

R-177175-3

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE



ODPISANO

*To številko posvečamo tridesetletnici dela Univerze
po osvoboditvi*

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1975

Letnik 22

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1975

Glavni urednik: Gabrijel Tomšič; **odgovorni urednik:** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; France Kvaternik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovich (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, Institut za slovenski jezik SAZU.

Naročnina: za posameznike 60.— din (za člane društva je že vračunana članarina 10.— din), za dijake in študente 25.— din, za ustanove in podjetja 100.— din, za tujino 7 \$ = 119.— din, posamezna številka 10.— din, dvojna številka 20.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 61-564/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 50100-620-107-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1600 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije, ki je financirala tudi povečan obseg te številke.

VSEBINA

Članki	Stran
Uvod v mehaniko tekočin (Peter Gosar)	65
Brezvrtinčno gibanje nestisljive tekočine (Lovro Pičman)	72
Vrtinčasto gibanje neviskozne tekočine (Rudi Kladnik)	80
Gibanje viskoznih tekočin (Darko Jamnik)	87
Upor in vzgon v tekočinah (Mitja Rosina)	93
Valovanje na vodni površini (Gabrijel Kernel)	98
Zvok v tekočinah (Sergej Pahor)	108
Pojavi pri nadzvočnih hitrostih in udarni valovi (Janez Strnad)	113
Dinamika atmosfere (Zdravko Petkovšek)	120
Domače vesti	
Seminar iz fizike Mehanika tekočin (Martina Koman)	III
VI. Kongres DMFAJ. 2. obvestilo (Ciril Velkovich)	IV

CONTENTS

Articles	Page
Introduction to fluid mechanics (Peter Gosar)	65
Irrotational flow of incompressible fluid (Lovro Pičman)	72
Vortex movement of nonviscous liquid (Rudi Kladnik)	80
Flow of viscous fluids (Darko Jamnik)	87
Drag and lift in fluids (Mitja Rosina)	93
Water waves (Gabrijel Kernel)	98
Sound in fluids (Sergej Pahor)	108
Supersonic phenomena and shocks (Janez Strnad)	113
Dynamics of the atmosphere (Zdravko Petkovšek)	120

UVOD V MEHANIKO TEKOČIN

PETER GOSAR

UDK 532

Članek je uvod v razumevanje osnovnih zakonov mehanike tekočin. Analizirano je hitrostno polje v okolici izbrane točke v tekočini s superpozicijo togega vrtenja, izotropnega razpenjanja in deformacije brez spremembe prostornine. Nadalje so iz mikroskopske slike o toku gibalne količine izpeljane Navier-Stokesove gibalne enačbe.

INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS

This paper represents an introduction to the understanding of the basic laws of fluid mechanics. The velocity field near an arbitrary point in the liquid is analyzed in terms of the superposition of a rigid-body rotation, an isotropic expansion, and a straining motion without a change of the volume. Further, the Navier-Stokes equations are derived from the microscopic considerations of the linear momentum flow in liquids.

Uvod

Za gibanje *kapljev* in *plinov* veljajo isti ali vsaj zelo podobni zakoni. Obravnavamo jih skupaj v posebnem delu fizike *mehaniki tekočin*. Glede na zgradbo se seveda kapljvine močno razlikujejo od plinov, a obojim je skupno, da *tečejo* že pod vplivom zelo šibkih zunanjih sil. Pri tekočinah ne moremo govoriti o obliki, kot smo vajeni pri trdnih snoveh.

Srednja razdalja med sosednjima molekulama v plinu je glede na velikost molekule velika. Pri 0°C in 1 kp/cm² je število molekul v 1 cm³ plina $2,69 \cdot 10^{19}$. Preprost račun, pri katerem razporedimo molekule na vozlišča enostavne kubične mreže, dá kot oceno za razdaljo med sosednjima molekulama 33 Å. Premer d mnogih enostavnih molekul je 3 do 4 Å (kisik 3,56, dušik 3,7, vodik 2,7, neon 3,54, argon 3,6, kripton 4,14, ksenon 4,0). Tako ima srednja razdalja med molekulama velikostno stopnjo $10d$. V tolikšni razdalji ne deluje med molekulama praktično nobena sila. Molekule se gibljejo v plinu večino časa popolnoma prosto. Zaradi majhne velikosti doživljajo le poredkoma trke. Pot, ki jo preleti molekula v poprečju med dvema zaporednima trkoma, ali *poprečna prosta pot* l , je dosti večja od srednje razdalje med sosednjima molekulama. V zraku meri v navadnih okoliščinah poprečna prosta pot 1300 Å. Ker je hitrost molekul kisika in dušika okoli 480 m/s, si sledijo trki v časovnih presledkih od $2 \cdot 10^{-10}$ s do $3 \cdot 10^{-10}$ s. Trki sami pa trajajo približno za faktor d/l manj časa.

Razmere pri kapljevinah so popolnoma drugačne. Gostota kapljev se ne razlikuje dosti od gostote trdnih teles. Pri taljenju se prostornina snovi spremeni le za nekaj odstotkov. V splošnem je gostota tekoče faze manjša. Znani pa so tudi nekateri primeri povečanja gostote, na primer: led-voda. Sklepamo, da se v kapljevinah molekule neprestano dotikajo. Tako ne moremo več govoriti o prosti poti posamezne molekule. Sile med molekulami so pri večjih medsebojnih razdaljah ($r > d$) privlačne. To so običajno elektrostatske van der Waalsove sile, ki pojemajo kot r^{-7} in imajo zato razmeroma majhen doseg. Pri manjših razdaljah ($r \leq d$) pa pridejo do izraza odbojne sile, ki so izrazito kvantne narave. Te preprečujejo vdor molekule v drugo molekulo. Pri kapljevinah meri srednja razdalja med sosednjimi molekulami približno d .

Zaradi majhne razlike v gostoti se zdi poučna primerjava kristalov in kapljev. Pri kristalih opazujemo lepo urejeno razporeditev atomov po vsej prostornini kristala. Pri kapljevinah take urejenosti ni več, pač pa je neka urejenost v neposredni okolici posa-

mezne molekule. Razporeditev molekul v bližnji okolici izbrane molekule je delno podobna razporeditvi v kristalu, le da razmere niso statične. Urejene molekulske skupine neprestano nastajajo in čez kratek čas ponovno razpadejo. Poleg tega se take skupine molekul kot celota gibljejo. V kristalih atomi nihajo le okoli svojih mirovnih leg in ne morejo potovati z enega mesta na drugo. Nered na večje razdalje tako omogoča, da kapljevine tečejo. Pri plinih pa je razporeditev molekul že sploh v celoti neurejena.

Omenimo še naslednjo značilno razliko med kapljevini in plini. Stisljivost kapljev in je majhna, stisljivost plinov velika.

Pri študiju gibanja tekočin vpeljemo pojme kot *gostota*, *hitrost*, *tlak tekočine* in drugo. Ti pojmi se vedno nanašajo na skupek molekul v majhnem prostorskem območju okoli izbrane točke. Tako je na primer hitrost tekočine $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ v točki $\mathbf{r}$ enaka poprečju vektorjev hitrosti vseh molekul v majhnem prostorninskem elementu okoli te točke. Prostorninski element mora vsebovati veliko molekul in njegove linearne razsežnosti morajo biti pri plinih dosti večje kot prosta pot l . Taka definicija lokalne hitrosti je smiselna le, če se $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ s krajem dovolj počasi spreminja in je zato rezultat izračuna $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ neodvisen od izbire velikosti in oblike prostorninskega elementa.

Hitrostno polje

Gibanje tekočine opišemo z *vektorskim hitrostnim poljem* $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Hitrostno polje se v splošnem spreminja s časom t , neodvisno od njega je le pri stacionarnem toku. Pri študiju dinamike gibanja tekočin je treba upoštevati sile, s katerimi delujejo deli tekočine na sosednje dele. Te sile so odvisne tudi od relativne hitrosti sosednjih prostorninskih elementov tekočine. V tem poglavju bomo analizirali možne vrste gibanja tekočine v okolici izbrane točke $\mathbf{r}$. Naj bo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektor, ki povezuje točko $\mathbf{r}$ s sosednjo točko $\mathbf{r} + \mathbf{x}$. Omejili se bomo le na majhne $|\mathbf{x}|$. Hitrost tekočine $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v točki $\mathbf{r} + \mathbf{x}$ lahko zapišemo z uporabo Taylorjeve vrste do vključno linearnih členov kot

$$v_i(\mathbf{r} + \mathbf{x}) = v_i(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^3 x_j \partial v_i(\mathbf{r}) / \partial x_j; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Matrika odvodov hitrosti

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \partial v_1 / \partial x_1 & \partial v_1 / \partial x_2 & \partial v_1 / \partial x_3 \\ \partial v_2 / \partial x_1 & \partial v_2 / \partial x_2 & \partial v_2 / \partial x_3 \\ \partial v_3 / \partial x_1 & \partial v_3 / \partial x_2 & \partial v_3 / \partial x_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

se pri zavrtitvi koordinatnega sistema transformira kot diadni produkt dveh vektorjev in je zato tenzorska količina. S hitrostjo $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ in tenzorjem $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r})$ opišemo hitrostno polje v okolici točke $\mathbf{r}$.

Preprost primer gibanja tekočine je togo vrtenje. Naj bo $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ kotna hitrost tekočine. Tedaj je

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = (v_1, v_2, v_3) + (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) \quad (3)$$

in

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Opazimo, da je matrika antisimetrična. Njeni diagonalni elementi so 0. Poljubno matriko $\nabla \mathbf{v}$ lahko razstavimo takole

$$\nabla \mathbf{v} = \parallel e_{ij} \parallel + \parallel s_{ij} \parallel$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i), \quad s_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i) \quad (5)$$

Pri tem se še vedno transformira vsak del zase pri prehodu na nov koordinatni sistem kot tenzor. Prva matrika je simetrična $e_{ij} = e_{ji}$, druga pa antisimetrična $s_{ij} = -s_{ji}$. Matrika $\|s_{ij}\|$ očitno opisuje vrtenje tekočine. Iz primerjave z matriko (4) ugotovimo, da $\|s_{ij}\|$ ustreza vrtenju s kotno hitrostjo

$$\omega = \frac{1}{2} (\partial v_3 / \partial x_2 - \partial v_2 / \partial x_3, \partial v_1 / \partial x_3 - \partial v_3 / \partial x_1, \partial v_2 / \partial x_1 - \partial v_1 / \partial x_2) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \quad (6)$$

V mehaniki tekočin pravimo rotorju hitrosti $\nabla \times \mathbf{v}$ *vrtničenje*. Togo vrtenje ne povzroča dodatnih sil med sosednjimi deli tekočine in zato antisimetrični del tenzorja $\nabla \mathbf{v}$ ne nastopa v gibalnih enačbah za tekočino.

Simetrični del $\|e_{ij}\|$ opisuje, kako se velikost in oblika majhnega prostorninskega elementa tekočine spreminjata s časom. Tu ločimo dva mejna primera: *izotropno razpenjanje tekočine* in *deformacijo brez spreminjanja prostornine*. Hitrostno polje, ki ustreza izotropnemu razpenjanju, zapišemo kot

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \Delta \mathbf{x} \quad (7)$$

če določa konstanta Δ hitrost razpenjanja. Tu so pri tenzorju $\|e_{ij}\|$ različni od 0 le diagonalni elementi, ki so poleg tega še med seboj enaki. Vsota diagonalnih elementov ali sled tenzorja je Δ . Sled

$$\sum_i e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (8)$$

pove, kolikšna je relativna sprememba prostornine $\Delta V/V$ tekočine v enoti časa. Pri plinih je razpenjanje pogost pojav, pri kapljevinah pa je razpenjanje vedno zelo majhno.

Tenzor, ki je simetričen, lahko s primernim zasukom koordinatnega sistema vedno spravimo v diagonalno obliko. Pri tem se sled tenzorja ne spremeni. Dobimo

$$\|e_{ij}\| = \begin{vmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Hitrostno polje tekočine v novem koordinatnem sistemu je zelo preprosto: $v_i = e_{ii} x_i$. Mejni primer, ki ustreza deformaciji brez spreminjanja prostornine, dobimo, če dodatno zahtevamo, da je $\sum_i e_{ii} = 0$. Tu se tekočina, ki naj ima prvotno obliko krogle, čez nekaj časa deformira tako, da postane elipsoid.

Poljuben $\|e_{ij}\|$ lahko razstavimo na vsoto prispevkov, ki ustrezajo obema mejnima primeroma — to je deformaciji brez spremembe prostornine in izotropnemu razpenjanju — takole

$$\|e_{ij}\| = \|e_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij}\| + \frac{1}{3} \Delta \|\delta_{ij}\| \quad (10)$$

δ_{ij} je enak 1, če je $j = i$, sicer pa je enak 0.

Lep primer razstavitve tenzorja $\nabla \mathbf{v}$ je pri enostavnem strižnem gibanju

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (a x_2, 0, 0) \quad (11)$$

Tu je $\omega = (0, 0, -a/2)$, $\Delta = 0$. Edini komponenti tenzorja $\|e_{ij}\|$, različni od 0, sta $e_{12} = e_{21} = a/2$. Tenzor spravimo v diagonalno obliko z zasukom koordinatnega sistema v ravnini $x_1 x_2$ za 45° . Ustrezne diagonalne komponente e_{ii} so $a/4$, $-a/4$, 0.

Gibalne enačbe

Osnovni problem v mehaniki tekočin je izpeljava gibalnih enačb. Celotna gibalna količina vseh molekul v enoti prostornine tekočine ali *gostota gibalne količine* je $\rho \mathbf{v}$. Gostota tekočine ρ je podobno kot hitrost v splošnem funkcija kraja in časa. Vprašamo se, kako

se s časom spreminja gostota gibalne količine. K spreminjanju ρv prispevajo prostorninsko porazdeljene sile, kot na primer teža ali centrifugalna in Coriolisova sila v vrtečih se koordinatnih sistemih. Gostota gibalne količine pa se spreminja še iz dveh drugih vzrokov. Najprej moramo upoštevati, da tekočina v opazovanem prostorninskem elementu ni vedno ista. Tekočina, to je molekule, se med prostorninskim elementom in okolico neprestano izmenjava. Ta izmenjava nujno povzroči spreminjanje gostote gibalne količine v dani točki. Drugi vzrok so pa medmolekulske sile med molekulami v izbranem prostorninskem elementu in molekulami zunaj tega območja. Medmolekulske sile imajo kratek doseg in jih zato pri plinih, pri katerih so medsebojne razdalje molekul v poprečju velike, navadno ni treba upoštevati. Pri kapljevinah pa so prav bistvene. Opisana načina izmenjavanja gibalne količine potekata v neposredni okolici površine prostorninskega elementa.

Pretakanje gibalne količine, ki je posledica makroskopskega gibanja tekočine ali konvekcije, lahko preprosto opišemo. Mislimo si v tekočini majhno ploskev S — velikost vektorja S je enaka velikosti ploskve, njegova smer pa se ujema s smerjo normale na ploskev. Prostornina tekočine, ki v enoti časa preteče skozi ploskev S , je $S \cdot v$. Ker je gostota gibalne količine te tekočine ρv , je ustrezen tok gibalne količine v enoti časa skozi S enak

$$(S \cdot v) \rho v \quad (12)$$

Iz oblike formule (12) sklepamo, da je smiselno vpeljati simetrični tenzor

$$\rho \parallel v_i v_j \parallel \quad (13)$$

ki očitno ustreza gostoti toka gibalne količine zaradi konvekcije. Običajne gostote toka, s katerimi se srečamo v fiziki, na primer gostota masnega ali gostota električnega toka, so vektorji, ker gre za transport skalarne količine, to je mase, naboja itd. Tu se pa pretaka vektorska količina. Zato je gostota njenega toka tenzor.

V izrazu (12) ni zajet ves tok gibalne količine zaradi gibanja molekul. Upoštevati je treba še njihovo termično gibanje. Oglejmo si primer mirujočega plina, $v = 0$! Koordinatni sistem postavimo tako, da leži ploskev S v ravnini $x_1 = 0$ in kaže v smeri pozitivne osi x_1 . Če smer normale na ploskev obrnemo za 180° , moramo zasukati tudi koordinatni sistem. Tiste molekule plina, ki zaradi termičnega gibanja priletijo iz prostora $x_1 < 0$ skozi ploskev S v prostor $x_1 > 0$, imajo pozitivno komponento x_1 hitrosti. Pri molekulah, ki se gibljejo v nasprotni smeri, pa je komponenta x_1 hitrosti negativna. Pri toku molekul skozi ploskev S zaradi njihovega termičnega gibanja se torej vedno poveča komponenta x_1 gibalne količine v prostoru $x_1 > 0$ in zmanjša v prostoru $x_1 < 0$. Molekule, ki prispevajo k toku gibalne količine, dožive zadnji trk pred prehodom skozi ploskev S v razdalji z velikostno stopnjo poprečne proste poti. Zaradi izotropnosti plina je jasno, da ima celotni tok gibalne količine smer normale na ploskev. Vektor toka gibalne količine kaže vedno v pozitivni smeri normale.

Pri kapljevinah moramo upoštevati še sile med molekulami na obeh straneh mejne ploskve S . Kapljevine so v večini primerov toliko stisnjene, da v poprečju prevladajo odbojne sile nad privlačnimi. Zelo lahko se je prepričati, da je rezultat medmolekulskih odbojnih sil povečevanje komponente x_1 gibalne količine tekočine v prostoru $x_1 > 0$ in njeno zmanjševanje v prostoru $x_1 < 0$. Tudi kar zadeva vektorsko usmerjenost celotnega toka gibalne količine pridemo do istega zaključka kot v prejšnjem primeru.

Iz teh razmišljanj sledi, da lahko pri mirujoči tekočini gostoto toka gibalne količine zaradi termičnega gibanja molekul in zaradi delovanja medmolekulskih sil zapišemo kot tenzor, ki ima od nič različne le diagonalne elemente. Poleg tega so vsi diagonalni elementi med seboj enaki in pozitivni. Zapis ima obliko

$$p \parallel \delta_{ij} \parallel; \quad p > 0 \quad (14)$$

Konstanta p je *tlak tekočine*. Tok gibalne količine skozi ploskev z velikostjo S v smeri normale je Sp . Za toliko se gibalna količina tekočine na strani ploskve, iz katere kaže normala, zmanjša v enoti časa. Čisto formalno si lahko mislimo, da je to zmanjšanje posledica sile Sp na ploskvi S , če deluje sila na opazovani del tekočine v nasprotni smeri normale. Sila na enoto ploskve p je zares tlak. S tem vpeljujemo pojem *napetosti* v tekočini. Napetosti σ_{ij} so smiselno definirane kot negativna gostota toka gibalne količine, ki ga povzročata termično gibanje molekul in medmolekulske sile. Napetosti sestavljajo *napetostni tenzor* $\|\sigma_{ij}\|$. V mirujoči tekočini je

$$\|\sigma_{ij}\| = -p \|\delta_{ij}\| \quad (15)$$

Tlak p je popolnoma določen z enačbo stanja tekočine, to se pravi, da je v običajnih primerih le funkcija gostote in temperature. Pri idealnem plinu, na primer, velja za 1 kilomol $pV = RT$.

Izraza (14) in (15) obdržita svojo veljavo tudi, če se vsa tekočina giblje z enako hitrostjo ali pa se togo vrti, ker to ne vpliva na mikroskopsko gibanje molekul. Stvar je drugačna, če je hitrostno polje tako, da prostorski elementi tekočine s časom ne obdrže svoje oblike ali prostornine. Tedaj je $\|e_{ij}\| \neq 0$ in ne moremo več trditi, da ima napetostni tenzor le med seboj enake diagonalne elemente. Izberimo si koordinatni sistem, v katerem je $\|e_{ij}\|$ diagonalen. Ustrezno hitrostno polje je $\mathbf{v} = (e_{11}x_1, e_{22}x_2, e_{33}x_3)$. To polje vpliva na tok gibalne količine skozi dano ploskev. Če je v plinu le e_{11} različen od 0 in pozitiven, imajo molekule, ki prehajajo skozi ploskev S na ravnini $x_1 = 0$, v poprečju manjšo absolutno vrednost komponente x_1 hitrosti, kot če plin miruje. Zato se pretok gibalne količine v smeri x_1 zmanjša in napetost σ_{11} poveča. Kaj se zgodi z drugimi napetostmi, je na prvi pogled teže ugotoviti. Vendar je prav lahko najti splošen fenomenološki izraz za zvezo med $\|\sigma_{ij}\|$ in $\|e_{ij}\|$, če se omejimo na linearne člene v e_{ij} . Zaradi izotropnosti tekočine je v koordinatnem sistemu, v katerem je $\|e_{ij}\|$ diagonalen, edina možna povezava med $\|\sigma_{ij}\|$ in $\|e_{ij}\|$ naslednja:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= -p + 2\eta(e_{ii} - \frac{1}{3}\Delta) + \kappa\Delta \\ \sigma_{ij} &= 0; \quad j \neq i \end{aligned} \quad (16)$$

η in κ sta karakteristična koeficienta za izbrano tekočino. Oba koeficienta sta pozitivna. Tlak p je tudi tu popolnoma določen z enačbo stanja tekočine. Razlike v napetostih σ_{ij} , ki jih povzroči deformacija tekočine, upoštevata namreč drugi in tretji člen tega izraza. Enačba (16) je popolna analogija Hookovega zakona v mehaniki prožnih teles. V elastomehaniki ustreza koeficientu η strižni modul, koeficientu κ pa modul stisljivosti.

Če sedaj preidemo nazaj v poljuben koordinatni sistem, dobimo

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta(e_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij}) + \kappa\Delta\delta_{ij} \quad (17)$$

Tekočine, pri katerih velja linearna zveza med $\|\sigma_{ij}\|$ in $\|e_{ij}\|$, se imenujejo *newtonske tekočine*. Večina enostavnih tekočin spada v to skupino.

Koeficient η je *strižna viskoznost tekočine*. To vidimo, če izračunamo σ_{ij} v primeru enostavnega strižnega gibanja (11). Tedaj pridemo do običajne definicije koeficienta strižne viskoznosti

$$\sigma_{12} = \eta \partial v_1 / \partial x_2 \quad (18)$$

V tem primeru si tudi najlažje predstavljamo mikroskopski mehanizem, ki povzroča strižno silo. Vzemimo ravnino $x_2 = 0$! Molekule ob tej ravnini v polprostoru $x_2 > 0$ imajo malo večjo hitrost v smeri x_1 kot molekule ob mejni ravnini v polprostoru $x_2 < 0$. Ob prehajanju molekul skozi mejno ravnino ali medsebojni interakciji molekul z obeh strani ravnine se torej prenaša komponenta x_1 gibalne količine v smeri negativne osi x_2 . Rezultat tega prenosa je strižna sila σ_{12} .

Tabela 1 navaja strižno viskoznost η in kinematično viskoznost $\nu = \eta/\rho$ nekaterih tekočin pri 15° C in atmosferskem tlaku.

Tabela 1

tekočina	η (g cm ⁻¹ s ⁻¹)	ν (cm ² s ⁻¹)
zrak	0.00018	0.15
voda	0.011	0.011
živo srebro	0.016	0.0012
olivno olje	0.99	1.08
glicerin	23.3	18.5

V bližini sobne temperature η pri zraku raste za 0.3% na stopinjo, pri vodi pa pada za 3% na stopinjo. V obeh primerih se η s tlakom zelo malo spreminja. Neodvisnost strižne viskoznosti od tlaka je tudi splošna lastnost plinov.

Koeficient κ je *ekspanzijska viskoznost tekočine*. O njem vemo zelo malo. Na gibanje tekočin vpliva le v posebnih primerih, kot so zvočni valovi zelo visokih frekvenc ali udarni valovi. κ ima enako velikostno stopnjo kot η . Ekspanzijska viskoznost je v večini praktičnih primerov nepomembna zato, ker je ekspanzija tekočine normalno zelo majhna v primerjavi z deformacijo prostorninskih elementov tekočine. To še posebej velja za kapljčevine. V nadaljnjem bomo izpuščali člene, ki vsebujejo κ .

S seštevanjem prispevkov, ki jih dajo gostota konvekcijskega toka gibalne količine (13) in napetosti (17), dobimo končni izraz za matrične elemente g_{ij} celotne gostote toka gibalne količine $\|g_{ij}\|$:

$$g_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} - 2\eta (e_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij}) \quad (19)$$

Izpeljava gibalnih enačb je sedaj lahka. K časovnemu spreminjanju gibalne količine v enoti prostornine prispevajo prostorske sile na enoto prostornine $\mathbf{f}$ in izviri ali ponori toka gibalne količine. Lahko zapišemo

$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t = \mathbf{f} - \nabla \cdot \|g_{ij}\| \quad (20)$$

To je popolnoma *splošna gibalna enačba*. Gostota ρ je tu še funkcija časa in kraja. Prostorninsko porazdeljene sile so sorazmerne z gostoto, kot na primer pri teži $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, in $\mathbf{g}$ je pospešek prostega pada.

Gostota in hitrost $\mathbf{v}$ morata zadostiti tudi kontinuitetni enačbi

$$\partial \rho / \partial t = - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (21)$$

ki ni nič drugega kot matematični zapis za ohranitev mase tekočine. $\rho \mathbf{v}$ je namreč gostota masnega toka.

Pogosto lahko v mehaniki tekočin zanemarimo viskoznost. Tedaj dobimo iz (20) z uporabo (19) in (21) gibalno enačbo

$$\rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \mathbf{f} - \nabla p \quad (22)$$

Pogosto obravnavamo tok nestisljive viskozne tekočine. Če je tekočina nestisljiva, mora biti

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (23)$$

in smemo imeti gostoto ρ v gibalni enačbi za konstanto. Tedaj dobi enačba (20) preprostejšo obliko

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = \rho^{-1} \mathbf{f} - \rho^{-1} \nabla p - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (24)$$

To je *Navier-Stokesova enačba*.

Enačbi (21) in (22) ali enačbi (23) in (24) so 4 skalarne enačbe za 4 količine, to je za tlak p in 3 komponente hitrosti $\mathbf{v}$.

Načini gibanja tekočin

Le rešitve gibalnih enačb, ki zadoščajo določenim robnim pogojem, opisujejo realno gibanje tekočine. Robni pogoji so razmeroma preprosti. Na površini trdnih teles se tekočina lepi zaradi privlačnih sil med molekulami tekočine in trdne snovi. Zato sta hitrosti tekočine in telesa enaki na stični ploskvi. Na meji dveh tekočin pa sta v obeh tekočinah enaki hitrost in napetost na mejni ploskvi

$$\sum_i \sigma_{ij} n_j \quad (25)$$

če je $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ normala na ploskev. Pogoj o enakosti napetosti je upravičen le, če smemo zanemariti prispevek površinske napetosti v meji obeh tekočin k tlaku.

Razne načine gibanja tekočin bodo obširno obravnavali naslednji prispevki. Tu se bomo omejili le na nekaj splošnih ugotovitev. Vzemimo tok tekočine skozi okroglo cev s premerom D . Tok skozi cev je pri majhni poprečni hitrosti v laminaren, pri dovolj velikih hitrostih pa postane nestabilen in končno turbulenten. Kdaj nastopi turbulenca, je odvisno od velikosti *Reynoldsovega števila*

$$R = \rho v D / \eta = v D / \nu \quad (26)$$

Pri $R < 2000$ je tok laminaren, med 2000 in 3000 je nestabilen in lahko preide iz laminarnega v turbulenten ali obratno, nad 3000 pa je turbulenten.

Število R ima v mehaniki tekočin še globlji pomen. Primerjajmo velikosti posameznih členov v izrazu (19) za gostoto toka gibalne količine. Razmerje med prvim in tretjim členom podaja ravno formula (26), če vstavimo za v tipično vrednost hitrosti in za D razdaljo, na kateri se hitrost tekočine bistveno spremeni. Če je $R \ll 1$, določa način toka predvsem viskoznost in dobimo viskozno pretakanje tekočine. Tedaj lahko v enačbi (24) zanemarimo tretji člen na desni strani. V obratnem primeru ($R \gg 1$) pa lahko zanemarimo zadnji člen in nam ostane enačba za gibanje neviskozne tekočine. V resnici ne smemo viskoznosti tekočine nikoli popolnoma zanemariti. Viskoznost pride vedno do izraza v bližini površin teles, kjer se hitrost krajevno močno spreminja. Vendar lahko na področjih, ki so dovolj daleč od površin, tekočini, kot sta voda in zrak, skoro vedno obravnavamo kot neviskozni tekočini. Omenimo še, da je s stališča dinamike tekočin zrak bolj viskozna snov kot voda, ker je njegova kinematična viskoznost večja.

Reynoldsovo število ima še naslednji pomen. Recimo, da poznamo rešitev $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ gibalnih enačb za kak primer stacionarnega gibanja tekočine, pri katerem so prostorninsko porazdeljene sile zanemarljive. Iz tega hitrostnega polja lahko dobimo novo hitrostno polje $\mathbf{v}'(\mathbf{r})$ s podobnostno transformacijo

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{v}(\beta \mathbf{r}) \quad (27)$$

v kateri sta α in β konstanti transformacije. Polje $\mathbf{v}'(\mathbf{r})$ tudi zadošča Navier-Stokesovi enačbi, toda za tekočino, katere kinematična viskoznost je $\nu \alpha / \beta$, kot lahko neposredno preverimo. Iz tega pa sledi, da je Reynoldsovo število za obe hitrostni polji enako. To je *zakon podobnosti* za tokove z enakim Reynoldsovim številom. Zakon podobnosti ima velik praktičen pomen, ker omogoča sklepanje o načinu gibanja tekočin okoli velikih ovir, na primer okoli letalskega krila, na osnovi meritev na majhnih modelih. Tudi nastop turbulence pri istem R je dejansko posledica tega zakona.

LITERATURA

- [1] G. K. Batchelor, *Fluid Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press 1970.
- [2] L. Landau et E. Lifchitz, *Mecanique des fluides*, Moscou, MIR 1971.

BREZVRTINČNO GIBANJE NESTISLJIVE TEKOČINE

LOVRO PIČMAN

UDK 532.51

Za primer brezvrtinčnega gibanja tekočine je vpeljan pojem hitrostnega potenciala. Posebej je obravnavano enakomerno gibanje togega telesa in pojav bočne sile, če tekočina kroži okoli telesa.

IRROTATIONAL FLOW OF INCOMPRESSIBLE FLUID

For the case of irrotational flow, the notion of velocity potential is being introduced. A more detailed treatment is given to the uniform motion of a rigid body and to the phenomena of the side force, when the circulation around a body is present.

Vsaka tekočina je do neke mere viskozna, vendar lahko njeno viskoznost pri velikem Reynoldsovem številu zanemarimo. To pomeni, da obveljajo rezultati računov za nevskozno tekočino skoraj po vsem prostoru, ki je napolnjen z resnično tekočino. Vendar veliko Reynoldsovo število še ni zagotovilo, da se dajo izsledki neviskozne teorije koristno uporabiti. Potrebno je še, da se resnična tekočina lepi ob stene; s tem so jasno določeni robni pogoji, ki jih potrebujemo pri reševanju diferencialnih enačb. Razumljivo pa je tudi, da hitrostno polje za idealno tekočino ne velja za samo mejno plast, ki se lepi ob steno.

Posebno preprosto za računsko obdelavo je gibanje nestisljive tekočine brez vrtincev: $\text{div } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v} = 0$. V naravi se večkrat srečamo s takšnim hitrostnim poljem $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Tako brezvrtinčno polje je tudi tretji prispevek k celotni hitrosti tekočinskih delov: $\mathbf{u} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r + \mathbf{v}$. Prvi del $\mathbf{v}_e$ je določen s prostorsko porazdelitvijo izvirov in ponorov, $\text{div } \mathbf{v}_e = \Delta(\mathbf{x})$, drugi $\mathbf{v}_r$ s porazdelitvijo vrtincev, $\text{rot } \mathbf{v}_r = \omega(\mathbf{x})$, tretji del pa z vrednostjo hitrosti na mejnih ploskvah. V tej zvezi je pomemben pojem *hitrostnega potenciala*, ki določa — podobno kot v elektrostatici — hitrost tekočinskih delov s svojim gradientom: $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \Phi(\mathbf{x})$. Vpeljava takega potenciala je možna na osnovi *Stokesovega izreka*, ker v tekočini ni vrtincev, $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Iz tega tudi sledi, da velja za potencial Laplaceova diferencialna enačba, $\nabla^2 \Phi = 0$. Enačba je linearna, tako, da je vsota dveh hitrostnih potencialov tudi hitrostni potencial, se pravi rešitev Laplaceove enačbe. Dinamične enačbe, ki določajo časovne spremembe hitrostnega polja, niso linearne. Zato je odvisno od posebnosti posameznega primera, če je gibanje, ki je v izbranem trenutku brez vrtincev, ostalo takšno tudi vnaprej. Pojav turbulence je posledica nelinearnosti Navier-Stokesovih enačb in viskoznosti tekočine. Če tekočina ni viskozna, se osnovne enačbe zelo poenostavijo:

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{g} - \rho^{-1} \nabla p \quad (1)$$

Velja $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ in je $\mathbf{g}$ sila teže na enoto mase.

Če pripišemo k enačbi (1) še pogoj, da je tekočina nestisljiva,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

in tudi brez vrtincev:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3)$$

dobimo sistem štirih enačb, ki določajo hitrost $\mathbf{v}$ in tlak kot funkcijo časa in kraja. Pri nestisljivi tekočini brez vrtincev rabi enačba (1) le za izračun tlaka, hitrostno polje pa je določeno z rešitvijo Laplaceove enačbe. Zaradi tega je pomembna tudi ugotovitev, da je hitrostno polje v enojno povezanem prostoru enolično določeno, če poznamo pravokotne

komponente hitrosti na mejni ploskvi. V prostoru, ki ni enojno povezan, npr. pri togem telesu na vodni površini, so za enolično določitev potrebne dodatne informacije. Do njih privede Stokesov izrek: integral rotorja vektorske funkcije nad sklenjeno ploskvijo je enak krivuljnemu integralu tega vektorja nad krivuljami, ki omejujejo to ploskev

$$\int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (4)$$

V brezvrtinčni tekočini, $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$, je enaka nič cirkulacija za vsako sklenjeno krivuljo, ki omejuje ploskev povsem v tekočini. Velja tudi, da je krivuljni integral dveh krivulj vedno enak, če lahko z zveznim popačenjem prevedemo drugo v drugo, ne da bi pri tem zapustili tekočino. Prostor s tekočino je *enojno*, *dvojno* ali večkrat *povezan*, če imamo eno, dve ali več sklenjenih krivulj, ki jih z zveznim popačenjem ne moremo prevesti druge v drugo. Zgleda za dvojno in trojno povezan prostor sta zunanjščina kolobarja in zunanjščina preste v treh dimenzijah.

Zaradi Stokesovega izreka je možno vpeljati hitrostni potencial kot krivuljni integral:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_0) + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \nabla \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

Vendar je to enolična funkcija samo v enojno povezanem prostoru. V večkratno povezanem prostoru se vrednost potenciala v posamezni točki lahko razlikuje za cirkulacije po sklenjenih mejah ploskev, ki ne ležijo povsem v brezvrtinčni tekočini. Navzlic temu pa je hitrostno polje $\nabla \Phi$ enolično določeno, če poznamo poleg robnih pogojev tudi vrednosti cirkulacij oziroma cikličnih konstant, $\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$. Teh konstant je za eno manj, kot je stopnja povezanosti prostora. V dvojno povezanem prostoru imamo samo eno ciklično konstanto. Preprost primer dvojno povezanega prostora z nestisljivo in brezvrtinčno tekočino je zunanjščina vrtinčne niti. Praktično pomemben je tudi primer gibanja togega telesa v tekočini. Pri tem določa trenutna hitrost telesa rešitev za hitrostno polje v izbranem trenutku. V obeh primerih je razmeroma preprosto najti hitrostni potencial in ustrezno hitrostno polje, če je geometrija problema preprosta. Oglejmo si valj v dveh dimenzijah, ki se giblje v tekočini s hitrostjo $\mathbf{U}$! Normalna komponenta hitrosti tekočine na meji z valjem mora biti enaka normalni komponenti hitrosti samega valja:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_T = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \quad (6)$$

Potencial pa naj pada v neskončnosti proti ničli. Zaradi homogenosti in linearnosti Laplaceove enačbe in robnih pogojev ima rešitev enačbe (3) lahko samo obliko: $\Phi_T(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Ker je $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ vektorska funkcija, je rešitev na dlani. Spomnimo se, da lahko poljubno rešitev Laplaceove enačbe v dveh dimenzijah sestavimo iz odvodov funkcije $\log r$, torej $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = a \nabla \log r$. Konstanto a določimo z robnim pogojem (6) in dobimo $a = -a^2$. Pri tem je a polmer valja.

Koristno je še, če rezultat prepisemo za primer mirujočega valja v stacionarnem toku, ki teče v neskončnosti s hitrostjo $-\mathbf{U}$:

$$\Phi_T(\mathbf{x}) = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} (1 + a^2/r^2) = -\mathbf{U} \cos \vartheta (r + a^2/r) \quad (7)$$

Zgornji primer je poučen tudi, kadar tok kroži okoli valja in je zato cirkulacija (ciklična konstanta) Γ različna od nič. Ustrezna rešitev Laplaceove enačbe je seveda večlična:

$$\Phi_T = \Gamma [\vartheta/2\pi + \Psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] \quad (8)$$

$\Psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ je enolična funkcija, neodvisna od ciklične konstante. Zadosti Laplaceovi enačbi in pogojem na mejah:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla (\vartheta/2\pi + \Psi) = 0, \quad \nabla \Psi \rightarrow 0, \quad \text{če } \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (9)$$

Pri okroglem valju lahko zadostimo tem pogojem s $\Psi = 0$.

Podoben premislek o obliki hitrostnega potenciala kot za translacijo velja tudi, če se telo vrti s kotno hitrostjo Ω . Zaradi homogenosti in linearnosti Laplaceove enačbe in robnih pogojev je hitrostni potencial pri vseh treh vrstah gibanja enak seštevku navedenih potencialov:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} + \Omega \cdot \Theta + \Gamma(\mathcal{G}/2\pi + \Psi) \quad (10)$$

Vse funkcije $\mathbf{A}$, Θ in Ψ so odvisne od relativne razdalje do točke $\mathbf{x}_0$ v togem telesu in neodvisne od $\mathbf{U}$, Ω in Γ .

Tlak p lahko določimo iz enačbe (1). Če namreč uporabimo vektorsko identiteto:

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = q^2$$

sledi iz (1) integral:

$$\partial \Phi / \partial t + \frac{1}{2} q^2 + p/\rho + \varphi = \text{konst.} \quad (11)$$

in je $\varphi = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ potencial težnega polja.

V stacionarnem primeru nam enačba (11) pomeni različico Bernoullijevega izreka za nevskozno tekočino brez vrtinčenja: količina $H = \frac{1}{2} q^2 + p/\rho + \varphi$ je konstantna po vsem prostoru. Če imamo vrtince, velja konstantnost samo vzdolž posamezne tokovnice ali vrtinčnice.

Z enačbo (11) lahko izračunamo tlak $p(\mathbf{x}, t)$ potem, ko smo z Laplaceovo enačbo (3) izračunali hitrostno polje $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

V stacionarnem primeru daje Bernoullijeva enačba skupaj z integralnim izrazom za ohranitev gibalne količine možnost za rešitev zanimivih hidrodinamskih problemov. Spomnimo se najprej Navier-Stokesovih enačb za viskoznost nič in napetostni tenzor, enak hidrostatičnemu tlaku:

$$\rho(\partial v_i / \partial t + v_k \partial v_i / \partial x_k) = \rho f_i - \partial p / \partial x_i \quad (12)$$

V (12) velja dogovor o seštevanju po ponavljajočih se indeksih.

Z integracijo po prostornini in s spremembo prostorskega integrala, v katerem nastopa divergenca vektorja, v ustrezen integral po površini S , ki obdaja izbrano prostornino V , dobimo iz diferencialnega zakona integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV + \int_S \rho v_i (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \rho f_i dV - \int_S p dS_i \quad (13)$$

$$\cong - \int_S (\rho \varphi + p) dS_i \quad (13a)$$

Uporabili smo tudi kontinuitetno enačbo $\partial \rho / \partial t = -\text{div } \rho \mathbf{v}$.

V stacionarnem primeru podaja druga vrstica razumljivo zvezo med pretokom gibalne količine in rezultanto zunanjih sil in napetosti, ki delujejo na ploskev S .

Oglejmo si iztok tekočine iz posode, ki ima ob strani okroglo odprtino! Z Bernoullijevo enačbo lahko preprosto določimo hitrost q_0 v valjastem delu curka, kjer je tlak povsod enak zračnemu tlaku p_0 :

$$p/\rho = p_0/\rho + \frac{1}{2} q_0^2 - gh \quad (14)$$

Iz tega sledi

$$q_0 = (2gh)^{\frac{1}{2}} \quad (14a)$$

Pri tem smo izračunali konstanto H na površini tekočine in v samem curku. Višinsko razliko med tema mestoma smo označili s h .

Pri natančnejšem opazovanju se pokaže, da je curek nekoliko ožji kot odprtina. Tudi po iztoku iz posode se tokovnice še nekaj časa zbližujejo. To zbliževanje in najmanjši

prečni presek curka sta zelo odvisna od oblike ustja in od površinske napetosti ter ga ne moremo analizirati z Bernoullijevo enačbo. Z ohranitvenim zakonom (13) pa je možno pokazati, da leži zožitveni faktor α prečnega prereza med $\frac{1}{2}$ in 1 za vse običajne oblike ustij. Pri poskusu z okroglo odprtino v tanki ravni steni so dobili faktor od 0.61 do 0.64.

Predpostavimo, da izteka tekočina v vodoravni smeri. Tedaj ne nastopa teža in nas zanima ohranitveni zakon (13) samo za vodoravno komponento. Za površino S si izberemo stene posode, gladino tekočine in poljubno površino, ki ob ustju oklene valjasti del curka. Medtem ko pritiska tekočina na posodo s silo $\int_{S_{\text{posode}}} p \mathbf{n} dS$, je pritisk na preostali del izbrane ploskve določen z zračnim tlakom p_0 :

$$\int_{S-S_{\text{pos.}}} p_0 \mathbf{n} dS = - \int_{S_{\text{posode}}} p_0 \mathbf{n} dS$$

Iz zakona (13) torej sledi:

$$\int_{S_{\text{posode}}} dS (p - p_0) \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = -\rho q_0^2 \alpha A = -2\rho g h \alpha A, \quad (15)$$

$\mathbf{k}$ je smer iztekajočega curka, A pa velikost ustja.

Ob steni posode nasproti odprtini tekočina skoraj miruje in je zato tlak na tem mestu enak hidrostaticnemu tlaku: $p = p_0 + \rho g h$. Del sile na posodo lahko zato pripišemo ravno razliki tlaka na odprtini A in na delu stene z enako površino nasproti ustju: $\nabla p = -\rho g h A$. Preostali prispevek je posledica zmanjšane tlaka na del stene, ki je blizu iztoka in ki nastane zaradi razmeroma hitrejšega pretakanja tekočine na tem mestu. Tega prispevka ni mogoče preprosto oceniti, vendar pa je bistven za točen izračun koeficienta skrčitve.

Zamislimo si sedaj dva ekstremna primera, za katera je koeficient α enak 1 in $\frac{1}{2}$. V prvem primeru je potrebno izoblikovati ustje tako, da ga podaljšamo nekoliko zunaj stene posode in ga proti koncu rahlo zožujemo. V drugem primeru pa potisnemo ustnik v notranjost posode, tako da preprečimo hitro odtekanje tekočine ob steni blizu ustja. Zaradi tega je sedaj leva stran enačbe (15) enaka $-\rho g h A$, oziroma $\alpha = \frac{1}{2}$. Pri drugih oblikah ustij leži skrčitveni koeficient med $\frac{1}{2}$ in 1.

Zakon o spremembi gibalne količine (13) pove, kolikšna je sila na telo, ki se giblje z enakomerno hitrostjo.

S (7) in (13) dobimo za silo

$$F_i = - \int_A p v_i dA = \rho \int_A \partial \Phi / \partial t n_i dA + \frac{1}{2} \rho \int_A q^2 n_i dA - \rho \int (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) n_i dA \quad (16)$$

Pri tem integriramo preko ploskve A našega telesa. Če ni vrtenja, $\boldsymbol{\Omega} = 0$, ni cirkulacije, $\Gamma = 0$, in velja v treh dimenzijah zaradi (11):

$$\partial \Phi / \partial t = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{F} + \partial (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) / \partial t \cdot \nabla \Phi = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{v} \quad (17)$$

Pri enakomernem gibanju ne upoštevamo teže g in je sila F_i enaka:

$$F_i = -\rho \mathbf{U}_k \int v_k n_i dA + \frac{1}{2} \rho \int q^2 n_i dA \quad (18)$$

Obkrožimo telo s poljubno ploskvijo S in integrirajmo $\frac{1}{2} q^2 n_i$ po ploskvah A in S . Pri tem je $\mathbf{n}$ smer pravokotnice na ploskev, ki kaže v zunanji prostor:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} q^2 n_i dS - \int \frac{1}{2} q^2 n_i dA &= \int \partial (\frac{1}{2} v_i v_j) / \partial x_i dV \\ \int \frac{1}{2} q^2 n_i dA &= \int \frac{1}{2} q^2 n_i dS - \int \partial (v_i v_j) / \partial x_j dV \\ &= \int (\frac{1}{2} q^2 n_i - v_i v_j n_j) dS + \int v_i v_j n_j dA \end{aligned}$$

Pri spreminjanju prostorskega integrala smo uporabili brezvrtinčnost in nestisljivost tekočine: $\partial v_i / \partial x_j = \partial v_j / \partial x_i$ in $\partial v_i / \partial x_i = 0$.

Če ni izvirov, mora tok v neskončnosti pojemati proti nič. Zaradi tega pada hitrost q v treh dimenzijah vsaj z r^{-3} , v dveh pa — kadar imamo cirkulacijo $\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \text{konst.}$ — vsaj z r^{-1} . To pomeni, da gre integral po ploskvi S proti nič, če to ploskev pomaknemo v neskončnost. Zaradi robnega pogoja $v_j n_j|_A = U_j n_j$ je končni rezultat:

$$F_i = \rho U_j \int (v_i n_j - v_j n_i) dA = \rho U_j \int (v_i n_j - v_i n_j) dS \quad (19)$$

Zadnja enakost v (19) sledi zaradi $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Integral pa je izračunan nad poljubno zaprto ploskvijo S , ki objame gibajoče se telo. Iz (19) sledi $\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{F}_0 = 0$, kar dokazuje *d'Alambertov paradoks*, da nestisljiva tekočina brez vrtincev ne daje nobenega odpora enakomernemu gibanju telesa. Pri gibanju trdnega telesa končnih razmer po tridimenzionalnem prostoru pove izraz (19) več kot zgornji izrek: tudi komponenta sile, ki je pravokotna na smer gibanja, je enaka nič, saj pada hitrost v_i z naraščajočo razdaljo kot r^{-3} .

Položaj v dveh dimenzijah je bistveno drugačen. Primer za to je neskončno dolg valj v treh dimenzijah. Če je namreč cirkulacija okoli telesa različna od nič, pada hitrost samo s prvo potenco razdalje in dobimo zato tudi pravokotno komponento sile. Iz (19) lahko hitro izračunamo njeno velikost. Predpostavimo, da se giblje valj v smeri osi x in poiščimo F_y . Ploskev S premaknemo v veliko razdaljo in uporabimo asimptotsko obliko za hitrostni potencial Φ_r , (9):

$$\vec{\nabla} \Phi \sim (\Gamma/2\pi) \nabla \vartheta \quad (20)$$

S tem sledi iz (19)

$$F_y = \rho U \Gamma / 2\pi \int_0^{2\pi} (\partial \vartheta / \partial y \cos \vartheta - \partial \vartheta / \partial x \sin \vartheta) r d\vartheta = \rho U \Gamma \quad (21)$$

Enačba (21) opisuje vzgon telesa, ki nastane zaradi cirkulacije pri enakomernem gibanju in je osnovni mehanizem delovanja letalskega krila. Zveza (21) je povezana z imeni Kutta (1910) in Žukovski.

Študij dvedimenzionalnih limit problemov, ki so sicer v naravi tridimenzionalni, večkrat v mnogočem razjasni in celo kvantitativno oceni fizikalno vsebino pojavov. Srečno naključje je, da lahko v primeru nestisljive tekočine brez vrtincev, podobno kot v elektrostatiki, uporabimo teorijo analitičnih funkcij in konformne preslikave. Do tega privede spoznanje, da lahko izrazimo hitrostno polje z odvodom hitrostnega potenciala ali pa zaradi nestisljivosti tekočine z odvodom tokovne funkcije Ψ :

$$v_x = \partial \Psi / \partial y \quad \text{in} \quad v_y = - \partial \Psi / \partial x \quad (22)$$

kajti

$$\partial v_x / \partial x = - \partial v_y / \partial y$$

Razlika vrednosti tokovne funkcije Ψ v dveh različnih točkah pove, kolikšen je pretok čez krivuljo, ki veže obe točki:

$$\Psi(\mathbf{x}) - \Psi(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} (v_x dy - v_y dx) \quad (23)$$

Zgornja zveza sledi iz (22). Integral na desni strani enačbe je zaradi nestisljivosti tekočine neodvisen od poti.

Enačbe (22) lahko prepišemo kot zvezo med hitrostnim potencialom in tokovno funkcijo:

$$\partial \Phi / \partial x = \partial \Psi / \partial y \quad \text{in} \quad \partial \Phi / \partial y = - \partial \Psi / \partial x \quad (24)$$

Te zveze so značilne za analitično funkcijo, katere realna komponenta je enaka Φ , imaginarna pa Ψ :

$$w(z) = \Phi + i\Psi, \quad z = x + iy$$

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0 \quad (25)$$

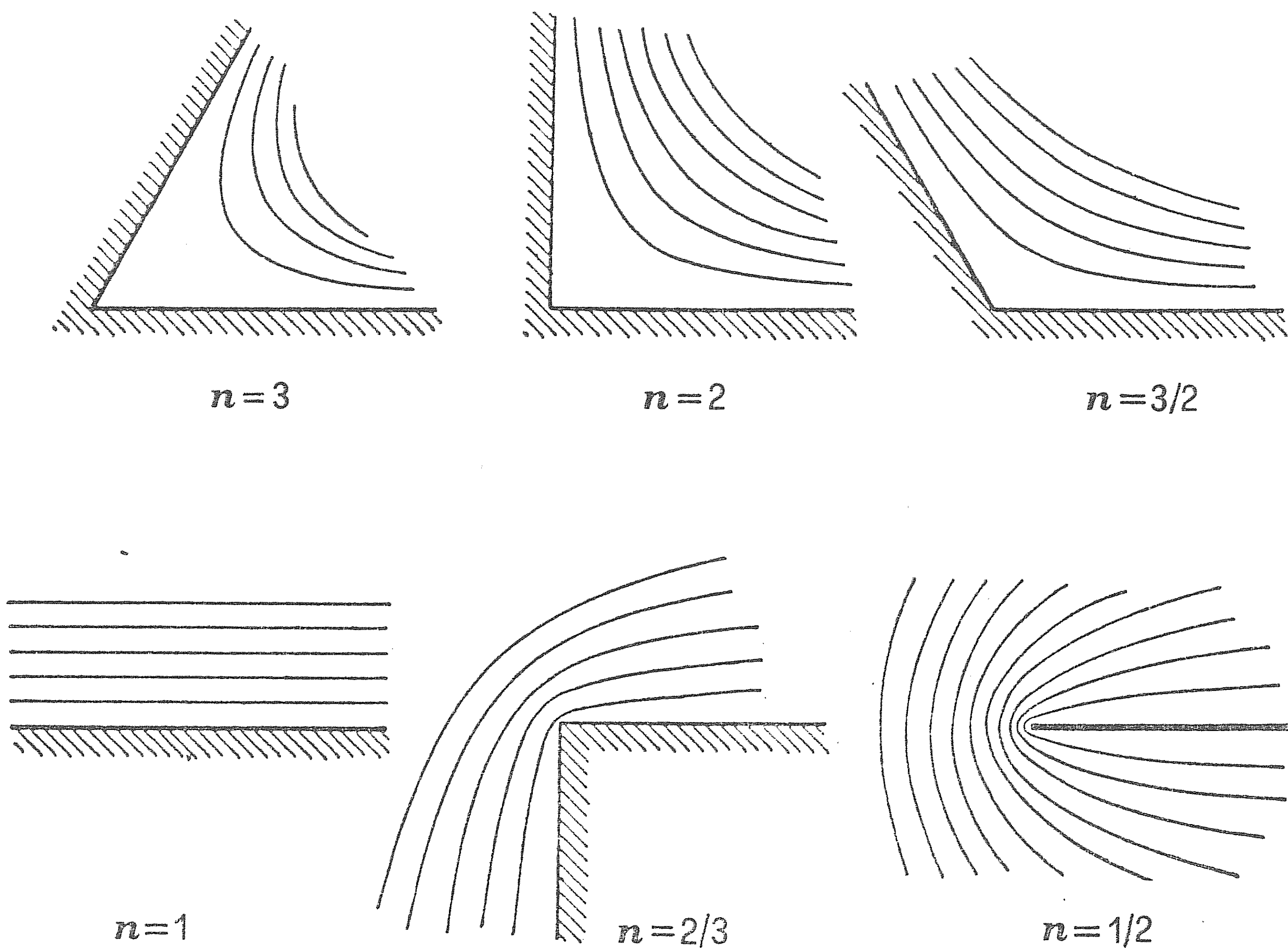
Po tem spoznanju bi bila naloga dvojna:

- ugotoviti, kateremu resničnemu hitrostnemu polju in tokovnicam ustrezajo nekatere enostavne analitične funkcije,
- zapisati analitične funkcije za že znane fizikalne primere in s konformno preslikavo najti rešitve za bolj zahtevno geometrijo oziroma robne pogoje.

Najpreprostejši primer v prvi nalogi so funkcije $w(z) = Cz^n$. Zanje velja zaradi (25):

$$\Phi = Cr^n \cos n\vartheta, \quad \Psi = Cr^n \sin n\vartheta \quad (26)$$

Pretok pravokotno na tokovnico je vedno enak nič. Zato lahko vsako tokovnico v (26) nadomestimo z mejno ploskvijo, na kateri mora biti izpolnjen enak robni pogoj. Posebno zanimive so seveda tiste tokovnice, ki degenerirajo v ravne črte. Zaradi tega lahko funkcije (26) ustrezajo stacionarnim tokovom, kot vidimo na sl. 1.



Sl. 1. Tokovnice za kompleksni potencial $w = Cz^n$

Za primere v drugi nalogi lahko naštejemo naslednje znane rešitve:

- enakomeren tok s hitrostjo U, V : $w = (U - iV)z$
- izvir z močjo m v točki z_0 : $w = (m/2\pi) \log(z - z_0)$
- vrtničnica z močjo Γ v točki z_0 : $w = (i\Gamma/2\pi) \log(z - z_0)$
- tok okoli okroglega valja s polmerom a , ki se giblje s hitrostjo U, V , s cirkulacijo Γ in s središčem v točki z_0 :
 $w = -(i\Gamma/2\pi) \log(z - z_0) - a^2(U + iV)/(z - z_0)$
- tok v bližini točke, kjer tekočina miruje: $w = \frac{1}{2} kz^2$

V tem seznamu naj posebej omenimo točko d). Opisuje primer s silo, ki je pravokotna na smer gibanja telesa. S primerno konformno preslikavo okroglega valja v obliko, ki je

podobna letalskemu krilu, lahko rešitev problema d) neposredno uporabimo v teoriji dvedimenzionalnega letalskega krila.

Omenjeni primer je ekvivalenten tokovni sliki, ki jo dobimo, če valj miruje, tekočina pa teče v velikih razdaljah od valja s hitrostjo $-U$. Skladno z enačbo so hitrostni potencial, tokovna funkcija in kompleksni potencial enaki naslednjim izrazom:

$$\Phi = -U(r + a^2/r) \cdot \cos \vartheta + \Gamma \vartheta / 2\pi \quad (27)$$

$$\Psi = -U(r - a^2/r) \cdot \sin \vartheta - \Gamma / 2\pi \cdot \log (r/a) \quad (28)$$

$$w(z) = -Uz - Ua^2/z - i\Gamma/2\pi \log (z/a) \quad (29)$$

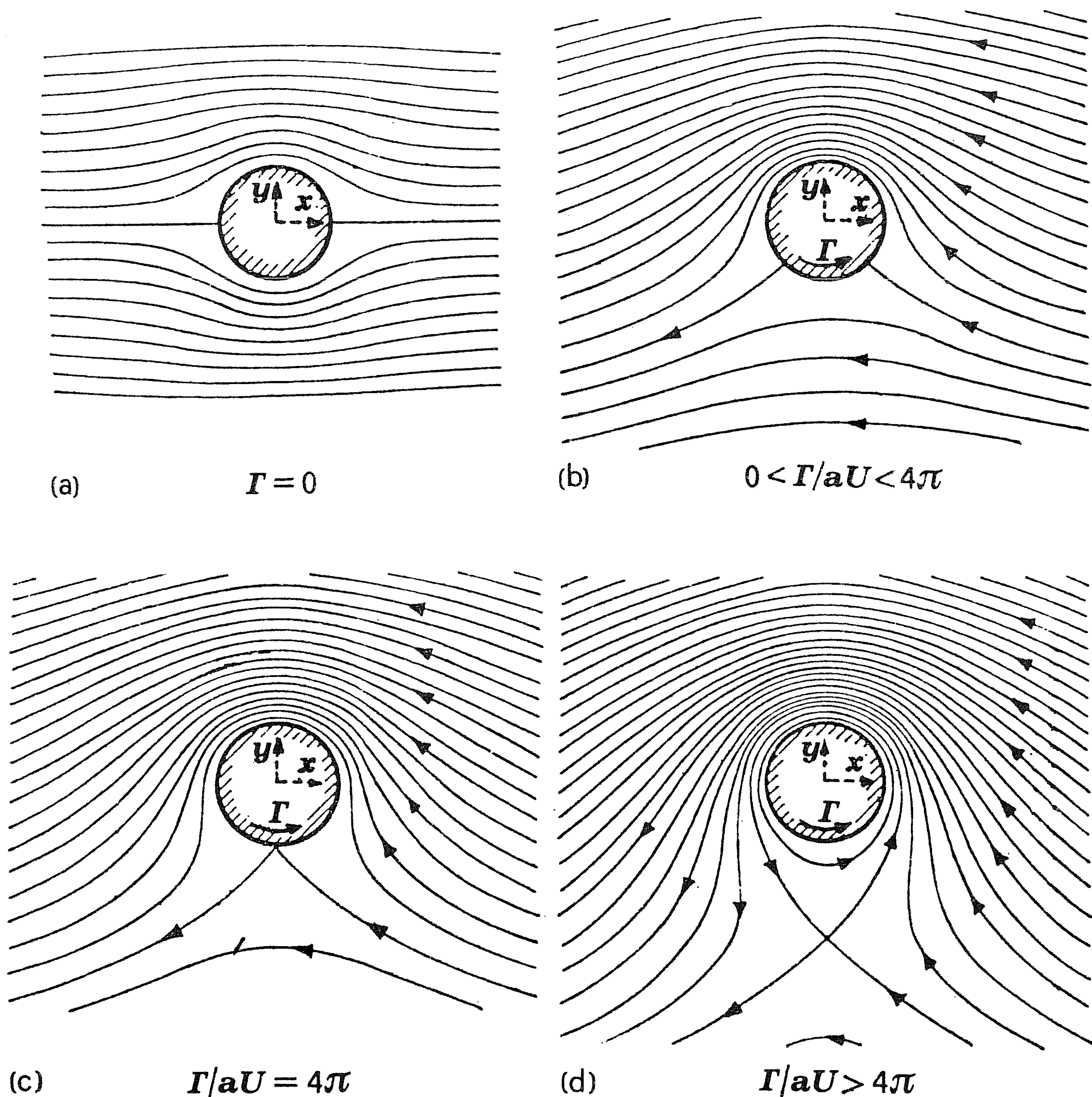
Tu je $r^2 = x^2 + y^2$ in $\tan \vartheta = y/x$.

Značilni parameter, ki odloča o tokovni sliki je razmerje Γ/aU . To uvidimo, če poiščemo hitrost tekočine ob valju:

$$[r^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial \vartheta]_{r=a} = 2U \sin \vartheta + \Gamma / 2\pi a \quad (30)$$

Ta hitrost je nič v dveh točkah ϑ_1 in ϑ_2 , za kateri velja:

$$\sin \vartheta = -\Gamma / (4\pi aU) \quad (31)$$



Sl. 2. Tokovna slika tekočine, ki teče s hitrostjo U in obteka valj s cirkulacijo Γ

Če tekočina ne kroži okoli valja ($\Gamma = 0$), ležita ti dve točki na sprednji in zadnji strani valja, $\vartheta_1 = 0$ in $\vartheta_2 = \pi$. Z naraščajočo cirkulacijo se obe točki somerno premakneta na isto bočno stran proti $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ in se zlijeta, če je $\Gamma/aU = 4$. Kasneje se točka, v kateri tekočina miruje, odlepi od stene valja v razdaljo

$$[r^{-1} \cdot \partial\Phi/\partial\vartheta]_{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} = -U(1 + a^2/r^2) + \Gamma/2\pi r = 0 \quad (32)$$

Z naraščanjem cirkulacije postaneta tokovni sliki na zgornji in spodnji strani valja bistveno različni. S sl. 2. je razvidno, da sta tlaka zgoraj in spodaj zaradi Bernoullijeve enačbe $p + \frac{1}{2}\rho q^2 = \text{konst.}$ različna, in dobimo silo na valj, ki kaže pravokotno na smer gibanja tekočine.

Tlak na valju lahko izračunamo z enačbo (30):

$$P_{r=a} = \rho H - \frac{1}{2}\rho (2U \sin \vartheta + \Gamma/2\pi a)^2 \quad (33)$$

Iz tega dobimo za komponento sile v smeri osi y

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p_{r=a} \cdot a \sin \vartheta d\vartheta = \rho U \kappa \quad (34)$$

To pa je natančno rezultat, ki smo ga dobili že prej v enačbi (21), čeprav je imela površina valja poljubno obliko.

Opisano tokovno sliko lahko ustvarimo tudi v naravi. Vzamemo dovolj dolg valj in ga zavrtimo, da dobi neko začetno kotno hitrost Ω . Ker je tekočina viskozna, smo s tem inducirali v njej brezvrtinčno cirkulacijo. Kasneje damo valju majhno gibalno količino, tako, da je razmerje Γ/aU dovolj veliko. Valj moramo zavrteti s primerno začetno hitrostjo. Poskus uspe, če se mejna plast ne odlepi in ne nastopi turbulenca. Poskuse te vrste je prvi napravil Magnus leta 1853, zato nosi pojav bočne sile, ki nastopi pri istočasnem vrtenju in premikanju togega telesa, njegovo ime.

LITERATURA

G. K. Batchelor, *Fluid Dynamics*, Cambridge, University Press 1970.

V tej številki Obzornika za matematiko in fiziko je kinematična viskoznost označena z grško črko ν (epsilon), ker grške črke ν (ni) ni mogoče razločevati od znaka za hitrost v . Bralce vljudno prosimo, da sprejmejo to z razumevanjem.

Tehnični urednik
Ciril Velkoverh

VRTINČASTO GIBANJE NEVISKOZNE TEKOČINE

RUDI KLADNIK

UDK 532.527

Prispevek obravnava osnovne zakone vrtnčenja v neviskozni, nestisljivi, homogeni in neomejeni tekočini. Poudarek je na medsebojnem učinkovanju vrtnčnih niti. Kot poseben primer so navedeni vrtnčni obroči in ravne vrtnčne niti.

VORTEX MOVEMENT OF NONVISCOUS LIQUID

Basic laws of vortex movements in an infinite, homogeneous, noncompressible and nonviscous liquid are discussed. Attention is given to the interaction between vortex threads. As special examples vortex rings and straight parallel vortex threads are mentioned.

Vrtinčenje in cirkulacija

V tekočini so možna različna gibanja tekočinskih delcev. Vrsta gibanja je odvisna od začetnih pogojev v tekočini, od pogojev na mejah tekočine in od vrste tekočine. V tem prispevku razpravljamo o gibanjih v idealni, homogeni in nestisljivi tekočini, ki se razteza v neskončnost in ki v neskončnosti miruje.

Hitrost posameznih tekočinskih delcev (v določenem trenutku) izrazimo s hitrostnim poljem $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Hitrostno polje grafično ponazorimo s tokovnicami. Vektor hitrosti je v vsaki točki tangenten na tokovnico. V splošnem je hitrostno polje sestavljeno iz prispevkov zaradi izvirov v tekočini, iz prispevkov zaradi vrtnčenja v tekočini in iz prispevkov zaradi gibanja na mejah tekočine. Zadnjega prispevka seveda ni, če tekočinski delci na mejah tekočine mirujejo. Hitrostno polje je v tem primeru enolično povezano s porazdelitvijo izvirov ter s porazdelitvijo vrtnčenja v prostoru. To pomeni, da lahko za vsako hitrostno polje poiščemo ustrezno prostorsko porazdelitev izvirov ter porazdelitev vrtnčenja.

V nestisljivi in homogeni tekočini ni izvirov hitrostnega polja: $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Tokovnice so sklenjene črte, začenjajo ali končujejo se kvečjemu na mejah tekočine. Gibanje tekočinskih delcev je v tem primeru odvisno od vrtnčenja v tekočini. Ker je hitrostno polje $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ zvezno in odvedljivo, lahko v vsaki točki polja izračunamo vektor *vrtnčenja* $\boldsymbol{\zeta}$, ki je rotor hitrosti:

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

Recimo, da poznamo prostorsko porazdelitev vektorja vrtnčenja (za določen trenutek), se pravi, da poznamo vrtnčno polje $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r})$. Hitrost $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ tekočinskega delca na konici krajevnega vektorja $\mathbf{r}$ je vektorska vsota prispevkov celotnega vrtnčnega polja. Če je območje vrtnčenja omejeno in je hitrost tekočine v neskončnosti nič, velja:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (4\pi)^{-1} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \quad (1)$$

To enačbo izpeljemo z vektorskim potencialom $\mathbf{A}$ hitrostnega polja. Ker je hitrostno polje brez izvirov, zagotovo obstaja vektorsko polje $\mathbf{A}$, tako da je $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}$. Sledi: $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. Če dodatno zahtevamo, da je polje vektorskega potenciala brez izvirov ($\text{div } \mathbf{A} = 0$), dobimo za vektorski potencial $\mathbf{A}$ preprosto Poissonovo enačbo:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r})$$

Rešitev te enačbe (z robnim pogojem $A = 0$ v neskončnosti) je:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (4\pi)^{-1} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}') dV'$$

Integriramo po območju, na katerem je vrtnčenje različno od nič. Sledi:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (4\pi)^{-1} \int \text{rot} [\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] dV'$$

in dobimo rezultat (1) za $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

Zveza med hitrostjo $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ in vrtnčenjem $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r})$ je podobna zvezi med magnetno poljsko jakostjo $\mathbf{H}$ in gostoto električnega toka $\mathbf{j}$. Kar je v magnetnem polju magnetna poljska jakost $\mathbf{H}$, je v vrtnčeni tekočini hitrost $\mathbf{v}$; vrtnčenje $\boldsymbol{\zeta}$ je analogno gostoti električnega toka $\mathbf{j}$. Kakor rečemo, da električni tok ustvarja magnetno polje, rečemo tudi, da vrtnčenje povzroča gibanje v tekočini. Ta podobnost je v preteklem stoletju imela pomembno vlogo. Marsikatera ugotovitev v elektrodinamiki je sledila podobni ugotovitvi v hidrodinamiki vrtnčenja tekočine in obratno.

Polje vrtnčenja $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r})$ ponazorimo z vrtnčnicami. *Vrtinčnica* je črta, ki povezuje sosednje točke tako, da je vektor vrtnčenja v vsaki točki tangenten nanjo. Ugotoviti moramo, kaj vrtnčnice pomenijo in predvsem, kako se v tekočini premikajo. Več sosednjih vrtnčnic sestavlja vrtnčno cev. *Vrtinčna cev* z majhnim prečnim presekom se imenuje *vrtinčna nit*. Podobno kot tokovna cev ima tudi vrtnčna cev fizikalni pomen. Pokazali bomo, da velja za vrtnčno cev ohranitveni izrek.

Mislimo si sklenjeno krivuljo C , ki poteka po plašču vrtnčne cevi (sl. 1). Krivuljni integral hitrosti:

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = \Gamma$$

po tej sklenjeni krivulji se imenuje *cirkulacija hitrosti*; $d\mathbf{s}$ je ločni element krivulje C , po kateri integriramo. Zvezo med cirkulacijo in vrtnčenjem dobimo s Stokesovim izrekom o krivuljnem integralu. Velja:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \boldsymbol{\zeta} \cdot d\mathbf{S}$$

Vidimo, da je cirkulacija enaka ploskovnemu integralu vrtnčenja. Recimo, da je $d\Gamma$ cirkulacija vrtnčne niti, ki ima majhen prečni presek

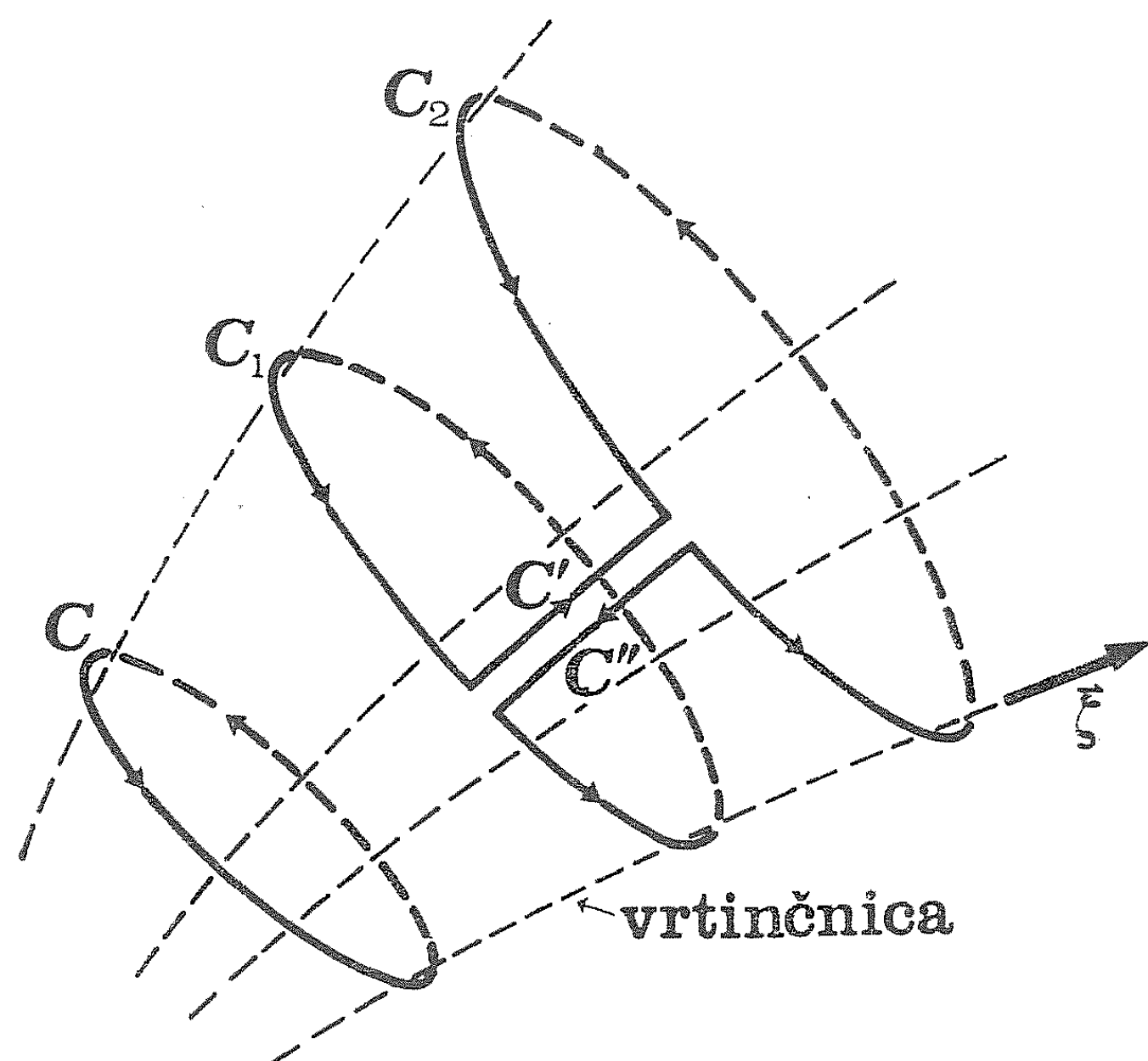
$d\mathbf{S}$ (vektor $d\mathbf{S}$ ima smer vektorja $\boldsymbol{\zeta}$). V tem primeru je: $d\Gamma = \boldsymbol{\zeta} \cdot d\mathbf{S}$ ali $\boldsymbol{\zeta} = d\Gamma/d\mathbf{S}$. Vrtnčenje $\boldsymbol{\zeta}$ torej pove, kolikšna cirkulacija odpade na enoto prečnega preseka vrtnčne niti. Vrtnčenje je ploskovna gostota cirkulacije.

Mislimo si, da obdajajo vrtnčno cev različne sklenjene krivulje C, C_1, C_2 itd. (sl. 1)! Krivulji C_1 in C_2 na vrtnčni cevi povežimo z vzporednima črtama C' in C'' , da dobimo sklenjeno pot, ki leži v celoti na plašču vrtnčne cevi! Cirkulacija po tej sklenjeni poti je nič, ker je vektor $\boldsymbol{\zeta}$ pravokoten na presek $d\mathbf{S}$:

$$\oint_{C_1+C_2+C'+C''} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int \boldsymbol{\zeta} d\mathbf{S} = 0$$

Krivuljni integral razdelimo na integrale po krivuljah C_1, C_2, C' in C'' . Integrala po krivuljah C' in C'' sta nasprotno enaka. Preostane:

$$\oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{ali} \quad \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$



Sl. 1

Torej je cirkulacija Γ enaka za vse sklenjene krivulje, ki objemajo isto vrtnično cev. *Cirkulacija je konstanta vrtnične cevi.*

Enačba (1) podaja hitrost tekočine kot integral po območju, na katerem je vrtničenje različno od nič. V mnogih primerih lahko območje vrtničenja omejimo na diskretne vrtnične niti. Integral po prostoru potem izrazimo kot vsoto krivuljnih integralov po posameznih vrtničnih nitih. Pišimo: $dV' = dS' dr'$; dr' je ločni element na vrtnični niti in dS' prečni presek niti. Sledi: $\zeta(\mathbf{r}') dV' = \zeta(\mathbf{r}') dS' dr' = \zeta(\mathbf{r}') dS' dr' = d\Gamma' dr'$ (vektorja ζ in dr' sta kolinearna). Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= (4\pi)^{-1} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} dV' \zeta(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ &= (4\pi)^{-1} \int d\Gamma' \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} dr' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ &= (4\pi)^{-1} \sum_i \Gamma_i \int_{K_i} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} dr' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

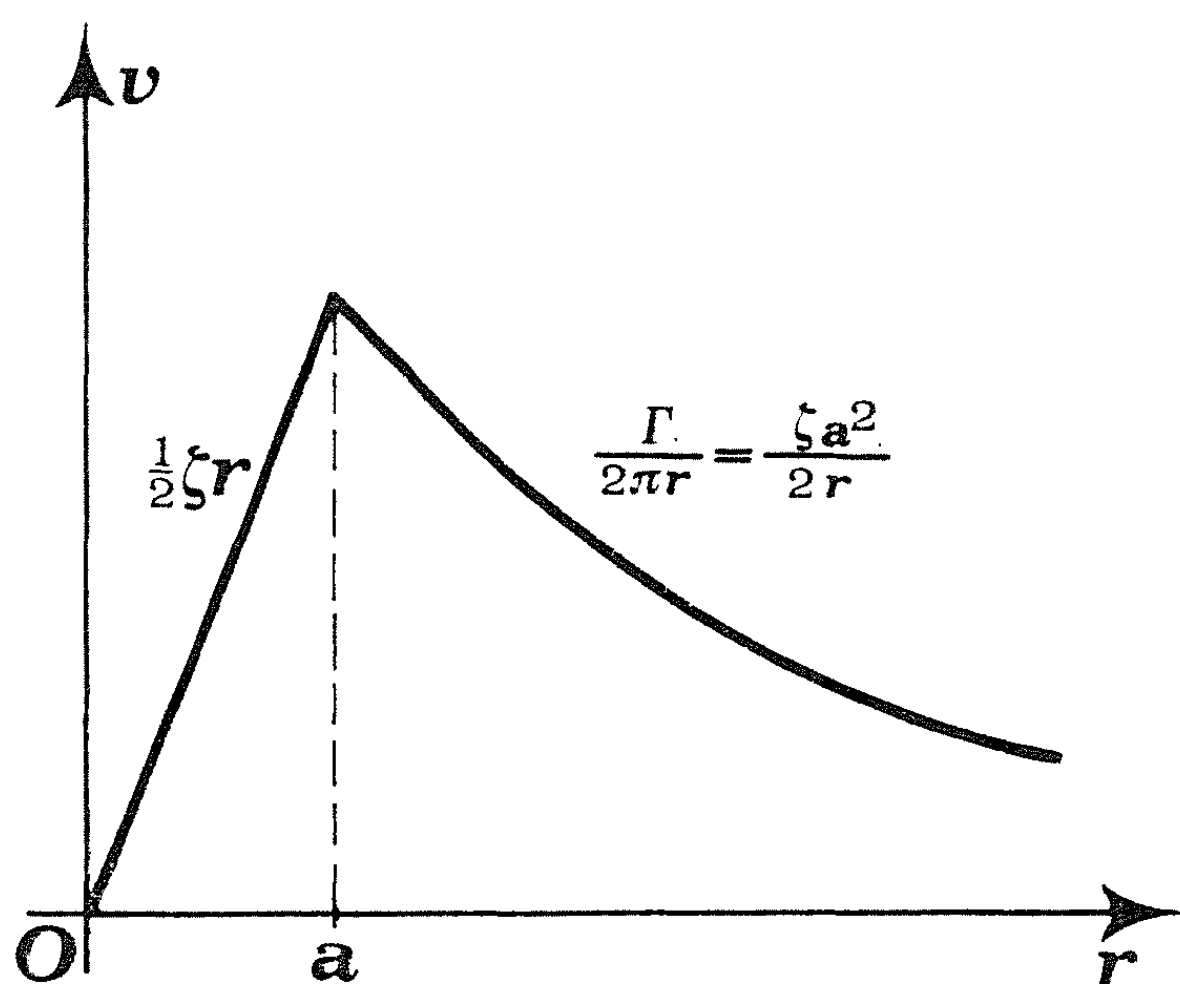
K_i je krivulja i -te vrtnične niti, ki ima cirkulacijo Γ_i . Dobili smo enačbo, ki je v elektrodinamiki znana kot *Biot-Savartov zakon*.

Vzemimo, da je v polju ena sama, ravna in dolga vrtnična nit. Tokovnice so koncentrični krogi v ravninah pravokotno na vrtnično nit. (Spomnimo se na magnetno polje v okolici dolgega ravnega vodnika.) Za ta primer velja:

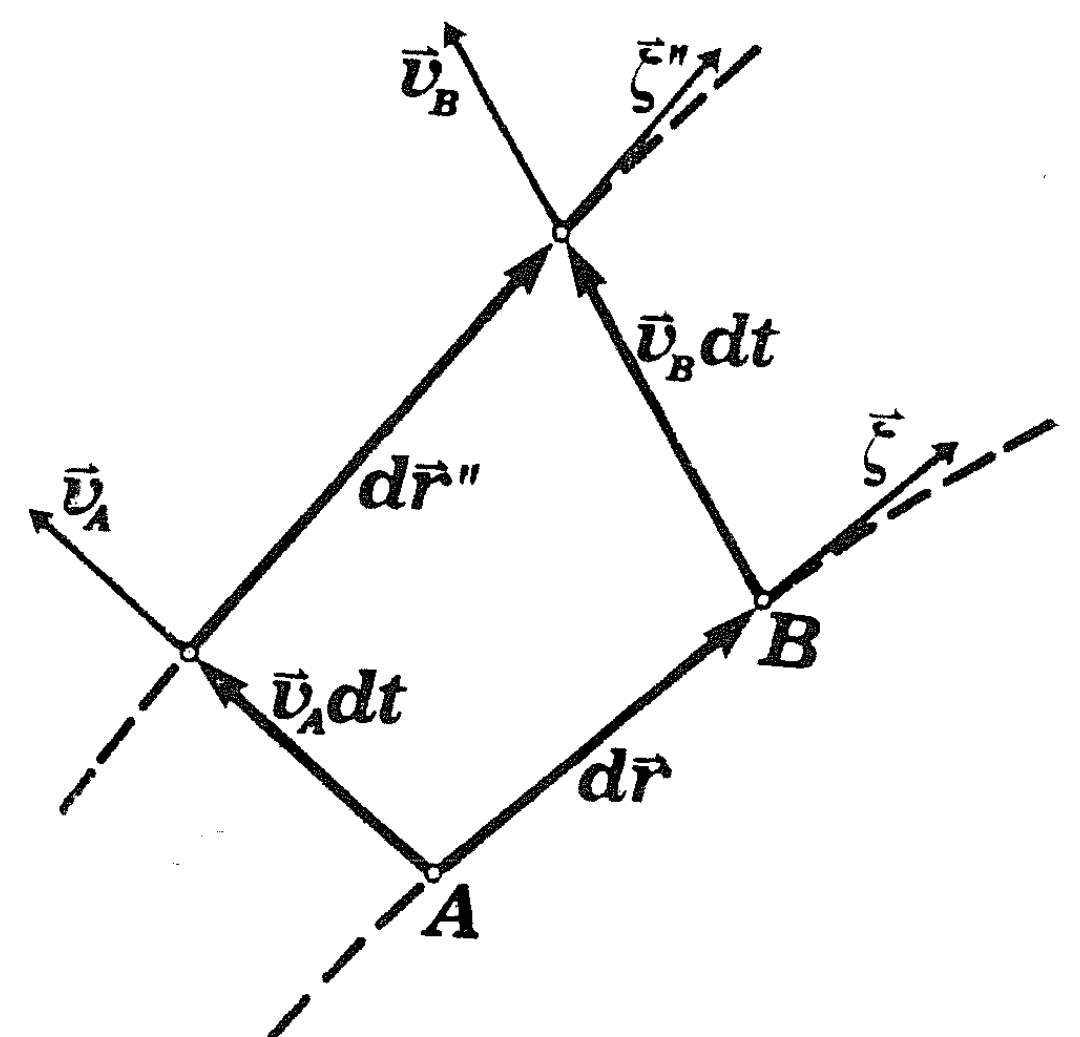
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Gamma(4\pi)^{-1} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{ali} \quad v(r) = \Gamma/2\pi r$$

pri čemer je r oddaljenost pravokotno od vrtnične niti. Vidimo, da je hitrost tekočinskih delcev obratno sorazmerna z oddaljenostjo od vrtnične niti (sl. 2). Zaradi tega je lahko kinetična energija zvrtničene tekočine v neposredni okolici tanke vrtnične niti zelo velika.

Zanima nas še, kako se tekočina vrtniči v notranjosti vrtnične niti. Vzemimo, da je vrtnična nit valjasta s polmerom a in da je vektor vrtničenja v notranjosti niti konstanten! Sledi: $\Gamma = \zeta\pi a^2$. Za $r \leq a$ dobimo: $v(r) = \frac{1}{2} \zeta r$; obodna hitrost tekočinskega delca narašča premo sorazmerno z oddaljenostjo od osi (podobno kot pri vrtenju togega telesa).



Sl. 2



Sl. 3

Lastno gibanje vrtničnih niti

Do zdaj smo razpravljali o trenutni sliki hitrostnega polja in o trenutni sliki vrtničnega polja. Poglejmo še, kako se vrtnično polje spreminja s časom, kako se vrtnične niti premikajo! Na vrtnični niti si mislimo element tekočine dr (od A do B, sl. 3). Hitrost na začetku elementa je v_A , hitrost na koncu elementa je v_B . V kratkem časovnem intervalu dt se začetek elementa premakne za $v_A dt$, konec elementa se premakne za $v_B dt$. Element dr se spremeni v element $dr'' = dr + (v_A - v_B)dt = dr + dv \cdot dt = dr + (dr \nabla) v dt$. Toda obe-

nem se spremeni tudi vrtnčenje, iz ζ v ζ'' . Spreminjanje vrtnčenja s časom dá Eulerjeva enačba, ki velja za idealne tekočine:

$$dv/dt = \partial v/\partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \text{grad} (\Phi + p/\rho)$$

dv/dt je substancialni odvod hitrosti, Φ je potencial zunanjih sil, ρ je gostota tekočine, p je tlak v tekočini. Enačbo pomnožimo z operatorjem rot in dobimo: $d\zeta/dt = (\zeta \nabla) \mathbf{v}$. Novi vektor vrtnčenja je $\zeta'' = \zeta + d\zeta = \zeta + (\zeta \nabla) \mathbf{v} dt$. Če je prvotni element tekočine $d\mathbf{r}$ na vrtnčnici, sta vektorja $d\mathbf{r}$ in ζ kolinearna. Sledi, da sta potem tudi nova vektorja $d\mathbf{r}''$ in ζ'' kolinearna, da je torej tekočinski element še vedno na vrtnčnici. V idealni tekočini je tekočinski element priklenjen na vrtnčnico. *Vrtinčna nit se premika skupaj s tekočinskimi elementi, ki jih povezuje.* Kakor se premikajo elementi na vrtnčni niti, tako se premika vrtnčna nit. Ta ugotovitev velja le za idealne tekočine. V viskozni tekočini se vrtnčne niti premikajo drugače kot tekočinski delci.

Dokazali smo, da je cirkulacija Γ enaka za vse prereze vrtnčne niti. V idealni tekočini poleg tega velja, da se cirkulacija vrtnčne niti ne spreminja s časom. Dokaz:

$$\begin{aligned} d\Gamma/dt &= d(\oint \mathbf{v} ds)/dt = \oint (d\mathbf{v}/dt) ds + \oint \mathbf{v} d(ds)/dt = \\ &= - \oint \text{grad} (\Phi + p/\rho) ds + \oint \mathbf{v} d\mathbf{v} \end{aligned}$$

$d\mathbf{v}$ je sprememba hitrosti pri majhnem premiku po krivulji integracije. Integriramo po sklenjeni krivulji. Zaradi enoličnosti sta integrala nič in dobimo:

$$d\Gamma/dt = 0 \quad \text{ali} \quad \Gamma = \text{konst.}$$

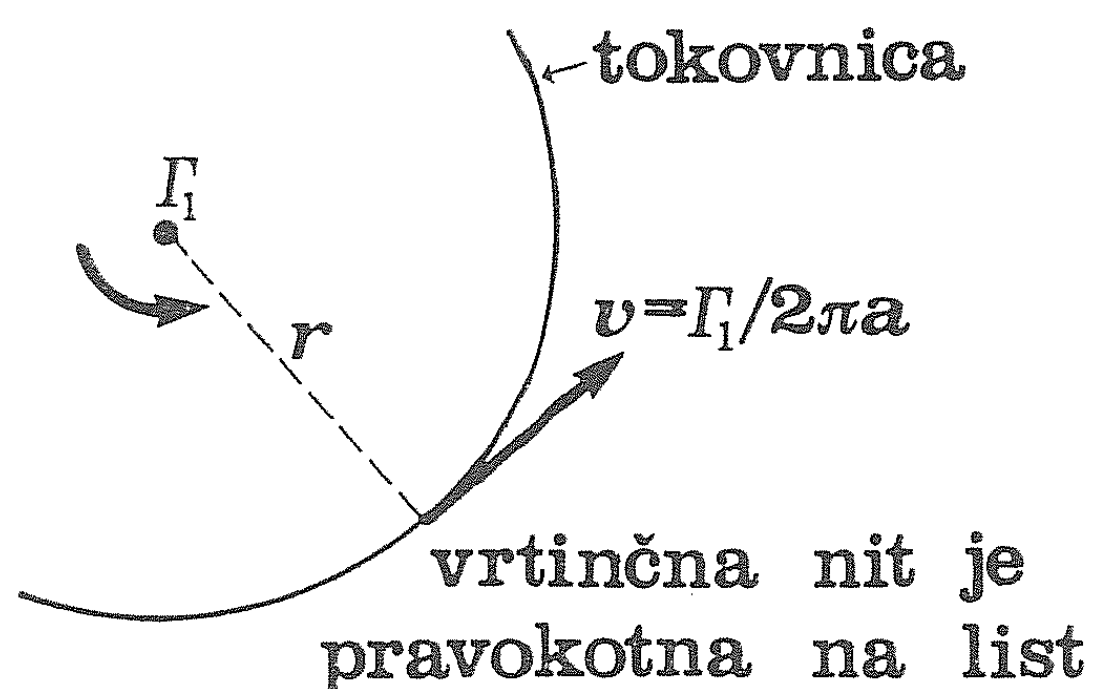
Če se vrtnčna nit premika skupaj s tekočinskimi delci, se njena cirkulacija ne spreminja s časom. V idealni tekočini ni mogoče spremeniti cirkulacije; ni je mogoče niti ustvariti niti uničiti. Vrtnčenje nastaja ali izginja le na mejah tekočine.

Dobili smo nekakšen zakon vztrajnosti gibanja vrtnčnih niti: *Vrtinčne niti se v idealni tekočini gibljejo tako, da se njihova cirkulacija ohranja.*

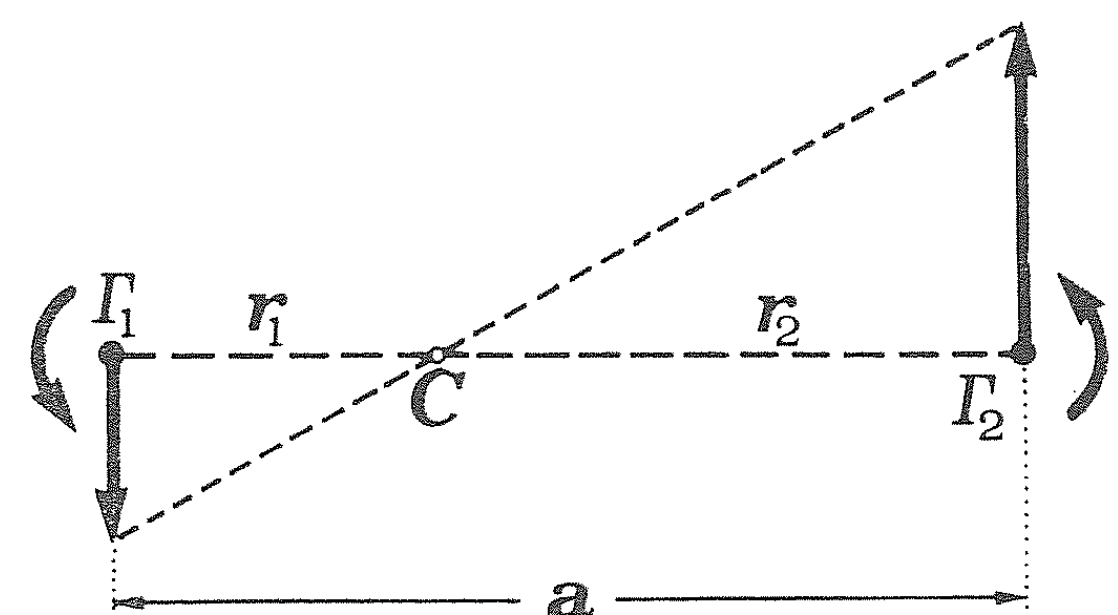
Vrtinčna nit se premika enako kot tekočinski delci na niti. Na gibanje tekočinskih delcev pa vplivajo tudi druge vrtnčne niti iz okolice. Torej vrtnčne niti delujejo druga na drugo. Premikanje vrtnčne niti je odvisno tudi od vrtnčnih niti iz okolice; odločilne so predvsem vrtnčne niti iz bližnje okolice. Gibanje vrtnčnih niti in njihovo medsebojno vplivanje si bomo поблиže ogledali na dveh preprostih primerih: ravne vrtnčne niti in vrtnčni obroči.

Ravne vrtnčne niti

V prostoru so razporejene ravne in vzporedne vrtnčne niti. Hitrostno polje opazujemo v ravnini, ki je pravokotna na vrtnčne niti. Ena sama vrtnčna nit (s cirkulacijo Γ_1) povzroča v svoji okolici osnosimetrično hitrostno polje; tokovnice so koncentrični krogi (sl. 4). Hitrost tekočinskega delca v oddaljenosti r pravokotno od vrtnčne niti je $v = \Gamma_1/2\pi r$.



Sl. 4

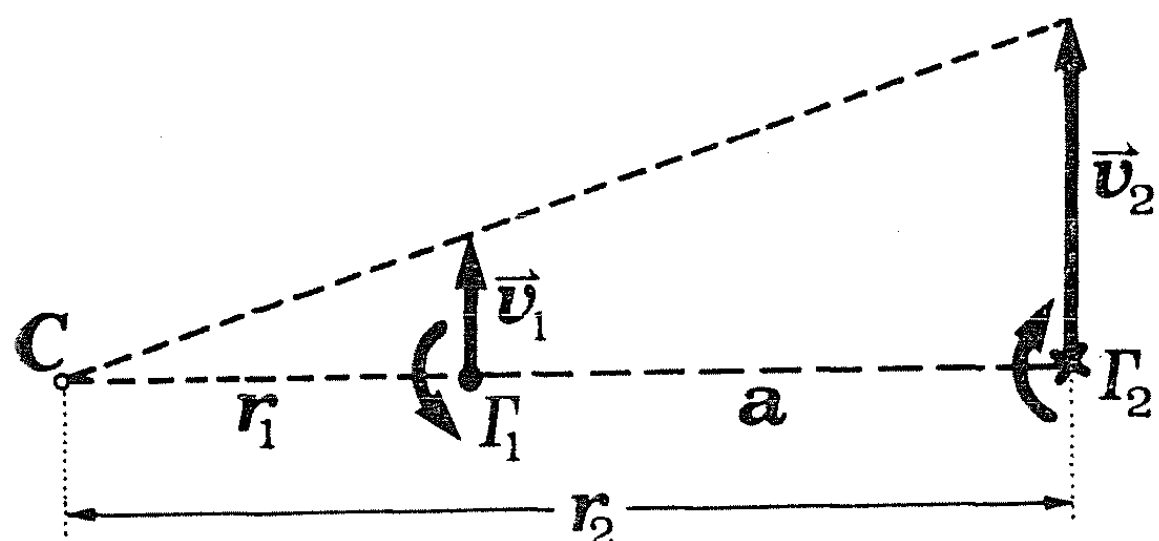


Sl. 5

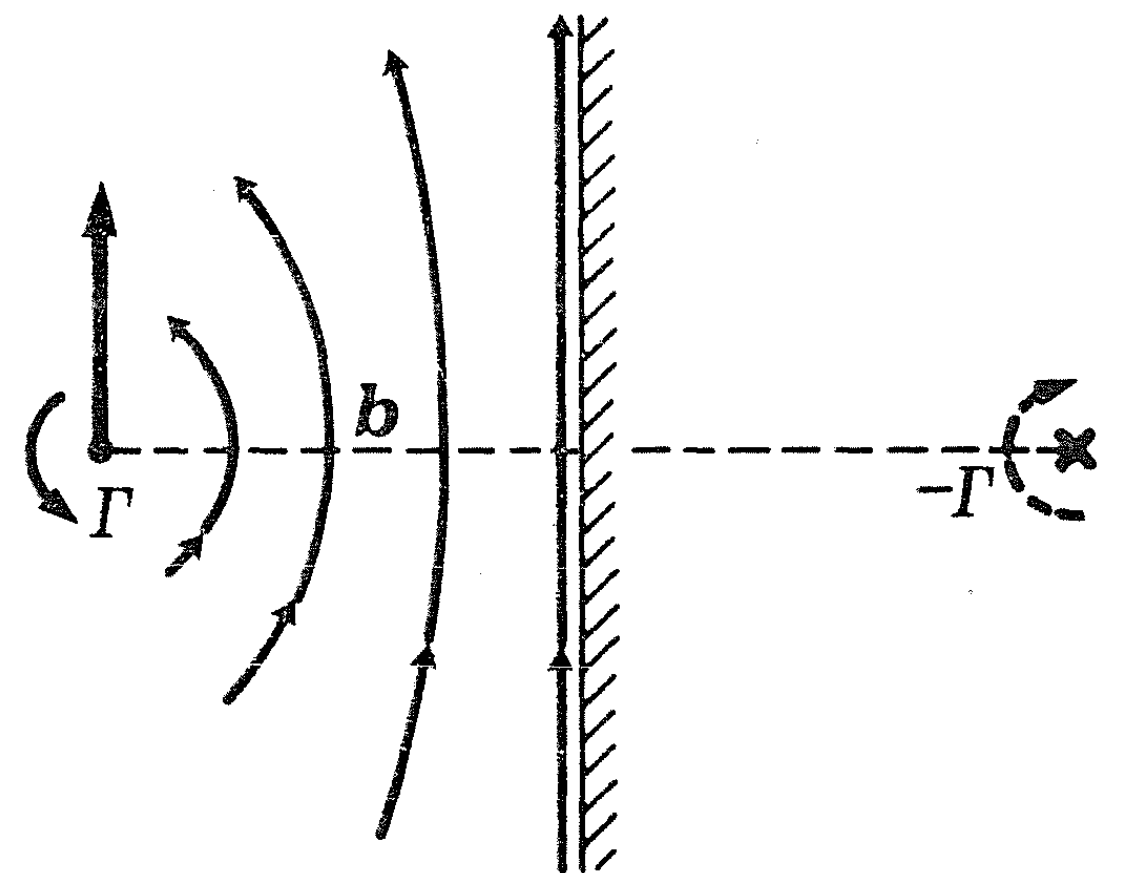
Hitrost tekočine v neposredni okolici tanke vrtnične niti je sicer zelo velika, a zaradi osne simetrije hitrostnega polja se vrtnična nit ne premika. *Osamljena ravna vrtnična nit miruje.*

Recimo, da sta v prostoru dve vzporedni vrtnični niti, razmaknjeni za a ! Cirkulaciji Γ_1 in Γ_2 imata enak predznak (sl. 5). Vrtnična nit Γ_1 se premika s hitrostjo $v_1 = \Gamma_2/2\pi a$, ki jo inducira vrtnična nit Γ_2 . Vrtnična nit Γ_2 se premika s hitrostjo $v_2 = \Gamma_1/2\pi a$. Hitrosti v_1 in v_2 sta pravokotni na zveznico a obeh niti. Zaradi takšnega medsebojnega učinkovanja se vrtnični niti gibljeta po krogih s skupnim središčem C, tako da sta ves čas diametralno nasprotni (krožita z enako kotno hitrostjo). Vrtnična nit Γ_1 se giblje po krogu polmera r_1 , vrtnična nit Γ_2 se giblje po krogu polmera r_2 . Velja: $v_1/r_1 = v_2/r_2$ ali $\Gamma_1 r_1 = \Gamma_2 r_2$. Ker je $r_1 + r_2 = a$, dobimo: $r_1 = a\Gamma_2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ in $r_2 = a\Gamma_1/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$. Vrtnična nit z večjo cirkulacijo se giblje po krogu z manjšim polmerom. Enaki vrtnični niti ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$) krožita z enako obodno hitrostjo $\Gamma/2\pi a$ po skupnem krogu polmera $a/2$.

Drugače se gibljeta vrtnični niti, katerih cirkulaciji imata nasproten znak (sl. 6). V tem primeru je središče C krožnega gibanja obeh niti na zunanji strani zveznice, na strani vrtnične niti z večjo cirkulacijo. V primeru $\Gamma_2 = -\Gamma_1 = \Gamma$ dobimo par enakih, a nasprotno usmerjenih vrtničnih niti (to je *par antisimetričnih niti*). Skupna cirkulacija para antisimetričnih vrtničnih niti je nič. Vrtnični niti se gibljeta translacijsko s hitrostjo $v = \Gamma/2\pi a$ v smeri pravokotno na njuno zveznico. Gibljeta se tem hitreje, čim bliže sta druga drugi. Njuna oddaljenost se med gibanjem ne spreminja.

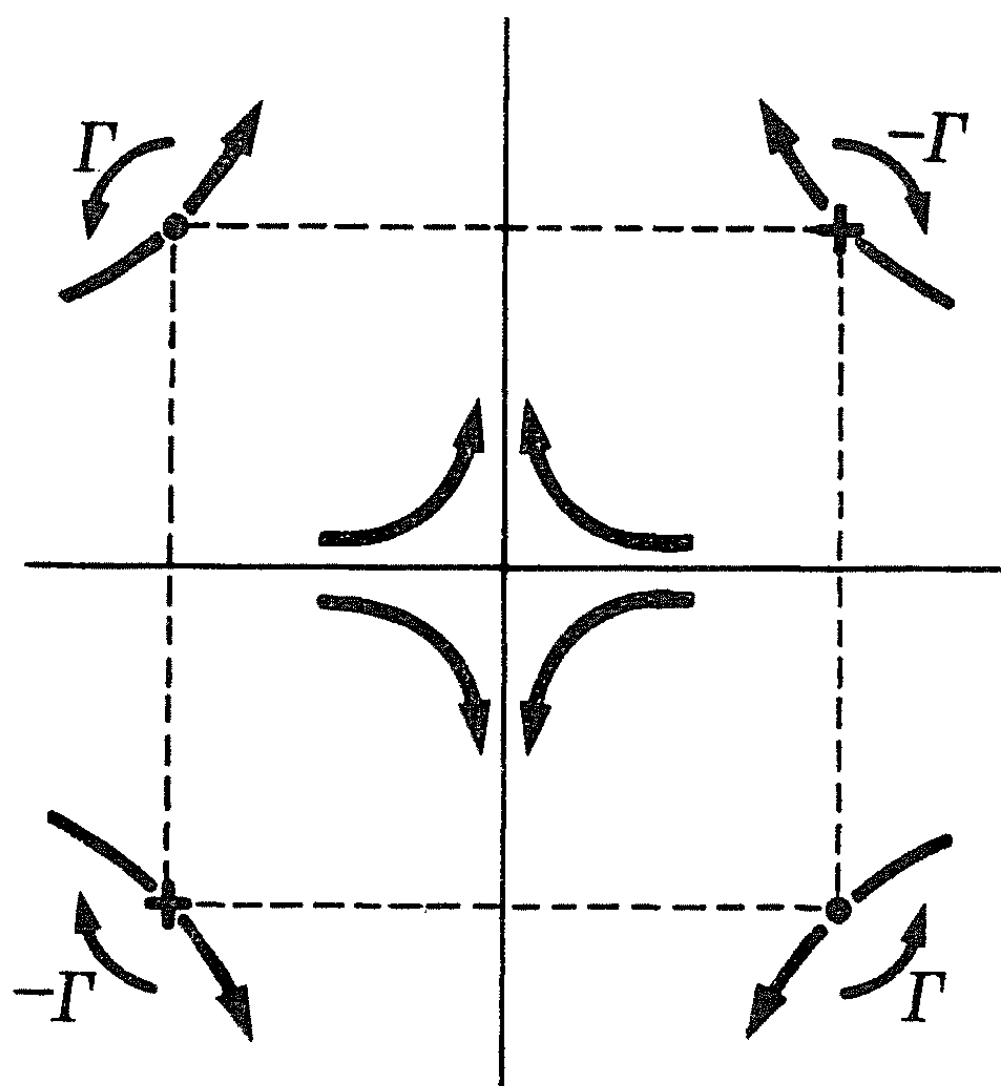


Sl. 6



Sl. 7

Potek tokovnic pri antisimetričnem paru vrtničnih niti je simetričen glede na zrcalno ravnino med nitma. Ob zrcalni ravnini je ravna tokovnica (sl. 7). Hitrostne razmere v okolici ene vrtnične niti se ne spremenijo, če drugo vrtnično nit odstranimo, namesto nje pa v zrcalno ravnino postavimo gladko ravno steno (sl. 7). Dobimo ravno vrtnično nit pred gladko ravno steno. Ravna vrtnična nit, ki je vzporedna gladki steni, se giblje vzporedno s steno (v smeri pravokotno na lastno smer) s hitrostjo $\Gamma/4\pi b$; pri tem je b oddaljenost niti od stene. Vrtnična nit se giblje tako, kot da »vidi« v steni svoj antisimetrični par. (Podobno preslikamo električno polje točkastega naboja pred prevodno steno).

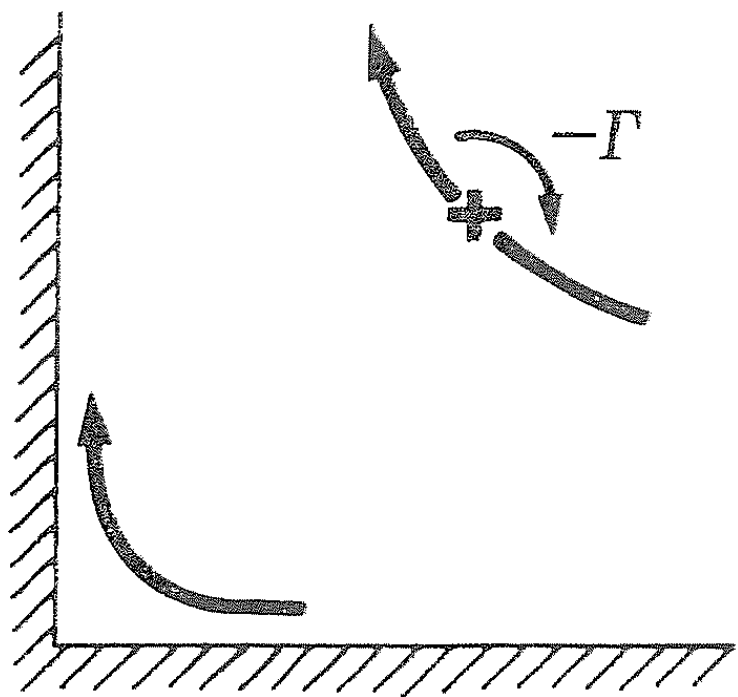


Sl. 8

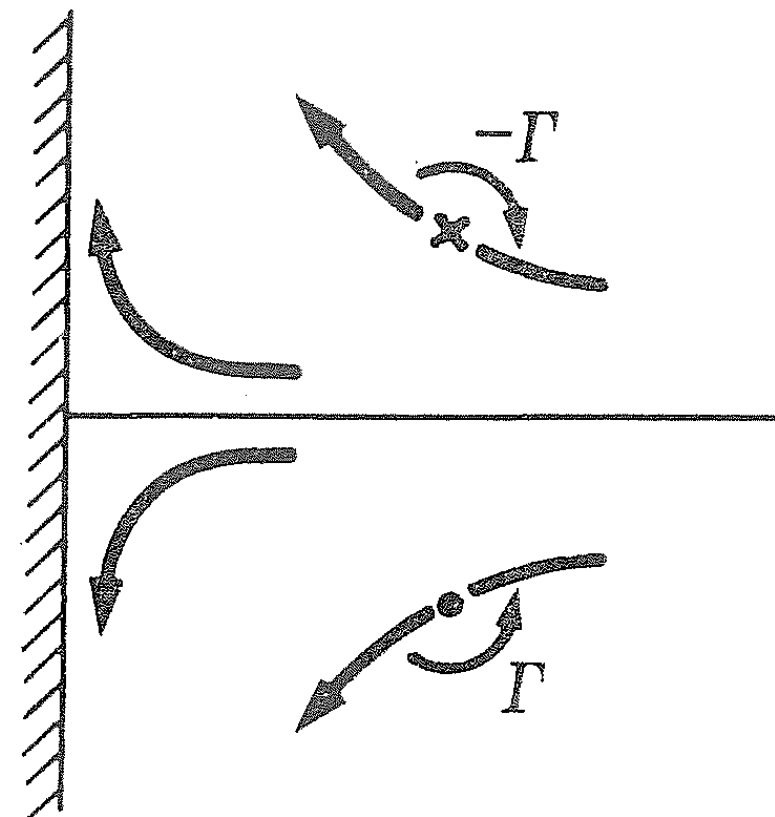
Gibanje vrtničnih niti seveda ni več enostavno, če je v prostoru več vrtničnih niti. Preprosto se da opisati še sestav štirih enakih vrtničnih niti, ki so v ogliščih pravokotnika, tako da sosednji niti sestavljata antisimetrični par (sl. 8). Hitrost vsake vrtnične niti je rezultanta treh hitrosti, ki jih inducirajo preostale tri vrtnične niti. Lahko se prepričamo, da se vrtnične niti v tem primeru gibljejo v smeri puščic na sl. 8, tako da so stalno v ogliščih pravokotnika (katerega stranice se seveda spreminjajo). V tem primeru imamo dva para antisimetričnih vrtničnih niti, ki se iz velike oddaljenosti približujeta drug drugemu. Čim bolj

se para približujeta, tem bolj se vrtnični niti v posameznem paru razmikata (s čimer para zavirata drug drugega). Na koncu dobimo nova antisimetrična para, ki se oddaljuje drug od drugega. Vidimo, da imamo pravzaprav trk dveh vrtničnih parov; pri trku se vrtnična para preoblikujeta v nova para.

Potek tokovnic v tem posebnem primeru (sl. 8) tudi pove, kako se npr. giblje ravna vrtnična nit mimo dveh pravokotnih sten (sl. 9) ali kako se par antisimetričnih vrtničnih niti približuje ravni steni (sl. 10). Antisimetrični par se pojemajoče približuje ravni steni, obenem se razširja; ob steni se »razbije« v vrtnični niti, ki se vzdolž stene oddaljujeta v nasprotnih smereh.



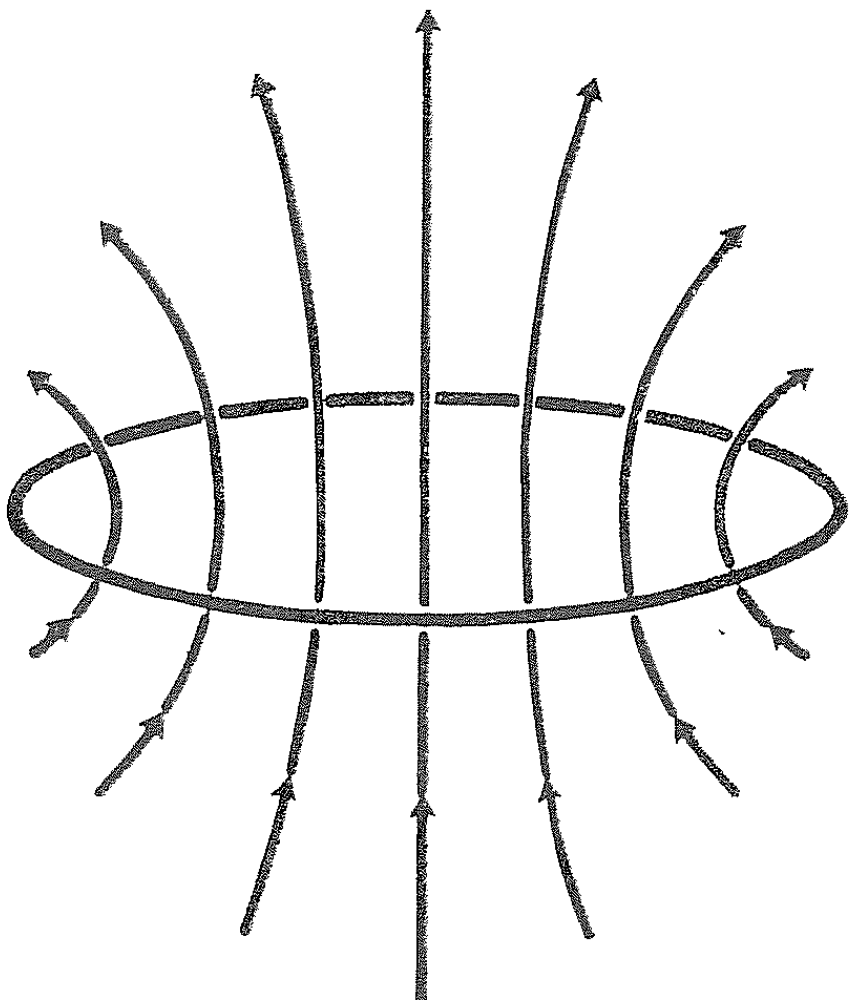
Sl. 9



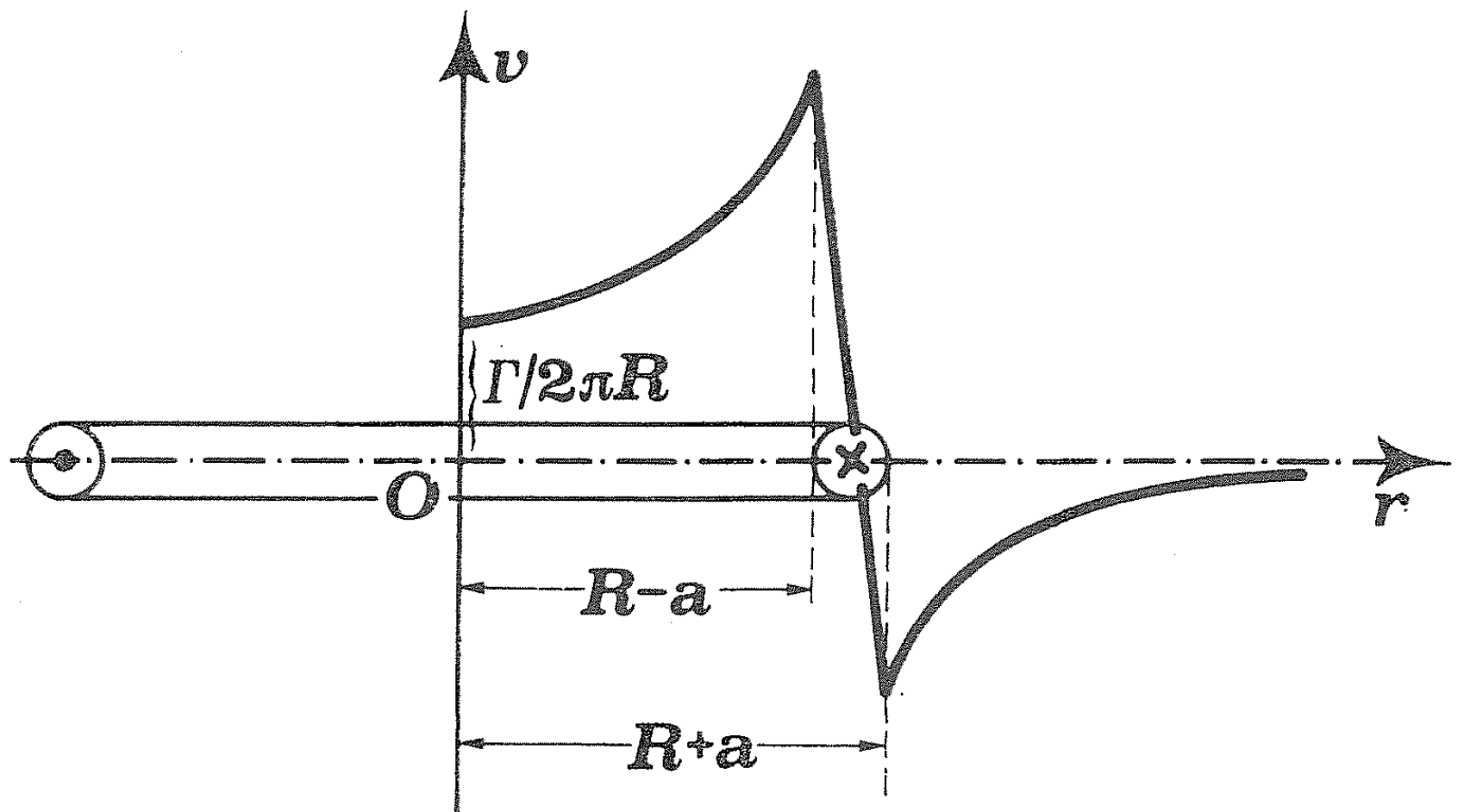
Sl. 10

Vrtnični obroči

Videli smo, da se par antisimetričnih vrtničnih niti premika translacijsko; oddaljenost vrtničnih niti se med gibanjem ne spreminja. Podobno se giblje vrtnični obroč, to je vrtnična nit, zvita v krog. Hitrostno polje v okolici obroča spominja na magnetno polje v okolici krožne tokovne zanke (sl. 11). Hitrost okolne tekočine je odvisna od cirkulacije Γ vrtnične niti, od debeline ($2a$) vrtnične niti ter od polmera R obroča. V ravnini obroča



Sl. 11



Sl. 12

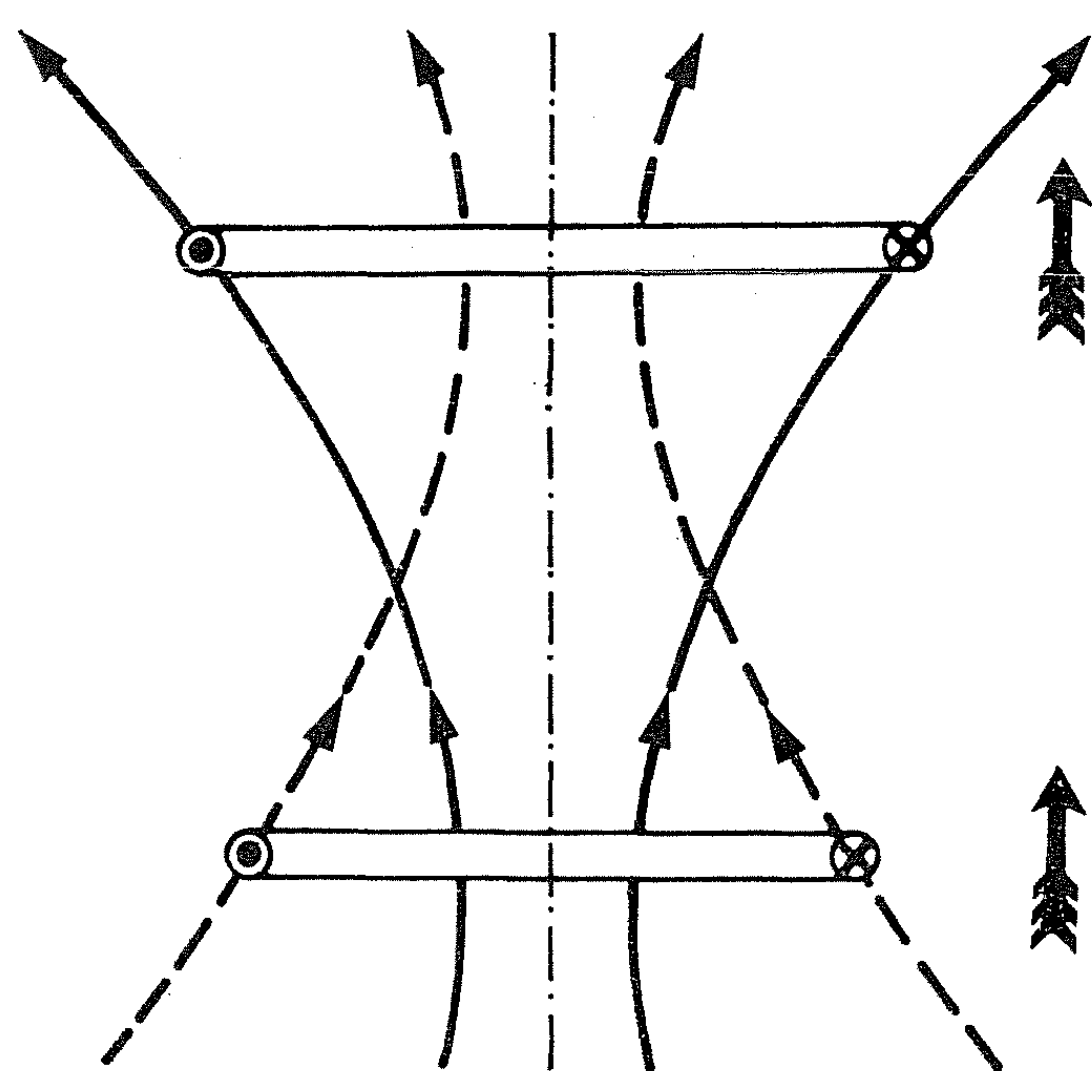
je hitrost tekočinskih delcev vzporedna simetrijski osi obroča; njeno spreminjanje s krajem kaže slika 12. Navzgor usmerjena hitrost tekočine ob notranji strani obroča ($r \approx R - a$) je večja od navzdol usmerjene hitrosti tekočine ob zunanji strani obroča ($r \approx R + a$); razlika je tem večja, čim tanjša je vrtnična nit (čim manjši je a). Potek hitrostnega polja v neposredni okolici vrtničnega obroča nakazuje, da se vrtnični obroč premika translacijsko (ob nespremenjeni obliki) v smeri osi obroča. Translacijsko hitrost obroča (v_0) dobimo s poprečenjem hitrosti tekočinskih delcev na območju vrtnične niti. Približen izraz (za $a \ll R$) je:

$$v_0 \approx (\Gamma/4\pi R) \ln(8R/a)$$

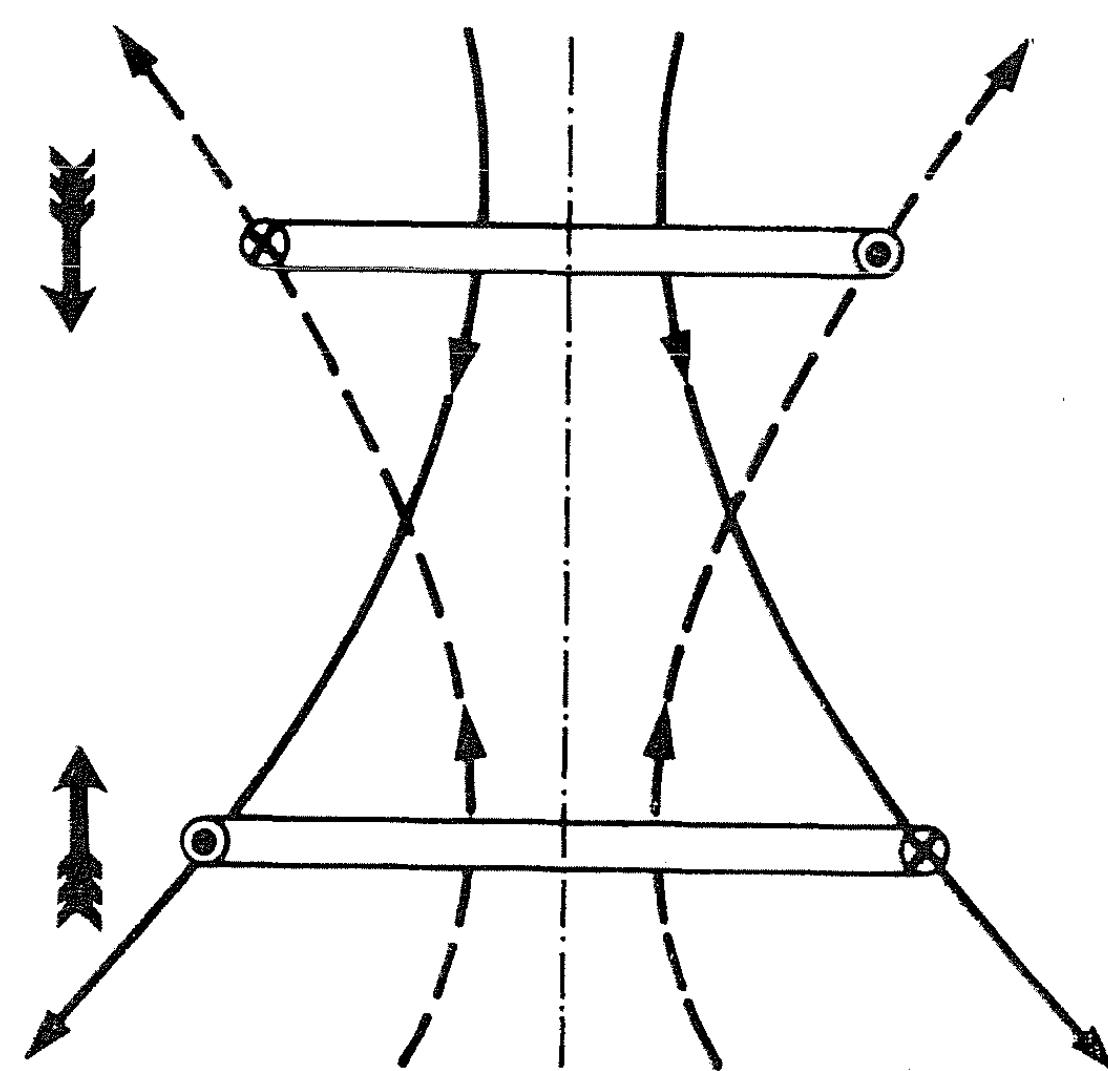
Čim manjši je polmer R obroča, tem hitreje se obroč premika. Smer gibanja obroča je določena s smerjo ravnine obroča, odvisna pa je še od smeri vektorja vrtnčenja. Obroč se giblje v nasprotni smeri, če smer vrtnčenja v obroču obrnemo.

Osamljen vrtnčni obroč v neomejeni idealni tekočini se giblje enakomerno (tako imenovano lastno gibanje obroča). Podobno se giblje materialni delec, če nanj ne delujejo zunanje sile. Zakon vztrajnosti gibanja je pri vrtnčnem obroču v idealni tekočini posledica medsebojnega vplivanja delov obroča.

Zanimivo je medsebojno vplivanje vrtnčnih obročev. Lastnemu gibanju vsakega obroča se pridruži gibanje, inducirano od drugih obročev. Obenem drugi obroči spreminjajo obliko (velikost) danega obroča ter tako vplivajo na njegovo lastno gibanje. Zaradi matematične preglednosti se omejimo na preprost primer: opazujemo gibanje in medsebojno vplivanje dveh vrtnčnih obročev, ki se gibljeta vzdolž skupne osi; ravnini obročev sta vzporedni. Recimo, da se obroč gibljeta v isti smeri (sl. 13). Zadnji obroč neposredno povečuje translacijsko hitrost sprednjega obroča. Toda ker je hitrostno polje zadnjega obroča na območju sprednjega obroča nekoliko divergentno, se polmer sprednjega obroča povečuje; to pomeni, da se translacijska hitrost lastnega gibanja sprednjega obroča zmanjšuje. V celoti se sprednji obroč zaradi vplivanja zadnjega obroča povečuje in postaja počasnejši. S podobnim sklepanjem ugotovimo, da se zadnji obroč (zaradi vplivanja sprednjega obroča) zmanjšuje in pospešuje. Zadnji obroč se pospešeno približuje sprednjemu obroču. Ko ga dohiti, zdrkne skozenj in ga prehit. Nato se vlogi zamenjata. Zadnji obroč se vsakokrat zmanjšuje in pospešuje, sprednji obroč se povečuje in postaja počasnejši.



Sl. 13



Sl. 14

Drug primer: mislimo si, da se obroč na skupni osi gibljeta drug proti drugemu (sl. 14). Obroč se zaradi medsebojnega vplivanja širita, njuni translacijski hitrosti se zmanjšujeta. Bolj se približujeta, širša in počasnejša postajata. Približevanje dveh enakih vrtnčnih obročev nakazuje, kako se vrtnčni obroč približuje ravni steni: obroč se širi, njegova hitrost se zmanjšuje. Drugače je, če se vrtnčna obroča na skupni osi oddaljujeta drug od drugega; oddaljevanje je pospešeno, obroča se zmanjšujeta.

LITERATURA

- [1] Handbuch der Experimentalphysik, Band IV, 1. Teil, *Hydro- und Aerodynamik*, Leipzig, Akademischer Verlag 1931.
- [2] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, University Press 1970.
- [3] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, University Press 1932.

GIBANJE VISKOZNIH TEKOČIN

DARKO JAMNIK

UDK 532.517

Pojavi, ki so posledica viskoznosti, so opisani za nekatere primere gibanja nestisljive tekočine. Otravnavana je tudi stabilnost paralelnega toka in nekatere lastnosti turbulentnega toka.

FLOW OF VISCOUS FLUIDS

Effects due to viscosity are illustrated for several cases of flow of an incompressible fluid. The problem of stability of the parallel flow and some aspects of the turbulent flow are discussed.

V naslednjem si bomo ogledali nekoliko pojavov pri gibanju nestisljivih tekočin, ki so v zvezi z viskoznostjo. Pri tem se bomo poslužili ustreznih splošnih zaključkov iz poglavja Uvod v mehaniko tekočin, kjer so bili nekateri od teh pojavov že tudi nakazani. Uporabili bomo enačbo

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

Leva stran enačbe predstavlja vztrajnostne sile na del tekočine v prostorninski enoti, ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$, na desni strani pa gre za sile tlaka in strižne sile, ki so posledica viskoznosti. Prostorninsko porazdeljene sile, kot je na primer teža, smo tukaj izpustili.

Paralelni tok

V stacionarnem paralelnem toku se gibljejo vsi deli tekočine brez pospeška, tako da ni vztrajnostnih sil in so v ravnovesju le tlačne in strižne sile. Vpliv viskoznosti se tu pokaže posebno preprosto. Hitrost je v času konstantna in enaka $\mathbf{v} = (v(z), 0, 0)$. Vzeli smo, da kaže os x v smer toka in se hitrost spreminja le v smeri osi z . Ker je $v_y = v_z = 0$, sledi iz enačbe (1), da je tlak neodvisen od y in z . Pri tem toku gre očitno za tok med dvema paralelnima stenama, ki sta zelo veliki v primeri z medsebojno razdaljo d . Tako smemo zanemariti pojave na robovih.

Primer 1): spodnja stena miruje, zgornja pa se giblje s hitrostjo V . Tlak v toku naj bo konstanten $\partial p / \partial x = 0$. Rezultanta sil na posamezno plast tekočine je enaka nič (plast se giblje enakomerno) in ker tlačnih sil ni, vleče zgornji del tekočine dano tekočinsko plast s silo, ki je nasprotna sili spodnjega dela. Strižna napetost je torej neodvisna od razdalje od plošče $F/S = \eta dv/dz = \text{konst.}$

Iz tega sledi za robne pogoje $v(0) = 0$, $v(d) = V$

$$v = Vz/d$$

ustrezni diagram pa je na sliki 1. Približno takšne so razmere pri demonstracijskem poskusu z razmazano kapljo medu med dvema paralelnima ploščama, od katerih premika zgornjo sila F s hitrostjo V .

Primer 2): imamo mirujoči steni v razdalji d s tlakom p_0 pri $x = 0$ in p pri $x = l$ in spodnja stena je pri $z = -d/2$. Očitno je porazdelitev hitrosti simetrična okrog $z = 0$, tako da je tam $dv/dz = 0$ in ni strižnih sil. Na tekočino med $x = 0$ in $x = l$, med $z = 0$ in z deluje na enoto prečne širine sila tlaka $(p_0 - p)z$, ki jo uravnovesi sila $-\eta l (dv/dz)$.

Pri tem smo predpostavili, da je dv/dz negativen. Velja $(p - p_0)z = \eta l(dv/dz)$ in iz tega zaradi $v(d/2) = 0$

$$v(z) = (p_0 - p)/(2\eta l) (d^2/4 - z^2)$$

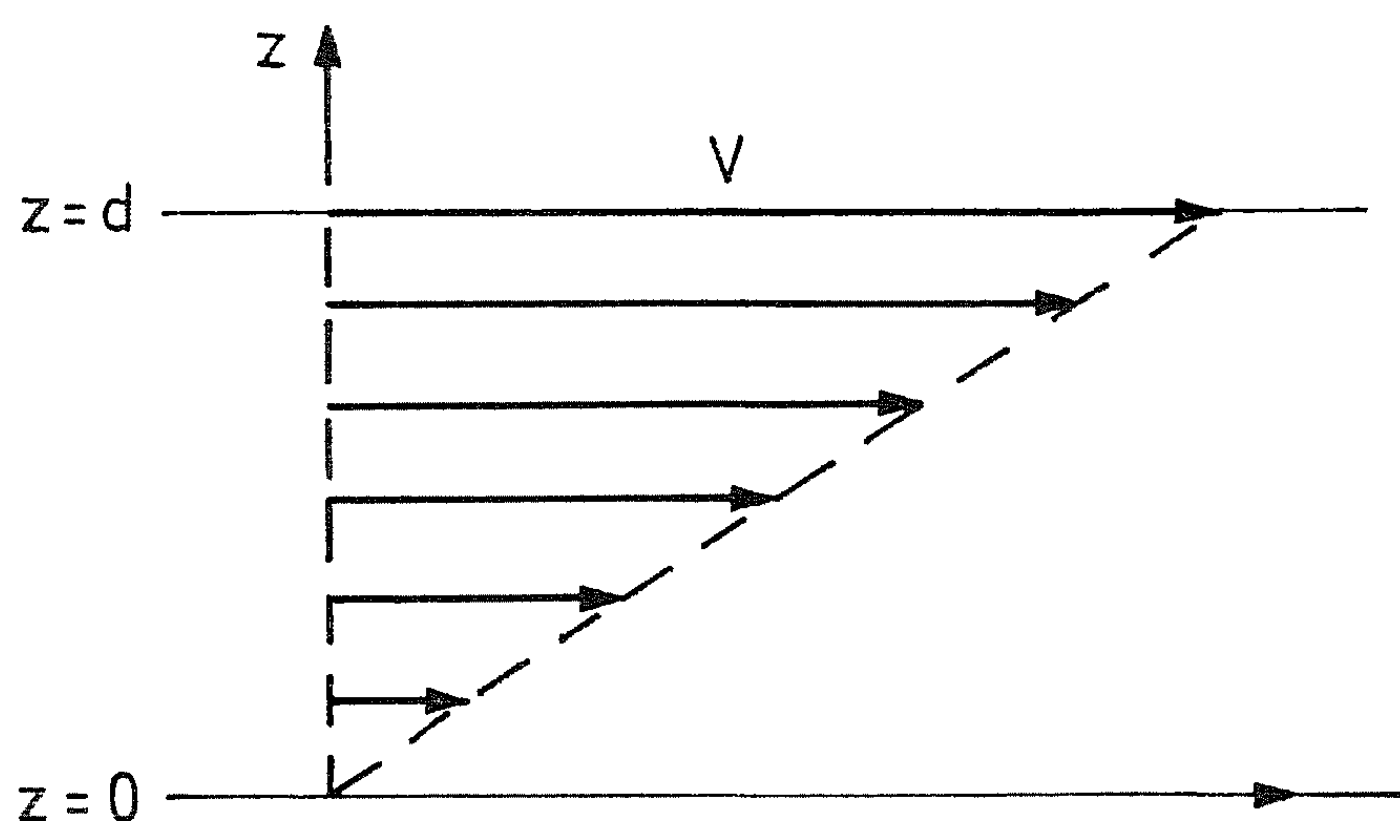
(slika 2.) Prostorninski pretok tekočine skozi režo med stenama na enoto širine je tako

$$Q = \int v(z) dz = (p_0 - p)d^3/(12\eta l)$$

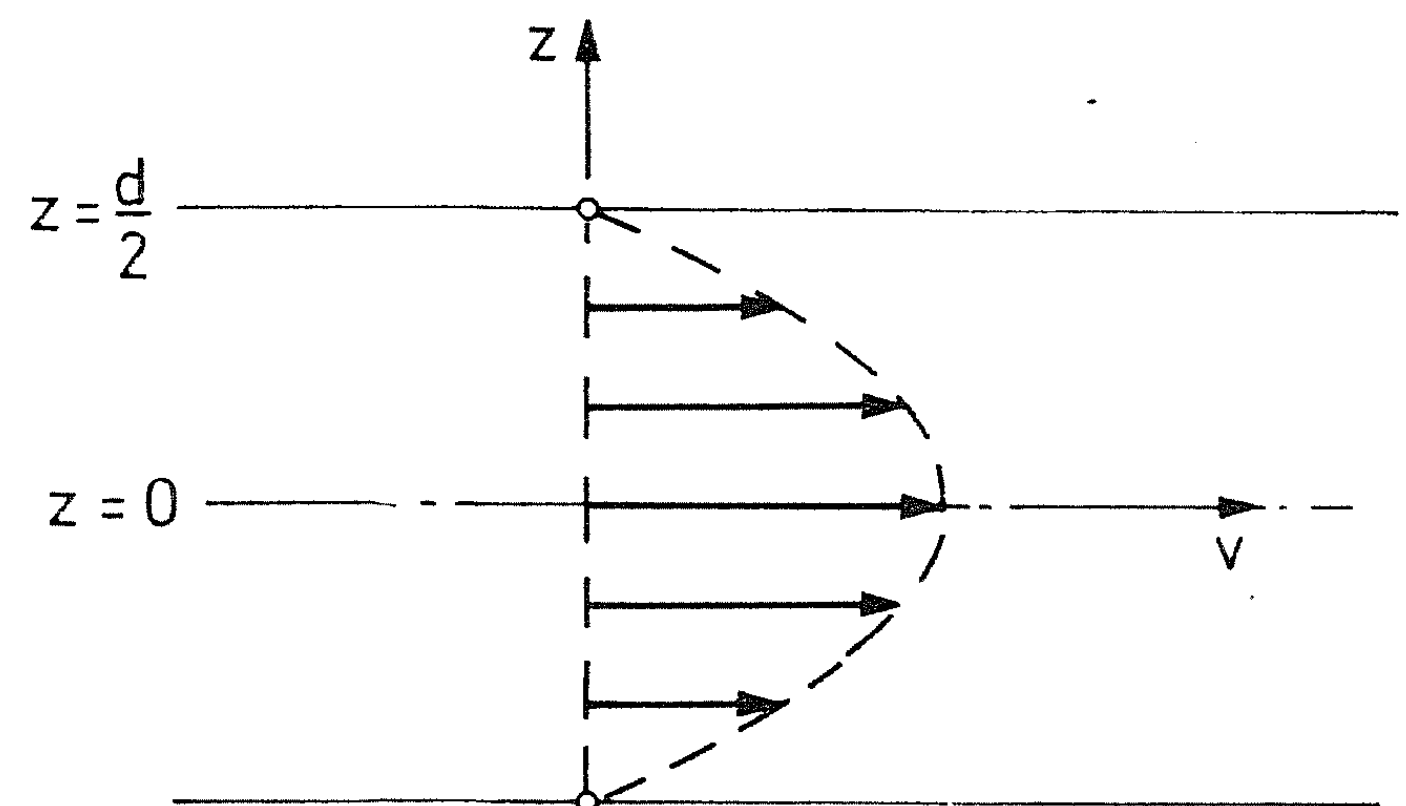
Problem paralelnega toka po cevi z radijem R je podoben. Zanj velja $v(r) = (R^2 - r^2) \cdot (p_0 - p)/(4\eta l)$ in

$$Q = \pi(p_0 - p)R^4/(8\eta l)$$

Zadnja zveza je znana kot *Hagen-Poiseuillov zakon*, paralelni tok v splošnem pa imenujejo *Poiseuillov tok*. Zgornje enačbe so v praksi pomembne v mnogih primerih; ogledali si bomo dva.

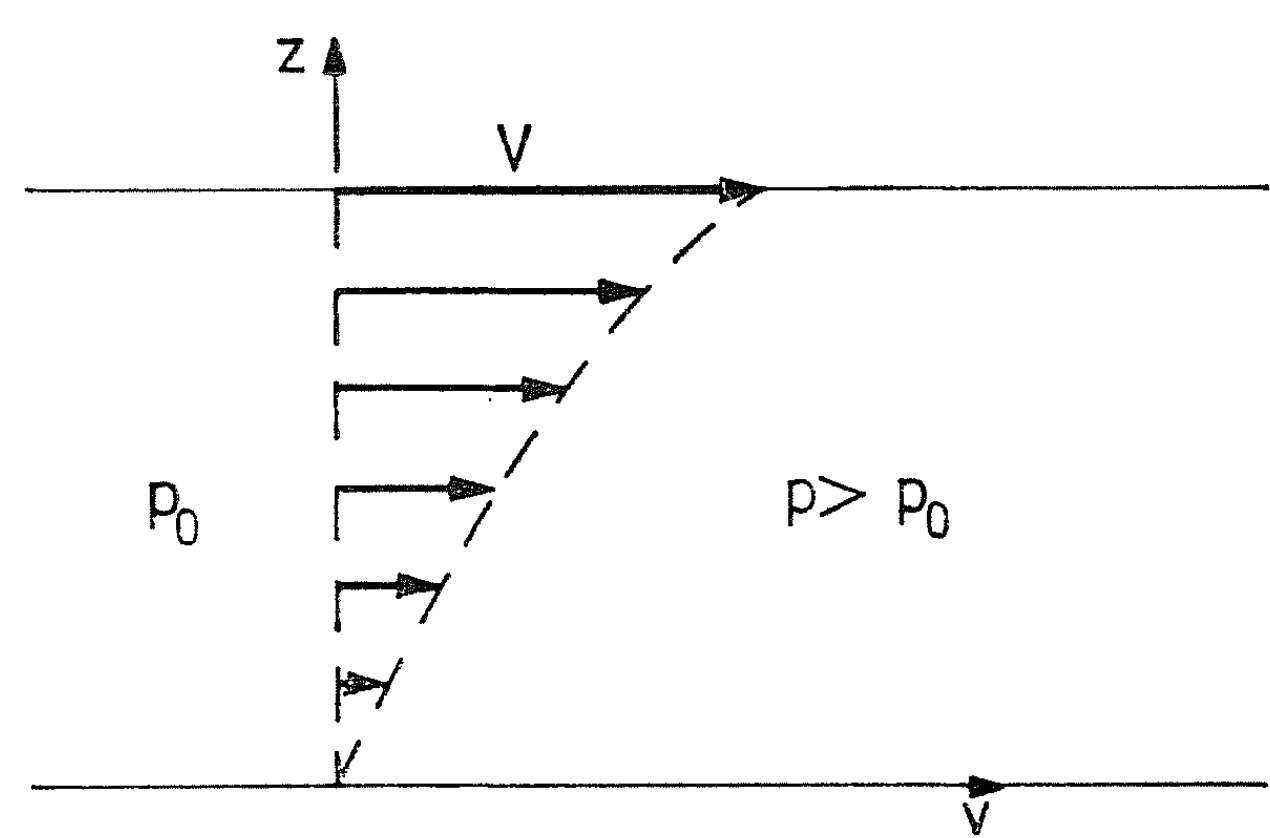
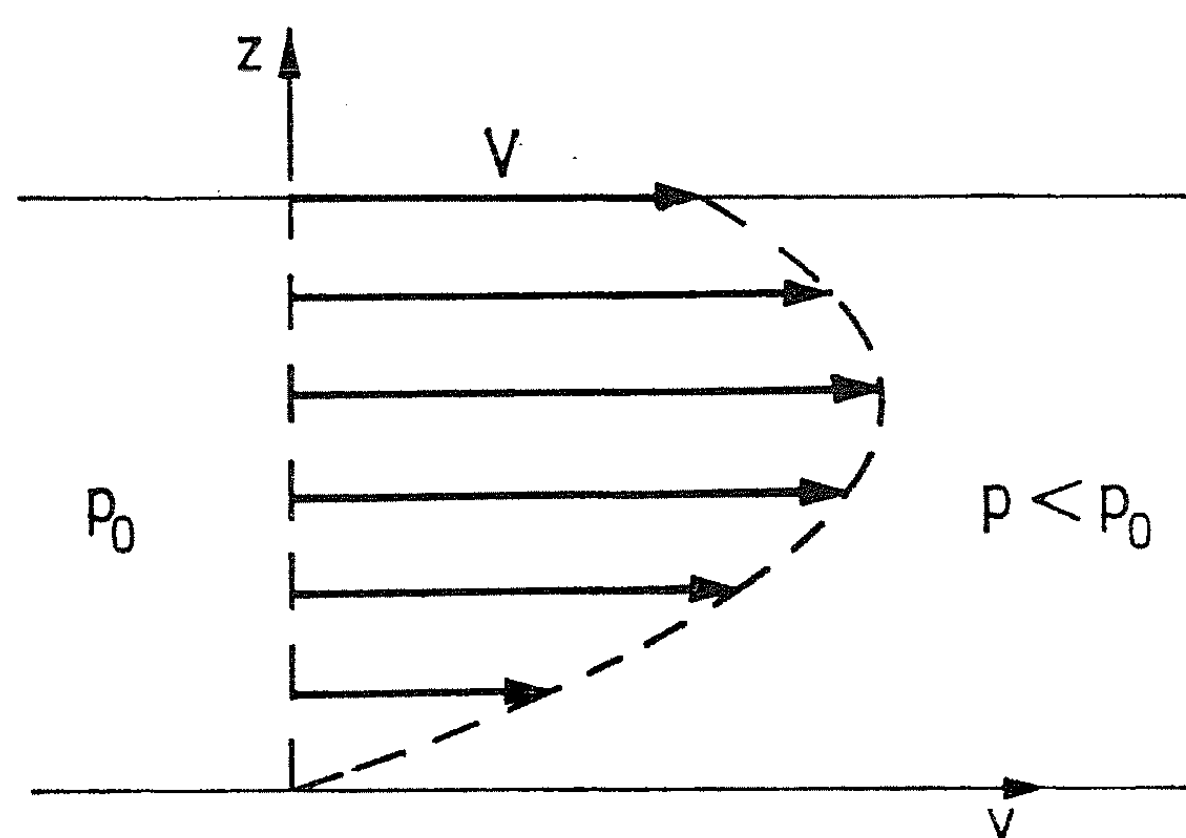


Sl. 1



Sl. 2

Kombinirajmo primera 1) in 2)! Zgornja stena se premika s hitrostjo V , spodnja miruje in na dolžini l je tlačna razlika $p_0 - p$. Ker so vse zveze linearne, je hitrost za kombinirani primer kar vsota hitrosti iz primera 1) in hitrosti iz primera 2). Del strižne sile, ki ustreza primeru 1) namreč uravnovesi vpliv zunanjih sil F in $-F$, preostali del strižne sile, ki ustreza primeru 2), pa uravnovesi vpliv tlaka. Z robnimi pogoji pa je tako tudi vse v redu. Porazdelitev hitrosti kaže kvalitativno slika 3. Pretok na enoto širine je tudi vsota obeh pretokov $Q = Vd/2 + (p_0 - p)d^3/(12\eta l)$.



Sl. 3

Uporabimo te ugotovitve za razlago preprostega modela mazanja ležajev. Namesto ukrivljenih površin običajnega drsnega ležaja vzemimo dve dovolj široki plošči, od katerih je zgornja vodoravna, spodnja pa je nasproti njej rahlo nagnjena za kot α . Zelo dolga zgornja se premika v vodoravni smeri s hitrostjo V , spodnja z dolžino a pa miruje (slika 4). Razdalja med ploščama na levi strani je $h_2 \ll a$, na desni $h_1 < h_2$, tlak v tekočini med ploščama pa naj bo na obeh krajiščih spodnje plošče enak p_0 . Zaradi strižnih sil se tekočina nabije — zagozdi — med plošči, tako da je tlak med ploščama znotraj večji kakor na kra-

jiščih. Porazdelitev tlaka pa mora biti taka, da je pretok med ploščama po vsej dolžini konstanten. Ker je nagib majhen ($\alpha \ll 1$), bomo vzeli, da veljajo za dolžine $dx \ll a$ približno takšne razmere, kakor da bi bili plošči paralelni. Imamo paralelen tok: prejšnjemu l ustreza dx , d pa $h(x) = h_2 - \alpha x$. Prostorninski pretok na enoto širine na mestu x je $Q(x) = Vh(x)/2 - h^3(x)/(12\eta)dp/dx$.

Ta mora biti neodvisen od x : $Q(x) = \text{konst.} = Q$. Ker poznamo $h(x)$, imamo enačbo za $p(x)$, ki ob pogoju, da je tlak na obeh krajiščih enak p_0 , določa tudi Q . Rešitev v odvisnosti od h je $p = p_0 + (6\eta V/a(h_2 - h)\pi) \cdot (h - h_1)/(h^2(h_1 + h_2))$.

Za oceno tlaka vzamemo kar tlak na sredi plošče. Za $\eta = 1$ poise $= 0,1 \text{ Nsm}^{-2}$ (olje), $a = 10 \text{ cm}$, $V = 10 \text{ cm s}^{-1}$, $\alpha = 10^{-3}$ in $h_1 = 0,025 \text{ mm}$ dobimo $p - p_0 = 2$ atmosferi. To lahko nosi že precejšnjo težo. Zgornjo ploščo vlečemo v horizontalni smeri s silo F , teža plošče pa je nasprotno enaka sili tlaka $F_n \approx \int p(x)dx$. Definiramo lahko koeficient trenja, ki je sorazmeren nagibu in neodvisen od viskoznosti tekočine:

$$k_{tr} = F/F_n = \alpha. \text{ funkcija } (h_2/h_1); \text{ za } (h_2 - h_1)/h_1 \approx 1 \text{ je } k_{tr} \approx h_1/a.$$

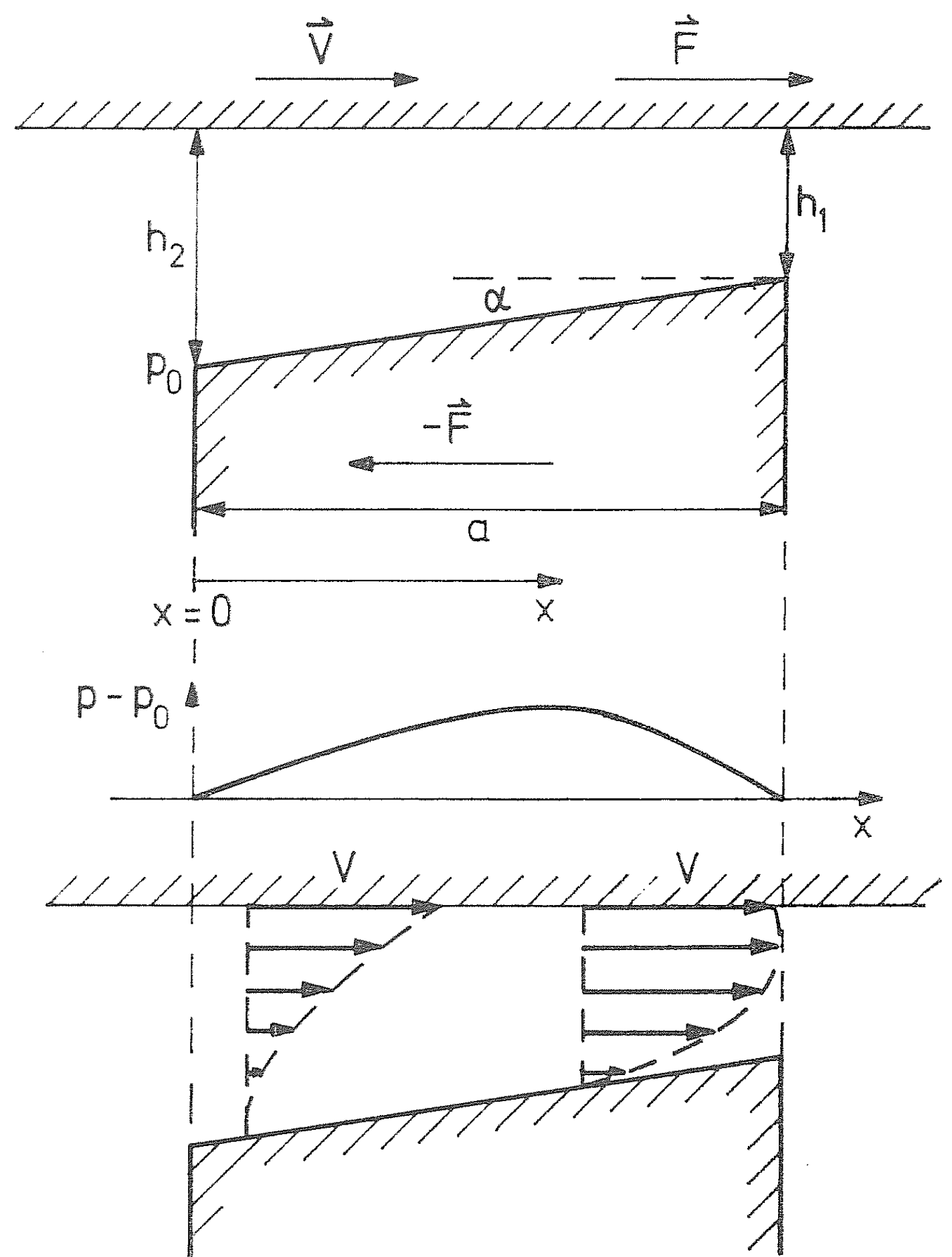
Zelo viskozne tekočine

Pri paralelnem stacionarnem toku ni vztrajnostnih sil. Če tok ni paralelen, pa to ne drži več. Vendar v posebnih primerih lahko zanemarimo vztrajnostne sile pri neparalelnem toku in ostane tako od enačbe (1) le

$$\begin{aligned} \nabla p &= \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \text{ iz česar sledi zaradi } \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \nabla^2 p &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Kriterij za upravičenost približka v stacionarnem primeru je dovolj majhno Reynoldsovo število $R = \rho vl/\eta$, ki v grobem pomeni razmerje med vztrajnostno in strižno silo. v predstavlja tipično hitrost, l pa tipično razdaljo, na kateri se hitrost bistveno spremeni. V nestacionarnem primeru tudi velja enačba (2), če so spremembe dovolj počasne. Nestacionarnost problema je potem v nestacionarnih robnih pogojih. Očitno je približna Stokesova enačba (2) tem bolj veljavna, čim večja je viskoznost tekočine.

Za zgled si oglejmo primer, ki je v zvezi s šolskimi poskusi. Vzemimo tekočino, ki se giblje stacionarno med paralelnima stenama v razdalji d in ta razdalja naj bo majhna v primerjavi z razsežnostjo sten. V prostoru med stenama so tudi določeni trdni profili debeline d , ki definirajo robne pogoje za tok tekočine. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo na sredo med steni, tako da je os z nanju pravokotna. Tok je laminaren in hitrost je stenam paralelna $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$. Z dovolj majhnim d lahko dosežemo, da je spreminjanje hitrosti v smeri osi x in y počasno v primeri s spreminjanjem v smeri osi z . V takem primeru je treba upoštevati le strižne sile v ploskvah, ki so stenam paralelne. Ustrezna napaka ima velikostno stopnjo d^2/l^2 ; l je tipična razdalja, na kateri se hitrost

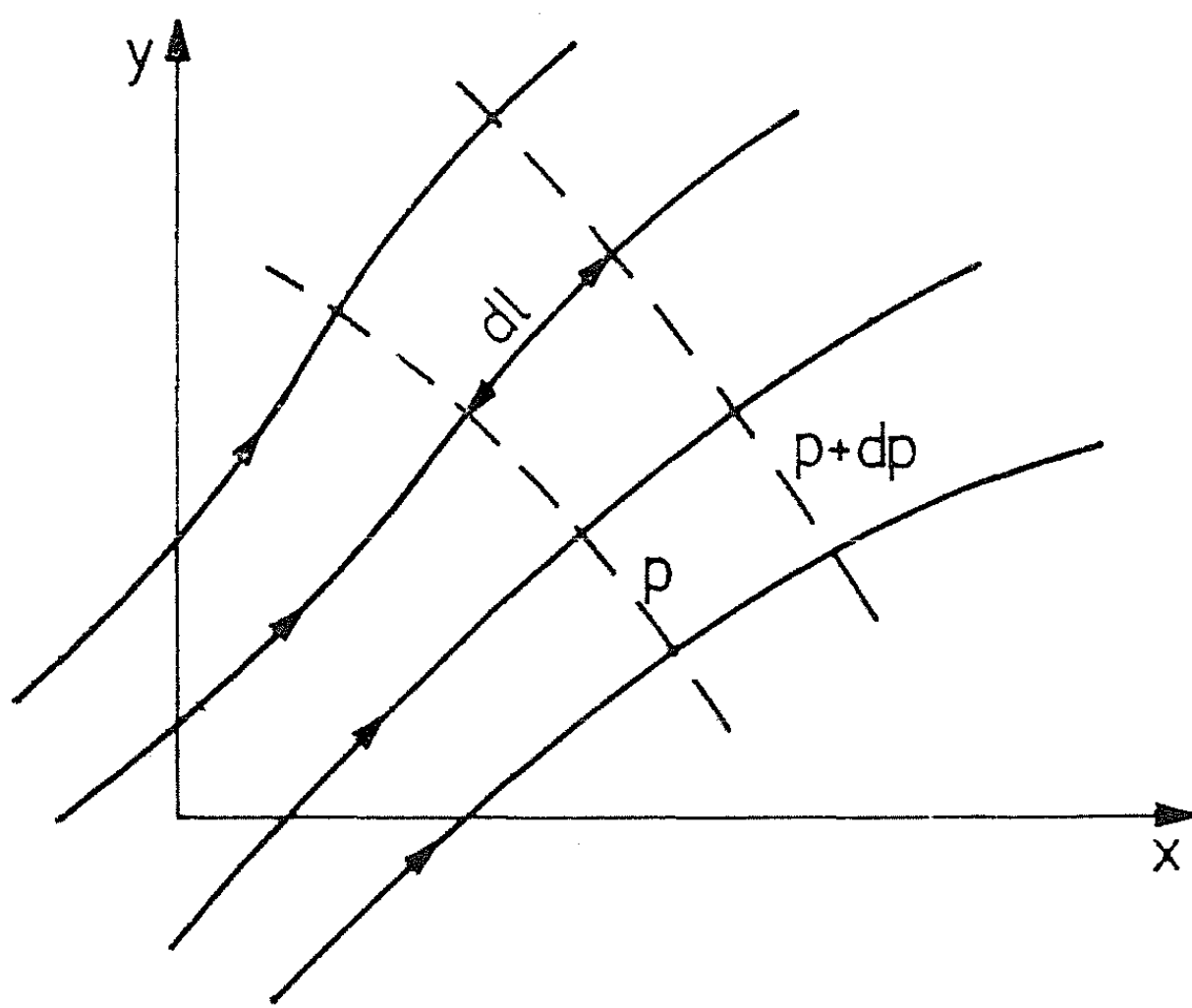


Sl. 4

znatno spremeni v smeri osi x ali y . Pri dani tipični hitrosti v je razmerje med vztrajnostno in strižno silo, katerega meri izraz $\rho v d^2/(\eta l)$, ob majhnem d tudi majhno, tako da velja enačba (2). Hitrost v odvisnosti od z ima povsod isto obliko kakor pri Poiseuillovem toku $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) = \mathbf{v}_0(x, y) \cdot f(z)$. Pri tem pomeni $\mathbf{v}_0$ kar poprečno hitrost po reži, če je $f(z)$ normiran. Velja

$$\mathbf{v}_0 = Q/d = - (d^2/12\eta l) dp/dl \quad \text{in} \quad \mathbf{v}_0 = - (d^2/12\eta l) (\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, 0).$$

To je razvidno s slike 5, ki kaže tokovnice in črte enakega tlaka. Vidimo, da je za smeri x in y tlak hitrostni potencial, kakor pri gibanju neviskozne tekočine brez vrtnčenja, saj imamo iste zveze $\nabla^2 p = 0$, $\mathbf{v}_0 = -\text{konst.} \nabla p$. Komponenta vektorja vrtnčenja, pravokotna na ravnino x, y , je zanemarljiva, komponente, paralelne tej ravnini, pa so vobče velike. To pa velja seveda le v razdaljah od sten profilov, ki so dosti večje od d , da je spreminjanje hitrosti dovolj počasno.



Sl. 5

Na tej osnovi je zgrajen znani Pohlov aparat za demonstracijo tokovnic. Voda teče zaradi teže med dvema vertikalnima šipama, med kateri polagamo ploščate profile. Na vrhu spuščamo v vodo črnilo skozi odprtine v enakih razmikih v vodoravni smeri. Prameni črnila, ki teče skupaj z vodo, ponazarjajo tokovnice. Vse skupaj projiciramo. Slika, ki jo dobimo, ustreza dvodimenzionalnemu potencialnemu toku tekočine okrog danih profilov.

Rešitve enačbe (2) v treh dimenzijah so različne od onih pri potencialnem toku, saj gre za vrtnčenje tekočine. Pri krogli na primer, ki jo obliva zelo viskozna tekočina, je hitrostna porazdelitev bistveno

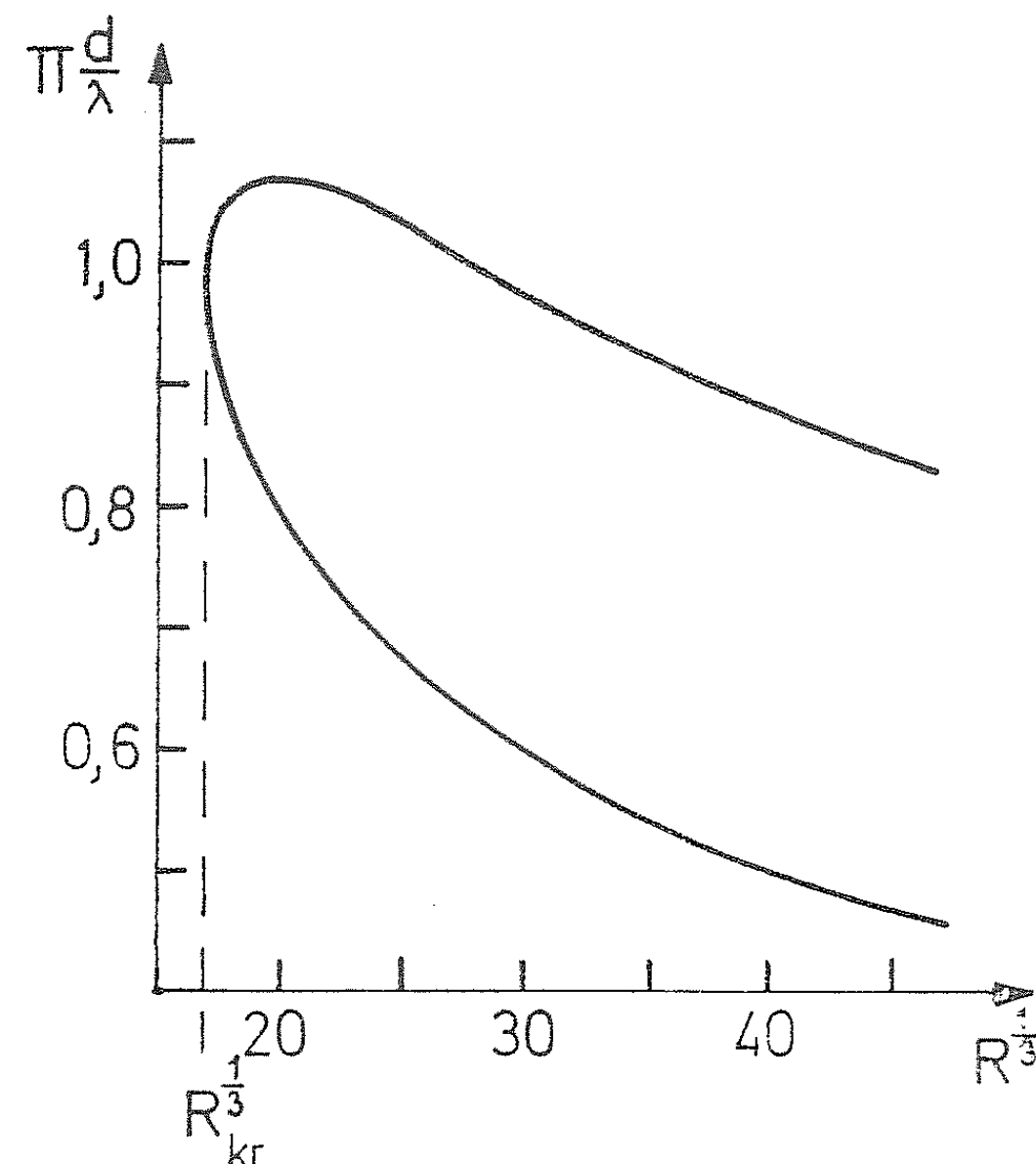
drugačna od porazdelitve, ki sledi iz hitrostnega potenciala za neviskozno tekočino, čeprav sta si obe kvalitativno in na prvi pogled podobni. Predvsem pada vpliv krogle pri rešitvi enačbe (2) z razdaljo dosti počasneje kakor pri rešitvi za potencialni tok.

Stabilnost paralelnega toka

Paralelni tok, s katerim smo se ukvarjali na začetku, je le ena — posebno preprosta — rešitev enačbe (1). Če bi imeli paralelen tok na začetku, potem bi takšno gibanje pri nespremenjenih robnih pogojih obstajalo tudi nadalje. V praksi takšnega toka ne moremo popolnoma realizirati. Stene ali cevi niso neskončno dolge in nastopajo pojavi na robu. Nadalje stene niso popolnoma gladke ali paralelne, pa tudi eksperimenta nikoli ne začnemo s stacionarnimi razmerami. Vprašanje je, kako vplivajo odstopanja od paralelnega toka na časovni potek gibanja tekočine. Iz izkušnje že vemo, da postaja pri majhnih Reynoldsovih številih tok vse bolj laminaren, kar predstavlja rešitev enačbe (2). Pri velikih Reynoldsovih številih pa postane tok — pri nespremenjenih robnih pogojih — vse bolj nestacionaren in nastopi turbulenca.

Te pojave poskušamo analizirati s stališča stabilnosti paralelnega toka proti različnim motnjam. V paralelnem toku s hitrostjo $\mathbf{v}_0(z)$ ustvarimo motnjo s hitrostjo $\mathbf{v}'$. Tako je dejanska hitrost tekočine $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$ in tlak $p = p_0 + p'$. Pri idealnih nespremenjenih robnih pogojih zasledujemo, kako se ta motnja časovno razvija. Strogo analizirati je možno le infinitezimalne motnje. Te dajo preko enačbe (1) za $\mathbf{v}$ linearno enačbo za $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)$, v kateri je $\mathbf{v}_0(z)$ od časa neodvisen in igra vlogo parametra. Skupaj z η in razmikom sten d v robnem pogoju definira $\mathbf{v}_0$ Reynoldsovo število problema. Navadno izberemo motnjo v obliki

sinusnega vala z dano valovno dolžino, smerjo razširjanja in smerjo polarizacije, če gre za transversalne valove. Z upoštevanjem vseh možnosti vrednosti za te parametre dobimo kompletan sistem valovanj za poljubno infinitezimalno motnjo. Pokaže se, da je posamezno valovanje kot rešitev enačbe za v' lahko dušeno ali pa njegova amplituda s časom narašča, odvisno pač od Reynoldsovega števila R . Mejo stabilnosti podaja R , pri katerem se pojemanje amplitude sprevrže v naraščanje. Najnižja vrednost R , ki ustreza meji stabilnosti, je kritično Reynoldsovo število R_{kr} . Za paralelni tok med stenama so posebno nevarna valovanja, ki se razširjajo v smeri toka in imajo vektor vrtnčenja transversalen in vzporeden stenam. Slika 6. kaže mejo stabilnosti za ta primer v povezavi z valovno dolžino λ . Območje znotraj krivulje je nestabilno, zunaj pa stabilno. Eksperimenti s tokom ob steni (v mejni plasti) so kvantitativno potrdili obstoj valovanj, ki jih napoveduje teorija infinitezimalnih motenj. Pogoji za te eksperimente so morali biti skrbno izbrani, da so bile vse nezaželene motnje zanemarljive v primeri z majhno motnjo, ki so jo raziskovali.



Sl. 6

Če amplituda motnje narašča, sčasoma ne velja več linearna enačba za infinitezimalno motnjo v' . Domnevajo, da se naraščanje motnje zaradi nelinearnih efektov ustavi, novi tok pa je še vedno laminaren, vendar različen od Poiseuillovega in tudi nestacionaren. Z rastočim R gre tok skozi več takšnih faz, preden postane turbulenten. Eksperimenti potrjujejo, da zares ni ostrega prehoda med Poiseuillovim in turbulentnim tokom. Motnja tudi potuje vzdolž toka in lahko uide iz končno dolge cevi, preden znatno spremeni gibanje tekočine. Včasih celo vidimo, da se v tekočini pojavljajo omejena turbulentna področja, ki rastejo in potujejo s tokom. Tok na izbranem mestu je tako nekaj časa laminaren in nekaj časa turbulenten. Teh področij je tem več, čim nižje v toku opazujemo in čim večje je Reynoldsovo število. Če so področja posejana dovolj na gosto, se združijo in tok postane povsem turbulenten. Večine zgornjih pojavov, ki so značilni za prehod v turbulenco, ne znamo strogo obravnavati. Rezultati teorije infinitezimalnih motenj, ki pokažejo sicer na obstoj nestabilnosti pri gibanju tekočine, so pomembni načelno, večini realističnih primerov pa ne ustrezajo. V realističnih primerih so motnje, s katerimi imamo opraviti, končnih velikosti in zato imajo eksperimentalna — empirično dobljena — kritična Reynoldsova števila R_{rk}' nekoliko drugačen pomen kakor pri infinitezimalnih motnjah. Za vsak primer, za katerega je $R < R_{kr}'$, je motnja vzdolž toka dušena in postane tok laminaren, čeprav je motnja še tako velika. Za $R > R_{kr}'$ pa motnja narašča, če je pri danem številu R dovolj velika in za to je potrebna tem večja motnja, čim manjši je R . Če so na začetku motnje dovolj majhne — in cevi niso predolge —, je tako mogoče ohraniti laminarni tok tudi pri zelo velikih R . To se je posrečilo za primer okroglih cevi, kjer je $R_{kr}' = 1600$, celo do vrednosti za R okoli 50000.

Turbulenca

Prehod laminarnega toka v turbulentni tok se da dobro opazovati v cevi, v katero spuščamo hkrati z vodo tanek curek črnila. Pri laminarnem toku dobimo vzdolž cevi lepo ohranjen pramen črnila, pri turbulentnem pa se pramen začne zvijati in se pri močni turbulenci pomeša po vsem preseku cevi. Za takšno polno razvito turbulenco je značilno neurejeno in nestacionarno gibanje posameznih delov tekočine ob močnem vrtnčenju. V danem času hitrost v močno odstopa od svojega časovnega povprečja v_p , katerega velikost se v splošnem spreminja prečno na smer toka $v_p = v_p(z)$. Ker turbulence ne znamo strogo

obravnavati, si pomagamo s približnimi modeli. Tako se glede strižnih sil poslužimo delne analogije s plinom. Predstavljamo si, da se posamezni deli — kepe — tekočine gibljejo tako, da imajo poleg hitrosti v_p še hitrost neurejenega gibanja $v'' : v = v_p + v''$. Skozi ploskev v tekočini, ki je paralelna s tokom na mestu z , prihajajo kepe z desne strani s hitrostjo v smeri toka $v_p(z + l) = v_p(z) + l \cdot dv_p/dz$ in z leve s hitrostjo $v_p(z - l)$. Pri tem je l karakteristična dolžina, ki igra vlogo proste poti. Tolmačimo jo lahko kot pot, ki jo posamezna kepa napravi od »rojstva« do razpada, ko se njeni deli pomešajo z okoliško tekočino. Če je prečna hitrost gibanja kep v_z'' , ima gostota toka skozi ploskev v izbrani smeri velikostno stopnjo $\rho v_z''$ in je gostota toka gibalne količine pri upoštevanju gibanja v obeh smereh $2\rho v_z'' l \cdot dv_p/dz$. To je enako strižni napetosti $\sigma' = \eta' \cdot dv_p/dz$, tako da ima ustrezna viskoznost η' velikostno stopnjo $\rho v_z'' l$. Pri plinih je v_z'' kar hitrost termičnega gibanja in je podana s temperaturo. Pri turbulentni tekočini pa jo lahko ocenimo. Dve kepi tekočine, ki iz nasprotnih strani vstopita v dano tekočinsko plast, se gibljeta druga proti drugi v smeri toka z relativno hitrostjo $2l \cdot dv_p/dz$. Zaradi ohranitvenega izreka za nestisljivo tekočino moremo pričakovati, da bodo imele prečne hitrosti isto velikostno stopnjo, torej $v_z'' \approx l \cdot dv_p/dz$. Za prosto pot je iz dimenzijskih razlogov mogoče pričakovati, da je nedaleč od stene sorazmerna z razdaljo od stene z : $l = kz$, kjer je k brezdimenzionalna konstanta z empirično vrednostjo okrog 0,4. Za neprevelik interval z , v katerem pa se v_p sicer znatno spremeni, je tudi smiselno predpostaviti konstantno strižno napetost σ' . Iz zveze $\text{konst.} = \sigma' = \rho k^2 z^2 (dv_p/dz)^2$ dobimo z $v_* = (\sigma'/\rho)^{1/2}$

$$v_p = v_* (5,751 \log_{10}(\rho z v_*/\eta) + 5,5) \quad (4)$$

Pri tem je integracijska konstanta določena empirično za tok po okrogli cevi, formula pa je tudi drugače smiselno prirejena. Izraz ne velja za majhne z , ker divergira. V zelo tanki plasti ob steni pa je tok tudi laminaren in tam velja $v_p = v = \rho z v_*^2/\eta$. Izraz (4) vsaj kot približek ustreza dejanski porazdelitvi hitrosti tudi v večjih razdaljah od stene cevi. Pri turbulentnem toku je hitrost v_p po prerezu dosti bolj konstantna kakor pri laminarnem toku, saj se tekočina v prečni smeri močno meša. Tik ob steni, kjer mešanja ni, hitrost zato zelo hitro pada. Strižne sile so pri turbulentnem toku za nekaj redov velikosti večje kot pri Poiseuillovem toku. Kakor je razvidno iz enačbe, ki povezuje σ' in dv_p/dz , tudi zveza med strižno silo in poprečno hitrostjo toka ali med tlačno razliko in pretokom ni več linearna, temveč približno kvadratna.

LITERATURA

- [1] L. Prandtl, *Stroemungslehre*, Braunschweig, Vieweg & Sohn 1957.
- [2] G. K. Batchelor, *Fluid Dynamics*, Cambridge, University Press 1970.
- [3] *Theory of Laminar Flows*, zbornik, Princeton, University Press 1964.
- [4] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, New York, Pergamon Press 1959.
- [5] *Encyclopedia of Physics*, Volume VIII/1, Berlin, Springer Verlag 1959.

UPOR IN VZGON V TEKOČINAH

MITJA ROSINA

UDK 532.58

Pri gibanju teles v tekočini z razmeroma majhno viskoznostjo vpeljemo pojem mejne plasti. Nato izračunamo obliko mejne plasti, če teče tekočina ob tanki plošči. Ob telesu nastaja vrtinčenje, ki difundira skozi mejno plast. Ocenimo upor in ugotavljamo, kako je odvisen od oblike telesa in od Reynoldsovega števila. Vzgon izrazimo s cirkulacijo okrog telesa. Za opis cirkulacije okoli letalskega krila uporabimo hipotezo Žukovskega.

DRAG AND LIFT IN FLUIDS

The concept of boundary layer is introduced for the problem of a solid body moving in a fluid with low viscosity. The shape of the boundary layer is calculated for the case of flow along a thin plate. The source of vorticity at the body and the diffusion of vorticity through the boundary layer are described. The drag on the body is estimated and its dependence on the form of the body and on the Reynolds number is discussed. The lift is expressed in terms of the circulation around the body. The circulation around an aerofoil is described using the Zhukovskii hypothesis.

1. Mejna plast ob telesih, ki se gibljejo v tekočini

Obravnavali bomo gibanje teles skozi tekočino z razmeroma majhno viskoznostjo. Drugače rečeno, hitrost in velikost teles naj bosta dovolj veliki, da bo Reynoldsovo število $R = \rho v l / \eta$ mnogo večje kot 1. Hitrost in velikost teles pa naj ne bosta preveliki ($R \lesssim 2000$), da se bomo smeli omejiti na pretežno laminarno gibanje. Namesto da bi govorili o gibanju telesa skozi tekočino, bomo običajno raje vzeli, da teče tekočina mimo mirujočega telesa.

Če ob začetnem času ni bilo vrtincev, opišemo gibanje neviskozne tekočine s potencialnim tokom brez vrtinčenja ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$). Pri takem gibanju je ob telesih normalna komponenta hitrosti enaka nič, $v_n = 0$; tekočina ne teče v telo. Tangentna komponenta hitrosti pa ni nič, $v_t \neq 0$; tekočina drsi ob telesu. Za resnična telesa pa moramo zahtevati kot mejni pogoj, da ni drsenja, $v_t = v_n = 0$. Opis s potencialnim tokom je torej približek in ga je treba korigirati vsaj v neposredni bližini telesa. V ta namen so vpeljali pojem *mejne plasti*. Zunaj mejne plasti opišemo gibanje kot potencialno, znotraj mejne plasti pa hitrost zvezno preide od vrednosti za potencialno gibanje do vrednosti $\mathbf{v} = 0$ ob površini telesa. Znotraj mejne plasti torej gibanje ni potencialno, $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$. Medtem ko zunaj mejne plasti zanemarimo viskoznost, je znotraj mejne plasti viskoznost bistvena, pa naj bo še tako majhna. Debelina mejne plasti je odvisna od viskoznosti; čim bolj viskozna je tekočina, tem debelejša je mejna plast. Pri $R \sim 1$ je debelina mejne plasti že istega velikostnega reda kot dimenzija telesa in delitev hitrostnega polja na potencialno polje in mejno plast ni več smiselna.

Upor in vzgon telesa bomo računali s pomočjo informacije o mejni plasti. Z vpeljavo mejne plasti razdelimo študij hidrodinamskega problema na tri ločene stopnje:

1) Izračunamo potencialno gibanje okrog danega telesa. Pri tem uporabimo enačbo, da v neviskozni tekočini ni vrtincev, če jih v začetku ni bilo, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, ter kontinuitetno enačbo $\nabla(\rho \mathbf{v}) = -\partial \rho / \partial t$. Upoštevamo le mejni pogoj za normalno komponento hitrosti $v_n = 0$.

2) Izračunamo hitrostno polje v mejni plasti. Gibanje v mejni plasti ni zelo odvisno od oblike površine, če je površina gladka in enakomerna in če je mejna plast tanka. Tipično sliko bomo dobili s študijem toka ob polravnini.

3) Ugotovimo, kje se za telesom odlepi mejna plast od njega ter kakšna sled ostaja za telesom. Sled imenujemo tisto tanko plast ali široko območje za telesom, kjer je telo gibanje tekočine toliko zmotilo, da se bistveno razlikuje od potencialnega. Če v sledi za telesom nastajajo vrtinci, se upor močno poveča.

Opišimo stacionarno gibanje nestisljive tekočine ob mirujoči plošči. Vzemimo polravnino, ki je vzporedna z oddaljenimi tokovnicami in katere sprednji rob je pravokoten na tokovnice. Pri taki plošči je gibanje neodvisno od koordinate z in tudi $v_z = 0$, zato zadošča opis v dveh dimenzijah x, y . Zunaj mejne plasti je hitrost konstantna, $v_x = u$, $v_y = 0$. Predpostavljamo, da je mejna plast tanka in se hitrost hitro spreminja prečno na ploščo (v smeri osi y), vzdolž plošče (os x) pa se spreminja počasi. Navier-Stokesovo enačbo in kontinuitetno enačbo zapišemo v obliki

$$v_x \cdot \partial v_x / \partial x + v_y \cdot \partial v_x / \partial y = - (1/\rho) \partial p / \partial x + \nu \partial^2 v_x / \partial y^2 \quad (1)$$

$$v_x \cdot \partial v_y / \partial x + v_y \cdot \partial v_y / \partial y = - (1/\rho) \partial p / \partial y + \nu \partial^2 v_y / \partial y^2 \quad (2)$$

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0 \quad (3)$$

V prvi enačbi smo zanemarili člen $\nu \partial^2 v_x / \partial x^2$, ker je $\partial^2 v_x / \partial x^2 \ll \partial^2 v_x / \partial y^2$, saj se v_x počasneje spreminja vzdolž plošče kot prečno na ploščo. Podobno smo v drugi enačbi izpustili $\nu \partial^2 v_y / \partial x^2$.

Ker je zunaj mejne plasti hitrost konstantna, je po Bernoullijevem teoremu konstanten tudi tlak, $p = p_0$. Enačba (2) pove, da je $\partial p / \partial y$ zelo majhen, saj so vsi členi v enačbi (2) manjši od členov v enačbi (1) za red velikosti v_y / v_x . Zato smemo privzeti, da je tlak kjerkoli v mejni plasti isti kot zunaj mejne plasti: $p(x, y_{zun}) - p(x, y_{not}) \approx (\partial p / \partial y) \Delta y \approx 0$, saj sta $\partial p / \partial y$ in debelina mejne plasti $\Delta y \approx (y_{zun} - y_{not})$ oba majhna. Torej smemo vzeti povsod $p(x, y) = p_0 = \text{konst.}$ in člen z odvodom tlaka v enačbi (1) odpade. Enačbi (1) in (3) uporabimo za izračunanje hitrostnega polja. Tu ne bomo podrobno računali, ampak bomo le sklepali o debelini mejne plasti.

Na obliko mejne plasti lahko sklepamo, če napravimo transformacijo $x' = k^2 x$, $y' = ky$, $t' = k^2 t$, $v_x' = v_x$, $v_y' = (1/k) v_y$. Enačbi (1) in (3) dobita obliko

$$v_x' \cdot \partial v_x' / \partial x' + v_y' \cdot \partial v_x' / \partial y' = \nu \partial^2 v_x' / \partial y'^2 \quad (1')$$

$$\partial v_x' / \partial x' + \partial v_y' / \partial y' = 0 \quad (3')$$

To je isti sistem diferencialnih enačb kot (1), (3); tudi mejni pogoji so isti: $v_x'(x', 0) = 0$, $v_x'(x', \infty) = u$, $v_y'(x', 0) = v_y'(x', \infty) = 0$. Zato je tudi rešitev ista in velja

$$v_x'(x', y') \equiv v_x(k^2 x, ky) = v_x(x, y)$$

Funkcija v_x je torej homogena funkcija ničte stopnje spremenljivk $\sqrt{x}$ in y in jo lahko zapišemo kot funkcijo ene same spremenljivke $v_x = f(y/\sqrt{x})$. Geometrijsko mesto točk, v katerih je $v_x = \text{konst.}$, je parabola: $y/\sqrt{x} = \text{konst.}$ Če rob mejne plasti definiramo kot geometrijsko mesto točk, kjer je $v_x = 0,99 u$, dobimo za obliko mejne plasti parabolo $y = 4,9 \sqrt{\nu x / u}$ (koeficient 4,9 nam da numerični račun funkcije f). Ta izraz lahko štejemo kot debelino mejne plasti; mejo 99% polne hitrosti smo sicer izbrali samovoljno, toda drugačna izbira (recimo 90%) bi dala isto obliko in isti red velikosti za debelino mejne plasti.

Debelino mejne plasti lahko karakteriziramo tudi z odmikom δ oddaljenih tokovnic od nemotene lege. Ker je ob plošči hitrost tekočine manjša, steče ob njej manj tekočine in se morajo vse oddaljene tokovnice odmakniti, da napravijo prostor za presežek tekočine. Ob plošči širine h teče do neke oddaljenosti y_0 tok $\int_0^{y_0} v_x h dy$ namesto $\int_0^{y_0} u h dy$. Oddaljene

tokovnice se zato odmaknejo, tako da je $u h \delta = \int_0^{y_0} (u - v_x) h dy$, torej je $\delta = \int_0^\infty (1 - v_x/u) \cdot dy = \sqrt{x} \int_0^\infty (1 - f(y/\sqrt{x})/u) \cdot dy/(\sqrt{x})$. Numerični račun da parabolo $\delta = 1,72 \sqrt{\nu x/u}$. Če ima plošča dolžino l ($0 \leq x \leq l$), lahko za »debelino« mejne plasti ob zadnjem robu plošče zapišemo $\delta/l = 1,72/\sqrt{R}$, kjer je Reynoldsovo število $R = lu/\nu$.

Pokažimo, da predstavlja telo v gibajoči tekočini (ali telo, ki se giblje skozi tekočino) izvir vrtinčenja. Vrtinčenje (»gostoto vrtincev«) definiramo kot $\xi = \nabla \times \mathbf{v}$. Enačbo gibanja za ξ dobimo, če napravimo na obeh straneh Navier-Stokesove enačbe operacijo rotor. Za $\nabla \times \mathbf{v}$ zapišemo povsod ξ . Upoštevamo, da je rotor gradienta tlaka nič, saj je rotor gradienta vedno nič, prav tako je rotor zunanje sile nič za konzervativne sile. Zapišimo izraz $\nabla \times [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] = (\mathbf{v} \nabla) (\nabla \times \mathbf{v}) + [(\nabla \times \mathbf{v}) \nabla] \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$. Če se omejimo na dvodimenzionalno gibanje, je drugi člen nič, ker ima $(\nabla \times \mathbf{v})$ le komponento v smeri osi z , $\partial \mathbf{v} / \partial z$ pa je nič. Omejili se bomo tudi na nestisljive tekočine, za katere je tretji člen (divergenca hitrosti) nič. Potem dobimo enačbo gibanja

$$\partial \xi / \partial t = - (\nabla \nabla) \xi + \nu \Delta \xi \quad (4)$$

Člen na levi in prvi člen na desni dasta skupaj substancialni odvod $d\xi/dt = \nu \Delta \xi$. Dobili smo difuzijsko enačbo. Vrtinčenje nosi tekočina s seboj (konvekcija vrtincev), obenem se vrtinci širijo z difuzijo.

Iz plošče izvira torej toliko vrtinčenja, kot ga odteka v sledi za ploščo:

$$\text{izvir} = \int_0^\infty \xi v_x h dy \approx (u/\delta) \cdot (u/2) \cdot 2h\delta = u^2 h$$

Izvir je v tem primeru neodvisen od dolžine plošče, saj v izrazu ne nastopa l . Vrtinčenje torej nastaja na čelu plošče, nato pa odteka nazaj in difundira vstran. Pri difuziji je značilno, da se motnja širi sorazmerno s $\sqrt{t}$, in res je širina mejne plasti sorazmerna s $\sqrt{x/u}$.

2. Upor

Upor imenujemo silo, s katero deluje tekočina na telo v smeri gibanja tekočine (oz. v nasprotni smeri gibanja telesa). Izračunajmo najprej upor tanke plošče. Strižna napetost na površini je $\sigma_{12}(x) = \rho \nu [\partial v_x(x, 0)/\partial y + \partial v_y(x, 0)/\partial x]$. Drugi člen smemo zanemariti, saj je hitrost v_y majhna in vse količine se počasi spreminjajo v smeri x (razen ob sprednjem robu); prvi člen ocenimo z $\partial v_x/\partial y \approx u/\delta$. Upor na obeh straneh plošče torej znaša $F = 2 \int \sigma_{12}(x) h dx \approx 2\rho \nu (u/\delta) hl = 2\rho \sqrt{\nu l u^3} \quad h = 4hl(\rho u^2/2)/\sqrt{R}$. Točen račun da $F = 2,66 hl(\rho u^2/2)/\sqrt{R}$. Običajno pišejo $F = k S \rho u^2/2$, kjer je k koeficient upora (v našem primeru je $k = 2,66/\sqrt{R}$), S pa je ploščina hl .

Podoben izraz dobimo pri podolgovatih telesih, ki niso čisto tanka. Za S vzamemo spet ploščino v vzdolžni smeri, koeficient upora pa je večji. Razlog je deloma v tem, da je pot tekočine ob širšem telesu daljša in hitrost ob bokih povečana, pa se mejna plast bolj odebeli in je za telesom debelejša sled.

Zgornji izraz za upor lahko razložimo tudi z bilanco energije. Če se telo premakne za razdaljo D , napravi za seboj sled dolžine D , širine h in debeline 2δ . V sledi se tekočina giblje za telesom s hitrostjo $\sim u$, prej pa je mirovala. Telo torej odda tekočini kinetično energijo $2Dh\delta \rho u^2/2$ in opravi delo $FD = 2Dh\delta \rho u^2/2$. Iz tega dobimo za upor isto oceno kot zgoraj: $F = 2hl(\rho u^2/2)/\sqrt{R}$ (ker gre le za oceno, faktor 2 ni pomemben; točen račun da pravi rezultat).

Čim debelejša je sled za telesom, tem večji je upor. Zato narašča upor z debelino telesa. Sled je razmeroma tanka, če se mejna plast nad telesom in mejna plast pod telesom odlepita

od telesa šele čisto zadaj in se združita v sled. Če pa je telo zadaj oblo, odsekano ali celo nepravilno, se mejni plasti odlepita že pred koncem telesa in med njima ostaja zelo široka sled »mrtve vode« oz. vrtincev (širina $\Delta \gg 2\delta$). Zato porabi gibajoče se telo pri premiku D energijo $FD = Dh\Delta \rho u^2/2$ namesto $Dh 2\delta \rho u^2/2$ in je upor večji. Pri širokem telesu vzamemo v izrazu $F = k'S' \rho u^2/2$ za S' raje prečni prerez telesa (pravokoten na smer gibanja) kot vzdolžno ploščino. Pri debelem telesu (zlasti če je zadaj zaobljeno ali odsekano) je Δ približno enak prečni širini telesa ($S' = h\Delta$), če je hitrost dovolj velika. Koeficient upora je tedaj reda velikosti $k' \sim 1$. Če hočemo imeti čim manjši upor, mora imeti telo na zadnji strani konico z ostrim kotom, da se mejni plasti na obeh straneh odlepita šele na konici. Pač pa je na čelu ugodno imeti oblo ploskev, kajti konica na sprednji strani bi zaradi hitrih sprememb hitrosti lahko povzročila dodatne vrtince (turbulenco). V našem primeru (tanka plošča) smo sicer imeli oster rob, a to pri idealiziranem računu ni motilo; resnični tok pa bi lahko postal nestabilen. Za telo, ki je razmeroma tanko in dolgo ter je spredaj zaobljeno in zadaj koničasto, pravimo, da ima aerodinamično obliko; za tako telo je upor razmeroma majhen.

Pri dosedanjih izpeljavah smo predpostavljali laminaren tok, (razen morda v široki sledi za telesom). Kvalitativni zaključki so podobni tudi, kadar imamo zaradi velike hitrosti turbulentno mejno plast. Ker se pri turbulentnem gibanju prenaša vrtinčenje od telesa v okolico s konvekcijo, ki je hitrejša od difuzije, je mejna plast debelejša in upor v splošnem večji. Če je mejna plast turbulentna (in tudi če je le sled turbulentna), lahko dobimo s študijem hidrodinamike le kvalitativno sliko hitrostnega polja in splošno razumevanje pojavov, kvantitativnega računa pa ne zmoremo. Zakoni podobnosti pa veljajo tudi v primeru turbulentnega gibanja in lahko določimo koeficient upora kot funkcijo Reynoldsovega števila empirično na modelih.

3. Vzgon

Dinamični vzgon imenujemo silo, ki deluje pravokotno na smer gibanja tekočine oz. telesa. Vzgon bomo izračunali iz bilance gibalne količine. Telo naj miruje in obdajmo ga s poljubno namišljeno ploskvijo, ki je dovolj daleč, da ni treba upoštevati vpliva mejne plasti ter viskoznosti in da je razlika hitrosti od nemotene vrednosti u zelo majhna. Za gostoto toka gibalne količine je zapisano v uvodnem predavanju:

$$g_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}, \quad p = p_0 - \frac{1}{2} \rho (v^2 - u^2)$$

Na telo deluje tolikšna sila, kolikor gibalne količine priteče na sekundo v namišljeno zaključeno ploskev:

$$\mathbf{F} = - \oint \mathbf{g}_{ij} d\mathbf{S} = - \oint \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{S}) - \oint (p_0 - \frac{1}{2} \rho (v^2 - u^2)) d\mathbf{S}$$

Pišimo $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{v}$ in zanemarimo člen $(\Delta \mathbf{v})^2$, ki je v veliki razdalji od telesa poljubno majhen.

$$\mathbf{F} = - \mathbf{u} \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} - \oint \rho \Delta \mathbf{v} (\mathbf{u} d\mathbf{S}) - p_0 \oint d\mathbf{S} + \oint \rho (\mathbf{u} \Delta \mathbf{v}) d\mathbf{S}$$

Upoštevajmo, da je $\oint d\mathbf{S} = 0$

$$\begin{aligned} \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} &= 0 \text{ (dotok tekočine v zaključeno ploskev je v stacionarnem stanju nič)} \\ - \Delta \mathbf{v} (\mathbf{u} d\mathbf{S}) + (\Delta \mathbf{v} \mathbf{u}) d\mathbf{S} &= - \mathbf{u} \times (\Delta \mathbf{v} \times d\mathbf{S}) \\ \mathbf{F} &= - \mathbf{u} \times \oint \rho \Delta \mathbf{v} \times d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Sila je torej pravokotna na smer gibanja.

V nadaljnji izpeljavi se bomo zaradi enostavnosti omejili na »dvodimenzionalni« primer; vzeli bomo telo, ki ima v smeri osi z konstanten profil in je v smeri osi z dosti daljše (širina h) kot v smeri gibanja. Tej zahtevi približno zadošča npr. letalsko krilo. Vzemimo

tudi, da je $\rho = \text{konst.}$ Izraz pod integralom ima smer osi z , ker sta oba vektorja $\mathbf{v}$ in $d\mathbf{S}$ v ravnini (xy). Izrazu pod integralom smemo prištevati

$$\oint \rho \mathbf{u} \times d\mathbf{S} = \rho \mathbf{u} \times \oint d\mathbf{S}, \text{ saj je } \oint d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint \mathbf{v} \times d\mathbf{S} = \left(\int v_x h dy - v_y h dx \right) \mathbf{i}_3 = h \mathbf{\Gamma}$$

Pri tem je $\mathbf{\Gamma}$ cirkulacija v smeri osi z in je pri potencialnem toku neodvisna od integracijske poti, po kateri jo računamo. Zato je končni rezultat neodvisen od izbire namišljene ploskve, s katero smo obdali telo za izračun bilance gibalne količine. Za vzgon dobimo

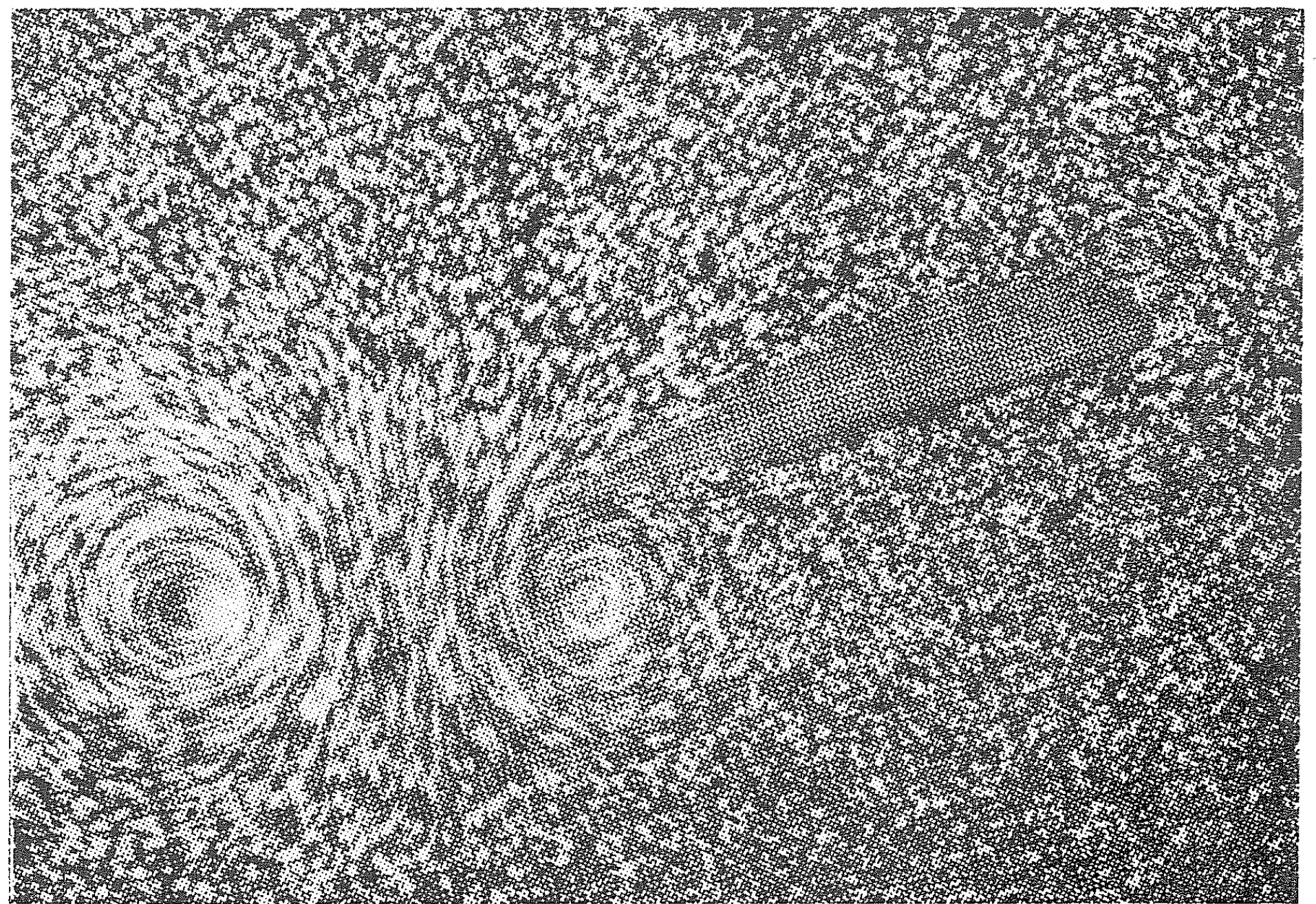
$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{u} \times \mathbf{\Gamma} h$$

Zanimivo je, da je vzgon odvisen samo od cirkulacije okrog telesa. Posredno pa je seveda odvisen od podrobnosti toka ob telesu, saj le-ta določa, kolikšna je cirkulacija.

Cirkulacijo lahko dosežemo na dva načina:

1) Vrteče se telo (npr. valj) povleče za seboj še irotacionalno kroženje tekočine s konstantno cirkulacijo, ki je tolikšna, da tekočina ob površini telesa ne drsi.

2) Telo (npr. letalsko krilo), ki se glede na tekočino giblje nesimetrično, lahko sili tekočino k cirkulaciji. Vzemimo, da v začetku letalsko krilo miruje, cirkulacija je nič. Krilo se začne gibati s hitrostjo $— u$; ker se cirkulacija pri potencialnem gibanju ohranja, je v veliki razdalji cirkulacija še vedno nič. Vrtinčenje namreč pripotuje od telesa s konvekcijo in difuzijo šele v končnem času. Če je cirkulacija blizu krila nič, se pri poševni legi krila odlepi mejna tokovnica zgoraj in sicer že pred ostro konico. V tej točki je hitrost nič in jo imenujemo točko stagnacije.



Sl. 1. Vrtinca za modelom letalskega krila, ki je v začetku miroval, nato se nenadoma začel gibati s stalno hitrostjo in se spet nenadoma ustavil

Tok na spodnji strani teče okrog ostre konice navzgor, okrog vogala, se približa točki stagnacije in spet obrne nazaj. Tak tok doživi močan pojemek od konice proti točki stagnacije in zato ni stabilen. Nad konico krila se napravi vrtinec, spodnja mejna plast se odlepi že na konici. Ko tok odnese vrtinec, se tudi zgornja mejna plast odlepi šele na konici. Ker se cirkulacija v veliki razdalji ohranja (ostane nič), je vsota cirkulacije okrog krila in cirkulacije okrog vrtinca enaka nič. Vrtinec, ki ga odnese tok, je ravno pravšen, da ostane okrog krila takšna cirkulacija, da ima nastalo potencialno polje mejno tokovnico ravno od konice nazaj. Veljavnost tega mehanizma imenujejo *hipotezo Žukovskega*. Ta mehanizem je izredno važen, ker si telo kot letalsko krilo hkrati preskrbi potrebno cirkulacijo in zagotovi, da se obe mejni plasti odlepita skupaj šele na konici (majhen upor!).

Kadarkoli krilo spremeni hitrost, se pojavi za njim ustrezen vrtinec, tako da se cirkulacija okrog krila po hipotezi Žukovskega prilagodi zahtevi, da se mejna tokovnica odlepi od konice. Na sliki vidimo vrtinec, ki ostane za krilom pri pospeševanju od mirovanja do hitrosti $— u$ in pri zaviranju od $— u$ na 0.

LITERATURA

- [1] G. K. Batchelor: *Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge 1970.
- [2] L. Landau and E. Lifshitz: *Fluid Mechanics*, MIR, Moscow 1971.

VALOVANJE NA VODNI POVRŠINI

GABRIJEL KERNEL

UDK 532.59

Valovanje na vodni površini je obravnavano v linearnem približku. Razen splošnih lastnosti površinskih valov so opisani še nekateri disperzijski pojavi.

WATER WAVES

A brief account of the linear theory of water waves is given and some dispersive effects are treated.

Valovanje na vodni površini, ki ga v življenju razmeroma zgodaj srečamo, nam pogosto pomaga pri nazorni predstavi nekaterih valovnih pojavov. Tako delamo tudi v šoli, kjer s pomočjo vodnega valovanja ilustriramo pojave, kot so odboj, lom, interferenca in uklon. Tu se bomo omejili na nekatere značilnosti površinskih valov, ki so dostopne linearni obravnavi.

V prvem delu sestavka je splošna gibalna enačba tekočin poenostavljena za primere linearnih površinskih valov. Poiskane so samo nekatere posebne rešitve. (Za nekoliko splošnejšo obravnavo si je treba ogledati [1] ali [2], še več pa je v knjigah [3 — 5].) Te bodo zadoščale za ilustracijo nekaterih lastnosti in za izpeljavo disperzijske zveze, ki bo prišla prav v drugem delu sestavka, posvečenem nekaterim disperzijskim pojavom.

1. Poenostavljene gibalne enačbe za nihanja z majhnimi amplitudami in nekatere rešitve

Splošne gibalne enačbe so prekomplicirane, da bi jih lahko uporabili pri reševanju tako specifičnih problemov, kot je valovanje na vodni površini. Predvsem moti njihova nelinearnost. Problem si bomo poskusili poenostaviti tako, da bomo v gibalnih enačbah obdržali le tiste člene, ki se zdijo bistveni za površinsko valovanje. Posebno ugodno bi bilo, če bi smeli površinsko valovanje obravnavati kot potencialno gibanje in če bi za potencial veljala Laplaceova enačba. Oglejmo si, kdaj si lahko tako poenostavitev privoščimo!

Domnevamo, da stisljivost ni pomembna pri površinskih valovih in bomo predpostavili nestisljivost tekočine. Z zanemaritvijo viskoznosti se Navier-Stokesova enačba poenostavi v $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{g} - \nabla p / \rho - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Pri omejitvi na valovanje, pri katerem je amplituda nihanja a veliko manjša od valovne dolžine λ (ali ekvivalentno $v_0 \ll c$, pri čemer je c fazna hitrost valov), smemo člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ izpustiti in nam rotor Navier-Stokesove enačbe da $\partial (\nabla \times \mathbf{v}) / \partial t = 0$ (pospešek prostega pada namreč lahko opišemo z gradientom zemeljskega gravitacijskega polja). Od tod sledi $\nabla \times \mathbf{v} = \text{konst.}$, vendar je konstanta enaka nič, ker je poprečna vrednost hitrosti nič [1].

Torej je pri majhnih amplitudah nihanja ($a \ll \lambda$) valovanje na površini zelo blizu potencialnemu gibanju in smemo pisati $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. Iz kontinuitetne enačbe pa dobimo z upoštevanjem nestisljivosti $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, kar pripelje do Laplaceove enačbe

$$\Delta \Phi = 0 \quad (1)$$

Njene rešitve je treba poiskati.

Oglejmo si robne pogoje! V splošnem velja, da je povsod na meji normalna komponenta hitrosti tekočinskih delcev enaka normalni komponenti hitrosti mejne površine. Pri ravnem

dnu posode, v kateri je tekočina, je vertikalna komponenta hitrosti enaka nič. Določiti je še treba robni pogoj na prosti površini. V ta namen vpeljimo koordinatni sistem, ki ima izhodišče v površini tekočine, ko je ta v ravnovesnem stanju (koordinata z naj ima pod površino negativno vrednost). Omenjeni pogoj na površini se zdaj glasi $dZ/dt = 0$, pri čemer je $Z = z - \zeta(x, y, t) = 0$ enačba površine tekočine. Eksplicitno zapisan dobi pogoj obliko

$$dZ/dt = v_x \partial Z / \partial x + v_y \partial Z / \partial y + v_z \partial Z / \partial z + \partial Z / \partial t = -v_x \partial \zeta / \partial x - v_y \partial \zeta / \partial y + v_z - \partial \zeta / \partial t = 0$$

Pri omejitvi na majhne amplitude nihanja ($a \ll \lambda$) postaneta koeficienta pri v_x in v_y majhna ($\partial \zeta / \partial x, \partial \zeta / \partial y \ll 1$) in smemo ta dva člena zanemariti. Kinematični pogoj na površini se tedaj glasi

$$\partial \Phi / \partial z = \partial \zeta / \partial t \quad (2)$$

Za prosto površino potrebujemo še dodaten — dinamičen — pogoj, ki ga dobimo iz Bernoullijeve enačbe:

$$\partial \Phi / \partial t + v^2 / 2 + p / \rho + gz = f(t) \quad (3)$$

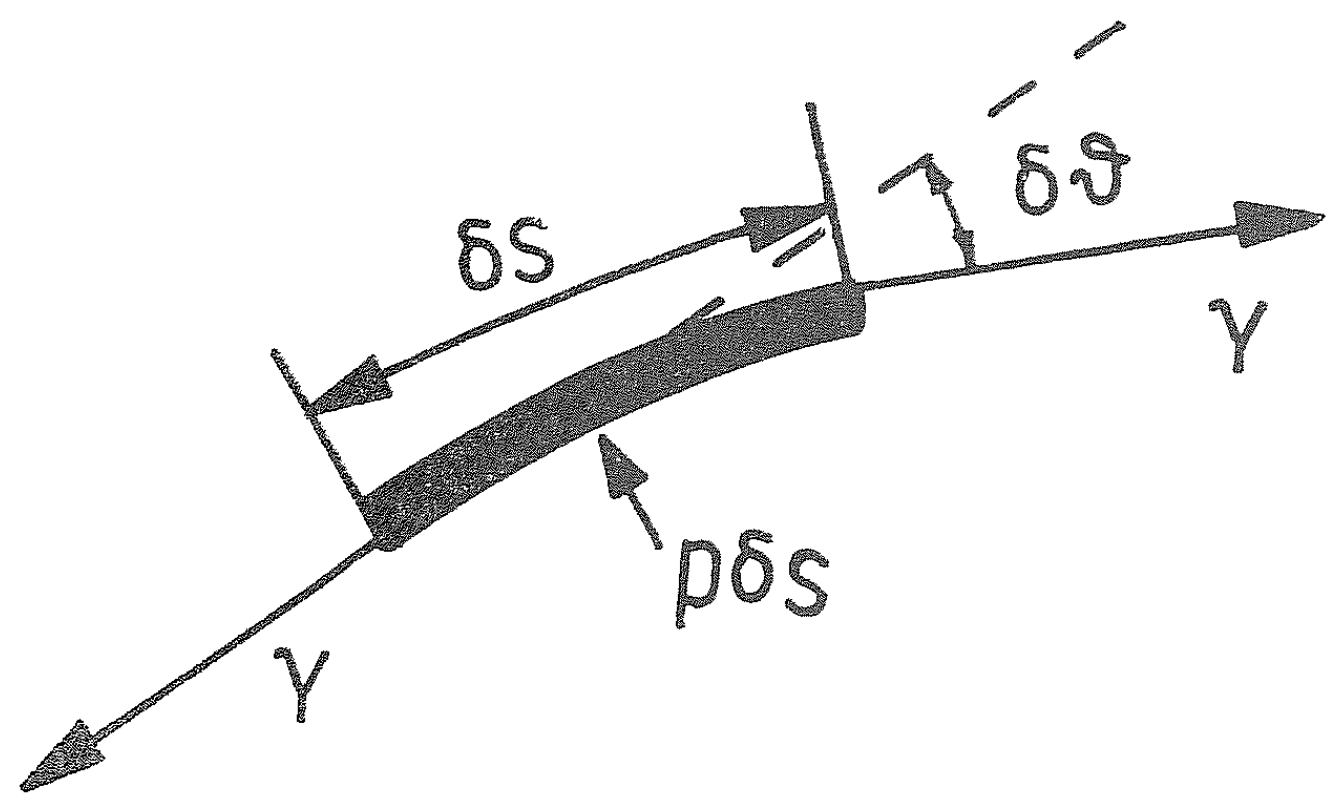
Označbe pomenijo: v in z sta hitrost in vertikalna koordinata tekočinskih delcev; p je tlak, ki ga bomo tukaj merili relativno glede na atmosferski tlak; ρ je gostota tekočine in g pospešek prostega pada. V enačbi (3) smemo člen $v^2/2$ izpustiti, če so amplitude valovanja majhne ($a \ll \lambda$).

Kot rezultat nas ne bo zanimal potencial, ampak hitrost, ki je podana z gradientom potenciala. Zato lahko potencialu prištejemo ali odštejemo poljubno funkcijo časa, ne da bi kaj spremenili rešitev za hitrost. Takó smemo vzeti $f(t) = 0$. Enačba (3), zapisana za območje tik pod površino, dobi obliko sledečega robnega pogoja

$$p = -\rho g \zeta - \rho (\partial \Phi / \partial t)_{z=\zeta} \quad (4)$$

Omejili se bomo na ravninski primer (odmik površine od ravnovesne lege naj ne bo odvisen od koordinate y : $z = \zeta(x, t)$). Razlika med tlakom tik pod površjem tekočine in med atmosferskim tlakom p , ki nastopa v enačbi (3), je odvisna od površinske napetosti γ . Za del preseka na sliki 1 velja sledeča ravnovesna enačba (površina je brez mase!) — $p \delta s + \gamma \delta \vartheta = 0$, kjer je pomen znakov razviden s slike. Iz $R \delta \vartheta = \delta s$ (R je krivinski radij) sledi $p = \gamma / R$. Pri majhnem nagibu površine [$(\partial \zeta / \partial x)^2 \ll 1$] je ukrivljenost kar enaka — $\partial^2 \zeta / \partial x^2$. Dinamični pogoj (4) lahko torej zapišemo

$$\gamma \partial^2 \zeta / \partial x^2 = \rho g \zeta + \rho \partial \Phi / \partial t$$



Sl. 1. Del preseka površine v ravnini xz .

Upoštevajoč kinematični pogoj na površini (2), dobimo z odvajanjem gornje enačbe po času končno tale robni pogoj za območje tik pod površino:

$$[\rho g \partial \Phi / \partial z + \rho \partial^2 \Phi / \partial t^2 - \gamma \partial (\partial^2 \Phi / \partial x^2) / \partial z]_{z=\zeta} = 0 \quad (5)$$

Omejili smo se na ravninski problem in bomo poiskali rešitve, ki nam dajo ravno valovanje v smeri koordinate x . Tekočina naj bo neomejena v smereh x in y ter naj bo povsod enako globoka. Zanimali se bomo torej za rešitve Laplaceove enačbe (1), ki imajo obliko $\Phi = f(z) \cos(kx - \omega t)$ ($k = 2\pi/\lambda$ je valovno število in $\omega/2\pi = 1/\tau$ je frekvenca valovanja).

Dinamični robni pogoj na površini (5) nam bo rabil za določitev zveze med ω in k . Upoštevati bo še treba robni pogoj na dnu $v_z(z = -h) = 0$. S takim nastavkom dobimo iz (1) enačbo

$$d^2f/dz^2 - k^2f = 0$$

ki ima rešitev $f(z) = c_1 \exp(kz) + c_2 \exp(-kz)$. Ob upoštevanju robnega pogoja na dnu se rešitev za potencial hitrosti glasi

$$\Phi = \Phi_0 \cosh k(h + z) \cos(kx - \omega t) \quad (6)$$

Iz robnega pogoja (5) pa dobimo zvezo med frekvenco in valovnim številom, če vstavimo vanj rešitev (6) za potencial in če upoštevamo, da je zaradi $k\zeta \ll 1$ tudi $\cosh k(h + \zeta) \approx \cosh kh$ (drugače povedano: robni pogoj vzamemo pri $z = 0$ namesto pri $z = \zeta$):

$$\omega^2 = (gk + \gamma k^3/\rho) \tanh kh \quad (7)$$

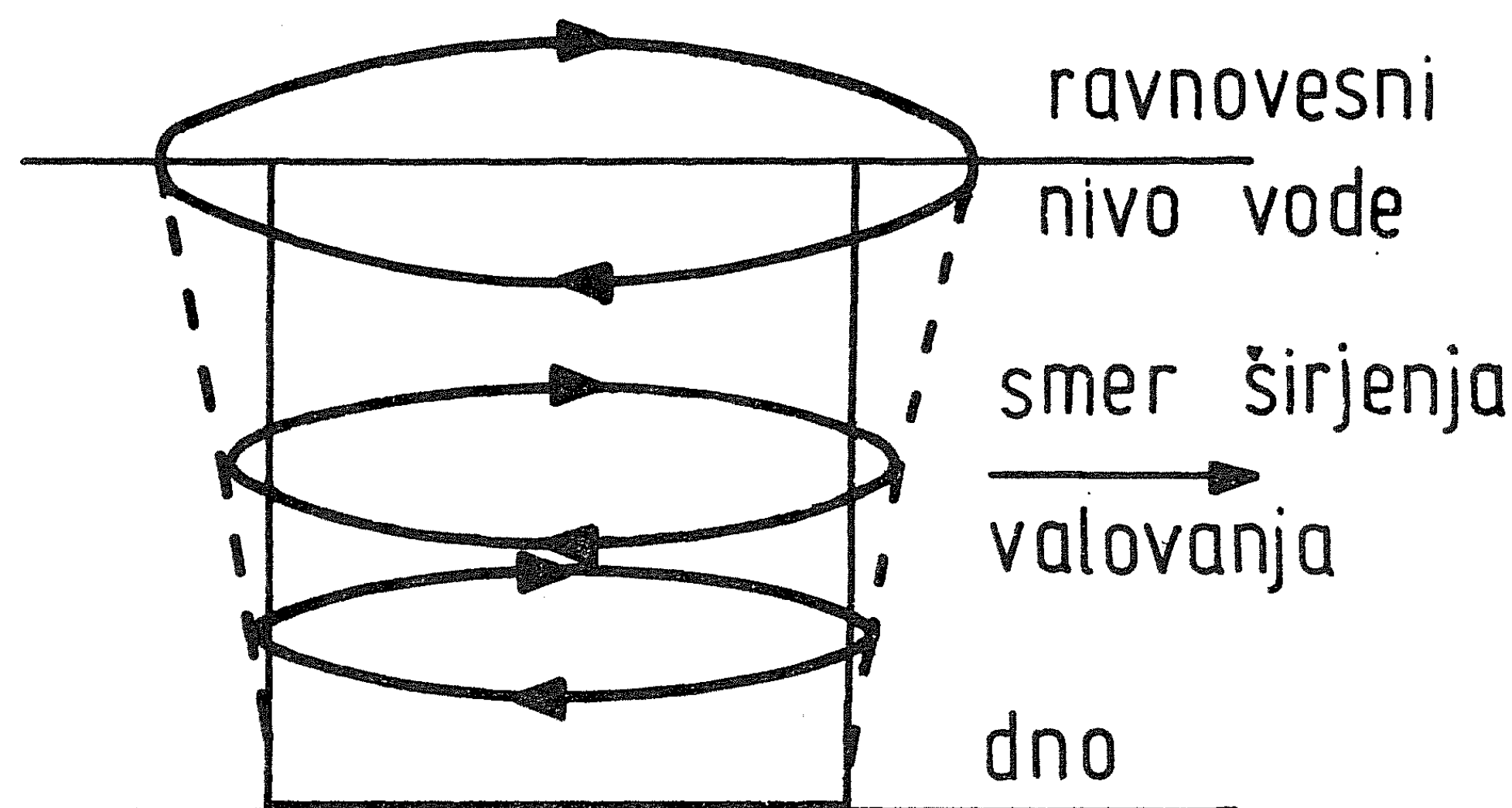
Zanima nas predvsem, kako se gibljejo tekočinski delci. Z δx in δz označimo odmika od ravnovesne lege (x', z'). Ker smo se omejili na odmike, ki so majhni v primeri z valovno dolžino, smemo potencial vzeti kar v ravnovesni legi namesto v legi, kjer se delec v resnici nahaja. V okviru te aproksimacije velja

$$\begin{aligned} d\delta x/dt = v_x(x', z') &= -\Phi_0 k \cosh k(h + z') \sin(kx' - \omega t) \\ d\delta z/dt = v_z(x', z') &= \Phi_0 k \sinh k(h + z') \cos(kx' - \omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

Oglejmo si še odmike, ki jih dobimo z integracijo enačb (8) po času

$$\begin{aligned} \delta x &= -\Phi_0(k/\omega) \cosh k(h + z') \cos(kx' - \omega t) \\ \delta y &= -\Phi_0(k/\omega) \sinh k(h + z') \sin(kx' - \omega t) \end{aligned} \quad (9)$$

Delci tekočine opisujejo med valovanjem elipse, za katere velja $(\delta x)^2/a^2 + (\delta z)^2/\beta^2 = 1$, kjer je $a = \Phi_0(k/\omega) \cosh k(h + z')$ in $\beta = \Phi_0(k/\omega) \sinh k(h + z')$. Ker je razlika $a^2 - \beta^2 = \Phi_0^2 k^2/\omega^2$ neodvisna od globine, se razdalja med žarišči elipse ne spreminja z globino



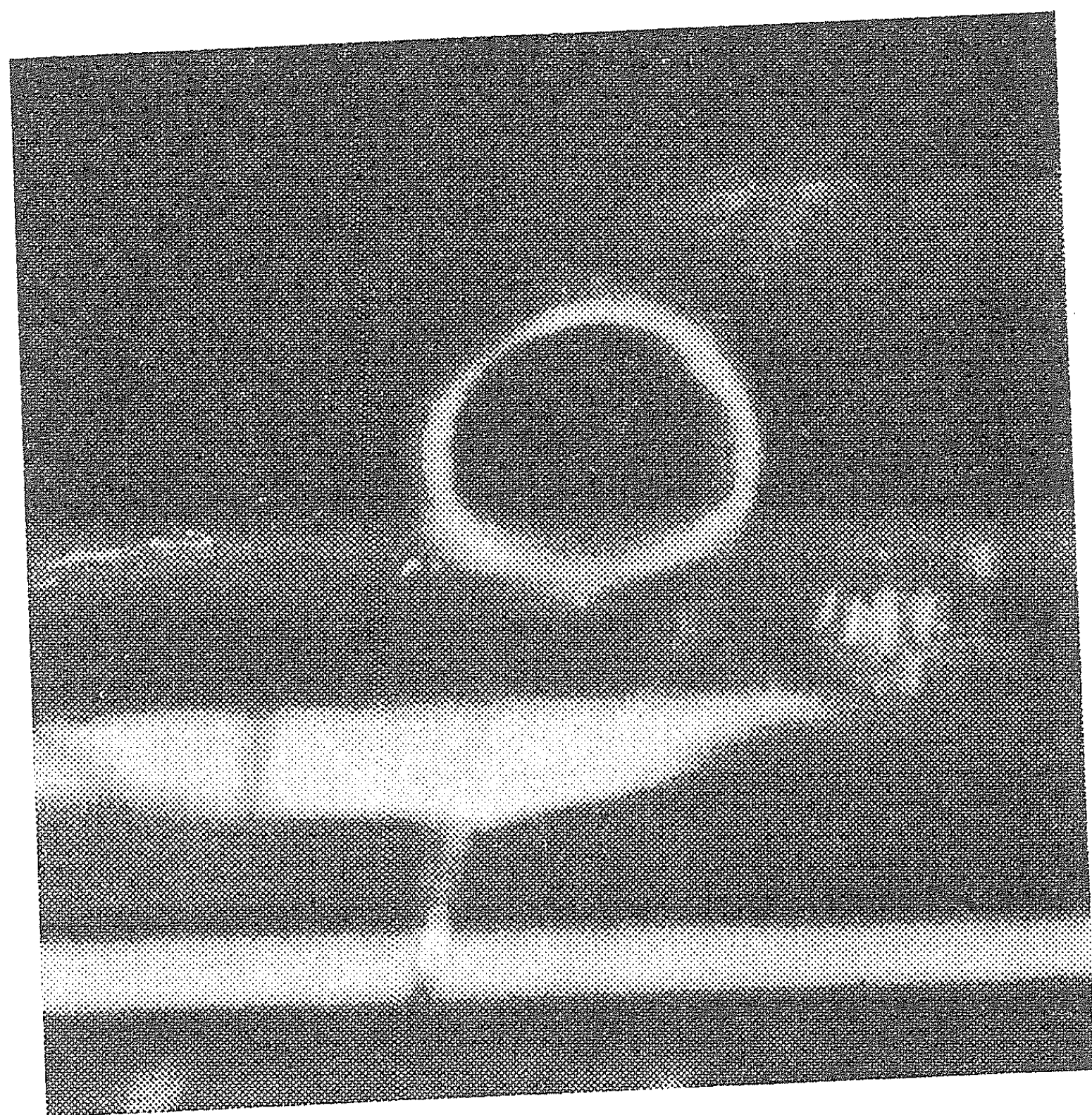
Sl. 2. Poti delcev pri potujočem površinskem valovanju tekočine

(to ne velja za mejno plast na dnu, kjer dobimo zaradi zanemarjene viskoznosti napačen rezultat), manjšata pa se velikosti osi elipse (sl. 2).

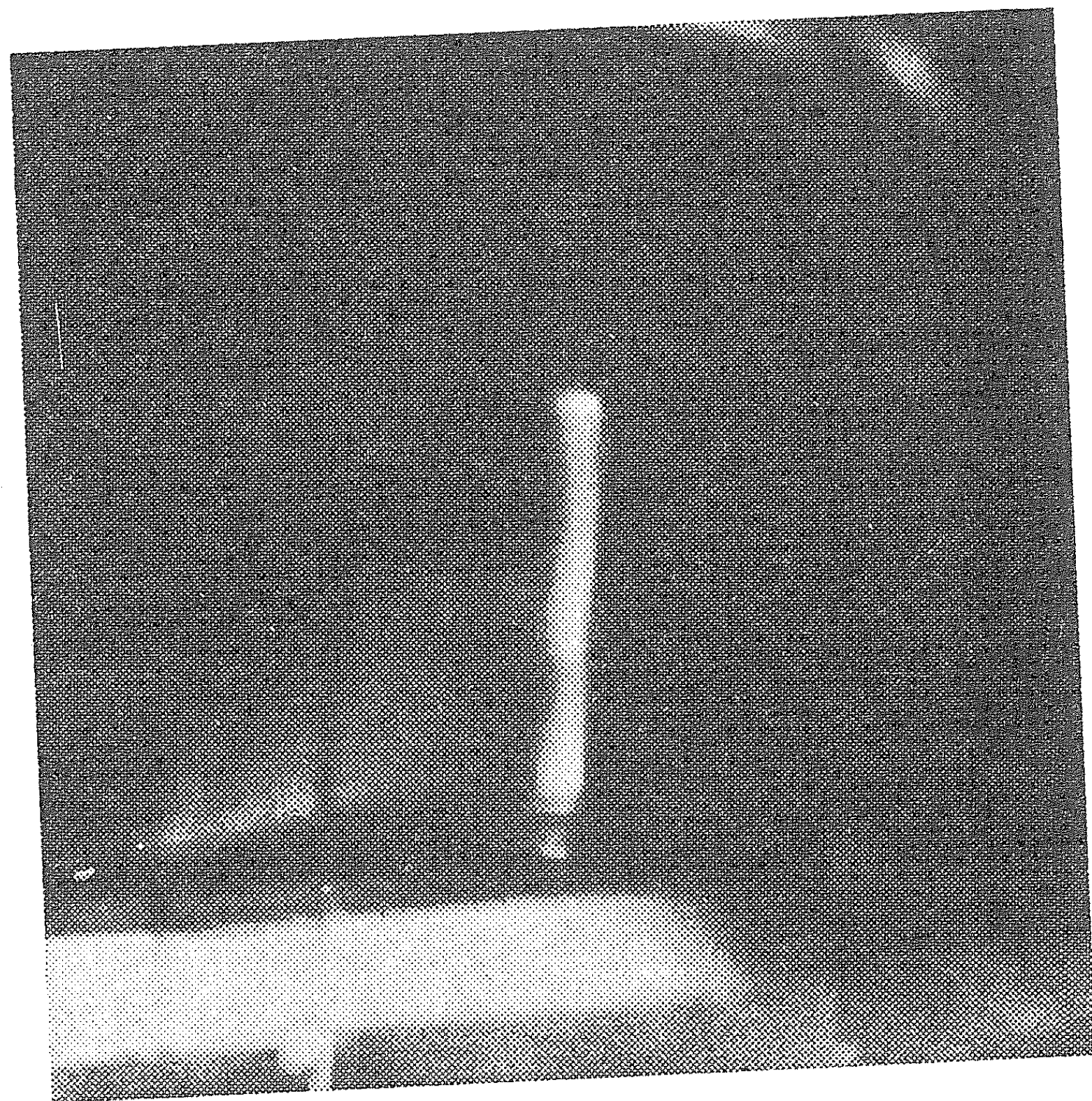
Ob površinskih valovih na globoki vodi ($\lambda \ll h$ ali $\exp(-kh) \approx 0$) opisujejo tekočinski delci kroge, katerih velikost eksponentno pada z globino. Tako npr. podmornica, ki je potopljena za več kot eno valovno dolžino pod površino vode, valovanja na površju praktično ne čuti več.

Čeprav se tu s stoječim valovanjem ne bomo podrobneje ukvarjali, lahko na razmeroma preprost način ugotovimo, kako se tekočinski delci pri takem valovanju gibljejo. Za potujoče valovanje je značilna usmerjenost gibanja valov, ki se zrcali tudi v gibanju tekočinskih delcev: smer kroženja (oz. gibanja po elipsah) delcev je taka, da se na hribih valov gibljejo v smeri potovanja valovanja, v dolinah pa v obratni smeri. Pri stojećem valovanju

sta obe smeri ekvivalentni in tako gibanje, ki bi bilo odlikovano po smeri kroženja, ni možno; delci se gibljejo po daljicah (sl. 3), ki imajo različno usmerjenost v ravnini xz glede na mesto, ki ga zavzemajo med hrbti in vozli valovanja.



a



b

Sl. 3. Fotografija poti osvetljene kroglice iz styropora na površini vode pri potujočem (a) in stoječem (b) valovanju. Poskus je napravljen v 60 cm dolgi in 25 cm široki stekleni posodi; globina vode je 20 cm. Valovanje vzbujaemo na enem koncu posode z valjastim predmetom premera 5 cm, ki niha s frekvenco $\nu \approx 3 \text{ s}^{-1}$ in amplitudo 4 mm. Pri opazovanju potujočega valovanja je treba na drugem koncu posode valovanje absorbirati, kar napravimo s 25 cm dolgo strmino, prevlečeno s 5 mm debelo plastjo penaste mase. Še zmeraj se nekaj vpadlega valovanja odbije, zato je treba paziti, da je frekvenca izbrana tako, da ne pride do resonance v posodi in okrepljenega deleža stoječega valovanja, kar bi dalo delcem eliptično pot gibanja. Pot kroglice se da lepo projicirati na steno predavalnice (foto M. Smerke)

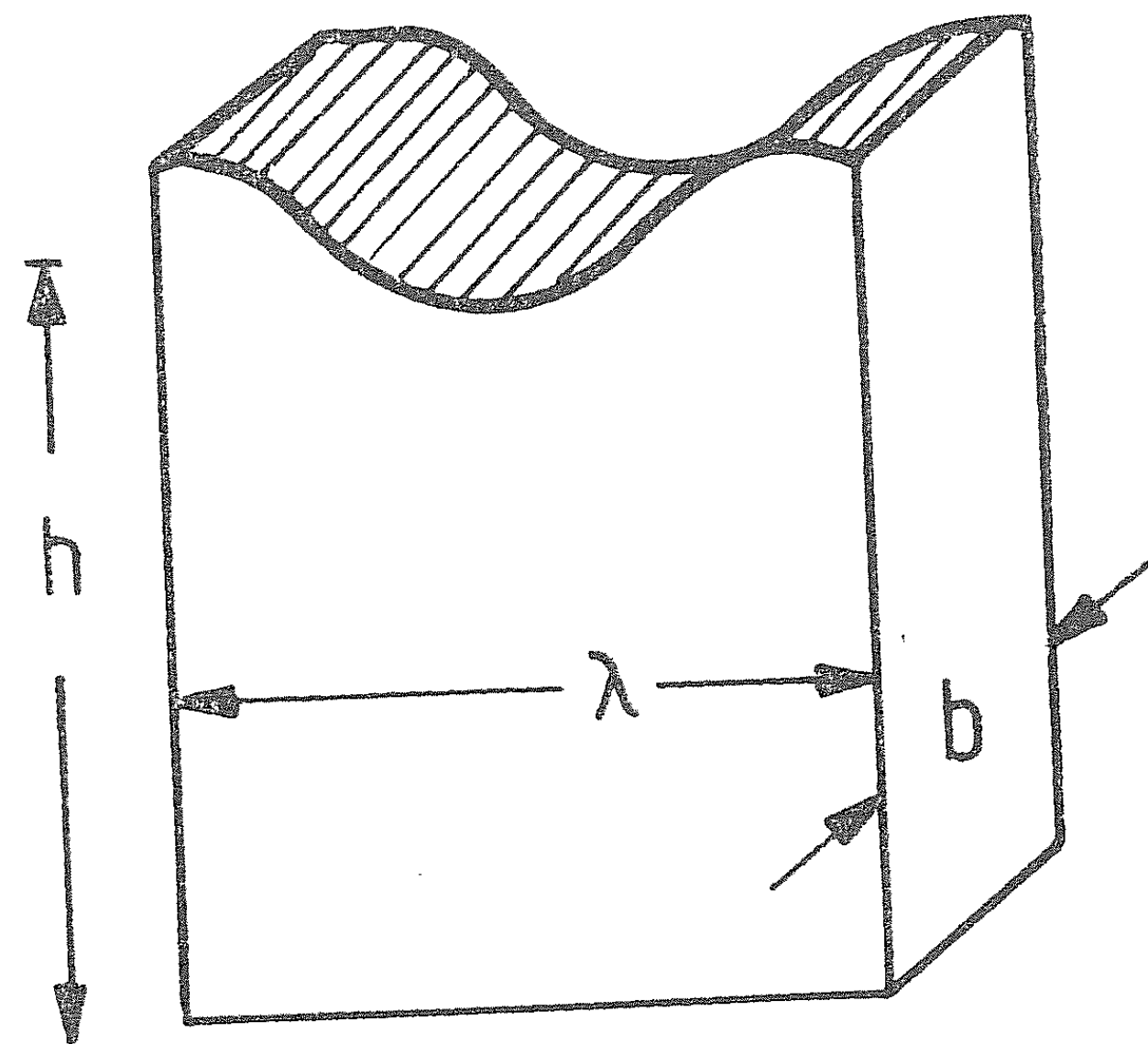
Energija valovanja

Za primer globokih valov ($\lambda \ll h$) bomo izračunali energijo valovanja, ki je vsebovana v kvadru višine h , dolžine λ in poljubno izbrane širine b (sl. 4). Upoštevajoč pogoj $kh \gg 1$ [ali $\sinh k(h+z) \approx \cosh k(h+z) \approx \frac{1}{2} \exp(kh+kz)$] in enačbo (8), dobimo za kinetično energijo

$$\begin{aligned} W_k &= (\rho b/2) \int_0^\lambda \int_{-h}^0 v^2 dx dz = \\ &= (1/8) \rho b \lambda \Phi_0^2 k^2 \exp(2kh) \int_{-h}^0 \exp(2kz) dz = \\ &= (1/16) \rho b \Phi_0^2 k \lambda \exp(2kh) = \rho g a^2 b \lambda / 4 \end{aligned}$$

kjer je $a = (k \Phi_0 / 2\omega) \exp(kh)$ označena amplituda valovanja. Potencialna energija zaradi dviga vode v območju ene valovne dolžine je enaka (glej sl. 4)

$$\begin{aligned} W_p &= \rho g b \int_0^\lambda \zeta^2 dx = (\rho g b \Phi_0^2 \lambda k^2 / 16 \omega^2) \exp(2kh) = \\ &= \rho g a^2 b \lambda / 4 \end{aligned}$$



Sl. 4. Volumen tekočine, za katerega računamo energijo valovanja

pri čemer sta upoštevani enačbi (9) za odmik in zveza $\omega^2 = kg$, ki jo dobimo iz (7), če je $kh \gg 1$ in če zanemarimo vpliv površinske napetosti. Kinetična in potencialna energija sta torej enaki, njuna vsota — celotna energija valovanja — pa znaša $\rho g a^2 b \lambda / 2$.

Dolgi težnostni valovi

Pri dolгих valovih postane frekvenca sorazmerna valovnemu številu (nedisperzno valovanje). Iz (7) dobimo pri $kh \ll 1$:

$$\omega = k \sqrt{gh} \quad (10)$$

Tedaj velja podobna valovna enačba kot za svetlobo v vakuumu (v približku, da je amplituda še zmeraj veliko manjša od globine), o čemer se lahko hitro prepričamo. V ta namen rabimo ohranitveno enačbo za volumen tekočine (z b spet označimo poljubno izbrano širino v smeri y): $\partial(b\zeta)/\partial t + \partial[b(h + \zeta)v_x]/\partial x = 0$ in dinamični pogoj na površini (4), ki se, odvajan po x , glasi

$$g(\partial\zeta/\partial x) + \partial(\partial\Phi/\partial x)/\partial t = 0, \quad z = \zeta \quad (11)$$

S tem, da smo vzeli $p = 0$ tik pod površino, smo vpliv površinske napetosti opustili. Ohranitveno enačbo nekoliko poenostavimo tako, da zanemarimo velikost ζ v primeri s h : $\partial\zeta/\partial t + h \partial v_x/\partial x = 0$. Z odvajanjem te enačbe po času in s substitucijo vrednosti za $v_x = \partial\Phi/\partial x$ iz enačbe (11) dobimo končno valovno enačbo za ζ :

$$\partial^2\zeta/\partial x^2 - (1/gh) \partial^2\zeta/\partial t^2 = 0 \quad (12)$$

Prav enaka enačba velja za potencial. Dobimo jo tako, da vstavimo ohranitveno enačbo v (5). Potencial mora zadoščati Laplaceovi enačbi (2) po vsej tekočini, robni pogoj na površini pa je valovna enačba (12). Tukaj bomo izjemoma poiskali splošno rešitev valovne enačbe. Iz (12) dobimo z zamenjavo $x_1 = x + ct$ in $x_2 = x - ct$:

$$4 \partial^2\zeta/\partial x_1 \partial x_2 = 0$$

Iz te enačbe, integrirane po x_2 , sledi $\partial\zeta/\partial x_1 = \zeta'_1(x_1)$, kjer je $\zeta_1(x_1)$ poljubna funkcija x_1 . Integracija po x_1 pa prinese $\zeta = \zeta_1(x_1) + \zeta_2(x_2)$, kjer je $\zeta_2(x_2)$ poljubna funkcija x_2 . Splošna rešitev se torej glasi

$$\zeta = \zeta_1(x + ct) + \zeta_2(x - ct) \quad (13)$$

Zadovoljili se bomo v glavnem z rešitvami, ki imajo obliko kosinusnega vala

$$\zeta = \zeta_0 \cos(kx - \omega t)$$

Enačba (12) je posebno uporabna pri študiju plimskih valov, saj je zadoščeno tako zahtevi po majhni amplitudi ($a \ll \lambda$) kot po plitvem morju ($h \ll \lambda$). Večkrat se pa srečamo z valovanjem, pri katerem je odmik istega reda velikosti kot globina (morski valovi na plitvem dnu). Oglejmo si, kaj dobimo namesto (12), če odmika ζ v primeri z globino h ne zanemarimo. Ohranitvena enačba nam da $\partial\zeta/\partial t + (h + \zeta) \partial v_x/\partial x = 0$; koeficient $\partial\zeta/\partial x$ smo zanemarili zaradi $a \ll \lambda$. Odvajanje po času in upoštevanje pogoja (11) nam v naši aproksimaciji prinese enačbo $\partial^2\zeta/\partial t^2 + (\partial\zeta/\partial t)(\partial v_x/\partial x) + (h + \zeta) g \partial^2\zeta/\partial x^2 = 0$. Spet smemo izpustiti srednji člen, za katerega lahko ocenimo, da je a/λ krat manjši od drugih. Tako dobimo

$$\partial^2\zeta/\partial x^2 - (gh + g\zeta)^{-1} \cdot \partial^2\zeta/\partial t^2 = 0$$

Primerjava te enačbe z enačbo (12) pokaže, da lahko količino $\sqrt{g(h + \zeta)}$ identificiramo s hitrostjo širjenja valovanja. Vidimo pa, da je hitrost odvisna od dejanske globine vode

$h + \zeta$ in ne od ravnovesne globine h . Pojavi se znano lomljenje plitvih valov (vrh vala se giblje hitreje od doline, zato postanejo valovi asimetrični). Pri lomljenju je važna tudi viskoznost, a tukaj ni bila upoštevana.

2. Disperzija površinskih valov

Fazna hitrost

Funkcijska odvisnost frekvence od valovnega števila, to je disperzijska zveza, je v našem primeru dana s pozitivnim realnim korenem enačbe (7)

$$\omega = \sqrt{(gk + \gamma k^3/\rho) \tanh kh}$$

Faza $\theta = kx - \omega t$, ki nastopa v rešitvah valovne enačbe, določa lego med hribom in dolino kosinusnega vala. Ploskve konstantnih faz so na primer pri ravnih valovih med seboj paralelne ravnine. Te ravnine se gibljejo s hitrostjo

$$c = \omega/k$$

ki jo imenujemo fazna hitrost. Pri dolgih težnostnih valovih je fazna hitrost $c = \sqrt{gh}$ neodvisna od valovnega števila. V splošnem pa imajo valovi različnih valovnih dolžin različne fazne hitrosti.

Grupna hitrost

Valovno število in frekvenco lahko dobimo iz faze z odvajanjem: $k = \partial\theta/\partial x$ in $\omega = -\partial\theta/\partial t$. S ponovnim odvajanjem lahko fazo eliminiramo

$$\partial k/\partial t + \partial\omega/\partial x = 0 \quad (14)$$

Ker je k gostota valov in ω gostota toka valov, lahko interpretiramo zvezo (14) kot enačbo ohranitve valov; lahko jo še drugače zapišemo

$$\partial k/\partial t + (\partial\omega/\partial k)(\partial k/\partial x) = 0$$

kar je enačba za širjenje valovnega števila k s hitrostjo $c_g = \partial\omega/\partial k$. V splošnem je grupna hitrost različna od fazne hitrosti c in odvisna od valovnega števila. Tako valovanje je disperzno. Splošno motnjo na površini sestavljajo Fourierove komponente različnih valovnih števil in ustrezno različnih grupnih hitrosti; zato pride čez nekaj časa do disperzije motnje. Od tod izhaja tudi ime.

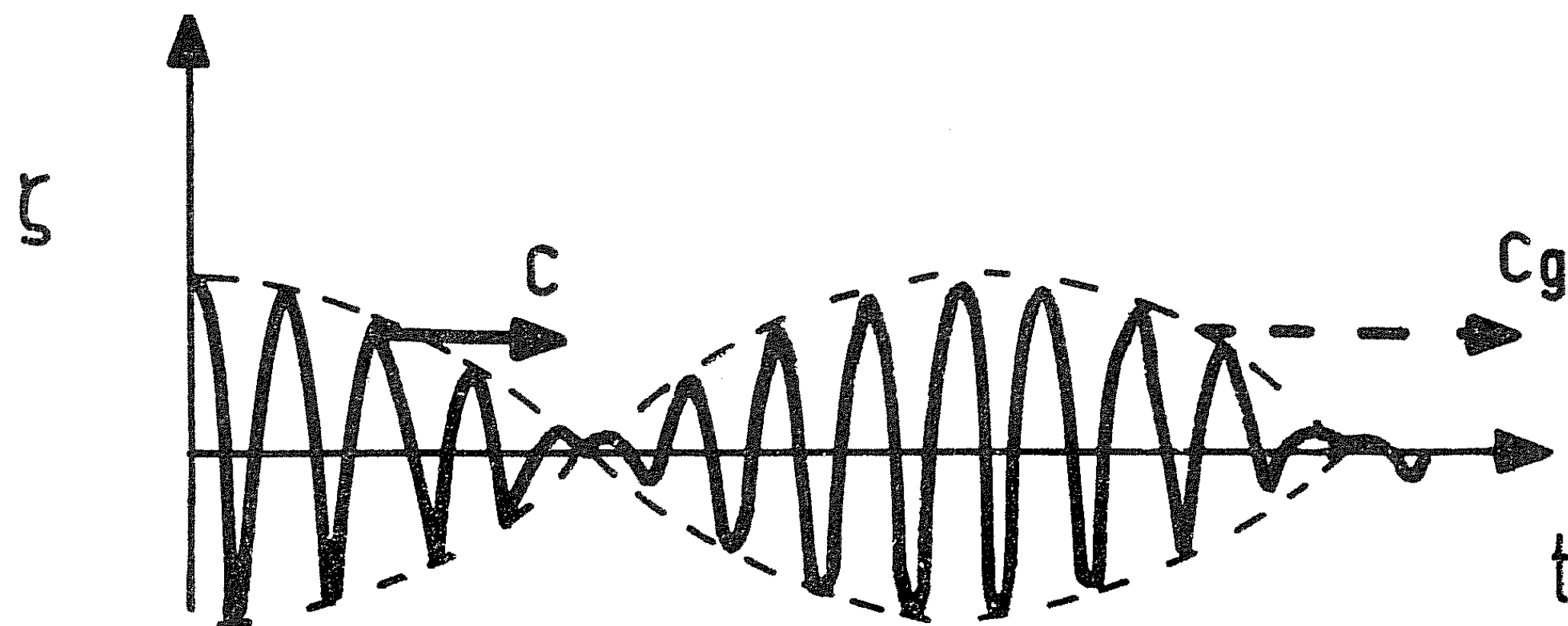
Valovne poteze približno enake frekvence se širijo z grupno hitrostjo. Za primer si oglejmo utripanje, ki ga dobimo z interferenco dveh valovanj skoraj enakih frekvenc in ki predstavlja cel vlak takih valovnih potez. Poiščimo hitrost, s katero se poteze gibljejo. Seštevanje dveh valovanj $\zeta_1 = \zeta_0 \cos(kx - \omega t)$ in $\zeta_2 = \zeta_0 \cos[(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t]$ da naslednji rezultat

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2\zeta_0 \cos((x\delta k - t\delta\omega)/2) \cos(kx - \omega t) = A \cos(kx - \omega t);$$

Z A smo označili $2\zeta_0 \cos((x\delta k - t\delta\omega)/2)$ in vzeli, da sta δk in $\delta\omega$ infinitezimalni spremembi. Enačba $\zeta = A \cos(kx - \omega t)$ predstavlja periodično potujoče valovanje, katerega amplituda se s časom spreminja. Mesta konstantne amplitude se širijo z grupno hitrostjo $c_g = d\omega/dk$ (sl. 5).

Opazovalec, ki se giblje skupaj z valom s fazno hitrostjo (recimo tako, da je ves čas ob vrhu vala), bo opazil, da se v njegovi okolici spreminja valovna dolžina. Nasprotno

pa opazovalec, ki se giblje z grupno hitrostjo, obdrži v svoji okolici valovanje enakih k in ω , pač pa se vrhovi valov gibljejo mimo njega.



Sl. 5. Pri utripanju se vrhovi valov širijo s fazno hitrostjo c , skupine valov pa z grupno hitrostjo c_g

Na primeru težnostnih valov na globoki vodi bomo še pokazali, da se energija prenaša v smeri širjenja valov s hitrostjo, ki je enaka grupni hitrosti. Pri valovanju, ki potuje z leve proti desni, naj bosta v_x in δp hitrost in spremenljivi del pritiska pri koordinati x . Delo, opravljeno v enoti časa na tekočini, ki leži desno od x , je enako

$$\partial A / \partial t = b \int_{-h}^0 \delta p v_x dz \quad (15)$$

Upoštevajoč enačbo (4), dobimo za spremenljivi del tlaka $\delta p = -\rho \partial \Phi / \partial t$. Za hitrost vstavimo $v_x = \partial \Phi / \partial x$, pri čemer je $\Phi = \frac{1}{2} \Phi_0 \exp(kh + kz) \cos(kx - \omega t)$ — rešitev za potencial. Poiskali bomo časovno poprečje izraza (15) in upoštevali $\overline{\sin^2(kx - \omega t)} = 1/2$. Dobimo

$$\overline{\partial A / \partial t} = \frac{1}{8} b k \omega \Phi_0^2 \rho \int_{-h}^0 \exp(2kz) dz \approx \frac{1}{16} \rho b \omega \Phi_0^2 \exp(2kh) = W c_g / \lambda$$

pri čemer je W/λ opravljeno delo na enoto dolžine. Zanj sledi iz izraza za energijo $W/\lambda = \rho g a^2 b / 2$. Torej energija prečka ravnino x s poprečno hitrostjo c_g .

Vrste valov

Iz disperzijske zveze $\omega^2 = (gk + \gamma k^3 / \rho) \tanh kh$ vidimo, da smemo vpliv površinske napetosti zanemariti, če je $k^2 \ll \rho g / \gamma$. Tedaj govorimo o *težnostnih valovih*. Pri njih je $c_g < c$. Pač pa je pri valovih kratke valovne dolžine ($k^2 \gg \rho g / \gamma$) površinska napetost bistvena. To so *kapilarni valovi*, pri katerih je $c_g > c$. Mejna valovna dolžina $\lambda_m = 2\pi\sqrt{\gamma / \rho g}$ je za vodo 1,73 cm (površinska napetost vode je $\gamma = 0,074$ N/m).

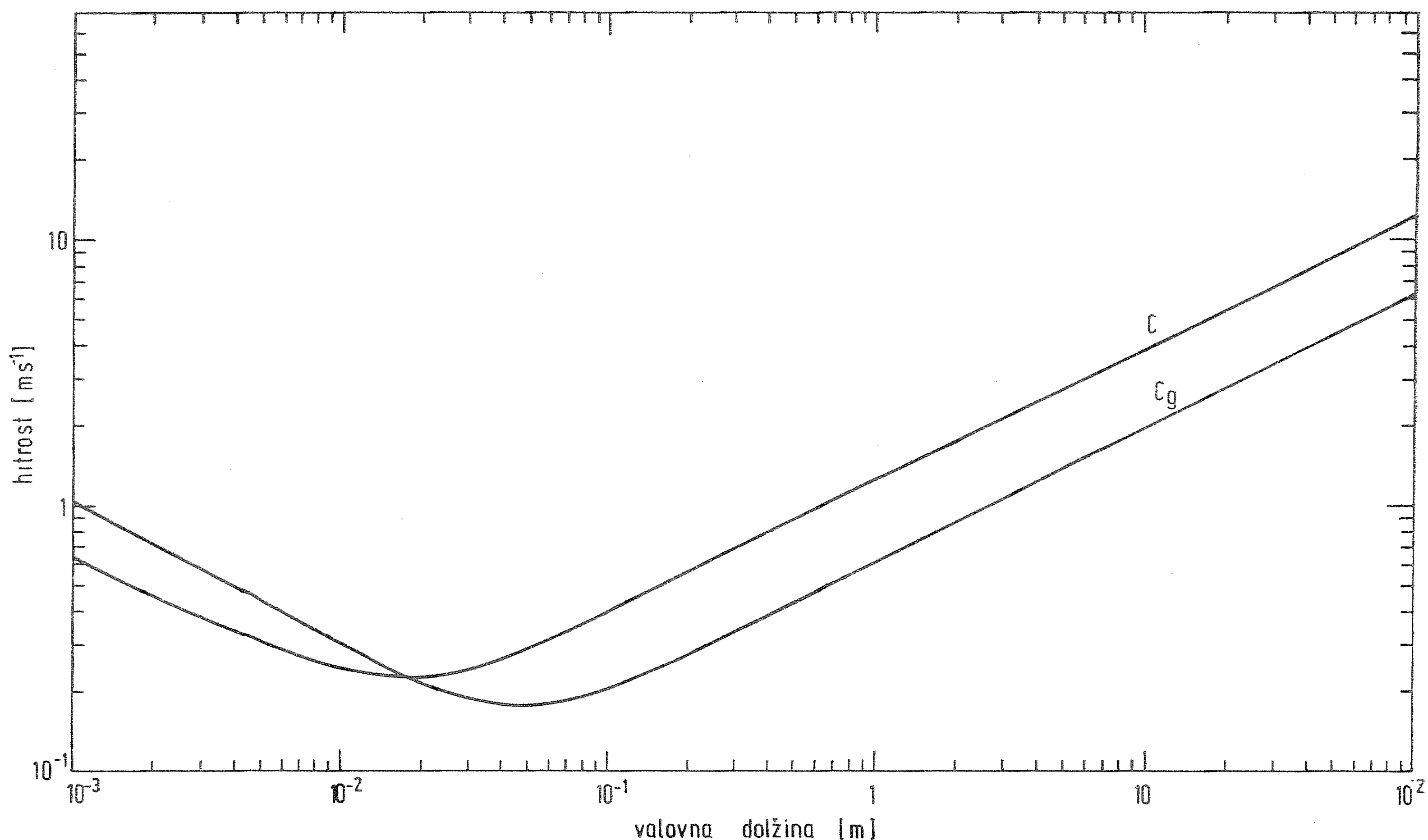
Omejili se bomo na pojave na globoki vodi ($kh > 1$), za katere se disperzijska zveza poenostavi v $\omega^2 = gk + \gamma k^3 / \rho$. Za fazno in grupno hitrost imamo

$$c = \sqrt{g/k + \gamma k / \rho} \quad c_g = (c/2) (1 + 3\gamma k^2 / \rho g) / (1 + \gamma k^2 / \rho g)$$

Fazna hitrost doseže svojo najnižjo vrednost pri mejni valovni dolžini 1,73 cm. Takrat sta tudi grupna in fazna hitrost enaki $c_m = 23,2$ cm s⁻¹. Kot je iz grafa na sliki 6 razvidno, ustrezata eni hitrosti po dve valovni dolžini. Najnižjo grupno hitrost 18 cm s⁻¹ imajo valovi z $\lambda = 4,4$ cm.

Valovanje iz kratkotrajnega točkastega izvira

Valovanje se iz mesta, kjer imamo točkast izvir, širi izotropno v vse smeri. Valovi različnih valovnih števil se gibljejo z različnimi grupnimi hitrostmi $c_g(k)$. Po času t jih bomo — če so sočasno nastali — našli v oddaljenosti $r = c_g(k)t$ od izvira. Pri težnostnih globo-



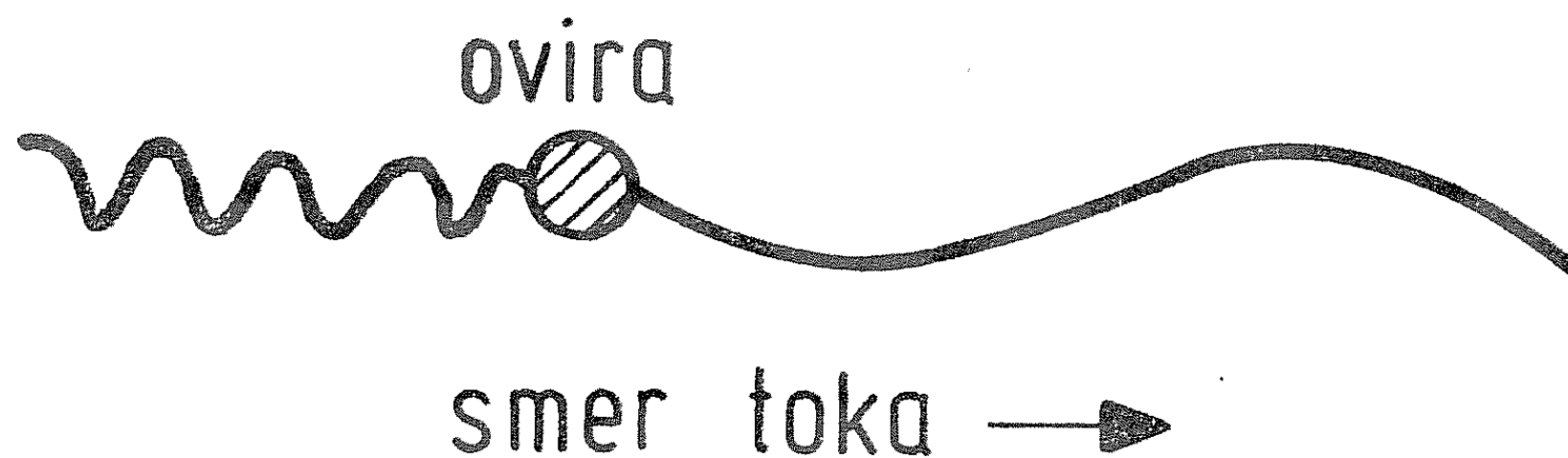
Sl. 6. Odvisnost fazne (c) in grupne (c_g) hitrosti od valovne dolžine pri globokih vodnih valovih

kovodnih valovih, kjer je $c_g = \frac{1}{2} \sqrt{g/k}$, dobimo za prepotovano pot $r = (t/2) \sqrt{g/k}$ in za odvisnost valovnega števila od časa $k = gt^2/4r^2$. Za frekvenco velja $\omega = \sqrt{gk} = gt/2r$. S to časovno odvisnostjo so določili oddaljenost neviht na odprtem morju tako, da so opazovali valovanje na obali. Ugotovili so dobro ujemanje s podatki, znanimi iz meteoroloških opazovanj.

Kratkotrajen, skoraj točkast izvir lahko ustvarimo tudi tako, da vržemo kamen v vodo. Ker je najnižja grupna hitrost 18 cm s^{-1} , se od mesta izvira širi krog z radijem $18 \text{ cm s}^{-1} \cdot t$, znotraj katerega ni več nobenega valovanja. Na krogih, ki se širijo z večjimi hitrostmi, pa prevladujeta po dve superponirani valovni dolžini: ena, ki ustreza kapilarnim, in druga, ki ustreza težnostnim valovom. Seveda pa je glavni del energije zbran v okolici kroga, ki se širi z grupno hitrostjo za valovne dolžine reda velikosti predmeta.

Valovanje pri stacionarnem toku

Najprej si oglejmo vodni tok, ki se giblje s stalno hitrostjo v po širokem koritu. Čez vso širino imejmo na površini oviro, ki leži pravokotno na smer gibanja. Namesto tega lahko opazujemo mirujočo vodo, po njeni površini pa se giblje ovira z enako hitrostjo v nasprotni smeri kot prej vodni tok. Zanimali se bomo za valove, ki se gibljejo s fazno hitrostjo, ki je enaka hitrosti ovire; torej za take, ki so videti stacionarni, če jih opazujemo iz ovire. Temu ustrezajo le valovi, za katere velja $c(k) = v$. Stacionarnih valov ne dobimo, če je $v < c_m$ (tedaj dobimo krajevne motnje, ki se z oddaljenostjo izgubljajo). Kadar je $v > c_m$, ustrezata dve valovni števili zahtevi $c(k) = v$; ena na kapilarni veji valov, druga na težnostni. Označimo ju s k_y ,



Sl. 7. Stacionarna slika v bližini ovire. Pred oviro nastanejo kapilarni valovi, za oviro pa težnostni

in k_t . Velja $k_y > k_m > k_t$ ($\lambda_y < \lambda_m < \lambda_t$) in $c_g(k_y) > c(k_y) = v = c(k_t) > c_g(k_t)$. Ker imajo težnostni valovi manjšo grupno hitrost, jih bomo našli za oviro, kapilarni valovi pa zaradi večje grupne hitrosti prehitevajo oviro (sl. 7).

Valovni upor

Telo, ki se giblje po površini s hitrostjo v , pušča za seboj valove (upoštevati bomo samo težnostno valovanje), za ustvarjanje katerih opravlja na enoto časa delo $F_u v$, kjer je F_u valovni upor. Imejmo spet oviro kot na sl. 7, katere razsežnost v smeri y (pravokotno na smer gibanja) je velika. Spet se valovanje, ki je s stališča ovire stacionarno, lahko giblje le s fazno hitrostjo $c = v$. Nekje za telesom postavimo pokončno ravnino, pravokotno na smer gibanja telesa. Na prednji strani te ravnine se energija ustvarja s hitrostjo c , kar da za ustvarjeni energijski tok $Wc/\lambda = b\rho g a^2 c/2$; medtem pa prečka energija ravnino le z grupno hitrostjo. Razlika je torej tisti del energije, ki ne potuje s telesom: $F_u c = (c - c_g)W/\lambda$. Pri globoki vodi dobimo torej za valovni upor $F_u = b\rho g a^2/4$.

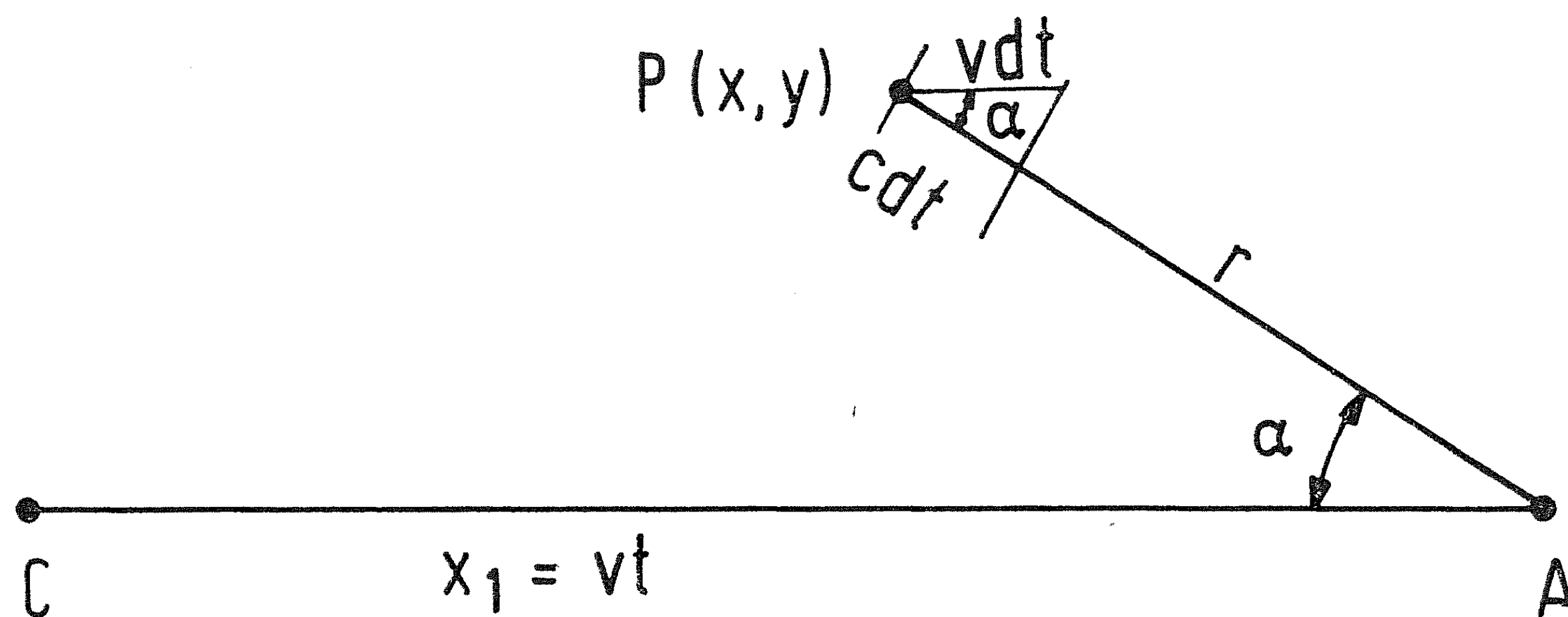
Faza valov potuje z enako hitrostjo kot motnja. Zato pri hitrosti motnje, ki preseže največjo možno fazno hitrost valov $\sqrt{gh}$, ni več valovanja, ki bi lahko sledilo telesu, in tudi valovnega upora ni več.

Pri ladjah je seveda treba upoštevati tudi prečne dimenzije; zaradi tega različne valovne dolžine lahko prispevajo k upor (glej poglavje o ladijskih valovih) in je zveza med uporom in hitrostjo drugačna. Še zmeraj pa velja, da pri hitrostih nad $\sqrt{gh}$ ni več valovnega upora.

Ladijski valovi

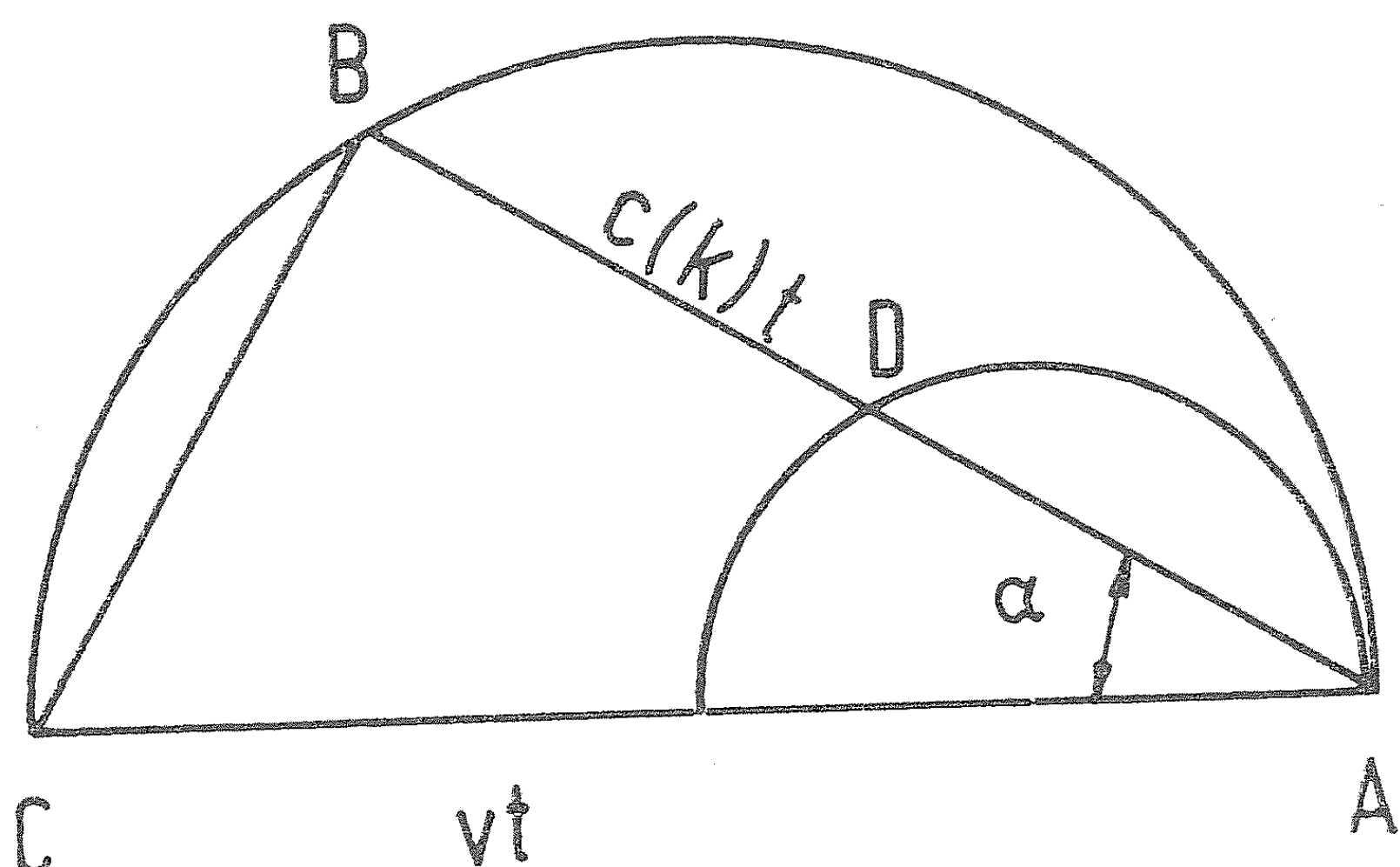
Kadar se vozimo po mirnem morju z ladjo, lahko opazimo, da ustvarja ladja stacionarno (s stališča opazovalca na ladji) sliko valov, ki se vleče za ladjo pod določenim kotom. Ta kot je neodvisen od hitrosti ladje, v nasprotju s tistim, kar vemo o širjenju zvoka pri nadzvočnih hitrostih. Konstantnost kota je posledica disperzijskih pojavov pri valovanju na vodi.

Omejili se bomo na valovanje na globoki vodi. Že s samo uporabo disperzijske zveze se da dobiti precej podatkov o valovni sliki. Poskusili bomo najprej določiti kot, pod katerim se vleče valovanje za ladjo. Gre za problem, ki je analogen dvodimenzionalnemu primeru v prejšnjih poglavjih, le da upoštevamo tu končnost dimenzije ladje v smeri pravokotno na hitrost. Spet velja, da dobimo isto sliko, če ladja stoji in se voda giblje v nasprotni smeri. Val, ki ga najdemo pod kotom α glede na mesto, kjer je bila ladja, ko je val nastal, se mora širiti s fazno hitrostjo $c = v \cos \alpha$, če naj za opazovalca na ladji ohrani statičen videz (sl. 8). Torej je pod kotom α zastopana samo tista valovna dolžina, za katero je iz-



Sl. 8. Zveza med fazno hitrostjo c in hitrostjo potovanja ladje v . A je začetna lega ladje, od koder izhaja valovanje, ki ga opazujemo na mestu P . C je trenutna lega ladje

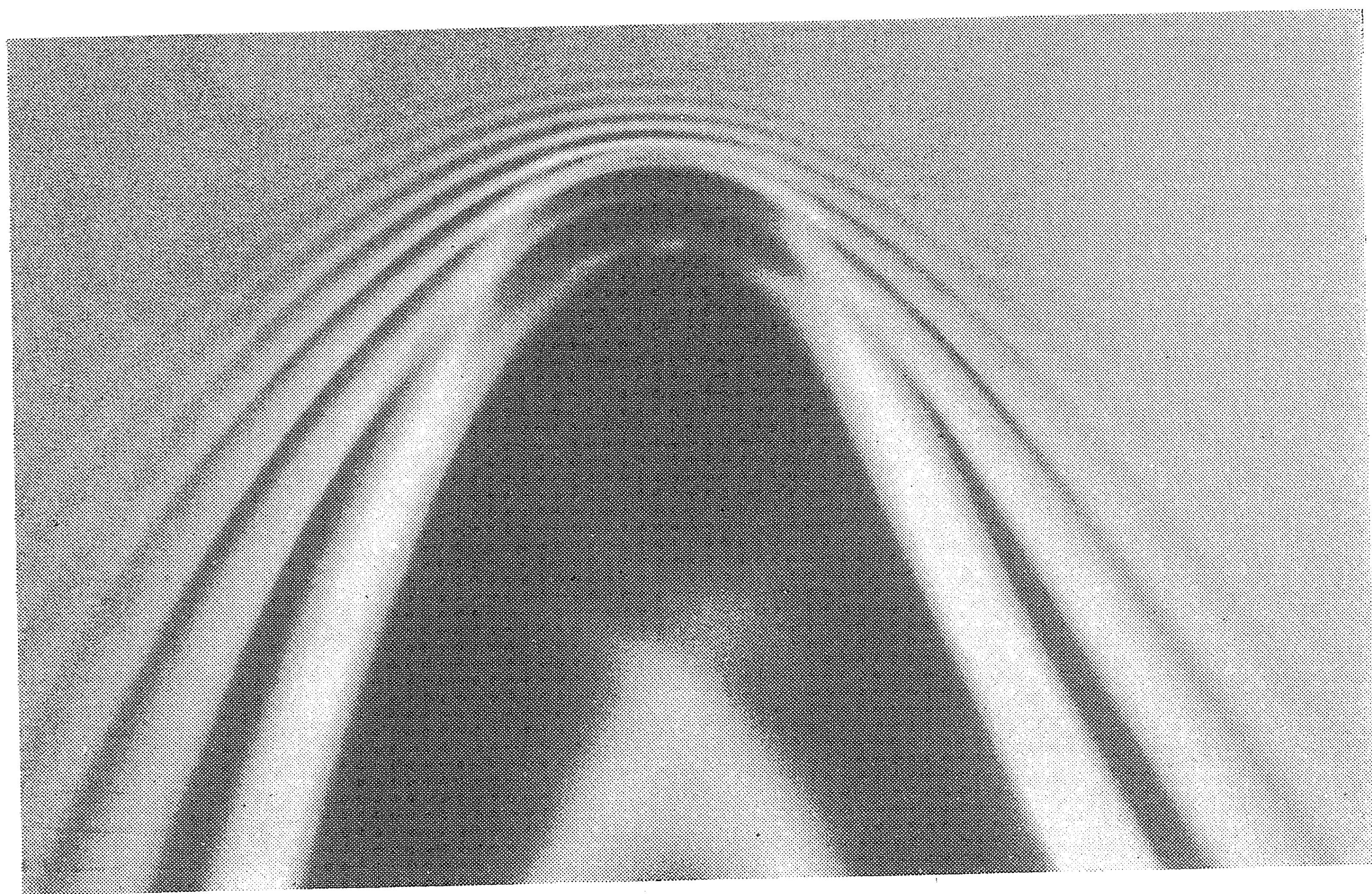
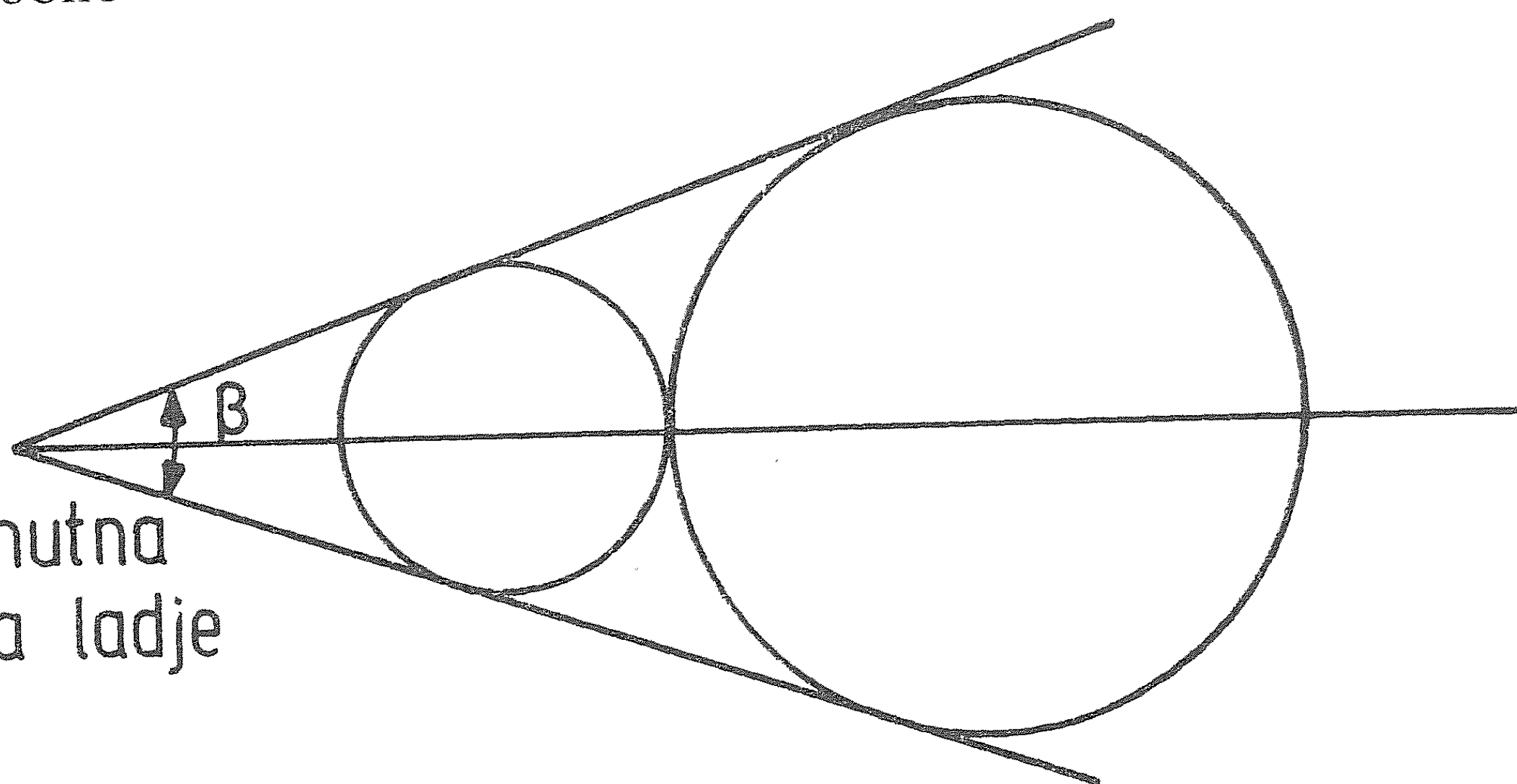
polnjeno $c(k) = v \cos \alpha$. Shematsko lahko dobimo vse možne fazne hitrosti z diagramom, kakršnega imamo na sliki 9 (ladja se giblje v smeri od A proti C). Ko pride ladja do C , bi moral vrh vala, ki je nastal pri A , pripotovati do B , če bi grupna hitrost bila enaka fazni. Ker je pri globokih valovih $c_g = c/2$, prepotuje začetni val le polovico omenjene poti (do točke D v diagramu). Manjši krog predstavlja skupno mesto front valov, izhajajočih iz A pod različnimi koti (torej z različnimi valovnimi dolžinami). Podobno lahko



Sl. 9. Shema k določitvi fronte valovanja izhajajočega iz točke A

Sl. 10. Ovojnice front valovanj — nastalih vzdolž poti ladje — tvorijo prostor za ladjo, na katerega je valovanje omejeno

trenutna
lega ladje



Sl. 11. Fotografija kapilarnih valov, ki nastanejo pred mirujočo oviro v premikajoči se vodi. Posoda z vodo se vrtil tako, da ustreza gibanje vode smeri od zgoraj navzdol na fotografiji (foto M. Smerke)

narišemo fronto valov, ki so nastali pred dvakrat daljšim časom itd. (sl. 10). Polovičen kot klinastega področja, ki se vleče za ladjo, je torej $\arcsin(1/3) = \beta/2$ ali $\beta = 39^\circ$. Tu kapilarnih valov nismo obravnavali. Ti so zaradi $c_g > c$ omejeni na prostor pred omenjenim klinastim področjem (sl. 11), podobno kot v dvodimenzionalnem primeru, kjer jih je ovira potiskala pred sabo. Kapilarni valovi pridejo posebno do izraza pri opazovanju pojava v manjših razsežnostih (mirujoča ovira na površini reke ali potoka, plavajoča raca na vodi).

Oglejmo si še, kakšna je slika valov, ki se vlečejo za ladjo. Predvsem želimo ugotoviti, kje ležijo mesta konstantne faze $\theta = kx - \omega t = \text{konst.}$ Omejili se bomo na en sam točkast izvir, ki se giblje s konstantno hitrostjo v po površini vode. Točkasta ovira naj se giblje v smeri od A proti C (sl. 8). Zanima nas, kakšno fazo ima valovanje, izhajajoče iz točke A , ko ga opazujemo na mestu P . To lahko dobimo, saj vemo, kako sta valovno število in frekvenca odvisna od časa in kraja (glej poglavje o trenutnem točkastem izviru!): $k = gt^2/4r^2$ in $\omega = gt/2r$. Za fazo velja potem $\theta = -gt^2/4r$. Valovanje z valovnim številom k prepotuje v času t pot $r = c(k)t/2 = (vt/2) \cos \alpha$, kjer smo uporabili stacionarni pogoj $c = v \cos \alpha$. Z vpeljavo količine $a = -2v^2\theta/g = v^2t^2/2r$, ki ima dimenzijo dolžine, dobimo zvezi

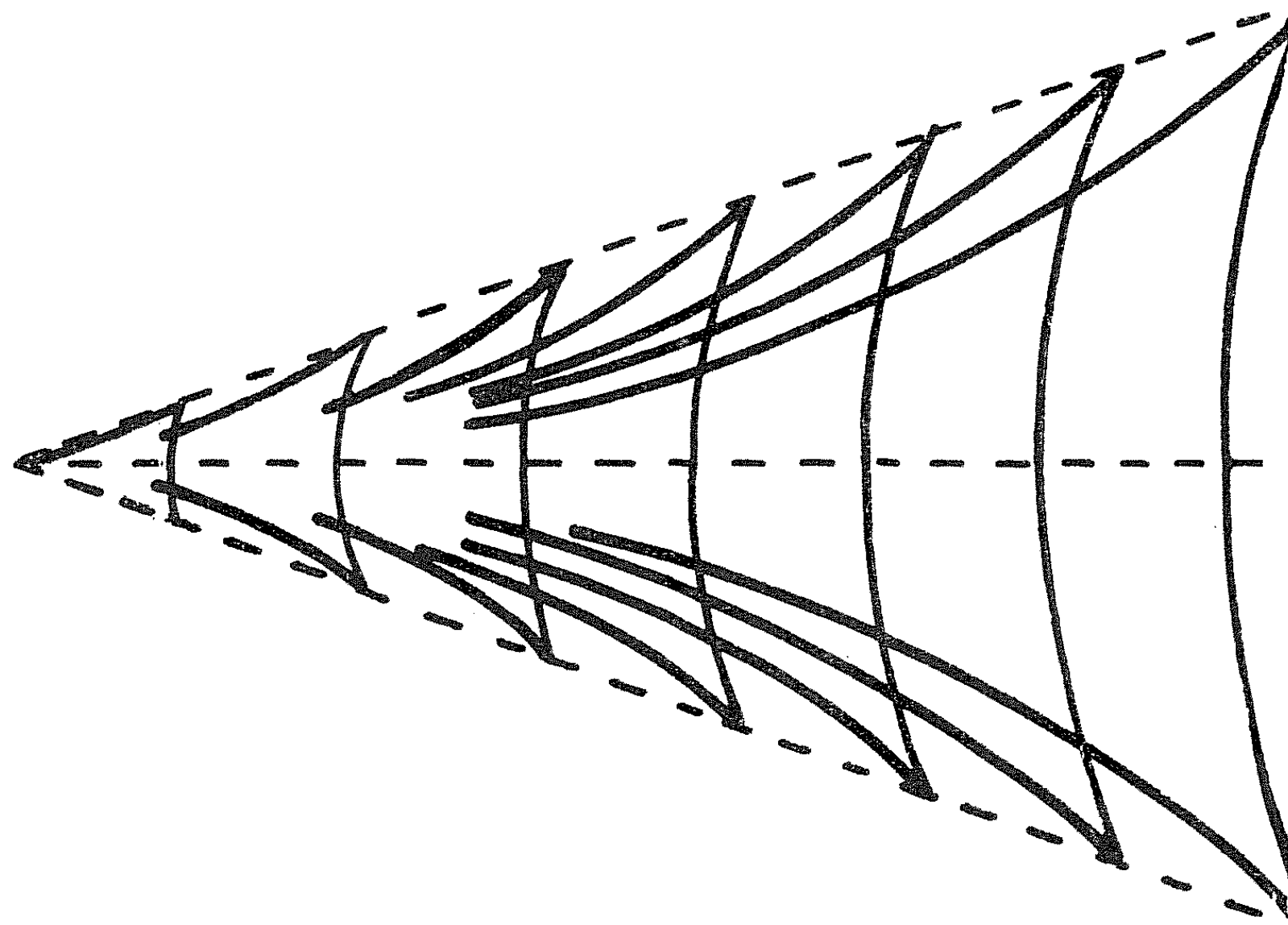
$$vt = a \cos \alpha \quad r = (a/2) \cos^2 \alpha \quad (16)$$

Za koordinati x in y točke C velja $x = x_1 - r \cos \alpha$ in $y = -r \sin \alpha$, od koder sledi, upoštevajoč (16)

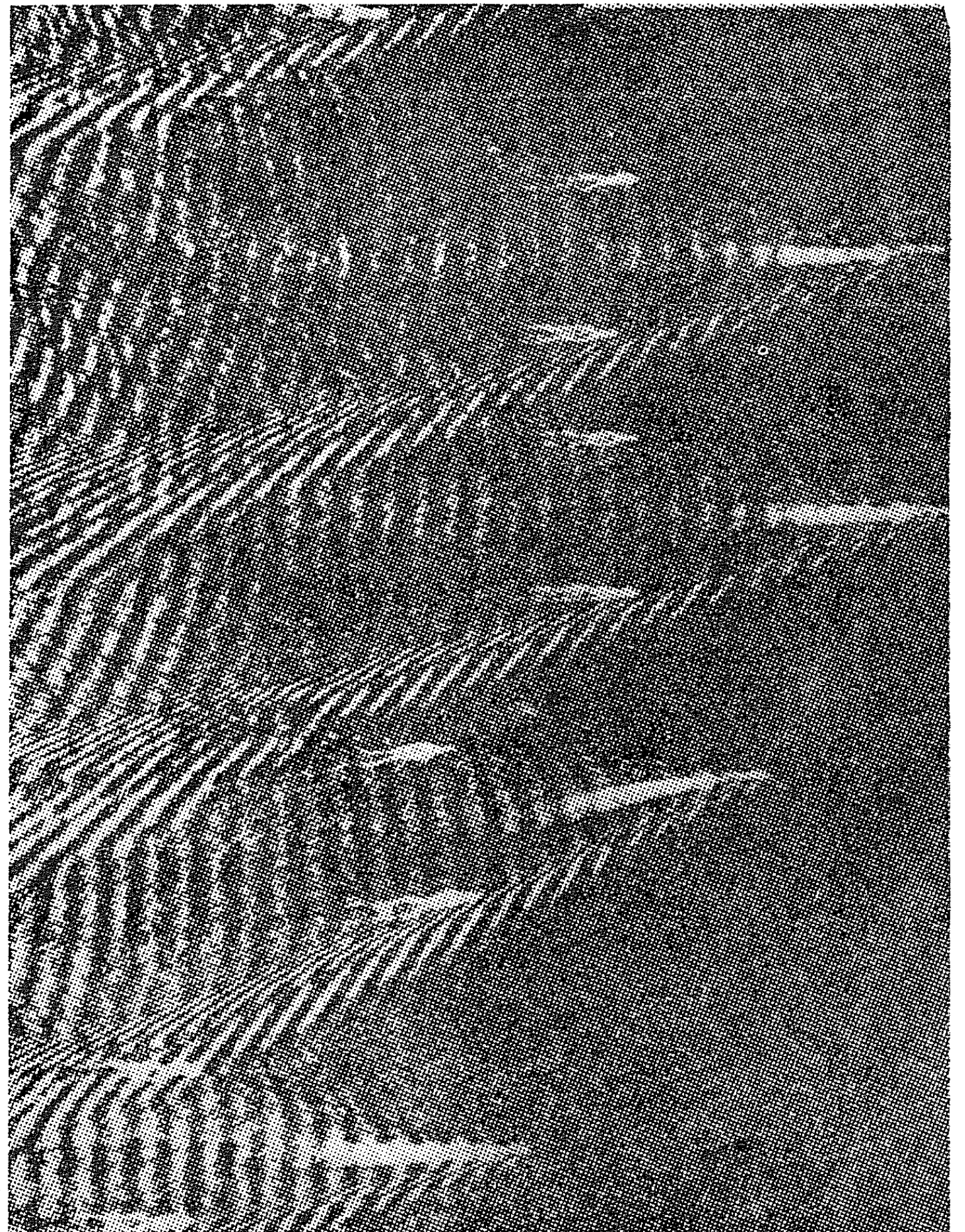
$$x = a \cos \alpha - (a/2) \cos^3 \alpha \quad y = -(a/2) \cos^2 \alpha \sin \alpha \quad (17)$$

Enačbi (17) predstavljata pri $a = \text{konst.}$ družino krivulj konstantne faze. Iz slike 12, kjer so te krivulje narisane, se vidi, da gre za dva sistema valov. S primerjavo fotografije (sl. 13) valovanja, ki ga ladje povzročajo, se lahko prepričamo, da kvalitativno ujemanje z rezultati za točkast izvor niti ni tako slabo.

Zahvaljujem se J. Koširju in A. Trontlju eza sodlovanje pri pripravi poskusov.



Sl. 12. Valovni hrbti pri enakomerno premočrtnem gibanju točkaste ovire



Sl. 13. Fotografija valovanja nastalega pri premočrtnem gibanju skupine ladij

LITERATURA

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press 1959.
- [2] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, New York, The Macmillan Comp. 1950.
- [3] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons 1974.
- [4] J. V. Wehausen and E. V. Laitone, *Surface Waves*, Handbuch der Physik IX (Ed. S. Flügge), Strömungsmechanik III, Springer-Verlag 1960.
- [5] J. J. Stoker, *Water Waves*, New York, Interscience Publishers 1957.

ZVOK V TEKOČINAH

SERGEJ PAHOR

UDK 534.14

Linearna valovna enačba za zvok v tekočinah je izpeljana iz lineariziranega Newtonovega drugega zakona, kontinuitetne enačbe in enačbe stanja. Upravičena je izbira adiabatne enačbe stanja in podani so kriteriji za veljavnost linearne valovne enačbe.

SOUND IN FLUIDS

Linear wave equation for sound in fluids is derived from linearized Newton's second law, continuity equation and equation of state. The use of adiabatic equation of state is justified and criteria for validity of linear wave equation are given.

Raziskovanje morja je iz gospodarskih in vojaških razlogov prav tako pomembno, kot so vesoljske raziskave. Kar je za vesolje elektromagnetno valovanje, to je za morje zvočno valovanje. Raziskave v zvezi z zvočnim valovanjem lahko razdelimo na tri dele. V teoretičnem delu se ukvarjamo z reševanjem gibalnih enačb z ustreznimi robnimi pogoji. Seveda sama teorija ne koristi dosti, če ne poznamo fizikalnih lastnosti vode in morja nasploh. Spoznavanje tega sodi v eksperimentalni del problema. Na koncu pride tehnološko uporabni del, v katerem se med drugim ukvarjamo z izdelavo oddajnikov in sprejemnikov zvočnega valovanja in njihovo uporabo.

V tem sestavku bomo gibalne enačbe, ki so bile že izpeljane v uvodnem predavanju, priredili za opisovanje zvočnega valovanja z majhnimi amplitudami.

Najprej zapišimo Newtonov zakon v diferencialni obliki. Zanemarimo viskoznost tekočine, a upoštevamo stisljivost. Tako dobimo nelinearno parcialno diferencialno enačbo

$$\rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (1)$$

Poleg tega se sklicujemo na izrek o ohranitvi mase. V diferencialni obliki ga takole zapišemo

$$\partial \rho / \partial t + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

Tako imamo eno vektorsko in eno skalarno enačbo za vektorsko polje $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ in dve skalarni polji $\rho(\mathbf{r}, t)$ in $p(\mathbf{r}, t)$. Potrebujemo še eno skalarno enačbo.

Ko se je leta 1687 I. Newton ukvarjal z zvokom v zraku, je za manjkajočo enačbo vzel kar izotermno enačbo stanja (Boylov zakon). Za to je imel tehten razlog. To je bila namreč edina enačba stanja za zrak, ki so jo tedaj poznali, in tako izračunana zvočna hitrost 280 m/s niti ni zelo napačna. Šele leta 1807 je P. S. Laplace predlagal adiabatno enačbo stanja. Njegov argument slišimo še danes: zaradi hitrega stiskanja in razpenjanja zraka se toplota ne more pretakati med zgoščinami in razredčinami. Po tem naj bi bila uporaba adiabatne enačbe tem bolj upravičena, čim višja je frekvenca valovanja. Kot se rado zgodi v fiziki, je ta argument sicer napačen [1], tako izračunana zvočna hitrost v zraku pa se imenitno ujema z izmerjeno. To ne zmanjšuje Laplaceove zasluge. Nasprotno, tudi to kaže, da je bil Laplace ne samo velik matematik, ampak tudi pravi fizik. Laplace je povedal svoj argument v jeziku in z znanjem svojega časa. V njegovem času pa je bil korekten argument za izbiro adiabatne enačbe stanja nemogoč. Znak pravega fizika je, da je Laplace navzlic temu izbral pravo enačbo.

Del Laplaceovega argumenta je pravilen. Če naj velja adiabatna enačba stanja, mora biti pretakanje toplote med zgoščino in razredčino v času polperiode $1/(2v)$ zanemarljivo majhno. Toda prevajanje toplote je difuzijski proces. Difuzijska dolžina za toploto je v času t enaka $(Dt)^{1/2}$, kjer je D toplotna difuzijska konstanta za tekočino. Ta je enaka kvocientu med toplotno prevodnostjo in produktom gostote in specifične toplote [2]. Po drugi strani pa je razmik med zgoščino in razredčino $\frac{1}{2}\lambda$. Groba ocena za uporabnost adiabatne enačbe je torej

$$\frac{1}{2}\lambda \gg (D/2v)^{1/2}$$

ali

$$v \ll c^2/D \quad (3)$$

V nasprotju s prejšnjo trditvijo je uporaba adiabatne enačbe tem bolj upravičena, čim nižja je frekvenca valovanja. Ker pa ima c^2/D v normalnih okoliščinah za zrak velikostno stopnjo $10^{10}/s$ in za vodo $10^{13}/s$, nas niti pri ultrazvočnih frekvencah ni treba biti strah, da bi neenačbi (3) ne bili izpolnjeni.

Zapišimo adiabatno enačbo stanja za tekočino v diferencialni obliki, ki jo bomo kasneje potrebovali [3]

$$(dp/d\rho)_S = 1/\chi_S \rho \quad (4)$$

Indeks S na levi strani pomeni, da je napisani odvod vzet pri konstantni entropiji, χ_S pa je adiabatna stisljivost tekočine.

Sistem nelinearnih enačb (1, 2, 4) je pri danih robnih pogojih v splošnem zelo težko rešiti. Domnevamo pa, da smemo za opisovanje zvočnega valovanja z dovolj majhnimi amplitudami hitrosti, tlaka in gostote zanemariti nelinearne člene v teh enačbah. Kaj je dovolj majhno, bomo precizirali kasneje. Zapišimo $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $p = p_0 + p_1$, kjer sta ρ_0 in p_0 konstantna ravnovesna gostota in tlak, in se omejimo na primer, ko je ravnovesna hitrost enaka nič. Linearizirani sistem enačb se potem glasi

$$\rho_0(\partial \mathbf{v}/\partial t) = -\nabla p_1 + \rho_0 \mathbf{f} \quad (5)$$

$$\partial \rho_1/\partial t + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

$$p_1 = (1/\chi_S \rho_0) \rho_1 \quad (7)$$

Za fizikalno smiselne rešitve teh enačb zahtevamo $|\rho_1/\rho_0| \ll 1$, $|p_1/p_0| \ll 1$ in

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll |\partial \mathbf{v}/\partial t| \quad (8)$$

Črta nad izrazoma pomeni časovno poprečje. Pogoji (8) zapišemo v taki obliki zato, ker je pri valovanju odvod $\partial \mathbf{v}/\partial t$ v določenih trenutkih enak nič. Iz tega pogoja bomo na kraju izpeljali kriterij za uporabnost lineariziranih enačb.

Sedaj ni težko zapisati valovnih enačb za ρ_1 in p_1 posebej. Enačbo (6) odvajamo po času, izračunamo divergenco vektorske enačbe (5) in upoštevamo zvezo med ρ_1 in p_1 . Tako dobimo

$$\Delta \rho_1 - (\partial^2 \rho_1/\partial t^2)/c^2 = \chi_S \rho_0^2 \nabla \mathbf{f} \quad (9)$$

$$\Delta p_1 - (\partial^2 p_1/\partial t^2)/c^2 = \rho_0 \nabla \mathbf{f} \quad (10)$$

pri čemer je hitrost razširjanja valovanja c enaka

$$c^2 = 1/\chi_S \rho_0 \quad (11)$$

V linearni aproksimaciji je ta hitrost neodvisna od frekvence. Izmerjena zvočna hitrost v zraku pri 20°C in tlaku 1 kp/cm^2 je 334 m/s , kar se ujema z izračunano. Za čisto vodo je pri 20°C adiabatna stisljivost $4,57 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$, hitrost zvoka pa 1483 m/s . V resnici

je naše zaupanje v enačbo (11) tolikšno, da računamo z njo iz izmerjene zvočne hitrosti adiabatno stisljivost.

Nekaj več dela je z izpeljavo enačbe za hitrostno polje $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Privzamemo, da se da gostota zunanje sile $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ izraziti kot gradient skalarne funkcije

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$$

Primer za to je težna sila. Potem sledi iz enačbe (5)

$$\nabla \times (\partial \mathbf{v} / \partial t) = \partial (\nabla \times \mathbf{v}) / \partial t = 0$$

torej

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ni odvisno od časa. Zato smemo iskati $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ v obliki

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (12)$$

Skalarno funkcijo $\Phi(\mathbf{r}, t)$ imenujemo hitrostni potencial. Ker tekočina v ravnovesnem stanju miruje, postavimo $\mathbf{V} = 0$. Enačbo (5) sedaj zapišemo v obliki

$$\rho_0 \nabla (\partial \Phi / \partial t) = \nabla p_1 + \rho_0 \nabla U$$

ali

$$\nabla (\partial \Phi / \partial t - p_1 / \rho_0 - U) = 0$$

Velja

$$\partial \Phi / \partial t - p_1 / \rho_0 - U = g(t) \quad (13)$$

kjer je $g(t)$ še poljubna funkcija časa. Ker nas zanima le $\nabla \Phi$, smemo izbrati $g = 0$.

Odvajajmo zgornjo enačbo parcialno po času in upoštevajmo enačbi (6, 7). Tako dobimo valovno enačbo za hitrostni potencial

$$\Delta \Phi - (\partial^2 \Phi / \partial t^2) / c^2 = -(\partial U / \partial t) / c^2 \quad (14)$$

Ploskve $\Phi(\mathbf{r}, t) = \text{konst.}$, $t = \text{konst.}$ imenujemo valovne ploskve. Ker je $\mathbf{v} = -\nabla \Phi$, je zvočno valovanje longitudinalno valovanje.

Zadostuje, da rešimo le eno od valovnih enačb, na primer enačbo za hitrostni potencial. Z enačbama (6, 7) potem hitro izračunamo ustrezna ρ_1 in p_1 .

Vsaka fizikalno smiselna rešitev valovne enačbe pa mora zadoščati pogoju (8). Opišimo ta pogoj fizikalno. V ta namen izberimo preprosto rešitev homogene valovne enačbe, ki opisuje ravno valovanje, v obliki

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 \sin(kx - \omega t), \quad k = \omega / c$$

Koordinatni sistem smo zasukali tako, da kaže pozitivna smer osi x v smeri širjenja valovanja. Za ta preprosti primer se pogoj (8) glasi

$$|v_0 k \cos(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t)| \ll |\omega \sin(kx - \omega t)|, \quad v_0 = \Phi_0 k$$

torej

$$v_0 \ll c \quad (16)$$

Sedaj to posplošimo in trdimo: linearne aproksimacije so upravičene, če so amplitude hitrostnega polja $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ majhne v primeri s hitrostjo razširjanja valovanja c .

To lahko povemo še drugače. Do sedaj smo računali $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$ in $\rho(\mathbf{r}, t)$, kot jih izmeri mirujoč opazovalec v okolici točke $\mathbf{r}$. Kako pa se giblje izbrani delec tekočine?

Označimo odmik delca iz ravnovesne lege z $s(\mathbf{r}_0, t)$. Pri tem je $\mathbf{r}_0$ radij vektor delca v ravnovesni legi in z njim tudi »oštevilčimo« izbrani delec. Hitrost delca je potem enaka

$$ds/dt = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}, t)$$

Razvijmo izraz na desni strani po argumentu $\mathbf{s}$ in upoštevajmo le prva dva člena

$$ds/dt = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) + (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$$

V okviru linearnih aproksimacij, ki smo jih doslej delali, pa mora biti v časovnem poprečju drugi člen majhen v primeri s prvim. Za naš preprosti primer pomeni to

$$|s(t)k \cos(kx_0 - \omega t)| \ll |\sin(kx_0 - \omega t)|$$

ali

$$s_0 \ll \lambda \quad (17)$$

Amplituda odmika delca iz ravnovesne lege s_0 mora biti majhna v primeri z valovno dolžino valovanja. Tedaj smemo v enačbi (1) aproksimirati substancialni odvod s parcialnim odvodom po času. Vidimo tudi, da je v linearni aproksimaciji hitrost delca z ravnovesno lego $\mathbf{r}_0$ enaka kar $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$.

Valujoča tekočina ima v primeri s tekočino v ravnovesnem stanju dodatno energijo — *energijo valovanja*. To si oglejmo na primeru dovolj razsežne tekočine, v kateri smo na kakršenkoli način vzbudili zvočno valovanje. To valovanje objamemo z zaprto ploskvijo S , tako da je zunaj nje tekočina še v ravnovesnem stanju. Tekočino znotraj S razdelimo na majhne delce z maso Δm . Energija valovanja delca Δm je sestavljena iz kinetične in notranje energije, ki jo štejemo od ravnovesne notranje energije. Potencialno energijo v polju zunanjih sil bomo odslej zanemarjali. Označimo z ΔV_0 prostornino Δm v ravnovesnem stanju in z ΔV prostornino v času t . Kinetična energija delca je

$$\frac{1}{2} \rho_0 v^2 \Delta V_0 \quad (18)$$

in je enaka delu, ki ga opravi na delcu rezultanta sil $-\nabla p_1 \cdot \Delta V_0$.

Notranja energija pa gre na račun stiskanja ali raztezanja in je enaka

$$-\int_{\Delta V_0}^{\Delta V} p d(\Delta V) = -\frac{1}{2} (p + p_0) (\Delta V - \Delta V_0)$$

Pri tem smo v skladu z dosedanjimi poenostavitvami aproksimirali zapisani integral s trapezno formulo. Zgornji izraz lahko zapišemo na novo v obliki

$$-p_0(\Delta V - \Delta V_0) - \frac{1}{2} (p - p_0) (\Delta V - \Delta V_0)$$

Upoštevajmo

$$\Delta V - \Delta V_0 = \Delta m (1/\rho - 1/\rho_0) = -\rho_1 \Delta V_0 / \rho_0$$

$$p - p_0 = p_1 = c^2 \rho_1$$

in seštejmo notranje energije vseh delcev. Ker je vse valovanje znotraj ploskve S , velja $\sum \Delta V = \sum \Delta V_0$. Vsa notranja energija valovanja je torej enaka

$$(c^2 \sum \rho_1^2 \Delta V_0) / 2\rho_0$$

Limitirajmo $\Delta V_0 \rightarrow dV$ in izpustimo indeks 0 v zgornjem izrazu in v izrazu za kinetično energijo. Celotno energijo valovanja W tako izrazimo z integralom

$$W = \frac{1}{2} \int (\rho_0 v^2 + c^2 \rho_1^2 / \rho_0) dV$$

Izraz $c^2\rho_1^2/2\rho_0$ se pogosto interpretira kot gostota potencialne ali prožnostne energije. Ta je v zgoščinah in v razredčinah pozitivna. Korektnije je govoriti o gostoti notranje energije $p_0\rho_1/\rho_0 + c^2\rho_1^2/2\rho_0$, ki je v zgoščinah pozitivna in v razredčinah negativna. Pač pa je prispevek prvega člena pri integraciji po prostornini enak nič. Zato tudi ne smemo zanemariti drugega člena v primeri s prvim.

Dokler valovanje ne prestopi zaprte ploskve S , je energija W konstantna. Ko pa se začne W manjšati, gre to na račun energije, ki jo nosi valovanje skozi ploskev S . To opišemo z gostoto energijskega toka valovanja $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Zapišimo izrek o ohranitvi energije valovanja

$$\frac{1}{2} \int [\partial (\rho_0 v^2 + c^2 \rho_1^2 / \rho_0) / \partial t] dV = - \oint \mathbf{j} d\mathbf{S}$$

Odvajajmo po času, izrazimo v in ρ_1 s hitroštnim potencialom in upoštevajmo valovno enačbo za Φ ! Tako dobimo

$$- \oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = \rho_0 \int \nabla [(\partial \Phi / \partial t) \nabla \Phi] dV = \rho_0 \int (\partial \Phi / \partial t) (\nabla \Phi) d\mathbf{S}$$

Sedaj smiselno definiramo gostoto energijskega toka kot

$$\mathbf{j} = -\rho_0 (\partial \Phi / \partial t) \nabla \Phi = p_1 \mathbf{v} \quad (20)$$

S tem izrazom, izpeljanim za poseben primer, definiramo gostoto energijskega toka na splošno. Namesto gostota toka pogosto uporabljamo izraz *jakost zvoka*.

Jakost zvoka za ravno valovanje (15) je

$$j = \rho_0 c v_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

njeno časovno poprečje pa $\frac{1}{2} \rho_0 c v_0^2$.

Zvočno valovanje s poprečno jakostjo nekaj vatov na kvadratni meter že boli uho. Celo v tem primeru je $v_0 = 0,1 \text{ m/s} \ll 340 \text{ m/s}$. Moderni podvodni zvočni izviri oddajajo valovanje z jakostjo velikostne stopnje 10^4 W/m^2 v bližini izvira [4]. Za grobo oceno ustrezne hitrostne amplitude uporabimo izraz za ravno valovanje in dobimo $v_0 = 0,1 \text{ m/s} \ll 1500 \text{ m/s}$.

Pri uporabi izpeljanega modela se moramo zavedati, da smo v njem marsikaj poenostavili in da je zares dober le za opisovanje širjenja zvoka pri neprevelikih razdaljah. Pri velikih razdaljah ne smemo več zanemariti viskoznosti tekočine, čeprav sta ustrezna člena v Newtonovem zakonu majhna v primeri z drugimi. Treba je tudi upoštevati, da na primer zvočna hitrost v morju ni konstantna. Zanimivo je, da doseže v globokih morjih minimum v globini približno tisoč metrov. To je posledica nasprotujočih si učinkov z globino padajoče temperature in stisljivosti morja. Prav poseben problem sta morsko dno in morska gladina. Pri reševanju valovne enačbe ju upoštevamo z robnimi pogoji. To ni tako preprosto, kot se zdi na prvi pogled. Morsko dno je ravno ali zverženo, mehko ali trdo, da ne govorimo o morski gladini, katere valovanje je pogosto čisto slučajno.

Navzlic temu je izpeljani model tudi v teh primerih koristen in rabi vsaj za kvalitativno opisovanje zvočnih pojavov.

LITERATURA

- [1] N. H. Fletcher, *Adiabatic Assumption for Wave Propagation*, Am. J. Phys. **42** (1974) 487.
- [2] I. Kuščer, *Matematične naloge iz fizike*, II. del, Ljubljana, FNT 1972, str. 8.
- [3] I. Kuščer in S. Žumer, *Termodinamika*, Ljubljana, FNT 1974, str. 57.
- [4] F. V. Hunt, *The Past Twenty Years in Underwater Acoustics*, J. Acoust. Soc. Amer. **51** (1972) 992.

POJAVI PRI NADZVOČNIH HITROSTIH IN UDARNI VALOVI

JANEZ STRNAD

UDK 533.6.011.72

V prispevku so opisane bistvene poteze pojavov v plinu pri nadzvočnih hitrostih. Izpeljane so enačbe za gibanje ravnega udarnega vala in omenjeni poševni udarni valovi. Na koncu so navedene omejitve za veljavnost obravnavanih enačb.

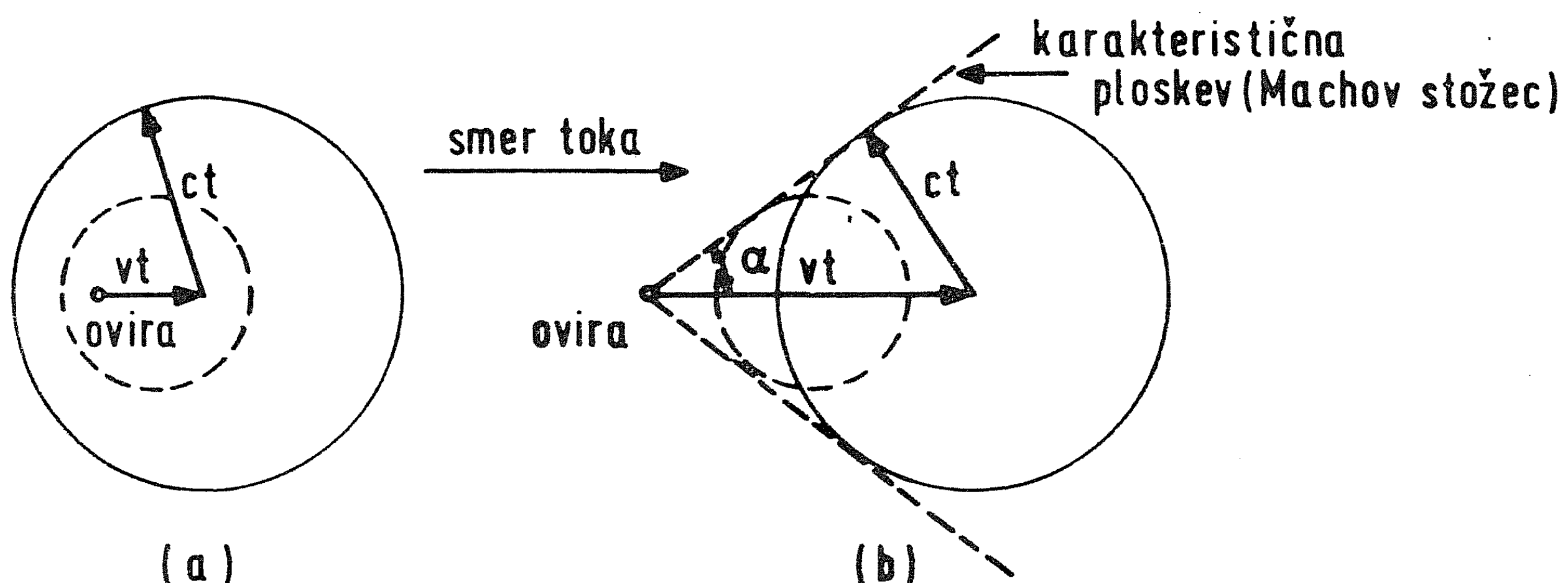
SUPERSONIC PHENOMENA AND SHOCKS

In this contribution characteristic features of phenomena in gases at supersonic velocities are described. Equations of motion for a plane shock are given and oblique shocks are mentioned. Finally, the validity of the considered equations is discussed.

Podzvočno in nadzvočno območje

V toku tekočine in pri gibanju ovire po tekočini je *hitrost zvoka* meja med *podzvočnim* in *nadzvočnim območjem*. V drugem je treba upoštevati stisljivost tekočine, zato govorimo v tej zvezi navadno o plinu. Najprej poudarimo glavne razločke med pojavi z obeh območij.

Majhna ovira naj miruje v stacionarnem plinskem toku, v katerem je hitrost v povsod enako velika in enako usmerjena. Od ovire se širijo motnje s hitrostjo zvoka c glede na plin. V času t se motnje razširijo glede na plin do razdalje ct na vse strani in deli plina prepotujejo pot vt v smeri toka. Tako dosežejo motnje površje krogle z radijem ct in središčem v razdalji vt od ovire. Za $v < c$ je ovira v notranjosti krogle; vpliv ovire je zaznaven tudi pred oviro in po dovolj dolgem času sploh po vsem toku (sl. 1a). Za $v > c$ pa je ovira zunaj krogle in vpliv ovire zajema samo del toka, ki ga omejuje *karakteristična ploskev*. V našem primeru je to *Machov stožec* s polovičnim kotom ob vrhu osnega preseka $\alpha = \arcsin(c/v)$ (sl. 1b).



Sl. 1. Razširjanje motnje okoli majhne ovire v podzvočnem (a) in nadzvočnem (b) plinskem toku

V splošnem hitrost v ni po vsem toku enaka, tako da se razmere spreminjajo s krajem. Karakteristična ploskev ni več plašč stožca, a kot med smerjo hitrosti v nemotenem delu toka in karakteristično ploskvijo je še vedno enak α , če vstavimo za c v vsaki točki tamkajšnjo *lokalno hitrost zvoka*.

V enačbi gibanja za plinski tok ne upoštevamo viskoznosti in teže

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p$$

V stacionarnem toku velja tedaj na tokovnici $\rho v dv = -dp = -c^2 d\rho$, tako da je $dp/dv = -\rho v/c^2$. Spremembo tlaka smo izrazili s spremembo gostote in z lokalno hitrostjo zvoka; v izentropnem toku velja namreč $c^2 = dp/d\rho$. Pri odvajanju velikosti gostote masnega toka ρv po velikosti hitrosti ne moremo mimo spremenljivosti gostote

$$d(\rho v)/dv = \rho + v d\rho/dv = \rho(1 - v^2/c^2) \quad (1)$$

Za $v < c$ je odvod pozitiven; gostota toka narašča z naraščajočo hitrostjo in tokovnice se zblížajo na kraju, na katerem je večja hitrost. Za $v > c$ pa je odvod negativen; gostota toka pojema z naraščajočo hitrostjo in tokovnice se razmaknejo na kraju, na katerem je večja hitrost.

Obravnavajmo zdaj nestacionaren izentropen plinski tok v eni razsežnosti! V enačbi gibanja zopet izrazimo spremembo tlaka s spremembo gostote in z lokalno hitrostjo zvoka:

$$\partial v/\partial t + v \partial v/\partial x = -(c^2/\rho) \partial \rho/\partial x \quad (2a)$$

Kontinuitetna enačba pa se glasi

$$\partial \rho/\partial t = -\partial(\rho v)/\partial x = -\rho \partial v/\partial x - v \partial \rho/\partial x \quad (2b)$$

Enačbi (2) je mogoče prevesti v obliko

$$\partial I_+/\partial t = -(v + c) \partial I_+/\partial x, \quad \partial I_-/\partial t = -(v - c) \partial I_-/\partial x \quad (3a)$$

Riemannovi invarianti

$$I_+(x, t) = v + \int c d\rho/\rho, \quad I_-(x, t) = v - \int c d\rho/\rho \quad (3b)$$

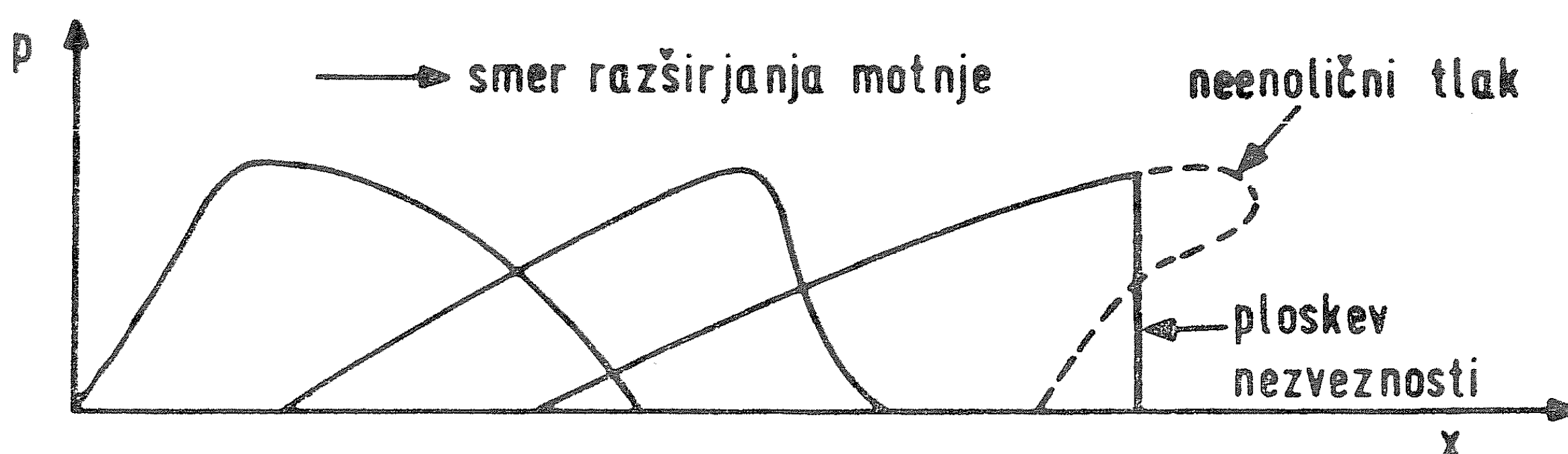
sta v splošnem funkciji kraja in časa. Iz enačb (3a) v obliki $\{\partial/\partial t + (v \pm c) \partial/\partial x\} I_{\pm} = 0$ pa razberemo, da je $I_+ = \text{konst.}$ za $dx/dt = v + c$ in $I_- = \text{konst.}$ za $dx/dt = v - c$. $dx/dt = v \pm c$ sta enačbi *karakteristik* in podajata motnji, ki se širita s hitrostjo zvoka glede na plin v smeri pozitivne osi x in v nasprotni smeri.*

V izentropnem toku idealnega plina uporabimo enačbo $p = p_1(\rho/\rho_1)^\kappa$, v kateri je $\kappa = c_p/c_v$ razmerje specifičnih toplot. Z njo dobimo za hitrost zvoka $c = (\kappa p/\rho)^{1/2} = (\kappa p_1^{1/\kappa}/\rho_1)^{1/2} p^{(\kappa-1)/2\kappa} = (\kappa p_1/\rho_1^\kappa)^{1/2} \rho^{(\kappa-1)/2}$. Tako sledi

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^p c d\rho/\rho &= (\kappa p_1/\rho_1^\kappa)^{1/2} \int_{p_1}^p \rho^{(\kappa-3)/2} d\rho = 2(\kappa p_1/\rho_1^\kappa)^{1/2} \cdot (\rho^{(\kappa-1)/2} - \rho_1^{(\kappa-1)/2})/(\kappa - 1) = \\ &= 2c/(\kappa - 1) - 2c_1/(\kappa - 1) \end{aligned}$$

Pri tem je c lokalna hitrost zvoka v točki, v kateri sta tlak p in gostota ρ , in c_1 lokalna hitrost zvoka v izbrani začetni točki, v kateri sta tlak p_1 in gostota ρ_1 . Upoštevajmo, da je invarianta $I_- = v - 2c/(\kappa - 1) + 2c_1/(\kappa - 1)$ konstanta in da velja zaradi tega tudi $v = 2c/(\kappa - 1) +$

* Enačbe (2) in (3) so *hiperbolične*, enačbe gibanja v podzvočnem območju pa so *eliptične*.

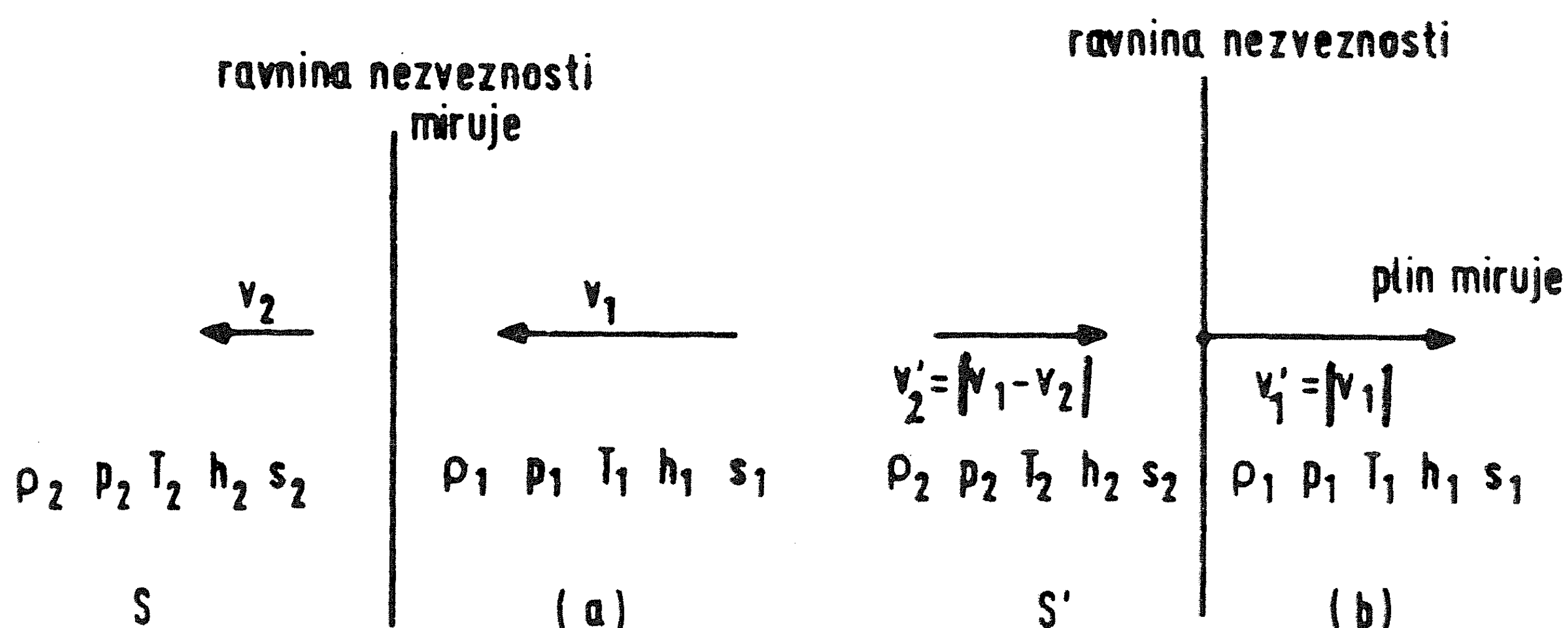


Sl. 2. Krajevni potek tlaka med razširjanjem dovolj goste motnje po plinu

+ konst. Hitrost delov idealnega plina v je tem večja, čim večja je lokalna hitrost zvoka, se pravi, čim večja je gostota ali čim večji je tlak. To pomeni, da se giblje najhitreje del motnje, v katerem je največji tlak. Vrh dovolj goste motnje naj bi prehitel dolino! Taka neenoličnost ne nastane, pač pa se izoblikuje *ploskev nezveznosti*, na kateri imajo skok tlak, gostota in nekatere druge količine (sl. 2). V razredčini ta pojav ne nastopi.

Udarni valovi

V nadaljnjem se zanimamo za pojave, pri katerih so bistvene ploskve nezveznosti.* Najpreprostejši pojav te vrste je ravni *udarni val* v eni razsežnosti: ploskev nezveznosti je del ravnine in tokovnice so pravokotne nanjo. Postavimo se v koordinatni sistem S , v katerem miruje ravnina nezveznosti. Količine na strani, s katere se giblje plin proti tej ravnini, zaznamujemo z indeksom 1, količine na drugi strani pa z indeksom 2 (sl. 3a). Poiščimo



Sl. 3. Koordinatni sistem S , v katerem miruje ravnina nezveznosti (a), in laboratorijski sistem S' , v katerem miruje plin pred to ravnino (b)

enačbe za gibanje plina čez ravnino nezveznosti! Opazujemo majhen del plina pri prehodu čez to ravnino. Iz zakona o ohranitvi mase sledi *ohranitev gostote masnega toka*

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (4)$$

Iz izreka o gibalni količini sledi *ohranitev celotne gostote toka gibalne količine*

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (5)$$

V toku, v katerem gostota in temperatura nista povsod enaki, moramo vključiti v energijski zakon poleg kinetične energije in dela tlaka tudi notranjo energijo. Tako velja $\frac{1}{2}mv^2 + pV + W_n = \text{konst.}$ za del plina z maso m , če ne upoštevamo potencialne energije in če se ne izmenjava toplota z drugimi deli plina. Tako pridemo do posplošene *Bernoullijeve enačbe*

$$\frac{1}{2} v_1^2 + h_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + h_2 \quad (6)$$

$H = W_n + pV$ je entalpija in $h = H/m$ specifična entalpija.

* Pri nekaterih pojavih, na primer pri stacionarnem iztekanju plina skozi šobo, se tudi v nadzvočnem območju ni treba ozirati na nezveznosti. Tedaj si pomagamo samo z Bernoullijevo enačbo (6). Pri iztekanju skozi divergentno šobo (upoštevaj (1)) lahko hitrost plina preseže hitrost zvoka. Iz (6) sledi za največjo dosegljivo hitrost plina $v_2 = c_1[2/(\kappa - 1)]^{\frac{1}{2}}$, če je c_1 hitrost zvoka v točki, v kateri plin miruje, in se plin razpenja v prostor z zelo majhnim tlakom.

Rankine-Hugoniotove enačbe (4), (5) in (6) določajo gibanje plina čez ravnino nezveznosti. Iz njih lahko izračunamo skok gostote, hitrosti in specifične entalpije

$$\begin{aligned}\rho_2 - \rho_1 &= \rho_1(p_2 - p_1)/(\rho_1 v_1^2 + p_1 - p_2) \\ v_1 - v_2 &= (p_2 - p_1)/\rho_1 v_1 \\ h_2 - h_1 &= (p_2 - p_1)(2\rho_1 v_1^2 + p_1 - p_2)/2\rho_1^2 v_1^2\end{aligned}\quad (7)$$

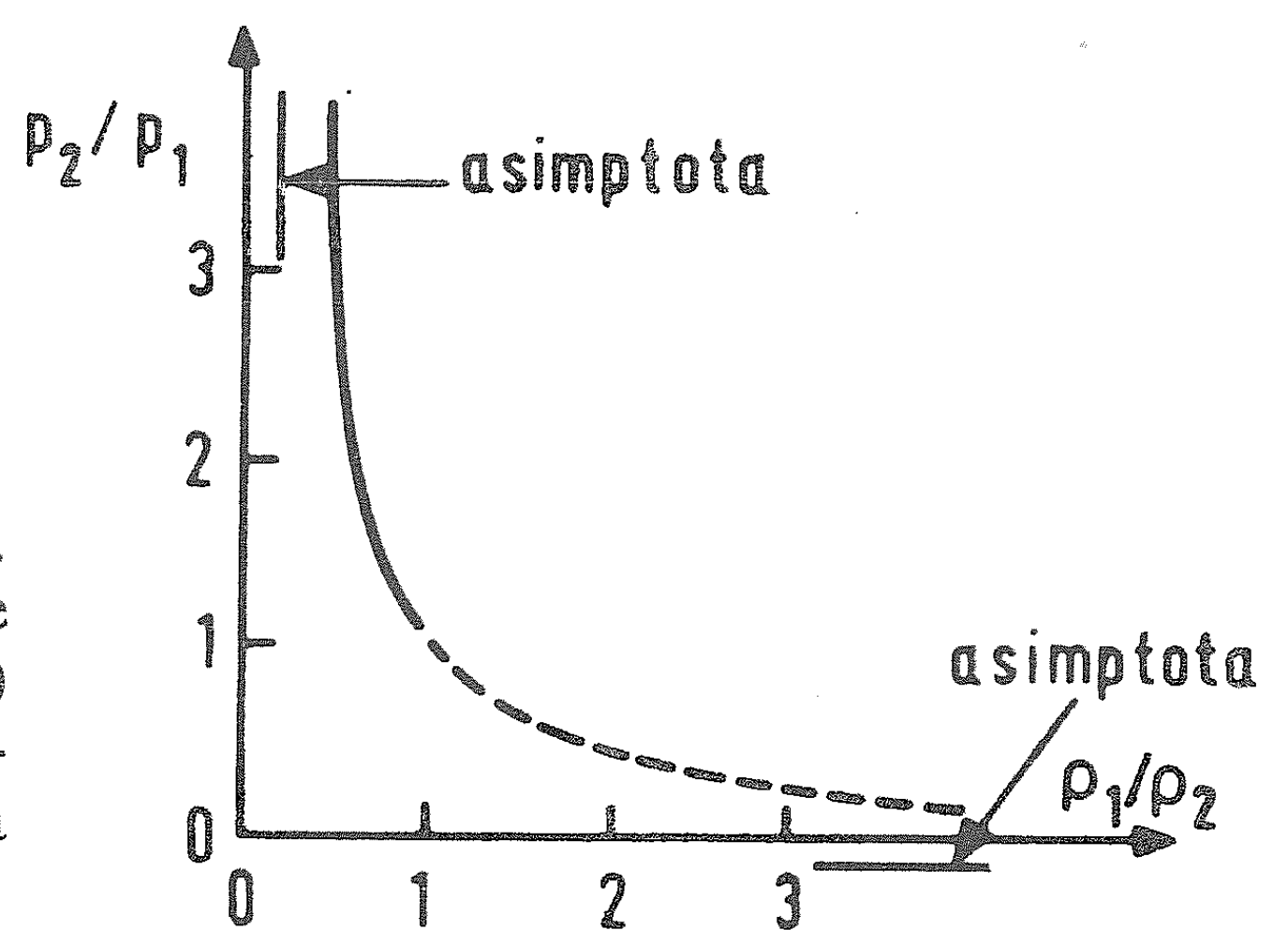
Tudi temperatura in entropija doživita skok na ravnini nezveznosti.

Za idealni plin je specifična entalpija $h = c_p T = \kappa p/(\kappa - 1)\rho$, tako da velja na primer

$$\begin{aligned}\rho_1/\rho_2 &= \{(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2\}/\{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2\} \\ v_1^2 &= \frac{1}{2} \{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2\}/\rho_1\end{aligned}\quad (8)$$

Razmerje temperatur dobimo iz plinske enačbe $T_2/T_1 = p_2\rho_1/p_1\rho_2$, skok specifične entropije pa iz enačbe $s_2 - s_1 = c_p \ln \{(p_2/p_1)^{1/\kappa} \rho_1/\rho_2\}$.

Zveze (7) dajo pri začetnem tlaku p_1 in začetni gostoti ρ_1 vse dosegljive vrednosti tlaka p_2 v odvisnosti od gostote ρ_2 . To odvisnost ponazorimo v diagramu $p_2(1/\rho_2)$ z udarno (dinamično) ali Hugoniotovo adiabato (sl. 4).



Sl. 4. Hugoniotova adiabata za dvoatomni plin ($\kappa = 1,4$). Dosegljiva so stanja na sklenjenem delu krivulje. To je veja hiperbole z asimptotama pri $\rho_1/\rho_2 = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$ in $p_2/p_1 = -(\kappa - 1)/(\kappa + 1)$, ki je bolj strma od Poissonove adiabate $p/\rho^\kappa = \text{konst.}$ Za prvo velja $s_2 > s_1$, a za drugo $s = \text{konst.}$

Pogosto v laboratorijskem sistemu S' ne miruje ravnina nezveznosti, ampak plin pred njo. V tem sistemu se giblje tedaj ravnina nezveznosti s hitrostjo v_1 in plin za njo s hitrostjo $v_1 - v_2$ (sl. 3b).

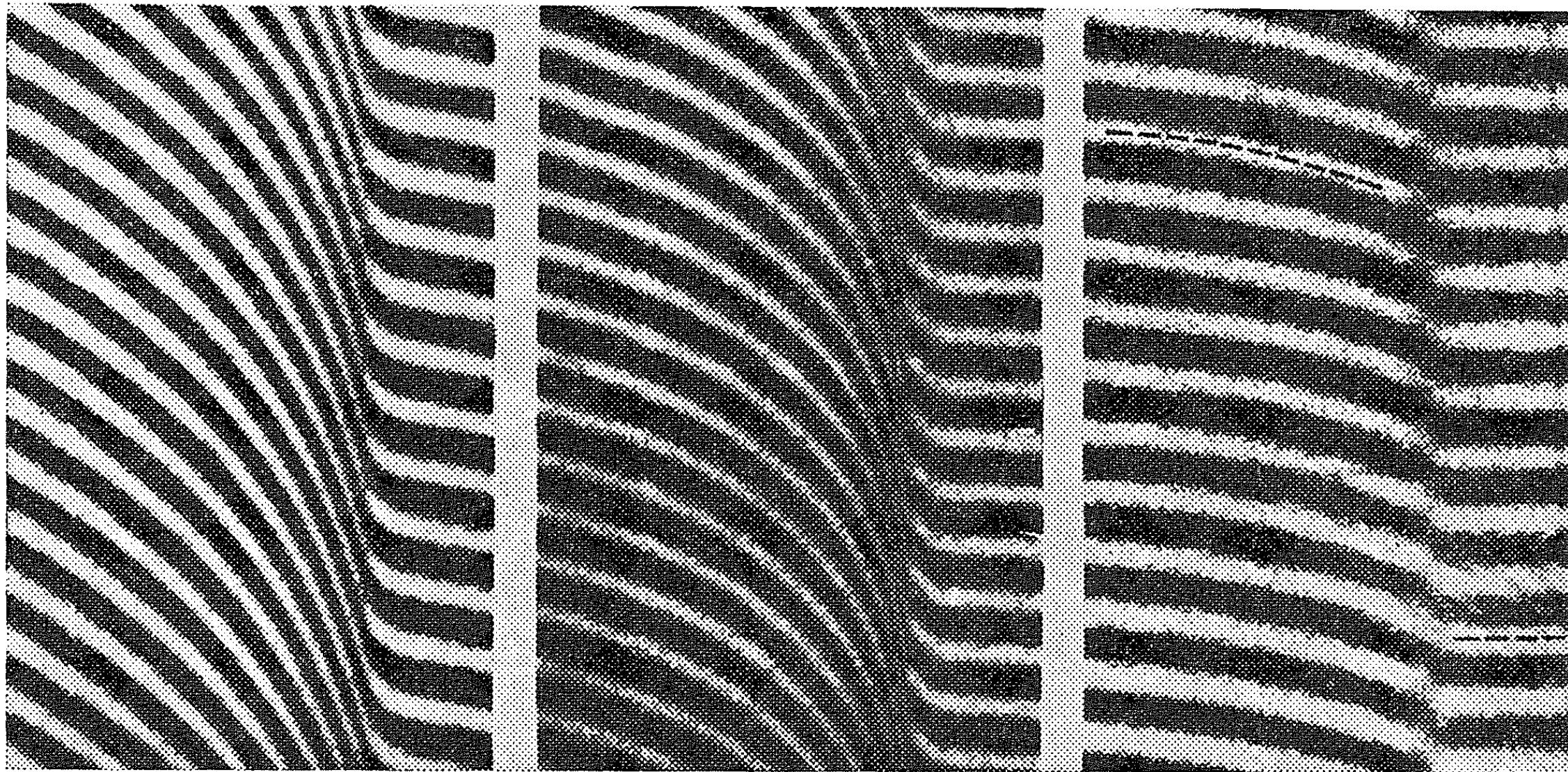
Iz druge enačbe (8) sledi hitrost šibkih ($p_2 \rightarrow p_1$) udarnih valov $v_1 = c_1 = (\kappa p_1/\rho_1)^{1/2}$. Šibki udarni valovi se širijo s hitrostjo zvoka.* S tem smo opravičili začetno trditev. Hitrost močnih ($p_2 \gg p_1$) udarnih valov pa je $v_1 = \{(\kappa + 1)p_2/2\rho_1\}^{1/2}$.

Udarni valovi nastanejo pri plosku z rokami, pri blisku, pri eksplozijah. V prvem primeru so zelo šibki, v drugem nekoliko močnejši, v tretjem pa tako močni, da lahko po-dirajo zgradbe. Našteti udarni valovi niso ravni. V veliki razdalji od izvira postanejo zato v vsakem primeru šibki. Če pa opazujemo samo na kratkih razdaljah okoli izbrane smeri, jih smemo obravnavati približno kot ravne.

V laboratoriju dobijo ravne udarne valove v udarni cevi. To je več metrov dolga cev, ki jo najprej evakuirajo. Nato vstavijo vanjo tanko opno in napolnijo daljši del cevi s plinom pri majhnem tlaku, krajšega pa z enakim ali drugim plinom pri velikem tlaku. Opna poča zaradi prevelike tlačne razlike ali pa jo predrejo. Tedaj se izoblikuje v cevi raven udarni val, ki se giblje od dela z velikim tlakom proti drugemu delu. Zaradi znatnega skoka gostote ga je mogoče lepo opazovati interferometrično (sl. 5).

* Za $p_2 \rightarrow p_1$ sledi iz prve enačbe (7) $v_1^2 = (p_2 - p_1)\rho_2/(\rho_2 - \rho_1)\rho_1 \rightarrow dp/d\rho$. Pri tem je sprememba entropije majhna količina tretjega reda, ki jo smemo zanemariti in vzeti odvod pri konstantni entropiji. Za idealni plin velja $s_2 - s_1 = (\kappa^2 - 1)c_p(p_2 - p_1)^3/12\kappa^3 p_1^3$.

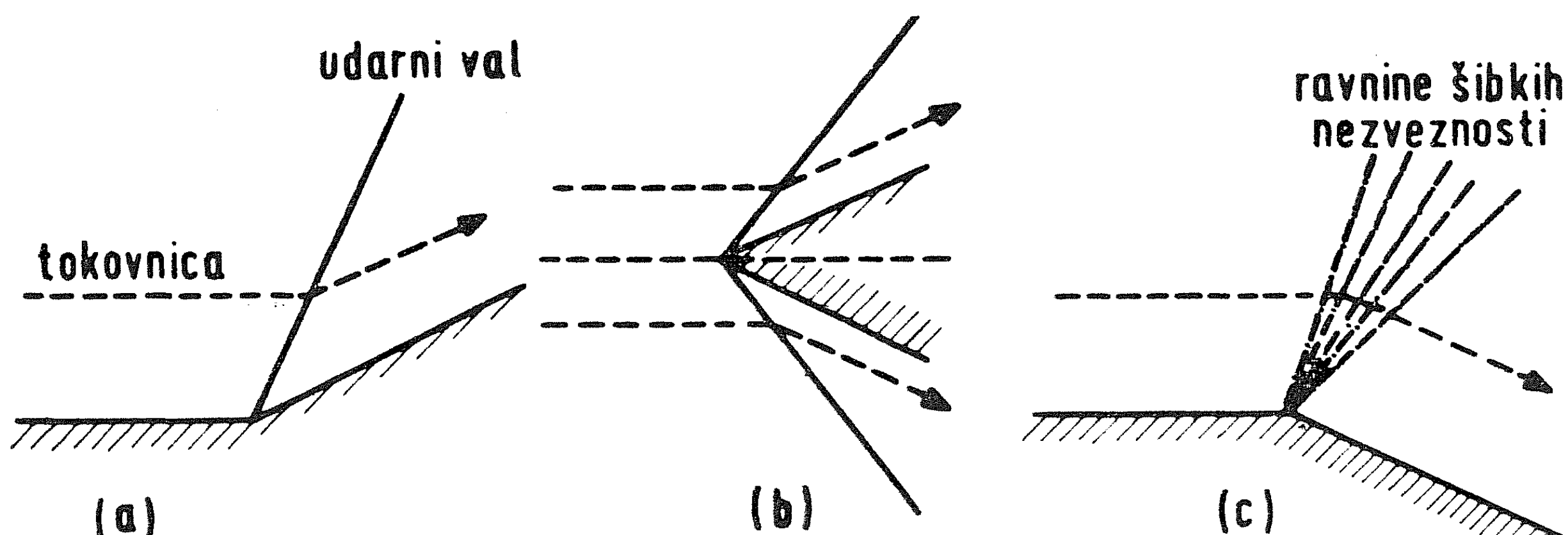
Pri poševnih udarnih valovih tokovnice niso pravokotne na ploskev nezveznosti. Za primer, v katerem je ploskev nezveznosti del ravnine, je rešitev hitro pri roki. V sistemu S ostane tangenta komponenta hitrosti pri prehodu čez ravnino nezveznosti nespremenjena: $v_{1t} = v_{2t}$. Skok doživi le pravokotna komponenta. V veljavi ostanejo vse enačbe



Sl. 5. Nastanek ravnega udarnega vala v udarni cevi. Fotografijo so napravili z Mach-Zehnderjevim interferometrom, pri katerem gre prvi delni curek skozi stekleno udarno cev, drugi pa mimo nje. Na treh fotografijah, z leve proti desni v vse večji razdalji od začetne lege opne, je mogoče zasledovati, kako se postopno izoblikuje ravnina nezveznosti [4]

(4) — (8), če nadomestimo v njih hitrosti v_1 in v_2 z njunima pravokotnima komponentama v_{1n} in v_{2n} . Tokovnica se lomi na ravnini nezveznosti. Velja lomni zakon $\tan \varphi_2 / \tan \varphi_1 = (v_{2t} / v_{2n}) / (v_{1t} / v_{1n}) = v_{1n} / v_{2n} = \rho_2 / \rho_1 > 1$, v katerem je φ_1 vpadni kot in φ_2 lomni kot. Ti sklepi ostanejo v veljavi celo pri ukrivljenih in nestacionarnih udarnih valovih.

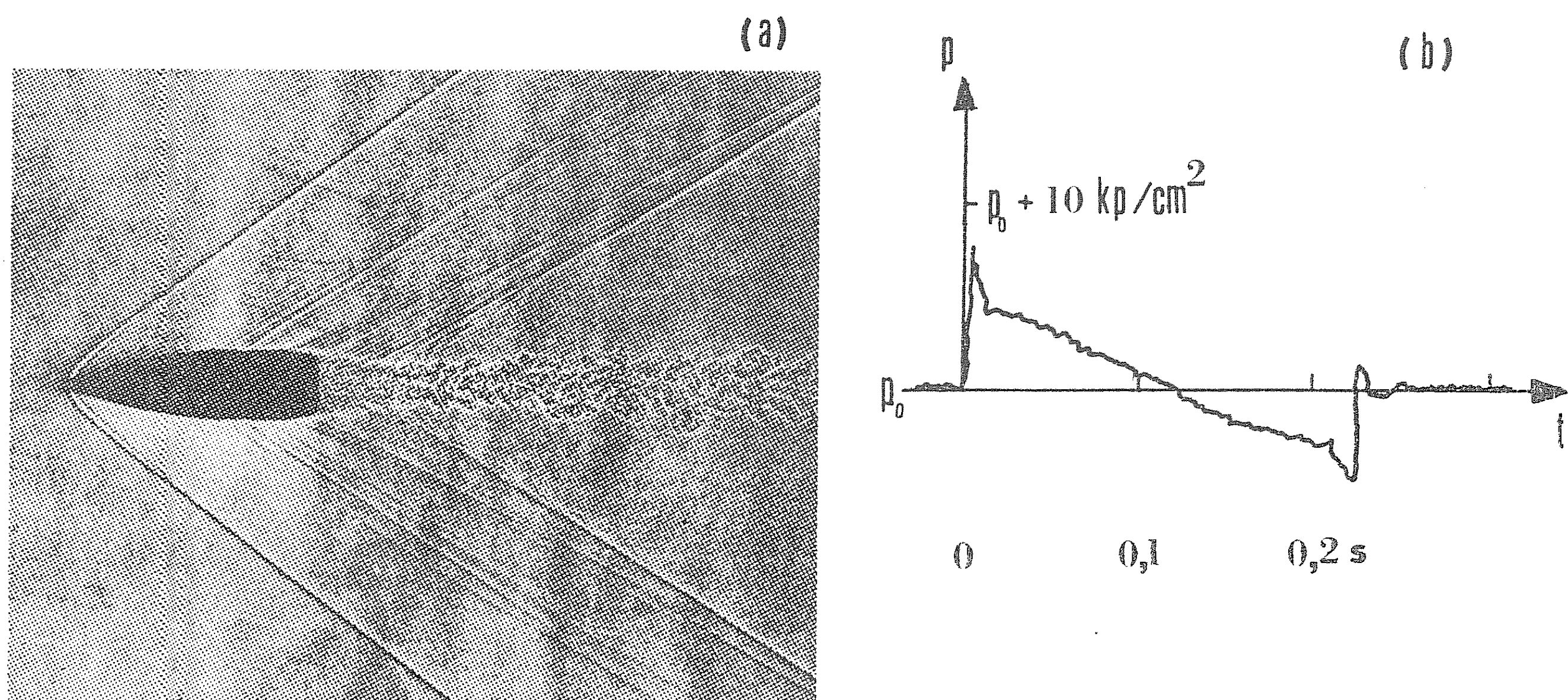
Poševni udarni valovi nastanejo pri gibanju teles z veliko hitrostjo po plinu, na primer pri gibanju po zraku izstrelkov, nadzvočnih letal, raket, vesoljskih ladij med pristajanjem. Najlažje je pojasniti udarni val, ki nastane v toku ob konkavnem kotu med ravninama ali ob simetrično postavljenem klinu. Lego vala določimo z lomnim zakonom; tokovnice so namreč vzporedne z oviro (sl. 6a, b). Udarni val, ki pa ni raven, nastane v toku ob stožcu



Sl. 6. Udarni valovi ob konkavnem kotu (a) in ob klinu (b) in pahljača ravnin šibkih nezveznosti ob konveksnem kotu (c)

pri vrhu stožca. Podoben udarni val kot pri vrhu telesa, se pojavi tudi pri njegovem repu. Ta udarna vala sta praktično pomembna pri letu nadzvočnih letal. (Našteti poševni udarni valovi so karakteristične ploskve, ki smo jih omenili na začetku.)

Pri toku ob konveksnem kotu med ravninama se plin ne zgosti, ampak se razpne. V tem primeru se ne izoblikuje prava ravnina nezveznosti, torej udarni val, ampak *pahljača ravnin šibkih nezveznosti* (sl. 6c). Pahljača ploskev šibkih nezveznosti nastane ob boku ovire v nadzvočnem toku. Udarne valove in pahljače ploskev šibkih nezveznosti je najpreprosteje opazovati z metodo migotic (sl. 7a).

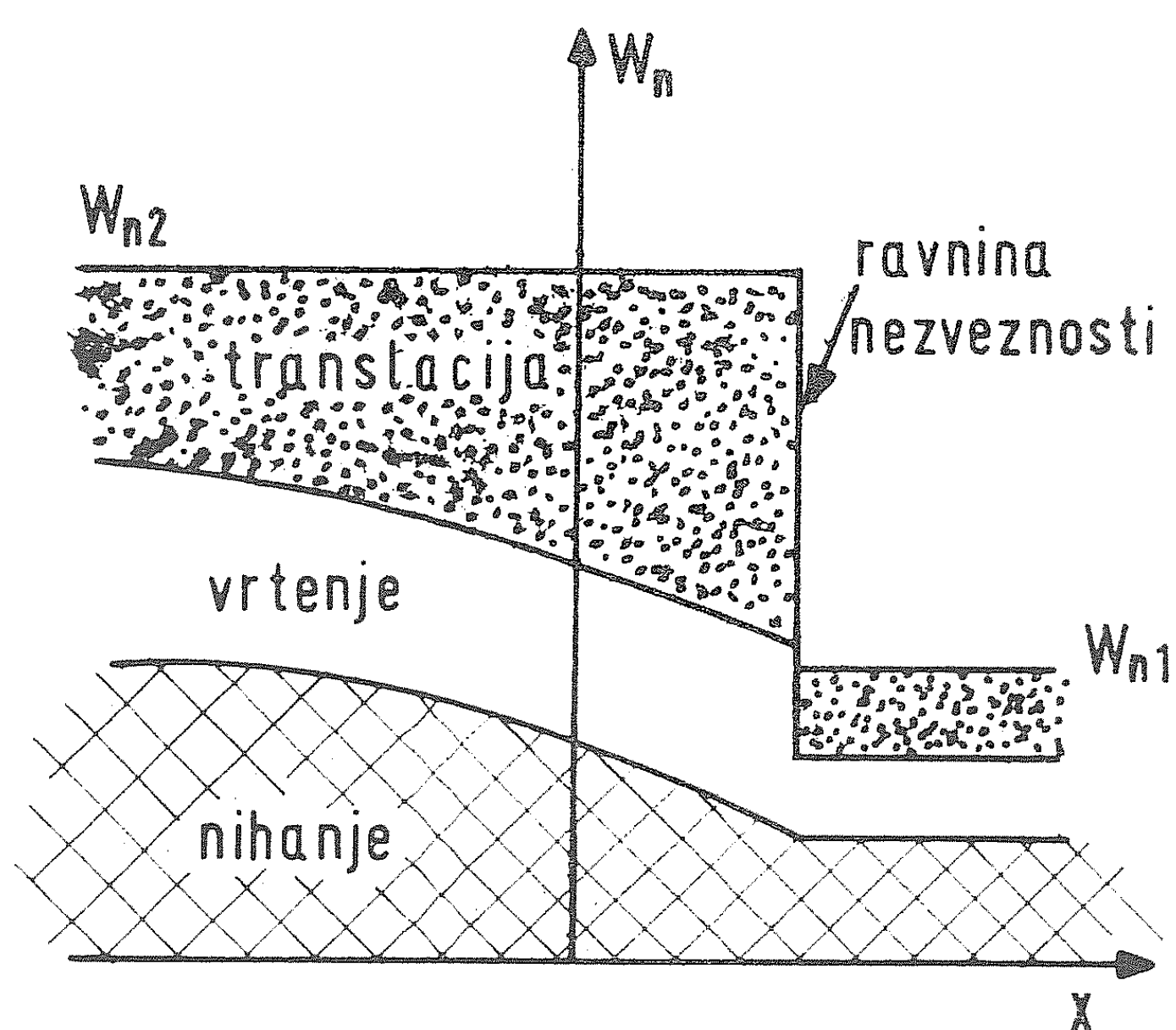


Sl. 7. Udarne valova pri vrhu in repu izstrelka, ki se giblje z nadzvočno hitrostjo po zraku. Ob bokih je mogoče zaslediti tudi pahljači ravnin šibkih nezveznosti (a). Tipična tlačna sprememba v obliki črke N, ki jo izzove pri tleh prelet nadzvočnega letala. Povečanje tlaka ustreza poševnemu udarnemu valu pri vrhu, zmanjšanje tlaka pa valu pri repu letala. Tlačna sprememba je neprijetna, slišimo jo kot pok (ali dva poka), lahko pa poškoduje tudi šipe in celo zidove na stavbah. To je eden izmed vzrokov za odpor proti potniškim nadzvočnim letalom (b) [5]

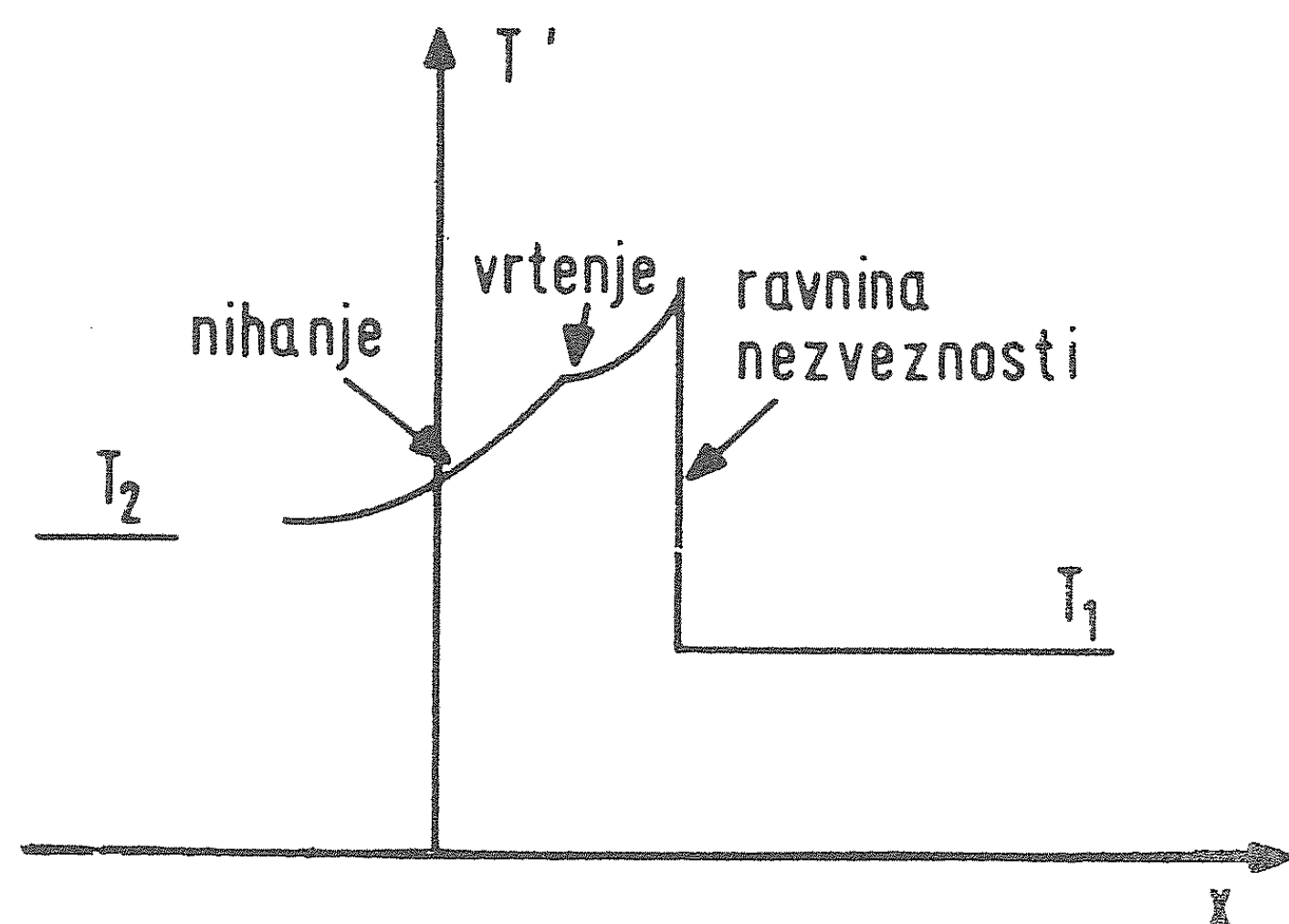
Veljavnost enačb

Ploskev nezveznosti je zgolj koristna idealizacija. V resnici se tlak, gostota in druge količine spreminjajo zvezno. Obravnavanje teh količin na *prehodnem območju*, ki smo ga doslej idealizirali s ploskvijo nezveznosti, je zelo zapleteno. Upoštevati je treba viskoznost in tudi prevajanje toplote. Ne da bi računali, pa lahko ocenimo debelino prehodnega območja z več poprečnimi prostimi potmi l . Razmere na obeh straneh se razlikujejo, tako da si moramo pomagati z neko srednjo poprečno prosto potjo. Sklepamo tudi, da je debelina tem manjša, čim močnejši je udarni val. Podrobnejši računi pokažejo, da je debelina prehodnega območja, določenega s 5% in 95% spremembe hitrosti, vsaj $8l_2$ pri razmerju $p_2/p_1 = 20$.

Pri prehodu skozi udarni val se poveča plinu notranja energija. V večatomnih plinih, kakršen je zrak, se energija ne razdeli takoj enakomerno na vse vrste gibanja molekul.



(a)

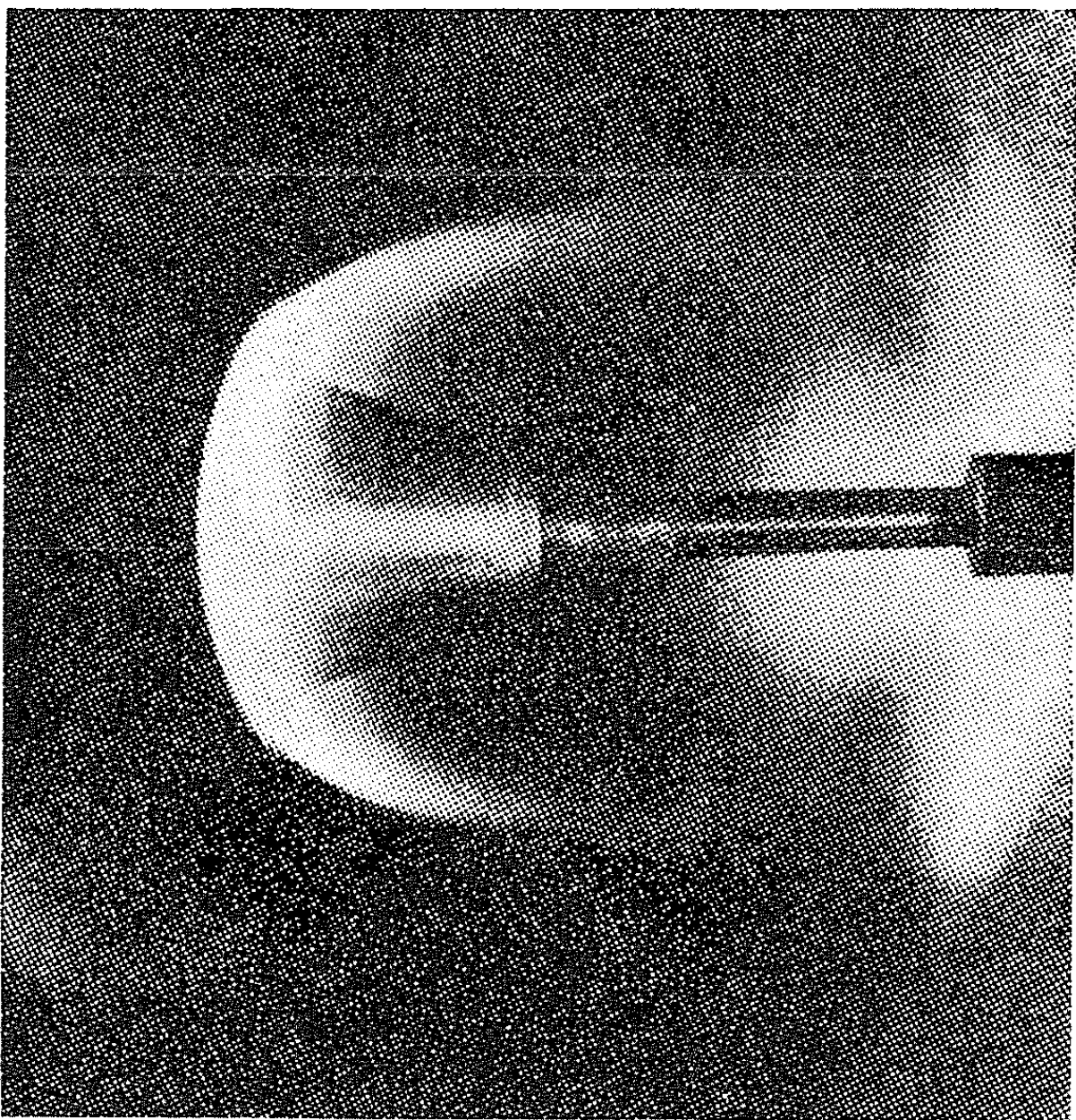


(b)

Sl. 8. Razdelitev energije v razredčenem dvoatomnem plinu na razne vrste gibanja molekul (a) in približevanje k ravnovesju za temperaturo, definirano s translacijsko kinetično energijo molekul (b) (shematično). Sliki si približno ustrezata; na obeh je prehodno območje idealizirano kar z ravnino nezveznosti [3], [4]

Tik po prehodu je glavni del prirastka energije naložen v translacijo molekul. Šele po kakih desetih trkih in več prevzame svoj del vrtenje molekul in še pozneje nihanje (sl. 8a). Razmere so na začetku močno neravnovesne, tako da je težko govoriti o temperaturi. Če pa definiramo temperaturo s translacijsko kinetično energijo molekul, temperatura najprej hitro zraste in potem počasneje pade na ravnovesno vrednost (sl. 8b). Ta pojav je znan kot *relaksacija*.

V dovolj močnih udarnih valovih pride do znatne *disociacije* molekul in pri še močnejših udarnih valovih celo do *ionizacije*. To vpliva na veljavnost enačb. Nekako pri $T_2 = 10^3$ K se v znatni meri vzbudi nihanje dvoatomnih molekul in se zmanjša κ od $(5 + 2)/5 = 1,4$ na približno $(7 + 2)/7 = 1,29$. Ob znatni disociaciji, v zraku pri nekako $T_2 = 10^4$ K, preneha veljati plinska enačba; namesto $p_2 = \rho_2 RT_2/M$ velja $p_2 = \rho_2(1 + \delta)RT_2/M$, če je δ *stopnja disociacije*. Zaradi obeh pojavov bo prava temperatura nižja od izračunane: pri hitrosti $v_1 = 3$ km/s da na primer račun za zrak pri navadnih okoliščinah $T_2 = 5 \cdot 10^3$ K, namerijo pa le okoli $3,5 \cdot 10^3$ K. Podobna odstopanja se pokažejo tudi pri gostoti. Manjše pa je neskladje med izračunanimi in izmerjenimi hitrostmi. Naposled je treba pri zelo močnih udarnih valovih, v zraku pri nekako $T_2 = 10^5$ K, upoštevati tudi sevanje (sl. 9). Pri temperaturi T_2 okoli $3 \cdot 10^5$ K segreje sevanje zrak pred udarnim valom do tolikšne temperature, da sploh ni več skoka temperature.



Sl. 9. Udarni val ob modelu vesoljske ladje pri gibanju po zraku z osemnopolkratno hitrostjo zvoka, fotografiran s svetlobo, ki jo seva sam plin [3]

Zanimanje za udarne valove se je v zadnjem času močno povečalo v zvezi s proučevanjem možnosti za kontrolirano zlivanje lahkih atomskih jeder. Računi in poskusi se vrtijo okoli takihle pojavov: na drobno kapljico težke vode usmerijo več stekajočih se laserskih curkov. Del snovi odpari, preostanek pa se zaradi močnega konvergentnega udarnega vala spremeni v vročo plazmo, v kateri naj bi se zlivala jedra devterija.

LITERATURA

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifšic, *Lehrbuch der theoretischen Physik, VI, Hydrodynamik*, Akademie Verlag, Berlin 1974, prevod iz ruščine, str. 363 in dalje.
- [2] D. C. Pack, *Shockwave Phenomena* v knjigi *Research Frontiers in Fluid Dynamics*, urednika R. J. Seeger in G. Temple, Interscience, New York 1965, str. 212 in dalje.
- [3] L. Davies, J. L. Wilson, *Flight Through the Air at Very High Speeds*, Contemporary Physics **10** (1969) 263.
- [4] M. McChesney, *Shock Waves and High Temperature*, Scientific American **208** (1963) (2) 109.
- [5] H. H. Hubbard, *Sonic Booms*, Physics Today **21** (1968) (2) 31.

DINAMIKA ATMOSFERE

ZDRAVKO PETKOVŠEK

UDK 551.511.3

Poleg pregleda glavnih posebnosti atmosferskih gibanj podaja prvi del članka osnovne značilnosti obsežnih stacionarnih horizontalnih tokov (geostrofske, gradientne in ciklostrofične vetrove) in kvalitativni prikaz vpliva trenja pri tleh. Drugi del obravnava poleg nekaterih osnov splošne cirkulacije atmosfere eno od poti do Rossbyjeve enačbe in značilnosti Rossbyjevih valov.

DYNAMICS OF THE ATMOSPHERE

In the first part of the article the main peculiarities of atmospheric motion and basic characteristics of broad stationary horizontal flows (geostrophic, gradient and cyclostrophic winds) together with the qualitative description of surface friction effects are given. In the second part some peculiarities of general circulation and a way to the Rossby equation as well as the characteristics of Rossby waves are presented.

Uvod

V zemeljski atmosferi opazujemo zelo različna gibanja zraka — od drobnih vrtincev, raznih valovanj do obsežnih skoraj ravnih tokov. Razen pri zelo počasnih gibanjih s hitrostmi pod nekaj cm/s je atmosfersko gibanje zraka turbulentno in v atmosferi najdemo vrtince raznih dimenzij, npr.:

majhni vrtinci	10^{-2} m
vrtinčni vetrovni sunki	10 m
vrtinci za hribi, tornadi	10^2 m
cikloni	10^6 m
splošni zahodnik	10^7 m

Najsplošnejša enačba gibanja naj bi zajemala vsa ta gibanja. Razumljivo je, da zanjo ni preproste enotne analitične rešitve.

Zvočni valovi v meteorologiji niso pomembni, gravitacijski pa le lokalno [1]. Pri numeričnem reševanju enačb gibanja pa povzročajo oboji težave, ker povečujejo numerično nestabilnost in so bili med vzroki neuspehov prvih numeričnih vremenskih napovedi. Danes jih zato pri računanju v meteorologiji večinoma izločimo. Toda tudi brez teh valov je raznolikost atmosferskih gibanj (že glede na dimenzije vrtincev) tako velika, da so potrebne nadaljne poenostavitve, če naj bodo rešitve dovolj preproste.

Vpliv viskoznosti in turbulence na tok zraka v prizemni atmosferi in tudi v višinah je vse prej kot preprost. Poznamo dolgo vrsto načinov določanja, ki pa so vsi le približni, in vrsto količin, parametrov in števil, ki skušajo to ovrednotiti. Z viskoznostjo in turbulenco se tu ne bomo ukvarjali, ampak bomo obravnavali *prosto atmosfero*, v kateri so ti vplivi v prvi aproksimaciji zanemarljivi. Prosta atmosfera je nad prizemno *plastjo trenja*, ki sega okrog 1 km nad tlemi.

V prosti atmosferi se vzpostavljajo kvazistacionarna gibanja zraka, ki jih je mogoče sorazmerno preprosto ponazoriti in razložiti. Večinoma so to obsežna atmosferska gibanja, ki transportirajo zračne mase, barične tvorbe (npr. ciklone), fronte in druge sisteme, ustvarjajo deformacijska (frontogenetična in frontolitična) polja in preko vsega tega odločajo o vremenskem stanju nad obsežnimi področji zemeljske površine.

Če se omejimo na troposfero, so horizontalne dimenzije v njej za 3 velikostne stopnje večje od vertikalnih. Pri obsežnih atmosferskih gibanjih pa so tudi poprečne horizontalne hitrosti nasproti vertikalnim v enakem razmerju. Čeprav so za mnoge vremenske procese in pojave vertikalna gibanja važnejša od horizontalnih, si bomo tu ogledali predvsem preprosto dinamiko in valovanja horizontalnih gibanj — dinamiko vetrov in valove v planetarni cirkulaciji zraka. Glede na to morda naslov preveč obeta.

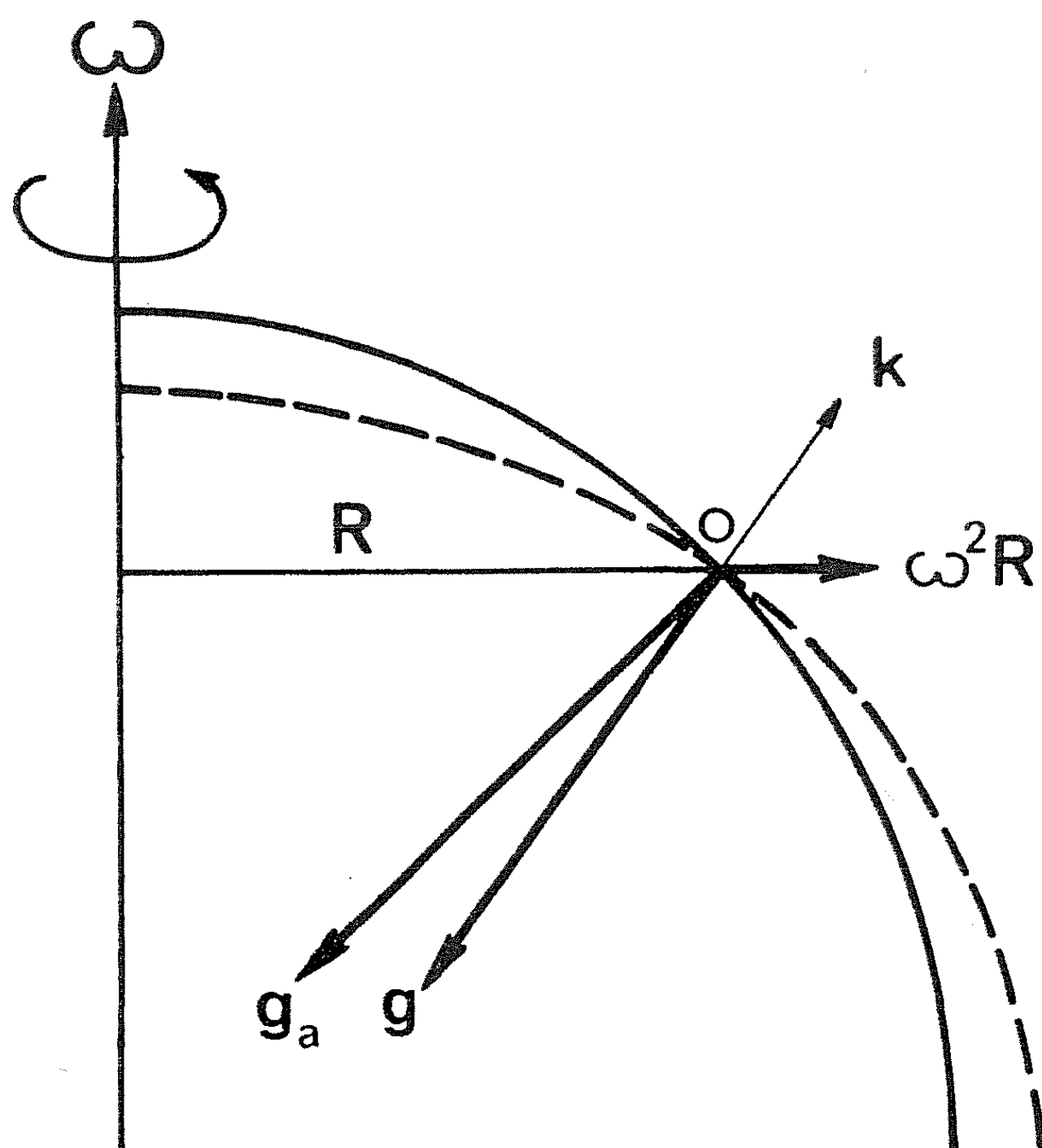
Enačbe gibanja

Zapišimo Navier-Stokesovo enačbo gibanja

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = F / \rho - \rho^{-1} \nabla p - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

v nekoliko drugačni obliki, ki tudi velja za *absolutni sistem*, vezan na središče Zemlje in se ne vrti z njo

$$d_a \mathbf{v}_a / dt = -\rho^{-1} \nabla p + \mathbf{g}_a + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$



Pri tem smo uvedli substancialni odvod hitrosti in zapisali prvi člen z desne strani enačbe (1) kot *absolutni gravitacijski pospešek*.

Na naši vrteči se Zemlji ($\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$) nas zanimajo relativni pospeški v koordinatnem sistemu, ki se z Zemljo vred vrti (npr. točka 0 na sl. 1). Glede na znano zvezo med absolutnim (indeks *a*) in relativnim sistemom [2]

$$d_a \mathbf{A} / dt = d\mathbf{A} / dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (3)$$

velja za $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ (*a* je radij vektor do točke na površini Zemlje)

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (4)$$

Za $\mathbf{A} = \mathbf{v}_a$ pa dobimo

$$d_a \mathbf{v}_a / dt = d\mathbf{v} / dt + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{R} \quad (5)$$

Sl. 1. Zemeljska gravitacijska pospeška

Vektor je $\mathbf{R}$ pravokoten na os (sl. 1). Kombinacija enačb (2) in (5) da relativni pospešek

$$d\mathbf{v} / dt = -\rho^{-1} \nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + \nu_e \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6)$$

Pri tem je $\mathbf{g} = \mathbf{g}_a - \omega^2 \mathbf{R}$ zemeljski gravitacijski pospešek, ki ima smer pravokotno na geoidno zemeljsko površino (sl. 1).

ν_e v enačbi (6) je kinematični koeficient *vrtilne viskoznosti*. Ta koeficient določa gibalno količino, ki jo prenašajo vrtinci, tako kot določa kinematična viskoznost ν gibalno količino, ki jo prenaša gibanje molekul v strižnem polju hitrosti. Pri atmosferskih gibanjih je koeficient vrtilne viskoznosti okoli stotisočkrat večji od molekulske viskoznosti, tako da te sploh ni treba upoštevati. Zadnji člen v enačbi (6) ustreza tedaj notranjemu trenju zaradi turbulence. Ta člen pri obravnavanju gibanj v prosti atmosferi v prvem približku zanemarimo.

Enačba (6) je osnovna enačba gibanja v dinamični meteorologiji. Vertikalni pospeški (predvsem g in $\rho^{-1} \partial p / \partial z$) so večinoma vsaj za 3 velikostne stopnje večji od drugih. Tudi v tem je vzrok, da obravnavamo horizontalna gibanja posebej. Zanje lahko zapišemo ob zanemaritvi trenja enačbo (6) z dvodimenzionalnimi vektorji v obliki

$$d\mathbf{v} / dt = \rho^{-1} \nabla_h p - f \mathbf{k} \times \mathbf{v} \quad (7)$$

Tu je $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$ in $\mathbf{v} = (u, v, 0)$

in je $\mathbf{k}$ etnotni vektor v smeri zenita. f je Coriolisov parameter

$$f = 2\omega \sin \varphi \quad (8)$$

φ geografska širina. Drugi člen na desni strani enačbe (7) je pospešek deviacijske (odklonske) ali Coriolisove sile zaradi vrtenja Zemlje.

Členi enačbe (7) imajo dimenzije pospeškov. V meteorologiji privzemamo, da je masa zračnih delcev enaka enoti, in govorimo o silah namesto o pospeških.

Polja pritiska in gibanj v atmosferi se neprestano spreminjajo. Toda pogosto so spremembe zelo počasne in se pojavljajo kvazistacionarna, skoraj enakomerna uravnovežena gibanja ter je vsota sil na zračne delce enaka nič.

Za obravnavo krožnih horizontalnih gibanj, ki so v atmosferi pogostna, je prikladen cilindrični koordinatni sistem. V njem je ustrezna enačba za uravnovežena stacionarna gibanja brez trenja

$$v^2/r - \rho^{-1} \partial p / \partial r + f v = 0 \quad (9)$$

r je krivinski radij iz središča kroženja zračnih delcev. Simbolično zapišemo

$$C + G + D = 0 \quad (10)$$

$C = v^2/r$ je centrifugalna sila. Ta je za ravne tokovnice ($r = \infty$) enaka nič. Pri navedenih pogojih ustrezajo členi v enačbah (7), (9) in (10) po vrsti centrifugalni, gradientni in deviacijski sili. Velika raznoličnost atmosferskih gibanj zahteva, da glede na dimenzije obravnavanega gibanja, vsakokrat določimo velikost in pomembnost posameznih členov.

Geostrofski veter

Za obsežna skoraj hemisferska gibanja zraka v prosti atmosferi lahko postavimo naslednje karakteristične vrednosti:

dolžina	$L = 10^6 \text{ m}$
hitrost	$v = 10 \text{ m/s}$
fluktuacije pritiska p v horizont.	$\delta_p = 10 \text{ mb}$

V zmernih geografskih širinah je $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Analiza velikostnih stopenj (angl. scale — analysis) posameznih členov enačbe (9) ali (10) da

$$\begin{array}{ccc} V^2/L & \delta p / \rho L & f_0 V \\ 10^{-4} & 10^{-3} & 10^{-3} \text{ m/s}^2 \end{array} \quad (12)$$

To pomeni, da je za taka gibanja prvi člen v prvem približku zanemarljiv ter sta v ravnotežju gradientna in deviacijska sila

$$G + D = 0 \quad (13)$$

To je *geostrofski približek*, ki ga skladno z enačbo (7) zapišemo v obliki

$$-\rho^{-1} \nabla_h p - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g = 0 \quad (14)$$

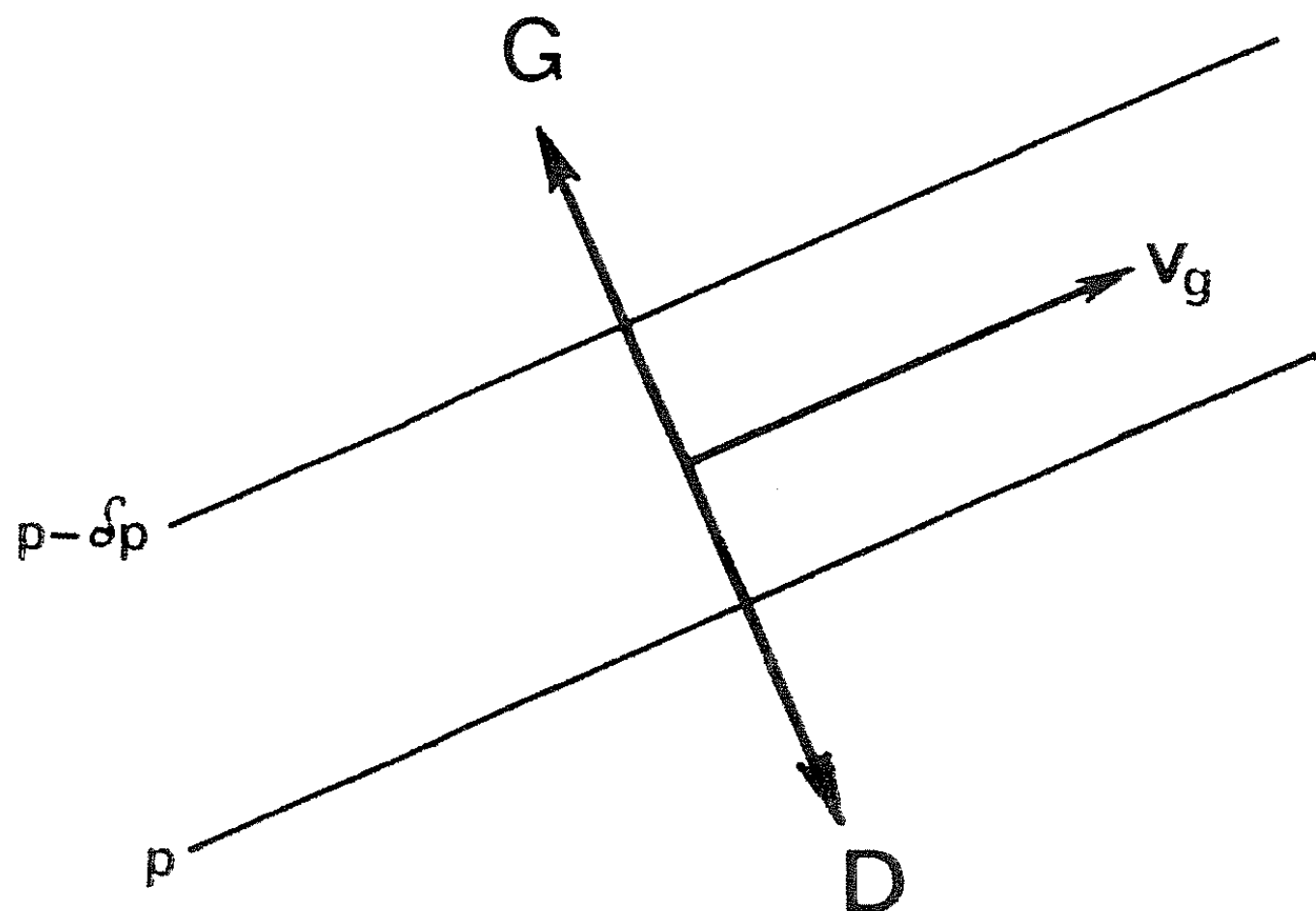
$\mathbf{v}_g$ je *geostrofski veter*. To je najpreprostejši približek obsežnih atmosferskih gibanj. Iz vsakodnevnih višinskih vremenskih kart se lahko prepričamo, da ta približek v praksi večinoma zadovoljuje. Njegovo veljavnost lahko ugotovimo npr. z razmerjem med zanemarjenim členom in deviacijsko silo (V^2/L): (fV) , ki je število brez enote

$$R_0 = V/fL \quad (15)$$

To je *Rossbyjevo število*, ki je mera za veljavnost geostrofskega približka. Ta npr. blizu ekvatorja ne velja, ker gre $f \rightarrow 0$.

Kot sledi iz vektorske multiplikacije enačbe (14) s $\mathbf{k}$ je

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times (\rho f)^{-1} \nabla_h p \quad (16)$$



Sl. 2. Geostrofski veter

in je torej geostrofski veter pravokoten na $\nabla_h p$. Skupaj s poljem pritiska in ravnotežjem sil ga kaže sl. 2.

Vidimo torej, da vetrovi v prosti atmosferi ne pihajo od visokega proti nizkemu zračnemu pritisku, ampak vzporedno ali skoraj vzporedno z izobarami. Za $\mathbf{v}_g = (u_g, v_g, 0)$ zapišemo enačbo (16) v komponentah

$$u_g = -(\rho f)^{-1} \partial p / \partial y, \quad v_g = (\rho f)^{-1} \partial p / \partial x \quad (17)$$

To omogoča preprost izračun hitrosti geostrofskega vetra, če obrnemo eno os koordinatnega sistema v smeri $\nabla_h p$.

V zmernih geografskih širinah je npr. za $\partial p / \partial x = 1 \text{ mb}/100 \text{ km}$ hitrost $v_g = 10 \text{ m/s}$. Vidimo, da že zelo šibko polje pritiska ustvari v prosti atmosferi sorazmerno močne vetrove.

V gornjih enačbah nastopa gostota, ki je ne merimo in ki se z višino naglo spreminja. V meteorološki dinamiki je eliminiramo tako, da preidemo iz obravnave gibanj v horizontalni smeri na obravnavo gibanj po izobarnih ploskvah. Te so skoraj horizontalne. Nagib izobarnih ploskev v atmosferi je namreč:

$$\tan \alpha_p = |\nabla_h p| : \partial p / \partial z \approx 1 : 10^4 \quad (18)$$

V koordinatnem sistemu (z, x) je splošni izraz za gradient p na ploskvi s

$$(\partial p / \partial x)_s = (\partial p / \partial x)_z + (\partial p / \partial z) (\partial z / \partial x)_s \quad (19)$$

Za $s \equiv p$ je člen na levi nič, ker na ploskvi p ni sprememb pritiska. Z upoštevanjem enačbe hidrostatične ($\partial p = -\rho g \partial z$) sledi

$$\rho^{-1} (\partial p / \partial x)_z = g (\partial z / \partial x)_p \quad (20)$$

Enačbi (17) lahko zapišemo kot

$$u_g = -f^{-1} (\partial \Phi / \partial y)_p, \quad v_g = f^{-1} (\partial \Phi / \partial x)_p \quad (21)$$

Indeks p na levi opustimo. V vektorski obliki se glasita

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times f^{-1} \nabla_p \Phi \quad (22)$$

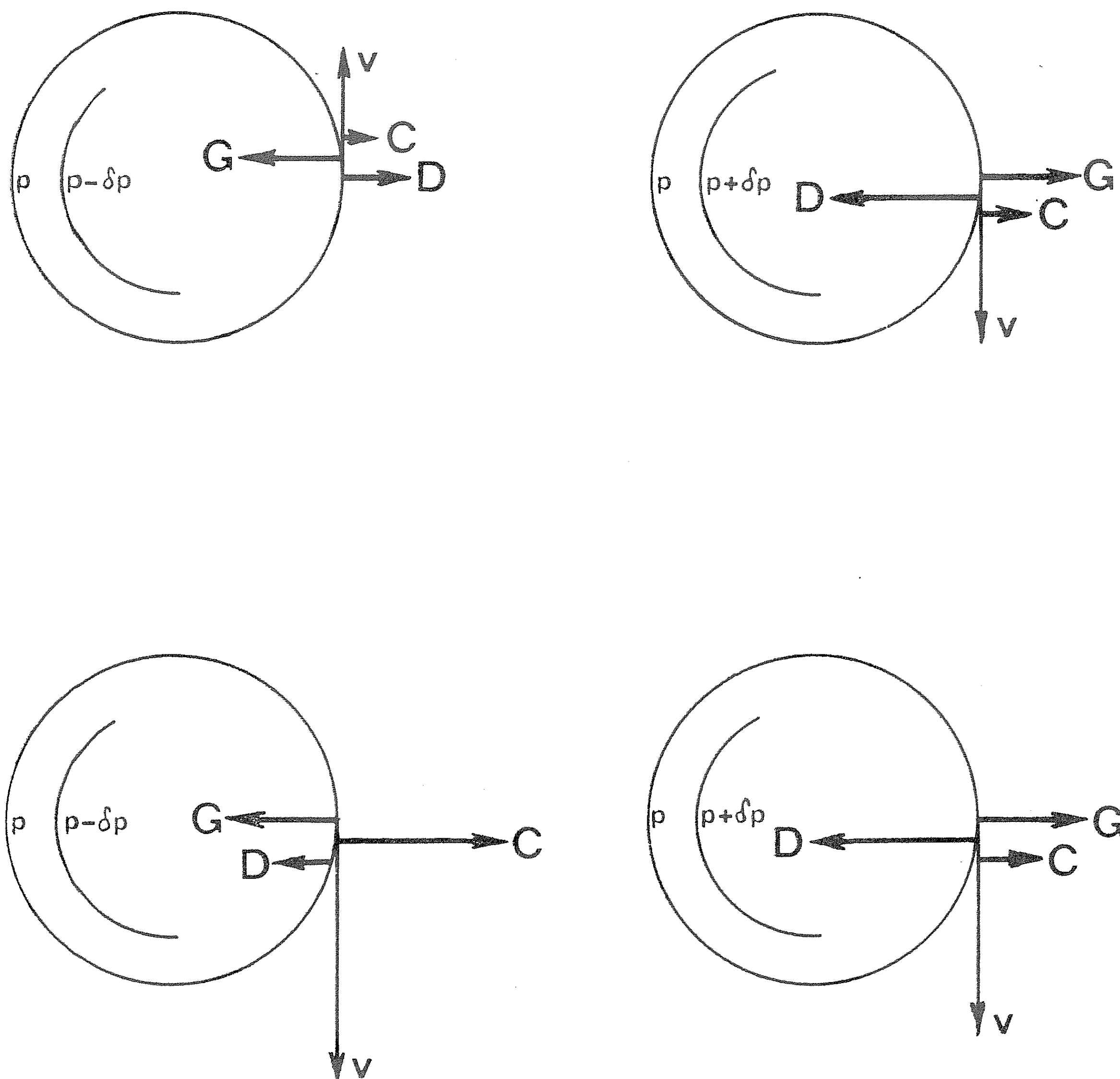
$\Phi = \int_0^z g \, dz$ je *geopotencial* z dimenzijo energije na enoto mase. V meteorologiji ga podajamo v *geopotencialnih metrih*, ki so številčno blizu navadnim metrom: $1 \text{ gpm} = 9,8 \text{ J/kg}$. Namesto da bi risali polje pritiska na izbrani višini, rišemo v meteorologiji za prosto atmosfero na tako imenovanih *višinskih kartah* topografijo (višinske izohipse v gpm) standardnih izobarnih ploskev (850, 700, 500, 300 itd. mb). Na njih so drugi podatki in polja (veter, temperatura, vlaga itd.). Geostrofski veter, ki se večinoma dobro ujema z dejanskim (izmerjenim), je na teh kartah preprosta funkcija topografije, je neodvisen od gostote in enako velja za vse izobarne ploskve.

Gradientni veter

Pri tem je upoštevan tudi vpliv centrifugalne sile pri neravnih trajektorijah. Če se karakteristična dolžina le nekoliko zmanjša pod $L = 10^6$ m (npr. v manjših ciklonih ali bliže njihovih središč), postane namreč prvi člen v (12) enak preostalima in ga je treba upoštevati. Za približno krožne barične tvorbe sledi iz enačbe (9) hitrost gradientnega vetra

$$v_{gr} = -\frac{1}{2} fr \pm (f^2 r^2/4 - r p^{-1} \partial p / \partial r)^{1/2} \quad (23)$$

Ta ima glede na to, ali je $(\partial p / \partial r) \leq 0$, štiri rešitve, ki jih shematično kaže sl. 3.



Sl. 3. Ravnotežja sil pri gradientnih vetrovih

Pri tem se v naravi praviloma pojavljajo zgornja ravnotežja, pri katerih so hitrosti manjše in zahtevajo za vzpostavitev ravnotežja manjšo kinetično energijo. Gradientni veter piha torej v višinah v ciklonu v pozitivni, v anticiklonu pa v negativni smeri vrtenja, paralelno z izohipsami (ali izobarami). Dokazati se da, da je gradientni veter za izbran $\nabla_h p$ ali $\nabla_p \Phi$ v ciklonih nekoliko šibkejši, v anticiklonih pa nekoliko močnejši od geostrofskega, a se od njega bistveno ne razlikuje.

Na tem mestu samo kvalitativno zajemimo vpliv notranjega trenja, ki je posledica vrtnične viskoznosti iz zadnjega člena enačbe (6). Iz enačbe (7) in (9) sledi, da je gradientna sila osnovna gonilna sila atmosferskih gibanj. Vse druge se pojavijo šele, ko se zračni delec premakne in dobi hitrost, in tudi naraščajo s hitrostjo. Če se torej pri uravnovešenem gradientnem vetru hitrost zaradi trenja zmanjša, prevlada gradientna sila (edina, ki se nič ne zmanjša) in veter se nekoliko odkloni v njeno smer — proti nizkemu pritisku. V novo ravnotežje sil je sedaj treba vključiti še silo trenja. V ciklonu pomeni to konvergentno, v anticiklonu pa divergentno gibanje zraka pri tleh, kjer je trenje relativno močnejše. Po-

sledica tega je, da se v ciklonu pri tleh zrak steka. Če se tvorba s tem ne izpolni in odmere, se mora stekajoči zrak dvigati in zgoraj raztekat, kar se navadno zares dogaja. Posledica dviganja zraka je adiabatno ohlajevanje zraka, kondenzacija — oblaki in padavine, torej pojavi slabega vremena. V anticiklonu se zaradi prizemnega raztekanja zrak seseda, se ogreva, oblačne kapljice izhlapijo in zato je v anticiklonu (to je ob visokem pritisku), če ni drugih močnejših efektov, navadno lepo vreme. Vendar je to le ena od mnogih povezav med dinamiko atmosferskih gibanj in vremenom.

Ciklostrofični veter

Tornadi so lijakasti vrtinci z bolj ali manj vertikalno osjo in se razvijejo iz nevihtnih oblakov. Pri tornadih ima razlika pritiska enako velikostno stopnjo kot pri ciklonih, a hitrosti so večje in karakteristične razdalje manjše. Zanje velja:

$$\begin{aligned} \text{dolžina } L &= 10^2 \text{ m} \\ \text{hitrost } V &= 30 \text{ m/s} \\ \text{pritisk } \delta p &= 10 \text{ mb} \end{aligned} \quad (24)$$

Analiza velikostnih stopenj da analogno (12) vrednosti

$$\begin{array}{ccc} V^2/L & \delta p/\rho L & f_0 V \\ 9 & 10 & 3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 \end{array} \quad (25)$$

Tu je očitno deviacijska sila zanemarljiva v primerjavi z drugima dvema. V ravnotežju sta centrifugalna in gradientna sila

$$C + G = 0 \quad (26)$$

Gibanju zraka ob teh pogojih pravimo *ciklostrofični veter*, njegova hitrost pa je po enačbi (9)

$$v^2 = r\rho^{-1}(\partial p/\partial r) \quad (27)$$

Ciklostrofični veter lahko torej piha po krožnici okrog centra nizkega zračnega pritiska v pozitivni ali v negativni smeri. Ciklostrofično ravnotežje okrog centra anticiklona $(\partial p/\partial r) < 0$ seveda ni možno, ker bi imeli obe sili isto smer.

V središču tornadov je zračni pritisk relativno močno znižan, vetrovi ob njem pa dosegajo rušilno moč. Opazovanja kažejo, da ima okrog 70% tornadov pozitivno (ciklonalno) smer kroženja vetra okrog lijaka — trombe, in okrog 30% negativno (anticiklonalno) smer vrtenja zračnih delcev.

Uvod v splošno cirkulacijo atmosfere

Grobo sliko splošne cirkulacije atmosfere lahko podamo s tokovi, ki ostanejo različni od nič kot krajevno poprečje v prostoru atmosfere (npr. vzdolž vzporednikov) ali kot časovno poprečje. Za dobro predstavo o splošni cirkulaciji atmosfere pa je treba poznati vsa bistvena dogajanja v njej.

Osnovni vzrok, ki poganja splošno cirkulacijo atmosfere, je poprečni presežek notranje energije na ekvatorju in primanjkljaj na polih. Med temi »rezervoarji« deluje atmosfera kot toplotni stroj, ki pretvarja notranjo energijo preko potencialne v kinetično; to pa s trenjem porablja.

V poprečju desetletij je stanje na Zemlji v glavnem uravnoteženo. Po tem je očitno s splošno cirkulacijo atmosfere zagotovljen zadosten transport vseh količin, ki imajo različno porazdeljene izvire in ponore. Od ekvatorja proti polu mora iti transport toplote; dalje transport vlage, ki izhlapeva predvsem iz toplih morij in pada v obliki padavin nad vso

Zemljo. Izravnana mora biti vrtilna količina, ki jo predvsem ob ekvatorju atmosfera prejema od Zemlje, in jo v splošnih zahodnikih zmernih širin vrača itd. Dober model splošne cirkulacije atmosfere mora torej zajeti vse važne vplive, razložiti njihovo vzajemno delovanje in se ujemati s stanji, ki jih opazujemo. Pogledjmo si najprej na kratko, kaj kažejo opazovanja!

Prve slike o planetarnih dogajanjih v atmosferi so izhajale iz meritev pri tleh (razporeditve vetrov, pritiska in temperature zraka [3]). Na njihovi osnovi zgrajene kompleksne predstave o splošni cirkulaciji so bile v glavnem zgrešene. S povečanjem števila meritev v prosti atmosferi ob bogati mreži *radiosondnih postaj* z rednimi meritvami do višine 30 km smo že pred dvema desetletjema dobili sliko poprečnih zonalnih tokov.

V troposferi piha nad ekvatorjem in nad poloma pri tleh vzhodnik, nad pretežnim delom obeh hemisfer pa prevladujejo zahodni tokovi z izrazitimi jedri — *vetrovnimi strženi* (angl. jet stream) — okrog 30° N in S širine. Strženi so v poprečju poleti dalj od ekvatorja, pozimi pa so mu bližje in so opazni na poprečnih in dnevnih višinskih vremenskih kartah. Ker se ta dogajanja odražajo v vidnem vremenu — predvsem v oblačnosti, so zlasti lepo vidni na računalniško združenih poprečnih satelitskih slikah.

Že po prvih spoznanjih s tal so skušali dopolniti sliko dogajanj v atmosferi z modeli. Ti so bili sprva zelo preprosti in so jih nova spoznanja deloma ali v celoti ovrгла, vendar so prispevali k napredku. Od prvih razlag, ki so izhajale iz razporeditve prizemnih vetrov, je iz prejšnjega stoletja le v načelu ostala subtropska *Hadleyeva celica* meridionalnega kroženja zraka z pasatnimi vetrovi pri tleh, a brez antipasatov. Pomembnejša teorija možnih dogajanj v prevladujočih zahodnih tokovih zmernih širin se je pojavila z *Rossbyjevimi valovi* pred 2. vojno, še preden so jih opazili v naravi. Šele razvoj velikih računalnikov v zadnjem desetletju je omogočil razvoj kompleksnih modelov, ki vedno bolj natančno zajemajo in simulirajo zares zelo zapletena dogajanja v atmosferi nad raznolično zemeljsko površino.

Rossbyjevi valovi

V atmosferi lahko nastajajo različna valovanja. Znani so predvsem zvočni in gravitacijski valovi. Pokazalo se je, da so prvi za vremenske procese nepomembni, drugi pa so le lokalno pomembni. Pri teh valovih vpliv vrtenja Zemlje ni bistven, zelo važen pa je za večino obsežnejših vremenskih procesov.

V meteorologiji mnogo uporabljamo *vrtnično enačbo*, ki jo dobimo npr. s produktom operatorja $\mathbf{k} \cdot \nabla$ z enačbo gibanja [1]. Če v celotni vrtnični enačbi zanemarimo vplive, ki jih na spremembo vrtničnosti povzročajo trenje, sprememba nagiba vrtnične osi in divergenca, preostane po analizi velikostnih stopenj kot najpomembnejši člen za obsežne procese

$$d(\zeta + f)/dt = 0 \quad (28)$$

To je postavka o ohranitvi absolutne vrtničnosti. Tu smo v sistemu (x, y, p, t) in se enačba (28) nanaša na izobarno ploskev. ζ je *relativna vrtničnost* gibanja na izobarni ploskvi

$$\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \equiv (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \quad (29)$$

Iz enačbe (28) sledi, če kaže os x proti vzhodu,

$$(\partial / \partial t + u \partial / \partial x + v \partial / \partial y) \zeta + v df / dy = 0 \quad (30)$$

Zvočni valovi odpadejo zaradi postavke o nestisljivosti, omejitev na gibanja po izobarni ploskvi pa izloči gravitacijske valove. Ugotoviti želimo, kakšne motnje lahko nastanejo pri takem toku ob nekaterih predpostavkah.

Proučimo gibanje, ki ga sestavljajo poprečni tok $(\bar{u})$ v zonalni smeri proti vzhodu in majhne motnje

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad \zeta = \zeta' \quad (31)$$

Definirajmo perturbacijsko tokovno funkcijo na podoben način kot geostrofsko

$$u' = -\partial\Psi/\partial y, \quad v' = \partial\Psi/\partial x \quad (32)$$

Iz enačbe (29) sledi $\zeta' = \nabla^2\Psi$. Zanemarimo produkte majhnih perturbacijskih količin, se pravi, da lineariziramo enačbo:

$$(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x)\nabla^2\Psi + \beta\partial\Psi/\partial x = 0 \quad (33)$$

Pri tem je $\beta = df/dy = 2\omega \cos \varphi/a$ (34)

Rossbyjev parameter z vrednostjo $2,3 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ na ekvatorju.

Če zanemarimo motnje v smeri poprečnega toka $u' = 0$, lahko predpostavimo, da ima enačba (33) preprosto rešitev

$$\Psi = A e^{ik(x-ct)} \quad (35)$$

Tu je $k = 2\pi/\lambda$ zonalno valovno število in c fazna hitrost. Iz enačb (33) in (35) sledi

$$ik^3c\Psi - i\bar{u}k^3\Psi + \beta ik\Psi = 0 \quad (36)$$

Fazna hitrost je

$$c = \bar{u} - \beta/k^2 \quad (37)$$

To je znana Rossbyjeva enačba za fazno hitrost horizontalno-transverzalnih t. i. *Rossbyjevih valov*.

Za $c = 0$ dobimo valovno dolžino stacionarnih valov

$$\lambda_s = 2\pi(\bar{u}/\beta)^{1/2} \quad (38)$$

Tako je npr. za $\varphi = 45^\circ$ in $u = 15 \text{ m/s}$ $\lambda_s = 6000 \text{ km}$. Vzporodnik $\varphi = 45^\circ$ ima dolžino (obseg) okoli 28000 km. Zato nastane na njem 4 do 5 valov, kar pogosto jasno vidimo na višinskih vremenskih kartah in na satelitskih slikah. Fazna hitrost je za valove, krajše od stacionarnih, pozitivna. Valovi se pomikajo od zahoda proti vzhodu, ker je $\bar{u} > \beta/k^2$. Valovi z daljšo valovno dolžino pa so retrogradni in se relativno počasi gibljejo proti zahodu. Opazovanja potrjujejo spoznanje, da je ta model približno uporaben za obsežne atmosferske tokove zmernih širin, čeprav so predpostavke preproste in smo vrtnično enačbo zelo poenostavili [4]. Mnogo bolj zamotane perturbacijske oblike osnovnih enačb ne dajo bistveno boljših rezultatov.

Rossbyjevi valovi nastajajo torej zaradi sprememb Coriolisovega parametra z geografsko širino (tako imenovani efekt β). Izhodiščna enačba velja dobro okrog ploskve 600 mb (na višini okoli 5000 m), kjer je večinoma zračni tok zares *brezdivergenten*. Tudi prvi uspešni modeli numerične prognoze, ki so izhajali iz tako poenostavljene vrtnične enačbe, so dajali najboljše rezultate na ploskvi 600 mb. Kaže torej, da se realna atmosfera v srednji troposferi obnaša, kot da je gibanje v njej brezdivergentno.

LITERATURA

- [1] Holton R. J., *An Introduction to Dynamic Meteorology*, New York and London, Academic Press 1972.
- [2] Hess S. L., *Introduction to Theoretical Meteorology*, New York, Henry Holt and Co. 1959.
- [3] Radinović Đ., *Analiza vremena*, Univ. v Beogradu, ZZIU SR Srbije 1969.
- [4] Wiin-Nielsen A., *Compendium of Meteorology*, Vol. I — *Dynamic Meteorology*, Geneva, World Meteor. Organisation 1973.

DOMAČE VESTI

SEMINAR IZ FIZIKE MEHANIKA TEKOČIN

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS je tudi letos organiziralo tradicionalni seminar iz fizike z naslovom *Mehanika tekočin*. Strokovni del seminarja so pripravili na odseku za fiziko fakultete za naravoslovje in tehnologijo pod vodstvom dr. Petra Gosarja. Pri seminarju so sodelovali še Zavod za šolstvo, ki je poskrbel za popoldanski metodični del seminarja, ter Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko in Inštitut J. Stefan.

Strokovni del seminarja je bil dobro organiziran in skrbno pripravljen. Dr. Peter Gosar je imel uvodno predavanje. Za njim pa so predavali dr. Lovro Pičman o potencialnem gibanju tekočin, dr. Rudolf Kladnik o vrtnčastem gibanju neviskozne tekočine, dr. Darko Jamnik o značilnostih gibanja viskoznih tekočin, dr. Mitja Rosina o upor in vzgonu v tekočinah, dr. Gabrijel Kernel o površinskih valovanjih, dr. Sergej Pahor o zvoku v



Udeleženci seminarja pred vhodom v veliko fizikalno predavalnico na Jadranski 22 v Ljubljani

tekočinah, dr. Janez Strnad o udarnih valovih in pojavih pri nadzvočnih hitrostih in dr. Zdravko Petkovšek o dinamiki atmosfere. Zlasti zanimivi so bili poskusi v zvezi z vrtnčastim gibanjem, z gibanjem viskoznih tekočin in s površinskim valovanjem.

Prvi popoldan je predaval Janez Ferbar o novi fiziki v osnovni šoli. To predavanje je bilo pravzaprav nadaljevanje predavanja v Portorožu decembra lani. Uvajanje novih metod so temeljito pripravili vzporedno z izdelavo novega učbenika. Zlasti koristna za nadaljnje delo bodo mnenja in pripombe učiteljev, ki letos delajo po novem učbeniku. V razgovoru po tem predavanju se je izkristaliziralo mnenje, da bi potrebovali list za me-

vseh šolah, bo treba poskrbeti tudi za to, da učitelju fizike ne bo treba še izdelovati sicer preprostih, a nujno potrebnih potrebščin za eksperimente. Res zveni absurdno, da pri vsem tehnološkem napredku ni mogoče kupiti teh učil.

Drugi popoldan je bilo zanimivo predavanje dr. Roberta Blinca o osnovah mehanike tekočih kristalov. Nato smo gledali meteorološke filme: vetrovni stržen, glavni vetrovi, nad horizontom.

V anketi so udeleženci seminarja izrazili željo, da bi na seminarju bilo več metodike pouka fizike. Ugotovili so, da je bilo premalo časa za koristno menjavo mnenj in za razgovor. Udeležencev je bilo 75 z 52 šol in ustanov; prevladovali so srednješolski profesorji fizike. Kot je pokazala anketa, je čas seminarja ugoden. Da ni bil preveč prizadet pouk v šolah, smo letos vključili tudi soboto. Obisk predavanj je bil vse dneve stalen, zadnji dan so prišli celo kolegi, ki niso bili prijavljeni.

Družabni večer pri Urški je bil namenjen vsem članom društva. Res je prišlo kar precej takih, ki se seminarja niso udeležili. Vabilu so se ljubeznivo odzvali tudi »veterani«
društva. Ker smo vsi vztrajali do konca, je tudi ta del seminarja uspel.

Martina Koman

VI. KONGRES DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV JUGOSLAVIJE

Novi Sad, 28. 8.—2. 9. 1975

Drugo obvestilo — Rezervacija prenočišča

Rezervacijo za prenočišče in kotizacijo 200.— din pošljite do 10. 5. 1975 ali čimprej na naslov Zavod za fiziko in matematiko, Univerza v Novem Sadu, za VI. KONGRES MFAJ, 21001 Novi Sad, Dr. Ilije Đuričića 4. Na prijavi naj bo vaše ime in priimek in ime in priimek spremljevalca, vaš točen naslov, datum, za katerega želite rezervirati prenočišče. Navesti morate tudi kateri hotel ste izbrali (enega izmed spodaj navedenih hotelov), kjer želite prenočevati. V oklepaju so cene za prenočišče in penzion če obstaja: Studentski dom (90.— din), Hotel »Park« (123,10, penzion 200.— din), Hotel »Sajam« (148,15 din), Hotel »Putnik« (103,50 din, penzion 180.— din), Hotel »Vojvodina« (88,10 din). Vse podrobnejše informacije lahko dobite pri »Panonijaturistu«, Oddelek za kongresni turizem (21001 Novi Sad, Trg Maršala Tita 19, tel. št. 021 57 380 ali 56 302), ki je prevzel ves tehnično-turistični del organizacije kongresa.

Prevedel in priredil *Ciril Velkovrh*