enaka in zveza je preverjena.

Označimo z $\Omega(X)$ množico vseh poti v prostoru X. Nekatere poti lahko sestavljamo (množimo) med seboj, vseh pa seveda ne. Recimo, da imamo tri poti α, β, γ in da jih moremo zmnožiti, se pravi, da je $\alpha(1) = \beta(0)$ in $\beta(1) = \gamma(0)$. (sl. 2)



Sl. 2

Vendar je produkt odvisen od vrstnega reda sestavljanja. Če najprej sestavimo poti α in β in nato dodamo še pot γ, dobimo pot $(\alpha * \beta) * \gamma$. V tem primeru porabimo za poti α in β po $\frac{1}{4}$ časa, za pot γ pa $\frac{1}{2}$. Če pa poti α dodamo produkt $\beta * \gamma$, dobimo pot $\alpha * (\beta * \gamma)$. Sedaj se $\frac{1}{2}$ časa sprehajamo po poti α, za vsako od poti β in γ nam ostane po $\frac{1}{4}$ časa.

Množenje v $\Omega(X)$ ni asociativno. Kasneje bomo vpeljali med potmi ekvivalenčno relacijo tako, da bo ta lepotna napaka odpravljena.

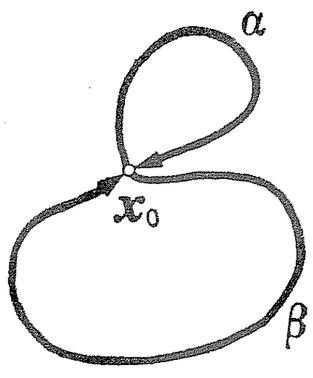
Pot, ki se začne in konča v isti točki x_0, se imenuje *pentlja v točki* x_0. Če sta α in β pentlji v točki x_0, je tudi $\alpha * \beta$ pentlja v x_0. (sl. 3)

Pentlji α nasprotna pot je spet pentlja.

Konstantna pot je vedno pentlja.

Množico pentelj v točki x_0 bomo označili z $\Omega(X, x_0)$.

$$\Omega(X, x_0) = \{a : I \to X \mid a(0) = a(1) = x_0\}$$



Sl. 3

Domenimo se še, da bomo množico poti, ki se začnov točki x_0 in končajo v točki x_1,označili z $\Omega(X, x_0, x_1)$. Seveda je $\Omega(X, x_0, x_0) = \Omega(X, x_0)$ množica pentelj v x_0.

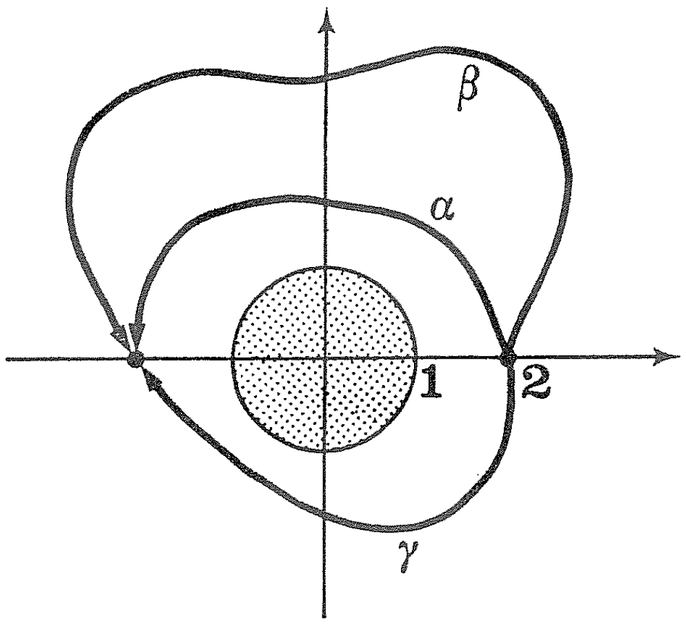
Homotopija

Vpeljali bomo ekvivalenčno relacijo med potmi, ki povezujejo dve točki. Rekli bomo, da sta dve poti homotopni, če lahko — površno rečeno — zvezno preidemo z ene poti na drugo.

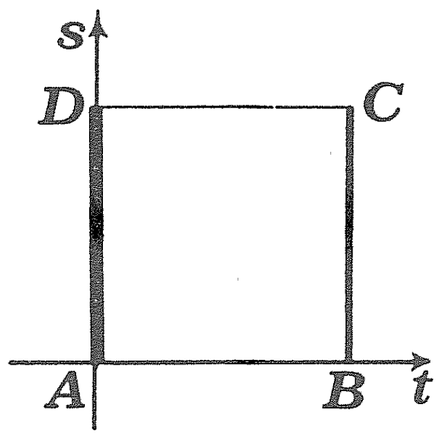
Primer. Prostor X naj bo ravnina, iz katere smo izrezali krog polmera 1 okoli izhodišča. Poti α in β sta homotopni, poti α in γ pa ne. (sl. 4)

Opredelimo nazorni pojem homotopnosti strogo matematično! Recimo, da imamo dve poti iz $\Omega(X, x_0, x_1)$, α in β. Narišemo kvadrat s stranico 1 kot kaže sl. 5 in preslikamo njegov rob v prostor X: stranico AB preslikamo s preslikavo α, stranico DC s preslikavo β, stranico AD pošljemo vso v začetno točko x_0 in stranico BC vso v končno točko x_1. Če moremo preslikavo z roba razširiti na ves kvadrat, to je še na notranjost, bomo rekli, da je pot α homotopna poti β in označili $\alpha \sim \beta$.

Kvadrat na sliki 5. je množica vseh točk (t, s), za katere je $t \in I$ in $s \in I$; torej je kartezični produkt $I \times I$.



Sl. 4

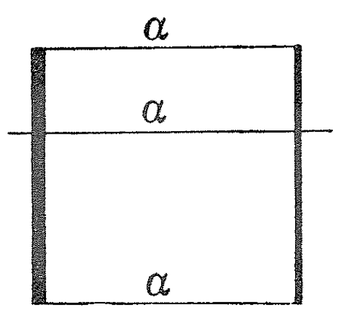


Sl. 5

Preslikavo kvadrata $H : I \times I \to X$ bomo imenovali homotopijo, ki veže poti α in β. Zapišimo zgornje pogoje:

$$H(t, 0) = \alpha(t) \qquad H(0, s) = x_0$$

$$H(t, 1) = \beta(t) \qquad H(1, s) = x_1$$



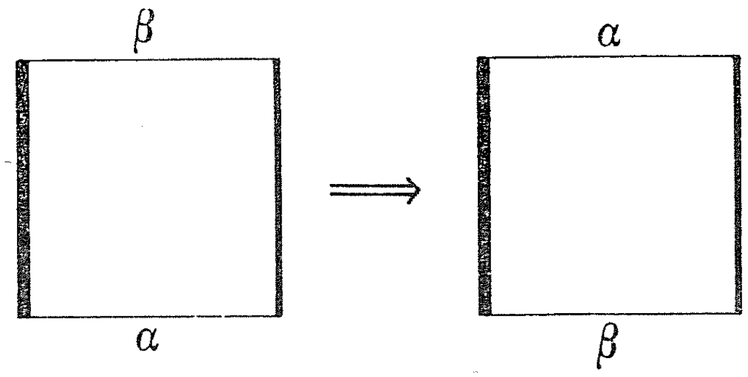
Sl. 6

Homotopija H nam da zvezno družino poti iz x_0 v x_1, za vsak s eno pot $H_s : H_s(t) = H(t, s)$ (sl. 6).

Pokažimo, da je zgoraj definirana homotopnost ekvivalenčna relacija!

1. refleksivnost — vsaka pot je homotopna sama sebi $\alpha \sim \alpha$ Vse poti družine so kar enake poti α. $H(t, s) = \alpha(t)$.

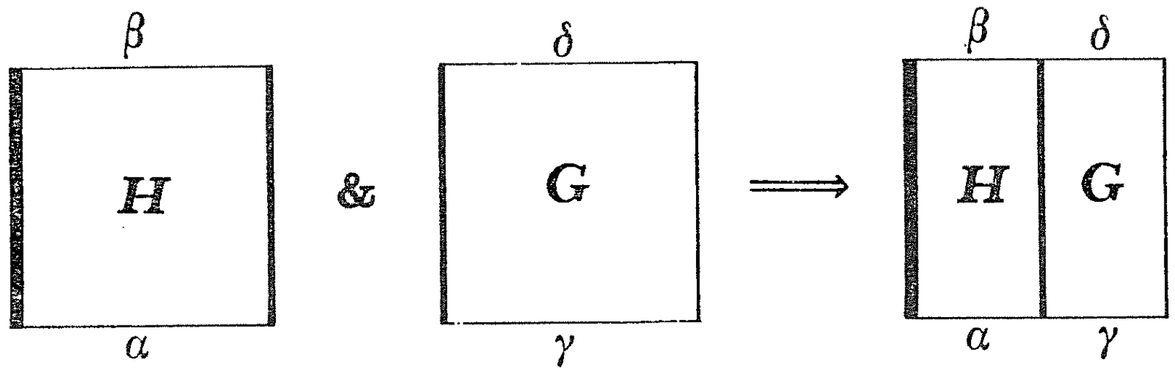
2. simetričnost — $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$



Sl. 7

Kvadrat zavrtimo okrog vodoravne srednjice (sl. 7). Naj bo $H: I \times I \to X$ homotopija, ki veže α in β. Potem je homotopija, ki veže β in α, dana z $G(t, s) = H(t, 1 - s)$.

3. tranzitivnost — $\alpha \sim \beta \,\&\, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (sl. 8). Homotopija K, ki veže α in γ, je sestavljena iz homotopije H, ki veže α in β, ter homotopije G, ki povezuje β in γ.



Sl. 8

$$K(t, s) = \begin{cases} H(t, 2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(t, 2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Preverili smo vse tri lastnosti, ki naj jih ima ekvivalenčna relacija, in ugotovili, da je homotopnost ekvivalenčna relacija.

Pojem homotopije ni omejen samo na primer poti v prostoru. V splošnem definiramo homotopijo takole:

Naj bosta f in g preslikavi iz prostora X v prostor Y. Pravimo, da sta f in g homotopni preslikavi, če obstaja taka preslikava $H: X \times I \to Y$, da velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$; preslikavo H bomo spet imenovali homotopija.

Pa recimo, da imamo podprostor $A \subset X$ in da za vsako točko $a \in A$ velja $f(a) = g(a)$. Če obstaja homotopija $H: X \times I \to Y$, ki slike na podprostoru A ohranja ($H(a, s) = f(a) = g(a)$), pravimo, da sta preslikavi f in g homotopni relativno glede na A in zapišemo

$$f \sim g \text{ rel } A.$$

Pri poteh nam je množica A sestavljena iz krajnih točk intervala $A = \{0, 1\}$. Opravka imamo z relativno homotopijo.

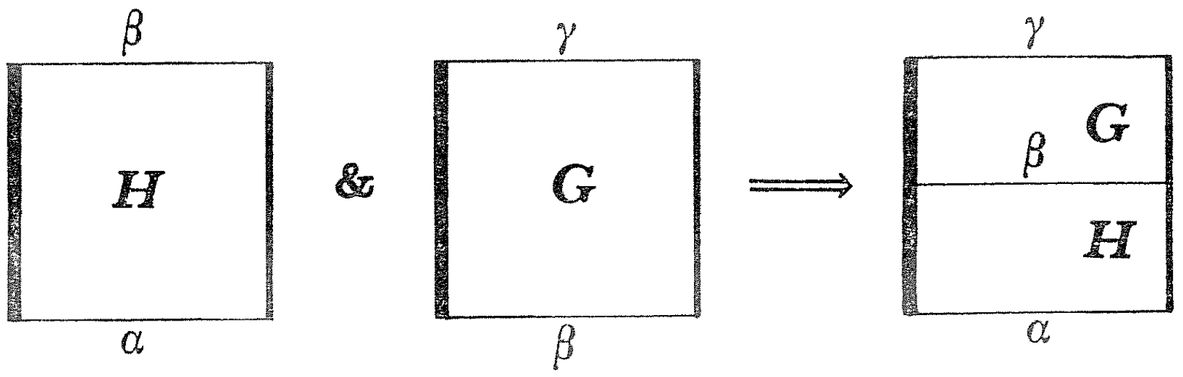
Homotopnost je tudi v splošnem primeru ekvivalenčna relacija, pa naj gre za absolutno ali relativno homotopnost.

Če je prostor X tak, da so vse preslikave vanj homotopne med seboj in zato homotopne konstantni preslikavi, se imenuje *kontraktibilen* prostor. Trivialen primer kontraktibilnega prostora je prostor z eno samo točko, saj so pač vse preslikave vanj konstantne. Dokažimo zdaj, da je krog D polmera 1 kontraktibilen!

Preprosto: krog postavimo v središčno lego in vpeljemo polarne koordinate. Pokazali bomo, da je vsaka preslikava $f: X \to D$ homotopna konstantni preslikavi v središče kroga. Naj bo $f(x) = (r(x), \varphi(x))$. Ustrezna homotopija je $H(x, s) = ((1 - s)r(x), \varphi(x))$.

Kaj se dogaja? Ko se s spreminja od 0 do 1, lezejo vse slike iz prvotnih položajev proti središču po svojih žarkih. Stiskanje (kontraktiranje) slik v eno točko je dalo tudi ime — kontraktibilnost.

Vrnimo se k potem! Homotopija poti je lepo uglašena z množenjem in s prehodom k nasprotni poti. Velja namreč izrek: Če je $\alpha \sim \beta$ in $\gamma \sim \delta$, potem je $\alpha * \gamma \sim \beta * \delta$. Dokaz je na sliki 9.

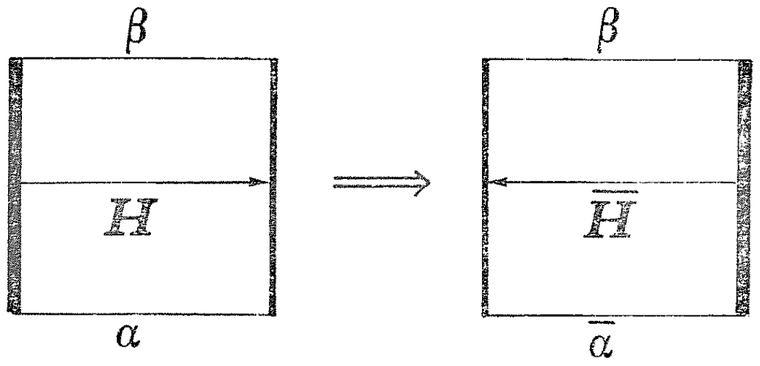


Sl. 9

In iz $\alpha \sim \beta$ sledi $\bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$, kar spet uvidimo s slike 10.

Bodi sedaj $\alpha: I \to X$ pot, $\alpha(0) = x_0$ in $\alpha(1) = x_1$. Prepričajmo se, da je produkt poti in nasprotne poti homotopen konstanti, in sicer je

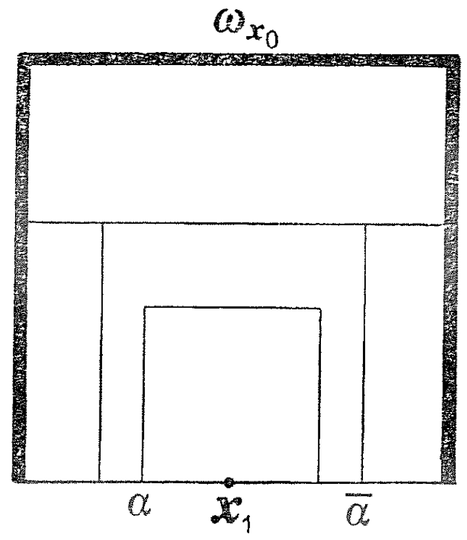
1. $\alpha * \bar{\alpha} \sim \omega_{x_0}$,
2. $\bar{\alpha} * \alpha \sim \omega_{x_1}$.



Sl. 10

Dokažemo 1. Homotopija, ki veže $\alpha * \bar{\alpha}$ z ω_{x_0}, je naslikana na sliki 11 ali s formulo

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1-s}{2} \\ \alpha\left(\dfrac{1-s}{2}\right) & \dfrac{1-s}{2} \leq t \leq \dfrac{1+s}{2} \\ \alpha(1-t) = \bar{\alpha}(t) & \dfrac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

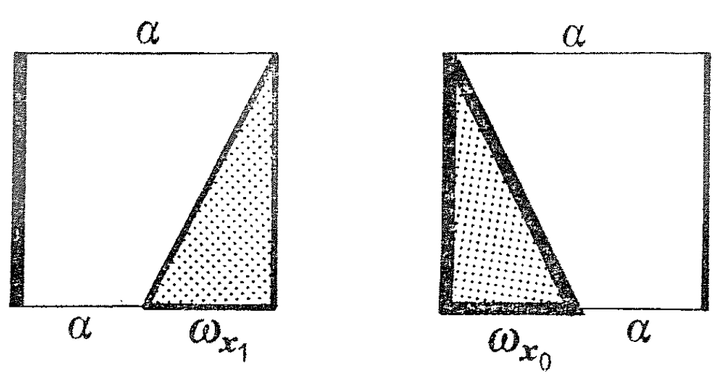


Sl. 11

Konstantna pot bo imela vlogo enote. Dokažemo namreč, da je produkt poti α s konstantno potjo ω_{x_1} homotopen poti α. Ravno tako je produkt $\omega_{x_0} * \alpha$ homotopenpoti α. Slika 12. pove vse, formula ni potrebna.

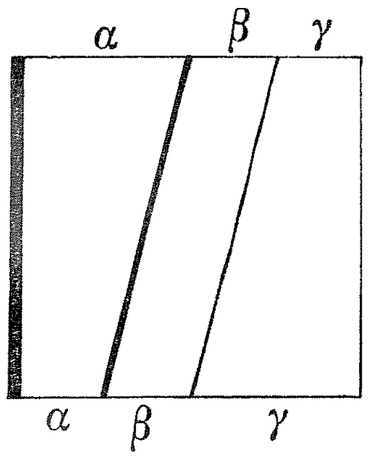
Ugotovili smo že, da množenje poti ni asociativno. Vendar velja izrek:

Naj bodo α, β, γ tri poti v prostoru X, ki jih moremo zmnožiti, t. j. $\alpha(1) = \beta(0); \beta(1) = \gamma(0)$. Potem je $(\alpha * \beta) * * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.



Sl. 12

Dokaz. Najprej narišemo sliko in si potem zapišemo še formulo:



Sl. 13

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{4} \\ \beta(4t - s - 1) & \dfrac{s+1}{4} \leq t \leq \dfrac{s+2}{4} \\ \gamma\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right) & \dfrac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Bazna točka

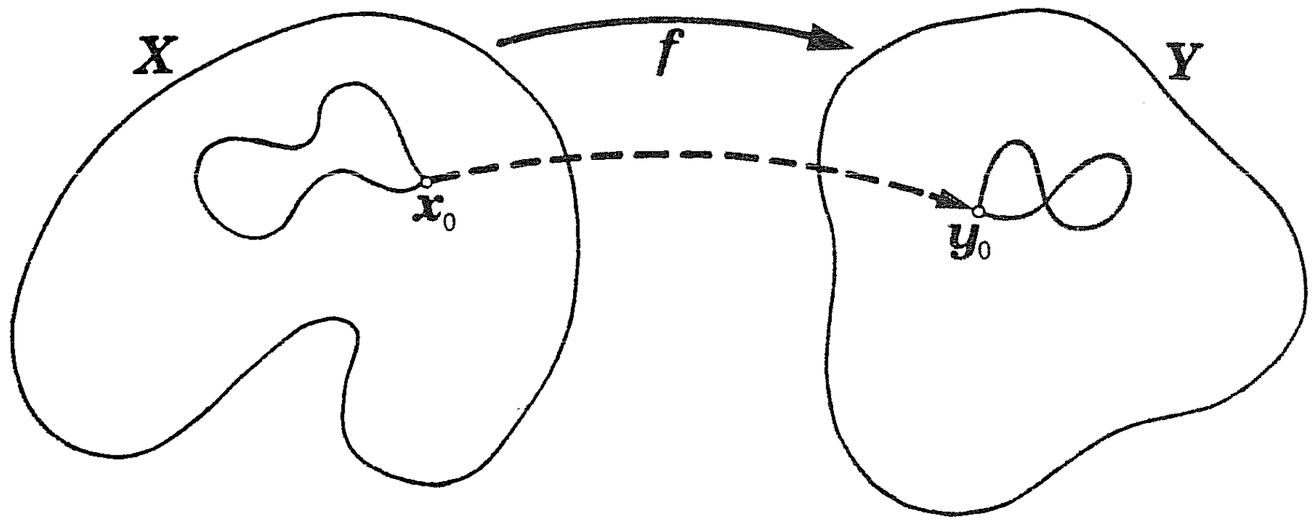
Izberemo v prostoru točko x_0 in jo imenujemo *bazna točka*. Tu se bodo začenjale in končavale vse naše poti. Opravka bomo imeli le še s pentljami, ki so privezane v tej izbrani točki. Zdaj tudi ni več problema z množenjem. Poljubni dve pentlji moremo zmnožiti. Množico pentelj $\Omega(X, x_0)$ razbijemo na ekvivalenčne razrede po homotopnosti. Dve homotopni pentlji bosta za nas enaki. Ker smo že dokazali, da razred produkta ni odvisen od izbora predstavnikov dveh razredov, lahko množimo razrede med seboj. Podobno je s prehodom k nasprotni pentlji — nasprotnemu razredu. In razred konstantne pentlje je enota za množenje.

Definicija. Fundamentalna grupa $\pi_1(X, x_0)$ je množica homotopskih razredov pentelj iz $\Omega(X, x_0)$. Grupna operacija je definirana z množenjem pentelj, prehod k nasprotni pentlji nam da inverzni element in konstantna pot v točki x_0 enoto.

Že sam zapis kaže, da je grupa odvisna od prostora X in od tega, kje smo izbrali bazno točko x_0, sedež potovalne agencije. V resnici je vseeno, kje to točko izberemo, če je le prostor s potmi povezan, tj. če moremo poljubni dve točki povezati s potjo.

Preslikave

Denimo, da imamo dva prostora X in Y z baznima točkama x_0 oziroma y_0 in zvezno preslikavo f prostora X v prostor Y (oznaka $f\colon X \to Y$), ki bazno točko prostora X preslika v bazno točko prostora Y, tedaj $f(x_0) = y_0$.



Sl. 14

Vsaki poti $\alpha : I \to X$ v prostoru X ustreza s pomočjo preslikave f dobljena pot v prostoru Y, $f.(\alpha) : I \to Y$. Ta je kar kompozicija

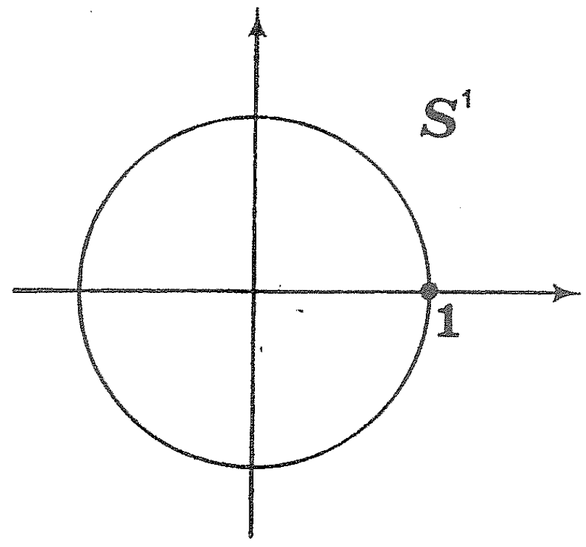
$$f.(\alpha)\,(t) = f(\alpha(t))$$

Seveda se pentlja v x_0 preslika v pentljo, ki je privezana v točki y_0. S pomočjo preslikave f tako dobimo preslikavo $f. : \Omega(X, x_0) \to \Omega(Y, y_0)$ množice pentelj v prostoru X v množico pentelj v prostoru Y.

Ta preslikava je tudi homomorfizem. Produkt dveh pentelj se preslika v produkt njunih slik. Nasprotna pentlja gre v nasprotno, konstantna v konstantno. Ker sta tudi sliki dveh homotopnih poti homotopni, se preslika ves razred, ki ga določa pot α, v isti razred v $\Omega(Y, y_0)$. Zato dobimo homomorfizem fundamentalnih grup. O tem, da identična preslikava $X \to X$ da identični homomorfizem, ni vredno izgubljati besed. Prav tako je očitno, da kompoziciji dveh preslikav $X \to Y \to Z$ ustreza kompozicija homomorfizmov fundamentalnih grup. Homeomorfizem prostorov da izomorfizem njunih fundamentalnih grup.

Fundamentalna grupa krožnice

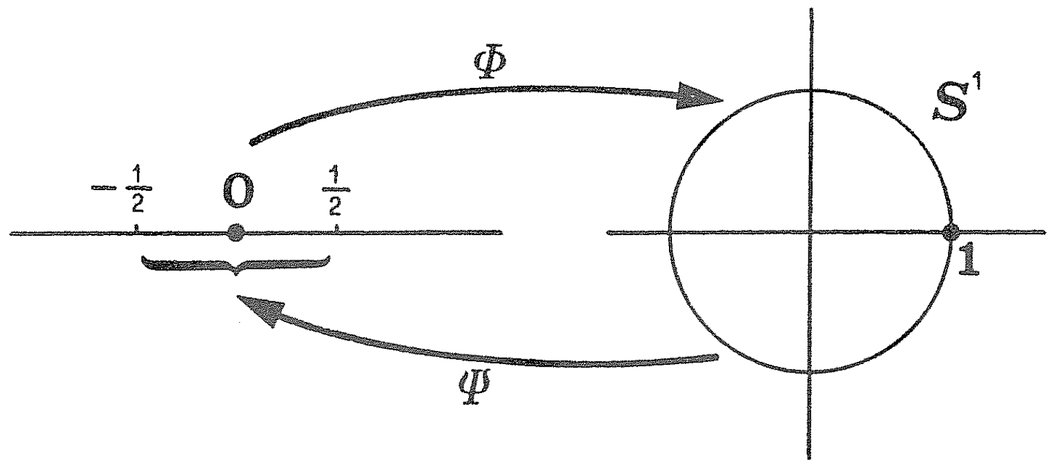
Krožnico S^1 bomo predstavili kot množico kompleksnih števil absolutne vrednosti 1. Število 1 bomo izbrali za bazno točko. (sl. 15)



Sl. 15

Imamo zvezno preslikavo realnih števil na krožnico, Φ: $R^1 \to S^1$, dano z $\Phi(x) = e^{2\pi ix}$.

Odprti interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ se homeomorfno preslika na $S^1 - \{-1\}$:



Sl. 16

Preslikavi Φ je inverzna preslikava $\psi : S^1 - \{-1\} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ki je definirana z

$$\psi(e^{i\Theta}) = \frac{\Theta}{2\pi}, \qquad \Theta \in (-\pi, \pi)$$

Dokažimo najprej pomožni izrek!

Naj bo $\sigma : I \to S^1$ pot, ki se začne v bazni točki $\sigma(0) = 1$. Potem obstaja natanko ena pot $\sigma' : I \to R^1$, taka, da je $\Phi\sigma' = \sigma$ in $\sigma'(0) = 0$.

Dokaz. Ker zveznost na zaprtem intervalu $I = [0, 1]$ pomeni hkrati tudi enakomerno zveznost, lahko najdemo $\delta > 0$, tako da iz $|t_1 - t_2| < \delta$ sledi $|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)| < 1$. Zato tudi ne more biti $\sigma(t_1) = -\sigma(t_2)$, saj je razdalja dveh diametralnih točka enaka 2. Zato lahko poiščemo vrednost funkcije ψ na kvocientu $\sigma(t_1)/\sigma(t_2)$. Ta vrednost je neko realno število med $-\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$. Poiščemo tako veliko naravno število N, da je vsak t z intervala I manjši od $N\delta$, to se pravi $N > 1/\delta$. Postavimo

$$\sigma'(t) = \psi\left(\sigma(t)/\sigma\left(\frac{N-1}{N}\,t\right)\right) + \psi\left(\sigma\left(\frac{N-1}{N}\,t\right)/\sigma\left(\frac{N-2}{N}\,t\right)\right) + \ldots$$
$$\ldots + \psi\left(\sigma\left(\frac{1}{N}\,t\right)/\sigma(0)\right)$$

V oklepaju je vedno kvocient dveh funkcijskih vrednosti, katerih argumenta se razlikujeta za manj kot δ in so zato vsi členi vsote definirani. Koliko je $\sigma'(0)$? Ker je $\sigma(0) = 1$ in $\psi(1) = 0$, so vsi členi enaki 0 in $\sigma'(0) = 0$.

Izračunajmo še $\Phi\sigma' : I \to S^1$. Spravimo zgornjo vsoto v eksponent, upoštevamo lastnosti eksponentne funkcije in dejstvo, da sta Φ in ψ inverzni funkciji. Tako je

$$\Phi\sigma'(t) = \left(\sigma(t)/\sigma\left(\frac{N-1}{N}\,t\right)\right) \cdot \left(\sigma\left(\frac{N-1}{N}\,t\right)/\sigma\left(\frac{N-2}{N}\,t\right)\right) \ldots \left(\sigma\left(\frac{1}{N}\,t\right)/\sigma(0)\right)$$

Skoraj vse se krajša, ostane le

$$\Phi\sigma'(t) = \sigma(t)/\sigma(0) = \sigma(t)$$

in σ' je res preslikava, kot jo zahteva izrek.

Je pa tudi edina. Recimo, da imamo še

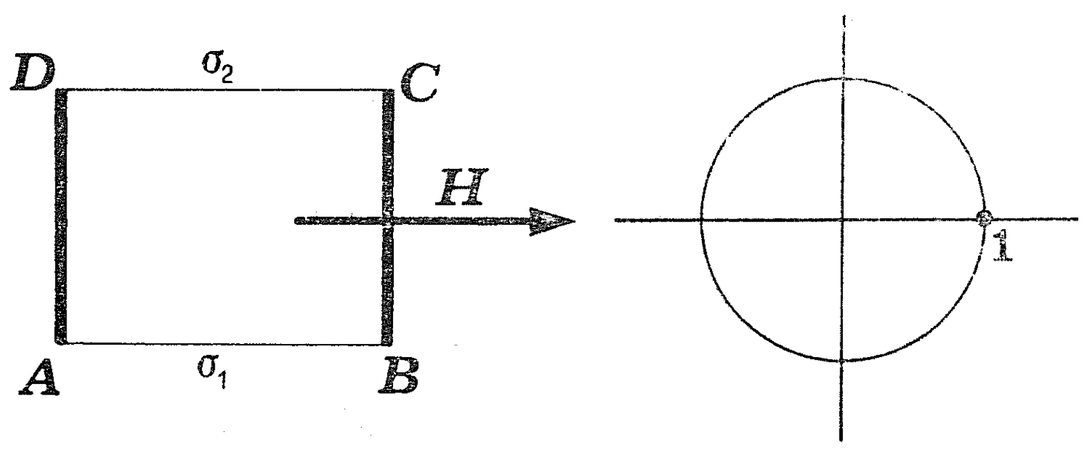
$$\sigma'' : I \to R^1, \quad \sigma''(0) = 0, \quad \Phi\sigma'' = \sigma$$

Razlika $\sigma'' - \sigma'$ je spet zvezna preslikava $I \to R^1$ in še $\Phi(\sigma'' - \sigma')(t) = e^{2\pi i(\sigma''(t) - \sigma'(t))} = \Phi\sigma''(t)/\Phi\sigma'(t) = \sigma(t)/\sigma(t) = 1$.
Ker pa Φ preslika v število 1 le cela števila $Z \subset R$, mora biti tudi $\sigma''(t) - \sigma'(t)$ celo število za vsak $t \in I$. Zato imamo lahko $\sigma'' - \sigma'$ za zvezno preslikavo v cela števila. To je mogoče le, če je ta preslikava konstantna. Ker pa je $\sigma''(0) = \sigma'(0) = 0$, sta preslikavi σ'' in σ' enaki za vsak t.

Naj bo zdaj σ pentlja, tj. $\sigma(1) = 1$. Seveda ni nujno, da je tudi σ' pentlja v R. $\sigma'(1)$ je sicer res celo število, a ne nujno nič. Dokazali bomo, da je končna točka $\sigma'(1)$ odvisna le od ekvivalenčnega razreda pentlje σ.

Videti moramo tedaj, da iz homotopnosti $\sigma_1 \sim \sigma_2$ sledi enakost $\sigma_1'(1) = \sigma_2'(1)$.

Dokaz gre podobno kot prejšnji. Bodita σ_1 in σ_2 pentlji v S^1 in H homotopija, ki ju veže.



Sl. 17

Poiskali bomo preslikavo H' kvadrata $I \times I$ v realna števila, tako da bo $\Phi H' = H$ in še $H'(AD) = 0$. Pravzaprav moramo opremiti s črtico enoparametrično družino poti H_s. Kot prej moramo najti tak pozitiven δ, da bo iz $|t_1 - t_2| < \delta$ sledilo $|H(t_1, s) - H(t_2, s)| < 1$ za vsak s in za vsak par t_1, t_2. Ravno tako kot zgoraj izberemo celo število N večje od $\frac{1}{\delta}$

in postavimo

$$H'(t, s) = \psi\left(H(t, s)/H\left(\frac{N-1}{N}t, s\right)\right) + \ldots + \psi\left(H\left(\frac{1}{N}t, s\right)/H(0, s)\right)$$

Stranica BC se mora preslikati vsa v celo število, ki je seveda isto kot končna točka poti σ_1' ali pa σ_2'. Zato sta ti dve končni točki enaki in trditev dokazana.

Sedaj lahko definiramo preslikavo

$$\chi : \pi_1(S^1, 1) \to Z$$

fundamentalne grupe krožnice v cela števila.

Takole ravnamo. Pentlji σ priredimo celo število $\sigma'(1)$, ker pa to celo število pripada vsem pentljam v razredu, ga določimo za sliko razreda. Če označimo z $[\sigma]$ razred pentlje σ, bi to zapisali s simboli

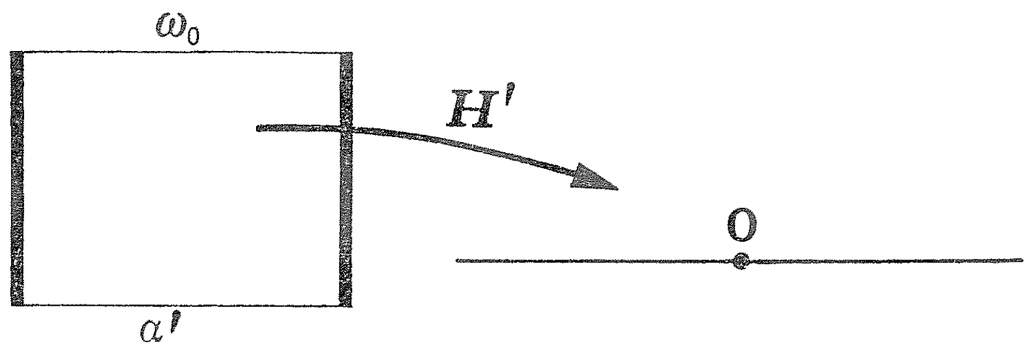
$$\chi([\sigma]) = \sigma'(1).$$

Prepričajmo se zdaj, da je χ homomorfizem grup. Bodita α in β pentlji v S^1 in $\alpha'(1) = m$, $\beta'(1) = n$. Pokazati moramo, da je $(\alpha * \beta)'(1) = m + n$. To pa ni težko. β' je pot v R^1, ki se začne v 0. Vzemimo $\beta'' = \beta' + m$. To je pot v R^1, ki se začne v m, se pravi tam, kjer se konča α'. Zato lahko zmnožimo α' in β'' in je $(\alpha * \beta)' = \alpha' * \beta''$. Končna točka te poti je seve $m + n$.

χ je epimorfizem, to se pravi, da moremo za vsako celo število n najti pentljo σ tako, da bo $\sigma'(1) = n$. Res! Začnimo kar s $\sigma'(t) = nt$. To je pot v R, ki se začne v 0 in konča v n. Če jo navijemo na krožnico s preslikavo Φ, dobimo pentljo $\sigma = \Phi\sigma'$, ki ustreza zgornji zahtevi. Razred $[\sigma]$ se preslika v celo število n.

Ugotovili pa bomo tudi, da je χ monomorfizem. To pomeni, da se le en element fundamentalne grupe $\pi_1(S^1, 1)$, le en razred, preslika v isto celo število. Ker je X homomorfizem grup, bo dovolj, če pokažemo, da se v nič preslika le en razred. Seveda je to razred konstantne pentlje.

Bodi zdaj α pentlja v S^1 in $\alpha'(1) = 0$. Našli bomo homotopijo med α in konstantno pentljo ω_1. Najprej zapišemo homotopijo H' med pentljo α' in konstantno pentljo ω_0 v R^1.



Sl. 18

$$H'(t, s) = (1 - s)\,\alpha'(t)$$

To homotopijo z eksponentno preslikavo Φ navijemo na krožnico in že imamo homotopijo $H = \Phi H'$, ki veže pentljo α s konstantno pentljo v S^1:

$$H(t, s) = e^{2\pi i(1-s)\alpha'(t)}$$

Za $s = 0$ imamo res $\Phi\alpha' = \alpha$, za $s = 1$ pa je pri vsakem t v eksponentu 0 in imamo konstanto 1.

Homomorfizem, ki je hkrati epimorfizem in monomorfizem, se imenuje izomorfizem. Fundamentalna grupa krožnice je izomorfna grupi celih števil.

Oglejmo si še nekaj posledic tega izreka!

Dokazali smo že, da je krog D (disk) kontraktibilen, se pravi: vse preslikave vanj so homotopne konstantni preslikavi. Zato je fundamentalna grupa kroga D trivialna — grupa z enim samim elementom.

Bodi A podprostor topološkega prostora X. Preslikava $f: X \to A$ se imenuje retrakcija, če je identiteta na A, torej $f(a) = a$ za vse $a \in A$.

Krožnica S^1 je podmnožica kroga D. Lahko se vprašamo, ali eksistira kakšna retrakcija $r: D \to S^1$. Videli bomo, da je ne more biti. Po domače: kože, ki je napeta na obroč, ne moremo zviti nanj, ne da bi kožo predrli.

Pa recimo, da obstaja retrakcija $r: D \to S^1$. Označimo še z $i: S^1 \to D$ vložitev krožnice v krog. Po definiciji retrakcije je kompozicija ri enaka identiteti na krožnici.

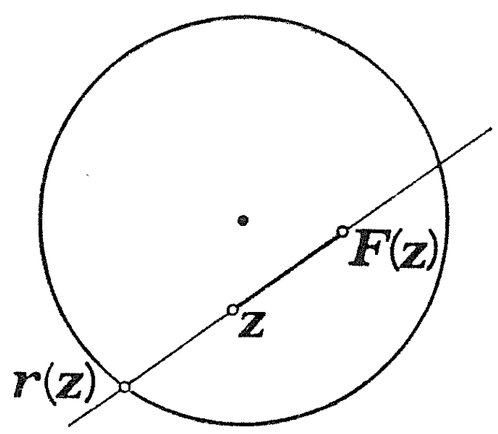
$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \to & D & \to & S^1. \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{id.}} & & & & \end{array}$$

Uporabimo obe lastnosti funktorja, ki nam daje fundamentalno grupo. Preslikavi *ri* ustreza homomorfizem, ki je kompozicija dveh homomorfizmov, enega za *r* in enega za *i*. Ta dva homomorfizma pa sta oba ničelna. Prvi zato, ker preslikava v ničelno grupo (fundamentalna grupa kroga je trivialna!), drugi zato, ker iz nje izhaja. Kompozicija dveh takih homomorfizmov je ničelni homomorfizem, ki vsa cela števila preslika v nič. Po drugi strani pa je *ri* identiteta. Identični preslikavi pripada identični izomorfizem, torej preslikava, ki vsa cela števila ohranja. Obojega ne more biti: po eni strani ničelni, po drugi pa identični homomorfizem. Protislovje nam pove, da smo napak privzeli predpostavko o retrakciji. Retrakcije ne more biti!

Ta izrek ima še zanimivo posledico, namreč Brouwerjev izrek o fiksni točki:

Vsaka preslikava $F\colon D \to D$ kroga v krog ima fiksno točko. Fiksna točka $z \in D$ je taka, da je $F(z) = z$.

Denimo, da za vsak $z \in D$ velja $z \neq F(z)$. Potem lahko napravimo naslednjo konstrukcijo. Točki z in $F(z)$ zvežemo s premico, premica seka krožnico v dveh točkah. Tisto presečišče, ki je bliže točki z, označimo z $r(z)$. Točka $r(z)$ leži seveda na krožnici S^1 in je kar enaka z, če že z leži na krožnici. Brez težav se prepričamo, da je preslikava $r\colon D \to S^1$ zvezna in ker ohranja točke na krožnici, je retrakcija. Ker retrakcije biti ne more, tudi ne more biti preslikave F brez fiksne točke.



Sl. 19

LITERATURA

[1] M. Greenberg, *Lectures on algebraic topology*, New York, Benjamin 1967
[2] S. T. Hu, *Homotopy Theory*, New York, Academic Press 1959

Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 1/2

PLOSKVE

JOŽE VRABEC

AMS Subj. Class. (1970): 57A05

V tem članku je podana osnovna topološka teorija ploskev.

SURFACES

This is an exposition of the basic topological theory of surfaces.

1. Definicija ploskve

S pojmom ploskve, pravzaprav z imenom ploskev, se srečamo pri učenju matematike že dokaj zgodaj; toda najbrž bo držalo, da celo diplomanti matematike na naši univerzi večinoma ne bi znali odgovoriti na vprašanje, kaj je ploskev. Tu bomo dali neko dokaj splošno in tudi splošno sprejeto (vendar ne edino mogočo) definicijo ploskve.

Značilna lastnost ploskev je, da so »ploščate«. Kako bomo to ploščatost izrazili matematično? Predstavljajmo si »ploskev« v $\boldsymbol{R}^3$, npr. površino kakega gladkega geometrijskega telesa. Vsaka točka ploskve ima v ploskvi majhno odprto okolico, ki je nekakšen krogec; ne pravi krog sicer, vendar zelo podobna krogu. Gre za podobnost, ki ji v topologiji pravimo homeomorfnost. Ploskev bomo zato definirali kot topološki prostor, v katerem ima vsaka točka odprto okolico, homeomorfno odprtemu enotskemu krogu E^o v ravnini $\boldsymbol{R}^2$ (E^o je torej množica vseh točk $t = (\tau_1, \tau_2) \in \boldsymbol{R}^2$, za katere je $\| t \|^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 < 1$). Krog E^o pa je homeomorfen celi ravnini $\boldsymbol{R}^2$ (glej [10; str. 1]) in zato bomo rekli:

1.1. **Definicija.** *Ploskev brez roba* je tak povezan podprostor F (poljubnega) evklidskega prostora $\boldsymbol{R}^n$, da ima vsaka točka iz F odprto okolico v F, ki je homeomorfna odprtemu enotskemu krogu E^o v $\boldsymbol{R}^2$ oziroma vsej ravnini $\boldsymbol{R}^2$.

Malo niže bomo definirali še splošne ploskve, ki imajo lahko tudi rob. Zahteva po povezanosti pri 1.1 seveda ni bistvena; nič važnega se ne bi spremenilo, če bi jo izpustili. Zahteva, da je F podprostor kakega $\boldsymbol{R}^n$, pa je tu predvsem zaradi nazornosti. Običajna definicija ploskve omenja le topološke lastnosti prostora samega, je pa ekvivalentna naši definiciji.

Pokažimo zdaj kak primer ploskve. Jasno je, da je $\boldsymbol{R}^2$ ploskev. Še več, vsaka povezana odprta množica v $\boldsymbol{R}^2$ je ploskev, saj ima v njej vsaka točka okolico, ki je pravi krog. Poglejmo še primer ploskve, ki ne leži v ravnini. Označimo z S^2 površino enotske krogle v $\boldsymbol{R}^3$, torej množico vseh $t \in \boldsymbol{R}^3$, za katere je $\| t \| = 1$. To množico bomo imenovali *2-razsežna enotska sfera;* kadar bo jasno, da govorimo o ploskvi, bomo »2-razsežna« izpuščali. Bodi $s = (0, 0, 1)$ »severni pol« na S^2 in $j = (0, 0, -1)$ »južni pol«. Množici $S^2 - \{s\}$ in $S^2 - \{j\}$ sta homeomorfni $\boldsymbol{R}^2$ (homeomorfizem je stereografska projekcija [10; str. 2]). Ker sta ti množici očitno odprti in pokrivata S^2, je S^2 ploskev (brez roba).

Oglejmo si zdaj zaprti enotski krog E v $\boldsymbol{R}^2$. Po našem občutku tudi ta zasluži ime ploskev. Ni pa ploskev brez roba (po definiciji 1.1), kajti točka $e = (1, 0)$, ki leži na robu kroga E, nima okolice v E, ki bi bila homeomorfna $\boldsymbol{R}^2$; to je lahko verjeti, dokaz pa ni čisto elementaren, ampak moramo pri njem uporabiti Brouwerjev izrek o invarianci odprte množice [10; str. 3]. Pač pa ima e okolice v E, ki so homeomorfne zaprti zgornji polravnini $\boldsymbol{R}_+^2 = \{(\tau_1, \tau_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \tau_2 \geq 0\}$: če označimo z U odprto desno polovico kroga E, torej množico

vseh točk iz E, ki imajo prvo koordinato pozitivno, potem lahko podamo dva med seboj inverzna homeomorfizma $f\colon U \to \boldsymbol{R}_+{}^2$, $g\colon \boldsymbol{R}_+{}^2 \to U$ takole:

$$f(t) = \left(\frac{t+i}{it+1}\right)^2, \qquad g(t) = \frac{1+i\sqrt{t}}{i+\sqrt{t}}$$

(pri teh formulah moramo točko $t = (\tau_1, \tau_2) \in \boldsymbol{R}^2$ interpretirati kot kompleksno število $\tau_1 + i\tau_2$). Prav lahko je pokazati, da ima tudi vsaka druga točka na robu E odprto okolico v E, ki je homeomorfna $\boldsymbol{R}_+{}^2$. Definicijo 1.1 bomo zato dopolnili takole:

1.2. **Definicija**. *Ploskev* je tak povezan podprostor F prostora $\boldsymbol{R}^n$, da ima vsaka točka iz F odprto okolico v F, ki je homeomorfna bodisi $\boldsymbol{R}^2$ (oziroma E°), bodisi $\boldsymbol{R}_+{}^2$ (oziroma $E^\circ \cap \boldsymbol{R}_+{}^2$). Množico vseh točk iz F, ki imajo kako okolico homeomorfno $\boldsymbol{R}^2$, imenujemo *notranjost* F in jo označujemo z int F. Komplement notranjosti, torej F — int F, imenujemo *rob* F in ga označujemo z ∂F.

Ploskev brez roba (po 1.1) je torej ploskev (po 1.2), pri kateri je rob prazna množica. Opozoriti moramo, da int F in ∂F nista v nobeni zvezi z relativno topološko notranjostjo in relativnim topološkim robom množice F v ambientnem prostoru $\boldsymbol{R}^n$ (glej [10; str. 4]). Pri primeru $E \subset \boldsymbol{R}^2$, ki smo ga imeli zgoraj, je sicer res int $E = E^\circ$ relativna notranjost za E v $\boldsymbol{R}^2$ in ∂E relativni rob za E v $\boldsymbol{R}^2$; toda E je tudi podprostor 3-razsežnega prostora $\boldsymbol{R}^3$ in v tem prostoru je notranjost E prazna, rob je pa ves E. Pojma notranjosti in roba iz definicije 1.2 sta »absolutna«; nanašata se le na prostor F in nista nič odvisna od ambientnega prostora.

2. Mnogoterosti

Po naši definiciji je ploskev prostor, katerega »majhni koščki« so topološko prav taki kot koščki 2-razsežnega evklidskega prostora. Sama od sebe se ponuja posplošitev na prostore, katerih majhni deli so podobni delom prostora $\boldsymbol{R}^m$ za poljubno izbran m. Takim prostorom pravimo mnogoterosti.

2.1. **Definicija**. Naj bo m poljubno naravno število; *m-razsežna mnogoterost* — ali kratko *m-mnogoterost* — je tak podprostor M prostora $\boldsymbol{R}^n$, da ima vsaka točka iz M odprto okolico v M, ki je homeomorfna bodisi $\boldsymbol{R}^m$ bodisi zaprtemu »zgornjemu« polprostoru $\boldsymbol{R}_+{}^m$. Notranjost int M in rob ∂M definiramo podobno kot v 1.2.

Ploskev je torej isto kot povezana 2-mnogoterost. Mnogoterosti dimenzije 1 bi smeli imenovati krivulje. Toda beseda krivulja se uporablja v toliko različnih pomenih, da bomo rajši ostali kar pri »1-mnogoterostih«. Za mnogoterosti dimenzije $m \geq 3$ pa sploh nimamo posebnih imen.

Primeri ploskev, ki smo jih navedli v § 1, imajo direktne posplošitve v vseh dimenzijah. Tako so $\boldsymbol{R}^m$, poljubna odprta množica v $\boldsymbol{R}^m$ in m-razsežna enotska sfera S^m (= površina enotske krogle v $\boldsymbol{R}^{m+1}$) m-mnogoterosti brez roba, $\boldsymbol{R}_+{}^m$ in zaprta enotska krogla v $\boldsymbol{R}^m$ pa sta m-mnogoterosti z (nepraznim) robom. Primeri 3-mnogoterosti z robom so še razna geometrijska telesa v $\boldsymbol{R}^3$. Površina vsakega takega telesa je »očitno« neka ploskev brez roba, zato nas ne bo presenetil tale izrek:

2.2. **Izrek**. *Če je M m-mnogoterost z robom, je ∂M (m-1)-mnogoterost brez roba.* (Pri tem pod 0-mnogoterostjo razumemo diskretno množico točk.)

Dokaz. Vzemimo poljubno točko $x \in \partial M$. Obstajata odprta okolica U za x v M in homeomorfizem $h\colon U \to \boldsymbol{R}_+{}^m$. Presek $U \cap \partial M$ je odprta okolica točke x v ∂M in h preslika $U \cap \partial M$ homeomorfno na $h(U \cap \partial M)$. Zato je dovolj pokazati, da je $h(U \cap \partial M) = \boldsymbol{R}^{m-1}$ (tu $\boldsymbol{R}^{m-1}$ pomeni množico vseh točk v $\boldsymbol{R}^m$, ki imajo m-to koordinato enako 0). Dokazali

bomo ekvivalentno trditev, namreč, da je $h(U \cap \partial M) \subset \mathbb{R}^{m-1}$ in $h(U - \partial M) \subset \mathbb{R}_+^m - \mathbb{R}^{m-1}$.

Vzemimo poljubno točko $y \in U \cap \partial M$. Če slika $h(y)$ ne bi ležala v $\mathbb{R}^{m-1}$, bi imela v $\mathbb{R}_+^m$ neko odprto okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^m$. S tem pa bi tudi točka y imela odprto okolico v M, ki bi bila homeomorfna $\mathbb{R}^m$. To pa ni mogoče, ker je $y \in \partial M$.

Vzemimo zdaj poljubno točko $y \in U - \partial M$. Ker y leži v int M, obstajata odprta okolica V za y v M in homeomorfizem g: $V \to \mathbb{R}^m$. Množici $g(U \cap V)$ in $h(U \cap V)$ ležita v $\mathbb{R}^m$ in sta homeomorfni (kompozitum $h \circ g^{-1}$ preslika prvo homeomorfno na drugo). Množica $g(U \cap V)$ je odprta v $\mathbb{R}^m$ (ker je $U \cap V$ odprta v M in zato v V in ker je g homeomorfizem); po Brouwerjevem izreku o invarianci odprte množice [10; str. 5] je zato tudi množica $h(U \cap V)$ odprta v $\mathbb{R}^m$. Množica, ki leži v $\mathbb{R}_+^m$ in ki seka $\mathbb{R}^{m-1}$, pa ne more biti odprta v $\mathbb{R}^m$. Zato je $h(U \cap V) \subset \mathbb{R}_+^m - \mathbb{R}^{m-1}$ in s tem tudi $h(y) \in \mathbb{R}_+^m - \mathbb{R}^{m-1}$. Izrek je dokazan.

Omenimo še, da se je za kompaktno mnogoterost brez roba udomačil izraz *sklenjena mnogoterost*, za nekompaktno mnogoterost brez roba pa *odprta mnogoterost* (pri ploskvah ustrezno uporabljamo izraza *sklenjena* in *odprta ploskev*). Vsaka odprta množica v $\mathbb{R}^m$ je odprta m-mnogoterost; od tod tudi ime odprta mnogoterost. Ime sklenjena mnogoterost pa je od tod, ker je vsaka kompaktna povezana 1-mnogoterost brez roba (torej kompaktna krivulja brez krajišč) sklenjena krivulja. Primer sklenjene m-mnogoterosti je sfera S^m.

3. Nekaj preprostih lastnosti ploskev

Vse trditve o ploskvah, ki jih bomo navedli v tem razdelku, veljajo, primerno posplošene, tudi za mnogoterosti poljubnih dimenzij. Očitno velja:

3.1. **Trditev.** *Bodi F ploskev in $G \subset \mathbb{R}^n$ topološki prostor. Če obstaja kak homeomorfizem h: $F \to G$, potem je G tudi ploskev in* int $G = h(\text{int } F)$, $\partial G = h(\partial F)$.

Iz te trditve in iz [10; izrek 13] npr. sledi, da je vsak kompakten konveksen lik v $\mathbb{R}^2$ ploskev z nepraznim robom in da je rob vsakega kompaktnega konveksnega telesa v $\mathbb{R}^3$ sklenjena ploskev.

Neposredno iz definicije ploskve sledi tale princip: poljubna trditev o ploskvah, ki govori samo o *lokalnih* lastnostih ploskve (to je o lastnostih majhnih delov ploskve), je pravilna v tem in samo v tem primeru, če je pravilna za $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}_+^2$. Navedimo tri primere takih pravilnih trditev.

3.2. **Trditev.** *Vsaka točka poljubne ploskve F ima v F poljubno majhne odprte okolice, ki so homeomorfne $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}_+^2$.*

3.3. **Trditev.** *Vsaka točka poljubne ploskve F ima v F poljubno majhne kompaktne okolice, ki so homeomorfne zaprtemu krogu E.*

3.4. **Trditev.** *Vsaka povezana odprta podmnožica poljubne ploskve je ploskev.*

Dokaz trditve 3.2. Vzemimo poljubno točko $x \in F$ in poljubno odprto okolico U te točke v F. Pokazati moramo, da tudi znotraj U obstaja neka okolica točke x, ki je homeomorfna $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}_+^2$. Zaradi enostavnosti vzemimo, da je $x \in$ int F; dokaz za primer $x \in \partial F$ je čisto podoben. Obstajata odprta okolica V točke x v F in homeomorfizem h: $V \to \mathbb{R}^2$. Množica $U \cap V$ je odprta v F, torej tudi v V, zato je njena slika $h(U \cap V)$ odprta v $\mathbb{R}^2$. Ker je $h(x) \in h(U \cap V)$, obstaja odprt krog $W \subset h(U \cap V)$ s središčem $h(x)$. Inverzna slika $h^{-1}(W)$ je odprta v V, torej tudi v F, ustreza relaciji $x \in h^{-1}(W) \subset U \cap V \subset U$ in h jo preslika homeomorfno na krog W, ki je dalje homeomorfen $\mathbb{R}^2$.

Dokaz trditve 3.3 je čisto podoben in ga bomo izpustili. Trditev 3.4 pa je neposredna posledica 3.2. Naj bo F poljubna ploskev in G poljubna povezana odprta podmnožica v F.

Izberimo poljubno točko $x \in G$. Ker je G okolica za x, obstaja po 3.2 odprta okolica V točke x v F, ki je vsebovana v G in je homeomorfna $\boldsymbol{R}^2$ ali $\boldsymbol{R}_+{}^2$. Seveda je V tudi odprta okolica za x v G in s tem je dokazano, da je G ploskev.

Navedimo še dva izreka o ploskvah, ki sta *globalne* narave (tj. govorita o ploskvi v celoti, ne le o njenih majhnih delih) in nista prav očitna, vendar ju je dovolj lahko dokazati.

3.5. **Izrek.** *Poljubni dve točki poljubne ploskve lahko povežemo v tej ploskvi z neko potjo. To se pravi: če sta x in y poljubni točki poljubne ploskve F, obstaja taka zvezna preslikava zaprtega intervala* $[0, 1]$ *v ploskev F, ki preslika* 0 *v x in* 1 *v y.*

3.6. **Izrek.** *Bodi F poljubna ploskev in bodita x in y poljubni točki v* int F. *Potem obstaja neki homeomorfizem $h: F \to F$, ki x preslika v y, vsako točko iz ∂F pa pusti na mestu.*

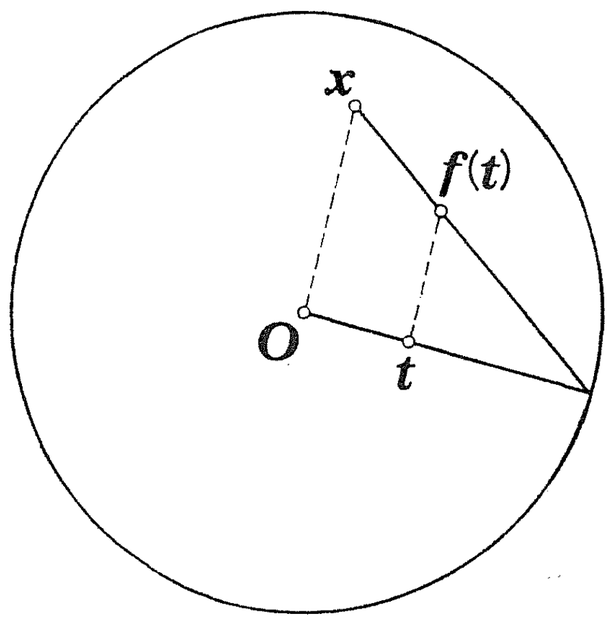
Izreka 3.5 in 3.6 imata zelo podobna dokaza, zato bomo dokazali le 3.6. Uvedimo najprej tale izraz: *disk* je prostor, homeomorfen zaprtemu krogu E. Pri dokazu izreka 3.6 bomo potrebovali tale pomožni izrek:

3.7. **Lema.** *Izrek* 3.6 *je pravilen, če je F disk.*

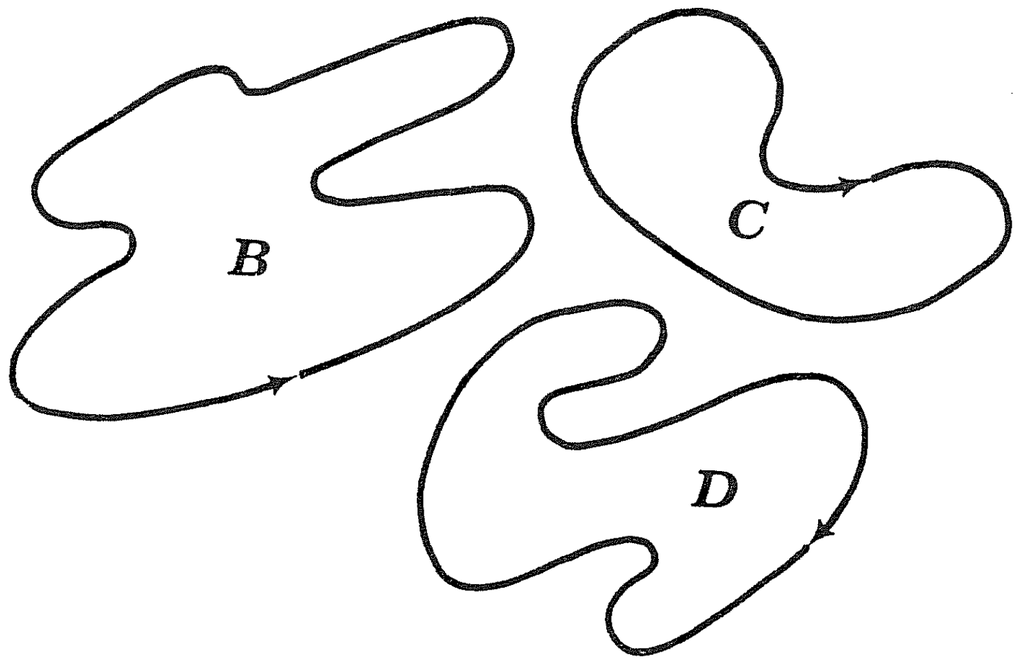
Dokaz. Privzemimo najprej, da je $F = E$. Naj bo $f : E \to E$ homeomorfizem, ki vsak radij kroga E preslika linearno na daljico od x do krajišča radija, ki leži na $S^1 = \partial E$ (sl. 1)- ta homeomorfizem je dan s formulo $f(t) = t + (1 - \| t \|)x$. Podobno konstruiramo homeo; morfizem $g: E \to E$, ki preslika vsak radij linearno na daljico od y do »zunanjega« krajišča radija. Kompozitum $h = g \circ f^{-1}$ je potem tak homeomorfizem iz E v E, kot smo ga želeli.

Vzemimo zdaj poljuben disk F. Izberimo neki homeomorfizem $k: F \to E$. Po prejšnjem obstaja tak homeomorfizem $h': E \to E$, da velja $h'(k(x)) = k(y)$ in $h'(t) = t$ za $t \in S^1$. Kompozitum $h = k^{-1} \circ h' \circ k$ je potem homeomorfizem iz F v F in zanj velja $h(x) = y$ in $h(z) = z$ za $z \in \partial F$.

Dokaz izreka 3.6. Označimo z G množico vseh tistih točk iz int F, v katere je mogoče preslikati x s kakim homeomorfizmom $F \to F$, ki ne premakne nobene robne točke; bodi $H =$ int $F -$ G. Iz 3.7 zlahka sledi, da sta množici G in H odprti. Res! Naj bo s poljubna točka v G in naj bo $f: F \to F$ tak homeomorfizem, da je $f(x) = s$. Po 3.3 obstaja disk $D \subset$ $\subset$ int F, ki je okolica za s. Hitro bomo videli, da je int $D \subset G$ (in zato je množica G odprta): če je t poljubna točka v int D, obstaja po 3.7 tak homeomorfizem $g: F \to F$, da velja $g(s) = t$ in $g(z) = z$ za $z \in F -$ int D; sestavljeni homeomorfizem $g \circ f$ preslika x v t, torej je $t \in G$.



Sl. 1



Sl. 2

Čisto podobno dokažemo, da je odprta tudi množica H. Vidimo, da je int F unija disjunktnih odprtih množic G in H. Ker je množica int F povezana (lahka posledica povezanosti ploskve F), mora biti ena od množic G, H prazna. Množica G ni prazna, saj vsebuje x. Zato je $H = \emptyset$ in $F = G$.

3.8. *Opomba.* Enako pokažemo, da za poljubno zaprto množico $Z \subset F$, katere komplement $F - Z$ je povezan, in za poljubni točki x in y iz (int F) $- Z$ obstaja homeomorfizem $h: F \to F$, ki ustreza zahtevama: $h(x) = y$ in $h(z) = z$ za $z \in Z$. Od tod pa (z indukcijo) takoj sledi: če si v int F poljubno izberemo paroma različne točke $x_1, \ldots, x_n$ in paroma različne točke $y_1, \ldots, y_n$, potem obstaja tak homeomorfizem $h: F \to F$, da velja $h(x_i) = y_i$ za $i = 1, \ldots, n$.

4. Orientabilnost

V tem razdelku nekatere stvari žal ne bodo ravno kristalno jasne. Zahteven bralec zato ne bo zadovoljen. Tolažim ga lahko le s tem, da se da vse, kar bomo tu počeli, napraviti popolnoma rigorozno.

Poljubno *premico* (ali daljico) *usmerimo* ali *orientiramo* tako, da si na njej izberemo neki vektor; smer tega vektorja je potem izbrana »pozitivna« smer ali izbrana *orientacija*. Pri risanju označimo to smer navadno s puščico. Podobno je *orientacija enostavne sklenjene krivulje* (tj. 1-mnogoterosti, ki je homeomorfna krožnici) izbira (»pozitivne«) smeri obhoda te krivulje. *Orientacija* poljubne *ravnine* pa je odločitev za »levi« ali »desni« koordinatni sistem v tej ravnini ali — kar je v bistvu isto — izbira »pozitivne« smeri vrtenja v ravnini. Smer vrtenja pa je spet v bistvu isto kot smer obhoda poljubne krožnice v ravnini ali tudi smer obhoda roba poljubnega diska v ravnini. Da poenostavimo izražanje, uvedimo tole definicijo:

4.1. **Definicija.** *Orientacija diska* je orientacija roba tega diska (z drugimi besedami — disk orientiramo tako, da orientiramo njegov rob).

V vsakem od doslej naštetih objektov (premici, daljici, enostavni sklenjeni krivulji, ravnini, disku) je mogoče izbrati dve različni orientaciji. Zelo važno je tole: če izberemo dva poljubna orientirana diska, recimo B in C, v isti ravnini, je njuni orientaciji mogoče primerjati. Rekli bomo, da sta B in C orientirana *skladno*, če določata isto orientacijo ravnine, tj. če se smeri vrtenja v ravnini, ki sta določeni z izbranima orientacijama v B in C, ujemata; v nasprotnem primeru sta B in C orientirana *neskladno*. Na sl. 2 sta diska B in C orientirana neskladno, disk D pa je orientiran skladno s C.

Ali je mogoče govoriti tudi o orientaciji poljubne ploskve? Gotovo lahko govorimo o lokalni orientaciji na ploskvi, kajti za majhne dele ploskve si lahko predstavljamo, da ležijo v $\mathbb{R}^2$. Natančneje, rekli bomo takole:

4.2. **Definicija.** *Lokalna orientacija ploskve F v točki $x \in$ int F* je taka izbira orientacij za vse diske v F, ki točko x vsebujejo v svoji notranjosti, da sta vsaka dva izmed teh diskov, ki imata poleg tega še to lastnost, da eden od njiju leži v drugem, orientirana skladno.

Naj omenimo, da pri dveh orientiranih diskih, recimo C in D, ki ustrezata relaciji $C \subset D$, res lahko govorimo o skladnosti oziroma neskladnosti orientacij (pri drugačnih parih diskov pa v splošnem ne): D preslikamo s kakim homeomorfizmom h na disk v $\mathbb{R}^2$ in dani orientaciji v C in D prenesemo s h na diska $h(C)$ in $h(D)$. Ni težko videti, da je odvisno samo od C in D (nič pa od h), ali sta orientaciji v $h(C)$ in $h(D)$ skladni. Zato lahko definiramo, da sta C in D orientirana skladno, če sta $h(C)$ in $h(D)$ orientirana skladno.

4.3. **Lema.** *Bodi D orientiran disk v ploskvi F in bodi $x \in$ int D. Potem obstaja ena in samo ena lokalna orientacija ploskve F v točki x, ki priredi disku D vnaprej dano orientacijo.*

Z drugimi besedami, vsak orientiran disk na ploskvi določa neko lokalno orientacijo ploskve v vsaki svoji notranji točki.

Dokaz. Če je C poljuben tak disk v F, da je $x \in$ int C, potem presek int $C \cap$ int D vsebuje po 3.3 tak disk B, da je $x \in$ int B. Orientirajmo B skladno z D, potem pa še C skladno z B. Če tako orientiramo vse možne diske C v F, za katere je $x \in$ int C, res dobimo neko lokalno orientacijo ploskve F v točki x.

4.4. **Posledica**. *Ploskev ima v vsaki svoji notranji točki natančno dve možni lokalni orientaciji.*

Velja opomniti, da dva orientirana diska na ploskvi, katerih notranjosti imata neprazen, toda nepovezan presek, lahko določata v nekaterih skupnih notranjih točkah isto lokalno orientacijo, v nekaterih pa različni lokalni orientaciji.

Recimo, da je F gladka ploskev v $\boldsymbol{R}^3$. Potem v poljubni točki $x \in \operatorname{int} F$ obstaja normala ploskve. Po 4.2 je lokalna orientacija ploskve v točki x dana z izbiro smeri vrtenja v ploskvi okoli točke x. Ta smer vrtenja pa natančno določa (po »pravilu desnega vijaka«) neko smer na normali ploskve v točki x (in obratno). Zato lahko lokalno orientacijo za F v točki x podamo z izbiro enotskega vektorja na normali ploskve F v točki x. Dokaj jasno je, kako zdaj definirati globalno orientacijo za F: kot skladno izbiro lokalnih orientacij, tj. kot tako izbiro enotskih vektorjev na vseh normalah ploskve, da se njihove smeri zvezno spreminjajo od točke do točke. Tudi v splošnem bomo definirali globalno orientacijo ploskve kot skladno izbiro lokalnih orientacij v vseh notranjih točkah ploskve. Natančneje:

4.5. **Definicija**. (*Globalna*) *orientacija ploskve* F je taka izbira orientacij za vse diske v F, da vsaka dva diska (katerih notranjosti imata neprazen presek) določata v vsaki točki, ki leži v preseku njunih notranjosti, isto lokalno orientacijo.

Iz 4.3 zlahka sledi

4.6. **Lema**. *Naj bo* $\{D_1, D_2, D_3, \ldots\}$ *taka* (*končna ali neskončna*) *družina diskov v ploskvi* F, *da njihove notranjosti pokrivajo* int F. *Potem vsaka taka izbira orientacij za te diske, da vsak par* D_i, D_j *določa v vsaki točki iz* $\operatorname{int} D_i \cap \operatorname{int} D_j$ *isto lokalno orientacijo, natančno določa neko orientacijo ploskve* F.

Ta lema je koristna iz praktičnih razlogov. Na vsaki ploskvi je namreč nepregledna množica diskov, medtem ko je recimo vsako kompaktno ploskev mogoče pokriti že z notranjostmi končno mnogih diskov (v resnici vedno zadostujejo že trije diski).

S tem, da smo orientacijo ploskve definirali, seveda nimamo še nobenega zagotovila, da orientacije ploskev obstajajo. Res nekatere ploskve ne premorejo nobene orientacije.

4.7. **Definicija**. Ploskev F imenujemo *orientabilno*, če ima kako orientacijo. Če pa na F ni nobene orientacije, je F *neorientabilna*.

Primer orientabilne ploskve je ravnina. Še več; prav lahko je videti, da je orientacija ravnine, kot smo jo definirali v 2. odstavku tega razdelka, in orientacija ravnine po definiciji 4.5 v bistvu ista stvar. Tudi vsaka ploskev, ki je homeomorfna kaki ploskvi v ravnini, je orientabilna; to sledi iz tehle dveh očitnih resnic:

4.8. **Trditev**. *Naj bo* F *orientabilna ploskev in* G *neka ploskev, ki je homeomorfna* F. *Potem je tudi ploskev* G *orientabilna.*

4.9. **Trditev**. *Bodita* F *in* G *ploskvi in naj bo* $G \subset F$. *Če je ploskev* F *orientabilna, je orientabilna tudi* G.

Tudi neorientabilne ploskve obstajajo; nekaj primerov bomo pokazali v prihodnjem razdelku.

Naj bo F ploskev in x_0 točka v int F. Izberimo si lokalno orientacijo za F v točki x_0. Kako bi to lokalno orientacijo razširili do globalne orientacije? Bodi x poljubna točka v int F. *Veriga majhnih diskov od* x_0 *do* x je tako (končno) zaporedje diskov $D_0, D_1, \ldots, D_n$ v F, da velja:

(a) $x_0 \in \operatorname{int} D_0$, $x \in \operatorname{int} D_n$,

(b) za $i = 1, 2, \ldots, n$ je $\operatorname{int} D_{i-1} \cap \operatorname{int} D_i \neq \emptyset$ (na to lastnost zaporedja se nanaša beseda »veriga«),

(c) za $i = 1, 2, \ldots, n$ leži $D_{i-1} \cup D_i$ v nekem disku na ploskvi (to je »majhnost« diskov).

Če imamo tako verigo od x_0 do x, lahko vzdolž nje prenesemo lokalno orientacijo iz x_0 v x. Lokalna orientacija v x_0 namreč določa neko orientacijo za D_0; iz zgornjih zahtev (b) in (c) sledi, da v D_1 obstaja natančno ena orientacija, ki je na int $D_0 \cap$ int D_1 skladna z dobljeno orientacijo v D_0; analogno pravkar dobljena orientacija v D_1 določa neko orientacijo v D_2 itd.; končno D_n določa po 4.3 neko lokalno orientacijo ploskve F v točki x.

Ni težko pokazati, da za vsako točko $x \in$ int F obstaja veriga majhnih diskov od x_0 do x. Točki x_0 in x zvežemo s potjo v F (glej 3.5). Če vsako točko te poti (mišljena je slika poti, kajti pot je v resnici preslikava) pokrijemo z notranjostjo nekega diska, dobimo odprto pokritje poti. Ker je pot kompaktna množica, lahko izmed vseh teh diskov izberemo končno kolekcijo diskov, katerih notranjosti tudi že pokrivajo pot. Lahko je videti, da se dajo ti diski uvrstiti v zaporedje tako, da sta izpolnjeni zgornji zahtevi (a) in (b); če smo začeli z dovolj majhnimi diski, bo izpolnjena tudi zahteva (c). Od tod zdaj sledi:

4.10. **Trditev.** *Orientabilna ploskev ima natančno dve orientaciji.*

Dokaz. Za orientabilno ploskev, recimo F, obstaja vsaj ena orientacija, tj. skladna izbira lokalnih orientacij. Če hkrati izprevržemo vse lokalne orientacije, očitno spet dobimo skladno kolekcijo lokalnih orientacij. Zato ima F najmanj dve orientaciji. Več jih pa ne more imeti, kajti z lokalno orientacijo v eni točki je globalna orientacija natančno določena. Izberimo neko globalno orientacijo in vzemimo v poljubno izbrani notranji točki x_0 ustrezno lokalno orientacijo. Točko x_0 lahko povežemo s poljubno drugo točko x z neko verigo majhnih diskov in vzdolž nje prenesemo lokalno orientacijo iz x_0 v x. Očitno mora pri tem vsak disk iz verige dobiti orientacijo, ki se ujema z izbrano globalno orientacijo ploskve; zato se mora tudi lokalna orientacija v x, ki jo dobimo s prenosom lokalne orientacije iz x_0, ujemati z lokalno orientacijo v x, ki jo določa izbrana globalna orientacija. Trditev 4.10 je dokazana.

Zgornji premislek nam da neko metodo za prepoznavanje orientabilnih oziroma neorientabilnih ploskev. Izberimo poljubni točki x_0 in x v int F in neko lokalno orientacijo v x_0. Če si izberemo verigo majhnih diskov od x_0 do x, lahko vzdolž nje prenesemo lokalno orientacijo iz x_0 v x. Toda različne verige od x_0 do x nam lahko dajo različne lokalne orientacije v x. Če dobimo pri vseh možnih verigah isto lokalno orientacijo v x in če velja to za vsako točko x iz int F (v resnici velja za vsako, če velja za eno), potem izbrana lokalna orientacija v x_0 natančno določa neko lokalno orientacijo v vsaki točki ploskve in očitno so vse te lokalne orientacije med seboj skladne; ploskev je torej orientabilna. Če pa pri kaki točki x lahko dobimo dve verigi majhnih diskov od x_0 do x, ki določata v x različni lokalni orientaciji, je ploskev neorientabilna.

Bodita $C_0, C_1, \ldots, C_m$ in $D_0, D_1, \ldots, D_n$ dve verigi majhnih diskov od x_0 do x. Zaporedje $C_0, C_1, \ldots, C_m, D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0$ je tedaj *sklenjena* veriga majhnih diskov od x_0 do x_0. Če prenesemo vzdolž nje lokalno orientacijo iz x_0 nazaj v x_0, bomo dobili v x_0 začetno lokalno orientacijo v tem in samo v tem primeru, ko dobimo s prenosom lokalne orientacije iz x_0 v x vzdolž izbranih dveh verig isto lokalno orientacijo v x. Vidimo, da velja:

4.11. **Trditev.** *Ploskev F je orientabilna natanko tedaj, ko ima tole lastnost: če prenesemo lokalno orientacijo vzdolž poljubne sklenjene verige majhnih diskov iz $x_0 \in$ int F nazaj v x_0, dobimo v x_0 začetno lokalno orientacijo.*

V resnici je dovolj, če pri tem gledamo samo verige, sestavljene iz diskov, ki jih jemljemo iz kake take družine diskov, da njihove notranjosti pokrivajo int F in da vsaka dva diska, katerih notranjosti se sekata, ležita v kakem disku na F.

4.12. *Opomba.* Orientacijo in orientabilnost mnogoterosti višjih dimenzij moremo definirati rekurzivno. Recimo, da že imamo definicijo za dimenzijo $m - 1$. Orientacijo

m-razsežne krogle definiramo kot orientacijo njenega roba, ki je $(m-1)$-mnogoterost (primerjaj 4.1); potem pa pri uvedbi pojma orientacije za poljubno m-mnogoterost uporabljamo pojem orientacije m-razsežne krogle enako, kot smo pri definiciji orientacije za poljubno ploskev uporabljali pojem orientacije diska. V vsaki dimenziji $m \geq 2$ obstajajo orientabilne in neorientabilne mnogoterosti.

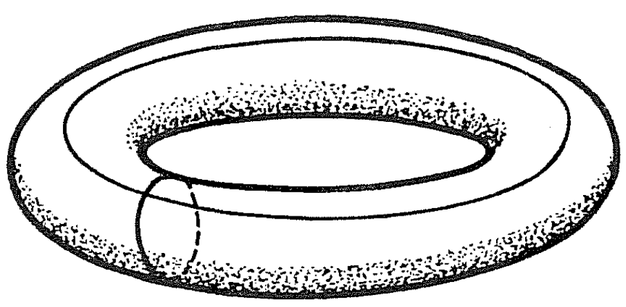
4.13. *Opomba.* Podobno kot smo definirali prenos lokalne orientacije vzdolž verige majhnih diskov, moremo definirati — z malo več truda — prenos lokalne orientacije vzdolž poljubne poti, in sicer za mnogoterosti vsake dimenzije. Velja trditev, analogna 4.11, da je (povezana) mnogoterost orientabilna natanko tedaj, ko se pri prenosu vzdolž poljubne pentlje (tj. sklenjene poti) lokalna orientacija ohrani. Vzemimo povezano m-mnogoterost M in poljubno točko $x_0 \in \operatorname{int} M$. Da se pokazati, da če se pri obhodu neke pentlje (od x_0 do x_0) lokalna orientacija ohrani, velja isto za vse homotopne pentlje, natančneje, za vse pentlje, ki predstavljajo isti element fundamentalne grupe $\pi_1(M, x_0)$ kot izbrana pentlja. To pomeni, da v $\pi_1(M, x_0)$ obstaja neka podmnožica $\omega(M, x_0)$, ki sestoji iz homotopskih razredov pentelj, pri obhodu katerih se lokalna orientacija ne spremeni. Lahko je videti, da je $\omega(M, x_0)$ podgrupa edinka v $\pi_1(M, x_0)$. Če je mnogoterost M orientabilna, je seveda $\omega = \pi_1$. Če pa je M neorientabilna, je ω prava podgrupa v π_1 (in ima indeks 2, kot se takoj vidi). Od tod sledi, da je vsaka enostavno povezana mnogoterost orientabilna — saj grupa $\pi_1(M, x_0)$, ki v tem primeru vsebuje samo enoto, nima nobene prave podgrupe.

5. Primeri orientabilnih in neorientabilnih ploskev

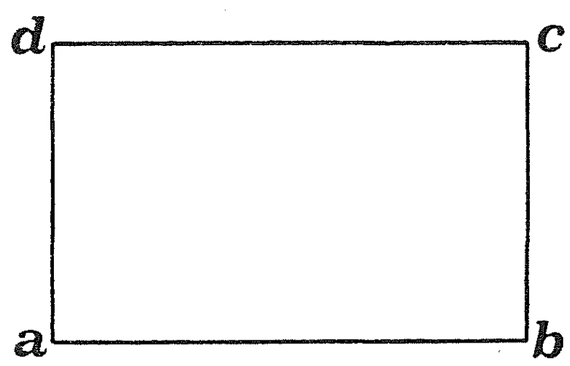
Omenili smo že, da so ploskve, ki ležijo v $\boldsymbol{R}^2$, orientabilne. Tu bomo pokazali še dve sklenjeni orientabilni ploskvi.

Sfera S^2 je orientabilna. Pri dokazu te trditve uporabimo 4.6. Sfero namreč lahko pokrijemo že z notranjostma dveh diskov — malo povečane »severne« in »južne« hemisfere. Bralcu prepuščam nalogo skladno orientirati ti dve hemisferi.

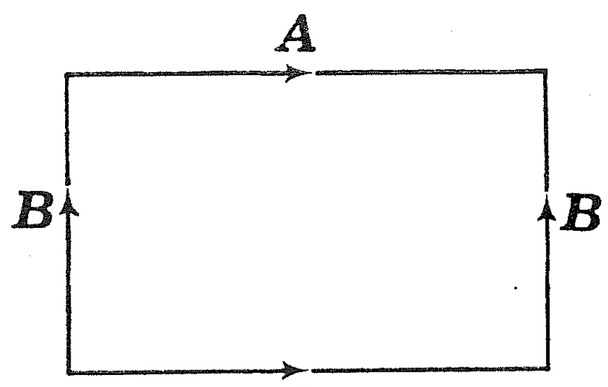
Drugi primer sklenjene orientabilne ploskve je *torus* (sl. 3), to je ploskev, ki jo opiše krožnica v $\boldsymbol{R}^3$, če jo zavrtimo za 360° okoli osi, ki leži v ravnini krožnice in ki krožnice ne seka. Druga definicija torusa: to je ploskev, ki jo dobimo iz pravokotnika *abcd* (sl. 4) tako, da zlepimo stranico *ab* z *dc* in stranico *ad* z *bc*; pri prvem lepljenju namreč nastane iz pravokotnika plašč valja, pri drugem pa iz plašča valja nastane torus. Iz roba pravokotnika nastane unija »meridianske« in »longitudinalne« krožnice na torusu, iz vseh štirih oglišč pa presečišče teh dveh krožnic (sl. 3).



Sl. 3



Sl. 4



Sl. 5

S podobnimi lepljenji bomo imeli v prihodnje še opraviti. Zato bomo pravilo, po katerem je treba stranice zlepiti, pri risanju na kratko podali tako, da bomo vsaki stranici, ki ju je treba zlepiti, označili z isto črko in obenem naznačili s puščico, kako moramo eno stranico položiti na drugo, preden ju zlepimo: položiti ju moramo tako, da se smeri puščic ujemata. Lepljenje iz prejšnjega primera podamo torej s sliko 5.

Pomen izraza »zlepiti dve stranici pravokotnika« nam je »iz prakse« domač. Toda tu bo treba dati temu tudi nekakšen matematičen pomen. Takole bomo rekli:

5.1. **Definicija.** Naj bo F 2-mnogoterost z nepraznim robom in G ploskev. Bodita J_1 in J_2 disjunktni, med seboj homeomorfni povezani 1-mnogoterosti v ∂F in bodi K povezava 1-mnogoterost v G. Naj bo dan homeomorfizem $h\colon J_1 \to J_2$. Rekli bomo, da G dobimo iz F tako, da J_1 *prilepimo k* J_2 *s homeomorfizmom* h, oziroma, da F dobimo tako, da G *prerežemo vzdolž* K, če obstaja zvezna preslikava $f\colon F \to G$, ki ustreza naslednjima zahtevama:

(a) f preslika $F - (J_1 \cup J_2)$ homeomorfno na $G - K$,

(b) za vsako točko $y \in K$ vsebuje inverzna slika $f^{-1}(y)$ natanko dve točki, od katerih je ena v J_1, druga pa je njena slika s h (in zato leži v J_2).

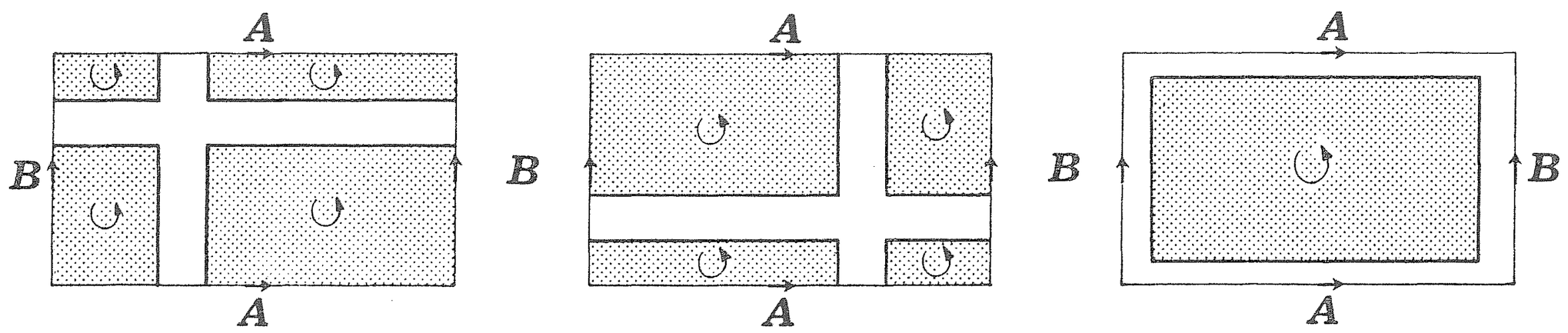
Rekli bomo tudi, da preslikava f *realizira* predpisano lepljenje.

Pri tem je seveda zanimivo vprašanje, ali ploskev G obstaja in ali je natančno določena (do homeomorfizma), če si poljubno izberemo F, J_1, J_2 in h. Izkaže se, da je odgovor na to vprašanje pritrdilen, če sta le mnogoterosti J_1 in J_2 kompaktni (pa tudi v mnogih drugih primerih). Na ta izrek se v prihodnje ne bomo sklicevali, ker bomo v vsakem primeru G kar konstruirali. Pač pa bomo na tihem večkrat uporabili neki drug izrek, namreč, da homeomorfizma h niti ni treba podati natančno; ploskev G je popolnoma določena že, če povemo, na katero smer v J_2 naj h preslika dano smer v J_1 (primerjaj prejšnji dogovor o puščicah na stranicah, ki jih je treba zlepiti).

Če zlepimo stranice pravokotnika, kot naznačuje sl. 5 (tu gre pravzaprav za dve zaporedni lepljenji), je rezultat (po definiciji 5.1) res torus. Zaradi enostavnosti vzemimo, da ima pravokotnik oglišča $a = (-\pi, -\pi)$, $b = (\pi, -\pi)$, $c = (\pi, \pi)$, $d = (-\pi, \pi)$. Za torus pa vzemimo, da ga dobimo tako, da okoli tretje koordinatne osi zavrtimo vertikalno krožnico, ki ima radij r in katere središče je za $d > r$ oddaljeno od tretje koordinatne osi. Neko preslikavo f pravokotnika na torus, ki realizira predpisano lepljenje — pravzaprav bo to kompozitum preslikav, ki realizirata prvo in drugo lepljenje — lahko zapišemo takole:

$$f(\pi_1, \pi_2) = ((d + r\cos\tau_2)\cos\tau_1, (d + r\cos\tau_2)\sin\tau_1, r\sin\tau_2)$$
$$-\pi \leq \tau_1 \leq \pi, \qquad -\pi \leq \tau_2 \leq \pi.$$

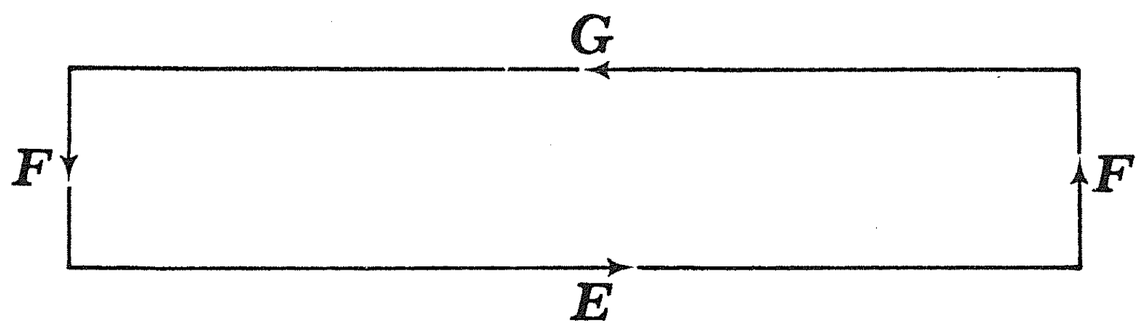
Torus je res sklenjena ploskev in sicer orientabilna. Obe trditvi bomo dokazali hkrati s tem, da bomo pokazali tri skladno orientirane diske na torusu, katerih notranjosti pokrivajo ves torus (glej 4.6). Taki trije diski so prikazani — vsak posebej — na »razrezanem« torusu na sl. 6



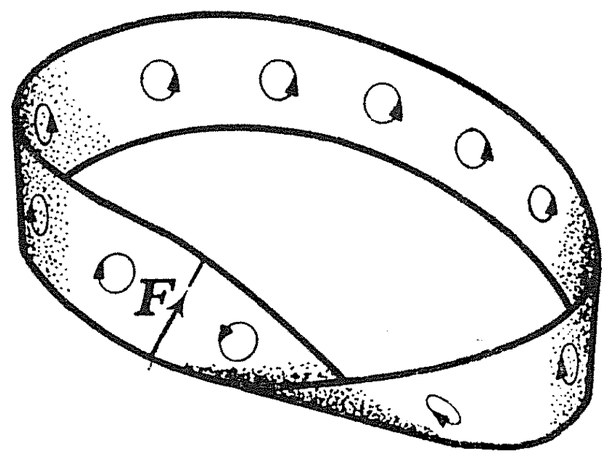
Sl. 6

Navedimo še nekaj primerov neorientabilnih ploskev. Iz pravokotnika dobimo z lepljenjem, kot je naznačeno na sl. 7, vsem dobro znani *Möbiusov trak* (sl. 8). Iz vodoravnih osnovnic pravokotnika nastane pri tem rob traku (rob je povezan!), iz vodoravne srednjice pravokotnika pa enostavna sklenjena krivulja, ki poteka po sredini traku in jo bomo zato

imenovali *srednjica* Möbiusovega traku. Na sl. 8 je pokazano, da se lokalna orientacija v Möbiusovem traku obrne, če jo prenesemo enkrat »naokoli«. Möbiusov trak je torej neorientabilna ploskev.



Sl. 7

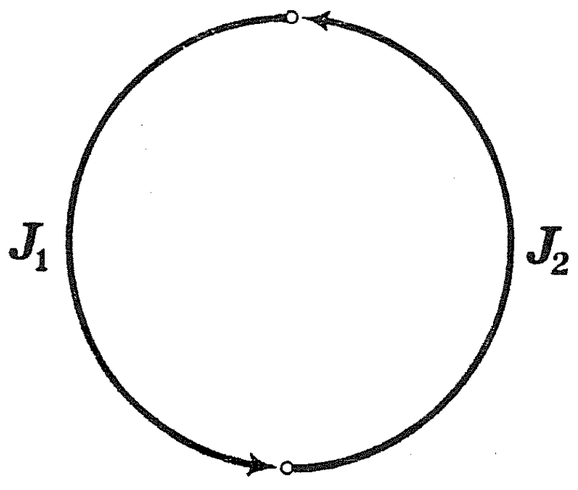


Sl. 8

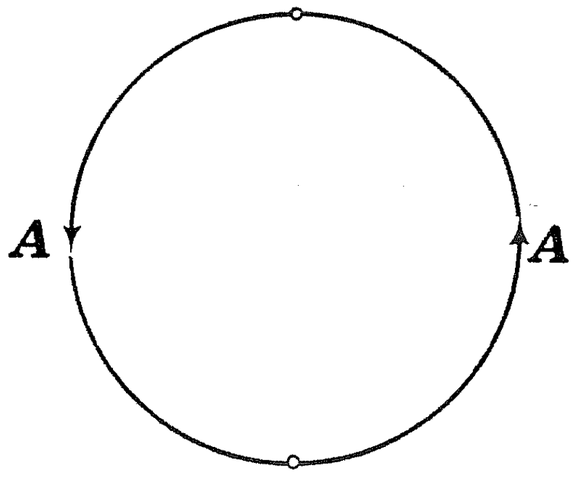
Še formula za tiste, ki imajo radi formule. V R^3 vzemimo na 1. koordinatni osi daljico L dolžine $2r$ s središčem $s = (d, 0, 0)$, pri čemer je $d > r$. Vrtimo ravnino, ki gre skozi 1. in 3. koordinatno os, okoli 3. koordinatne osi in hkrati vrtimo v tej premikajoči se ravnini daljico L s polovico manjšo kotno hitrostjo okoli s; ko s opiše polni kot, se L zasuče v navpični smeri za kot 180°. Pri tej dvojni rotaciji opiše L neki Möbiusov trak M. Preslikavo f pravokotnika z oglišči $(\pm\pi, \pm r)$ na M, ki realizira predpisano lepljenje, sestavimo takole:

$$f(\tau_1, \tau_2) = ((d + \tau_2 \cos \tfrac{1}{2}\tau_1) \cos \tau_1, (d + \tau_2 \cos \tfrac{1}{2}\tau_1) \sin \tau_1, \tau_2 \sin \tfrac{1}{2}\tau_1)$$
$$-\pi \leq \tau_1 \leq \pi, \qquad -r \leq \tau_2 \leq r.$$

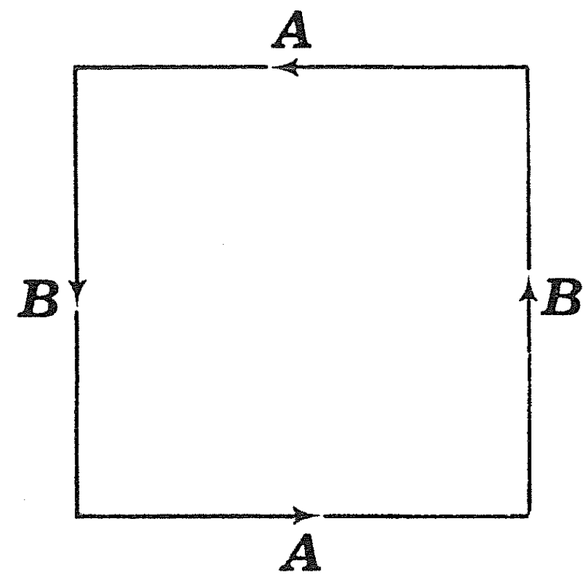
Zdaj pa še dva primera sklenjenih neorientabilnih ploskev. Vzemimo krog in njegov rob razdelimo na dve polkrožnici; če se dogovorimo, da k vsakemu od teh dveh lokov štejemo le po eno krajišče, dobimo dva disjunktna polodprta loka, recimo J_1 in J_2, ki skupaj pokrivata rob kroga (sl. 9). Bodi $h: J_1 \to J_2$ homeomorfizem, ki vsako točko iz J_1 preslika v diametralno ležečo točko na J_2. Če prilepimo J_1 k J_2 s homeomorfizmom h, dobimo sklenjeno ploskev, ki jo imenujemo *projektivna ravnina*. Predpisano lepljenje ponazorimo po našem dogovoru s sl. 10 ali, ekvivalentno, s sl. 11. Če poizkusimo to lepljenje izvesti »praktično«, recimo s kosom papirja in lepilom ali s kosom blaga ter šivanko in nitjo, ne bo šlo. Projektivne ravnine namreč ni mogoče vložiti v R^3 (definicija vložitve je v [10; str. 6]). Zato ne bo odveč konstruirati preslikavo f, ki realizira dano lepljenje.



Sl. 9



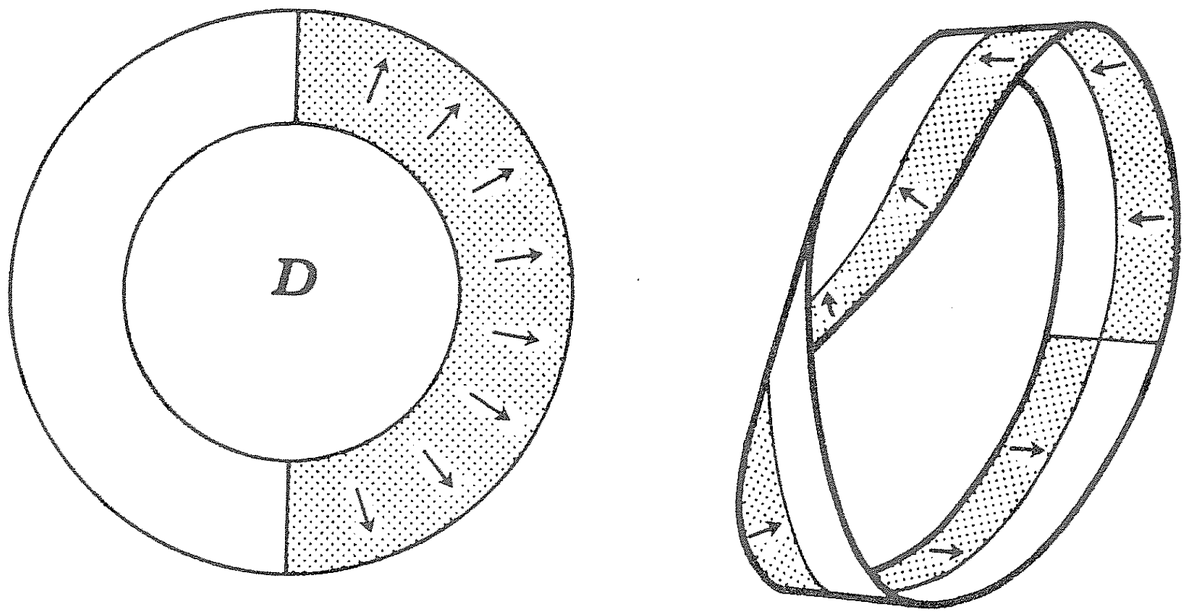
Sl. 10



Sl. 11

V našem krogu vzemimo manjši koncentričen krog D. Naj f preslika kolobar, ki je omejen z obema krožnicama, na Möbiusov trak M tako, da se bo notranja krožnica preslikala homeomorfno na ∂M, zunanja krožnica pa se bo dvakrat »navila« na srednjico v M tako, da bosta v vsako točko na tej srednjici prišli ravno dve med seboj diametralni točki z zunanje krožnice kolobarja; f naj bo homeomorfizem povsod razen na zunanji krožnici

(naj npr. f preslika vsako radialno prečnico kolobarja linearno na polovico neke prečnice Möbiusovega traku, ki je pravokotna na srednjico). Preslikava f je na sl. 12 ponazorjena tako, da je na levi senčena polovica kolobarja, na desni pa je senčena slika one polovice v M.



Sl. 12

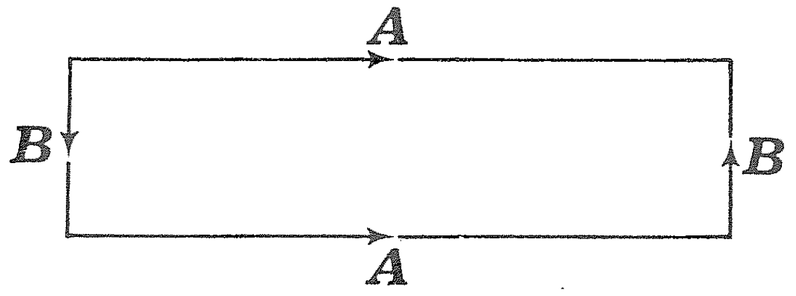
Vzemimo poljubno točko $c \in \boldsymbol{R}^4 - \boldsymbol{R}^3$ (torej tako točko iz $\boldsymbol{R}^4$, ki ima 4. koordinato različno od 0). Konstruirajmo stožec $C \subset \boldsymbol{R}^4$ z bazo ∂M in vrhom c; C je torej unija vseh daljic od c do točk v ∂M. Preslikavo f, ki je že definirana na zunanjem kolobarju, razširimo na ves krog takole: radij kroga D od središča do poljubne točke $x \in \partial D$ preslikajmo linearno na tvorilko stožca C od točke c do $f(x) \in \partial M$. Ni se težko prepričati, da tako res dobimo preslikavo, ki realizira lepljenje, predpisano s sl. 10. Obenem smo spoznali še dve stvari:

5.2. *Projektivno ravnino je mogoče vložiti v* $\boldsymbol{R}^4$.

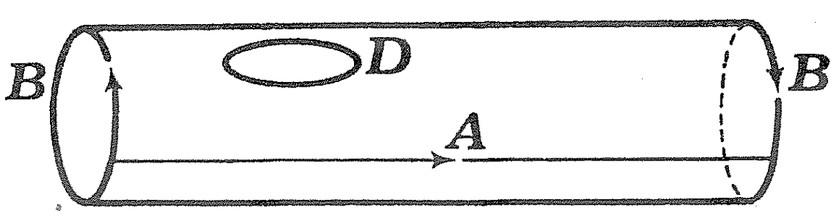
5.3. *Projektivna ravnina je unija Möbiusovega traku in diska, ki sta zlepljena vzdolž roba.*

Iz 5.3 in 4.9 sledi, da je projektivna ravnina neorientabilna.

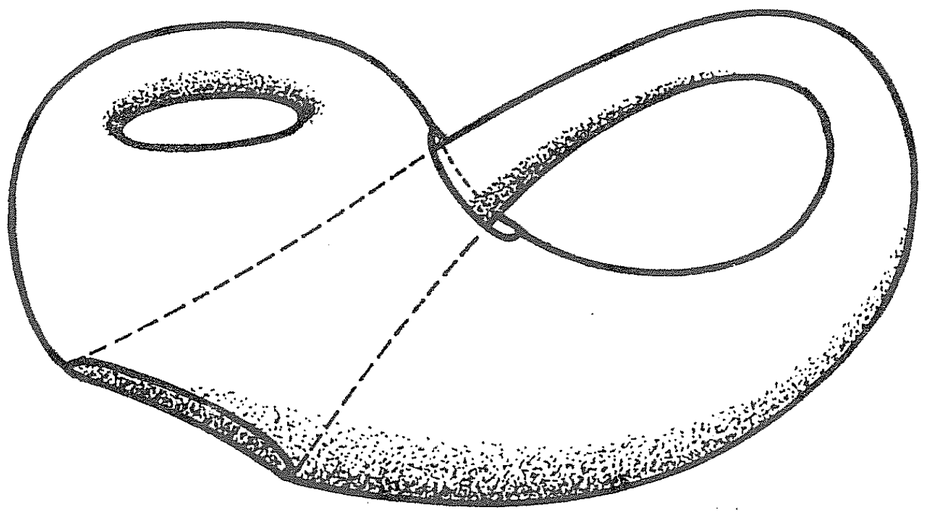
Zlepimo zdaj stranice pravokotnika tako, kot predpisuje sl. 13. Rezultat je spet sklenjena neorientabilna ploskev, imenovana *Kleinova steklenica*. Tudi te ni mogoče realizirati v $\boldsymbol{R}^3$, ampak moramo iti v $\boldsymbol{R}^4$. Prvo lepljenje, A na A, nam da plašč valja (sl. 14); pri tem iz obeh stranic B nastaneta robni krožnici. Če iz te ploskve — ali, kar je isto, iz prvotnega pravokotnika — odstranimo notranjost poljubnega diska D, lahko na ostanku izvedemo v $\boldsymbol{R}^3$ tudi predpisano lepljenje B na B (sl. 15); potem pa manjkajoči disk D vstavimo kot stožec z bazo ∂D in vrhom v $\boldsymbol{R}^4 - \boldsymbol{R}^3$ (primerjaj konstrukcijo projektivne ravnine).



Sl. 13



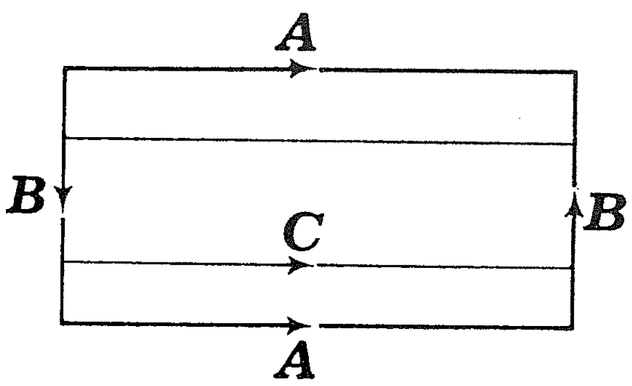
Sl. 14



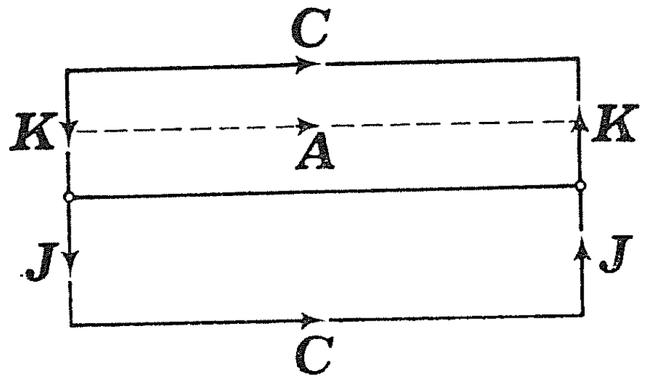
Sl. 15

Če pravokotnik na sl. 13 razdelimo podolgem na tri pravokotnike, od katerih sta zgornji in spodnji skladna, srednji pa je dvakrat širši od onih dveh (sl. 16), in če nato spodnji pravokotnik odrežemo in ga prilepimo na vrh (s tem da prilepimo A na A), dobimo novo predstavitev Kleinove steklenice, ki jo prikazuje sl. 17. Na tej sliki vidimo neposredno, da velja:

5.4. *Kleinova steklenica je unija dveh Möbiusovih trakov, ki sta zlepljena vzdolž roba. Kleinova steklenica je torej neorientabilna.*



Sl. 16



Sl. 17

5.5. *Opomba.* Verjetno je marsikdo pri geometriji slišal drugačno definicijo projektivne ravnine (evklidska ravnina, ki ji dodamo še »neskončno oddaljene« točke). Toda če v tisto projektivno ravnino uvedemo edino pametno topologijo, dobimo topološki prostor, ki je »naravno« homeomorfen naši projektivni ravnini.

5.6. *Opomba.* Direktna posplošitev projektivne ravnine je m-razsežni realni projektivni prostor $\boldsymbol{RP}^m$. Za vsak m je to povezana sklenjena m-mnogoterost; pri lihih m je orientabilna, pri sodih pa neorientabilna. V vsaki dimenziji $m > 2$ obstaja neorientabilna sklenjena m-mnogoterost, ki je direktna posplošitev Kleinove steklenice: v kartezičnem produktu $S^{m-1} \times [0, 1]$ (ki ga za primer $m = 2$ predstavlja sl. 14) zlepimo robni sferi na »neorientabilen način«.

6. Topološka klasifikacija sklenjenih ploskev

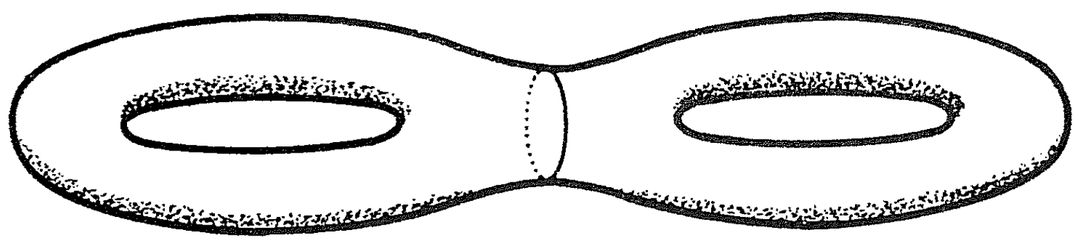
Ni težko priti do popolne topološke klasifikacije 1-mnogoterosti (glej npr. [8]):

6.1. **Izrek.** *Vsaka povezana 1-mnogoterost je homeomorfna natančno eni od mnogoterosti: krožnica, zaprti interval, odprti interval, polodprti interval.*

Namen tega in naslednjega razdelka je prikazati topološko klasifikacijo kompaktnih ploskev. Znana je tudi klasifikacija nekompaktnih ploskev, vendar je manj uporabna in jo je precej teže razložiti.

Uporabljali bomo tele stalne oznake: S^2 = sfera, D = disk, T = torus, M = Möbiusov trak, P = projektivna ravnina, K = Kleinova steklenica. Če bomo imeli hkrati opraviti z več diski, jih bomo označili z $D_1, D_2, \ldots$; analogno pri drugih ploskvah.

6.2. **Definicija.** *Povezana vsota* (poljubnih) ploskev F_1 in F_2 je ploskev, ki jo dobimo takole: v int F_i si izberemo disk D_i $(i = 1, 2)$, odstranimo int D_1 in int D_2, nato pa ploskvi $F_1 - \text{int } D_1$ in $F_2 - \text{int } D_2$ zlepimo z nekim homeomorfizmom $h: \partial D_1 \to \partial D_2$. Povezano vsoto F_1 in F_2 bomo označili z $F_1 \# F_2$.



Sl. 18

Na sl. 18 je povezana vsota dveh torusov. Iz 5.3 in 5.4 sledi, da je K povezana vsota dveh projektivnih ravnin.

Da se dokazati, da povezana vsota vedno obstaja in da je vrh tega z F_1 in F_2 do homeomorfizma natančno določena (torej neodvisna od D_1, D_2 in h); da je neodvisna od D_1 in D_2, nam pove tale izrek, ki sledi iz 3.6 in iz klasičnega Schoenfliesovega izreka [12]:

6.3. **Izrek.** *Če sta D_1 in D_2 poljubna diska v notranjosti poljubne ploskve F, obstaja homeomorfizem $F \to F$, ki D_1 preslika na D_2, vsako točko iz ∂F pa pusti na mestu.*

Povezano seštevanje je torej neke vrste »računska« operacija med topološkimi tipi (= homeomorfnostnimi razredi) ploskev. Prav lahko je videti, da je ta operacija komutativna in asociativna. Takoj tudi vidimo, da je S^2 »ničelni« element za to operacijo: za vsako ploskev F je $F \# S^2$ homeomorfno F; to je zato, ker je za poljuben disk $D \subset S^2$ razlika $S^2 - \operatorname{int} D$ tudi disk (spet po Schoenfliesovem izreku). »Nasprotni elementi« pa ne obstajajo, zato množica topoloških tipov ploskev ni grupa, ampak le polgrupa.

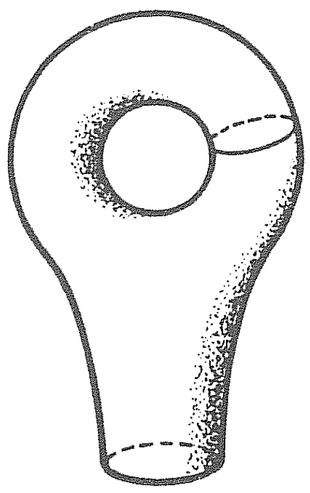
Dogovorimo se, da bomo (podobno kot v vsaki aditivno pisani polgrupi) za poljubno ploskev F in poljubno naravno število $n \geq 2$ označili z nF povezano vsoto n primerkov ploskve F. To definicijo lahko razširimo še na $n = 1$ in $n = 0$ (spet kot v vsaki drugi polgrupi): $1F = F$, $0F = S^2$. Zdaj lahko preprosto formuliramo najvažnejši izrek iz teorije ploskev:

6.4. **Klasifikacijski izrek za sklenjene ploskve.** *Vsaka sklenjena ploskev je homeomorfna eni in samo eni izmed ploskev nT $(n \geq 0)$, nP $(n \geq 1)$.*

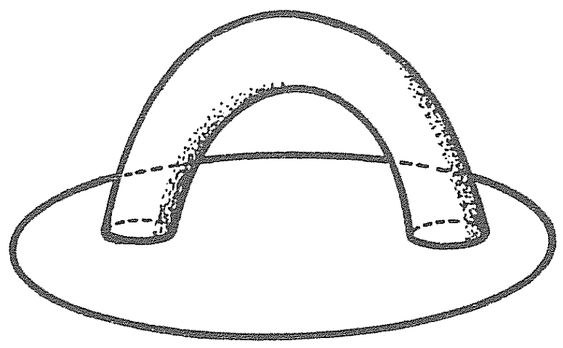
Lahko je videti, da je povezana vsota orientabilnih ploskev orientabilna, povezana vsota, v kateri je vsaj en sumand neorientabilen, pa neorientabilna. Zato je vsaka orientabilna sklenjena ploskev homeomorfna eni od ploskev nT, vsaka neorientabilna sklenjena ploskev pa eni od ploskev nP.

Število n pri predstavitvi ploskve kot nT ali nP imenujemo *rod* ploskve. Po izreku 6.4 je rod natančno določeno število. Obratno, z orientabilnostnim tipom in rodom je ploskev določena do homeomorfizma natančno.

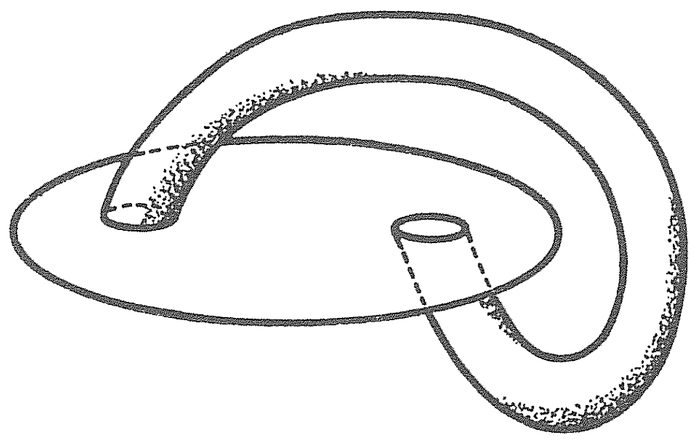
Bralec si lahko popoln (ali skoraj popoln) dokaz izreka 6.4 ogleda v knjigah [2], [5], [6], [9], [13]. (Ko smo že pri navajanju literature, priporočimo še [1] zaradi intuitivnega, »eksperimentalnega« pristopa in [4] zaradi odličnih slik.) Tu bomo samo prikazali potek dokaza. Najprej pa nekaj opomb.



Sl. 19



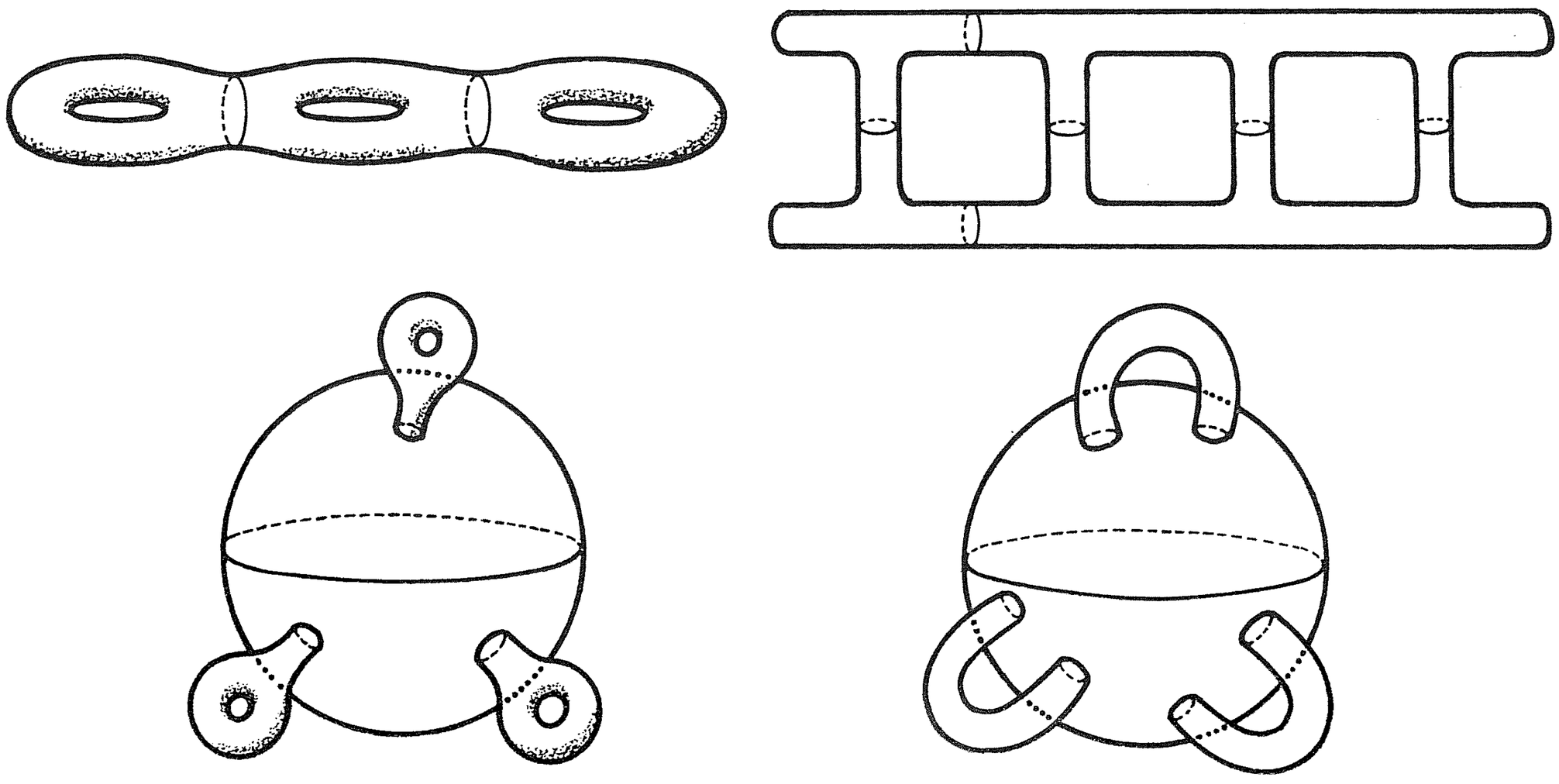
Sl. 20



Sl. 21

Če je $D \subset T$, lahko $T - \operatorname{int} D$ (»torus z luknjo«) predstavimo kot »ročaj« (sl. 19 ali sl. 20). Ploskev nT lahko zato predstavimo kot sfero, iz katere smo izrezali n diskov in jih nadomestili z ročaji ene ali druge oblike. Na sl. 22 imamo štiri med seboj homeomorfne ploskve, ki predstavljajo $3T$.

Če pa iz P izrežemo disk, dobimo M, kot vemo iz 5.3. Zato lahko nP predstavimo kot sfero, iz katere smo izrezali n diskov in potem luknje zakrpali z Möbiusovimi trakovi.

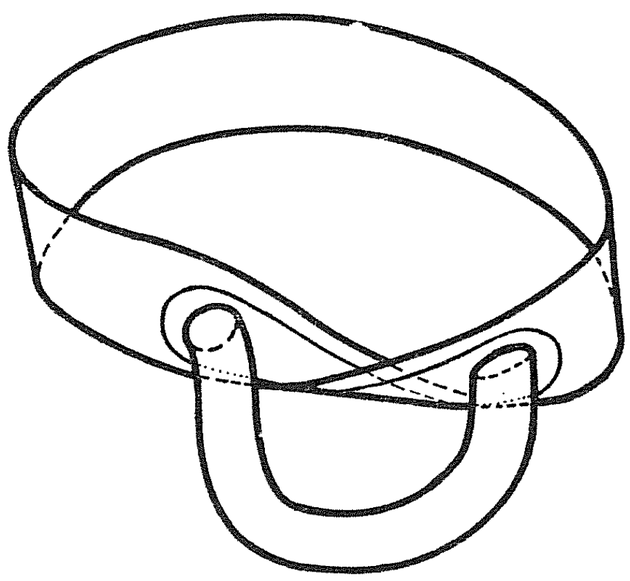


Sl. 22

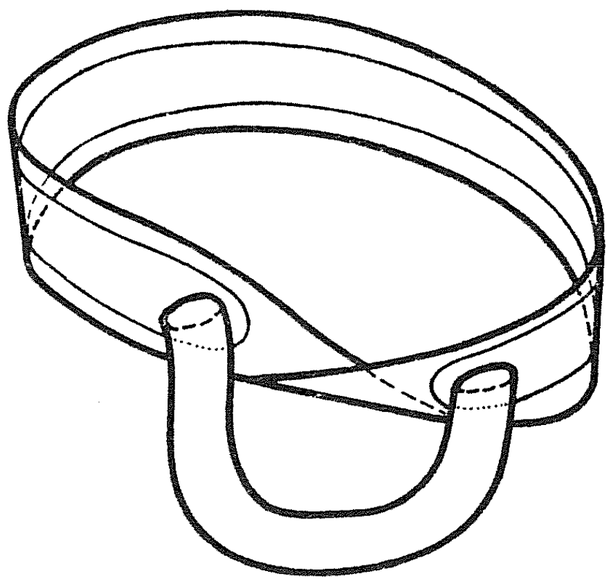
Navedimo še nekaj drugih predstavitev za nP. Ker je $2P = K$, velja npr. $2nP = nK$ in $(2n + 1)P = nK \# P$.

Če je $D \subset K$, lahko $K - \text{int } D$ predstavimo tako, kot prikazuje sl. 15, ali pa tudi tako, kot je narisano na sl. 21 (primerjaj sl. 20). Sl. 23 zato prikazuje $M \# K$; enostavna sklenjena krivulja, narisana na M, je skupni rob za $M - \text{int } D_1$ in $K - \text{int } D_2$, vzdolž katerega smo ti dve ploskvi zlepili. Ista slika pa predstavlja tudi $M \# T$, le krivuljo, ki razmejuje sumanda povezane vsote, moramo potegniti drugače (sl. 24). Prišli smo torej do enačbe $M \# K = M \# T$. Če k ∂M prilepimo še disk, dobimo:

6.5. **Trditev.** $3P = P \# K = P \# T$. *Splošneje,* $(2n + 1)P = nT \# P$.



Sl. 23



Sl. 24

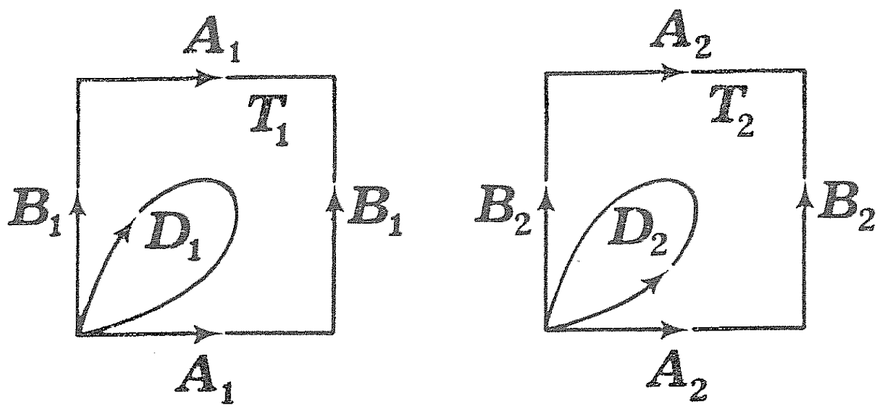
Prikažimo zdaj dokaz izreka 6.4. Prej smo se dogovorili, kako bomo za ploskev F, ki ji želimo zlepiti dele roba, naznačili pravilo lepljenja na sliki. Za primer, da je F disk (recimo konveksen poligon), bomo zdaj vpeljali enostaven simboličen zapis tega pravila. Vzemimo recimo sl. 5, ki nakazuje, kako iz pravokotnika zlepimo torus. Obhodimo rob pravokotnika v smeri, ki je nasprotna smeri gibanja urnega kazalca. Če začnemo v levem spodnjem oglišču, bomo šli najprej po A v smeri puščice, nato po B v smeri puščice, nato po A v nasprotni smeri, kot kaže puščica, in končno po B v nasprotni smeri, kot kaže puščica. Ta obhod bomo podali s simboličnim zapisom $ABA^{-1}B^{-1}$. »Eksponent« —1 pri A^{-1} seveda nima nič opraviti s kakim recipročnim ali inverznim elementom ali čim podobnim; označuje le, da se pri obhodu lika na us-

treznem delu poti gibljemo po stranici, ki je označena z A, v »napačni« smeri. Kljub temu bomo namesto $ABA^{-1}B^{-1}$ navadno zapisali simbol $[A, B]$, ki je v navadi za komutator, tj. produkt $ABA^{-1}B^{-1}$, če sta A in B elementa kake grupe. Podobno bomo namesto AA pisali A^2.

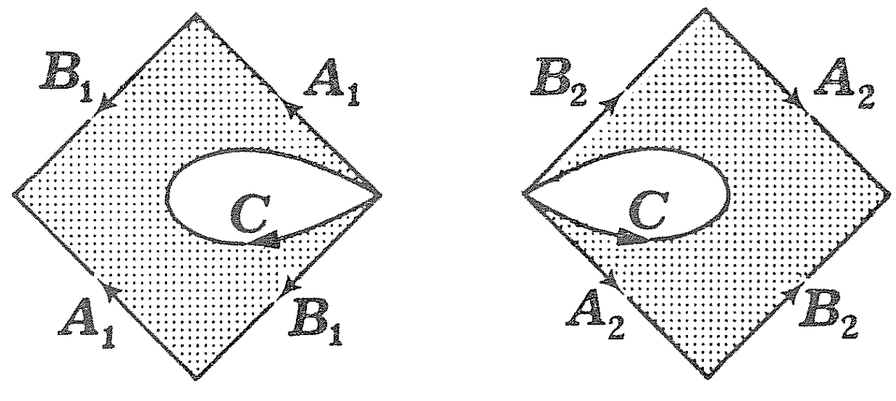
Oglejmo si še nekaj primerov. Sl. 7 lahko opišemo s simbolom $EFGF$, sl. 10 z A^2, sl. 11 z $ABAB$, sl. 13 z $ABA^{-1}B$ in sl. 17 s $CJKC^{-1}KJ$.

Lik na sl. 5 bomo v prihodnje imenovali *fundamentalni poligon* za T, lik na sl. 10 pa fundamentalni poligon za P (čeprav ni čisto pravi poligon). Ustrezna simbola, $[A, B]$ za T in A^2 za P, bomo imenovali *fundamentalna simbola* za T oziroma P. Iz teh bomo zdaj izpeljali fundamentalne simbole za povezane vsote nT in nP.

Oglejmo si npr. $2T = T_1 \# T_2$. Predstavimo T_1 in T_2 s fundamentalnima poligonoma (sl. 25); v T_i izberimo disk D_i $(i = 1, 2)$ tako, kot je narisano. Da dobimo $T_1 \# T_2$, moramo

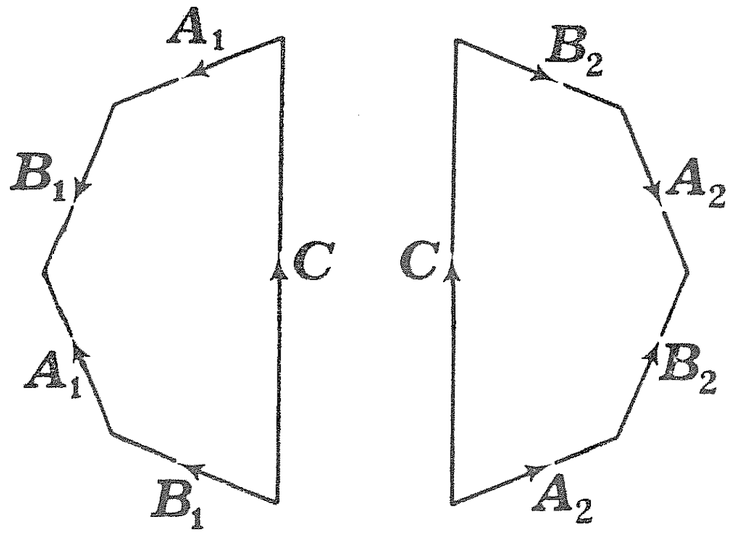


Sl. 25

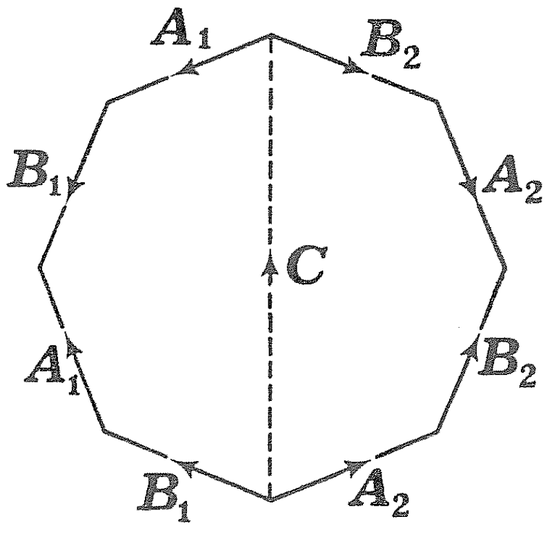


Sl. 26

iz T_i odstraniti int D_i $(i = 1, 2)$ in nato ∂D_1 prilepiti na ∂D_2, recimo tako, kot naznačujeta puščici. Pravilo za lepljenje podaja torej v običajni simboliki sl. 26. Ta slika pa je ekvivalentna sliki 27 (v pomenu, da je zlepek ista ploskev). Če res prilepimo C na C, dobimo sl. 28; to bomo vzeli za fundamentalni poligon za $2T$. Ustrezni fundamentalni simbol je $[A_1, B_1]\,[A_2, B_2]$.



Sl. 27



Sl. 28

Podobno dobimo za nT fundamentalni simbol $[A_1, B_1]\,[A_2, B_2] \ldots [A_n, B_n]$. Z enako metodo pridemo do fundamentalnega simbola $A_1^2 A_2^2 \ldots A_n^2$ za nP. V obeh primerih, za nT in nP, je seveda treba vzeti $n \geq 1$. Definirajmo še fundamentalni simbol za S^2; to naj bo AA^{-1}. Lahko se je prepričati, da nam ustrezno lepljenje res da sfero.

Da je vsaka sklenjena ploskev homeomorfna neki ploskvi nT ali nP, dokažemo takole: ploskev razrežemo v poligon (natančneje, predstavimo jo kot prostor, ki nastane, če stranice nekega poligona paroma zlepimo), nato pa ta poligon transformiramo v fundamentalni poligon neke ploskve nT ali nP. Za prvi korak potrebujemo pojem poliedrske ploskve.

6.6. **Definicija.** (*Kompaktna*) *poliedrska ploskev* je ploskev F, ki je unija take končne družine trikotnikov, da se vsaka dva trikotnika iz te družine sekata ali v prazni množici

ali v skupnem oglišču ali v skupni stranici. To družino trikotnikov imenujemo *triangulacija* poliedrske ploskve F.

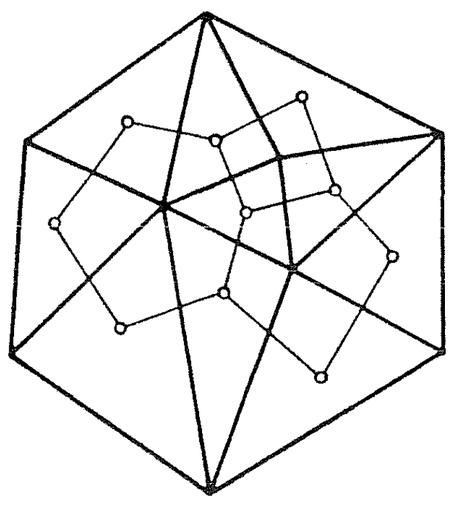
Podobno bi lahko definirali tudi nekompaktne poliedrske ploskve. Ker pa je ta definicija za spoznanje bolj zamotana, jo bomo izpustili. Izredno važen je izrek:

6.7. **Izrek.** *Vsaka kompaktna ploskev je homeomorfna kaki poliedrski ploskvi.*

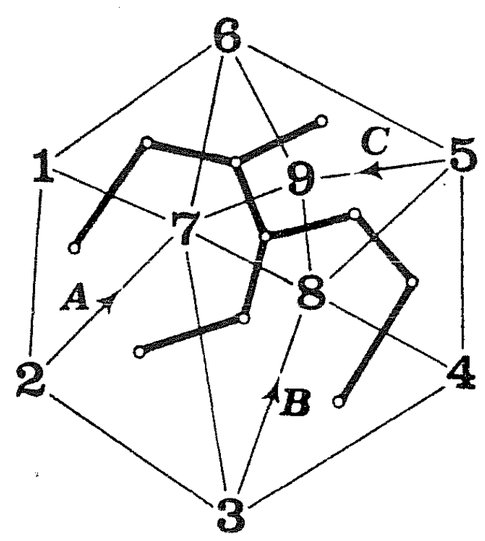
Izrek velja tudi za nekompaktne ploskve. Še več: vsako ploskev lahko poljubno natančno homeomorfno aproksimiramo s poliedrskimi ploskvami (vsaj za gladke ploskve v $\boldsymbol{R}^3$ je tej trditvi lahko verjeti). Dokaz izreka 6.7 pa je težak in ga ne moremo navesti. Zelo kratek in eleganten (toda ne lahek) dokaz tega izreka si bralec lahko ogleda v [3].

Zaradi 6.7 je dovolj, če dokažemo 6.4 za poliedrske ploskve. Vzemimo torej sklenjeno poliedrsko ploskev F in izberimo zanjo triangulacijo, recimo σ. Konstruirajmo graf X na F (glej npr. [11]) takole: Za vozlišča grafa vzemimo po eno točko v notranjosti vsakega trikotnika iz σ. Vsaki dve vozlišči, ležeči v trikotnikih, ki imata skupno stranico, zvežimo z lokom preko te skupne stranice; drugih parov vozlišč pa ne povežemo. Loke potegnemo seveda tako, da se vsaka dva sekata kvečjemu v skupnem krajišču. Objekt, ki ga tako dobimo, je naš graf X (sl. 29).

Izberimo poljubno maksimalno drevo $L \subset X$; L je torej tak povezan podgraf v X, da so v njem vsa vozlišča, ne vsebuje pa nobene sklenjene krivulje (na sl. 30 je debelo izvlečeno neko maksimalno drevo, ki ga lahko izberemo v grafu na sl. 29). Prerežimo zdaj F vzdolž vseh trikotniških stranic, ki jih L ne seka (na sl. 30 so to stranice A, B, C). S temi

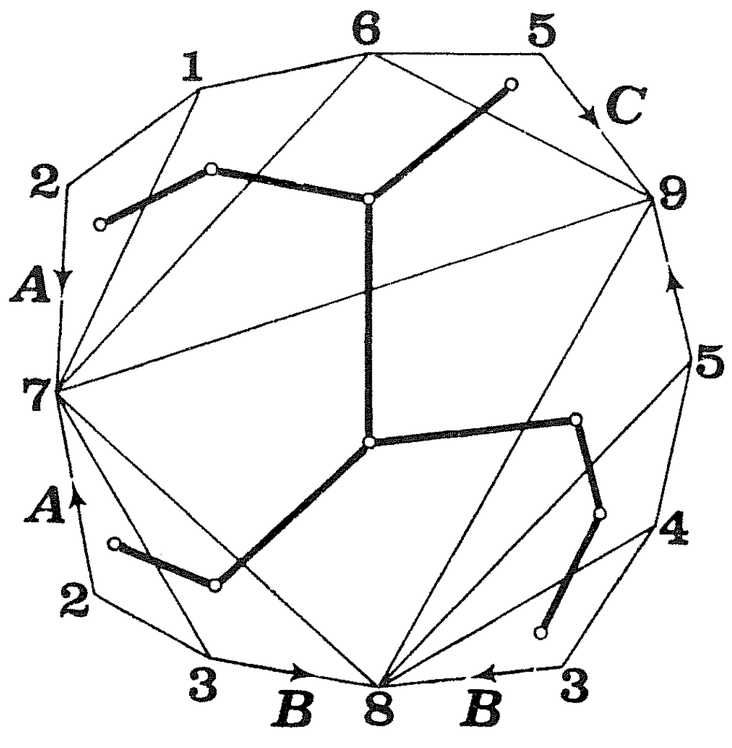


Sl. 29



Sl. 30

prerezi dobimo iz F neko ploskev G in obenem dobimo iz σ neko triangulacijo τ za G. Trdimo, da je G disk; še več, obstaja tak homeomorfizem ploskve G na konveksen poligon Q v $\boldsymbol{R}^2$, da se z njim vsak trikotnik iz τ preslika linearno (afino) na kak trikotnik v Q (sl. 31

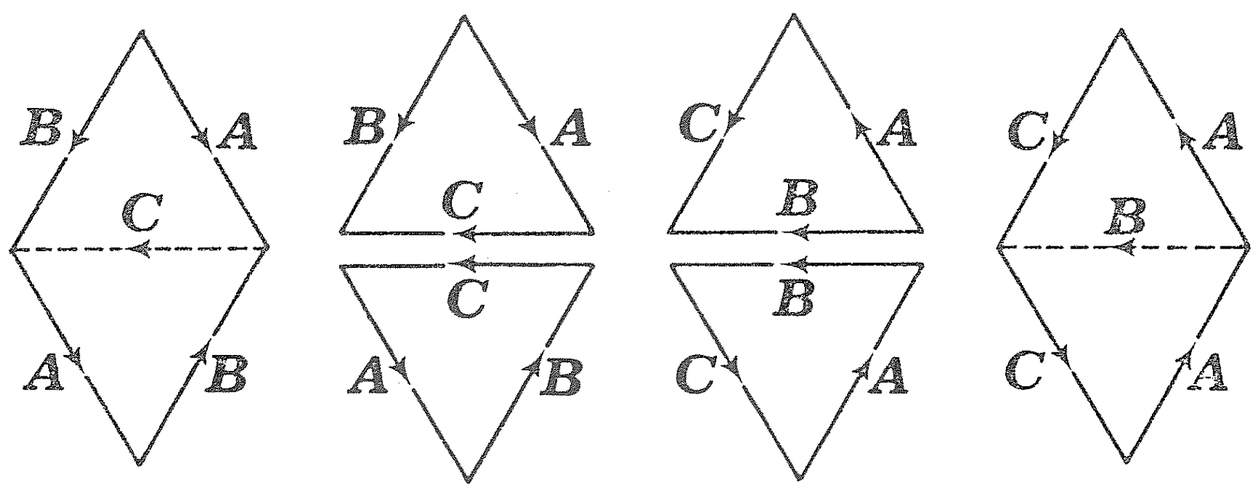


Sl. 31

prikazuje Q za primer s sl. 30; za lažje razumevanje slik so oglišča trikotnikov oštevilčena). Do tega homeomorfizma pridemo takole. Sestavimo tako naraščajoče zaporedje $L_0, L_1, \ldots, \ldots, L_k = L$ povezanih delnih dreves drevesa L, da je L_0 eno samo vozlišče in da je za vsak $i > 0$ drevo L_i večje od L_{i-1} za eno vejo. Za vsak i označimo z G_i unijo vseh trikotnikov iz τ, ki sekajo L_i. Prav lahko je induktivno konstruirati naraščajoče zaporedje konveksnih poligonov $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$ v $\mathbb{R}^2$, katerih vsak je za en trikotnik večji od prejšnjega, in zaporedje homeomorfizmov $G_i \to Q_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, ki so na trikotnikih iz τ linearni in od katerih je vsak razširitev prejšnjega. Ko i pride do k, imamo homeomorfizem, ki smo ga želeli.

Iz vsake trikotniške stranice v F, vzdolž katere smo F prerezali, dobimo dve stranici poligona Q. Obratno, vse stranice poligona Q nastanejo tako, kajti ploskev F sama nima roba. (Na sl. 31 je situacija malo drugačna, to pa zato, ker je že ploskev na sl. 30 imela rob.) To pomeni, da smo ploskev F predstavili kot prostor, ki nastane iz nekega konveksnega poligona, če temu stranice paroma zlepimo po določenem pravilu. Prvi del dokaza izreka 6.4 je tako končan.

V drugem koraku poligon Q transformiramo v fundamentalni poligon za nT ali nP. Ta del dokaza je popolnoma elementaren, vendar ga ne bomo napravili. Povejmo samo, da napravimo omenjeno transformacijo v glavnem z zaporedjem posegov takele oblike: poligon prerežemo vzdolž neke diagonale in dobljena kosa zlepimo drugače. Za ilustracijo naj bo primer na sl. 32. Tu običajni simbol za Kleinovo steklenico, $ABA^{-1}B$, spremenimo z enim takim posegom v fundamentalni simbol A^2C^2 za $2P$.



Sl. 32

Ostane nam še naloga razložiti, zakaj so vse ploskve nT in nP med seboj topološko različne. Do zdaj vemo samo to, da nobena ploskev mT $(m \geq 0)$ ni homeomorfna nobeni ploskvi nP $(n \geq 1)$, kajti prve so orientabilne, druge pa neorientabilne. Med ploskvami mT in podobno med ploskvami nP pa loči Eulerjeva karakteristika, ki jo bomo zdaj definirali.

Vzemimo poljubno kompaktno poliedrsko ploskev F in izberimo zanjo triangulacijo, recimo σ. Označimo z $N_2(\sigma)$ število vseh trikotnikov v σ, z $N_1(\sigma)$ število vseh njihovih stranic in z $N_0(\sigma)$ število vseh njihovih oglišč; pri tem štejemo vsako stranico in vsako oglišče samo enkrat, čeprav pripadata več trikotnikom.

6.8. **Definicija.** Število $\chi(\sigma) = N_0(\sigma) - N_1(\sigma) + N_2(\sigma)$ imenujemo *Eulerjeva karakteristika triangulacije* σ.

Števila N_0, N_1 in N_2 so seveda odvisna od σ, zato je navidez tudi karakteristika $\chi(\sigma)$ odvisna od σ. Z ne preveč truda in z elementarnimi sredstvi pa se da pokazati, da imata vsaki dve triangulaciji iste ploskve isto karakteristiko. Še več:

6.9. **Izrek.** *Bodita F in G homeomorfni kompaktni poliedrski ploskvi. Če je σ poljubna triangulacija za F in τ poljubna triangulacija za G, je $\chi(\sigma) = \chi(\tau)$.*

Direkten dokaz tega izreka bi bil izredno kompliciran. Vendar ga direktno nihče ne poizkuša dokazati, ker obstaja zelo enostaven dokaz, ki pa uporablja sredstva algebraične topologije (natančneje, teorije homologije). Zato dokaza tu ne moremo navesti.

6.10. **Definicija.** Naj bo F poljubna kompaktna ploskev. Po 6.7 obstaja neka poliedrska ploskev G, ki je homeomorfna F. Izberimo neko triangulacijo σ za G in definirajmo *Eulerjevo karakteristiko ploskve* F z enačbo $\chi(F) = \chi(\sigma)$.

Zaradi 6.9 je s tem število $\chi(F)$ popolnoma nedvoumno definirano. Primer: $\chi(D) = 1$, kajti disk je homeomorfen trikotniku, za trikotnik pa lahko vzamemo triangulacijo σ, pri kateri je $N_2(\sigma) = 1$ in $N_1(\sigma) = N_0(\sigma) = 3$.

Eulerjevo karakteristiko je mogoče smiselno definirati za vsak kompakten polieder (poljubne dimenzije). Tudi izrek 6.9 lahko potem ustrezno razširimo (in njegov dokaz je isti kot za naš izrek 6.9). Mi se tu ne bomo trudili z definicijo poljubnega poliedra, ker nam ne bo potrebna. Definirali bomo le še Eulerjevo karakteristiko za 1-mnogoterosti. (*Kompaktna*) *poliedrska* ali *poligonalna* 1-*mnogoterost* je 1-mnogoterost J, ki je unija take končne družine daljic (ta družina se imenuje *triangulacija za* J), da se vsaki dve daljici iz te družine sekata ali v prazni množici ali v skupnem krajišču. Če je σ triangulacija za J, označimo z $N_1(\sigma)$ število daljic v σ in z $N_0(\sigma)$ skupno število njihovih krajišč. Število $\chi(\sigma) = N_0(\sigma) - N_1(\sigma)$ je potem Eulerjeva karakteristika za σ. Velja izrek, analogen izreku 6.9 (dokaz je lahek in bralcu priporočam, da ga poizkusi napraviti), zato lahko definiramo Eulerjevo karakteristiko $\chi(J)$ za poljubno kompaktno 1-mnogoterost J podobno, kot smo v 6.10 definirali $\chi(F)$. Še dva primera: lok je homeomorfen daljici in zato ima karakteristiko 1; enostavna sklenjena krivulja je homeomorfna robu trikotnika in zato ima karakteristiko 0.

Pri računanju Eulerjeve karakteristike ploskev je zelo koristna formula, ki jo podaja tale trditev:

6.11. **Trditev.** *Bodita* F *in* G *taki kompaktni ploskvi, da je njuna unija ploskev, njun presek pa* 1-*mnogoterost. Potem velja*: $\chi(F \cup G) = \chi(F) + \chi(G) - \chi(F \cap G)$.

Dokaz. Označimo $F \cup G$ s H. Privzemimo, da sta izpolnjena tale pogoja:

(a) obstajata taka poliedrska ploskev H' in tak homeomorfizem $h: H \to H'$, da so tudi $F' = h(F)$, $G' = h(G)$ in $F' \cap G'$ poliedrski objekti;

(b) obstajajo take triangulacije: σ za H', σ_1 za F', σ_2 za G' in τ za $F' \cap G'$, da sta σ_1 in σ_2 podmnožici v σ, τ pa je neka množica stranic trikotnikov iz σ.

Ni težko pokazati, da sta pri predpostavkah iz 6.11 ta pogoja vedno izpolnjena. Mi si zaradi njiju ne bomo belili glav, ker bosta pogoja (a) in (b) očitno izpolnjena vsakič, ko bomo uporabili 6.11.

Za $i = 0, 1, 2$ očitno velja $N_i(\sigma) = N_i(\sigma_1) + N_i(\sigma_2) - N_i(\tau)$. Od tod takoj sledi $\chi(\sigma) = \chi(\sigma_1) + \chi(\sigma_2) - \chi(\tau)$. S tem je dokaz končan.

Neposredno smo izračunali karakteristike diska, loka in enostavne sklenjene krivulje. S formulo iz 6.11 lahko zdaj od tod dobimo karakteristike vseh sklenjenih ploskev. Označimo z A krožni kolobar. Tako A kot M lahko predstavimo kot unijo dveh diskov, ki se sekata v dveh disjunktnih lokih. Zato iz 6.11 sledi $\chi(A) = \chi(M) = 0$. Z dvema vzporednima longitudinalnima krožnicama razrežemo torus na dva pasova, ki sta homeomorfna kolobarju. Zato velja, spet po 6.11, enačba $\chi(T) = 0$. Podobno iz 5.3 in 6.11 sledi $\chi(P) = 1$.

Povezano vsoto kompaktnih ploskev F_1 in F_2 napravimo tako, da izberemo diska $D_1 \subset \subset \operatorname{int} F_1$ in $D_2 \subset \operatorname{int} F_2$ ter ploskvi $G_1 = F_1 - \operatorname{int} D_1$ in $G_2 = F_2 - \operatorname{int} D_2$ zlepimo po robu. Iz 6.11 sledi $\chi(F_i) = \chi(G_i) + 1$ $(i = 1, 2)$ in $\chi(F_1 \# F_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. Velja torej

$$\chi(F_1 \# F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - 2. \tag{6.12}$$

Z indukcijo dobimo od tod:

6.13. **Izrek.** $\chi(nT) = 2 - 2n$, $\chi(nP) = 2 - n$.

Ta izrek velja tudi za $n = 0$, to je za sfero, vendar se moramo o tem prepričati posebej: S^2 zapišemo kot unijo dveh diskov, ki se sekata v krožnici, in uporabimo 6.11.

Če rod poljubne sklenjene ploskve F označimo z $g(F)$, lahko izrek 6.13 zapišemo ekvivalentno takole:

6.13*. **Izrek.** *Bodi F sklenjena ploskev. Če je F orientabilna, je $\chi(F) = 2 - 2g(F)$, če pa je F neorientabilna, je $\chi(F) = 2 - g(F)$.*

Iz izrekov 6.9 in 6.13 sledi, da sta ploskvi mT in nT (oziroma mP in nP) homeomorfni kvečjemu, če je $m = n$. S tem je dokaz izreka 6.4 končan. Omenimo še tole očitno posledico izrekov 6.4 in 6.13*:

6.14. **Posledica.** *Dve sklenjeni ploskvi sta homeomorfni tedaj in le tedaj, ko imata isti orientabilnostni tip in isto Eulerjevo karakteristiko.*

7. Topološka klasifikacija kompaktnih ploskev z robom

Bodi F kompaktna ploskev z robom. Iz 2.2 in 6.1 sledi, da je ∂F unija končnega števila disjunktnih enostavnih sklenjenih krivulj. Če vzdolž vsake od teh krivulj prilepimo k F disk, nastane iz F neka sklenjena ploskev F^*, ki vsebuje F kot podprostor.

7.1. **Izrek.** *Bodita F in G taki kompaktni ploskvi z nepraznim robom, da ∂F in ∂G vsebujeta isto število enostavnih sklenjenih krivulj; F^* in G^* pa naj bosta ustrezni sklenjeni ploskvi. Ploskvi F in G sta homeomorfni tedaj in le tedaj, ko sta homeomorfni F^* in G^*.*

Skicirajmo dokaz! Če obstaja kak homeomorfizem $F \to G$, ga je mogoče razširiti do homeomorfizma $F^* \to G^*$. To prav lahko izpeljemo iz tele leme:

7.2. **Lema.** *Bodita C in D poljubna diska in naj bo dan homeomorfizem $h: \partial C \to \partial D$. Potem obstaja homeomorfizem $h^*: C \to D$, ki se na ∂C ujema s h.*

Dokaz. Izberimo homeomorfizma $f: C \to E$, $g: D \to E$. Kompozitum $k = g \circ h \circ f^{-1}$, ki je homeomorfizem iz ∂E v ∂E, lahko razširimo do homeomorfizma $k^*: E \to E$ takole: $k^*(0) = 0$ (0 je izhodišče v $\mathbf{R}^2$), $k^*(t) = \| t \| \, k(t/\| t \|)$ za $t \in E - \{0\}$. Kompozitum $h^* = g^{-1} \circ k^* \circ f$ je potem homeomorfizem iz C v D in za $x \in \partial C$ je $h^*(x) = h(x)$.

Dokaz izreka 7.1 v drugi smeri je takle. Recimo, da je dan homeomorfizem $h: F^* \to G^*$. Naj bodo $C_1, \ldots, C_n$ diski, ki jih prilepimo k F, da dobimo F^*, in $D_1, \ldots, D_n$ diski, ki jih prilepimo h G, da dobimo G^*. Iz 6.3 lahko izpeljemo (z indukcijo na število diskov), da obstaja homeomorfizem $g: G^* \to G^*$, ki za vsak i preslika $h(C_i)$ na D_i. Kompozitum $g \circ h$ je potem homeomorfizem iz F^* na G^*, ki za vsak i preslika C_i na D_i, torej preslika tudi F na G.

Rod kompaktne ploskve F z nepraznim robom definiramo takole: $g(F) = g(F^*)$; zaradi 7.1 je ta definicija nedvoumna. Označimo z $r(F)$ število enostavnih sklenjenih krivulj v ∂F. Iz 6.4 in 7.1 sledi:

7.3. **Izrek.** *Kompaktni ploskvi F in G sta homeomorfni tedaj in le tedaj, ko imata isti orientabilnostni tip in ko velja $g(F) = g(G)$ in $r(F) = r(G)$.*

Iz 6.11 očitno sledi, da je $\chi(F^*) = \chi(F) + r(F)$. Zato lahko izrek 6.13* razširimo takole:

7.4. **Izrek.** *Bodi F kompaktna ploskev. Če je F orientabilna, je $\chi(F) = 2 - 2g(F) - r(F)$, če pa je F neorientabilna, je $\chi(F) = 2 - g(F) - r(F)$.*

Iz 7.3 in 7.4 dobimo:

7.5. **Posledica.** *Kompaktni ploskvi F in G sta homeomorfni tedaj in le tedaj, ko imata isti orientabilnostni tip in ko velja $\chi(F) = \chi(G)$ in $r(F) = r(G)$.*

Za konec bomo pokazali zelo priročne modele za kompaktne ploskve z robom. Obenem bomo videli, da se da vsaka taka ploskev vložiti v $\mathbf{R}^3$. Naj bo F kompaktna ploskev z robom.

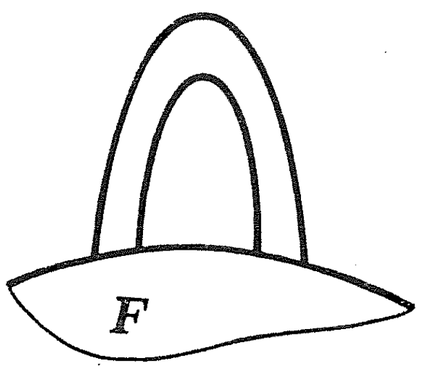
Vzemimo dolg, ozek pravokotnik in njegovi krajši stranici prilepimo na dva disjunktna loka na ∂F; rekli bomo, da smo k F prilepili trak. Po 6.11 je Eulerjeva karakteristika nove ploskve za 1 manjša od $\chi(F)$. Iz 7.4 in 6.12 zato sledi:

En trak, kot je narisan na sl. 33, poveča število robnih sklenjenih krivulj za 1 in zato se rod ne spremeni; nova ploskev ima isti orientabilnostni tip kot F.

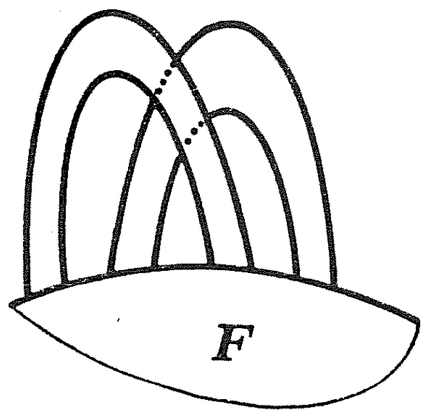
Dva trakova, kot sta narisana na sl. 34, ne spremenita števila robnih sklenjenih krivulj in nova ploskev ima isti orientabilnostni tip kot F; rezultat je torej $F \# T$.

En trak, kot je narisan na sl. 35, pa napravi iz F neorientabilno ploskev, katere rob ima isto število sklenjenih krivulj kot ∂F; dobimo torej $F \# P$.

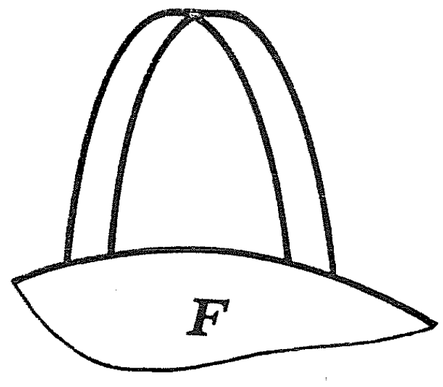
Po 6.4 je vsaka sklenjena ploskev homeomorfna eni od ploskev $nT = S^2 \# nT$ ali $nP = S^2 \# nP$. Po 7.1 je torej vsaka kompaktna ploskev z nepraznim povezanim robom homeomorfna eni od ploskev $D \# nT$ ali $D \# nP$. Zato iz zgornjega sledi, da lahko vsako kompaktno ploskev z nepraznim robom predstavimo kot disk, ki ima na robu prilepljene trakove. Ploskev $K \# T$ z eno »luknjo« ($= 4P$ z eno »luknjo«), ki jo predstavlja sl. 36, je npr. homeomorfna disku s trakovi, ki je na sl. 37.



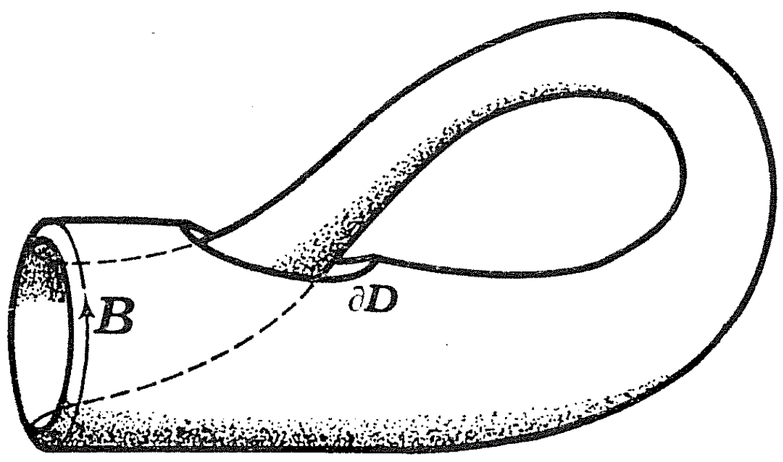
Sl. 33



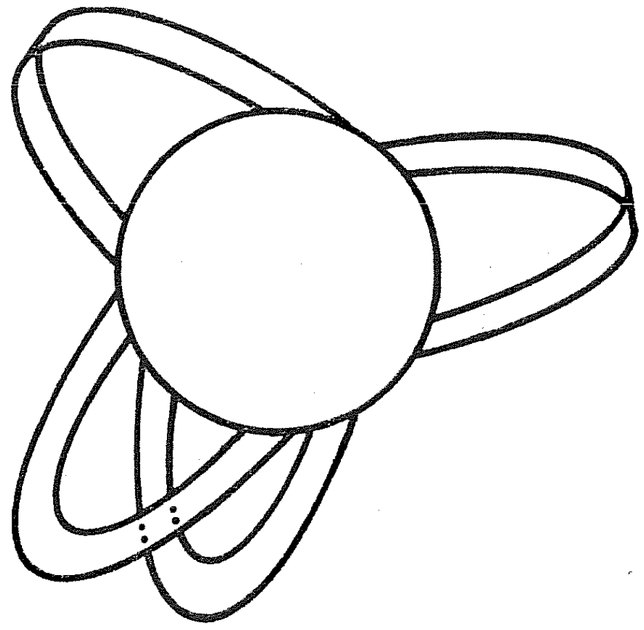
Sl. 34



Sl. 35



Sl. 36



Sl. 37

8. Nekaj opomb

8.1. Zanimivo je vprašanje, katere ploskve se dajo vložiti v $\boldsymbol{R}^3$. Jasno je, da se dajo vse sklenjene orientabilne, tj. povezane vsote torusov (primerjaj sl. 22); pokazali smo, da se dajo vse kompaktne z nepraznim robom; mogli bi pokazati, da se dajo tudi vse nekompaktne. Ostanejo torej le še sklenjene neorientabilne. Od teh pa nobene ni mogoče vložiti v $\boldsymbol{R}^3$. Pač pa se da vsaka taka ploskev vložiti v $\boldsymbol{R}^4$: če iz ploskve izrežemo disk, lahko ostanek vložimo v $\boldsymbol{R}^3$, potem pa manjkajoči disk dodamo kot stožec z vrhom v $\boldsymbol{R}^4 - \boldsymbol{R}^3$. Splošneje velja, da lahko vsako m-mnogoterost vložimo v $\boldsymbol{R}^{2m}$.

8.2. Fundamentalna grupa in fundamentalni poligon (oziroma fundamentalni simbol) sta verjetno čisto slučajno prišla do podobnih imen. Pa je kljub temu fundamentalna grupa sklenjene ploskve v tesni zvezi z njenim fundamentalnim simbolom. Natančneje, fundamentalno grupo ploskve nT (fundamentalni simbol $[A_1, B_1] \ldots [A_n, B_n]$) generira $2n$ elemen-

tov, recimo $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, ki se pokoravajo relaciji $[a_1, b_1] \ldots [a_n, b_n] = 1$ (tu je 1 enota grupe), sicer pa so neodvisni. Konkretno, za vsak i sta a_i in b_i v bistvu homotopska razreda za A_i oziroma B_i (iz usmerjenih stranic fundamentalnega poligona namreč pri lepljenju nastanejo usmerjene enostavne sklenjene krivulje na ploskvi). Podobno je fundamentalna grupa ploskve nP (fundamentalni simbol $A_1^2 \ldots A_n^2$) generirana z n elementi, recimo $a_1, \ldots, \ldots, a_n$, ki so neodvisni, razen da se pokoravajo relaciji $a_1^2 \ldots a_n^2 = 1$.

Primera: Grupa $\pi_1(T)$ je generirana z elementoma a, b, ki ustrezata relaciji $aba^{-1}b^{-1} = 1$ (ali, kar je isto, $ab = ba$); elementa a in b torej komutirata (sicer pa sta neodvisna). Grupa $\pi_1(T)$ je zato množica vseh produktov $a^m b^n$ za poljubni celi števili m in n, pri čemer so vsi ti produkti med seboj različni, množimo jih pa tako, kot da sta a in b števili. Geometrično lahko predstavimo a in b kot meridiansko in longitudinalno krožnico na torusu.

Grupa $\pi_1(P)$ je generirana z enim samim elementom a, ki ustreza relaciji $a^2 = 1$. Zato je $\pi_1(P)$ grupa z dvema elementoma: 1 in a. Geometrično lahko predstavimo a kot srednjico poljubnega Möbiusovega traku v P.

8.3. Dobili smo popolno in dokaj enostavno klasifikacijo kompaktnih ploskev. Pri mnogoterostih višjih dimenzij česa podobnega ni. Dokazano je celo, da ne obstaja noben algoritem, po katerem bi mogli klasificirati mnogoterosti dimenzije $m \geq 4$. Za 3-mnogoterosti je znano mnogo delnih rezultatov. Znano je npr. (glej [7]), da je vsako orientirano sklenjeno 3-mnogoterost mogoče (v bistvu na en sam način) predstaviti kot povezano vsoto orientiranih sklenjenih 3-razsežnih »pramnogoterosti«, to je takih mnogoterosti, ki se ne dajo naprej razcepiti v povezano vsoto (pri ploskvah sta T in P pramnogoterosti v tem smislu). Toda zdi se, da še dolgo ne bomo poznali vseh 3-razsežnih pramnogoterosti; vsekakor pa jih je neskončno mnogo. O mnogoterostih z robom vemo pa še manj.

8.4. Velja izreku 6.7 analogni izrek, da je vsaka 3-mnogoterost homeomorfna kaki poliedrski 3-mnogoterosti. Za zdaj še ni znano, ali velja podoben izrek tudi v višjih dimenzijah. Znano pa je, da za vsak $m \geq 4$ obstaja kompaktna m-mnogoterost, ki ima to slabo lastnost, da če je že morda homeomorfna kaki poliedrski mnogoterosti, ima slednja same »slabe«, »neuporabne« triangulacije.

8.5. Topologija mnogoterosti ima zelo važne in plodne povezave z nekaterimi drugimi panogami matematike, predvsem z nekaterimi področji analize, z diferencialno geometrijo in z algebraično geometrijo. Pri teh povezavah pridejo v poštev predvsem gladke mnogoterosti. O teh se da povedati precej več kot o splošnih mnogoterostih (znano je npr., da je vsaka gladka mnogoterost homeomorfna kaki poliedrski mnogoterosti, taki z »dobrimi« triangulacijami). Če je $m \leq 3$, je vsaka m-mnogoterost homeomorfna kaki gladki mnogoterosti, za mnogoterosti višjih dimenzij pa to ne velja.

LITERATURA

[1] S. Barr, *Experiments in Topology*, London, John Murray 1965

[2] S. S. Cairns, *Introductory Topology*, New York, Ronald Press 1968

[3] P. H. Doyle, D. A. Moran, *A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated*, Inventiones math. **5** (1968) 160—162

[4] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Berlin, Springer 1932

[5] B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, Berlin, Springer 1923

[6] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, New York, Harcourt 1967

[7] J. W. Milnor, *A unique decomposition theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962) 1—7

[8] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Charlottesville, Univ. Press of Virginia 1965

[9] H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, Teubner 1934

[10] I. Vidav, *Splošna topologija*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1—16

[11] J. Vrabec, *Prikaz teorije grafov* I, Obzornik mat. fiz. **14** (1967) 58—71

[12] J. Vrabec, *O Jordanovem in Schoenfliesovem izreku*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) št. 4

[13] A. H. Wallace, *Differential Topology, First Steps*, New York, Benjamin 1968

Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1—2

TOPOLOŠKA DINAMIKA

FRANCE KRIŽANIČ

AMS Subj. Class. (1970) 34 C 35, 54 H 20, 58 F

Sestavek se zaman trudi, da bi ob zgledih iz mehanike prepričal bralca o uporabnosti topologije

TOPOLOGICAL DYNAMICS

This article tries in vain, by means of examples from mechanics, to convince the reader that topology is useful.

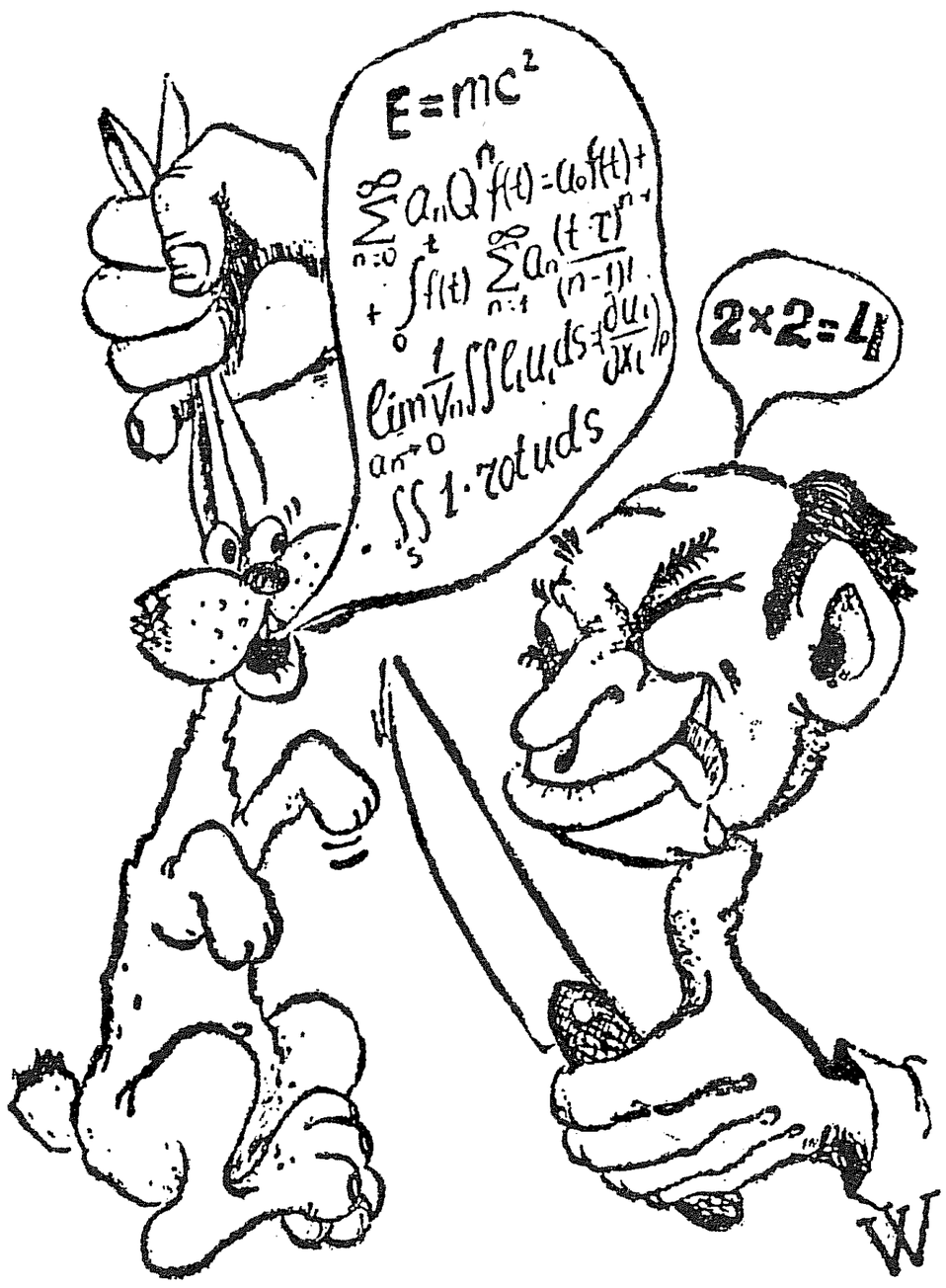
Kravji zvonec ni ne, da ga oblečeš, ne, da ga obuješ, ni, da ti krasi glavo, niti ni, da bi ga snedel — skratka, brez sleherne je gospodarske vrednosti.

F. Milčinski

O uporabnosti

Pričujoči sestavek nosi najtežje breme seminarja. O uporabi topologije naj bi govoril, pa ni njegov pisec domač ne v topologiji in ne v uporabi. Nepripravljen se spušča v boj s silnim nasprotnikom, s splošnim prepričanjem. Splošno prepričanje pa je, da je topologija neuporabna, iz gole matematične zlobe za rep privlečena, mladini v kvar in gospodarstvu v breme gojena.

Kako naj vključimo v uporabno življenje topologa, ki mu je skodelica en sam ročaj? Kako naj verjamemo teoriji, ki se je sam ne drži? Kavo pije iz skodelice in ne iz ročaja.



Sliko, ki spremlja besedilo brez zveze, smo si izposodili iz Literaturnaja gazeta **47** (1975) str. 16

Postojte, ne zgražajte se še! Ob koncu sestavka boste lahko bolj ogorčeni. Spoznali boste, da matematiki res ne pijejo kave iz ročaja, toda po ročaju — ki ga prikrivajo z drugim imenom svitek ali torus — smelo pretakajo tekočino. Glejte: nevidna tekočina na površini skodelice ali ročaja ali svitka. To je uporabnost topologije!

Pa vendar si bo pričujoče delce drznilo zagovarjati topologijo in njeno tesno povezanost s prakso. Najprej pa bo povedalo nekaj pikrih o teoriji in praksi nasploh.

Začnimo z vprašanjem: kaj je težje, teorija ali praksa? Teorija, pravite? Jaz pa trdim, praksa! Če bi praksa ne bila težka, bi bila teorija sploh odveč. Človek s teorijo poenostavlja prakso, odraža jo v preprostih modelih, ki jih obvlada lažje kot nepregledni praktični problem. Teorija potuje skozi prakso kot motnja, kot val. S prednjim čelom buta

teoretični val ob naravo, trga ji drobce skrivnosti, za zadnjim čelom pa ostaja statični premik. Praksa se ne vrne v staro stanje, do naslednje motnje obmiruje v novem, v rutini. Lep in slab zgled je Eulerjevo delo v mehaniki. Vsak problem, ki se ga je lotil, je dognal tako daleč, da so za njim tehniki obvladali vso svojo obrt z osnovnimi računskimi operacijami in z elementarnimi funkcijami. Toda rutina ni človekova praksa, to so okameneli izločki teorije. Praksa človekova je boj z naravo in z družbo, ki ga obdajata, ki ga vsebujeta. Teorija je le del te prakse.

Teorija in praksa sta povezani, pravi marksizem. Vsakdo, ki vsaj malce sledi tisočletnemu razvoju matematike in njeni metodologiji, mu bo pritrdil. Nobene matematične teorije ni, ki bi bila sama sebi namen. Nove matematične teorije nastajajo ob naravoslovju, ob tehniki pa tudi v matematiki sami, kadar je treba kak pojav ali kako teorijo bolje, globje razumeti kakor doslej.

Toda v naši zavesti živi ob Karlu Marxu še vedno Krištof Šmid. »Praksa in teorija« izgovarjamo kakor »pridni Janezek in poredni Mihec«.

Teorijo moramo povezati s prakso, pravijo, ki vidijo v tem svoje poslanstvo. To, kar je po naravi eno, bodo šele oni združili, povezali in zvezali mehansko, z odredbo. Ne vem, kdo so, ves zrak jih je poln, ne vem, kako se jim pravi, preubog je moj besedni zaklad. Morda jih sploh ni. Morda pa so in se motim, nepremišljeno ugovarjam popolnoma pravilnim pogledom. Tedaj pa moram seči globoko vase in se pokesati, opravičiti se moram, ker sem, blodeč skozi življenje, zašel v matematiko in postal zajedalec.

O izvoru topologije

V prvi črtici smo pritegnili tistemu mnenju, ki pravi, da sta teorija in praksa eno, da je teorija le poseben del prakse. Brez besed smo se dogovorili, da bomo videli uporabnost izolirane teorije v njenih povezavah z drugimi vejami iste znanosti ali drugih znanosti. Izolirati teorijo je samovoljno dejanje. Že na matematičnem kongresu leta 1900 je D. Hilbert pribil, da je matematika celostna znanost, ki je ni mogoče razbiti na posamezne, med seboj nepovezane enote.

Tako bomo ravnali tudi s topologijo. Njeno uporabnost bomo prikazali z njenim nastankom in z njeno sodobno povezanostjo.

Časovno izhodišče je seveda čisto pogojno, vse korenine so v sivi davnini. S primernim premikom v čas, ko je začela nastajati blagovna proizvodnja, lahko besedo zasučemo takole: kot vse tegobe sodobnega življenja je tudi topologija zrasla iz Biblije, popra in Turkov.

Biblija je dala Evropi božji grob, ki je kot nalašč stal na Bližnjem Vzhodu; v križarskih vojnah se je grofovska in kraljevska Evropa seznanila s Seldžuki in z njihovo kuhinjo.* Tam je okusila poper in druge dišave ter se jim ni mogla več odreči. Ko so Turki prerezali trgovino med Vzhodom in Evropo, je morala Evropa priznati, da je zemlja okrogla. Le tako si je lahko odprla novo pot do Dišavskih otokov.

Da je Kolumb spotoma odkril Ameriko, je zgolj slučaj in neprevidnost. Dosti zanimivega bi lahko povedali o kvarnih poslodicah Kolumbovega potovanja ali o starih poteh, po katerih je Ahmed ibn Madžid vodil odpravo, ki ji je poveljeval Vasco de Gama; še privlačnejši je Magellan, ki je ponarejal ladijski dnevnik, da bi spravil Dišavske otoke pod špansko oblast: vsaj omenili bi lahko kitajske pomorske odprave, ki jih je v začetku istega stoletja vodil v Indijski ocean Čžen He. Toda besedo moramo usmerjati proti topologiji.

Tako ali drugače, širne gladine morja so postale poprišče človekove dejavnosti. Pot po morju pa so kazala nebesna svetila. Da bi bogastva drugih zemljin čim varneje plula v

* Mimogrede: na postankih v Bizancu je evropska gospoda spoznala jedilni pribor. Vrstni red jedi pri kosilu od juhe do slaščic pa bržkone izhaja iz Andaluzije. V Cordobskem kalifatu ga je utrdil pevec in modni ustvarjalec Ziriab (Abu-l-Hasan Ali ibn Nafi), ki se je priselil iz Bagdada, od samega Haruna ar-Rašida.

Evropo, je le-ta morala dobro poznati gibanja nebesnih teles. Zato je ustanavljala učena društva in razpisovala nagrade za čim vernejšo teorijo gibanja lune[5]. Iz teh pobud sta se rodili mehanika in matematična analiza.

Pozabimo na poper in morje. Praksa je rodila novo teorijo, ki je kaj kmalu sama postala praksa in vir novih teorij.

Prvotno kvalitativno sliko, ki so jo ustvarili Kopernik, Kepler in Galilei, je dopolnila in izostrila kvantitativna obravnava v razcvetu matematične analize od Newtona do srede devetnajstega stoletja. Devetnajsto stoletje se je najprej zavedelo majavih tal, na katerih je stala bleščeča stavba matematične analize (Primerjaj uvod S. Janovske v [6]). Utrjevanje temeljev je predvsem v delih nemških matematikov z B. Riemannom na čelu rodilo to, čemur pravimo danes splošna topologija.

Skoraj hkrati z zgraditvijo topoloških temeljev je prodrlo spoznanje, da kvantitativne metode ne zmorejo vseh problemov matematike in mehanike. Ob tem spoznanju so nastale nove teorije, ki jih danes označujemo z eno besedo: algebrska topologija, hkrati z njo pa splet teorij, ki mu pravimo topološka dinamika in predstavlja novo kvalitativno obravnavo.

Nove teorije so nastajale ob obravnavi mehanskih problemov. Keplerjeva naloga o gibanju dveh teles je z analitičnimi pripomočki lepo rešljiva. Gibanje opisuje sistem šestih diferencialnih enačb drugega reda in brez težav je mogoče najti dvanajst globalnih prvih integralov. Problem več teles pa je trši oreh. H. Poincaré in H. Brüns sta pokazala, da je naloga s takimi pripomočki nerešljiva. Prav v svojih delih [8] in [9] je H. Poincaré zasnoval mnoge pojme algebrske topologije in kvalitativno teorijo dinamičnih sistemov, kakor z drugo besedo pravimo topološki dinamiki.

Preden ob preprostih zgledih pokažemo Poincaréjevo pot, bežno preletimo nekaj zgodovinskih podatkov.

To, kar je bilo pri Poincaréju povedano v klasičnem jeziku, je aksiomatsko uredil G. D. Birkhoff. Del ali sopotnik topološke dinamike je teorija stabilnosti, ki jo dolgujemo A. M. Ljapunovu. Prva polovica tega stoletja je razširila uporabnost kvalitativnih metod. N. N. Bogoljubov in N. M. Krilov sta zasnovala nelinearno mehaniko, šola A. A. Andronova pa kvalitativno obravnavo elektrotehniških problemov, predvsem nelinearnih nihanj. Še danes so kvalitativne metode eden od osnovnih pripomočkov pri študiju avtomatskih in vodenih sistemov. Bralca bo morda zanimalo, da so ti praktični problemi za topologe še vedno zanimivi. V ZDA jim posveča pozornost tako znamenit topolog, kot je S. Lefschetz, v SSSR pa L. S. Pontrjagin.

Topološki okvir je za dinamiko nekoliko presplošen, slej ko prej potrebuje diferenciabilne strukture. Tako se je v zadnjih letih izoblikovala diferenciabilna dinamika. Tudi ta je v svojih dosežkih vezana na nebesno mehaniko. Omenimo le nekaj imen. A. N. Kolmogorov in V. I. Arnold, za njima pa še J. Moser, so ugnali globoke in stoletja stare probleme. Pomemben ustvarjalec diferenciabilne dinamike je S. Smale.

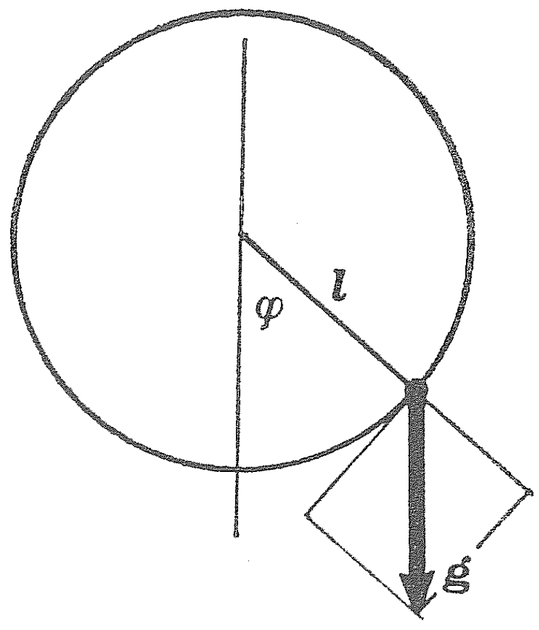
Iz diferenciabilne dinamike pa v delih R. Thoma o morfogenezi, strukturni stabilnosti in teoriji katastrof raste povsem nova kvalitativna teorija sistemov, ki se oplaja z biologijo, z ekonomijo in z jezikoslovjem prav tako kakor s čisto matematiko.

V tem kratkem pregledu smo topologiji na ljubo pustili vnemar tiste teorije, v katerih se dinamika razen s topologijo prepleta še z drugimi vejami matematike, s teorijo mere, z verjetnostnim računom, z diferencialno geometrijo in s teorijo grup.

Matematično nihalo

Poincaréjevo metodo si oglejmo ob preprostem zgledu, ob matematičnem nihalu. [19] To je toga palica, ki ima na enem koncu ležaj brez trenja, tako da se ves čas giblje v isti, navpični ravnini. Edina sila, ki deluje nanjo, je težnost. Palico lahko nadomestimo z

eno samo točko (s težiščem,) ki se giblje v polju težnosti po vertikalnem krogu [slika 1].



Sl. 1

To je preprost model sistema z eno prostostno stopnjo. Lego točke na krogu določa eno samo število — denimo kot φ med navpičnico skozi središče in med radijem, na katerem je točka. Gibalno enačbo nihala dobimo s prevodom fizikalnega zakona: vrtilna količina je enaka momentu vnanjih sil. Vrtilna količina točkaste mase m je produkt vztrajnostnega momenta ml^2 s kotnim pospeškom $\ddot{\varphi}$, moment vnanje sile pa je $-mgl \sin \varphi$. Odtod

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \qquad (1)$$

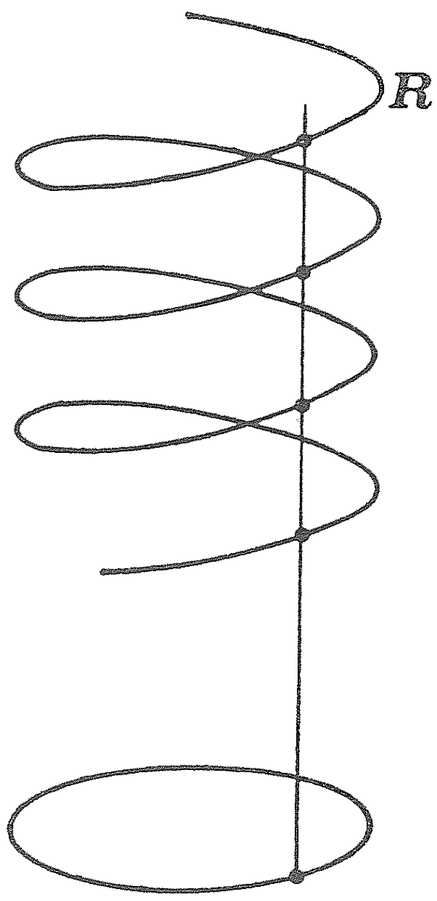
Z ω^2 smo označili konstanto $\omega^2 = g/l$. Enačba je drugega reda. Posamezna rešitev — gibanjenihala — je določena z dvema začetnima vrednostma, z lego in s hitrostjo v začetnem trenutku. Lega sama še ne pove vsega o kinetičnem stanju sistema, zanj potrebujemo dve koordinati φ in $\dot{\varphi}$. Imenujmo $\psi = \dot{\varphi}$.

Vse vrednosti koordinate φ sestavljajo *konfiguracijski prostor* (*prostor leg*), vsi pari (φ, ψ) pa *fazni prostor* (*prostor stanj*).

Prostor leg matematičnega nihala (glej sliko 1) je krožnica ali enorazsežna sfera S^1, fazni prostor pa je neskončni valj, zgrajen nad njo, saj je kotna hitrost ψ poljubno realno število.

Prostor leg matematičnega nihala opišemo še drugače, kot ravninsko rotacijsko grupo $SO(2)$. Bralec sam bo lahko posplošil nalogo in obravnaval gibanje togega telesa, ki je pripeto v eni točki. Ustrezni prostor leg je homeomorfen trorazsežni rotacijski grupi $SO(3)$.

Prostor leg matematičnega nihala opišimo še na tretji način. Krog S^1 *prekrijmo* z realno premico $\mathbf{R}$ tako, da za φ dovolimo poljubno vrednost $\varphi \in \mathbf{R}$, zapomnimo pa si, da dve vrednosti φ, ki se ločita za cel večkratnik 2π, prekrivata isto točko kroga (slika 2). Fazni valj na ta način *prekrijemo* s fazno ravnino.



Sl. 2

Izberimo za koordinato ločno dolžino od izbrane začetne točke, enote pa spremenimo tako, da bo obseg našega kroga enak 1. Preslikava $p: R \to S^1$, s katero smo prekrili S^1, prevede tedaj vsa cela števila v isto točko. Zato lahko zapišemo $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Toda faktorskemu prostoru $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ pravimo enorazsežni svitek ali torus in ga označimo s T^1. Tako lahko rečemo še: prostor leg matematičnega nihala je enorazsežni svitek.

Koordinati točke na fazni ravnini označimo prav tako kakor na faznem valju. Zasledujmo, kako se spreminja stanje (φ, ψ) s časom t. Enačbo (1) prepišimo kot sistem dveh enačb prvega reda

$$\dot{\varphi} = \psi \qquad \dot{\psi} = -\omega^2 \sin \varphi \qquad (2)$$

delimo drugo enačbo s prvo, upoštevajmo $\dot{\psi}/\dot{\varphi} = d\psi/d\varphi$ in malce preuredimo: $\psi d\psi + \omega^2 \sin \varphi \, d\varphi = 0$. Na levi je popolni diferencial, zato

$$\tfrac{1}{2} \psi^2 + V(\varphi) = C \qquad (3)$$

Z $V(\varphi)$ smo na kratko označili $V(\varphi) = -\omega^2 \cos \varphi$.

Funkcija na levi strani (3) je torej ves čas gibanja konstantna. Tako funkcijo, ki se vzdolž rešitve ne spreminja, imenujemo *prvi integral sistema enačb* (2). Fiziki pa pravijo: količina na levi strani (3) se med gibanjem ohranja. *Prvi integral gibalnih enačb pripoveduje o ohranitvenem zakonu.*

(3) je zakon o ohranitvi energije. Pomnožimo (3) s konstantnim faktorjem ml^2. Člen $\frac{1}{2}\, ml^2\psi^2 = \frac{1}{2}\, mv^2$ je kinetična energija, člen $ml^2V(\varphi)$ potencialna energija.

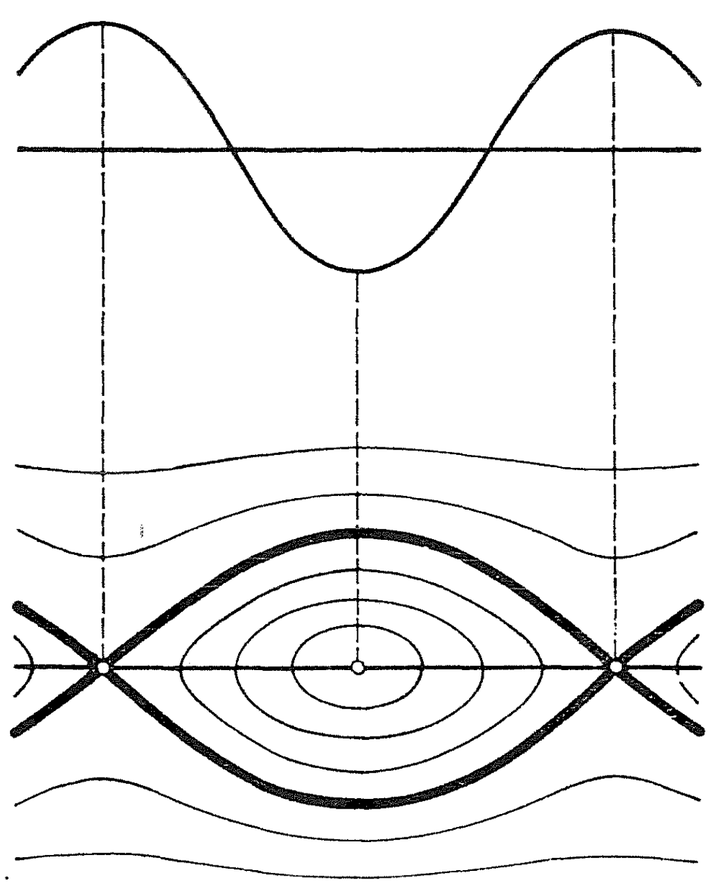
Krivulji na fazni ravnini, ki jo opiše stanje, ko sledi sistemu (2), pravimo *fazni tir* ali *tokovnica* fazne tekočine. Naša naloga je po Poincaréju opisati vse fazne tire, narisati *fazni portret sistema* (2).

Najprej vprašajmo po tiru, ki ga sestavlja ena sama točka. Ta predstavlja stanje, ki se s časom ne spreminja, njegovo gibanje je mirovanje. Taki točki pravimo *negibna točka* ali *točka mirovanja*. Iz (2) neposredno preberemo, da je na fazni ravnini celo zaporedje negibnih točk $(k\pi, 0)$. To zaporedje prekriva dve točki na krogu, spodnje in zgornje teme. Nad spodnjim temenom so točke s sodim k, nad zgornjim z lihim k. Spodnje teme ustreza energiji $C = -\omega^2$, zgornje $C = \omega^2$. To sta najmanjša in največja vrednost potencialne energije. (Slika 3).

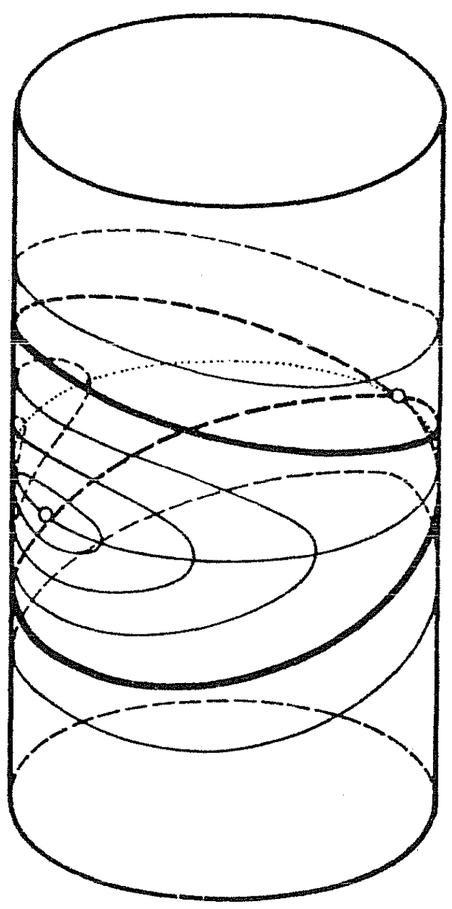
Poglejmo še, kakšni so fazni tiri, ki ustrezajo drugim vrednostim energije. Očitno mora biti $C \geqq -\omega^2$, pri $C < -\omega^2$ ni gibanja, fazni tiri so prazni. Pa naj bo $-\omega^2 < C < \omega^2$. (3) prepišimo

$$\psi = \sqrt{2(C - V(\varphi))} \tag{4}$$

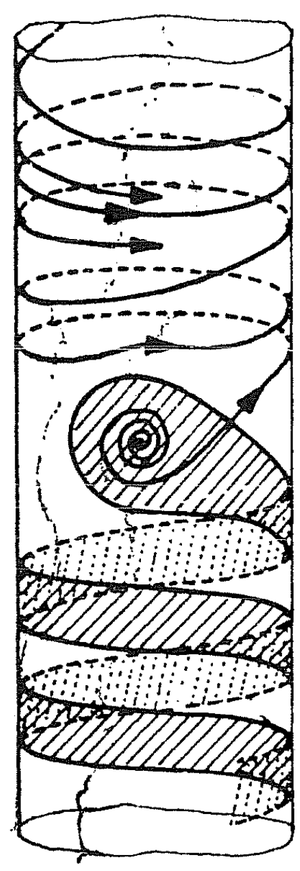
pa vidimo, da je krivulja realna pri tistih φ, ki zadoščajo oceni $V(\varphi) \leqq C$. V točkah, kjer je $V(\varphi) = C$, seče krivulja os (φ) in to pod pravim kotom, kot preberemo iz (2). Ker je še simetrična proti osi (φ), je nazadnje sestavljena iz sklenjenih krivulj, ki oklepajo negibne točke $(2k\pi, 0)$. (Slika 3).



Sl. 3



Sl. 4



Sl. 5

V prostoru leg ustreza vsakemu sklenjenemu faznemu tiru nihanje okoli mirovne lege, spodnjega temena kroga.

Vrednosti energije $C = \omega^2$ ustreza na ravnini sklenjena krivulja, ki gre skozi točke $((2k + 1)\pi, 0)$. Brž ko je $C > \omega^2$, pa tir ne seče več osi (φ), sestavljen je iz dveh simetričnih delov (slika 3). V prostoru leg ustreza takemu faznemu tiru vihtenje nihala, gibanje točke po krogu stalno v isti smeri.

Naloga: če matematično nihalo še nekoliko idealiziramo, dobimo *fizikalno nihalo*. Privzamemo namreč, da so nihanja tako majhna, da je $\sin\varphi \sim \varphi$. Tedaj preide (1) v enačbo za sinusna nihanja $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$. Bralec sam naj nariše za to nalogo fazni portret.

Fazna ravnina matematičnega nihala (slika 3) je razslojena v tire. Najprej so tu negibne točke, ki se ločijo med seboj po vedenju tirov v bližini. Točko (0, 0) in vse točke, ki nastanejo iz nje po premiku za $2k\pi$ vzdolž osi (φ), obdajajo sklenjeni tiri. Takim točkam pravimo *centri*.

Druge točke — $(0, \pi)$ in vse, ki nastanejo iz nje s premikom za $2k\pi$ — pa so limitne točke štirih tirov, dveh, ko gre t proti ∞, dveh, ko gre proti $-\infty$. Tem točkam pravimo *sedla*. Tiri, ki segajo od sedla do sedla, delijo ravnino v dva dela, napolnjena s tiri različne vrste. Tiri med sedli sestavljajo *separatriso* portreta. Znotraj separatrise so sklenjeni tiri, zunaj nesklenjeni.

Preslikajmo ravnino na *fazni valj* (slika 4). Na valju sta dve negibni točki, sedlo in center, ki ležita diametralno. Separatrisa je sestavljena iz dveh lokov, ki gresta skozi sedlo in vsak zase oklepata valj. Na tej sliki loči separatrisa homotopsko različne tire. Znotraj separatrise so tiri, ki so homotopni 0, tiri zunaj nje so homotopni med seboj, a se ne dajo stisniti v točko.

Matematično nihalo — togo palico, ki je obešena na tečaju brez trenja — v praksi redkokdaj srečamo. Zato pa se da enačba (1) lepo integrirati. Kvalitativna slika je samo spremljala račun.

Pa nalogo nekoliko zamotajmo. Privzemimo še trenje in konstanten zunanji moment. Enačbe, ki jo dobimo tako

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = \alpha \tag{5}$$

že ne moremo več ugnati s kvadraturami. Obravnava mora biti že povsem kvalitativna. Ob njej se ne utegnemo ustavljati. Pregledati bi morali več možnosti, ker se fazna slika spreminja s parametri. Pokažimo le fazno sliko za primer, ko sta trenje β in zunanji moment α dovolj majhna (slika 4).

Na valju sta dve negibni točki. Prvo je sedlo, ki ga že poznamo. V njem se srečujejo štirje tiri — separatrisa — ki se vijejo po valju vsak po svoje. Druga negibna točka je *fokus*. Tiri se fokusu spiralasto približujejo. Nazadnje omenimo še en sam sklenjen tir, ki oklepa valj. Imenujemo ga *limitni cikel*. Vsi drugi tiri so razklenjeni, neskončno mnogokrat ovijajo valj in se približujejo bodisi fokusu, bodisi limitnemu ciklu.

Valj razpade v dve *porečji*: svetli del privlači limitni krog, temni del se steka k fokusu.

Mimogrede: enačba (5), ki je bolj zamotana in trši oreh za obravnavo, je bliže tehniški praksi: opisuje na primer elektromotor pod stalnim momentom, φ je tedaj kot med magnetnima poljema statorja in rotorja, člen s sinusom opisuje silo, ki skuša ta kot zmanjšati (ta člen je še vedno idealizacija, ker je sila bolj splošna funkcija kota kot sinus).*

Bralcu prepustimo v premislek tehniško interpretacijo faznega portreta: kaj pomeni (kakšnemu gibanju elektromotorja ustreza) edini sklenjeni tir, kaj fokus, kakšna usoda čaka elektromotor, če je njegovo začetno stanje svetlo, kakšna, če je temno.

Dinamični sistemi in vektorska polja

Nalogo iz prejšnjega poglavja posplošimo. Obravnavajmo sistem n enačb drugega reda (gibalne enačbe fizikalnega sistema z n prostostnimi stopnjami)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{1}$$

x je n-terica funkcij $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Z novo spremenljivko $y = \dot{x}$ prevedemo (1) v sistem enačb prvega reda za $2n$ neznanih funkcij x, y

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = f(x, y) \tag{2}$$

Zaklad vrednosti spremenljivke x imenujemo *prostor leg* (konfiguracijski prostor), zaklad vrednosti spremenljivke (x, y) pa *prostor stanj* (fazni prostor). Zaenkrat privzemimo, da sta to kar evklidska prostora razsežnosti n in $2n$. Namesto posebno zgrajenega sistema (2) obravnavajmo bolj splošni sistem

---

* Pa četudi enačbo zamotamo še bolj, nikoli ne bo tako uporabna, kakor je zaresni elektromotor, še posebno Siemensov.

$$\dot{x} = P(x, y) \qquad \dot{y} = Q(x, y) \tag{3}$$

V sistemu (1) smo videli gibalne enačbe fizikalnega sistema, ki ga vodi znana sila, (3) pa lahko obravnavamo kot gibalne enačbe tekočine v predpisanem polju hitrosti.

Funkciji $P(x, y)$, $Q(x, y)$ strnimo v vektorsko polje $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ na faznem prostoru. Sistem (3) zapišemo tedaj v vektorski obliki

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

Točke, v katerih je polje $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ enako 0

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \tag{5}$$

imenujemo *kritične točke polja*. V vsej obravnavi bomo zahtevali, da ima $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ le izolirane kritične točke in še, da je zvezno. Če je povrh vsaka rešitev sistema (3) definirana na vsem $\mathbf{R}$, pravimo, da je v faznem prostoru definiran *dinamični sistem*.

Posamezna rešitev sistema $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ je natanko določena z začetno točko $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$. Zapišimo

$$\mathbf{r}(t) = X(t)\,\mathbf{r}_0$$

pa je $X(t)$ pri vsakem t operator, definiran na vsem faznem prostoru. Operatorska funkcija $X(t)$ opisuje gibanje fazne tekočine ali *fazni tok*, kot pravimo.

Vzemimo dva trenutka t_1 in t_2 in poglejmo, v kaj preslika $X(t_2)$ točko $\mathbf{r}_1 = X(t_1)\,\mathbf{r}_0$. Enkrat je to kar $X(t_2)\,X(t_1)\,\mathbf{r}_0$. Drugič pa je to lega, v katero je prišla točka $\mathbf{r}_0$ v času $t_1 + t_2$. Ker je sistem (3) avtonomen (Polje $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ neodvisno od časa), smemo zapisati to lego $X(t_1 + + t_2)\,\mathbf{r}_0$. S primerjanjem obeh izrazov spoznamo, da je $X(t)$ enoparametrična grupa preslikav

$$X(t_1 + t_2) = X(t_1)\,X(t_2)$$

Včasih pravimo kar tej grupi dinamični sistem.

Izberimo $\mathbf{r}_0$. Množici $X(t)\,\mathbf{r}_0$, $t \in \mathbf{R}$ pravimo *tir* (*fazni tir*) skozi $\mathbf{r}_0$. Fazni prostor razpade v disjunktne množice — tire.

Tir je poseben primer *invariantne množice*. Množica $\mathcal{M}$ je invariantna, če je pri vsakem t

$$X(t)\,\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$$

ali $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow X(t)\,\mathbf{r}_0 \in \mathcal{M}$: z vsako točko je v $\mathcal{M}$ ves tir, ki gre skozi to točko.

Zaprti invariantni množici, ki ne vsebuje manjše zaprte invariantne množice, pravimo *minimalna množica*.

Dokažimo: *Množica $\mathcal{M}$ je minimalna natanko takrat, ko je vsak tir, ki ga vsebuje, v $\mathcal{M}$ povsod gost.*

Pogoj je potreben: hkrati s tirom je invariantno tudi njegovo zaprtje. Ker je zaprtje v $\mathcal{M}$, ki je minimalna množica, je zaprtje kar ves $\mathcal{M}$. Pogoj je zadosten: denimo, da obstaja invariantna zaprta podmnožica $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Tir $X(t)\,\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{M}$ z zaprtjem vred leži v $\mathcal{M}$. Po pogoju pa je zaprtje tira $\mathcal{M}$, zato $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Izrek je dokazan.

Primer minimalne množice je zaprt tir. Taki tiri so na primer točke mirovanja (negibne točke) in sklenjeni tiri.

Točka $\mathbf{r}_0$ je negibna, če je pri vsakem t

$$X(t)\,\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 \tag{6}$$

Dokažimo: $\mathbf{r}_0$ *je negibna točka sistema natanko takrat, ko je kritična točka polja* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Res: (6) pomeni, da je konstantna funkcija $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ rešitev sistema (4). Tedaj je očitno (5) $\Leftrightarrow$ (6).

Vzemimo za primer linearni sistem

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{r} \tag{7}$$

kjer je **A** neizrojena kvadratna matrika s paroma različnimi lastnimi vrednostmi. Podrobno obravnavo tega sistema bo bralec našel v učbeniku [11]. Ustrezno transformacijsko grupo lahko v tem primeru izrazimo z matrično eksponentno funkcijo

$$X(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

ki je definirana z običajno vrsto (z **E** označimo enotno matriko)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \ldots$$

Bralec sam lahko pokaže, da je $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{r}_0$ rešitev naloge (6), (7).

Za zgled vzemimo ravninski sistem, ko je **A** dvovrstna matrika. Naj bosta λ_1 in λ_2 njeni lastni vrednosti in $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Partikularno rešitev sistema (6) poiščimo z nastavkom $\mathbf{r} = e^{\lambda t}\mathbf{a}$, pa vidimo, da mora biti **a** lastni vektor matrike, ki ustreza lastni vrednosti λ

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

Označimo vektorja, ki ustrezata λ_1 in λ_2 z $\mathbf{a}_1$ in $\mathbf{a}_2$, pa lahko splošno rešitev zapišemo kot linearno kombinacijo

$$\mathbf{r}(t) = c_1e^{\lambda_1}\mathbf{a}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{a}_2$$

Koeficienta c_1 in c_2 poiščimo iz pogoja $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_0$$

pa lahko ustrezno rešitev zapišemo kot linearno transformacijo nad $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{r}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{r}_0$$

in odtod preberemo $e^{\mathbf{A}t}$. Računski zgled bo sestavil bralec sam ali pa bo posegel po [11].

Opozorimo le na posebno nagrado, ki se skriva v obravnavani nalogi: kdor je v srednješolskem učbeniku Aritmetika, algebra in analiza III obvladal lastne vrednosti in lastne vektorje dvovrstnih matrik, bo lahko z opisanim navodilom poiskal $e^{\mathbf{A}t}$. Z $e^{\mathbf{A}t}$ pa bo lahko sestavil toliko nalog in vaj za Aritmetiko, algebro in analizo IV, kolikor bo hotel; $e^{\mathbf{A}t}$, $t \in \mathbf{R}$ je pač grupa.

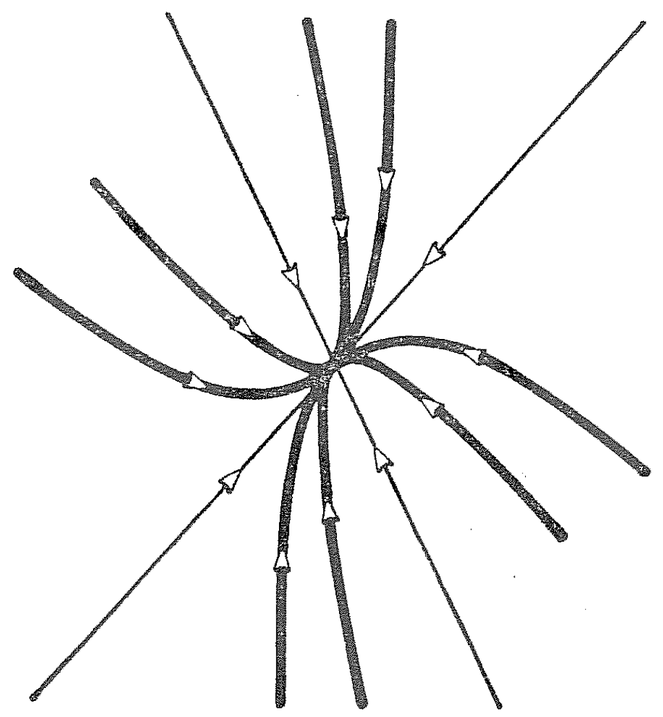
Linearni sistem (6) ima le eno točko mirovanja — izhodišče, če sta obe lastni vrednosti različni od 0. Podrobnejšo klasifikacijo prepustimo učbenikom. Tu navedimo le štiri primere:

lastni vrednosti enako predznačeni realni števili — vozel (slika 6)

lastni vrednosti različno predznačeni realni števili — sedlo (slika 7)

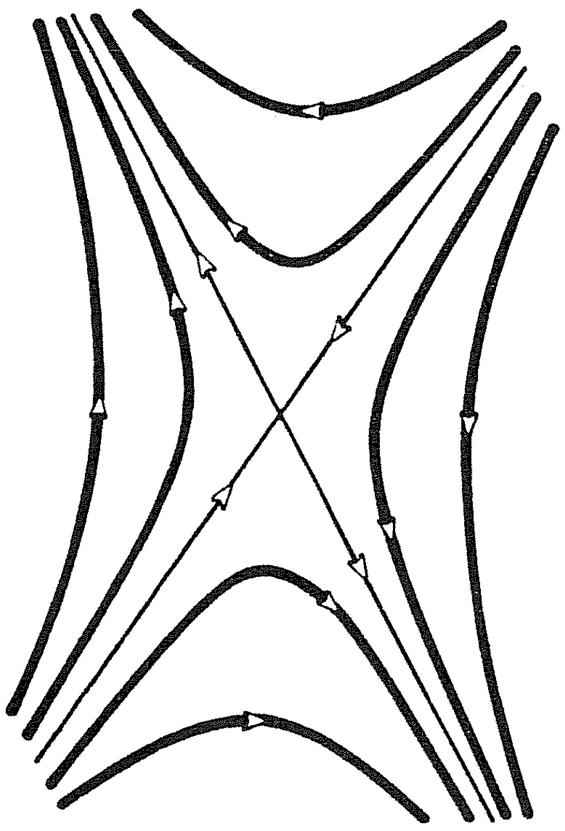
lastni vrednosti neimaginarni kompleksni števili — fokus (slika 8)

lastni vrednosti imaginarni kompleksni števili — center (slika 9).

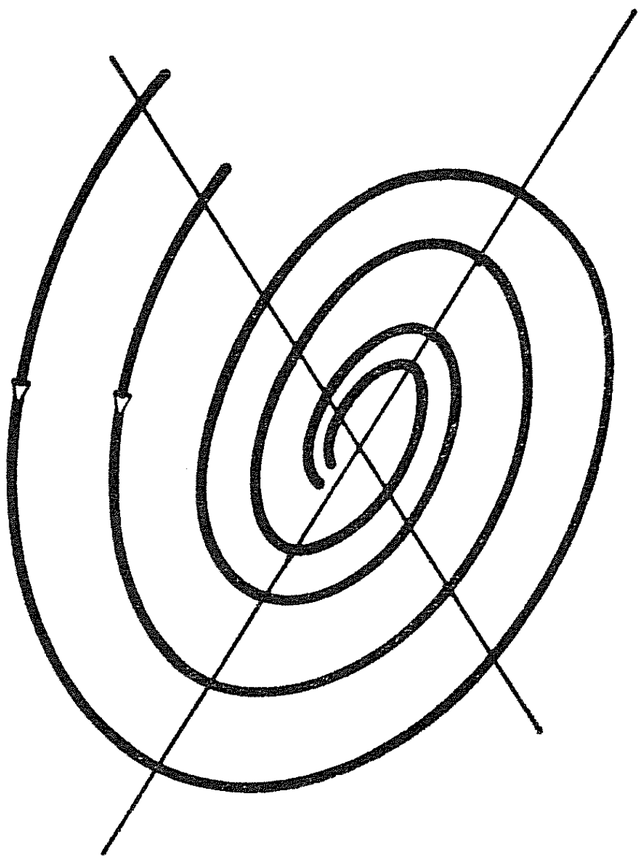


Sl. 6

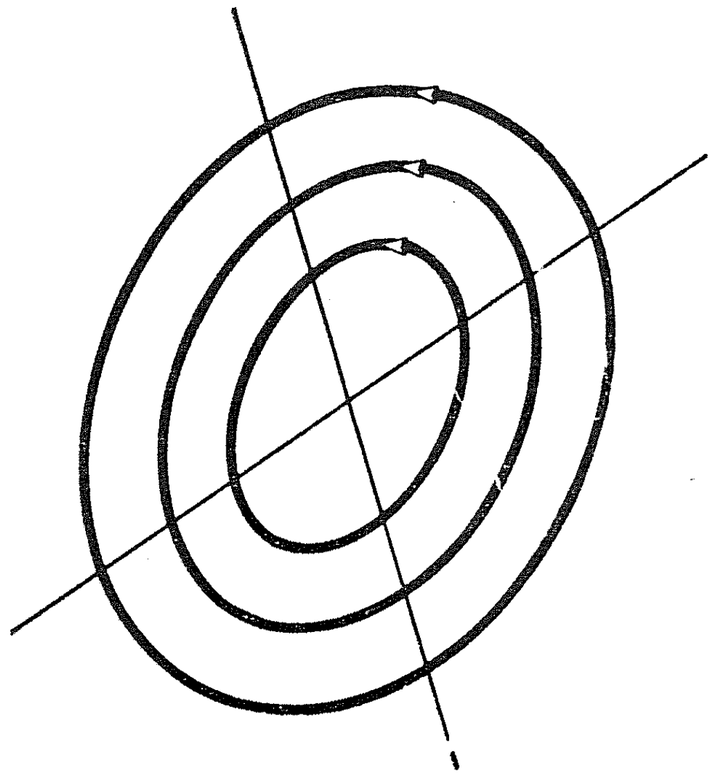
Gibanje po tokovnicah lahko poteka proti vozlu (fokusu) ali od njega. O tem odloča predznak realne komponente. V prvem primeru pravimo, da je negibna točka *stabilna*, v drugem, da je *nestabilna*.



Sl. 7



Sl. 8



Sl. 9

Prvi integrali

Vrnimo se k mehanskim sistemom.[16] Fazni valj, na katerem je zapisana usoda matematičnega nihala, preslikajmo na realno premico tako, da vsakemu stanju φ, ψ priredimo ustrezno energijo

$$I(\varphi, \psi) = C$$

Inverzne slike točk, $I^{-1}(C)$, so tedaj invariantne množice. Spreminjajmo C od $-\infty$ do ∞ in zasledujmo, kako se pri tem spreminja množica $I^{-1}(C)$. Vemo že, da se topološka narava tira skokoma spremeni pri dveh vrednostih energije $C_1 = -\omega^2$ in $C_2 = \omega^2$, ki jima pravimo *bifurkacijski vrednosti* energije. Pri $C < C_1$ je $I^{-1}(C)$ prazna množica, pri $C = C_1$ je točka, pri $C_1 < C < C_2$ sklenjen tir, homotopen 0 na valju, pri $C = C_2$ razpade v točko miro-
vanja in separatriso, pri $C > C_2$ pa je par sklenjenih tirov, ki oklepata valj.

Bolj zanimiva in težja slika se odpre pri obravnavi sistemov z več prostostnimi stopnjami. Vzemimo kar najpreprostejšo možnost, dve prostostni stopnji. Ustrezni fazni prostor je štirirazsežen in potrebovali bi tri prve integrale, da bi sistem popolnoma integrirali. Običajno pa je teh integralov premalo.

Imejmo *konservativni sistem* $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{f}(\mathbf{r})$ za ravninski vektor $\mathbf{r}$. Ustreznemu faznemu sistemu $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{f}(\mathbf{r})$ kaj lahko najdemo prvi integral — zakon o ohranitvi energije. S skalarnim množenjem enačb najprej $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$, ali $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$, odtod pa

$$\tfrac{1}{2} v^2 + V(\mathbf{r}) = C$$

če z $V(\mathbf{r})$ označimo skalarno polje

$$V(\mathbf{r}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Kaj nam pove prvi integral $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ o tiru? Pogoj $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = C$ določa trorazsežno mnogoterost — nadploskev v štirirazsežnem prostoru — nivojnico skalarnega polja $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Ker je $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ konstanten na faznem tiru

$$\Phi(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = C$$

leži ves tir na nivojnici polja $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Vsak prvi integral določa torej enoparametrično družino ploskev v faznem prostoru, na katere legajo celi fazni tiri. Z drugimi besedami: *Nivojnice prvega integrala* $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ *so invariantne množice obravnavanega sistema.*

Vzemimo za primer $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}$. To je sistem dveh fizikalnih nihal, ki nihata neodvisno drug od drugega. Tu je $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} r^2$ in prvi integral — energija — je $\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} r^2$. Odtod: fazni tiri z energijo C leže na trorazsežni sferi S^3 z enačbo $r^2 + v^2 = 2C$.

Nove prve integrale izdajo simetrijske lastnosti sistema diferencialnih enačb. Denimo, da je polje sil centralno simetrično: smer sile je kolinearna $\mathbf{r}$, njena velikost pa odvisna le od razdalje r

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g(r)\,\mathbf{r}$$

Potencialna energija takega sistema je odvisna le od r

$$V(r) = \int g(r) r dr$$

Sistem je neobčutljiv za vrteže (za grupo SO(2)). Zato se ohranja vrtilna količina: $(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})^{\cdot} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times g(r)\,\mathbf{r} = 0$. Ker je $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ ves čas pravokoten na ravnino gibanja, ga popolnoma določa tretja koordinata. Zato

$$x\dot{y} - y\dot{x} = P$$

Namesto pravokotnih uvedimo polarni koordinati r, φ. Tedaj $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi} r\sin\varphi$, $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi} r\cos\varphi$, odtod $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ in $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi}$.

Tiri z energijo C in z vrtilno količino P leže torej v štirirazsežnem prostoru s koordinatami r, φ, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ na preseku $\mathcal{P}$ dveh trorazsežnih ploskev

$$\tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = C \qquad\qquad \dot{r}^2\dot{\varphi} = P$$

Iz prostora izrežimo nadravnino $r = 0$, potem pa eliminirajmo $\dot{\varphi}$. Tako dobimo projekcijo ploskve $\mathcal{P}$ v trorazsežni prostor s cilindrskimi koordinatami r, φ, $\dot{r}$, $r \neq 0$

$$\tfrac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) + P^2/2r^2 = C$$

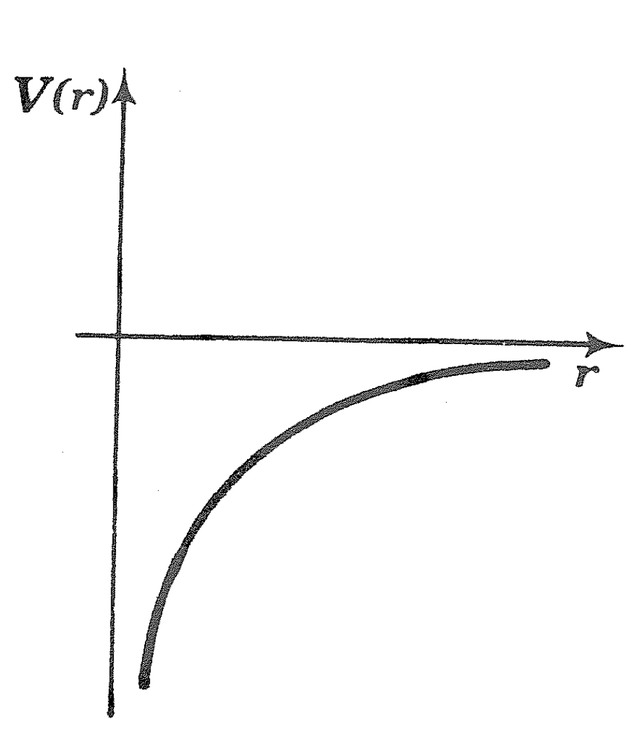
Uvedimo družino funkcij $V_P(r) = V(r) + P^2/2r^2$, pa lahko enačbo še poenostavimo

$$2r^2 + V_P(r) = C \tag{1}$$

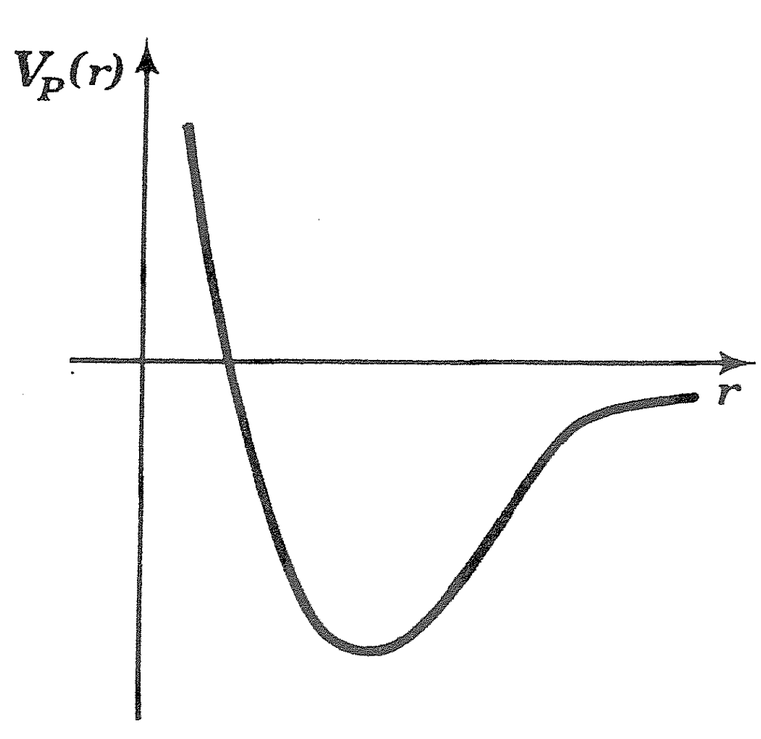
$V_P(r)$ imenujemo *efektivni potencial*. Sestavljen je iz potenciala $V(r)$ in potenciala centrifugalne sile. Na slikah 10 in 11 je $V_P(r)$ za Newtonov potencial $V(r) = -1/r$, na sliki 10 za $P = 0$, na sliki 11 za $P \neq 0$. Minimum $V_P(r)$, $P \neq 0$, je

$$G(P) = \min_r V_P(r) = -1/2P^2$$

V enačbi (1) φ ne nastopa. To nam narekuje pot do slike: narišimo presek ploskve s polravnino $\varphi = 0$ in ga zavrtimo okoli osi cilindrskega sestava. Brž ko je $P \neq 0$, nastopajo štirje tipi invariantnih množic. Njihovi preseki s polravnino $\varphi = 0$ so: $C < G(P)$ — prazna množica, $C = G(P)$ — točka (slika 12), $G(P) < C < 0$ — sklenjena krivulja, simetrična proti poltraku (r) (slika 13), $C \geqq 0$ — nesklenjena krivulja, ki enkrat seče poltrak (r) (slika 14).



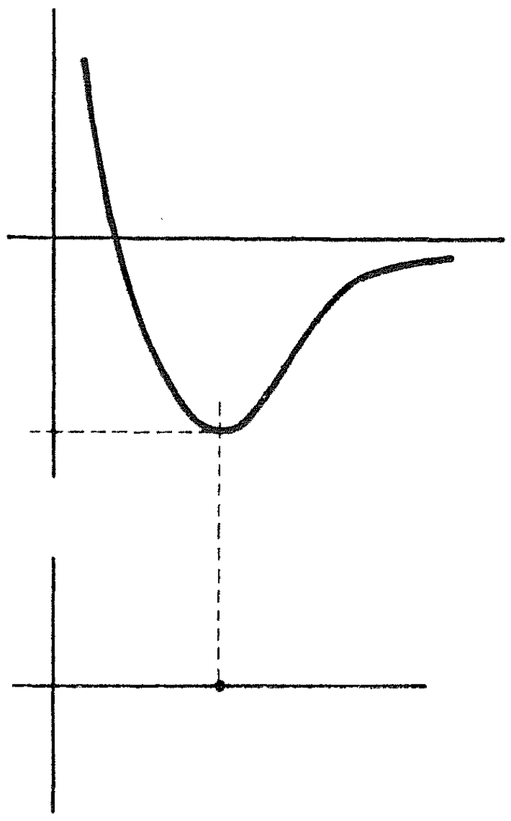
Sl. 10



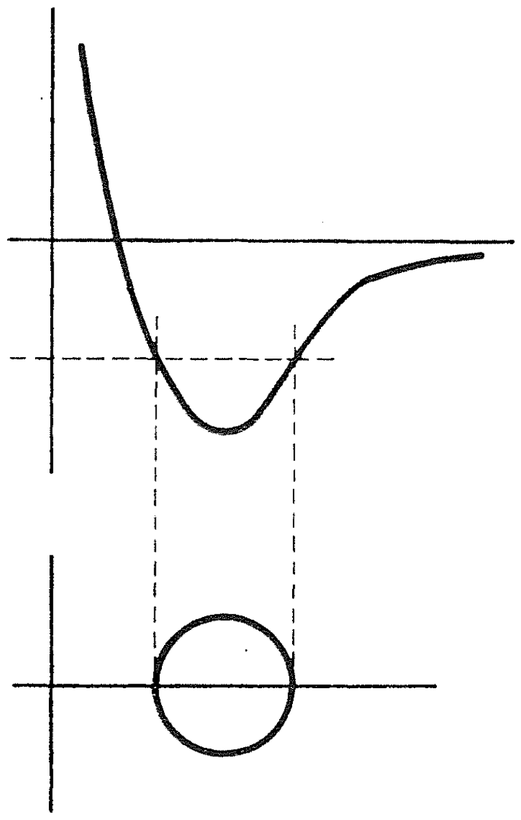
Sl. 11

Zavrtimo preseke okrog osi, pa dobimo invariantne množice:

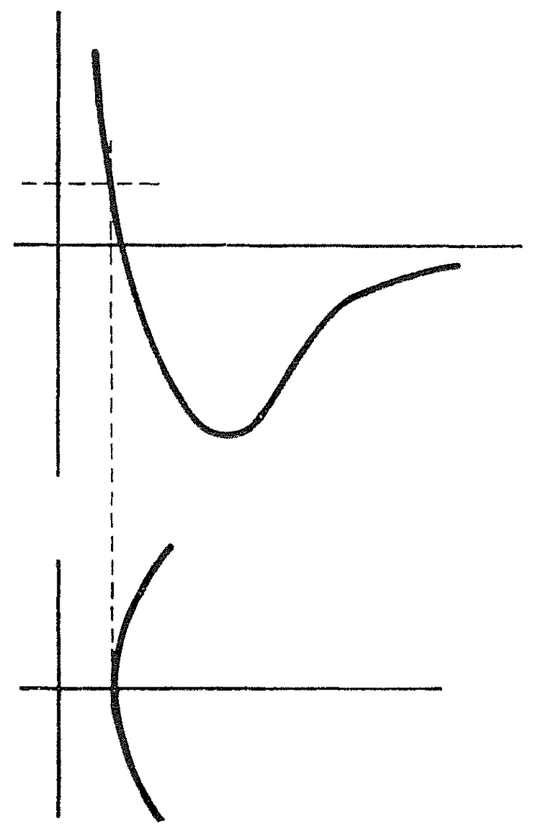
$C < G(P)$ — prazna množica, $C = G(P)$ — krožnica ali svitek T^1 (slika 12′), $G(P) < C < 0$ — svitek T^2 (slika 13′), $C \geqq 0$ — valj (slika 14′).



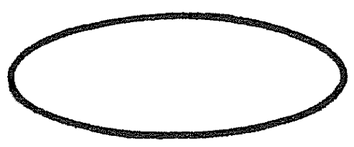
Sl. 12



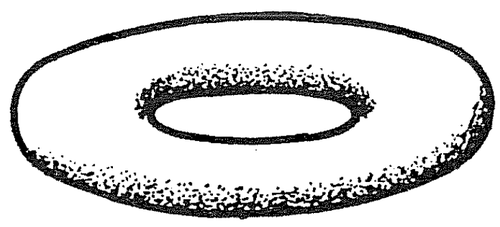
Sl. 13



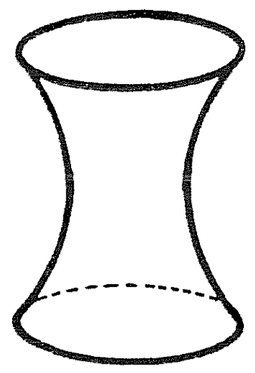
Sl. 14



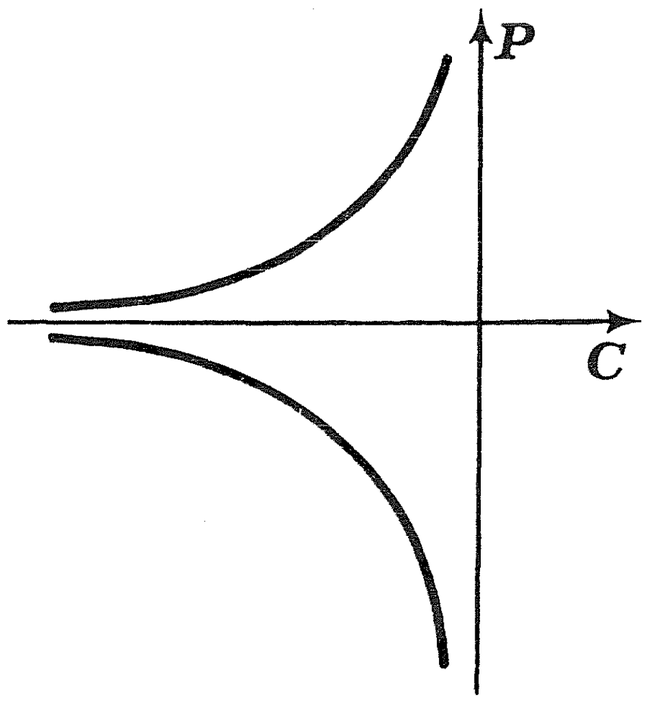
Sl. 12'



Sl. 13'



Sl. 14'



Sl. 15

Fazni prostor preslikajmo na ravnino (C, P) tako, da vsakemu stanju $r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$ priredimo ustrezni vrednosti energije in vrtilne količine. To preslikavo označimo spet z I. Invariantne množice $I^{-1}(C, P)$ smo že opisali (prezrli smo le možnost $P = 0$). Topološki tip množice se spremeni pri prehodu čez krivuljo $C = G(P)$ in pri prehodu čez os $C = 0$. Krivulja in os sestavljata bifurkacijsko množico sistema (slika 15).

Ko smo fazni prostor razslojili v invariantne množice $I^{-1}(C, P)$, smo nalogo poenostavili, odslej moramo obravnavati le še fazni pretok na ploskvah $I^{-1}(C, P)$. Ker nas bodo zanimale le kompaktne invariantne množice, smo tako pred pretakanjem po svitku.

Indeks ravninskega polja

Študij dinamičnega sistema je isto kot obravnava ustreznega vektorskega polja. Na primer: točke mirovanja so kritične točke polja. V dveh razdelkih bomo pokazali, kaj ve topologija povedati o kritičnih točkah vektorskega polja.

Osnovni pripomoček bo Poincaréjev indeks, osnovni dosežek Poincaréjev izrek. V tem razdelku bomo omejili razpravo na ravninska polja, v naslednjem bomo obravnavali polja na kompaktnih ploskvah.

V definiciji in v izreku se prepletata dva pojma: vektorsko polje in krivulja.

Krivulja [12] bo za nas zvezna preslikava intervala [0, 1] v ravnino, $t \mapsto \mathbf{r}(t)$. Zahtevali bomo še nekaj več, kot je za splošno topologijo potrebno: $\mathbf{r}(t)$ naj bo *gladka*. To pomeni: pri vsakem $t \in [0, 1]$ naj bo odvedljiva (v robnih točkah pač le z ustrezne strani), njen odvod $\dot{\mathbf{r}}(t)$ pa povsod različen od 0.

Enostavni sklenjeni krivulji [13] bomo rekli *cikel*. Krivulja je sklenjena, če je $\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}(0)$, cikel je gladek, če je povrh še $\dot{\mathbf{r}}(1) = \dot{\mathbf{r}}(0)$.

Gladka krivulja je orientabilna. Orientacijo določa smer gibanja $\mathbf{r}(t)$, ko t narašča od 0 do 1. Krivulji $\mathbf{r}(t)$ in $\mathbf{r}(1 - t)$ sta nasprotno orientirani. Krivuljo bomo včasih označili s $\mathcal{K}$, nasprotno orientirano tedaj z $-\mathcal{K}$.

Orientirajmo še ravnino [13]. Izbrano orientacijo okličimo za pozitivno. Pozitivna naj bo na primer orientacija, ki ustreza kroženju v nasprotju z uro (orientacija, ki se od zgoraj navzdol vidi kot sukanje v levo).

Cikel na ravnini je lahko orientiran v skladu z ravninsko orientacijo ali pa ne [13]. Če je, bomo rekli, da je pozitivno orientiran, če ne, da je negativno orientiran.

Z orientacijo ravnine smo orientirali tudi kote. Natančneje: z orientiranim kotom bomo merili zasuk vektorja od začetne lege (začetnega kraka kota) do končne lege (končnega kraka kota): *orientirani kot* je tako lahko poljubno realno število. Orientirani kot je z začetnim krakom in s končnim krakom določen le do večkratnika 2π natanko. Pravimo tudi, da ima orientirani kot štev no mnogo zveznih vej.

Na ravnini imejmo zvezno vektorsko polje $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ z izoliranimi kritičnimi točkami. Iz ravnine izkljujmo vse kritične točke in nastalo množico imenujmo $\mathcal{M}$. Vzemimo gladko krivuljo $\mathcal{K}$, ki poteka v $\mathcal{M}$. V vsaki točki $\mathcal{K}$ ima $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ določeno smer. Orientirani kot z začetnim krakom na $\mathbf{F}(\mathbf{r}(0))$ in s končnim krakom na $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ normirajmo tako, da se s t zvezno spreminja in je pri $t = 0$ enak 0. Tako smo izbrali zvezno vejo orientiranega kota, ki jo označimo s $\theta(t)$.

Indeks polja $\mathbf{F}$ proti krivulji $\mathcal{K}$ (ali indeks krivulje $\mathcal{K}$ proti polju $\mathbf{F}$) je po definiciji

$$\mathrm{Ind}\,(\mathbf{F}, \mathcal{K}) = \theta(1)/2\pi$$

Očitno velja: indeks cikla je celo število.

Definirajmo: polji $\mathbf{F}_0$ in $\mathbf{F}_1$ sta *homotopni na ciklu* $\mathcal{C}$, če obstaja zvezna družina polj $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda)$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, ki so na $\mathcal{C}$ različna od 0, da je $\mathbf{F}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, 1) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r})$.

Primer: *Polji* $\mathbf{F}_0$ in $\mathbf{F}_1$, *ki v vsaki točki C oklepata kot* $\neq \pi$, *sta homotopni*. Družina, ki veže obe polji, je $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda) = (1 - \lambda)\,\mathbf{F}_0(\mathbf{r}) + \lambda \mathbf{F}_1(\mathbf{r})$. Povsod je $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda) \neq 0$, sicer bi v točki $\mathbf{r}$ imeli $\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$ in $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ nasprotno smer.

1. posledica: *Polji, ki oklepata konstanten kot, sta homotopni*. To je neposredno razvidno, če je kot $\neq \pi$. Če je enak π, uporabimo tranzitivnost homotopije in eno polje preslikamo v drugo z dvakratnim zasukom za pravi kot.

2. posledica: *Polje* $\mathbf{F}$ *je homotopno polju smernih vektorjev* $\mathbf{F}/|\mathbf{F}|$.

3. posledica: *Bž ko* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *pri nobenem* $\mathbf{r}$ *na ciklu ni kolinearen* $\mathbf{a}$, *je polje* $\mathbf{F}$ *homotopno poljubnemu konstantnemu polju.*

Res! Najprej je $\mathbf{F}$ homotopno polju $-\mathbf{a}$, konstantna polja pa so homotopna med sebo po prvi posledici. Po tej pripravi dokažimo nekaj izrekov o indeksu. Začnimo s primer brez dokazov:

Indeks polja, ki je konstantno na ciklu $\mathcal{C}$, je enak 0;

Indeks polja, ki je v vsaki točki tangentno na pozitivno orientiran cikel, je enak 1.

Homotopni polji imata enaka indeksa.

Naj bo $\mathbf{F}_0$ homotopno $\mathbf{F}_1$. Z zasukom polja $\mathbf{F}_1$ za konstanten kot lahko dosežemo, da sta polji v $\mathbf{r}(0)$ kolinearni. Z zasukom ne pokvarimo ne homotopnosti ne indeksa. Prav tako lahko privzamemo, da je smer družine $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda)$, ki veže obe polji, v $\mathbf{r}(0)$ neodvisna od λ. Tedaj lahko definiramo zasuk $\theta(t, \lambda)$, da je $\theta(0, \lambda) = 0$ za vsak λ. Indeks $\theta(1, \lambda)/2\pi$ je zvezna funkcija λ, ki zavzema le cele vrednosti. To gre le, če je konstantna in izrek je dokazan.

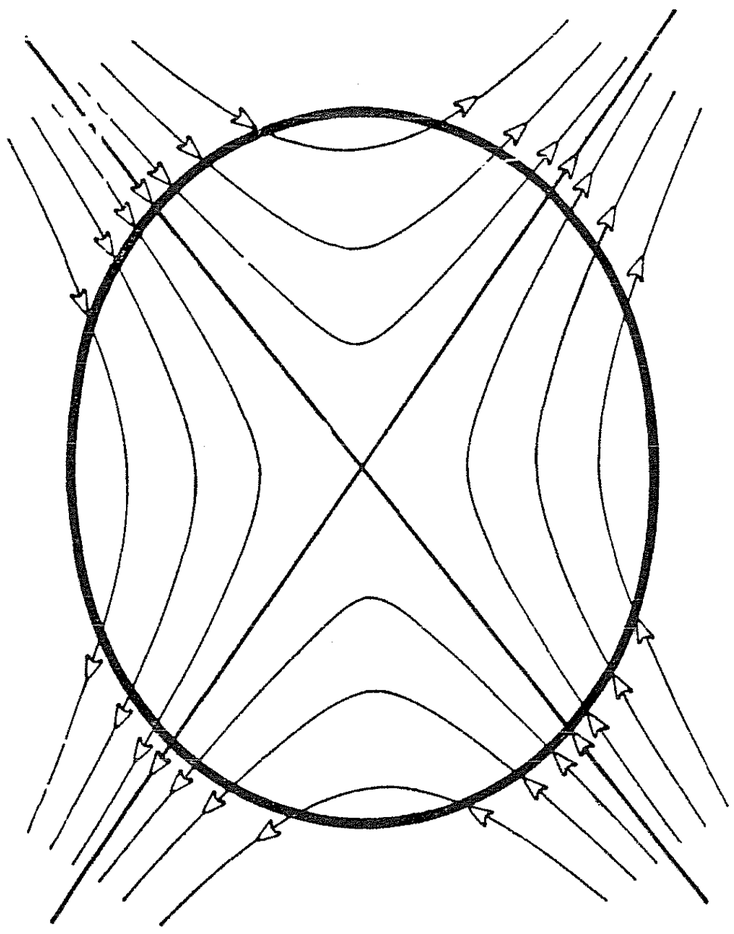
Cikla $\mathcal{C}_0$ in $\mathcal{C}_1$, *ki sta homotopna v* $\mathcal{M}$, *imata isti indeks proti* $\mathbf{F}$.

Dokaz: Naj bo $\mathbf{r}(t, \lambda)$ homotopija, ki veže oba cikla. Ker leži v $\mathcal{M}$, je pri vsakem λ definiran indeks $\mathbf{F}$ proti $\mathbf{r}(t, \lambda)$. Indeks se z λ zvezno spreminja. Ker je celo število, je konstanten. Izrek je dokazan.

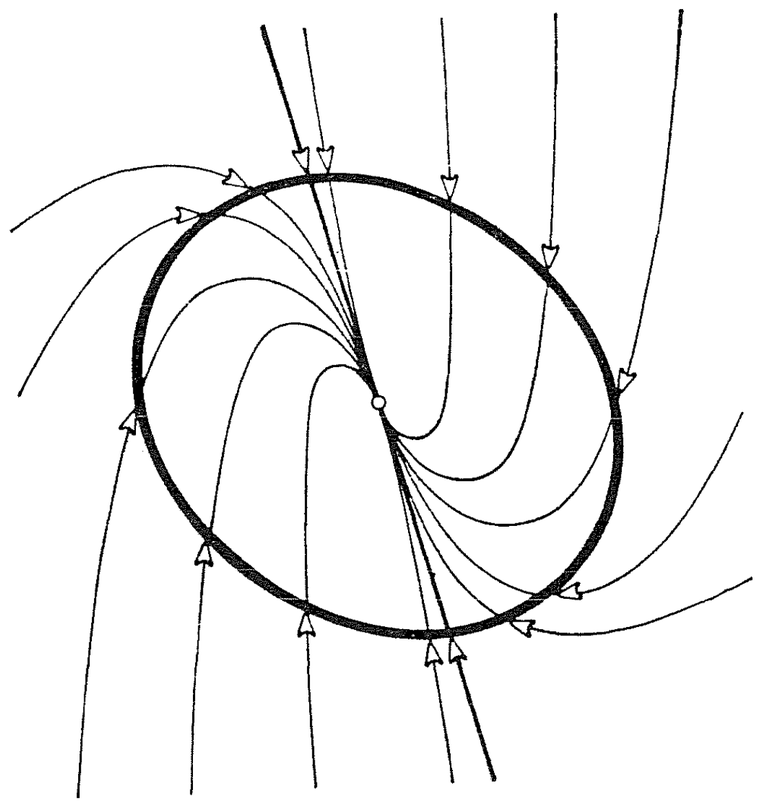
Posledica: *Indeks cikla, ki je v* $\mathcal{M}$ *homotopen* 0, *je enak* 0. Cikel lahko stisnemo v dovolj majhen cikel, na katerem se zvezno polje $\mathbf{F}$ le malo spreminja. Na takem ciklu ne more preteči vseh smeri, po tretji posledici je homotopno konstantnemu polju, konstantno polje pa ima indeks 0.

Pa vzemimo poljubno družino pozitivno orientiranih ciklov, ki oklepajo eno samo izbrano kritično točko. Tudi ti so med seboj homotopni in imajo isti indeks. Ta indeks proglasimo za indeks kritične točke.

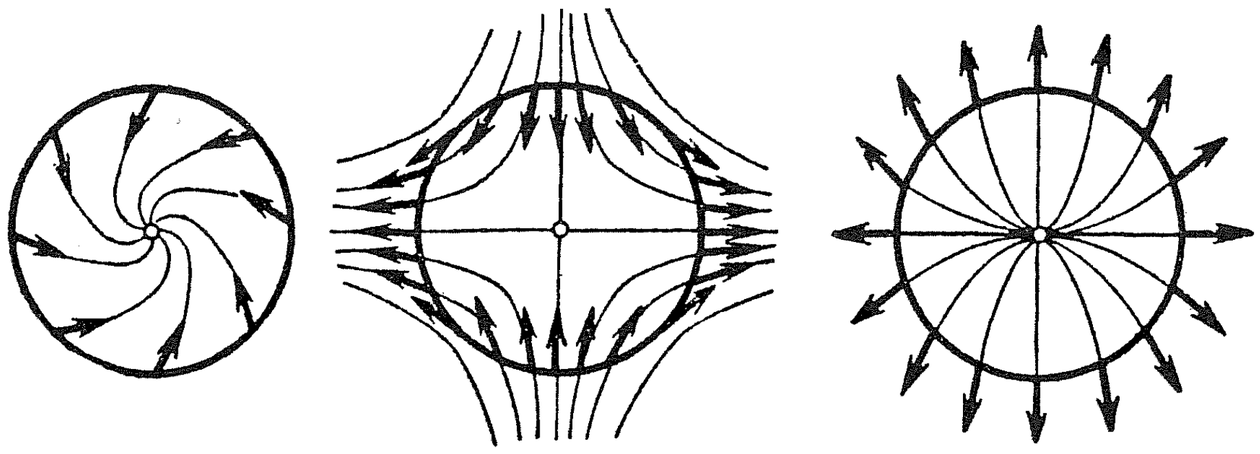
Iz slike 16, 17, 18 spoznamo, da je indeks sedla —1, indeks vozla in fokusa pa 1. Tudi indeks centra je enak 1.



Sl. 16



Sl. 17



Sl. 18

Vzemimo poljubno enostavno sklenjeno krivuljo [12]. Območje, ki ga ograja, razdelimo na manjša območja. Očitno je vsota indeksov po robovih delnih območij enaka indeksu po robu celotnega območja. Razdelimo območje tako na drobno, da je v vsakem delnem območju kvečjemu ena kritična točka, pa lahko pribijemo:

Indeks pozitivno orientiranega cikla je enak vsoti indeksov kritičnih točk, ki jih obdaja.

Indeks negativno orientiranega cikla je nasproten vsoti indeksov kritičnih točk, ki jih obdaja.

Oglejmo si dve posledici dokazanega izreka. Najprej opazujmo *damo s psičkom*,* ki dokazuje osnovni izrek algebre. Polinom kompleksne spremenljivke $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ je predpis, ki vsakemu z priredi kompleksno število $p(z)$. V kompleksnih številih pa lahko vidimo dvorazsežne vektorje in v polinomu $p(z)$ vektorsko polje na kompleksni ravnini. Kritične točke polja so ničle polinoma.

Vzemimo krog $|z| = r$ s tako velikim polmerom, da je $r^n > |a_1| r^{n-1} + \ldots + |a_n|$, Tedaj je $z^n + \lambda(a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)$ homotopija, ki na krogu veže polinom $p(z)$ s polinomom z^n. Indeks polinoma $p(z)$ proti dovolj velikemu krogu je enak indeksu potence z^n.

Ko preteče točka z (dama) krog s polmerom r enkrat, preteče z^n (psiček) krog s polmerom r^n n-krat. Indeks polja z^n je n. Tak je tudi indeks polja $p(z)$.

Po prejšnjem izreku je znotraj kroga vsaj ena kritična točka, vsaj enkrat je $p(z) = 0$. To pa je že osnovni izrek algebre.

V faznem portretu ravninskega dinamičnega sistema imejmo sklenjen fazni tir. Indeks tega tira proti ustreznemu vektorskemu polju je enak $+1$ ali -1, kakor je pač orientiran, saj se polje v vsaki točki dotika faznega tira. Zato:

Znotraj sklenjenega faznega tira leži vsaj ena negibna točka. Vsota indeksov vseh negibnih točk, ki jih oklepa tak cikel, je enaka 1.

Fazni cikel lahko torej oklepa en sam center, en sam fokus ali en sam vozel, ne more pa vsebovati enega samega sedla.

Vektorska polja na sklenjenih ploskvah

V tem razdelku bomo dokazali znameniti Poincaréjev izrek o indeksih vektorskega polja na sklenjeni ploskvi [8]. To je eden prvih izrekov, ki kažejo, da so analitične zgradbe nad prostorom (v našem primeru vektorska polja nad sklenjeno ploskvijo) v mnogočem pogojene s topološkimi lastnostmi prostora (v našem primeru z Eulerjevo karakteristiko ali z rodom ploskve [13] [14]).

Imejmo orientabilno sklenjeno ploskev $\mathcal{P}$ v $\mathbf{R}^3$ in na njej izbrano orientacijo [13]. Privzemimo še, da je $\mathcal{P}$ gladka tako, da ima v vsaki točki definirano tangentno ravnino in z njo normalo. Orientacija ploskve $\mathcal{P}$ določa pozitivno stran ploskve in z njo pozitivno smer normale. Pozitivna smer normale pa spet določa orientacijo tangentne ravnine. Tako lahko vse tangentne ravnine orientiramo uglašeno z orientacijo ploskve.

Vektorsko polje na ploskvi je predpis, ki vsaki točki ploskve priredi vektor iz ustrezne tangentne ravnine. Točke, v katerih je vrednost polja enaka 0, imenujemo kritične točke polja.

Gladka krivulja na ploskvi je spet gladka preslikava intervala [0, 1] v $\mathbf{G}$. Gladka krivulja ima v vsaki točki od 0 različen tangentni vektor. Gladka krivulja je orientabilna.

Imejmo torej orientabilno sklenjeno gladko ploskev $\mathcal{P}$ in na njej zvezno vektorsko polje $\mathbf{F}$ z izoliranimi kritičnimi točkami. Kritične točke izkljujmo iz ploskve in ostanek označimo z $\mathcal{M}$.

Vzemimo gladko krivuljo $\mathcal{K}$ v $\mathcal{M}$. Tangentni vektor na orientirano krivuljo $\mathcal{K}$ leži v orientirani tangentni ravnini. V vsaki točki krivulje izračunamo orientirani kot $\alpha(t)$, ki poteka od tangentnega vektorja do smeri vektorskega polja. Ta kot se s t zvezno spreminja. Imenujmo

$$\beta(\mathcal{K}, \mathbf{F}) = [\alpha(1) - \alpha(0)]/2\pi$$

Očitno je tole: če krivulji obrnemo smer, spremeni $\beta(\mathcal{K}, \mathbf{F})$ predznak. Krivuljo, ki je orientirana nasprotno s $\mathcal{K}$, označimo z $-\mathcal{K}$, pa lahko zapišemo

$$\beta(-\mathcal{K}, \mathbf{F}) = -\beta(\mathcal{K}, \mathbf{F}) \qquad (1)$$

---

* Ime je iz folklore MGU (op. pisca).

Vzemimo na $\mathcal{P}$ cikel $\mathcal{C}$, ki ograja disk $\mathcal{Q}$ na ploskvi: $\mathcal{C} = \delta\mathcal{Q}$. Območje $\mathcal{Q}$ razdelimo z gladko krivuljo v dve območji. Ograji delnih območij $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ sta le še odsekoma gladki. Brez škode krivulje nekoliko spremenimo, da bo pregrada sekala prvotni cikel pod pravim kotom. Izračunajmo $\beta(\mathcal{C}_1, \mathbf{F})$ in $\beta(\mathcal{C}_2, \mathbf{F})$ ter ju seštejmo. (Slika 19.)

Pregrada nastopa v $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ z nasprotnima orientacijama, zato zaradi (1) v vsoto ničesar ne prispeva. Dela, ki ju $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ pobereta iz $\mathcal{C}$, prineseta vprav $\beta(\mathcal{C}, \mathbf{F})$; toda v stičiščih, kjer $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ nista gladka, doživita $\alpha_1(t)$ in $\alpha_2(t)$ skok za pravi kot. Ker sta stičišči dve, je vsota vseh skokov vprav štirikrat pravi kot. To prinese v vsoto 1 in

$$\beta(\mathcal{C}_1, \mathbf{F}) + \beta(\mathcal{C}_2, \mathbf{F}) = \beta(\mathcal{C}, \mathbf{F}) + 1$$

$\beta(\mathcal{C}, \mathbf{F})$ ni aditivna funkcija območja, pač pa je to $\gamma(\mathcal{C}, \mathbf{F}) = \beta(\mathcal{C}, \mathbf{F}) + 1$, ki jo proglasimo za *indeks cikla* $\mathcal{C}$ *proti polju* $\mathbf{F}$

$$\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C}, \mathbf{F}) = \gamma(\mathcal{C}, \mathbf{F}) = \beta(\mathcal{C}, \mathbf{F}) + 1$$

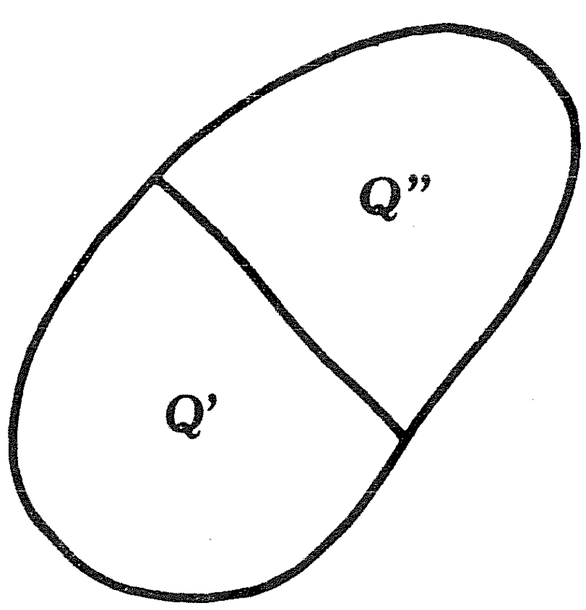
Bralec sam bo pokazal, da je v ravnini nova definicija ekvivalentna stari.

Podobno kakor v prejšnjem razdelku pokažemo, da imajo cikli, ki so si homotopni na $\mathcal{M}$, enake indekse. Na isti način uvedemo indeks kritične točke in dokažemo:

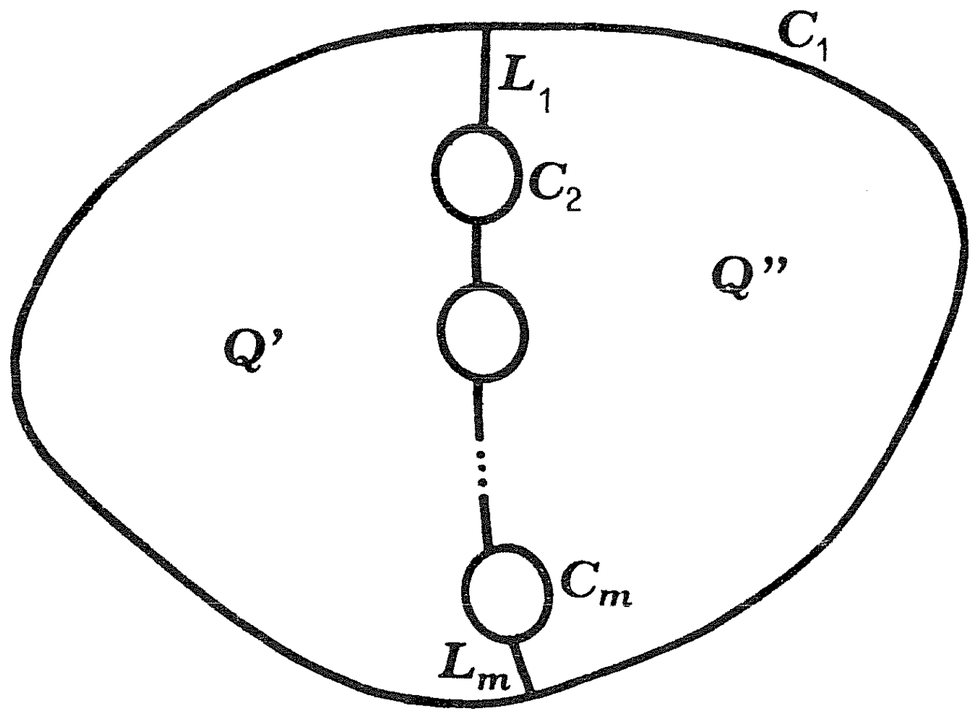
Indeks polja proti ograji diska $\mathcal{Q}$ *je enak vsoti indeksov kritičnih točk, ki leže v* $\mathcal{Q}$.

Vsoto indeksov kritičnih točk, ki leže v $\mathcal{Q}$, označimo z $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{Q}, \mathbf{F})$, pa lahko izrek zapišemo na kratko

$$\mathrm{Ind}\,(\delta\mathcal{Q}, \mathbf{F}) = \mathrm{Ind}\,(\mathcal{Q}, \mathbf{F}) \tag{2}$$



Sl. 19



Sl. 20

Vzemimo sedaj na ploskvi območje $\mathcal{Q}$ roda 0, ki ga ograja m ciklov $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots \mathcal{C}_m$. (Slika 20.) Med sosednjimi cikli $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3, \ldots, \mathcal{C}_m - \mathcal{C}_1$ potegnimo reze $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_m$ tako, da na njih ni kritičnih točk polja. Območje $\mathcal{Q}$ smo razdelili v dva diska. $\mathcal{Q}', \mathcal{Q}''$. Vsota indeksov vseh kritičnih točk, ki so na $\mathcal{Q}$, je po prejšnjem izreku enaka vsoti indeksov obeh ograj

$$\mathrm{Ind}\,(\mathcal{Q}, \mathbf{F}) = \mathrm{Ind}\,(\delta\mathcal{Q}', \mathbf{F}) + (\mathrm{Ind}\,(\delta\mathcal{Q}'', \mathbf{F}) = \beta(\delta\mathcal{Q}', \mathbf{F}) + \beta(\delta\mathcal{Q}'', \mathbf{F}) + 2$$

Vsoto indeksov smo raje izrazili z β, ker bodo zaradi (1) pri seštevanju odpadli prispevki rezov, ki vstopajo v obe ograji z nasprotnima orientacijama. Ko računamo β, moramo upoštevati še skoke, ki jih doživi $\alpha(t)$ ob stičiščih rezov in ciklov. Ker se ob vsakem rezu pripetijo štirje skoki kota, ki merijo skupaj -2π, prispevajo k vsoti na desni strani -1. Ker je vseh skokov m, je nazadnje

$$\mathrm{Ind}\,(\mathcal{Q}, \mathbf{F}) = 2 - m + \Sigma_k\,(\mathcal{Q}_k, \mathbf{F}) \tag{3}$$

Ploskev roda n razrežimo na ploskve roda 0 tako, da ločimo ročaje od sfere [13]. Vsak ročaj ograjata dva cikla $\mathcal{C}_k'$ in $\mathcal{C}_k''$, ostanek $\mathcal{Q}_0$ pa ograja $2n$ ciklov $-\mathcal{C}_k'$, $-\mathcal{C}_k''$ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Po (3)

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{Q}_0, \mathbf{F}) = 2 - 2n - \Sigma_k \beta(\mathcal{C}_k', \mathbf{F}) - \Sigma_k \beta(\mathcal{C}_k'', \mathbf{F})$$
$$\operatorname{Ind}(\mathcal{Q}_k, \mathbf{F}) = \beta(\mathcal{C}_k', \mathbf{F}) + \beta(\mathcal{C}_k'', \mathbf{F})$$

Seštejmo po vseh k od 0 do n. Na levi dobimo vsoto indeksov po vsej ploskvi $\mathcal{P}$, na desni pa $2(1-n)$. To pa je, kakor je pokazal francoski admiral de Jonquieres, vprav *Eulerjeva karakteristika ploskve* — $\chi(\mathcal{P})$ [13]. Dokazali smo Poincaréjev izrek:

Imejmo sklenjeno orientabilno ploskev, na njej pa zvezno vektorsko polje z izoliranimi kritičnimi točkami. Vsota indeksov vseh kritičnih točk je enaka Eulerjevi karakteristiki ploskve

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, \mathbf{F}) = \chi(\mathcal{P})$$

Izrek nam na primer pove, da je zvezno vektorsko polje brez kritičnih točk možno le na sklenjeni ploskvi z Eulerjevo karakteristiko 0. Taka ploskev pa je le svitek.

Sfera je ploskev roda 0. Zato je vsota indeksov kritičnih točk zveznega vektorskega polja na sferi enaka 2.

Zvezno vektorsko polje na sferi ima torej vsaj eno kritično točko. Ta posebni primer radi povzamemo v izrek, ki tudi neukemu pove, s čim se ukvarjajo topologi: *Sfera se ne da počesati brez škarij*. V vsaki točki sfere postavimo smerni vektor normale, tako dobimo zvezno polje normal. Potem pa poskusimo te normale počesati — spremeniti v zvezno polje tangentnih vektorjev. Poincaréjev izrek nam pove, da bomo cilj dosegli le, če bomo normale prej pristrigli.

Fazni tok na svitku

Fazni portret dinamičnega sistema smo razslojili v invariantne množice. Celotno usodo sistema poznamo, če vemo, kako se fazni tok pretaka po invariantnih množicah. V preprostem primeru smo videli, da so bile vse kompaktne invariantne množice svitki.

To pri integrabilnih sistemih ni posebna izjema. Denimo, da ima sistem kak gladek prvi integral I. Tedaj leže invariantne množice na nivojnicah skalarnega polja I. Brez škode vzemimo nivojnico $I^{-1}(0)$. Ta nivojnica bo le izjemoma sekala množico, na kateri velja grad $I = 0$. Zato smemo privzeti, da je po njej grad $I \neq 0$. Nivojnica je gladka ploskev.

Nivojnica $I^{-1}(0)$ razdeli prostor v tri dele: Na prvem je $I > 0$, na drugem $I < 0$, na tretjem — na nivojnici sami — pa je $I = 0$. Ker je I zvezna, vodi vsaka pot iz prve množice v drugo skozi tretjo. Nivojnica ima dve strani, je orientabilna. Če je $I^{-1}(0)$ kompaktna, je kompaktna tudi ena od množic, na katerih ima I konstanten predznak. Nivojnica ograja ta del in je sklenjena ploskev.

Kompaktne nivojnice gladkega skalarnega polja I so torej večinoma sklenjene orientabilne gladke ploskve.

Če ima sistem več prvih integralov, leže invariantne množice na presekih sklenjenih orientabilnih ploskev. To pa so spet orientabilne sklenjene ploskve nižjih razsežnosti. Zato:

Kompaktne invariantne množice integrabilnega sistema so praviloma orientabilne sklenjene gladke ploskve.

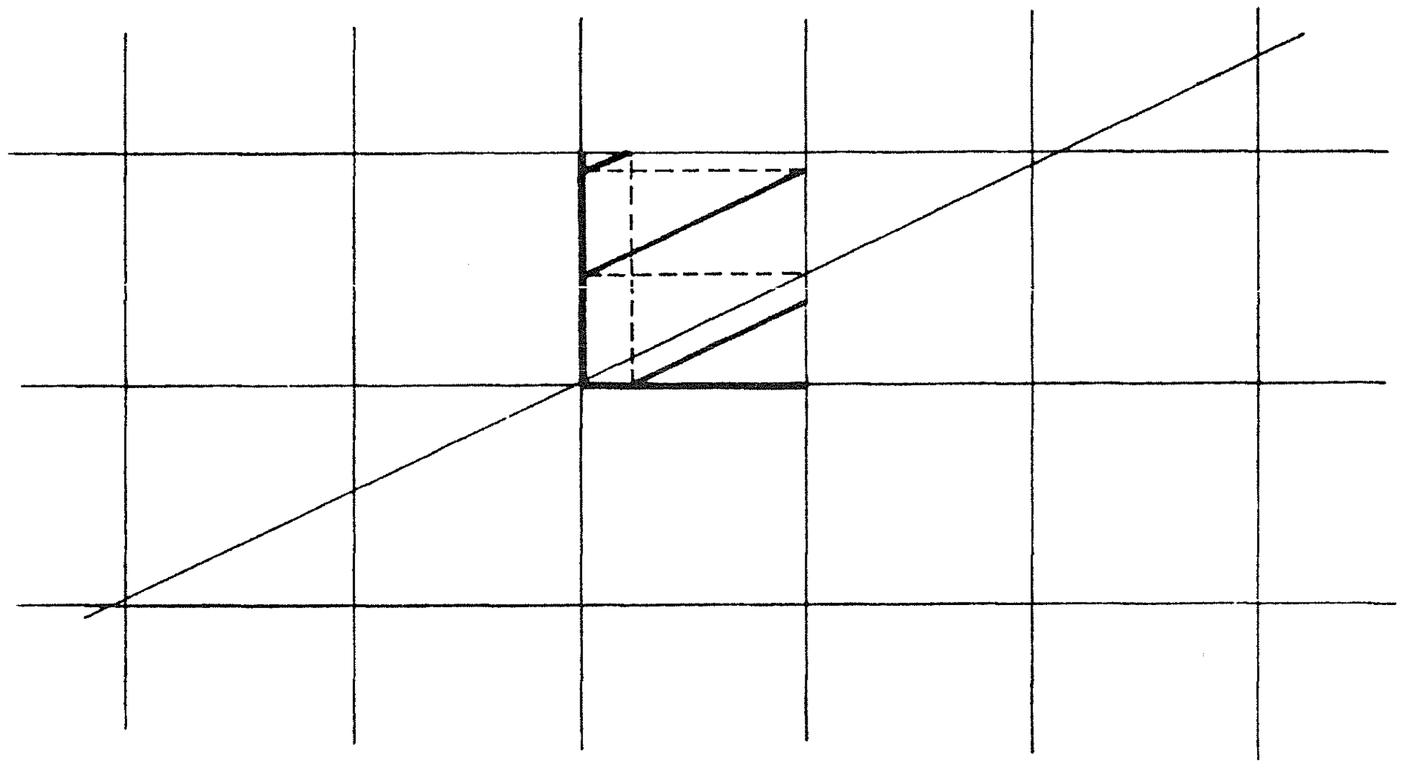
Vztrajajmo le pri zveznih poljih z izoliranimi kritičnimi točkami. Tedaj bo na invariantni množici le izjemoma ležala kritična točka polja. Zožitev vektorskega polja na invariantno ploskev je vektorsko polje na invariantni ploskvi. Večina kompaktnih invariantnih množic

sodi torej med orientabilne sklenjene gladke ploskve s poljem, ki nima kritičnih točk. Dvorazsežna taka ploskev pa je lahko le svitek T^2.

Na svitek uvedimo koordinate. Svitek zvijmo iz pravokotnika: najprej identificirajmo (zlepimo) en par nasprotnih stranic, da dobimo valj, potem pa še drugi par (ki je po prvem lepljenju par krogov), pa je pred nami svitek [13]. Vsaka točka pravokotnika predstavlja točko na svitku. Dve enakoležni točki na vzporednem paru stranic pravokotnika predstavljata isto točko svitka. Denimo, da so vse stranice pravokotnika enake 2π. Vsako točko na njem opišemo s parom (φ, ψ), $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$. S koordinatama (φ, ψ) opišemo tudi točko na svitku, para $(2\pi, \psi)$ in $(0, \psi)$ predstavljata isto točko na svitku. Prav tako ustrezata eni točki para $(\varphi, 0)$ in $(\varphi, 2\pi)$. Svitek T^2 lahko nazadnje zapišemo kot premi produkt dveh krožnic $T^2 = S^1 \times S^1$.

Krožnico S^1 smo prekrili z realno premico $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Prav tako prekrijemo svitek z ravnino. Pravokotnik, iz katerega smo zlepili svitek, naj bo to pot kvadrat s stranico 1, pa je

$$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$$



Sl. 21

$\mathbf{Z}^2$ je množica točk (x, y) na ravnini $\mathbf{R}^2$ s celima koordinatama $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$. V tej podobi je svitek ravnina, na kateri sta identificirani točki s koordinatnima paroma, ki se ločita za cel par $\in \mathbf{Z}^2$. Faktorski prostor $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ predstavimo z enim od kvadratov, na katere razdelijo ravnino cele točke. Za to vlogo izberimo kvadrat, ki leži v prvem kvadrantu in ima eno oglišče v izhodišču. K osnovnemu kvadratu štejmo le levo in spodnjo stranico. (Slika 21.)

Funkcijo na svitku spremenimo v funkcijo na ravnini $f(x, y)$, če pač zahtevamo, da ima isto vrednost v vseh točkah, ki prekrivajo isto točko na svitku. Funkcija $f(x, y)$ je popolnoma določena s svojimi vrednostmi v osnovnem kvadratu, naprej pa jo razširimo kot dvojno-periodično funkcijo

$$f(x + 1, y) = f(x, y + 1) = f(x, y)$$

Pa tudi v nasprotni smeri gre: vsako dvojno-periodično funkcijo na ravnini pretvorimo v funkcijo na svitku.

Prav tako ravnamo z vektorskim poljem in z dinamičnim sistemom na svitku. Na ravnini ustrezata takemu sistemu enačbi

$$\dot{x} = P(x, y) \qquad \dot{y} = Q(x, y)$$

z dvojno-periodičnima desnima stranema.

Rešitev sistema je krivulja na ravnini, ki jo moramo naviti nazaj na svitek.

Krivuljo $x = x(t), y = y(t)$ na ravnini spremenimo v krivuljo na svitku tako, da jo najprej razdelimo po kvadratih, potem pa vse dele združimo v izbranem predstavniku. Za zgled vzemimo premico

$$x = t \qquad y = kt \tag{1}$$

Daljice, na katere razpade premica, zložimo v osnovni kvadrat in dobimo šop vzporednih daljic, ki je zgrajen prav preprosto: ko pride točka po daljici do roba, ki ni štet h kvadratu, preskoči v ekvivalentno točko na vzporednem robu.

Če kaka točka s $t \neq 0$ pade zopet v izhodišče, se premica (1) preslika v sklenjeno krivuljo na svitku. Dokažimo:

Premica (1) *prekriva sklenjeno krivuljo na svitku natanko tedaj, ko je k racionalno število.*

Pogoj je zadosten. Naj bo $k = m/n$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$. Tedaj je na premici točka s celima koordinatama n, m, ki prekriva 0,0. Pogoj je potreben: če se krivulja sklene, je na (1) točka, ki prekriva izhodišče. Taka točka ima celi koordinati m, n. Iz $m = t$, $n = kt$ pa že sledi $k = n/m \in \mathbf{Q}$.

Brž ko je k iracionalno število, prekriva premica (1) nesklenjeno krivuljo, v kvadratu jo predstavlja družina neskončno mnogih disjunktnih daljic. Dokažimo:

Brž ko je k iracionalno število, prekriva (1) *krivuljo, ki je povsod gosta na svitku.*

Izrek bomo dokazali, brž ko pokažemo, da so leva krajišča daljic povsod gosta na levem in na spodnjem robu kvadrata. Točke na levem robu kvadrata ustrezajo celim vrednostim x, torej celim vrednostim t, denimo $t = n$. Ustrezne ordinate so enake

$$(nk) = nk - [nk]$$

$[nk]$ pomeni celi del realnega števila nk, ordinata (nk) torej njegov »neceli« del. Podobno ravnamo z levim robom. Oba dela bomo dokazali, brž ko dokažemo:

Množica $\mathcal{M} = \{(nk), n \in \mathbf{Z}\}$ je povsod gosta na [0, 1].

Najprej pokažimo, da prodro elementi množice v vsako bližino števila 0. Vzemimo naravno število m, razdelimo interval [0, 1] na m enakih delov. Ker je k iracionalno število, so $(k), (2k), \ldots, ((m+1)k)$ paroma različna števila, vsaj dve ležita na istem podintervalu. Naj bosta to (pk) in $(qk) > (pk)$, tedaj $0 < ((q-p)k) < 1/m$. Število $\alpha = ((q-p)k) \in \mathcal{M}$ je torej od 0 oddaljeno za manj kot $1/m$.

Vzemimo sedaj vse večkratnike števila α, ki leže na [0, 1]. Zaradi $l\alpha < 1 \Rightarrow (l\alpha) = \alpha l$ si $l\alpha$ slede v razdaljah, enakih α. Zadnji $(l\alpha)$ je oddaljen od 1 za manj od α. Toda $\alpha \in \mathcal{M} \Rightarrow$ $\Rightarrow (l\alpha) \in \mathcal{M}$, razdalje med sosednjimi $(l\alpha)$ so manjše od $1/m$, število m je poljubno, izrek je dokazan.

Oba izreka še vedno veljata, če premico (1) premaknemo: $x = t + x_0$, $y = kt + y_0$. Z njo pokrijemo krivuljo na svitku, ki gre skozi točko x_0, y_0. Zapišimo enačbo premice bolj simetrično

$$x = \omega_1 t + x_0 \qquad y = \omega_2 t + y_0 \tag{2}$$

Stari k izrazimo s koeficientoma ω_1 in ω_2

$$k = \omega_2/\omega_1$$

Stavek: Kvocient k je racionalno število prevedimo v: obstajata celi števili m_1 in m_2, da je

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0$$

Brž ko taki celi števili obstajata, pravimo, da sta ω_1 in ω_2 *soizmerljivi* realni števili. Krivulja (2) je očitno fazni tir sistema na svitku

$$\dot{x} = \omega_1 \qquad \dot{y} = \omega_2 \tag{3}$$

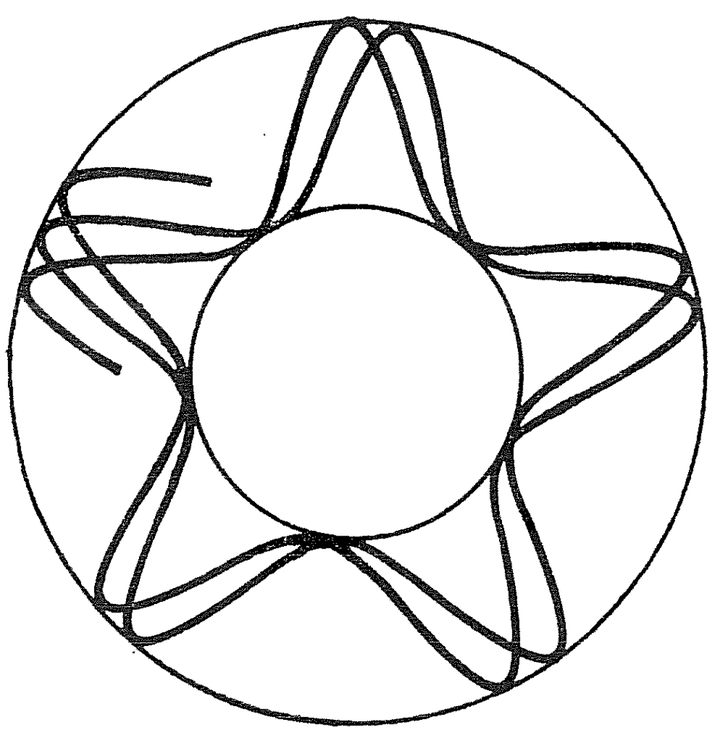
števili ω_1 in ω_2 imenujemo *krožni frekvenci* ustreznega gibanja. Oba izreka o krivulji (2) prevedemo nazadnje v izreka o sistemu (3):

V faznem portretu sistema (3) *so vsi tiri sklenjeni, če sta krožni frekvenci soizmerljivi; če pa krožni frekvenci nista soizmerljivi, je vsak tir nesklenjen in povsod gost na svitku.*

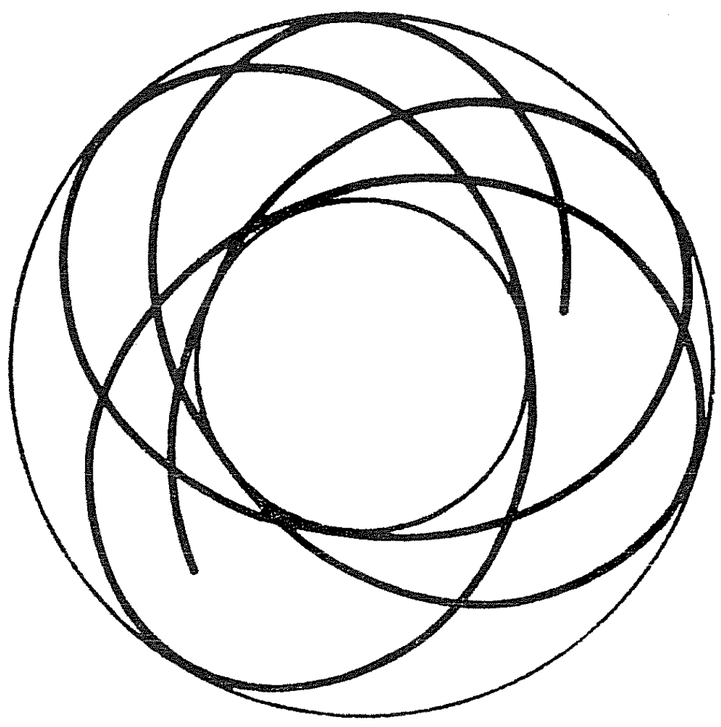
Z drugimi besedami: *če sta frekvenci soizmerljivi, so minimalne množice tiri, če nista, je minimalna množica ves svitek.*

Svitek je, kakor vemo, najbolj pogosta invariantna kompaktna podmnožica v faznem portretu sistema z dvema prostostnima stopnjama. Sedaj ko smo ga ob privzetku (3) prepredli s faznimi tiri, projicirajmo vse skupaj v prostor leg.

Denimo, da svitek, tako kot na sliki 12′, leži vzporedno z ravnino leg. Projekcija svitka na ravnino leg je kolobar. Vsa gibanja, ki imajo fazne tire na svitku, potekajo znotraj tega kolobarja. Denimo še, da vodi pretakanje fazne tekočine po svitku sistem (3). Sklenjenemu faznemu tiru ustreza periodično gibanje po sklenjeni krivulji, ki leži v kolobarju. Nesklenjenemu faznemu tiru ustreza gibanje po krivulji, ki se nikdar ne sklene, čeprav se neprestano vrača v vsako bližino vsake svoje točke in tudi seče samo sebe.* Rekli bomo, da je tako gibanje pogojno periodično (sliki 22 in 23).



Sl. 22



Sl. 23

Molče smo privzeli, da sta obe frekvenci različni od 0. Izjemni primer, ko je kaka frekvenca enaka 0, naj obravnava bralec sam.

Stabilnost

Dovolj primerov smo nabrali, da lahko prikažemo nekaj definicij stabilnosti. Pred očmi imamo pač fazni portret dinamičnega sistema, krivulje $\mathbf{r}(t)$, o katerih bomo govorili, so tiri v njem.

Točka $\mathbf{a}$ je *stabilna po Poissonu*, če vsaki njeni okolici $\mathcal{U}$ in vsakemu $T > 0$ ustreza tak $t > T$, da $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{r}(t) \in \mathcal{U}$.

Primeri. Točka mirovanja je stabilna po Poissonu. Vsaka točka na sklenjenem faznem tiru je stabilna po Poissonu. Za dinamični sistem na svitku, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, pa velja celo: vsaka točka je stabilna po Poissonu.

Fazni tir je *stabilen po Lagrangeu*, če je ves v kompaktni množici. Tiri, ki leže na svitku, so stabilni po Lagrangeu.

---

* Ker smo že pri povsod gosti množici, pokažimo ob njej, kako si je utirala pot terminologija. V [8] beremo na primer: Les Allemands diraient que la *Punktmenge*, formée par les différents points de la trajectoire, est *überalldicht* á l'interieur de la couronne.

Tehniškemu pomenu besede je bližja *stabilnost po Ljapunovu*. Ta govori o stabilnosti gibanja. Vsako gibanje (vsak fazni tir) je natanko določeno s svojim začetnim stanjem. Začetna stanja pa ta ali oni vpliv moti. Gibanje je stabilno, če ostane ob dovolj majhni motnji v predpisanih mejah. Predpisanim mejam pravi tehnik običajno toleranca. V topološkem jeziku povejmo definicijo stabilnosti le za mirovanje:

Negibna točka je stabilna po Ljapunovu, če vsaki njeni okolici $\mathcal{U}$ ustreza okolica $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, da ostane vsak tir, ki se začenja v $\mathcal{V}$, ves čas v $\mathcal{U}$.

Vsi tiri, ki se začenjajo v $\mathcal{V}$, leže v $\mathcal{U}$. Unija vseh teh tirov je invariantna množica. Zato lahko definicijo stabilnosti povemo še drugače: Negibna točka je stabilna po Ljapunovu, če vsaka njena okolica vsebuje invariantno množico.

Če se povrh zgodi še, da vsako gibanje, ki se začenja v $\mathcal{V}$, izzvanja proti mirovanju, pravimo, da je mirovanje *asimptotično stabilno*.

Primeri: vozel in fokus z gibanjem proti točki mirovanja sta asimptotično stabilni točki. Center je stabilen po Ljapunovu.

Ljapunov je razvil posebno teorijo, ki včasih pomaga presoditi, ali je dano gibanje stabilno ali ne. Idejo si oglejmo ob preprostem linearnem zgledu.

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -x - \beta y \qquad \beta > 0 \tag{1}$$

ki opisuje dušeno nihanje. Opazujmo energijo $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ vzdolž faznega tira. Vstavimo v $V(x, y)$ rešitev sistema (1), odvajajmo po t in odvode izrazimo iz sistema (1)

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = xy - xy - \beta y^2 = -\beta y^2 \tag{2}$$

Da izračunamo $\dot{V}(x, y)$, nam torej ni treba poznati rešitve, ki gre skozi (x, y). Iz (2) preberemo, da je vzdolž tira $\dot{V} > 0$, energija V s časom pada. Tir, ki se začenja znotraj kroga $\mathcal{U}$ s središčem (0, 0), ostane ves čas v $\mathcal{U}$, točka mirovanja je stabilna po Ljapunovu. Ker je $V(x, y)$ pozitivno definitna in pada vzdolž tira, gre tir z naraščanjem t proti točki mirovanja. Točka mirovanja (fokus) je asimptotično stabilna.

Tretji pojem stabilnosti, ki sta ga uvedla Pontrjagin in Andronov, govori o stabilnosti faznega portreta v celoti. Začnimo s pomožnim pojmom:

Dve vektorski polji $\mathbf{F}$ in $\mathbf{G}$ na isti mnogoterosti X sta ekvivalentni, če obstaja homeomorfizem $h: X \to X$, ki preslika fazni portret prvega polja v fazni portret drugega polja.

Z drugimi besedami: h ustvarja bijektivno preslikavo med tiri. Po tej pripravi že lahko podamo definicijo:

Polje $\mathbf{F}$ (včasih njegov fazni portret) je *strukturno stabilno*, če so dovolj bližnja polja ekvivalentna $\mathbf{F}$.

Z drugimi besedami: dinamični sistem $\dot{x} = \mathbf{F}(x)$ je strukturno stabilen, če dovolj majhna motnja polja $\mathbf{F}$ ne spremeni topološke narave faznega portreta.

Vzemimo fazna portreta nihal, ki smo ju narisali na valjih (sliki 4 in 5). Motnjo polja izrazimo z α in z β. Dinamični sistem na sliki 5 je strukturno stabilen, saj smemo oba parametra malce spremeniti, ne da bi slika utrpela škodo. Drugače je pri prvem sistemu, ki ustreza $\alpha = \beta = 0$. Še tako majhna motnja $\alpha > 0$, $\beta > 0$ spremeni sliko. Prej sklenjeni tiri se razklenejo, iz centra nastane fokus. Dinamični sistem na sliki 4 ni strukturno stabilen.

Dinamični sistem na svitku, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, ni strukturno stabilen, pa naj gre za periodično ali za pogojno periodično gibanje.

Kam

V tem razdelku prav na kratko preletimo teorijo Kolmogorova, Arnolda in Moserja. Zadovoljimo se le z osnovnimi pojmi in z grobo izdelanimi izreki. Nobenih dokazov.

Denimo, da je prostor leg evklidski prostor $\mathbf{R}^n$. Namesto faznega prostora, v katerem so dodatne koordinate hitrosti, izberimo fazni prostor $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, v katerem so druge koordinate impulzi.

Prehod k novemu faznemu prostoru opišimo še v jeziku mnogoterosti. Denimo, da je prostor leg mnogoterost X. Hitrosti v izbrani točki $x \in X$ leže v tangentni ravnini na X. Fazni prostor za tak sistem je nazadnje tangentni sveženj nad mnogoterostjo X. Impulze pa običajno tolmačimo kot linearne funkcionale nad prostorom hitrosti, zato sestavljajo vrednosti impulzov v točki x kotangentni prostor za mnogoterost. Za novi fazni prostor smo torej izbrali kotangentni sveženj.

Točko novega faznega prostora označimo z (x, p), prvi podatek x je n-terica prostorskih koordinat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, drugi, p, pa n-terica impulznih koordinat $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Imejmo funkcijo $H(x, p)$, definirano na faznem prostoru. Odvode po prostorskih koordinatah H_{x_k} združimo v n-terico H_x, odvode po impulznih koordinatah v H_p. $2n$-terico (H_x, H_p) označimo z grad H. Naj bo $\mathbf{E}$ enotna n-vrstna matrika, J pa $2n$-vrstna matrika

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} 0, & -E \\ E, & 0 \end{Vmatrix}$$

Funkcija $H(x, p)$ določa dinamični sistem: najprej ji priredimo vektorsko polje $\mathbf{J}$ grad H, z njim pa sistem diferencialnih enačb

$$\dot{x} = H_p \qquad \dot{p} = -H_x \tag{1}$$

Funkciji $H(x, p)$ pravimo *Hamiltonova funkcija sistema*, (1) pa imenujemo *kanonski sistem.*

V množico gladkih funkcij, definiranih na faznem prostoru, uvedimo notranjo operacijo, ki jo imenujemo *Poissonov oklepaj*. Poissonov oklepaj funkcij $F(x, p)$ in $G(x, p)$ definiramo takole

$$[F, G] = F_x G_p - F_p G_x$$

$F_x G_p$ je pač skalarni produkt ustreznih n-teric.

Bralec, ki ve, kaj je Liejeva algebra, bo zlahka pokazal, da smo tako iz množice funkcij nad faznim prostorom napravili Liejevo algebro.

Rekli bomo, da sta F in G *v involuciji*, če je njun Poissonov oklepaj enak 0.

V funkcijo $F(x, p)$ vstavimo rešitev kanonskega sistema in superpozicijo odvajajmo po t. Po kratkem računu zvemo: $\dot{F} = [F, H]$. Odtod: $F(x, p)$ je prvi integral kanonskega sistema, če je v involuciji s Hamiltonovo funkcijo. Sistem (1) je integrabilen, če obstaja $2n$ prvih integralov, $2n$ je pač enačb v sistemu. Toda Liouville je dokazal:

Sistem je integrabilen, brž ko obstaja n prvih integralov, ki so paroma v involuciji.

V. I. Arnold je takole opisal fazni portret takega sistema: neka $(2n - 1)$-razsežna množica deli prostor v invariantne množice. Vsaka od teh invariantnih množic je razslojena v n-razsežne invariantne množice, ki jih določajo vrednosti n prvih integralov. Kar je n-razsežnih invariantnih množic kompaktnih, so vse svitki $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. Vrednost Hamiltonove funkcije na taki množici je natanko določena z vrednostmi integralov. Izberimo nove spremenljivke: x naj bo n-terica kotnih koordinat na T^n, s p pa označimo vrednosti integralov, ki določajo svitek. Tako imamo fazni prostor $T^n \times \mathbf{R}^n$, na njem Hamiltonovo funkcijo $H = H(p)$ in ustrezni kanonski sistem

$$\dot{x} = H_p \qquad \dot{p} = 0$$

Drugi del sistema pove pač, da je na svitku p konstanten. Koordinata $x \in T^n$ pa se spreminja v skladu s prvim delom sistema. Desna stran je na svitku z izbranim p konstantna. Imenujmo $H_p = \omega$, pa prepišemo sistem na svitku v

$$\dot{x} = \omega \tag{2}$$

To pa je sistem, ki ga vsaj na dvorazsežnem svitku dobro poznamo. Pri splošnem n ni nič drugače: koordinate n-terice ω imenujemo krožne frekvence. Z m označimo še n-terico celih števil $m \in \mathbb{Z}^n$ in sestavimo skalarni produkt.

$$(m, \omega) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n$$

Rekli bomo, da so krožne frekvence ω soizmerljive, če obstaja $m \neq 0$, da je $(m, \omega) = 0$, nesoizmerljive, če gre to le pri $m = 0$. Tako kot v dvorazsežnem primeru velja:

Gibanje po svitku, ki ga opisuje sistem (2), *je periodično, če je n-terica* ω *soizmerljiva, pogojno periodično, če je nesoizmerljiva.*

Opis obeh gibanj pa je v splošnem prav tak kakor v dvorazsežnem primeru. Vselej je gibanje stabilno po Lagrangeu.

Preden zasnujemo nalogo in izrek Kolmogorova, še ocena: skoraj vsak vektor ω zadošča

$$(m, \omega) > K \mid m \mid^{-n-1} \tag{3}$$

kjer je $\mid m \mid = \mid m_1 \mid + \mid m_2 \mid + \ldots + \mid m_n \mid$, konstanta K pa je odvisna le od ω.

Izberimo K in m. Množico vseh ω, za katere ne velja (3), imenujmo resonančni pas. Širina tega pasu ne presega $2K \mid m \mid^{-n-1}$, presek pasu s kako omejeno množico Ω pa ima prostornino manjšo od $AK \mid m \mid^{-n-1}$, kjer je konstanta A odvisna le od Ω.

Vseh m z isto dolžino $\mid m \mid = l$ je kvečjemu Bl^{n-1}, prostornina vseh resonančnih pasov v Ω z danim l ne presega $ABKl^{-2}$, prostornina vseh pasov z $\mid m \mid > 0$ pa ne presega

$$ABK \sum l^{-2} > CK$$

S $K \to 0$ gre prostornina vseh pasov v Ω proti 0. Mera množice ω, ki ne zadoščajo oceni (3), je torej enaka 0. To pa je vsebina izreka.

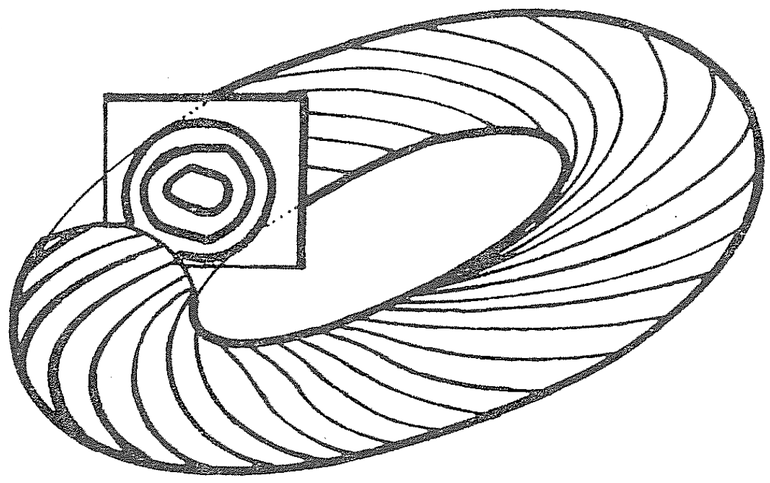
Težave se začno, ko sistem zmotimo. Denimo, da je v začetku vse kakor v primeru (2): fazni prostor je $T^n \times \mathbf{R}^n$, Hamiltonova funkcija $H_0(p)$. Potem pa vključimo majhno motnjo $\varepsilon H_1(x, p)$. Sistem s Hamiltonovo funkcijo $H_0(p) + \varepsilon H_1(x, p)$ ni več integrabilen.

Kaj se zgodi s faznim portretom po motnji? Deloma sta na to vprašanje odgovorila A. N. Kolmogorov in V. I. Arnold za analitične funkcije H. J. Moser je kasneje nadomestil analitičnost z zahtevo po obstoju dovolj mnogih odvodov.

Izrek pove tole: *Naj bo* $\det \omega_p = \det H_{pp} \neq 0$. *Tedaj se svitki s frekvencami, ki zadoščajo* (3), *le malo deformirajo, gibanja po njih so še naprej pogojno periodična. Vsi ti svitki skupaj sestavljajo zaprto množico, ki ni nikjer gosta, a ima pozitivno mero. Komplement množice, sestavljene iz svitkov, ima mero, ki je majhna v primeri z* ε.

Tiri, ki leže v špranjah med svitki, se razmotajo. O njih ne vemo kaj dosti. Toda pri $n = 2$ že lahko sklepamo o stabilnosti po Lagrangeu. Svitki T^2 leže na trorazsežni ploskvi — nivojnici energije. Špranje med njimi so omejene množice in tir, ki se začenja v taki špranji, je ves čas ujet med dva svitka.

Na ta način je bila dokazana stabilnost nekaterih posebnih rešitev nebesne mehanike, na primer Lagrangeve periodične rešitve v omejeni ravninski nalogi treh teles.



Sl. 24

V nalogi n teles je pomemben tale odgovor na staro vprašanje o stabilnosti planetnega sestava: obstaja množica stanj s pozitivno mero, da ostajajo razdalje med telesi večno omejene pri vseh gibanjih, ki se začenjajo v teh stanjih.

Vse, kar smo obravnavali doslej, smo pripisali topološki dinamiki. Pozoren bralec pa je opazil, da so se v razgovor vpletali pojmi, ki niso čisto topološki, vsaj splošna topologija ne ve zanje. Srečavali smo gladke krivulje, gladke mnogoterosti in gladke preslikave med njimi. Ves čas je bila z nami matematična analiza. Topološka dinamika je bila vse bolj podrejena diferenciabilni topologiji. Počasi smo zašli v novo poglavje matematike, ki mu pravijo diferenciabilna dinamika. Ker smo že v njem, ob skromnem zgledu poglejmo v Smaleov svet.[29]

Dinamični sistem rodi grupo transformacij $X(t)$. Privzemimo, da je polje $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, ki določa dinamični sistem, gladko, pa je tudi $X(t)$ pri vsakem t gladka transformacija. Vsak $X(t)$ je obrnljiv, obrat $X^{-1}(t) = X(-t)$ je tudi gladek. Obrnljivi in v obe smeri gladki preslikav pa pravimo difeomorfizem. $X(t)$ je torej grupa difeomorfizmov.

Smalea in po njem diferenciabilne dinamike ne zanima vsa grupa $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, ampak en sam njen člen $X(1)$.

Zastavimo si lahko takole nalogo: Vzemimo poljuben difeomorfizem, ki preslika mnogoterost vase. Ali obstaja na mnogoterosti tak dinamični sistem, da je njegova vrednost v točki $t = 1$ prav dani difeomorfizem? Odgovor na vprašanje je vobče negativen.

Iz danega difeomorfizma F pa lahko sestavimo diskretno grupo potenc F^n, $n \in \mathbf{Z}$. Definirajmo:

Točka x je *negibna točka* difeomorfizma F, če jo difeomorfizem ohranja: $F(x) = x$.

Točka x je *periodična točka* difeomorfizma F, če je negibna točka kake potence difeomorfizma: $F^n(x) = x$.

Podrobneje bomo raziskali periodične točke linearne transformacije na svitku. Najprej definirajmo:

Linearna transformacija nad končno razsežnim prostorom je *hiperbolična*, če njene lastne vrednosti ne leže na enotnem krogu v kompleksni ravnini.

Primer: Vsaka enoparametrična linearna transformacijska grupa ustreza linearnemu diferencialnemu sistemu s konstantnimi koeficienti $\dot{x} = \mathbf{A}x$. Zapisali smo jo kot $e^{\mathbf{A}t}$. V točki 1 je to kar $e^{\mathbf{A}}$. Linearna transformacija $e^{\mathbf{A}}$ je hiperbolična, če lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$ ne leže na imaginarni osi. V realnem: če so različne od 0.

Linearno transformacijo nad svitkom T^2 definirajmo z linearno transformacijo nad ravnino, ki prekriva svitek. Rekli bomo, da linearna transformacija nad ravnino prekriva linearno transformacijo nad svitkom, če ohranja mrežo celih točk $\mathbf{Z}^2$. To gre, če so elementi ustrezne matrike

$$\mathbf{L} = \begin{Vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Vmatrix} \tag{1}$$

cela števila. Če naj bo ustrezna transformacija na svitku obrnljiva, mora imeti tudi inverzna matrika cele elemente. To pa zahteva

$$|\det \mathbf{L}| = 1$$

Hiperboličnost postavlja tretjo zahtevo: lastne vrednosti imajo absolutno vrednost različno od 1.

Mimogrede: realni lastni vrednosti take transformacije sta iracionalni. Brez škode vzemimo, da je determinanta enaka 1. Lastni vrednosti sta korena kvadratne enačbe $\lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 = 0$, zato sta par recipročnih števil, ki ju veže Vietovo pravilo $\lambda + \lambda^{-1} = a + d$. Pa denimo, da je $\lambda = m/n$, celi števili m in n pa sta si tuji. Tedaj: $m/n = n/m \in Z \Rightarrow (m^2 + n^2)/mn \in Z \Rightarrow n$ deli m^2. To pa ne gre, če sta si m in n tuji.

Odtod vidimo, da je vsaka simetrična linearna transformacija nad T^2 hiperbolična.

Transformacijo na svitku, ki ustreza ravninski matriki (1), označimo z L. Prav tako naj bo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ poljuben predstavnik točke $x \in T^2$.

Vprašajmo po periodičnih točkah transformacije L. Po definiciji je to taka točka x na svitku, da je $L^n x = x$ ali $(L^n - E)x = 0$ pri kakem naravnem n (z E smo označili identično transformacijo). 0 na desni strani je tista točka na svitku, v katero se preslikajo vse točke $\mathbf{Z}^2$. Zato:

x je periodična točka transformacije L, ki jo določa na svitku matrika (1), natanko takrat, ko pri nekem celem n velja

$$(\mathbf{L}^n - \mathbf{E})\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \tag{2}$$

Dokažimo dva izreka:

Vsaka točka $x \in T^2$ z racionalnimi koordinatami je periodična točka vsake linearne transformacije.

Res! Naj bo m največji skupni imenovalec koordinat x. Vse elemente matrike $\mathbf{L}$ reducirajmo po modulu m. Tako priredimo matriki $\mathbf{L}$ nad $\mathbf{Z}$ matriko $\mathbf{L}_m$ nad kolobarjem ostankov $\mathbf{Z}_m$. Preslikava

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}_m \tag{3}$$

je homomorfizem kolobarjev linearnih transformacij. Ker je kolobar $\mathbf{Z}_m$ končen, obstaja naravno število n, da je $\mathbf{L}_m{}^n = \mathbf{E}$. Ker je (3) homomorfizem, velja $\mathbf{L}_m{}^n = (\mathbf{L}^n)_m$, nazadnje $(\mathbf{L}^n - \mathbf{E})_m = 0$ ali $\mathbf{L}^n - \mathbf{E} \equiv 0 \pmod{m}$. Odtod pa že sledi (2), izrek je dokazan.

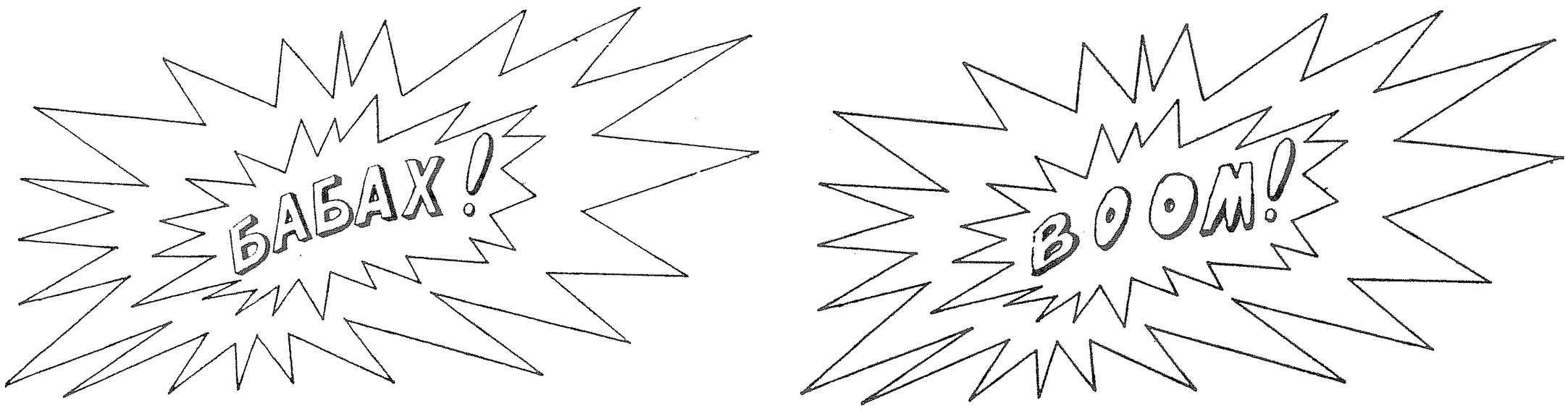
Vse periodične točke hiperbolične transformacije so racionalne.

Dokaz: Vse potence hiperbolične transformacije so različne od identitete. Zato je vsaka matrika $\mathbf{L}^n - \mathbf{E}$ obrnljiva, njen obrat pa ima racionalne elemente. Pogoj (2) tedaj pove

$$\mathbf{x} \in (\mathbf{L}^p - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{Z}^2 \in \mathbf{Q}^2$$

Izrek je dokazan.

Za globlji pogled v diferenciabilno dinamiko pa tole ni prava priložnost. Kaj vse se lahko v njej pripeti, naj nam pove le še slika iz [29] v originalu in ruskem prevodu.



LITERATURA

[1] Fran Milčinski, *Zbrani spisi*, druga knjiga, Ljubljana, DZS 1960

[2] Е. В. Тарле, Очерки истории колониальной политики, Москва, Наука 1965.

[3] Н. И. Конрад, Запад и Восток, Москва, Наука 1972.

[4] Математика, ее содержание, методы и значение, том 3., Москва, АН СССР 1956.

[5] Д. Я. Стройк, Краткий очерк истории математики, Москва, Наука 1964.

[6] К. Маркс, Математические рукописи, Москва, Наука 1968.

[7] F. Lévi-Provençal, *La civilisation Arabe en Espagne*, Paris 1961

[8] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (*Troisiéme partie*), Journal de Mathématiques pures et appliqués (1885) 167—244

[9] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* I, II, III, Paris, 1892, 1893, 1899

[10] H. Hopf, *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, **96** (1927) 225—250

[11] I. Vidav, *Višja matematika* III, Ljubljana, DZS 1976

[12] I. Vidav, *Splošna topologija*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1—16

[13] J. Vrabec, *Ploskve*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 27—47

[14] И. Я. Бакельманн, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, Введение в дифференциальную геометрию «в целом». Москва, Наука 1973.

[15] C. P. Bruter, *Topologie et perception*. Tome I., Bases philosophiques et mathématiques, Paris, Maloine 1974

[16] С. Смейл, Топология и механика, Успехи математических наук, Москва **27** (1972) вып. 2, стр. 77—134.

[17] Р. Том, Топология и лингвистика, Успехи математических наук, Москва **30** (1975) вып. 1, стр. 199—221.

[18] R. Thom, *Stabilite structurelle et morphogenese*, New York, Benjamin 1971

[19] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Москва, Физматгиз 1959.

[20] В. В. Немицкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва, Физматгиз 1947.

[21] К. С. Сибирский, Введение в топологическую динамику, Кишинев, А. Н. Молдавской ССР 1970.

[22] В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, Наука 1971.

[23] В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, Москва, Наука 1974.

[24] В. И. Арнольд, Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодеческих движений при малом изменении функции Гамилтона, Успехи математических наук, **17** (1963) вып. 5., стр. 13—14.

[25] В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механинке, Успехи математических наук, **18** (1963) вып. 6, стр. 91—192.

[26] А. Н. Колмогоров, Общая теория динамических систем и классическая механика, Международный математический конгресс в Амстердаме, Москва, Наука 1961, стр. 187—208.

[27] J. K. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems*, New York 1968

[28] L. Markus, *Lectures in Differentiable Dynamics*, Providence, AMS 1969

[29] Z. Nitecki, *Differentiable Dynamics*, Cambridge, Mass. MIT 1971

IZBRANA POGLAVJA IZ MATEMATIKE IN FIZIKE

Izdaja Komisija za tisk pri DMFA SRS
61001 Ljubljana, Jadranska c19

Z. Bohte

NUMERIČNA ANALIZA

35.-(28.-) din

E. Zakrajšek

FORTRAN

50.-(40.-) din

20.-(16.-) din

E. Zakrajšek

PROGRAMERSKI JEZIK PASCAL

I. Kuščer
S. Žumer

TERMODINAMIKA

25.-(20.-) din

J. Strnad

MODERNA FIZIKA
1.d

85.-(68.-) din

20.-(16:-) din

E. Zakrajšek

UPDATE

V oklepaju so cene za

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, odsek za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko ljubljanske univerze, Inštitut J. Stefan in Zavod za šolstvo SRS prirejajo v dneh od 5. do 7. februarja 1976 v Ljubljani pod vodstvom dr. Jožeta Vrabca

6. SEMINAR IZ MATEMATIKE
Z NASLOVOM TOPOLOGIJA
ZA UČITELJE MATEMATIKE IN FIZIKE NA SREDNJIH ŠOLAH

Čeprav je seminar namenjen zlasti za strokovno izpopolnjevanje srednješolskih učiteljev, so vabljeni tudi drugi člani Društva, ki jih to področje matematike zanima.

Vodstva šol in organizacij združenega dela prosimo, da učiteljem matematike omogočijo udeležbo na seminarju, jim povrnejo potne stroške in plačajo kotizacijo 100 din na udeleženca seminarja. Kotizacijo lahko nakažete vnaprej na žiro račun Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS št. 50101-678-47233, lahko pa jo plača udeleženec na seminarju.

Po želji udeležencev naših seminarjev so seminarska predavanja natisnjena v tej številki Obzornika. Zato objavljamo samo razpored.

Seminar se bo začel v četrtek, 5. februarja 1976, ob 9.30 v matematični predavalnici M-2 v 2. nadstropju, Jadranska 21.

Četrtek, 5. 2. ob 9.30 Otvoritev seminarja
Ivan Vidav: Splošna topologija (2 uri)
11.45 Peter Petek: Fundamentalna grupa (1 ura)
15.00 Janez Rakovec: Topologija v srednji šoli* (2 uri)

Petek, 6. 2. ob 8.30 Ivan Vidav: Splošna topologija (1 ura)
9.30 Peter Petek: Fundamentalna grupa (2 uri)
11.45 Jože Vrabec: Ploskve (1 ura)
15.00 Razgovor o pouku matematike v srednji šoli, vodi Stanko Uršič.

Sobota, 7. 2. ob 8.30 Jože Vrabec: Ploskve (2 uri)
10.45 France Križanič: Topološka dinamika (2 uri)

V petek, 6. februarja, ob 19.00 bo družabni večer v restavraciji Slamič. Na ta večer vljudno vabimo vse člane Društva in njihove zakonske druge, ne samo udeležence seminarja.

Za seminar se prijavite z dopisnico do 24. januarja 1976 na naslov Martina Koman, gimnazija, 66230 Postojna.

Sekretar seminarja *Martina Koman*

---

* Predavanje bo objavljeno kasneje.