IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1974
Letnik 21
3—4

21. LETNIK — ŠTEVILKA 3—4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JUNIJ-AVGUST 1974

VSEBINA

Članki Stran

Uvodne misli o uporabi matematike v ekonomski znanosti (Alojzij Vadnal) 65
Linearno programiranje (Alojzij Vadnal) 67
Matematična statistika (Rajko Jamnik) 68
Teorija iger (Rajko Jamnik) 77
Dinamično programiranje (France Križanič) 86
Kombinatorika (Aleksander Cokan) 94
Pouk verjetnostnega računa v srednji šoli (France Avsec) 102
Nekaj primerov preprostih diferenčnih enačb (Andrej Kmet) 112

Domače novice

5. seminar iz matematike: Mesto matematike v ekonomiji. Ljubljana, 4. do 6. februarja 1974 (Dušan Modic) 121
Zaključni račun Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije in njenih komisij za leto 1973 (Ciril Velkovrh) 122
Seznam članov društva, ki so prejeli nagrade Raziskovalne skupnosti Slovenije (Ciril Velkovrh) 124

Prejeli smo v oceno 127

Nove knjige ..... III.

CONTENTS

Articles Page

Some thoughts about the role of mathematics in economy (Alojzij Vadnal) 65
Linear programming (Alojzij Vadnal) 67
On mathematical statistics (Rajko Jamnik) 68
On the theory of games (Rajko Jamnik) 77
Dinamic programming (France Križanič) 86
Combinatorics (Aleksander Cokan) 94
Teaching probability theory in high-school (France Avsec) 102
On some simple difference equations (Andrej Kmet) 112

Home News 121

New Books 127

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 3/4

UVODNE MISLI O UPORABI MATEMATIKE V EKONOMSKI ZNANOSTI

ALOJZIJ VADNAL

AMS Subj. Class. (1970)

Some thoughts about the role of mathematics in economy.

Zgodovinski razvoj uporabe matematike v ekonomiji. Po uspehih, ki jih je dosegla uporaba matematičnih metod v astronomiji, fiziki in tehniki, se je proti sredi prejšnjega stoletja porajala misel, da bi bilo mogoče enako uspešno uporabiti matematične metode tudi pri raziskovanju gospodarskih pojavov. Tedaj se je razvila v politični ekonomiji posebna smer, ki jo imenujemo matematična ekonomija; glavni njen namen je matematično izraziti in obravnavati količinske odnose v politični ekonomiji. Glavna pomanjkljivost matematične ekonomije pa je bila zlasti v tem, da so ostajali matematično formulirani ekonomski odnosi povsem nekvantificirani. Najbolj pomembni zastopniki matematične ekonomije so bili zlasti: A. A. Cournot (1801—1877), W. S. Jevons (1835 do 1882), L. Walras, ki ga štejemo za utemeljitelja Lausannske politekonomske šole (1834 do 1910), V. Pareto (1848—1923) in A. Marshall (1842—1924).

Pomanjkljivost glede kvantifikacije ekonomskih odnosov je skušala pozneje odpraviti novejša smer, ki jo imenujemo ekonometrija. Vodilna zahteva ekonometrije je, da je treba vnesti tudi v raziskovanje ekonomskih pojavov empirične meritve. Glavne zasluge za uveljavljenje te smeri ima l. 1930 ustanovljeno društvo Econometric Society, ki od l. 1933 izdaja za to smer vodilno revijo Econometrica.

Po drugi svetovni vojni se je razvila v ekonomski znanosti najnovejša smer, ki je pomembna zlasti za podjetniško dejavnost in ki jo imenujemo operacijsko raziskovanje. Po svojem bistvu je operacijsko raziskovanje v ekonomiji metoda, ki intenzivno uporablja matematiko in statistiko za dosego optimalnih poslovnih odločitev. Linearno programiranje, ki se že obravnava v naših srednjih šolah, je z metodološkega vidika le del operacijskega raziskovanja.

Matematični modeli ekonomskih struktur. Pri analizi ekonomskih pojavov srečujemo kvantitativne in kvalitativne kategorije; prisotnost prvih omogoča uspešno uporabo matematičnih raziskovalnih metod, prisotnost drugih pa to uporabo močno otežuje. V splošnem je vsak ekonomski sistem izredno kompliciran struktura, ki je v celoti ne moremo skoraj nikdar zajeti z matematičnimi sredstvi. Da torej lahko uporabimo matematične metode, zožimo obravnavano ekonomsko strukturo z raznimi hipotezami in predpostavkami in tako skonstruiramo ekonomski strukturi kolikor mogoče adekvaten matematični model. Smotrnost takega umetno skonstruiranega matematičnega modela pa je slej ko prej pogojena z njegovo praktično uporabnostjo v ekonomski empiriji.

Vloga elektronskih računalnikov. Matematični modeli realnih ekonomskih struktur so v splošnem izredno zahtevni glede numeričnega računanja in jih je mogoče obvladati samo z elektronskimi računalniki. Zgodovina ekonomske znanosti bo brez dvoma priznala iznajdbo elektronskih računalnikov za važen mejnik v njenem razvoju, kajti šele z njimi je mogoče doseči zadovoljivo stopnjo kvantifikacije pri raziskovanju gospodarskih pojavov.

Položaj matematike v ekonomiji v slovenskem kulturnem prostoru. Atmosfera za uveljavljanje matematičnih metod v ekonomski znanosti je bila pri nas skrajno neugodna pravzaprav vse do pred nekaj leti. Že med obema vojnama so bili storjeni prvi sporadični poskusi za uvajanje matematičnih metod v ekonomske analize; v tej zvezi je zlasti pomemben izid Bilimovičeve knjige Nauk o konjunkturah. Ti poskusi bi lahko ustvarili pri nas posebno šolo matematičnih ekonomistov, žal pa niso pustili kakih trajnejših sledov zaradi odklonilnega stališča matematikov. Razvoj je dalj časa zaviralo tudi odklonilno stališče nekaterih ekonomistov in zlasti ideologov, ki nikakor niso mogli razumeti, da je matematika pri ekonomskih raziskavah samo orodje in da zato kot orodje ne more imeti nikakršnega ideološkega prizvoka.

LITERATURA

[1] Allen R. G. D., *Mathematical Analysis for Economists*, London 1956.

[2] Allen R. G. D., *Mathematical Economics*, London 1957.

[3] Bilimovič A., *Nauk o konjunkturah*. Zbornik znanstvenih razprav Juridične fakultete, Ljubljana 1931.

[3] Bilimovič A., *Uvod v ekonomsko vedo*, Ljubljana 1933.

[4] Vadnal A., *Uporaba matematike v ekonomski znanosti*, Ekonomska revija (1955) 3.

[5] Vadnal A., *Matematični uvod v ekonometrijo*, Klub diplomiranih ekonomistov, Ljubljana 1955.

Referati s simpozija Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, CZ 1964.

[6] Merhar V., *Družbeno ekonomski vidik uporabe sodobnih metod in sredstev organizacije.*

[7] Rupnik V., *O sodobnem profilu operacijskega raziskovanja.*

[8] Vadnal A., *Operacijsko raziskovanje v sedanji fazi našega gospodarskega razvoja.*

[9] *Operativno istraživanje* (Redaktori: L. Martić, A. Vadnal), INFORMATOR — Zagreb 1968.

Udeleženci seminarja po končanih predavanjih

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 3/4

LINEARNO PROGRAMIRANJE

ALOJZIJ VADNAL

AMS Subj. Class. (1972) 90 C 05
Linear programming

Zgodovinski razvoj. Linearno programiranje se je začelo razvijati šele z drugo svetovno vojno. Prvo publikacijo s tega področja srečamo l. 1939; v njej je L. V. Kantorovič obravnaval neke probleme planiranja proizvodnje. Tej publikaciji je sledila l. 1941 druga; v tej je F. L. Hitchcock obravnaval neki transportni problem linearnega programiranja. Leta 1947 je odkril G. B. Dantzig metodo simpleksov, s katero je mogoče rešiti sleherni problem linearnega programiranja. Mejnik v razvoju linearnega programiranja je l. 1952, ko je bil z elektronskim računalnikom prvikrat rešen linearni program po metodi simpleksov. Ker zaradi zmogljivosti elektronskih računalnikov za numerično reševanje linearnih programov ni nobenih ovir več, si je linearno programiranje na široko utrlo pot v ekonomsko teorijo in zlasti tudi v podjetniško prakso.

Uvajanje linearnega programiranja je pri nas naletelo s kraja na dokajšnje nerazumevanje pa tudi na nasprotovanje. Nekaj posvetovanj o uporabi matematičnih metod v delovnih organizacijah, ki jih je v letih 1964—1971 priredilo Društvo ekonomistov Ljubljana, je končno utrlo pot linearnemu programiranju v naše gospodarske organizacije.

Zanimivo je, da je priobčil pri nas prvi članek o linearnem programiranju l. 1956 naš Obzornik za matematiko in fiziko. Temu dogodku pa je sledil nato kar petletni »antimatematični« molk.

Linearno programiranje je metodološko tesno povezano z dvema drugima panogama uporabne matematike, in sicer s teorijo strateških iger in z Leontijevo medsektorsko ali input-output analizo. Vse te tri panoge se medsebojno prepletajo, vse tri temeljijo na linearni algebri, zlasti na teoriji konveksnih poliedrov, čeprav obravnavajo vsebinsko docela različno problematiko.

Predmet linearnega programiranja so vezani ekstremi, pri katerih zadoščajo spremenljivke pogoju nenegativnosti in predpisanim linearnim neenačbam ali enačbam in pri katerih je namenska funkcija, katere ekstrem določujemo, linearna. Ker je Obzornik za matematiko in fiziko že poročal o linearnem programiranju, ker je to že uvedeno v učne načrte naših srednjih šol in ker je zanj dovolj razpoložljive literature, se nam ne zdi potrebno podrobneje opisovati problematike linearnega programiranja.

LITERATURA

[1] Vadnal A., *Linearno programiranje*, Obzornik mat. fiz., Ljubljana, **5** (1956/57) 3.
[2] Vadnal A., *Lastnosti rešitev problemov linearnega programiranja*, Obzornik mat. fiz., Ljubljana **8** (1961) 2.
[3] Vadnal A., *Elementarni uvod v linearno programiranje*, Ljubljana DZS, 1963.
[4] Vadnal A., *Rešeni problemi linearnega programiranja*, DMFA in MK, SIGMA, Ljubljana 1971.
[5] Vadnal A., *Linearno programiranje. Teorija i upotreba u privredi*, INFORMATOR, Zagreb 1972.

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) st. 3/4

MATEMATIČNA STATISTIKA

RAJKO JAMNIK

AMS Subj. Class. (1970) 62—01

Kratek pregled osnovnih pojmov matematične statistike.

ON MATHEMATICAL STATISTICS

A short survey of basic concepts of mathematical statistics.

V ekonomiki navadno ni mogoče eksperimentirati v klasičnem smislu: sprožiti neko dogajanje z namenom, da bomo pri njem ugotavljali zvezo med izbranimi količinami, in pri tem poskrbeti, da bodo ostale druge količine, ki so tudi zapletene v dogajanje, kar se da konstantne. Tu namreč raziskovavec pojave dostikrat samo opazuje, razvijajo pa se neodvisno od njega. Eksperimentalni podatki, ki jih tako nabere, ne nastanejo v nespremenjenih razmerah, zato so podrejeni močnim slučajnim vplivom. Če hočemo iz takih podatkov izluščiti kakšno bolj ali manj splošno zakonitost, je to mogoče narediti samo z uporabo statističnih metod. Zato je matematična statistika neogiben pripomoček v ekonomskih raziskavah.

1

Osnova matematične statistike je verjetnostni račun. Povzemimo iz njega na kratko tiste reči, na katere se bomo v tem sestavku sklicevali. Vzemimo, da so izidi poskusa označeni z realnimi števili (npr. število pik pri metu kocke, razdalja med sredino tarče in zadetkom pri streljanju in podobno). Tedaj imamo lahko množico izidov za zalogo vrednosti neke spremenljivke, imenujmo jo X. Katero od mogočih vrednosti bo imela spremenljivka X v določeni ponovitvi poskusa, je odvisno od slučaja; zato pravimo, da je X *slučajna spremenljivka*. Da je spremenljivka X zadosti opisana, moramo navesti poleg njene zaloge vrednosti še *porazdelitveni zakon*. Ta je podan v splošni obliki, če je za vsako realno število x znana verjetnost[1] dogodka $(X < x)$. Preslikava

$$F\colon x \in R \to F(x) = P(X < x)$$

se imenuje *porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X. Za vsak x je $0 \leq F(x) \leq 1$, poleg tega je $F(x)$ naraščajoča, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ in $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1$.

Če je zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X končno ali neskončno zaporedje $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ in za vsak mogoč k verjetnost $P(X = x_k)$ pozitivna, se imenuje porazdelitev *diskretna*, njen porazdelitveni zakon pa lahko zapišemo v obliki

$$p_k = P(X = x_k)$$

Funkcija p_k se imenuje *verjetnostna funkcija* porazdelitve. Od diskretnih porazdelitev omenimo le eno: Slučajna spremenljivka X je porazdeljena *binomsko*, če sestavljajo njeno zalogo vrednosti števila 0, 1, ..., n in je za vsak k od 0 do n

[1] Če bravcu pojem matematične verjetnosti ni znan, naj mu izjava »Dogodek A ima v poskusu X verjetnost $P(A)$« pomeni tole: če poskus X velikokrat ponovimo, je navadno delež (ali relativna frekvenca) tistih ponovitev, v katerih se A zgodi, približno enak $P(A)$.

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Pri tem je p katero koli število med 0 in 1. Če je npr. verjetnost dogodka A v poskusu enaka p, je frekvenca dogodka A v n ponovitvah tega poskusa (se pravi število ponovitev, v katerih se A zgodi) porazdeljena po binomskem zakonu. Binomska porazdelitev je odvisna od dveh parametrov, n in p, na kratko jo bomo zaznamovali z $b(n, p)$.

Drug pomemben tip porazdelitev so *zvezne porazdelitve*: spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka funkcija $p(x)$, da je za vsak realen x

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt$$

Ta funkcija $p(x) = F'(x)$ se imenuje *gostota verjetnosti*. Med zveznimi porazdelitvami je najpomembnejša *normalna*, njena gostota je

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

V njej je a poljubno realno, σ pa katero koli pozitivno število. Znak za to porazdelitev bo $N(a, \sigma)$. Pomen normalne porazdelitve je v naslednjem: Če je vrednost kakšne količine X odvisna od velikega števila slučajnih vzrokov, ki so med seboj neodvisni in približno enako močno vplivajo na X, je količina X navadno porazdeljena približno normalno; zato so empirične porazdelitve tako pogosto skoraj normalne. Nadalje je mogoče aproksimirati binomsko porazdelitev $b(n, p)$ pri velikem n z normalno porazdelitvijo $N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Slučajna spremenljivka je natanko opisana z zalogo vrednosti in s porazdelitvenim zakonom. Včasih pa se namesto s tem zadovoljimo s kakšnim funkcionalom porazdelitvenega zakona, ki z enim samim številom karakterizira kakšno pomembno značilnost slučajne spremenljivke. Od teh številskih karakteristik omenimo le dve: število

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

se imenuje *povprečna vrednost* ali *matematično upanje* slučajne spremenljivke X in njenega porazdelitvenega zakona $F(x)$, število

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2\, dF(x)$$

pa je njena *disperzija* ali *varianca*. Pomen povprečne vrednosti je tak: če slučajno spremenljivko X velikokrat realiziramo, se aritmetična sredina realizacij navadno le malo loči od $E(X)$. Disperzija pa karakterizira razpršenost slučajne spremenljivke okrog povprečne vrednosti.

2

Osnovna situacija, ki se z njo ukvarja matematična statistika, je taka. Dana je neka končna ali neskončna množica G z elementi e. Množici G pravimo *populacija*. Njeni elementi so lahko živa bitja (od tod izvira ime populacija), predmeti, poskusi ali kar koli drugega. Vsak element populacije je karakteriziran z neko merljivo lastnostjo X. Drugače rečeno, na G je definirana enolična realna funkcija $X(e)$. Zaznamujmo pri vsakem realnem x delež tistih e, pri katerih je $X(e) < x$, z $F(x)$. Da bomo dobili iz te situacije objekt verjetnostnega računa, vzemimo, da bomo izbirali elemente populacije na slepo in pri vsakem

izbranem elementu e ugotovili vrednost $X(e)$. Tako je to izbiranje poskus z izidi $X(e)$ in dogodek $(X(e) < x)$ ima v tem poskusu verjetnost $F(x)$. Drugače rečeno, pri slepem izbiranju elementa iz populacije je $X(e)$ slučajna spremenljivka in

$$F(x) = P(X < x) \tag{1}$$

njena porazdelitvena funkcija.

Lahko se zgodi, da ima funkcija $X(e)$ na G samo končno mnogo različnih vrednosti, recimo $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Na končni populaciji je celo zmeraj tako. Vzemimo, da je f_i delež tistih e iz G, pri katerih je $X(e) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Potem je pri slučajnem izbiranju X diskretna slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo

$$P(X = x_i) = f_i \tag{2}$$

Namesto merljive lastnosti $X(e)$ morejo imeti elementi populacije tudi kakšno nemerljivo lastnost $D = D(e)$. Zanjo naj obstaja r različnih »vrednosti« $D_1, D_2, \ldots, D_r$. Naj bo spet f_i delež tistih e iz G, pri katerih je $D(e) = D_i$. Potem je D_i pri slepem izbiranju dogodek z verjetnostjo

$$P(D_i) = f_i \tag{3}$$

Pojasnimo, kar smo povedali, še z zgledi.

Primer 1. Ponavljajmo meritev določene količine v nespremenjenih okoliščinah. Če bi pri meritvi ne bilo napak, bi bil izmerek X zmeraj enak. Toda zaradi slučajnih vplivov, ki jih ni mogoče odstraniti, vrednost X bolj ali manj niha. Določeno meritev imamo lahko za slučajno izbran element iz množice vseh meritev, ki bi jih bilo mogoče napraviti v teh okoliščinah. Tako je izmerek X slučajna spremenljivka na populaciji vseh meritev. Ker je mogoče ponoviti meritev poljubno velikokrat, je populacija neskončna in porazdelitvene funkcije (1) slučajne spremenljivke X ni mogoče natanko določiti z opazovanjem. Navadno je približno normalna.

Primer 2. Bodi populacija G množica vseh zaposlenih prebivavcev SRS in X njihov zaslužek v določenem mesecu. Tu je populacija končna in pri slepem izbiranju elementa iz populacije je zaslužek X diskretna slučajna spremenljivka. Njeno verjetnostno funkcijo (2) bi ugotovili tako, da bi za vsak mogoč zaslužek x_i pošteli število zaposlenih s tem zaslužkom in to število delili z velikostjo populacije G.

Primer 3. Naj bo G množica vseh volivcev v ZDA in D njihov namen, kako bodo ravnali pri prihodnji volitvi predsednika. Navadno so za to tri možnosti, voliti demokrata, voliti republikanca ali pa ne voliti. Spremenljivka D očitno ni merljiva, temveč, kot pravijo, atributivna. Slepo izbiranje volivca in ugotavljanje njegovega namena D (kot dela npr. Gallupov inštitut pred volitvami) je torej poskus s tremi mogočimi izidi. Kakšne so verjetnosti izidov, se zve pri volitvah.

Lastnosti spremenljivke X bi bile znane, ko bi ugotovili njeno vrednost na vseh elementih populacije. Če je populacija neskončna, tega ni mogoče napraviti. Pa tudi pri končnih populacijah bi tako ugotavljanje ne bilo zmeraj smotrno. Npr. kvaliteto žarnice karakterizira predvsem njena življenjska doba; vendar bi bilo nesmiselno, da bi producent kontroliral v tem pogledu vsako žarnico, saj bi potem ne imel kaj prodajati. Prav tako bi ne imelo pomena pri raziskavi javnega mnenja pred volitvami upoštevati vse volivce, saj bi bile to že volitve.

Zato se pri obravnavi neznane slučajne spremenljivke X omejimo tako, da jo preučimo samo na primerno izbranem delu populacije. Temu delu populacije pravimo *vzorec*. Potem je osnovno vprašanje matematične statistike, kaj je mogoče reči o spremenljivki X na populaciji na podlagi informacije, ki smo jo dobili o X na vzorcu. Na to vprašanje je najlaže odgovoriti, če je vzorec izbran tako, da imajo pri vsakem odbiranju elementa za vzorec

vsi elementi populacije enako možnost, da bodo izbrani. Za tak vzorec pravimo, da je *slučajen*. Pri sestavljanju slučajnega vzorca gre torej za slepo izbiranje elementa z vračanjem, tako da je lahko isti element tudi večkrat izbran. V praksi pa navadno izbiramo elemente za vzorec na slepo brez vračanja: iz serije enakih izdelkov jih nekaj na slepo izberemo za kontrolo, seveda vsakega enkrat; tudi pri preučevanju javnega mnenja na slepo izberejo poskusne osebe, toda vsako samo enkrat; itn. Če je vzorec v primeri s populacijo majhen, imamo lahko tudi vzorec, ki je nastal s slepim izbiranjem brez vračanja, za slučajen.

Vzemimo, da imamo slučajen vzorec velikosti n. Ugotavljanje vrednosti spremenljivke $X(e)$ na danem elementu tega vzorca je s stališča verjetnostnega računa realizacija slučajne spremenljivke X, in vseh n realizacij je med seboj neodvisnih; se pravi, verjetnost, da bomo pri danem elementu dobili vrednost $X(e) < x$, je pri vsakem x neodvisna od tega, kakšne vrednosti ima X na drugih elementih vzorca. Zaporedje $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vrednosti slučajne spremenljivke X na vzorcu pa imamo lahko za realizacijo nekega slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, katerega komponente so med seboj neodvisne in vse porazdeljene tako kot slučajna spremenljivka X na populaciji, se pravi s porazdelitveno funkcijo $F(x)$.

3

Pri eksperimentiranju s slučajno spremenljivko X imamo o naravi njenega porazdelitvenega zakona $F(x)$ včasih kakšno predstavo že pred eksperimentom, dostikrat pa jo dobimo iz eksperimentalnih podatkov, se pravi iz slučajnega vzorca $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Obstaja pa vprašanje, ali je ta predstava utemeljena, ali povedano natančneje, kako dobro se domneva ujema z vzorčnimi podatki.

Da bomo razvozlali to vprašanje, vpeljimo nekaj novih pojmov. Vsaka domneva o neznanem porazdelitvenem zakonu slučajne spremenljivke X se imenuje *statistična hipoteza*. Če hipoteza zadeva tip porazdelitvenega zakona, se imenuje *neparametrična*. (Neparametrična je npr. hipoteza, da je X porazdeljena normalno. Taka je tudi hipoteza, da je X porazdeljena po zakonu $N(0, 1)$.) Če pa je tip porazdelitvenega zakona znan in določa hipoteza samo njegove parametre, pravimo, da je hipoteza *parametrična*. (Parametrična je npr. hipoteza, da ima normalno porazdeljena spremenljivka X povprečno vrednost 0.) Če hipoteza porazdelitveni zakon natanko določa, se imenuje *enostavna*, vsaka drugačna hipoteza pa je *sestavljena*. (Enostavna je npr. hipoteza »spremenljivka X je porazdeljena po zakonu $b(1000,0{\cdot}5)$«; hipoteza, da je X porazdeljena binomsko s parametrom $p = \frac{1}{2}$, pa je sestavljena, saj dopušča za n vsako naravno število, večje od 1.) Vse hipoteze, ki pridejo v danem položaju v poštev, imenujemo *dopustne*. Hipoteza H_0, ki jo želimo preskusiti, je *ničelna*, vse druge dopustne hipoteze pa so *alternativne*.

Pravilo, ki za vsak vzorec $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ določa, ali naj hipotezo H_0 sprejmemo ali zavrnemo, se imenuje *preskus* ali *test* hipoteze H_0. Kako bi dobili tako pravilo? Vzorec $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je realizacija slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ki ima neodvisne komponente, porazdeljene tako, kot je X na populaciji. Naj bo W zaloga vrednosti tega slučajnega vektorja; imenujemo jo tudi *prostor vzorcev*. Izberimo si neko množico $w \subset W$ in predpišimo: Če bo

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in w \tag{4}$$

bomo H_0 zavrnili, če pa bo

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W - w \tag{5}$$

bomo H_0 sprejeli. Ta predpis je iskano testno pravilo. Množico w v tem predpisu imenujemo *kritično območje testa*.

Testno pravilo bi bilo idealno, ko bi veljala relacija (5) natanko takrat, kadar je H_0 pravilna. Vendar takega testa ni: naj izberemo w kakor koli, zmeraj se lahko primeri, da velja (4), čeprav je H_0 pravilna, in prav tako ni nemogoče, da velja (5), četudi je H_0 napačna. V prvem primeru, ko zavrnemo pravilno hipotezo, pravimo, da naredimo *napako prve vrste*. Kadar pa sprejmemo napačno hipotezo, zagrešimo *napako druge vrste*. Seveda sta obe napaki nezaželeni in poglavitni problem v teoriji testiranja je ta: Kako izbrati kritično območje w, da verjetnost za napako prve vrste ne bo presegala predpisane vrednosti α in da bo verjetnost za napako druge vrste kar se da majhna? Prvi del tega problema je preprost, z drugim so pa večje sitnosti, predvsem zato, ker je verjetnost za napako druge vrste odvisna od tega, katera alternativna hipoteza je pravilna. V tem sestavku se bomo obravnavi druge zahteve izognili tako, da bomo spremenili testno pravilo: pri (4) bomo H_0 zavrnili, pri (5) pa bomo pustili vprašanje o H_0 nerešeno. Test s takim testnim pravilom se imenuje *preskus značilnosti*. Pri preskusu značilnosti torej ravnamo podobno kot kriminalisti: izločamo neustrezne hipoteze. Sicer pa dostikrat tudi s preskusom značilnosti kakšno hipotezo H sprejmemo, in sicer tako, da preskusimo in zavrnemo nasprotno hipotezo. Če nas npr. zanima hipoteza H, da ima X od nič različno povprečno vrednost, bomo naredili preskus značilnosti s hipotezo $H_0(E(X) = 0)$; če bomo H_0 zavrnili, bo s tem sprejeta hipoteza H.

Pri preskusu značilnosti je seveda še zmeraj mogoča napaka prve vrste, da zavrnemo pravilno hipotezo. Njena največja dovoljena verjetnost α se imenuje *stopnja značilnosti testa*. Ta ni odvisna od matematičnih argumentov, temveč od tega, kako hude bi bile posledice napačne odločitve. Navadno je α ali 0,05 ali 0,01 ali 0,001. Kadar H_0 zavrnemo, pravimo, da se H_0 *značilno loči* od eksperimentalnih podatkov ali da je razloček med hipotezo in eksperimentom *signifikanten*. Kadar pa velja (5), pravimo, da H_0 ni v nasprotju z eksperimentom. Poudarimo še enkrat, da ta izjava nikakor ne pomeni, da je H_0 pravilna.

Ugotavljati, ali velja pri danem vzorcu relacija (4) ali (5), je pri poljubno izbranem kritičnem območju lahko nerodno, pa tudi verjetnost $P((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in w/H_0)$, da bomo H_0 zavrnili, čeprav je pravilna, bi bilo v splošnem težko oceniti. Zato ravnajmo takole. Izberimo primerno funkcijo

$$U = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{6}$$

vzorčnega slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; ta slučajna spremenljivka se imenuje *statistika vzorca*. Predpišimo stopnjo značilnosti α in vzemimo na realni osi tako množico w_u, da je

$$P(U \in w_u/H_0) \leqq \alpha \tag{7}$$

Potem lahko vzamemo za kritično območje w množico tistih točk iz prostora vzorcev W, ki jih statistika U upodobi v w_u, se pravi, $w = f^{-1}(w_u)$. Seveda pa imamo lahko za kritično območje testa kar w_u, na prostor vzorcev se nam ni treba več ozirati. Najpogosteje je

$$w_u = \{u: \mid u \mid \geqq u_\alpha\} \quad \text{ali} \quad w_u = \{u: u \geqq u_\alpha\} \quad \text{ali} \quad w_u = \{u: u \leqq u_\alpha\},$$

pri čemer je tako imenovana *kritična vrednost* u_α zapovrstjo določena z zahtevo

$$P(\mid U \mid \geqq u_\alpha/H_0) \leqq \alpha \quad P(U \geqq u_\alpha/H_0) \leqq \alpha \quad P(U \leqq u_\alpha/H_0) \leqq \alpha \tag{8}$$

Če hočemo ugotoviti u_α v relacijah (8), moramo poznati porazdelitveni zakon statistike U pri pogoju, da je H_0 pravilna, in sicer pri majhnem vzorcu natanko, pri velikem vzorcu pa je zadosti, če poznamo njeno limitno porazdelitev, se pravi porazdelitev, proti kateri konvergira porazdelitveni zakon statistike U, ko rase velikost vzorca čez vse meje.

Tu ne moremo opisovati vseh znanih preskusov značilnosti; zadovoljili se bomo le z dvema, toliko da z zgledom ilustriramo, kar smo povedali doslej.

Opišimo najprej Pearsonov preskus hipoteze H_0, ki natanko določa porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X, se pravi tip porazdelitvenega zakona in njegove parametre. Da bomo dobili za ta preskus primerno testno statistiko, razčlenimo zalogo vrednosti slučajne spremenljivke X v r razredov $S_1, S_2, \ldots, S_r$. V te razrede razpadejo potem tudi eksperimentalni podatki $x_1, x_2, \ldots, x_n$; recimo, da jih je n_k v razredu S_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Števila n_k imenujemo eksperimentalne frekvence razredov. Hipoteza H_0, ki jo hočemo preskusiti, določa tako imenovane hipotetične verjetnosti razredov

$$p_k = P(X \in S_k/H_0) \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

Pomnožimo hipotetične verjetnosti p_k z velikostjo vzorca n; tako dobimo hipotetične frekvence razredov np_k, se pravi frekvence, ki bi jih pričakovali, če je hipoteza H_0 pravilna: razloček med n_k in np_k je v tem primeru samo posledica slučajnih vplivov. Torej je primerna mera za razloček med eksperimentalnimi podatki in hipotezo H_0 statistika

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

ki ji pravimo Pearsonov hi kvadrat: čim večjo vrednost ima ta količina pri danem številu razredov r, tem manj je verjetno, da je hipoteza H_0 pravilna. Za to statistiko je znana limitna porazdelitev[2]: pri vsakem $x > 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} P(\chi_n^2 < x/H_0) = \frac{1}{2^{(r-1)/2}\,\Gamma((r-1)/2)} \int_0^x t^{\frac{r-1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt, \tag{9}$$

in sicer ne glede na to, kakšna je hipoteza H_0. Relacija (9) omogoča, da s statistiko χ_n^2 iz velikega vzorca preskusimo hipotezo H_0: če je vzorec dovolj velik, dobimo iz (9) pri predpisani stopnji značilnosti α zadosti dober približek za rešitev χ_α^2 enačbe $P(\chi_n^2 \geqq \chi_\alpha^2) = \alpha$. Ta približek vzamemo za kritično vrednost testa in hipotezo H_0 zavrnemo, kadar je eksperimentalna vrednost $\chi_n^2 \geqq \chi_\alpha^2$, v nasprotnem primeru pa ne.

Primer 4. Serijska produkcija je dajala doslej povprečno 6% izmečka. Zdaj so jo preuredili in so po preureditvi našli med 300 na slepo izbranimi izdelki iz serije (torej v vzorcu) 9 izdelkov za izmeček. Preskusimo s temi podatki na stopnji značilnosti 0,05 hipotezo H, da je po preureditvi produkcije delež izmečka drugačen kot prej.

Namesto hipoteze H bomo preskusili nasprotno hipotezo H_0, da je delež izmečka tak kot prej. Pri jemanju vzorca nas zanima samo, ali je izdelek dober ali ni, zato bomo eksperimentalne podatke razdelili le v dva razreda: dobri izdelki in izmeček; prvi ima v danem vzorcu frekvenco $n_1 = 291$, drugi pa frekvenco $n_2 = 9$. Če hipoteza H_0 drži, je verjetnost, da dobimo pri izbiranju iz serije dober izdelek, 0·94. Torej sta hipotetični frekvenci 282 in 18. Pokažimo še, da v tej situaciji lahko uporabimo test hi kvadrat: če je hipoteza H_0 pravilna, je število X izmečka v vzorcu velikosti 300 porazdeljeno po binomskem zakonu $b(300,0{\cdot}06)$; hipoteza H_0 torej natanko določa porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke X. Testna statistika χ_{300}^2 ima pri danih eksperimentalnih podatkih vrednost

$$\chi_{300}^2 = \frac{(291 - 282)^2}{282} + \frac{(9 - 18)^2}{18} \approx 4{\cdot}79$$

[2] Prim. (2), razdelek 12.4.

kritična vrednost pa je pri $r = 2$ in $\alpha = 0{\cdot}05$ enaka $3{\cdot}84$. Ker je eksperimentalna vrednost testne statistike večja od kritične, hipotezo H_0 zavrnemo (in s tem sprejmemo nasprotno hipotezo H).

Opišimo še en preskus značilnosti. Vzemimo, da sta na populaciji definirani dve spremenljivki, X in Y. O njunih porazdelitvenih funkcijah $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ vemo le to, da sta zvezni, preskusili pa bi radi hipotezo $H_0(F_X(x) = F_Y(x))$, da sta porazdelitvena zakona enaka. Način preskušanja te hipoteze je odvisen od tega, ali je mogoče meriti X in Y na istih elementih populacije ali to ni mogoče. Tu bomo obravnavali le prvo možnost, ker je preprostejša.

Vzemimo, da smo iz populacije izbrali slučajen vzorec velikosti n in na njem izmerili vrednosti spremenljivk X in Y. Ta meritev nam da vzorec $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ za X in vzorec $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ za Y. Iz obeh lahko naredimo vzorec razlik

$$X_1 - Y_1,\ X_2 - Y_2,\ \ldots,\ X_n - Y_n \tag{10}$$

Ker sta po privzetku $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ zvezni, so z verjetnostjo 1 vse te razlike različne od nič. Seveda pa se vendarle lahko zgodi, da je katera od razlik (10) enaka nič, predvsem zaradi nenatančnega merjenja; v takem primeru to razliko izpustimo. Naj bo vzorec (10) že tako reduciran, vse razlike (10) so torej različne od nič. Potem je za vsak i od 1 do n

$$P(X_i - Y_i < 0/H_0) = P(X_i - Y_i > 0/H_0) = \tfrac{1}{2}$$

Naj bo K^+ število pozitivnih razlik in K^- število negativnih razlik (10). Če je hipoteza H_0 pravilna, sta obe statistiki, K^+ in K^-, porazdeljeni po binomskem zakonu $b(n, 0{\cdot}5)$, se pravi,

$$P(K^+ = k) = P(K^- = k) = \binom{n}{k} 2^{-n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Pri velikem n pa sta K^+ in K^- porazdeljeni približno normalno $N(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}\sqrt{n})$.

Preskus hipoteze $H_0(F_X(x) \equiv F_Y(x))$ gre potem tako: Če je H_0 pravilna, bomo le redko dobili zelo majhno ali zelo veliko število pozitivnih razlik. Če bo torej imela statistika K^+ na danem vzorcu premajhno ali preveliko vrednost, bomo H_0 zavrnili. Bodimo natančnejši: Predpisali bomo stopnjo značilnosti α in poiskali tako celo število k_α, da bo $P(K^+ \leqq k_\alpha) \leqq \leqq \alpha/2$ in $P(K^+ \leqq k_\alpha + 1) > \alpha/2$. Če bomo potem na vzorcu ugotovili, da je $K^+ \leqq k_\alpha$, ali $K^- \leqq k_\alpha$, bomo hipotezo H_0 zavrnili, kajti v prvem primeru je število K^+ premajhno, v drugem primeru pa preveliko.

Pri tem preskusu je testna statistika število pozitivnih (ali negativnih) znakov v vzorcu (10), zato mu pravimo *test z znaki*.

Primer 5. 10 bolnikov je dobilo enkrat uspavalo X in drugič uspavalo Y. Pri enem bolniku sta imeli uspavali enak učinek, pri drugih pa je bilo uspavalo X učinkovitejše. Ali lahko po tem na stopnji $0{\cdot}05$ sklepamo, da zdravili nista enako uspešni (hipoteza H?)

Spet bomo namesto H preskusili nasprotno hipotezo H_0, da zdravilo X povzroči enak podaljšek spanja kot zdravilo Y. Očitno lahko vzamemo, da imata oba podaljška zvezno porazdelitveno funkcijo, zato lahko uporabimo test z znaki. Po podatkih je ena razlika med obema podaljškoma 0, zato jo bomo izpustili in nam bo ostal vzorec velikosti 9. Vse razlike v vzorcu so enakega znaka, recimo pozitivne, in porazdeljene po zakonu $P(K^+ = k) = = P(K^- = k) = \binom{9}{k} 2^{-9}$. Ker je na vzorcu $K^- = 0$ in ker je $P(K^- = 0) = 2^{-9} \approx 0{\cdot}002$, hipotezo H_0 zavrnemo (in hipotezo H sprejmemo) na stopnji značilnosti $0{\cdot}05$ in celo $0{\cdot}01$.

4

Včasih nam je tip porazdelitvenega zakona slučajne spremenljivke znan že vnaprej in hočemo z eksperimentom samo oceniti parametre, ki nastopajo v porazdelitveni funkciji. Vemo npr., da je X porazdeljena normalno, ne poznamo pa parametrov porazdelitve a in σ; in radi bi ju ocenili z eksperimentalnimi podatki, se pravi s slučajnim vzorcem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Prvi način ocenjevanja parametrov je tako imenovano *točkasto ocenjevanje*. Pri njem izberemo primerno statistiko $U = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ in njeno vrednost $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na dobljenem vzorcu vzamemo za vrednost neznanega parametra. Statistiko U imenujemo zaradi njene vloge *cenilko parametra*, njeno vrednost u pa *oceno parametra*.

Kajpak ni vsaka statistika primerna cenilka; ugodno je, če ima kakšno dobro lastnost, ki zagotavlja, da bo ocenjevanje kolikor mogoče zanesljivo. Oglejmo si nekaj teh lastnosti. Vzemimo, da ima X porazdelitveno funkcijo $F(x, q)$, v kateri je q neznan parameter. Velikost vzorca n naj bo spremenljiva in pri vsakem n naj bo $U_n = f(X_1, \ldots, X_n)$ cenilka za q. Od zaporedja cenilk U_n želimo, da ima tole lastnost: za vsak pozitiven ε je

$$\lim_{n\to\infty} P(|U_n - q) < \varepsilon) = 1 \tag{11}$$

Tedaj namreč lahko pričakujemo z verjetnostjo, ki je poljubno blizu 1, da se bo ocena u_n ločila od q tako malo, kot hočemo, če je le vzorec zadosti velik. Če ima zaporedje cenilk lastnost (11), pravimo, da je *dosledno*, vsak njegov člen pa je *dosledna cenilka* parametra q. Nadaljnja lepa lastnost cenilke je nepristranost: cenilka U se imenuje *nepristranska*, če je $E(U) = q$. Ta lastnost povzroči, da se povprečje ocen u parametra q iz vzorcev določene velikosti pri velikem številu ocen navadno le malo loči od q. Kajpak bo to doseženo tem prej, čim manjšo disperzijo ima cenilka U. Zato je med nepristranskimi cenilkami najboljša tista, katere disperzija je tako majhna, kot je sploh mogoče; rečemo ji *najučinkovitejša cenilka*.

Primer 6. Vzemimo, da je X porazdeljena normalno po zakonu $N(a, \sigma)$ in da sta parametra a in σ neznana. Kako bi dobili zanju primerni cenilki iz vzorca $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$?

Ker je a povprečna vrednost normalno porazdeljene slučajne spremenljivke X in σ^2 njena disperzija, je brž pri roki tale ideja: za cenilko povprečne vrednosti a vzemimo vzorčno povprečno vrednost

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

za cenilko disperzije σ^2 pa vzorčno disperzijo

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2$$

Ta način dobivanja cenilk se imenuje metoda momentov.

Cenilka $\overline{X}$ ima vse lastnosti, ki smo jih našteli prej: dosledna je, nepristranska in najučinkovitejša. S cenilko S_0^2 pa je že drugače: dosledna sicer je, nepristranska pa ne, velja namreč $E(S_0^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. Nepristranska cenilka za σ^2 bi bila torej $S^2 = \frac{n}{n-1} S_0^2$. Cenilka S^2 je tudi dosledna, najučinkovitejša pa ni.[3]

[3] Prim. (1), razdelek 27.4 in 32.3.

Pri točakstem ocenjevanju ne vemo, ali se ocena u ujema s parametrom q, in tudi tega ne, kako velika je napaka ocene. Vse, kar moremo narediti v tem pogledu, je, da navedemo interval, ki s predpisano verjetnostjo pokriva neznani parameter. V tem primeru govorimo o *intervalskem ocenjevanju parametra.*

Opišimo intervalsko ocenjevanje na splošno. Naj bo kot prej $F(x, q)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X, v njej q neznan parameter in $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajen vzorec za X. Vzemimo taki statistiki

$$D = d(X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad \text{in} \quad G = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

da je pri danem α med 0 in 1

$$P(D \leqq q \leqq G) \geqq 1 - \alpha$$

Slučajni interval $[D, G]$, ki s predpisano verjetnostjo $1 - \alpha$ pokriva neznani q, se imenuje *interval zaupanja* za q, število $1 - \alpha$ pa je *koeficient zaupanja.* Ta je največkrat 0·95 ali 0·99 ali 0·999.

Primer 7. Če je X porazdeljena po zakonu $N(a, \sigma)$, je statistika

$$T = \frac{\bar{X} - a}{S}\sqrt{n},$$

v kateri je $\bar{X}$ vzorčna povprečna vrednost in $S = (n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2)^{\frac{1}{2}}$, porazdeljena po zakonu[4]

$$p_T(x) = \frac{1}{\sqrt{n-1}\, B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Predpišimo α in izberimo t_α tako, da bo

$$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} p_T(x)\, dx = 1 - \alpha,$$

se pravi, $P\left(-t_\alpha \leqq \frac{a - \bar{X}}{S}\sqrt{n} \leqq t_\alpha\right) = 1 - \alpha$. Drugače zapisano,

$$P\left(\bar{X} - \frac{St_\alpha}{\sqrt{n}} \leqq a \leqq \bar{X} + \frac{St_\alpha}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

To pomeni, da je $\left[\bar{X} - \frac{St_\alpha}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{St_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$ interval zaupanja za a s predpisanim koeficientom zaupanja $1 - \alpha$.

LITERATURA

[1] Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton 1954.
[2] Fisz, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, Berlin 1970.
[3] Van der Waerden, *Mathematische Statistik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

[4] Prim. (2), razdelek 9.6.

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 3/4

TEORIJA IGER

RAJKO JAMNIK

AMS Subj. Class. (1970) 90—01

Kratek pregled osnovnih pojmov v teoriji končnih iger.

ON THE THEORY OF GAMES

A short survey of basic concepts in the theory of finite games.

V gospodarstvu je udeležena množica subjektov (ljudi, podjetij, gospodarskih grupacij ipd.) in njihovi interesi niso zmeraj identični. Zato prihaja do *konfliktnih situacij*, kot so konkurenca, spori ob delitvi dohodka in ne nazadnje vojne, čeprav te niso zmeraj samo gospodarske konfliktne situacije. Konfliktne situacije se med seboj ločijo po tem, kako zelo si nasprotujejo interesi prizadetih. Nekatere so take, da je v njih vsaka prednost, ki si jo pridobi ena stran, enaka izgubi, ki jo utrpi druga stran. Za take situacije pravimo, da so *antagonistične*. Zgled za antagonistično situacijo je recimo bitka, če štejemo v njej za korist osvojeno ozemlje. Na splošno so čiste antagonistične situacije razmeroma redke. Največkrat se konfliktna situacija razvija tako, da si prizadeti pridobivajo koristi deloma na škodo nasprotnika, deloma pa jim je križanje interesov spodbuda za to, da si pomagajo z nevtralnimi viri. Tako npr. podjetje v konkurenčnem boju odjeda z reklamo porabnike drugim podjetjem, lahko pa napravi z novimi izumi svoje izdelke zanimive tudi za nove porabnike. Neantagonistične situacije so kajpak bolj zapletene od antagonističnih, zato se bomo najprej lotili antagonističnih.

Izluščimo poglavitne značilnosti antagonistične situacije v najpreprostejšem primeru, ko sta vanjo zapleteni samo dve strani, recimo P_1 in P_2.

a) Vsaka stran hoče doseči neki namen in namena obeh strani sta nezdružljiva, se pravi, konflikt se ne more razrešiti tako, da bi dosegli svoj namen obe strani.

b) Obe strani ravnata po določenih pravilih, t.j. upoštevata naravne zakone, zakonske predpise, uzance in podobno.

c) Obe strani ravnata razumno: izmed mogočih ukrepov vselej izbereta tiste, ki zagotavljajo ali vsaj z največjo verjetnostjo obljubljajo največjo korist.

d) Za vsak izbran ukrep je mogoče oceniti, kakšno korist bo prinesel tistemu, ki ga je izbral.

Antagonistična situacija se očitno razvija tako, kot potekajo take družabne igre, na katere lahko vplivajo igravci s svojimi odločitvami (npr. šah, tarok ipd.) in ki jim zato pravimo *strateške igre*. Čeprav utegne biti tudi strateška igra dovolj zapletena, pa je v splošnem vendarle manj, kot so ekonomske antagonistične situacije. Predvsem je pri igrah laže ustreči zahtevi (d). Zato je razumljivo, da se teorija konfliktnih situacij najprej loti strateških iger.

1

Igra je zbirka pravil in dogovorov, po katerih se morajo ravnati udeleženci. Realizacija igre se imenuje *partija*. Strani, ki so udeležene v igri, so *igravci*. Igra poteka tako, da igravci izberejo v določenih trenutkih iz množice mogočih ukrepov po enega. Izbrani ukrep se imenuje *izbira* igravca, izbiranje samo pa je *poteza*.

Igre je mogoče razdeliti po različnih vidikih. Eden od njih je število igravcev. Ločimo igre z enim igravcem (npr. pasjansa), z dvema igravcema (npr. šah) in tako naprej. Pri tem štejemo za enega igravca tudi skupino oseb, če imajo te v igri identične interese. Potemtakem je tarok, ki ga igrajo štiri osebe, igra z dvema igravcema, razen variante »klopecki«. ki je igra s štirimi igravci. Drugi vidik za klasifikacijo iger je število potez. To je lahko določeno (npr. pri taroku) ali nedoločeno (npr. pri šahu). Igre se ločijo tudi po številu izbir, to je lahko končno ali neskončno. Igra s končnim številom potez in s končno množico izbir v vsaki potezi je *končna igra*, vsaka druga igra pa je neskončna. Nadalje je mogoče igre razdeliti glede na informacijo, ki jo ima igravec, ko je na potezi, o svojih in nasprotnikovih prejšnjih izbirah in o možnostih za naprej. Informacija je lahko popolna (pri šahu), delna (pri večini iger s kartami) ali pa je sploh ni.

Družabne igre se pogosto igrajo za denar. Pri teh je mogoče opisati izid s števili — dobički vseh igravcev. Seveda so dobički lahko tudi negativni, torej v resnici izgube. Sicer pa je mogoče izraziti izid s števili tudi pri igrah, ki se ne igrajo za denar, recimo 1 za zmago, 0 za nedoločen izid in —1 za poraz. Torej se da opisati izid vsake igre med igravci $P_1, P_2, \ldots, \ldots, P_n$ z n-terico števil

$$(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

pri čemer je d_i dobiček igravca P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pri družabnih igrah velja za dobičke d_i relacija

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 0 \tag{1}$$

Igre, pri katerih velja (1), imenujemo *igre z vsoto nič* ali *antagonistične igre.*

Najpreprostejša igra z več kot enim igravcem je končna antagonistična igra med dvema igravcema, od katerih ima vsak po eno potezo in nobene informacije. Taki igri rečemo *matrična igra.* V njej imata igravca končno mnogo izbir, recimo igravec P_1 izbire $U_1, U_2, \ldots, \ldots, U_m$ in igravec P_2 izbire $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Igra poteka torej tako, da P_1 izbere število i iz množice $\{1, 2, \ldots, m\}$ — in s tem ukrep U_i — igravec P_2 pa število j iz množice $\{1, 2, \ldots, \ldots, n\}$, se pravi ukrep V_j. Da bo igra brez informacije, morata izbirati ali hkrati ali ločeno drug od drugega. Dobiček igravca P_1 določa funkcija

$$d\colon (i, j) \to d_{ij} \tag{2}$$

Ta prireja izbiri i igravca P_1 in izbiri j igravca P_2 znesek p_{ij}, ki ga plača P_2 igravcu P_1; če je $d_{ij} < 0$, seveda plača P_1. Ker gre za igro z vsoto 0, so s funkcijo (2) določeni tudi dobički igravca P_2, za vsako dvojico izbir (i, j) je njegov dobiček $d'_{ij} = -d_{ij}$. Funkcijo (2) zapišemo najpregledneje v matrični obliki:

$$D = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1} & d_{m2} & \ldots & d_{mn} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

Matriki D pravimo *plačilna matrika* igre.

Primer 1. Igravca P_1 in P_2 položita oba hkrati na mizo po en dinar. Če je na obeh zgoraj grb ali na obeh zgoraj številka, ju dobi P_1; če pa je na enem zgoraj grb, na drugem pa zgoraj številka, pobere oba dinarja P_2. Zaznamujmo pri obeh igravcih grb z 1 in številko z 2. Potem oba igravca izbirata iz množice $\{1, 2\}$ in za P_1 je $d_{11} = d_{22} = 1$ in $d_{12} = d_{21} = -1$. Torej je plačilna matrika igre

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Preden se lotimo poglavitnega vprašanja pri matričnih igrah, namreč, kako naj igravca ravnata, da bosta kar največ priigrala, vpeljimo še nekaj pojmov. Vzemimo, da sta igravca odigrala N partij in da je igravec P_1 pri tem izbral število i v k_i partijah, igravec P_2 pa število j v q_j partijah. Zaznamujmo $k_i/N = x_i$ in $q_j/N = y_j$, nato pa naredimo m-terico $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ in n-terico $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Vektor X se imenuje *strategija* igravca P_1, vektor Y pa strategija igravca P_2 v opravljenih N partijah. Seveda lahko določi igravec P_1 svojo strategijo že vnaprej, tako da se nameni izbirati število i z verjetnostjo x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), in ustrezno velja tudi za igravca P_2. Elementi v obeh strategijah so nenegativni in $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. Če sta v strategiji vsaj dva elementa pozitivna, ji pravimo *mešana strategija*. Če pa je v strategiji en element 1 in vsi drugi 0, je strategija *čista*. Npr. $X = (0{\cdot}5, 0{\cdot}5, 0)$ je mešana strategija, $X = (0, 0, 1)$ pa čista. Čisti strategiji navadno pridevamo kot indeks zaporedno številko tistega mesta, na katerem stoji v njej enica. Npr. čisto strategijo $(0, 0, 1)$ bomo zaznamovali z X_3, če je to strategija igravca P_1, in z Y_3, če jo uporablja P_2.

Čista strategija X_i predpisuje, naj P_1 v vsaki partiji izbere število i. Če se drži tudi P_2 čiste strategije, recimo Y_j, dobi P_1 v vsaki partiji znesek d_{ij}. Če pa uporabljata igravca mešani strategiji, se dobiček od partije do partije spreminja. Izračunajmo povprečni dobiček $E(X, Y)$ igravca P_1 na eno partijo, če se drži P_1 strategije X in P_2 strategije Y. Ker izbirata igravca neodvisno drug od drugega, je relativna frekvenca partij, v katerih P_1 izbere i in še P_2 odloči za j, enaka $x_i y_j$. Zato je

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, x_i\, y_j \tag{4}$$

Če vzamemo X za matrično vrstico in Y za matrični stolpec, lahko zapišemo (4) takole: $E(X, Y) = XDY$.

Pomudimo se zdaj pri vprašanju, kakšen bi bil najugodnejši način igre za oba igravca. Če v dani partiji P_1 izbere i, bo gotovo dobil vsaj znesek $\min\limits_{j} d_{ij}$, s pravilno izbiro torej zmeraj lahko priigra $\max\limits_{i} \min\limits_{j} d_{ij}$. Podoben sklep napravi igravec P_2: pri katerem koli j ne bo izgubil več kot $\max\limits_{i} d_{ij}$, zato bo izbral j tako, da bo njegova izguba kvečjemu $\min\limits_{j} \max\limits_{i} d_{ij}$. Natančnejša preiskava, ki je tu ne utegnemo napraviti,[1] pokaže, da je v vsakem primeru

$$\max_{i} \min_{j} d_{ij} \leqq \min_{j} \max_{i} d_{ij} \tag{5}$$

in da velja enakost v (5) natanko takrat, kadar obstaja v plačilni matriki tak element $d_{i_0 j_0}$, da je hkrati najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu, ali drugače rečeno, kadar ima plačilna matrika sedlo. Pri igri s sedlom je torej

$$d_{i_0 j_0} = \max_{i} \min_{j} d_{ij} = \min_{j} \max_{i} d_{ij} \tag{6}$$

in igravca nimata na razpolago nič boljšega, kot da v vsaki partiji izbereta i_0 in j_0, to se pravi, da se držita čistih strategij X_{i_0} in Y_{j_0}. Dvojica (X_{i_0}, Y_{j_0}) torej določa optimalen način igre za oba igravca; zato ji pravimo *rešitev igre*, količini $v = d_{i_0 j_0}$ pa *vrednost igre* za igravca P_1.

Primer 2. Pri igri s plačilno matriko

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

[1] Prim. (1) str. 32 sl.

je d_{23} sedlo matrike D, zato je rešitev igre dvojica čistih strategij (X_2, Y_3), vrednost igre pa je $v = -1$.

Igre s sedlom so razmeroma malo zanimive: če igravca poznata rešitev, bosta v vsaki partiji igrala enako. Pri igrah brez sedla je drugače, saj pri njih velja relacija

$$\max_i \min_j d_{ij} < \min_j \max_i d_{ij}$$

Oglejmo si na zgledu, kakšne so možnosti v tem primeru.

Primer 3. Igra ima plačilno matriko

$$D = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

V njej je $\max_i \min_j d_{ij} = d_{22} = 0$ in $\min_j \max_i d_{ij} = d_{12} = 1$. Če P_1 uporablja strategijo X_2, bo vselej dobil vsaj 0, igravec P_2 pa ne bo s strategijo Y_2 nikdar izgubil več kot 1. Vendar ima P_1 možnost, da proti »varni« strategiji Y_2 dobi 1, in sicer če uporabi X_1. Toda če se tudi P_2 spusti v tveganje in igra proti X_1 po strategiji Y_1, bo P_1 izgubil 1. Kajpak je strategija Y_1 za P_2 nezanesljiva, saj mu proti X_2 prinese izgubo 2. Tako vidimo, da v eni sami partiji igravec P_1 ne more zanesljivo povečati dobička nad $\max_i \min_j d_{ij}$ in prav tako P_2 ne zanesljivo zmanjšati izgube pod $\min_j \max_i d_{ij}$. To velja seveda tudi za poljubno število partij, če se držita igravca čistih strategij.

Drugače pa je, če uporabljata igravca mešane strategije, se pravi, če sta pripravljena tvegati. Tedaj lahko uporabimo znameniti von Neumannov *izrek o minimaksu*:

Za vsako matrično igro je

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) \tag{7}$$

Izrek navajamo brez dokaza.[2] V relaciji (7) je treba pri iskanju maksima in minima upoštevati vse mogoče (čiste in mešane) strategije X igravca P_1 in vse strategije Y igravca P_2.

Iz izreka o minimaksu bomo brž dobili tole posledico:

Pri vsaki matrični igri obstajata taki strategiji X_0 in Y_0, da je

$$E(X_0, Y_0) \leqq E(X_0, Y) \text{ za vse } Y \tag{8}$$

$$E(X_0, Y_0) \geqq E(X, Y_0) \text{ za vse } X \tag{9}$$

Res je tako: Naj bo X_0 taka strategija, da je

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y E(X_0, Y) \tag{10}$$

n Y_0 taka strategija, da je

$$\min_Y \max_X E(X, Y) = \max_X E(X, Y_0) \tag{11}$$

Iz (7), (10) in (11) sledi

$$\min_Y E(X_0, Y) = \max_X E(X, Y_0) \tag{12}$$

Gotovo je $\min_Y E(X_0, Y) \leqq E(X_0, Y_0)$, saj je na desni strani te ocene Y fiksiran, na levi pa poljuben. Če upoštevamo še (12), dobimo relacijo

$$\max_X E(X, Y_0) \leqq E(X_0, Y_0)$$

[2] Prim. (1) str. 52—72.

ki potrjuje oceno (9). Prav tako je tudi $E(X_0, Y_0) \leqq \max_X E(X, Y_0)$ in to pomeni zaradi (12), da je

$$E(X_0, Y_0) \leqq \min_Y E(X_0, Y)$$

Tako je potrjena še ocena (8).

Iz tega izreka sklepamo, da P_1 s strategijo X_0 v velikem številu partij v povprečju z veliko zanesljivostjo lahko priigra $E(X_0, Y_0)$ in da mu pri tem P_2 s strategijo Y_0 lahko zelo zanesljivo prepreči, da bi priigral v povprečju več kot $E(X_0, Y_0)$. Zato imenujemo strategiji X_0 in Y_0 *optimalni*, dvojici optimalnih strategij (X_0, Y_0) pravimo *rešitev matrične igre*, količina $v = E(X_0, Y_0)$ pa se imenuje *vrednost igre* za igravca P_1.

Primer 4. Poiščimo rešitev igre iz primera 3. Ker plačilna matrika nima sedla, moramo upoštevati vse strategije obeh igravcev. Naj bosta $X = (x, 1 - x)$ in $Y = (y, 1 - y)$ poljubni strategiji, prva za P_1 in druga za P_2. V njih sta x in y poljubni števili od 0 do 1. Če se držita igravca teh strategij, je povprečni dobiček $E(X, Y)$ igravca P_1

$$E(X, Y) = -1 \cdot xy + 1 \cdot x(1 - y) + 2(1 - x)y + 0(1 - x)(1 - y) =$$
$$= -4xy + x + 2y = -4(x - \tfrac{1}{2})(y - \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{2}$$

Če torej P_1 izbere $x = \frac{1}{2}$, je $E(X, Y) = \frac{1}{2}$, ne glede na to, kakšno strategijo uporablja P_2. Igravec P_2 pa z izbiro $y = \frac{1}{4}$ lahko doseže, da P_1 v povprečju ne priigra več kot $\frac{1}{2}$. Torej sta strategiji $X_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in $Y_0 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ taki, da je $E(X_0, Y_0) \leqq E(X_0, Y)$ za vse Y in $E(X_0, Y_0) \geqq E(X, Y_0)$ za vse X. Zato sta X_0 in Y_0 optimalni strategiji, vrednost igre za P_1 pa je $v = E(X_0, Y_0) = \frac{1}{2}$.

Kadar ima vsaj eden od igravcev več kot dve izbiri, določanje optimalnih strategij ne gre tako gladko kot v primeru 4. Izmed obstoječih metod za reševanje matričnih iger omenimo tu le dve: prevedbo na linearno programiranje in približno določanje rešitev.

Oglejmo si najprej prevedbo v linearno programiranje. Vzemimo, da ima igra plačilno matriko dimenzije $m \times n$. Če izbere P_1 strategijo $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, mu ta zagotavlja neki minimalen povprečni dobiček, recimo $u = f(X)$: za vsako strategijo Y je $E(X, Y) \geqq u$. Če vzamemo v tej neenačbi za Y zapovrstjo čiste strategije $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, dobimo sistem neenačb

$$\begin{aligned} d_{11}x_1 + d_{21}x_2 + \ldots + d_{m1}x_m &\geqq u \\ d_{12}x_1 + d_{22}x_2 + \ldots + d_{m2}x_m &\geqq u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{1n}x_1 + d_{2n}x_2 + \ldots + d_{mn}x_m &\geqq u \end{aligned} \tag{13}$$

Optimalna strategija za igravca P_1 je tista, pri kateri je u kar se da velik. Neenačbe (13) lahko spremenimo v enačbe, če vpeljemo količine

$$d_{1j}x_1 + d_{2j}x_2 + \ldots + d_{mj}x_m - u = x_{m+j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Potem lahko zapišemo sistem (13) v obliki

$$\begin{aligned} d_{11}x_1 + d_{21}x_2 + \ldots + d_{m1}x_m - x_{m+1} &= u \\ d_{12}x_2 + d_{22}x_2 + \ldots + d_{m2}x_m - x_{m+2} &= u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{1n}x_1 + d_{2n}x_2 + \ldots + d_{mn}x_m - x_{m+n} &= u \end{aligned}$$

Odštejmo v tem sistemu prvo enačbo od naslednjih. Potem dobi P_1 svojo optimalno strategijo tako, da poišče maksimum linearne forme

$$u = d_{11}x_1 + d_{21}x_2 + \ldots + d_{m1}x_m - x_{m+1}$$

pri pogojih

$$(d_{12} - d_{11})x_1 + \ldots + (d_{m2} - d_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+2} = 0$$
$$(d_{13} - d_{11})x_1 + \ldots + (d_{m3} - d_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+3} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(d_{1n} - d_{11})x_1 + \ldots + (d_{mn} - d_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+n} = 0$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$
$$x_k \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m + n)$$

Ta naloga pa je linearni program v standardni obliki. Njeno reševanje gre potem po dobro utrtih poteh.

Podobno se prevede v linearni program iskanje optimalne strategije za igravca P_2. Nadrobnosti lahko opravi bravec sam.

Pri približnem reševanju matrične igre se postavimo na tole stališče: v prvi partiji je izbira igravcev kakršna koli (recimo kar 1), v naslednjih partijah pa se odločita za tako izbiro, ki bi jima prinesla glede na vse prejšnje izbire nasprotnika največji dobiček. Kako poteka izbiranje po tem načelu, si oglejmo na zgledu.

Primer 5. Igra ima plačilno matriko

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

Naj bo prva partija $i = 1, j = 1$. Za drugo partijo izbere prvi igravec 3, saj mu to prinese proti strategiji Y_1 največji dobiček 2. Igravec P_2 pa vzame v drugi partiji 2, saj s tem proti X_1 najmanj izgubi. Torej bo druga partija $i = 3, j = 2$. Pri odločanju v tretji partiji P_1 vidi, da bi bil z X_1 proti izbirama 1 in 2 igravca P_2 priigral 1, z X_2 bi dobil 2 in z X_3 tudi 2. Zato nima razloga, da bi spreminjal zadnjo izbiro, izbral bo spet 3. Igravec P_2 pa bi proti igri 1 in 3 igravca P_1 v prvih dveh partijah z Y_1 izgubil 3, z Y_2 bi bila njegova izguba 0, z Y_3 pa 5. Zato bo izbral 2 in bo tretja partija $i = 3, j = 2$. Po tretji partiji vidi P_1, da bi bil proti igri 1, 2, 2 nasprotnika dobil z X_1 1, z X_2 4 in z X_3 2. Zato bo njegova naslednja izbira 2. Za P_2 pa bi bila Y_2 najugodnejša strategija tudi proti igri 1, 3, 3. Zato bo četrta partija $i = 2, j = 2$. In tako naprej.

V čem je pomen opisane procedure? Vzemimo, da smo v njej naredili p korakov. Zaznamujmo z u_p najmanjši povprečni dobiček, ki bi ga P_1 s svojo igro v teh p korakih dosegel proti kakšni čisti strategiji nasprotnika, in z v_p največji povprečni dobiček, ki bi ga P_1 dobil s kakšno čisto strategijo proti dejanski igri nasprotnika v prvih p korakih. Nadalje naj bosta $X^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_m^{(p)})$ in $Y^{(p)} = (y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, \ldots, y_n^{(p)})$ strategiji, ki sta jih uporabila igravca v prvih p partijah. Potem velja tale Robinsonov izrek.[3]

Vrednost igre v za igravca P_1 je

$$v = \sup_p u_p = \inf_p v_p$$

Če ima igra eno samo rešitev (X_0, Y_0), je

$$X_0 = \lim_{p \to \infty} X^{(p)} \quad in \quad Y_0 = \lim_{p \to \infty} Y^{(p)}$$

Če pa ima igra več rešitev, je limita vsakega konvergentnega podzaporedja množice $\{X^{(p)}; p = 1, 2, 3, \ldots\}$ neka optimalna strategija za P_1 in limita vsakega konvergentnega podzaporedja množice $\{Y^{(p)}; p = 1, 2, 3, \ldots\}$ neka optimalna strategija za P_2.

[3] Robinson, An Iterative Method of Solving a Game, Ann. of Math. 54, 2 (1951), str. 296—301.

Zaradi tega izreka lahko določimo z opisanim postopkom vrednost igre tako natanko, kot hočemo, če le napravimo dovolj korakov, pa tudi optimalni strategiji je mogoče oceniti poljubno natanko. Operacije pri tej metodi so prav preproste in njihova zamudnost je sorazmerna s številom čistih strategij obeh igravcev. Zato je metoda zelo primerna za računalnik.

2

Oglejmo si na kratko še nekatere druge vrste iger. Najprej *pozicijsko igro s popolno informacijo*. To je antagonistična igra med dvema igravcema, v kateri ima vsaj en igravec več kot eno potezo in oba na vsaki potezi popolno informacijo o tem, kaj sta ukrenila v prejšnjih potezah sama in kaj nasprotnik. Da se nam ne bo treba ukvarjati z analitičnimi vprašanji, bomo spet vzeli, da je igra končna. Zgled za tako igro je šah.

Vzemimo torej, da ima P_1 v igri a potez in da v r-ti potezi ($r = 1, 2, \ldots, a$) izbere eno od števil $1, 2, \ldots, m_r$. Igravec P_2 pa naj ima b potez in v s-ti potezi ($s = 1, 2, \ldots, b$) izbira med števili $1, 2, \ldots, n_s$. Igravca sta na potezi izmenoma, tako da je ali $b = a$ ali $|a - b| = 1$. Zaznamujmo r-to izbiro igravca P_1 z x_r in s-to izbiro igravca P_2 z y_s. Vsako mogoče zaporedje

$$x_1, x_2, \ldots, x_a, y_1, y_2, \ldots, y_b$$

izbir obeh igravcev imenujemo *potek igre*. Vseh mogočih potekov je končno mnogo, namreč $m_1 m_2 \ldots m_a n_1 n_2 \ldots n_b$. Vsakemu poteku je prirejeno število

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_a, y_1, y_2, \ldots, y_b)$$

to je znesek, ki ga dobi P_1 od P_2 pri tem poteku. Funkcija d, definirana na množici potekov, se imenuje *plačilna funkcija igre*, vsaka njena vrednost pa *izid igre*. Razume se, da so lahko nekateri izidi med seboj enaki. Npr. pri šahu so mogoči le trije izidi: $+1$ (zmaga), 0 (remi) in -1 (poraz).

Kadar je pozicijska igra opisana tako, da za vsako mogočo potezo igravca naštejemo vse njegove izbire, pravimo, da je igra dana *ekstenzivno*. Tudi način igre, pri katerem igravec šele takrat, ko je na potezi, odloča, kaj bo v tej potezi naredil, se imenuje ekstenzivno igranje. (Tako igrajo šah začetniki.) Pozicijske igre pa se je mogoče lotiti tudi drugače. Vzemimo, da igravec vnaprej odloči, kaj bo izbral v vsaki potezi. Igravec P_1 torej vnaprej izbere zaporedje $x_1, x_2, \ldots, x_a$. Vsako tako zaporedje se imenuje *strategija* igravca P_1; zaznamujmo jo z X_i. Ker je število zaporedij $x_1, x_2, \ldots, x_a$ enako $m_1 m_2 \ldots m_a = u$, je indeks i strategije X_i lahko katero koli naravno število od 1 do u. Prav tako kot P_1 lahko tudi P_2 vnaprej izbere zaporedje $y_1, y_2, \ldots, y_b$. Ta izbira je njegova strategija, recimo Y_j; pri tem je lahko j katero koli naravno število od 1 do $v = n_1 n_2 \ldots n_b$. Vsaka kombinacija strategij (X_i, Y_j) določa natanko en potek igre in temu ustrezen izid $d(X_i, Y_j) = d_{ij}$. Tako smo v takem položaju: igravec P_1 izbere eno od strategij $X_1, X_2, \ldots, X_u$, igravec P_2 pa eno od strategij $Y_1, Y_2, \ldots, Y_v$. Izbirata, ne da bi vedela za namene nasprotnika, in njuna enkratna izbira (X_i, Y_j) določa plačilo d_{ij}. Plačila d_{ij} imamo lahko za elemente matrike z u vrsticami in v stolpci, imenujmo jo D. Tako je nastala iz pozicijske igre matrična in D je njena plačilna matrika. Prevedba pozicijske igre v matrično se imenuje *normalizacija* pozicijske igre. Če je pozicijska igra opisana kot matrična, se pravi s spiskom strategij obeh igravcev in s plačilno matriko, pravimo, da je dana *normalno*. Strategije v normalizirani pozicijski igri imajo očitno tako vlogo kot izbire (ali čiste strategije) v navadni matrični igri.

Vsaka pozicijska igra s popolno informacijo se torej dá normalizirati. Naj še omenimo,[4] da ima plačilna matrika normalizirane pozicijske igre s popolno informacijo zmeraj sedlo, se pravi, obstajata optimalni strategiji X_{i_0} in Y_{j_0}, za kateri je

$$\max_i \min_j d_{ij} = \min_j \max_i d_{ij} = d_{i_0 j_0}$$

[4] Prim. (1) str. 153—154.

Primer 6. Rekli smo že, da igrajo začetniki šah ekstenzivno. Kadar pa igravci »preračunavajo kombinacije«, skušajo igro vsaj delno normalizirati. Popolnoma normalizirati šaha za zdaj ni mogoče, bogastvo strategij je pač preveliko. Sicer pa je to za šah kot šport samo dobro, normaliziran šah bi ne bil več zanimiv.

Pri pozicijskih igrah je informacija dostikrat nepopolna ali pa je sploh ni. Take igre z nepopolno informacijo so npr. igre s kartami z več kot dvema udeležencema, tako da nasprotnika drug za drugega, in celo zase, ne vesta, s kakšnimi kartami razpolagata. Poleg tega so mogoče v pozicijskih igrah tudi slučajne poteze, se pravi take, v katerih izbira ključje in ne kateri od igravcev. Npr. pri kartanju je slučajna poteza delitev kart. Tudi pozicijske igre z nepopolno informacijo in s slučajnimi potezami je mogoče normalizirati, samo njihova plačilna matrika nima sedla.

Nadaljnji tip iger je *neantagonistična igra* med dvema igravcema. Lahko je končna ali neskončna, z eno potezo vsakega igravca ali z več potezami. Od antagonističnih iger jo loči okoliščina, da dobiček enega igravca ni zmeraj enak izgubi nasprotnika.

Omenimo nekaj reči o najpreprostejši neantagonistični igri. To je normalna igra med dvema igravcema. V njej imata igravca po eno potezo in v njej končno mnogo izbir, igravec P_1 recimo m, igravec P_2 pa n. Vsaki dvojici izbir (i, j) je prirejena dvojica števil (a_{ij}, b_{ij}). Število a_{ij} je dobiček igravca P_1, število b_{ij} pa dobiček igravca P_2 pri izbirah i in j. Števila a_{ij} in b_{ij} so kakršna koli, le $a_{ij} + b_{ij}$ ni identično nič, sicer bi bila igra antagonistična. Dvojice (a_{ij}, b_{ij}) lahko zapišemo kot plačilno matriko

$$\begin{Vmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \dots (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \dots (a_{2n}, b_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) \dots (a_{mn}, b_{mn}) \end{Vmatrix}$$

Pojem strategije ima pri neantagonistični igri prav tako vsebino kot pri igri z vsoto nič: čista strategija je vsaka izbira ali stanovitno ponavljanje iste izbire v večjem številu partij, mešana strategija pa je m-terica (ali n-terica) relativnih frekvenc vseh izbir v večjem številu partij. Če uporablja P_1 strategijo $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ in P_2 strategijo $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, je

$$E_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

povprečni dobiček igravca P_1 in

$$E_2(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

povprečni dobiček igravca P_2. Obema igravcema je do tega, da je njun povprečni dobiček kar se da velik. Glede na to, kako skušata doseči ta namen, obstajata pri neantagonističnih igrah dve možnosti: ali se igravca pred igro pogodita, kaj bosta izbrala, ali pa dogovarjanje pred izbiranjem ni mogoče. Igra z dogovarjanjem se imenuje *kooperativna*, igra brez dogovarjanja pa *nekooperativna*.

Razmere pri kooperativni varianti neantagonistične igre so lepo pregledne. Igravec P_1 lahko doseže brez dogovarjanja povprečni dobiček

$$v_1 = \max_X \min_Y E_1(X, Y)$$

igravec P_2 pa

$$v_2 = \max_Y \min_X E_2(X, Y)$$

Z dogovarjanjem pa je včasih mogoče ta zneska tudi povečati. Zato zanimajo igravca take strategije X in Y, za katere sta $E_1(X, Y)$ in $E_2(X, Y)$ kar se da velika, pa seveda $E_1(X, Y) > v_1$ in $E_2(X, Y) > v_2$. Množica takih dvojic (X, Y) se imenuje *sporna množica* koopera-

tivne igre, kajti v njej so interesi igravcev protislovni, tam ni več mogoče povečati obeh dobičkov hkrati. Ker je pogajanje o sporni množici bolj psihološka zadeva kot predmet matematične teorije, pravijo sporni množici tudi *kooperativna rešitev* neantagonistične igre.

Obravnava nekooperativne igre je bolj zapletena, zato se ji moramo tu odreči.

Omenimo nazadnje še igre med več igravci, recimo, da jih je n. Najpreprostejša taka igra je antagonistična igra, v kateri ima vsak igravec po eno potezo, v njej končno število izbir in nobene informacije o izbirah drugih igravcev. Za tako igro pravimo, da je *normalna*. Kot pri igrah med dvema igravcema velja, da je mogoče normalizirati tudi pozicijske igre med več igravci.

Poglavitna novost pri igrah med več igravci je ta: V igri med dvema igravcema igrata igravca ali strogo drug proti drugemu in izkoriščata pravila igre, kolikor se le da, ali pa se sporazumeta za sodelovanje, ki je koristno obema. Pri igri med n igravci pa se lahko združi le nekaj igravcev, da bi s skupnim nastopom dosegli zase ugodnejši izid. Pri igri z vsoto nič gre ta prednost gotovo na račun drugih igravcev, lahko pa se to primeri tudi v neantagonistični igri. Za igre med n igravci je torej značilna možnost, da igravci sestavljajo *koalicije*. Sestavljanje koalicij je lahko bolj ali manj prosto — od primera, ko so koalicije nemogoče, do primera, ko so lahko kakršne koli.

Oglejmo si samo drugo možnost (ko koalicije niso omejene) in zahtevajmo, da so dobički v koaliciji *prenesljivi*. To pomeni, da se lahko člani koalicije med seboj podkupujejo, ali drugače rečeno, da so dovoljena *postranska plačila* med člani koalicije. Pokazati se dá, da priigrajo igravci v koaliciji vsaj toliko, kot če igrajo vsak zase, ali celo več. To je ravno razlog za nastajanje koalicij. Denimo, da so igravci $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sklenili koalicijo K. Dogovorili so se torej, da bodo v igri nastopali kot en sam igravec, in šlo jim bo za to, da bi bila vsota njihovih dobičkov kar se da velika. Taka koalicija ima na razpolago končno mnogo ukrepov $A = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, pri čemer je x_i izbira člana P_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Igravci $P_{k+1}, \ldots, P_n$ nimajo potem nič boljšega, kot da tudi sami ustanovijo koalicijo, recimo L. Ta spet ravna kot en mož, izbira iz končne množice ukrepov $B = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$, in sicer tako, da bo njen povprečni dobiček kar se da velik. Pri dvojici izbir (A, B) dobi koalicija K znesek

$$\sum_{r=1}^{k} d_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{14}$$

in koalicija L prav tak znesek plača. V vsoti (14) je $d_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za vsak i od 1 do n dobiček igravca P_i pri izbirah $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Po sklenitvi koalicij je igra med n igravci postala antagonistična igra med igravcema K in L, od katerih ima vsak po eno potezo, končno število izbir in nobene informacije o ukrepu nasprotnika — skratka, igra je postala matrična. Po znanih metodah iz razdelka 1 je mogoče najti optimalen način igre za obe koaliciji.

V tem pogledu je tako vse lepo in prav, toda problem tiči drugje: kako ravnati pri ustanavljanju koalicij; koliko ponuditi komu, da se bo pridružil koaliciji; koliko lahko kdo zahteva, da bo za koalicijo še sprejemljiv; in podobno. Odločilen korak pri igri med n igravci je namreč sestavljanje koalicij. Zato se mora tudi pojem rešitve take igre nanašati na predloge za koalicije. Ne da bi se spuščali v nadrobnosti, naj povemo, da sta von Neumann in Morgenstern tak pojem rešitve tudi uvedla. Vendar ni jasno, ali bi bil igravec, ki njuno rešitev pozna, v igri kaj uspešnejši, kot če je ne bi poznal. Zato je v tem pogledu teorija iger med n igravci še nepopolna.

LITERATURA

[1] Jamnik, *Teorija iger*, Ljubljana 1966.
[2] Luce-Raiffa, *Games and Decisions*, New York-London 1957.
[3] McKinsey, *Introduction to the Theory of Games*, New York-Toronto-London 1952.
[4] Von Neumann-Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton 1947.
[5] Vajda, *The Theory of Games and Linear Programming*, London—New York 1956.

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 3/4

DINAMIČNO PROGRAMIRANJE

FRANCE KRIŽANIČ

AMS Subj. Class. (1970) 49-01

Članek s preprostimi zgledi, vzetimi iz [3] in [4], prikazuje teorijo optimalno vodenih diskretnih sistemov, predvsem Bellmanovo metodo dinamičnega programiranja.

DINAMIC PROGRAMMING

In the paper some notions of dinamic programming are explained, especially the Bellman method, on some simple problems taken from [3] and [4].

Začnimo s preprosto geometrijsko nalogo. Med vsemi pravokotniki, katerih obseg ne presega predpisanega števila, poiščimo tistega z največjo ploščino.

Predpisano število naj bo $2a$, stranici pravokotnika pa imenujmo x in y. Med vsemi pari pozitivnih števil x, y, ki zadoščajo pogoju $x + y \leqq a$, moramo poiskati par z največjim produktom xy. Po Bellmanu sklepamo takole: denimo, da smo prvo število x že našli. Tedaj moramo med vsemi y z intervala $0 < y \leqq a - x$, poiskati število, pri katerem je xy največji. Očitno je to $y = a - x$. Sedaj pa smo že pri nalogi o pravokotniku z danim obsegom in z največjo ploščino. Vemo, da je to kvadrat s stranico $a/2$.

Pa rešimo isto nalogo še za kvader. Poiščimo tri pozitivna števila x, y, z, ki zadoščajo pogoju $x + y + z \leqq a$, tako, da bo produkt xyz največji. Denimo, da smo x že našli. Tedaj moramo med pari y, z, ki zadoščajo pogoju $y + z \leqq a - x$, poiskati tistega, pri katerem je produkt yz največji. To pa je prejšnja naloga in $y = z = (a - x)/2$. Nazadnje je prostornina iskanega kvadra enaka $x(a - x)^2/4$. Stranico x odtod kaj lahko najdemo, saj je to tista vrednost argumenta, pri kateri ima funkcija $x(a - x)^2$ maksimum: $(a - x)^2 - 2x(a - x) = 0 \Rightarrow x = a/3$ in $y = z = (a - a/3)/2 = a/3$. Iskani kvader je kocka s stranico $a/3$.

Nalogo posplošimo: med vsemi n-tericami realnih števil $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ki zadoščajo pogojem

$$u_1 > 0, u_2 > 0, \ldots, u_n > 0, u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leqq a \tag{1}$$

poiščimo tisto, pri kateri je produkt $u_1 u_2 \ldots u_n$ največji.

Nalogo spet korak za korakom prevedemo v nalogo o ekstremu funkcije ene same spremenljivke in vidimo, da je rešitev $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = a/n$. Dokaz prepustimo bralcu in indukciji.

Naloga, ki smo jo pravkar rešili, je vpraševala po ekstremu funkcije več spremenljivk $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ na predpisani množici (1). Po Bellmanovi zamisli smo nalogo razdelili v več zaporednih nalog, v vsakem koraku smo iskali ekstrem funkcije ene same spremenljivke, vsakokrat seveda na ustrezni predpisani množici.

Nalogo lahko vdelamo v teorijo optimalnega vodenja sistemov. Bellmanova metoda, ki smo ji pravkar sledili, preraste tedaj v dinamično programiranje.

Preglejmo osnovne pojme teorije vodenih sistemov in optimalnega vodenja.

1. Slovar

Čas ali neodvisna spremenljivka je spremenljivka z zakladom vrednosti, ki je interval te ali one urejene množice. Čas je *zvezen*, če je definicijsko območje po urejenosti izomorfno intervalu realnih števil, *diskreten*, če je izomorfno intervalu celih števil.

Sistemom z zveznim časom bomo rekli zvezni sistemi, sistemom z diskretnim časom pa diskretni sistemi. Obravnavali bomo le diskretne sisteme, še več: časovni interval bo sestavljen kar iz celih števil

$$\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Posamezni vrednosti $t \in \mathcal{T}_t$ bomo rekli trenutek. Posebej: 0 je začetni, n končni trenutek časovnega intervala $\mathcal{T}$.

Stanje sistema. Vsakemu trenutku $t \in \mathcal{T}$ naj ustreza množica $\mathcal{X}_t$, ki ji recimo *zaklad stanj* v trenutku t. Element $x \in \mathcal{X}_t$ je (dovoljeno ali možno) stanje sistema. Največkrat bo $\mathcal{X}_t$ podmnožica večrazsežnega evklidskega prostora, $x \in \mathcal{X}_t$ torej večterica realnih števil.

Posebej imenujmo: $\mathcal{X}_0$ je množica začetnih stanj, $\mathcal{X}_n$ zaklad končnih stanj. Sistem ima pribito začetno stanje, če je $\mathcal{X}_0$ enočlena množica, pribito končno stanje, če je $\mathcal{X}_n$ enočlena množica.

Vedenje (ali gibanje) sistema je predpis, ki vsaki vrednosti neodvisne spremenljivke $t \in \mathcal{T}$ priredi stanje $x_t \in \mathcal{X}_t$.

Usoda sistema je zakon, ki ureja prehajanje sistema iz stanja v stanje. Sistem je voden, če lahko na usodo vplivamo od zunaj. Vsakemu paru t, x, kjer je $t \in \mathcal{T}$, $x \in \mathcal{X}_{t-1}$, naj ustreza množica $\mathcal{U}_t(x)$, ki ji recimo zaklad vodenj v točki $x \in \mathcal{X}_{t-1}$.

Novo stanje $x' \in \mathcal{X}_t$ je odvisno od prejšnjega stanja $x \in \mathcal{X}_{t-1}$ in od izbranega vodenja $u \in \mathcal{U}_t(x)$. Zveza

$$x' = f_t(x, u)$$

je enačba usode. Ne pozabimo: iz $\mathcal{X}_{t-1}$ v $\mathcal{X}_t$ vodita dva koraka: najprej k $x \in \mathcal{X}_{t-1}$ izberemo $u \in \mathcal{U}_t(x)$, potem pa iz enačbe usode izračunamo x'.

Vodenje — vedenje. Denimo, da je začetno stanje sistema x_0. V prvem koraku izberemo vrednost $u_1 \in \mathcal{U}_1(x_0)$, potem pa iz prve enačbe usode izračunamo novo stanje $x_1 = x'_0$

$$x_1 = f_1(x_0, u_1)$$

v drugem koraku izberemo $u_2 \in \mathcal{U}_2(x_1)$ in izračunamo

$$x_2 = f_2(x_1, u_2)$$

Tako nadaljujemo in nazadnje dobimo zaporedje parov

$$(u_1, x_1), \quad (u_2, x_2), \ldots, \quad (u_n, x_n)$$

ki je povsem določeno z začetnim stanjem x_0 in z izbiro vodenj $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Predpisu $t \to (u_t, x_t)$ bomo rekli vodenje-vedenje sistema. Ta predpis je sprva definiran le za $t > 0$, dopolnimo ga na ves interval $\mathcal{T}$ tako, da postavimo na primer $u_0 = 0$.

Opazujmo vodenje-vedenje le na intervalu $t \geqq k$. Tako zoženemu predpisu ali okrnjenemu zaporedju

$$(u_k, x_k), (u_{k+1}, x_{k+1}), \ldots, (u_n, x_n)$$

bomo rekli k-ti rep vodenja-vedenja, ali na kratko kar k-ti rep.

Sodilo vodenja je funkcional, ki vsakemu vodenju-vedenju priredi realno število. Sodilo moramo izbrati tako, da bomo z njim lahko ocenili vsak rep vodenja-vedenja, neodvisno od opuščenih členov zaporedja. Primer takega sodila je aditivno sodilo, pri katerem vsak korak prispeva svoj člen v funkcional. Tako je na primer, kadar ima vsak korak svojo ceno ali pa kadar prinese dobiček. Denimo, da je sodilo aditivno, k-ti korak pa prispeva vanj $\varphi_k(u_k, x_{k-1})$. Sodilo je tedaj enako

$$\Phi = \varphi_1(u_1, x_0) + \varphi_2(u_2, x_1) + \ldots + \varphi_n(u_n, x_{n-1})$$

sodilo k-tega repa pa

$$\Phi_k = \varphi_k(u_k, x_{k-1}) + \varphi_{k+1}(u_{k+1}, x_k) + \ldots + \varphi_n(u_n, x_{n-1})$$

Včasih je sodilo multiplikativno, vsak korak prispeva faktor k funkcionalu

$$\Psi = \psi_1(u_1, x_0)\, \psi_2(u_2, x_1) \ldots \psi_n(u_n, x_{n-1})$$

Optimalno vodenje sistema je vodenje, pri katerem je učinek ekstremen (dohodek največji, cena najmanjša). Bolj natanko zastavimo vprašanje po optimalnem vodenju takole: *Predpisano je začetno stanje sistema. Kako moramo izbrati v vsakem koraku ustrezno vodenje, da bo vrednost funkcionala-sodila največja (najmanjša)?*

2. Načelo

Odločimo se za aditivno sodilo in za optimalno vodenje, ki hoče največjo vrednost sodila.

Denimo, da smo sistem do k-tega koraka vodili po optimalni poti, naprej pa vodenje poljubno spreminjali. Tako smo sistemu pripeli množico k-tih repov, med njimi rep, ki ustreza optimalnemu vodenju. Kar na dlani je, da bo to tisti rep, pri katerem je ustrezno sodilo Φ_k največje. Odtod Bellmanovo načelo:

Vodenje je optimalno, če je optimalen vsak njegov rep.

Optimalno vodenje lahko torej sestavimo po repih, najprej n-ti, potem $(n-1)$-vi, nazadnje prvi — to je že vse vodenje. Toda ko sestavljamo n-ti rep, ne vemo, v katerem stanju začeti. Zato moramo poiskati in pripraviti v zalogo optimalne repe za vsa stanja $x \in \mathcal{X}_{n-1}$. V naslednjem koraku dopolnimo zalogo z repi, ki izhajajo iz stanj $x \in \mathcal{X}_{n-2}$; nazadnje, ko pridemo do množice $\mathcal{X}_0$, bo med ustreznimi repi tudi optimalno vodenje-vedenje, ki se začenja v predpisani začetni točki $x_0 \in \mathcal{X}_0$. To je metoda, ki ji pravimo *dinamično programiranje*. Že iz tega preprostega opisa razvidimo, da zahtevajo vmesni koraki ogromno informacije, iz katere nazadnje izberemo iskano optimalno vodenje in izračunamo ustrezno vedenje sistema.

3. Enačba

Za analitični zapis načela in metode potrebujemo nekaj priprav. Najprej *Bellmanovo funkcijo* $B_t(x)$, ali bolj natanko: Bellmanove funkcije $B_t(x)$ z indeksi $t \leqq n-1$. Funkcija $B_t(x)$ z izbranim t je definirana na množici stanj $\mathcal{X}_t$, njena vrednost v točki $x \in \mathcal{X}_t$ pa je enaka optimalni vrednosti funkcionala Φ_{t+1} za vse repe, ki se začenjajo v stanju x.

Funkcijo $B_{n-1}(x)$ dobimo hitro. Funkcional Φ_n je enak kar $\varphi_n(u, x)$; ker smo x pribili, bo optimalna vrednost enaka maksimu, ki ga zavzame $\varphi_n(u, x)$ kot funkcija u na množici $\mathcal{U}_n(x)$. Torej

$$B_{n-1}(x) = \max_{u \in \mathcal{U}_t(x)} \varphi_n(u, x) \tag{2}$$

Denimo, da že poznamo $B_t(x)$ in se ozrimo po $B_{t-1}(x)$. Izberimo $x \in \mathcal{X}_{t-1}$ in vodenje $u \in \mathcal{U}_t(x)$. Z njima je določeno stanje $f_t(x, u) \in \mathcal{X}_t$. Optimalno vodenje od tega stanja naprej že poznamo. Dobiček pri njem je enak vrednosti Bellmanove funkcije v $f_t(u, x)$. Zato, kakršenkoli je že $u \in \mathcal{U}_t(x)$

$$\Phi_t = \varphi_t(u, x) + \Phi_{t+1} \leqq \varphi_t(u, x) + B_t(f_t(u, x))$$

Največja vrednost, ki je dana Φ_t pri izbranem $x \in \mathcal{X}_{t-1}$, je tedaj

$$B_{t-1}(x) = \max_{u \in \mathcal{U}_t(x)} [\varphi_t(u, x) + B_t(f_t(u, x))] \tag{3}$$

To je rekurzijska formula za Bellmanove funkcije. Pravimo ji *Bellmanova enačba.*

Hkrati ko sestavimo Bellmanovo funkcijo $B_t(x)$, poiščemo tudi optimalno vodenje iz točke $x \in \mathcal{X}_{t-1}$. Njegova vrednost je enaka tistemu vodenju $u^*(x)$, pri katerem doseže izraz v oglatem oklepaju (3) maksimalno vrednost na $\mathcal{U}_t(x)$.

Tako nazadnje poznamo optimalna vodenja iz vseh stanj vseh množic $\mathcal{X}_t$. Z njimi pa že lahko sestavimo optimalno vodenje-vedenje iz predpisane začetne točke x_0. Ker vemo za $u^*(x_0)$, izračunamo iz enačbe usode naslednje stanje

$$x_1 = f_1(x_0, u^*(x_0))$$

V x_1 poznamo vrednost optimalnega vodenja $u^*(x_1)$ in lahko izračunamo

$$x_2 = f_2(x_1, u^*(x_1))$$

in tako nadaljujemo do konca.

Opisali smo pot, ki vodi do optimalnega vodenja diskretnega sistema. Nismo pa dokazali, da tako vodenje res obstoji. Eksistenčni izrek in z njim strogo utemeljitev metode opustimo. Dvome, ki jih mora utemeljitev pregnati, pa bralec sam čuti: ali ekstremi izrazov, ki vodijo do Bellmanovih funkcij, res obstojijo, ali ti izrazi zavzamejo ekstremne vrednosti na množicah $\mathcal{U}_t(x)$? Neprehude zahteve, ki jih postavimo enačbam usode in členom sodila, razblinijo dvome in omogočajo trdno utemeljitev dinamičnega programiranja za diskretne sisteme.

Poglejmo sedaj, kako lahko v jeziku vodenih sistemov zapišemo uvodno nalogo in kako jo uženemo z dinamičnim programiranjem. (Pravzaprav, kako smo jo že ugnali z dinamičnim programiranjem.)

Zamislimo si sistem s časovnim intervalom $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Začetna množica $\mathcal{X}_0$ naj obsega eno samo stanje 0, množice $\mathcal{X}_t$, $t \geqq 1$, pa naj bodo vse enake intervalu $(0, a]$. Stanje $x \in \mathcal{X}_t$ naj pomeni vsoto prvih t stranic paralelepipeda $x = u_1 + u_2 + \ldots + u_t$. Sistem vodimo tako, da v k-tem koraku izberemo k-to stranico u_k. Enačba usode je kaj preprosta

$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

Množica vodenj $\mathcal{U}_t(x)$ je torej interval $(0, a - x]$. Sodilo

$$\psi = u_1 u_2 \ldots u_n$$

je multiplikativen funkcional. Bellmanova funkcija zadošča torej pogojem

$$B_{n-1}(x) = \max_{0 < u \leqq a-x} u = a - x$$

in

$$B_{t-1}(x) = \max_{0 < u \leqq a-x} u B_t(x + u)$$

Na primer:

$$B_{n-2}(x) = \max_{0 < u \leqq a-x} u B_{n-1}(x + u) = \max_{0 < u \leqq a-x} u(a - x - u) = \tfrac{1}{4}(a - x)^2$$

To vrednost pa doseže funkcija $u(a - x - u)$ pri $u^*(x) = \frac{1}{2}(a - x)$.

Z indukcijo kaj lahko pokažemo

$$B_{n-j}(x) = (a - x)^j / 2^2 3^3 \ldots j^j$$

in $x \in \mathcal{X}_{n-j} \Rightarrow u^*(x) = (a - x)/j$, ali $x \in \mathcal{X}_t \Rightarrow u^*(x) = (a - x)/(n - t)$.

Začetno stanje je $x_0 = 0$, zato $u^*_1 = a/n$ in $x_1 = a/n$, potem $u^*_2 = (a - a/n)/(n - 1) = a/n$ in $x_2 = 2a/n$. Nazadnje najdemo že znano rešitev $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = a/n$.

4. Primeri

Oglejmo si nekaj diskretnih vodenih sistemov, kakršne srečamo v ekonomiji in tehniki.

Začnimo z nalogo o vlaganju sredstev. Denimo, da imamo dve veji gospodarstva in da ju financiramo iz istega vira. Začetno vrsto vlagamo več let v obe panogi. Kako je treba voditi vlaganje, da bo končni dobiček, ki ga iztržimo iz obeh panog, čim večji?

Preden lahko odgovorimo na vprašanje, potrebujemo še nekaj privzetkov in nekaj podatkov, ki bodo omogočili matematično oblikovanje naloge. Šele matematično dobro zastavljeno nalogo bomo lahko začeli reševati.

Najprej naj bo takole: v i-tem letu vložimo v prvo vejo u_i, v drugo v_i, po preteku leta ostane od sredstev, vloženih v prvo panogo $f_i(u_i)$, od sredstev, vloženih v drugo, pa $g_i(v_i)$; prva panoga prinese v i-tem letu $\psi_i(u_i)$ dobička, druga $\chi_i(v_i)$. Seveda je

$$f_i(u_i) \leqq u_i \qquad g_i(v_i) \leqq v_i$$

Vlaganje naj traja n let.

Nalogo opišimo kot vodeni sistem s časovnim intervalom $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. »Trenutek t« pomeni t-to leto, stanje x_t pa vsoto vseh sredstev, ki ostanejo po tem letu v obeh panogah. Začetno stanje x_0 je pač začetna vsota sredstev. Poglejmo, kaj se zgodi v »trenutku t«. Vsoto x_{t-1}, ki je ostala od prejšnjega leta, razdelimo v dva dela u_t in $v_t = x_{t-1} - u_t$. Sistem vodimo z izbiro sredstev u_t, ki jih vložimo v prvo panogo. Po koncu leta ostane v prvi veji še $f_t(u_t)$ sredstev, v drugi $g_t(x_{t-1} - u_t)$, skupaj

$$x_t = f_t(u_t) + g_t(x_{t-1} - u_t) \tag{4}$$

Prva panoga prispeva dobiček $\psi_t(u_t)$, druga $\chi_t(x_{t-1} - u_t)$, skupni dobiček obeh panog v t-tem trenutku je

$$\varphi_t = \psi_t(u_t) + \chi_t(x_{t-1} - u_t) \tag{5}$$

(4) je diferenčna enačba koraka, (5) pa njegov prispevek v aditivno sodilo, člen k funkcionalu, čigar maksimum iščemo. $\mathcal{X}_t$ je pri vsakem t interval $[0, x_0]$, zaklad vodenj $\mathcal{U}_t(x)$ pa $[0, x]$.

Pri obravnavani nalogi smo rabili v obeh panogah samo načrtovana sredstva x_0, dobiček pa smo odvajali v svoj žep. V drugi nalogi pa tudi dobiček vlagajmo nazaj v gospodarstvo vse do zadnjega leta, ko pospravimo vse, kar je ostalo in kar se je nabralo. Radi bi tako vodenje, ki privede do maksimalnega končnega ostanka in dobička skupaj.

Čas, stanja in vodenja so kakor pri prejšnji nalogi, le da stanje sedaj pomeni skupna sredstva (ostanek vloženih sredstev in dobiček), interval $\mathcal{X}_t$ je zato lahko odvisen od t in tudi večji od $[0, x_0]$.

V t-tem letu razdelimo vsoto x_{t-1} v dva dela u_t in v_t. Ob koncu leta je učinek prvega zneska $F_t(u_t)$, drugega $G_t(v_t)$ in nova vsota je

$$x_t = F_t(u_t) + G_t(x_{t-1} - u_t) \tag{6}$$

Ob koncu n-tega leta pridelamo torej izkupiček

$$\Phi = \varphi_n = F_n(u_n) + G_n(x_{n-1} - u_n) \tag{7}$$

to pa je tudi celotni dobiček vlaganja; radi bi, da bi bil izraz (7) največji. To je naloga o optimalnem vodenju z diferenčno enačbo (6) v t-tem koraku in s funkcionalom (7) kot sodilom. (7) lahko obravnavamo kot aditivno sodilo, pri katerem t-ti korak prispeva 0, če je $t \neq n$, in (7), če je $t = n$. Imenujmo

$$f_t(u, x) = F_t(u) + G_t(x - u)$$

in sestavimo Bellmanovo funkcijo. Najprej

$$B_{n-1}(x) = \max_{0 \leq u \leq x} f_n(u, x)$$

potem, pri $t < n$

$$B_{t-1}(x) = \max_{0 \leq u \leq x} B_t(f_t(u, x)) \tag{8}$$

Ustavimo se ob posebnem primeru, ko so vse funkcije $F_t(x)$, $G_t(x)$ naraščajoče (to naj pomeni vsaj nepadajoče). Z drugimi besedami: $f_t(u, x)$ je pri vsakem t in pri vsakem u naraščajoča funkcija spremenljivke x

$$x < x' \Rightarrow f_t(u, x) \leqq f_t(u, x') \tag{9}$$

Pokažimo, da je tedaj $B_t(x)$ pri vsakem t naraščajoča funkcija spremenljivke x. Zaradi (9) velja izrek pri $t = n$

$$x < x' \Rightarrow B_n(x) = \max_u f_n(u, x) \leqq \max_u f_n(u, x') = B_n(x')$$

Denimo, da smo izrek dokazali za t in pokažimo, da velja tudi za $t - 1$. Po indukcijskem privzetku sledi iz (9)

$$x < x' \Rightarrow B_t(f_t(u, x)) \leqq B_t(f_t(u, x'))$$

iz (8) pa še

$$x < x' \Rightarrow B_{t-1}(x) = \max_u B_t(f_t(u, x)) \leqq \max_u B_t(f_t(u, x')) = B_{t-1}(x')$$

Dokaz je končan.

Posledica dokazanega izreka pa je kaj daljnosežna. Optimalno vodenje $u^* \in \mathcal{U}_t(x)$ je zaradi (8) tista vrednost u, pri kateri doseže $B_t(f_t(u, x))$ maksimum na $\mathcal{U}_t(x)$. Po dokazanem izreku pa zavzame v u^* svojo največjo vrednost na $\mathcal{U}_t(x)$ že argument funkcije B_t v (8). Optimalno vodenje $u^* \in \mathcal{U}_t(x)$ poiščemo torej kar iz pogoja

$$f_t(u^*, x) = \max_{0 \leq u \leq x} f_t(u, x)$$

Vodenje je optimalno, če je optimalen vsak korak zase. Dinamično programiranje se je v tem primeru izrodilo v nalogo o ekstremih n posameznih funkcij.

Preprost posebni primer: iz začetne vsote x_0 v n letih financiramo eno samo podjetje, vendar ne vložimo vseh sredstev naenkrat, vsakokrat nekaj prihranimo (rezerviramo) za bodočnost. To je naloga o dveh podjetjih, pri kateri drugo ne porablja sredstev in ne prinaša dobička. Enačba usode je

$$x_t = f_t(u_t)$$

prispevek t-tega trenutka k dohodku $\psi_t(u_t)$.

Podobna tej je naloga o porazdelitvi mase v večstopenjski raketi. Z raketo bi radi izstreliti kotistni tovor tako, da bo dosegel največjo možno hitrost pri predpisani masi bremena G_0 in masi celotne rakete z bremenom vred G_n.

Raketo razdelimo v več stopenj in jih oštevilčimo od bremena navzdol (prva stopnja je torej tista, ki deluje nazadnje), prav v nasprotni smeri, kot je navada. Masa t-te stopnje naj bo u_t. Za stanje sistema izberimo maso koristnega tovora in prvih t stopenj

$$x_t = G_0 + u_1 + \ldots + u_t$$

Začetno in končno stanje sta znani

$$x_0 = G_0 \qquad x_n = G_n$$

Diferenčna enačba, ki veže zaporedni stanji, je

$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

x_{t-1} je masa bremena, ki ga nosi stopnja t. Prirastek hitrosti, ki ga prispeva stopnja, je odvisen od mase bremena in od mase rakete, denimo, da je to $f_t(u_{t-1}, u_t)$. Vse stopnje skupaj dajo koristnemu tovoru hitrost

$$f_1(x_0, u_1) + f_2(x_1, u_2) + \ldots + f_n(x_{n-1}, u_n) \tag{10}$$

Radi bi tako porazdelitev teže med stopnjami, pri kateri bo funkcional (10) dosegel največjo vrednost. To pa je že naloga dinamičnega programiranja.

5. Križišča

Nazadnje opišimo sistem, ki ima *končne množice stanj* $\mathcal{X}_t$. V tem primeru usodo in vodenje zlijemo v eno. V prejšnjih primerih je usodo opisovala diferenčna enačba. Potem ko smo izbrali vodenje in rešili enačbo, smo vsakemu stanju $x \in \mathcal{X}_{t-1}$ priredili novo stanje $x' \in \mathcal{X}_t$. Vodenje in usoda skupaj določata torej preslikavo $\mathcal{X}_{t-1} \to \mathcal{X}_t$.

Sedaj ko imamo sistem s končno mnogimi stanji, zadošča, da poznamo dovoljene preslikave $\mathcal{X}_{t-1} \to \mathcal{X}_t$, vodenje v vsakem koraku izbira med dovoljenimi preslikavami.

Sistem s končno mnogimi stanji nazadnje opišemo s trojko, ki jo sestavljajo:

Časovni interval $\{0, 1, \ldots, n\}$

Končne množice stanj $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$

Množice preslikav $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$.

$\mathcal{U}_t$ je podmnožica v množici preslikav $(\mathcal{X}_{t-1} \to \mathcal{X}_t)$.

Učinek vodenja merimo tako, da vsaki preslikavi $x_{t-1} \mapsto x_t$ (iz točke v točko!) pripišemo ceno. Ceno seštevamo korak za korakom in dobimo ceno vodenja. Za optimalno proglasimo vodenje z najmanjšo ceno.

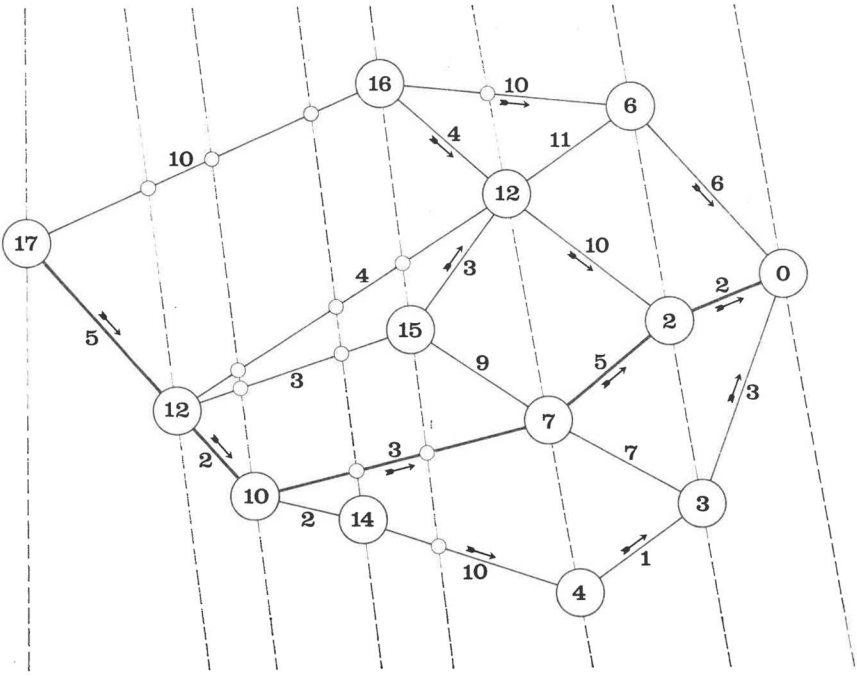
Dinamično programiranje zasnujemo v tem primeru kar grafično. Množice $\mathcal{X}_t$ predočimo kot množice točk na vzporednih premicah (ali kakih drugih krivuljah, ki se paroma ne sečejo na tistem delu ravnine, v katerem leže točke vseh $\mathcal{X}_t$). Dovoljene preslikave predočimo s spajnicami med točkami sosednjih plasti. Ob vsako spajnico pripišimo ustrezno ceno. Tako dobimo graf stanj in preslikav, kakršen je na primer na sliki. Vedenje sistema predočimo kot pot, ki vodi iz začetne množice v končno.

Sliko smo že nekoliko poenostavili. Stanja, v katerih se srečata le dve spajnici (prihajajoča in odhajajoča), smo proglasili za nebistvena. Označili smo jih z majhnimi krožci, druga pa z velikimi. Tudi cene smo vpisali le za korake med bistvenimi stanji (z velikimi krožci). Predstavljamo si lahko, da je pred nami cestna mreža s križišči — velikimi krogci in s potmi med njimi. Cena poti pomeni na primer čas, ki je potreben, da jo prevozimo (ceste so različno široke, različno strme, različno presekane z občasnimi ovirami, križišči z železnico ali z deli na cesti). Naloga je, da izberemo najhitrejšo pot od starta S do cilja C.

Kako nam je ravnati, že vemo. Najprej poiščemo optimalne poti za vsa križišča predzadnjega sloja. Vsako križišče veže s ciljem ena sama pot, zato ni izbire. Ceno poti od križišča do cilja vpišimo v krožec, póti, ker je optimalna, narišimo puščico. Tako imamo v predzadnjem sloju že tabelirano Bellmanovo funkcijo $B_{t-1}(x)$ in izbrano optimalno vodenje — preslikavo.

V naslednjem koraku pregledamo vse poti, ki vodijo k cilju od križišč predpredzadnjega sloja. Pri spodnjem križišču ni izbire, v krožec vpišemo ceno edine poti do cilja. Iz srednjega križišča lahko krenemo proti predzadnjemu sloju po dveh poteh: v desno za ceno 7 do križišča s ceno 3, v levo za ceno 5 v križišče s ceno 2, desna pot pripelje do cilja za ceno 10, leva velja le 7. Leva pot je optimalna, označimo jo s puščico, njeno ceno pa vpišimo v krožec.

Tako pregledamo sloj za slojem, vsakemu križišču določimo optimalno pot in izračunamo ceno — vrednost Bellmanove funkcije. Primeri se lahko, da vodi iz križišča več poti z isto minimalno ceno. Tedaj pač označimo vse te poti.



Nazadnje pridemo do starta in zvemo za ceno optimalne poti. Pojdimo od starta v izbrani smeri in v vsakem križišču, v katerega pridemo, sledimo puščici. Tako bomo prehodili optimalno pot od S do C. Naloga je rešena.

Še drobna pripomba: pri realnem načrtovanju v realnem mestu so dana le stanja, ki so bistvena, križišča, označena z velikimi krožci. Vendar tam ravnamo prav nasprotno, kot smo v preprostem primeru. Stanja, ki smo jih označili z majhnimi krožci, uvedemo kot navidezna križišča zato, da so v vsakem koraku možni le prehodi med sosednjimi sloji križišč. Računalniku, ki edini zmore prebaviti vso potrebno informacijo, je tako delo olajšano.

LITERATURA

[1] Bellman R., Dynamic programming, Princeton University Press, Princeton 1957.

[2] Bellman R., Kalaba R., Dynamic programming and modern control theory, Academic Press, New York.

[3] Болтянский В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, Наука, Москва 1973.

[4] Вентцель Е. С., Элементы динамического программирования, Наука, Москва 1964.

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. **3/4**

KOMBINATORIKA

ALEKSANDER COKAN

AMS Subj. Class. (1970) 05-01
97 A99

V učnem načrtu matematike sta poglavji Algebra množic in kombinatorika ter Verjetnostni račun po prestavitvi iz 3. razreda zavzeli uvodno mesto v programu 4. razreda. Ta premik vsekakor omogoča kontinuirano obdelavo poglavij, ki smo ju prej obravnavali raztrgano ali pa skrčeno. Razen tega se zlasti prvo poglavje sedaj vklaplja v širši okvir algebrskih struktur v programu 4. razreda.

Iz obravnave moram izločiti algebro množic (ta se kot primer Boolove algebre kasneje lepo povezuje z algebro dogodkov, izjavnim računom, preklopnimi vezji itd.) in uporabne naloge z močmi končnih množic, sicer pa dokaj strogo sledim učbeniku prof. Križaniča, le množenje permutacij prepustim kasnejši obravnavi permutacijskih grup.

Kombinatorika je osnovana na pojmu funkcije ali preslikave. S preslikavami bomo vpeljali variacije in permutacije, njihovo število bomo določili z osnovnim izrekom kombinatorike, vsebino zaključnih poglavij srednješolske kombinatorike (kombinacije) pa bomo pregledali le ob nekaterih primerih.

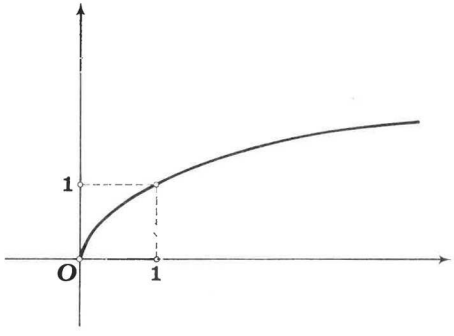
COMBINATORICS

In the paper the author explains his solution of the problem how to treat fundamental notions of combinatorics in the 4. grade of high schools.

FUNKCIJE ALI PRESLIKAVE

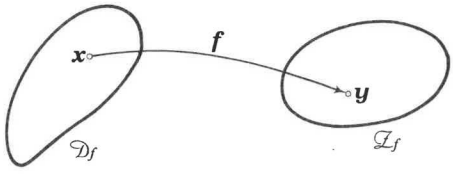
Pojem funkcije v matematiki prvih treh razredov gimnazije razvijamo in bogatimo postopno; to dejstvo, kot kaže, ima za posledico vtis, da je funkcija vedno le odvisnost dveh realnih spremenljivk, čeprav se pojem funkcije pojavlja, kjerkoli gre za prirejanje elementov kake množice elementom kake druge (ali iste) množice.

$y = \sqrt{x}$ pomeni predpis, ki vsakemu nenegativnemu realnemu številu x prireja natanko eno nenegativno realno število $\sqrt{x}$, pa pravimo, da je na množici nenegativnih realnih števil definirana funkcija, katere zaloga ali zaklad vrednosti je tudi množica nenegativnih realnih števil. To zapišemo še $f : x \to \sqrt{x}$. Nazorno predstavitev funkcijske odvisnosti z množico točk v ravnini navadno imenujemo graf funkcije.



Ne zdi se odveč v srednješolski praksi realnih funkcij realnih spremenljivk uporabljati dogovorjene oznake za definicijsko območje funkcije npr. $\mathcal{D}_f$ in za zaklad funkcijskih vrednosti npr. $\mathcal{Z}_f$.

$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{R}, \quad \mathcal{Z}_f \subset \mathcal{R}$



Posplošimo! Naj bosta dani množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, ki nista nujno številski množici. »Predpis«, ki vsakemu elementu $x \in \mathcal{A}$ prireja natanko en element $y \in \mathcal{B}$, imenujemo funkcijo ali preslikavo, definirano na množici $\mathcal{A}$ z vrednostmi v množici $\mathcal{B}$, kar zapišemo:

$$f : x \to y, \text{ oz. } \quad f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

Pri preslikavi je x original, y pa njegova slika. Množica $\mathcal{A}$ je definicijsko območje funkcije, množica $\mathcal{B}$ ali njena podmnožica pa zaklad funkcijskih vrednosti. Zaradi tega berimo zadnji zapis kot funkcijo, ki preslika množico $\mathcal{A}$ na ali v množico $\mathcal{B}$, ali krajše kot preslikavo iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{B}$.

S tako definicijo pojma funkcije ali preslikave smo že blizu definiciji tega pojma s podmnožico premega produkta dveh množic. Zdi se smiselno na tem mestu vpeljati premi produkt dveh množic (kot temeljni pojem kombinatorike).

Premi produkt dveh množic je množica urejenih parov:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y); x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}$$

(x, y) imenujemo urejeni par, če je določeno, kateri element para je prvi in kateri drugi; x in y sta koordinati urejenega para. Dva urejena para sta enaka, če se ujemata v obeh koordinatah:

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Primer: $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$
$\mathcal{B} = \{r, s\}$
$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, r), (a, s), (b, r), (b, s), (c, r), (c, s)\}$

V prejšnji definiciji funkcije ali preslikave izraza »predpis« nismo opredelili. Očitno pa lahko »predpis«, ki vsakemu elementu $x \in \mathcal{A}$ prireja natanko en element $y \in \mathcal{B}$, reprezentiramo z množico urejenih parov (x, y). Tako podmnožico premega produkta $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ imenujemo graf funkcije:

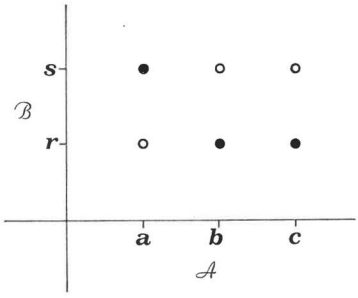
$$\mathcal{G} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

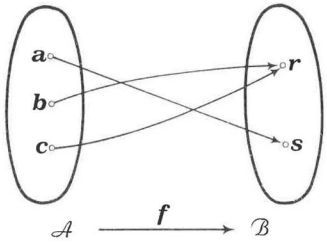
Vsakemu elementu $x \in \mathcal{A}$ je prirejen natanko en urejen par $(x, y) \in \mathcal{G}$. To pomeni, da v $\mathcal{G}$ ni parov z isto prvo koordinato:

$$(x, y_1) \in \mathcal{G} \wedge (x, y_2) \in \mathcal{G} \Rightarrow y_1 = y_2$$

Primer: izberimo iz premega produkta $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ iz prejšnjega primera graf funkcije $\mathcal{G}$ in ga ponazorimo:

$$\mathcal{G} = \{(a, s), (b, r), (c, r)\}$$





Glede na korespondenco med funkcijskim »predpisom« iz prejšnje definicije in grafom funkcije kot podmnožico premega produkta funkcijo kar istovetimo z njenim grafom in *definiramo*: Funkcija ali preslikava iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{B}$ je taka podmnožica premega produkta $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, v kateri je vsak element $x \in \mathcal{A}$ prva koordinata natanko v enem urejenem paru (x, y), kjer je $y \in \mathcal{B}$. Pri tem privzamemo, da množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ nista prazni množici.

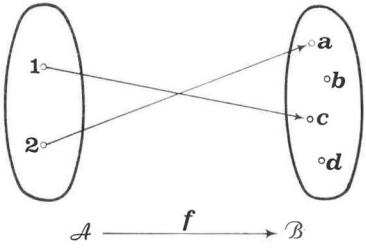
Vpeljava premega produkta se izkaže za koristno, ko se kasneje vrnemo k realnim funkcijam realnih spremenljivk kot podmnožicam $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$.

Tipi preslikav

Med funkcijami $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zaslužijo nekatere posebno pozornost. Taka je preslikava množice $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ na množico $\mathcal{B} = \{r, s\}$ iz prejšnjega primera.

$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je *surjektivna* preslikava, če preslika množico $\mathcal{A}$ *na* množico $\mathcal{B}$ (vsak element množice $\mathcal{B}$ je slika vsaj enega elementa množice $\mathcal{A}$).

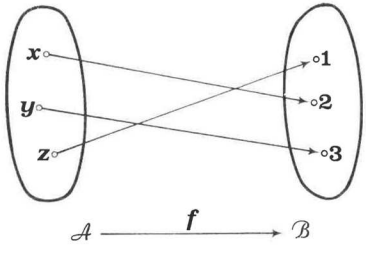
Primer: $\mathcal{A} = \{1, 2\}$
$\mathcal{B} = \{a, b, c, d\}$



V tem primeru različnima orginaloma pri preslikavi pripadata različni sliki.

Preslikava je *injektivna*, če je vsak element množice $\mathcal{B}$ slika kvečjemu enega (enega ali nobenega) elementa množice $\mathcal{A}$.

Primer: $\mathcal{A} = \{x, y, z\}$
$\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$



V zadnjem primeru združimo obe prejšnji posebnosti. Preslikava je *bijektivna*, če je vsak element množice $\mathcal{B}$ slika natanko enega elementa množice $\mathcal{A}$.

Naj bo $\mathcal{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, množica prvih n zaporednih naravnih števil, $\mathcal{M}$ pa poljubna množica z n elementi, to pomeni, da lahko množico $\mathcal{N}_n$ bijektivno preslikamo na $\mathcal{M}$. Če obstaja med dvema množicama bijektivna preslikava, pravimo, da sta množici enako močni. Množici $\mathcal{N}_n$ in $\mathcal{M}$ sta torej enako močni, z drugimi besedami, množica $\mathcal{M}$ ima moč enako n, kar zapišemo:

$$m(\mathcal{M}) = n$$

$\mathcal{M}$ imenujemo končno množico.

Variacije in permutacije

Za poljubno neprazno končno množico $\mathcal{M}$ lahko najdemo tako množico $\mathcal{N}_i$ prvih i zaporednih naravnih števil, da med njima obstaja bijektivna preslikava. Zato obravnavo preslikav med končnimi množicami lahko omejimo le na preslikave med temi množicami:

$$f : \mathcal{N}_r \to \mathcal{N}_n,\ r \geqq n$$

Vsaj definicijsko območje naj bo vedno množica prvih zaporednih naravnih števil.

Najprej nas bo zanimala konstrukcija funkcij (določenega tipa), ki preslikajo $\mathcal{N}_r$ v $\mathcal{N}_n$, potem pa tudi število vseh takih funkcij. Da bi obe nalogi čim uspešneje rešili, bomo preslikave ponazorili s funkcijskimi tabelami.

1. $r > n$, $f : \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_2$

Podajmo preslikavo s predpisom $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$ in zapišimo elemente definicijskega območja v prvo vrstico tabele, v drugo vrstico pa njihove slike:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}$$

Ker je prva vrstica funkcijske tabele implicirana v vrstnem redu elementov druge vrstice, tudi druga vrstica sama podaja preslikavo. Zaporedje funkcijskih vrednosti pri preslikavi imenujemo nabor (vejice med elementi nabora bomo v nadaljnjih zapisih opuščali):

2 1 1

Zapišimo vse nabore 3 elementov množice $\mathcal{N}_2$!

111,
112, 121, 211,
122, 212, 221,
222

Vseh funkcij, ki preslikajo $\mathcal{N}_3$ v $\mathcal{N}_2$, je 8, rečemo pa jim *variacije s ponavljanjem* reda 3 iz 2 elementov in zapišemo ${}^{(p)}V_2^3 = 8$. Med njimi je 6 surjekcij.

2. $r < n$, $f : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{M} = \{a, b, c, d\}$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ c, & a \end{pmatrix}$$

$c\ a$

Med funkcijami, ki preslikajo $\mathcal{N}_2$ v $\mathcal{M}$, ni nobene surjekcije, je pa vmes precej injekcij.

aa, ab, ac, ad,
ba, bb, bc, bd,
ca, cb, cc, cd,
da, db, dc, dd

Vseh funkcij je 16, rečemo jim variacije s ponavljanjem reda 2 iz 4 elementov (${}^{(p)}V_4^2 = 16$), čeprav je med njimi le nekaj naborov s ponavljanjem elementov. Injektivne preslikave iz $\mathcal{N}_2$ v $\mathcal{M}$ ponazarjajo nabori brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{M}$, teh je 12, rečemo pa jim *variacije brez ponavljanja* reda 2 iz 4 elementov in zapišemo $V_4^2 = 12$.

Očitno je, da so vse preslikave iz $\mathcal{N}_r$ v $\mathcal{N}_n$, če je $r > n$, variacije s ponavljanjem. Variacije brez ponavljanja, ki ustrezajo injektivnim preslikavam, dobimo le, če je $r \leqq n$.

3. $r = n$, $f : \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_3$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad 3 \quad 1$$

Vseh funkcij, ki preslikajo množico $\mathcal{N}_3$ vase, ne bomo zapisali. To so variacije s ponavljanjem reda 3 iz 3 elementov in jih je 27 (${}^{(p)}V_3^3 = 27$). Med temi funkcijami je le nekaj surjekcij, ki pa so hkrati tudi injekcije, torej bijekcije. Temu ustrezne nabore 3 elementov množice $\mathcal{N}_3$ imenujemo kar razporede elementov množice $\mathcal{N}_3$ oz. *permutacije*:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

Njihovo število zapišemo $P_3 = 6$.

Permutacije, ki ustrezajo bijektivnim preslikavam množice $\mathcal{N}_n$ nase, so seveda variacije brez ponavljanja reda n iz n elementov:

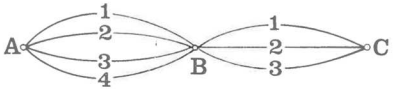
$$P_n = V_n^n$$

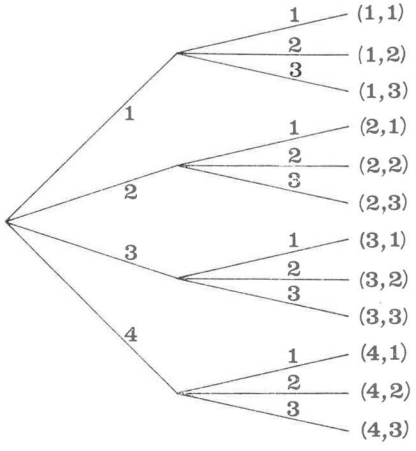
OSNOVNI IZREK KOMBINATORIKE

Zadajmo si nalogo, kako prešteti funkcije ali preslikave $f : \mathcal{N}_r \to \mathcal{N}_n$, ki smo jih imenovali nabore ali variacije in razporede ali permutacije elementov množice $\mathcal{N}_n$!

Nabiranje in razporejanje elementov množice $\mathcal{N}_n$ je postopek, ki ga bomo sestavili iz več faz, zato je za nas pomembna rešitev tele naloge: na koliko načinov se lahko opravi proces, sestavljen iz več zaporednih faz, če so posamezne faze izvedljive na končno mnogo načinov?

Primer:





Iz kraja A v B vodijo 4 poti, iz kraja B v C pa 3 poti. Na koliko načinov se da priti iz A v C?

Za razmislek uporabimo kombinatorično drevo, ki nam da 12 možnih sprehodov iz A v C.

Splošneje velja: pri procesu, sestavljenem iz dveh faz, je za izvršitev procesa $N = n_1 \cdot n_2$ možnosti.

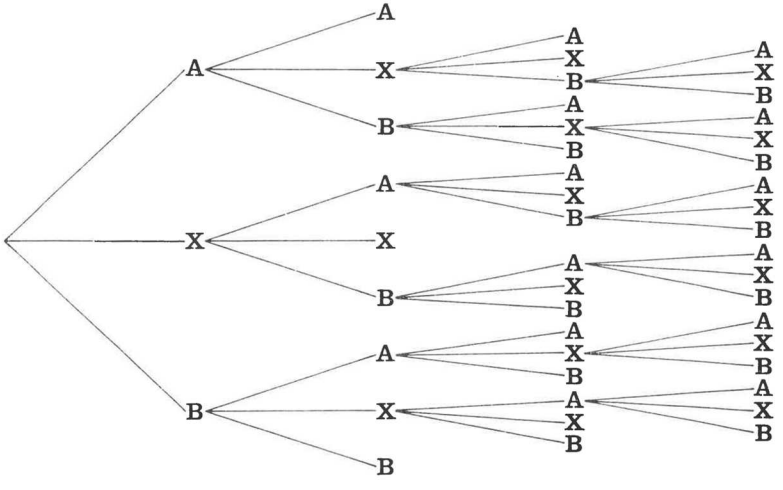
Če pa je proces sestavljen iz več faz, izračunamo najprej število možnih izvedb prvih dveh faz $n_1 \cdot n_2$, potem treh zaporednih faz $(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3$ itd., od koder dobimo izrek:

Če je kak proces sestavljen iz k zaporednih faz in je prva faza izvedljiva na n_1 načinov, druga faza na n_2 načinov, ... in k — ta faza na n_k načinov, se proces lahko opravi na $N = n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$ načinov.

V zadnjem primeru si poti iz A v C lahko zapišemo z urejenimi pari. (1, 2) npr. pomeni, da začnemo sprehod po poti 1 iz A v B in ga nadaljujemo po poti 2 iz B v C. Vseh urejenih parov je $4 \cdot 3 = 12$. Ti sestavljajo premi produkt množic $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ in $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$. Kombinatorično drevo nam torej mimogrede pove, da je moč premega produkta dveh končnih množic enaka produktu njunih moči:

$$m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = m(\mathcal{A})\, m(\mathcal{B})$$

Uporabnost kombinatoričnih dreves se da ilustrirati še z drugimi primeri, npr.: tekmovalca A in B se merita v šahovskem dvoboju. Dvoboj se konča z zmago tistega, ki dobi dve partiji, oz. se konča neodločeno po dveh remijih. Na koliko načinov lahko odigrata dvoboj?



Izidi: AA, XX, BB,
AXA, AXX, ABA, ABB, XAA, XAX, XBX, XBB, BAA, BAB, BXX, BXB,
AXBA, AXBX, AXBB, ABXA, ABXX, ABXB, XABA, XABX, XABB,
XBAA, XBAX, XBAB, BAXA, BAXX, BAXB, BXAA, BXAX, BXAB

Vseh izidov dvoboja, ki se gotovo konča po 4 kolih, je 33.

Posvetimo se sedaj naši glavni nalogi — funkcijam ali preslikavam $f: \mathcal{N}_r \to \mathcal{N}_n$, to je določitvi števila variacij in permutacij z nabori in razporedi r elementov množice $\mathcal{N}_n$. Ločimo:

a) Ne glede na to, ali je $r \gtrless n$, preštejmo najprej nabore r elementov množice $\mathcal{N}_n$ z dovoljenim ponavljanjem, torej variacije s ponavljanjem reda r iz n elementov.

Nabiranje n elementov na r mest sestavimo iz r zaporednih faz, to je iz možnosti za zasedbe posameznih mest. Za zasedbo vsakega od r mest pa je n možnosti, torej:

$$^{(p)}\, V_n^r = n^r$$

Iz števila variacij s ponavljanjem ${}^{(p)}V_n^r$ izvemo, koliko je vseh preslikav iz $\mathcal{N}_r$ v $\mathcal{N}_n$.

b) Le če je $r \leqq n$, lahko govorimo o variacijah brez ponavljanja reda r iz n elementov, to so nabori po r različnih elementov množice $\mathcal{N}_n$.

Nabiranje n elementov na r mest, če se ti ne smejo ponavljati, organiziramo kot prej in iz osnovnega izreka kombinatorike dobimo število injektivnih preslikav iz $\mathcal{N}_r$ v $\mathcal{N}_n$:

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \ldots (n-r+1)$$

V primeru $r = n$ imenujemo variacije brez ponavljanja permutacije n elementov, to so kar razporedi elementov množice $\mathcal{N}_n$. Torej je število bijektivnih preslikav množice $\mathcal{N}_n$ nase:

$$P_n = n!; \; 1! = 1$$

Število permutacij s predpisanim ponavljanjem elementov najdemo mimogrede ob različnih zgledih. Naj P_n^p pomeni, da en element v permutacijah nastopa p-krat, tako da je $n - p + 1$ različnih elementov; potem je

$$P_n^p = \frac{n!}{p!} \text{ in razširjeno}$$

$$P_n^{p_1, p_2, \ldots p_k} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$$

Primerna za zaključek poglavja se mi zdi naloga, v kateri izračunamo število vseh permutacij množice $\mathcal{N}_n$ (brez ponavljanja in s ponavljanji), npr. za $\mathcal{N}_4$:

$$P_4 + 12 \cdot P_4^2 + 6 \cdot P_4^{2,2} + 12 \cdot P_4^3 + 4 \cdot P_4^4 = {}^{(p)}V_4^4$$

${}^{(p)}V_n^n = n^n$ je število vseh preslikav množice $\mathcal{N}_n$ vase.

KOMBINACIJE

Podmnožice z močjo r končne množice moči n imenujemo *kombinacije* n elementov reda r. To so izbori po r elementov izmed n elementov dane množice. Vrstni red elementov v izborih ni pomemben.

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r!)}; \quad 0! = 1$$

Ker pri izbiranju podmnožic z r elementi iz množice z n elementi hkrati izločamo po $n - r$ elementov, velja:

$$C_n^r = C_n^{n-r} \Rightarrow \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}; \; \binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1$$

Primer: premislek, ki nas je privedel do simetrije binomskih simbolov, je izhodišče pri reševanju naloge: na koliko načinov lahko n elementov porazdelimo v k urejenih predalov tako, da bo v predalih po vrsti $p_1, p_2, \ldots p_k$ elementov, $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$ (vrstni red elementov v predalih ni pomemben)?

Število porazdelitev n elementov v 2 predala je enako $C_n^{p_1} = C_n^{p_2}$, saj pri izbiranju podmnožic s p_1 elementi za prvi predal hkrati vsakič ostane po p_2 elementov za drugi predal. Število porazdelitev označimo

$$D_n^{p_1, p_2} = \frac{n!}{p_1! p_2!} \text{ in posplošimo}$$

$$D_n^{p_1, p_2, \ldots, p_k} = \frac{n!}{p_1! p_2! \ldots p_k!}$$

Dokaz: elemente za prvi predal lahko izberemo na $\binom{n}{p_1}$ načinov; izmed preostalih $n - p_1$ elementov izbiramo elemente za drugi predal in je $\binom{n-p_1}{p_2}$ možnosti, za tretji predal je $\binom{n-p_1-p_2}{p_3}$ možnosti itd., za k-ti predal je $\binom{n-p_1-p_2-\ldots-p_{k-1}}{p_k}$, to je le ena možnost. Osnovni izrek kombinatorike potem da gornji rezultat.

V primeru $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = p$ ugotovimo še število porazdelitev, če predalov ne ločimo med seboj; teh je $n!/(k!\,(p!)^k)$.

Primer: oglejmo si vprašanje, na koliko načinov lahko n elementov porazdelimo v 2 urejena predala, če je v vsakem predalu dovoljeno poljubno število elementov!

Pri izbiranju elementov npr. za prvi predal se z vsakim elementom lahko zgodi dvoje: ali ga damo v predal ali pa ga pustimo za drugi predal. Po osnovnem izreku kombinatorike je takih porazdelitev:

$$D_n^2 = 2^n$$

S tem brez binomskega izreka, ki ga tu ne bom izpeljeval, ugotovimo tudi število vseh mogočih izborov iz množice z n elementi, torej število vseh podmnožic končne množice z močjo n (všteta je tudi prazna množica):

$$m(\mathcal{M}) = n \Rightarrow m(\mathcal{P}\mathcal{M}) = 2^n$$

Primer: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \tag{1}$$

Z obema osnovnima lastnostma binomskih simbolov lahko zgradimo Pascalov trikotnik in najdemo še kopico nadaljnjih zanimivih lastnosti binomskih simbolov.

Vsote binomskih simbolov po prerezih Pascalovega trikotnika označimo:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
...

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1}$

$a_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$

$a_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$

$a_6 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} \ldots$

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + b \tag{2}$$

$$n = 2 \cdot k \quad \Rightarrow b = \binom{n/2}{n/2}$$

$$n = 2 \cdot k + 1 \Rightarrow b = \binom{(n+1)/2}{(n-1)/2}$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{3}$$

Zgornja števila imenujemo Fibonaccijeva števila. Pravilo Fibonaccijevega zaporedja dokažemo, če v desno stran (3) substituiramo (2) z upoštevanjem lastnosti (1) binomskih simbolov.

LITERATURA

[1] Križanič F., Aritmetika, algebra in analiza za gimnazije III. in IV. del, Ljubljana, DZS 1970.

[2] Prijatelj N., Matematične strukture I, Ljubljana, Mladinska knjiga 1964.

[3] Lipschutz S., Set theory and related topics, New York, Schaum's outline series, McGraw-Hill 1964.

[4] Eisen M., Elementary combinatorial analysis, New York, Gordon and Breach 1969.

[5] Mamuzić Z., Kombinatorika, Beograd, Nolit 1969.

[6] Smolec I., Suvremena metodska obrada kombinatorike. Matematika II/2, str. 83—90, 1973.

POUK VERJETNOSTNEGA RAČUNA V SREDNJI ŠOLI

FRANCE AVSEC

AMS Subj. Class. (1970) 60 01, 97 A25

V članku obravnava avtor nekatere probleme iz verjetnostnega računa in statistike. V drugem delu opisuje uporabo računalnika za reševanje nalog iz verjetnostnega računa na srednješolski stopnji.

TEACHING PROBABILITY THEORY IN HIGH-SCHOOL

Abstract. In the first part some problems from probability theory and statistics are considered. In the second part it is shown how computer may be used for solving problems in probability theory on high-school level.

V naše šole smo vpeljali nekatera poglavja verjetnostnega računa, ker smo menili, da so glavna vprašanja uporabe verjetnostnega računa začetniku popolnoma dostopna. Moramo pa priznati, da delajo težave celo strokovnjaku za verjetnostni račun. O uporabi odločajo poskusi v praksi, ti pa so vse prej kot lahki.

Ko želimo uporabljati verjetnostni račun, se vedno znova sprašujemo: Katere dogodke naj imamo za slučajne? Ali naj imamo za slučajen dogodek poskusa vsak dogodek, ki v danem poskusu lahko nastopi ali pa ne nastopi? Ali ima vsak tak dogodek res tudi svojo verjetnost?

V praksi štejemo za slučajni dogodek le tak dogodek poskusa, katerega rezultat je statistično stabilen. Kaj to pomeni?

Po Kolmogorovih aksiomih vsakemu dogodku $\mathcal{A}$ (to je izidu poskusa) iz algebre dogodkov $\mathcal{PU}$ prirejamo verjetnost $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, za katero veljajo poznani odnosi. Posledica teh aksiomov je zakon velikih števil ali Bernoullijev izrek. Ta pravi: Napravimo n poskusov, preštejmo te, pri katerih je dogodek $\mathcal{A}$ nastopil, njihovo število pa označimo z m_A. Imenujemo m_A/n relativno frekvenco dogodka pri n ponovitvah poskusa. Verjetnost,

da se relativna frekvenca razlikuje od verjetnosti dogodka za tako malo, kot le želimo, gre proti 1, če gre število poskusov n čez vse meje. Označimo verjetnost dogodka $P(\mathcal{A})$ s p in zapišimo ta izrek v še točnejši obliki:

$$P\left(\left|\frac{m_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\,\varepsilon^2}$$

kjer je ε poljubno pozitivno število.

Ako je n dovolj velik, je m_A/n že kar neka ocena za verjetnost dogodka, saj izrek trdi, da se frekvenca m_A/n v splošnem pri dovolj velikih n, kadar imamo res opravka s slučajnim dogodkom, stabilizira okoli p. Če to ni tako, potem ni mogoče govoriti, da ima dani dogodek kako verjetnost, in ne moremo popisovati tega pojava s Kolmogorovim modelom. Po tej direktni poti ni mogoče priti do sodbe, ali je ali ni dani dogodek slučajen.

Več uspeha pri preverjanju statistične stabilnosti poskusa z domnevno verjetnostjo p dogodka imamo z naslednjo metodo: napravimo n poskusov in označimo število teh, pri katerih je dogodek nastopil, z m. Relativno frekvenco $\xi = m/n$ dogodka imamo lahko za slučajno spremenljivko pri ponavljanju serije po n poskusov. Če je n dovolj velik, ima ta spremenljivka približno normalno porazdelitev. Bolj natančno: če je n dovolj velik, je mogoče porazdelitveno funkcijo te spremenljivke aproksimirati s porazdelitveno funkcijo normalne porazdelitve, ki ima enako povprečno vrednost in disperzijo. Kot vemo, je povprečna vrednost te spremenljivke $M\xi = p$ (tj. enaka verjetnosti dogodka), disperzija $D\xi$ pa $D\xi = p(1-p)/n$.

Slučajna spremenljivka:

$$\xi = \frac{m/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

ima tudi približno normalno porazdelitveno funkcijo, toda s povprečno vrednostjo $M\xi = 0$ in disperzijo $D\xi = 1$. Za tako slučajno spremenljivko pa je $|\xi| > 2$ malo verjeten dogodek ($P(|\xi| > 2) = 0{\cdot}045$).

Oglejmo si naslednji primer: vzemimo, da je relativna frekvenca dečkov pri $n = 10000$ rojstvih (poskusih) enaka $m/n = 0{\cdot}52$. Ali pri vsem tem za verjetnost dogodka, da bo novorojenček deček, lahko še pričakujemo vrednost 1/2? Ako izračunamo pripadajočo vrednost za ξ, dobimo $\xi = 4$. Sklepamo: $p = 0{\cdot}5$ zelo verjetno ni verjetnost danega dogodka.

Pa se vprašajmo: ali ni morda kako drugo število, ki je v bližini 0·5, verjetnost tega dogodka?

V tem primeru si pomagajmo takole: napravimo najprej n_1, nato pa še n_2 poskusov; pri prvih je dogodek $\mathcal{A}$ nastopil m_1, pri drugih pa m_2 krat. Vprašajmo se: ali je razlika:

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} \tag{1}$$

dovolj majhna, da bi jo lahko razložili s slučajnimi fluktuacijami. m_1/n_1 in m_2/n_2 imamo lahko tako kot prej za slučajni spremenljivki s porazdelitveno funkcijo, ki jo je mogoče aproksimirati s porazdelitveno funkcijo normalne porazdelitve. Povprečna vrednost:

$$M(m_1/n_1 - m_2/n_2) = 0$$

Popolnoma naravno je, da predpostavljamo, da so poskusi prve in druge serije med seboj neodvisni, zato ima slučajna spremenljivka (1) tudi približno normalno porazdelitveno funkcijo s povprečno vrednostjo nič in disperzijo:

$$D\left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right) = D\left(\frac{m_1}{n_1}\right) + D\left(\frac{m_2}{n_2}\right) = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

Slučajna spremenljivka:

$$\xi = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

ima tudi približno normalno porazdelitveno funkcijo, toda s povprečno vrednostjo $M\xi = 0$ in $D\xi = 1$. Težava je sedaj v tem, da ne poznamo iskane verjetnosti. Izkaže se, da v primeru, ko sta n_1 in n_2 primerno velika, lahko p ocenimo s:

$$\bar{p} = (m_1 + m_2)/(n_1 + n_2)$$

Enako kot prej je tudi sedaj $|\xi| > 2$ ali 3 malo verjeten dogodek. Meritve in računi za omenjeni primer rojstva dečkov kažejo tudi sedaj, da si razlike $m_1/n_1 - m_2/n_2$ ni mogoče razložiti s slučajnimi fluktuacijami, čeprav imamo neprijetnosti z oceno $p = \bar{p}$.

Da bi se izognili ocenjevanju verjetnosti, ko ne poznamo verjetnosti opazovanega dogodka, poiščimo tako funkcijo $f(m/n)$ relativne frekvence m/n dogodka, da bo njena disperzija neodvisna od p. Po Taylorju imamo:

$$f(m/n) = f(m/n - p + p) = f(p) + f'(p)\,(m/n - p) + \ldots$$

Ako je n dovolj velik, lahko zapišemo:

$$f(m/n) = f(p) + f'(p) \cdot (m/n - p)$$

Disperzija funkcije je potem enaka:

$$D(f(m/n)) = f'^2(p)\,D(m/n) = f'^2(p)\,p(1-p)/n$$

Določimo neznano funkcijo $f(p)$ tako, da bo disperzija $D(f)$ neodvisna od p, to pa dosežemo z:

$$f'^2(p)\,p(1-p) = 1$$

Z integracijo dobimo:

$$f(p) = 2 \arcsin \sqrt{p}$$

Slučajna spremenljivka $2 \arcsin \sqrt{m/n}$ ima disperzijo $1/n$, zato je:

$$\xi = \frac{2 \arcsin \sqrt{m_1/n_1} - 2 \arcsin \sqrt{m_2/n_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

slučajna spremenljivka z $M\xi = 0$ in $D\xi = 1$ in s tudi približno normalno porazdelitveno funkcijo, če sta le n_1 in n_2 primerno velika.

Tudi s tem testom (prav tako kot s prejšnjim) so s precejšnjo mero verjetnosti ugotovili, da rojstvo dečka, če hočemo biti natančni, ni slučajen dogodek.

S stališča genetičnih predstav bi bilo naravno imeti rojstvo otroka za slučajen proces. Toda iz istih genetičnih predstav bi s to isto naravnostjo sledilo, da bo iskana verjetnost $p = 0{\cdot}5$. To smo preverili na tako veliki masi, da je nemogoče privzeti $p = 0{\cdot}5$ Prav enako nismo mogli predpostavljati, da je p neko drugo, od 0·5 različno število. Statistični podatki z gotovostjo kažejo, da se po velikih vojnah relativna frekvenca fantov poveča. Ako smo dovolj strogi, nimamo pravice govoriti o verjetnosti rojstva dečka, saj nimamo opraviti s statistično stabilnim poskusom. Nekaj pa smo pri vsem tem vseeno spoznali. Z gotovostjo lahko sedaj trdimo, da obstaja neznan mehanizem, ki ureja številčnost moških in žensk.

Oglejmo si še en primer: ali je mogoče govoriti o verjetnosti kvara izdelka, ki prihaja s tekočega traku? Eden od vzrokov, da je kvar nastal, je lahko ne dovolj dobra fizična kondicija delavcev (npr. po praznikih), lahko pa je vmes slabša kvaliteta surovin? Če doženemo, da kvaliteta izdelkov ni več statistično stabilna, lahko takoj sklepamo, da se je spremenil kompleks pogojev, ki opredeljujejo slučajnost dogodka. To spoznanje nam vseeno prinaša korist; pomaga odkrivati vzroke takih odstopanj, kar omogoča, da se izboljša kakovost proizvodnje.

Spoznavamo, da je ugotavljanje, ali je ali ni dani dogodek slučajen, dokaj težaško ter je povezano z natančnim tehničnim in teoretskim delom. Ne obstaja splošen matematično dovolj strog kriterij za to, ali je ali ni mogoče govoriti o verjetnosti danega dogodka; to pa ne pomeni, da v posameznih primerih ne moremo imeti popolnega zaupanja v uporabnost verjetnostnega računa. Pri metu novca se naše zaupanje naslanja na neštevilne opravljene poskuse, pri Brownovem gibanju bazira naše zaupanje na splošnih molekularnokinetičnih predstavah itn. Razumljivo je, da verjetnostnega računa ne moremo uporabljati, še več, uporabo moramo zavrniti v takih primerih, ko so rezultati poskusov statistično nestabilni. Poseben problem je v tem, da je množica statistično stabilnih poskusov sorazmerno omejena.

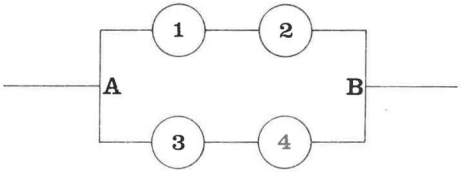
V praksi naletimo na mnogo raziskav, v katerih poskušajo uporabljati teorijo verjetnosti, kadar rezultati poskusov niso statistično stabilni. Morda se posreči zanamcem doseči, da bo tudi to področje znanstveno neoporečno.

Kakšno zvezo pa ima vse to, o čemer smo govorili, s srednjo šolo? V gimnaziji smo vpeljali pojem verjetnosti s pomočjo Kolmogorovih aksiomov, nismo pa se dokopali do zakona velikih števil. Posledica tega je, da nehote ustvarjamo v dijaku predstavo, da je vsak dogodek, to je izid poskusa, slučajen, če ima ta poskus lastnost, da pri izvršitvi tega poskusa dani dogodek nastopi ali pa ne. Ne vprašamo pa se, ali lahko takemu dogodku pripišemo tudi verjetnost, to je, ali so res izidi tega poskusa tudi statistično stabilni.

Menim, da bi bilo dobro, ko bi dijakom Bernoullijev zakon velikih števil vsaj omenili. Tako bi lahko z relativno frekvenco dogodkov statistično ocenjevali verjetnosti nekaterih dogodkov, pa čeprav gre to na račun drugih poglavij verjetnostnega računa, kot je npr. Bayesova formula ali kaj drugega. Ko bomo to storili, bomo nedvomno spoznali, da so izidi poskusov: met novca, met kocke, statistično stabilni z verjetnostmi elementarnih dogodkov 1/2 v prvem oziroma 1/6 v drugem primeru. Lahko pa se celo zgodi, če nista novec ali kocka »pravična«, da se bosta frekvenci elementarnih dogodkov stabilizirali v bližini teh dveh števil. Ne bomo pa več mogli napraviti take napake, da bi imeli dogodek: nocoj bo padal dež, ali: jutri bom doživel karambol, za slučajne dogodke, saj gre pri teh dveh za en sam neponovljiv poskus. Kompleks pogojev, pri katerih pričakujemo dogodek: jutri bo padal dež, se namreč nikoli več ne bo ponovil in ga tudi nikoli prej ni bilo. Drugače pa je z dogodkom: v Ljubljani bo 20. decembra megla. Čeprav je poskus mogoče napraviti le enkrat na leto, je vendar mogoč. Intuitivno pa lahko tudi pričakujemo, da se bo relativna frekvenca tega dogodka z neko mero natančnosti tudi stabilizirala.

Še nekaj glede nalog v srednji šoli. Mnogokrat rešujemo probleme verjetnostnega računa, ne da bi se naslanjali na elementarne dogodke oziroma aksiomatični model. Če delamo tako, smo izgubili matematične osnove, iz katerih izhajamo. Imamo vtis, da plavamo v kalnih vodah. Naša naloga je, da poskrbimo za to, da se bo dijak naučil, uporabljati aksiomatični model in ga pri nadaljnjem študiju matematike še postopno dograjeval. Naloge pa niso formulirane s termini aksiomatičnega modela; to pa je nujno potrebno, saj se le pri takih nalogah v teoriji verjetnosti učenec seznanja s tistimi konkretnimi situacijami, v katerih jo lahko uporabljamo. Zato je nujno, da znajo dijaki prevesti naloge v jezik elementarnih dogodkov.

Oglejmo si primer iz srednješolske zbirke nalog. Električna mreža:



sestoji iz štirih elementov, ki v danem časovnem intervalu $\triangle t$ enako verjetno prevajajo oziroma ne prevajajo električni tok. Kolika je verjetnost, da po časovnem intervalu $\triangle t$ mreža prevaja električni tok od A k B?

Elementarni dogodki naj bodo kar stanja, v katerih se ta sistem lahko nahaja. Označimo jih takole: e_0 = {vsi elementi prevajajo električni tok}, e_1 = {element 1 ne prevaja električnega toka, vsi drugi pa ga prevajajo}, analogno e_2, e_3, e_4, e_5 (1, 2) = {elementa 1, 2 ne prevajata električnega toka, drugi pa ga prevajajo} ter podobno e_6 (1, 3), e_7 (1, 4), e_8 (2, 3), e_9 (2, 4), e_{10} (3, 4), e_{11} (1, 2, 3), e_{12} (1, 2, 4), e_{13} (1, 3, 4), e_{14} (2, 3, 4) in e_{15} (1, 2, 3, 4). Poskus je v temle: imamo sistem, ki ga opazujemo v časovnem intervalu $\triangle t$. Po tem času lahko ugotovimo, da je sistem v enem od omenjenih 16 stanj. To so izidi poskusa, tj. elementarni dogodki. Dogodek C = {mreža prevaja električni tok} nastopi ali pa ne. Dogodek C nastopi, če nastopi eden od $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_{10}$, torej $C = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_{10}\}$ in odtod vrednost za verjetnost dogodka C

$$P(C) = \sum_{C} P(e_i) = 7/16$$

saj so vsi elementarni dogodki enako verjetni.

Očitno je, da lahko nalogo rešimo tudi mnogo hitreje: kadar sistem prevaja električni tok, teče ta ali po zgornji veji 12 ali pa po spodnji 34. Po zgornji teče v 2^2 primerih, po spodnji pa tudi. Vsega vkup je torej 8 — 1 takih stanj, saj smo eno dvakrat šteli.

Položaj je popolnoma podoben temu, s katerim se srečujemo pri nastavljanju enačb. Gre le za prevod naloge v jezik elementarnih dogodkov. Tak prevod je lahko popolnoma preprost, lahko pa tudi zelo težaven. Možna je celo neenoličnost prevoda.

Oglejmo si še en primer iz naše zbirke. Tehtamo vrečke z masami: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 g, s sistemom uteži 1, 2, 2, 5, 10 g. Vrečka vsake vrste ima enako mnogo možnosti, da pride k tehtanju. Uteži postavljamo le v eno čašico. Vsakokrat uporabimo najmanjše možno število uteži.

Poskus je v izbiri vrečke, ki jo naj tehtamo. Izid poskusa, to je vrsta vrečke, naj bo elementarni dogodek. Označimo jih z: $e_1, e_2, \ldots e_{10}$. Število uteži, ki jih uporabimo pri vsakokratnem poskusu, je slučajna spremenljivka, dajmo ji ime ξ. Izračunajmo njeno povprečno vrednost!

Slučajna spremenljivka ξ pa je funkcija, ki je definirana na množici elementarnih dogodkov, to je, vsakemu elementarnemu dogodku pripada natanko ena vrednost za slučajno spremenljivko. Z majhnim premislekom lahko dobimo naslednjo tabelo za to funkcijo:

e_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(e_i)$	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1
ξ	1	1	2	2	1	2	2	3	3	1

Očitno tvorijo zalogo vrednosti slučajne spremenljivke ξ le vrednosti 1, 2, in 3. Verjetnost, da zavzame slučajna spremenljivka ξ vrednost 1, je:

$$P(\xi = 1) = \sum_{\xi(e_i) = 1} P(e_i) = 0{\cdot}4$$

S tem računom in podobnima računoma dobimo naslednjo običajno tabelo za zaklad vrednosti slučajne spremenljivke in ustrezne verjetnosti:

ξ	1	2	3
P	0·4	0·4	0·2

Povprečna vrednost $M\xi = 1{\cdot}8$. V praksi vse vrste vrečk nimajo enakih možnosti, da bodo tehtane kot v zgornjem primeru. Ako poznamo pripadajoče $P(e_i)$, ni težko naloge rešiti tudi v tem najsplošnejšem primeru.

Oglejmo si še prevod iste naloge v neko drugo množico elementarnih dogodkov. Elementarni dogodek e_1 je nastopil, če smo pri tehtanju uporabili le eno utež, analogno e_2 in e_3. Imamo vsega skupaj le tri elementarne dogodke, ki pa seveda niso enako verjetni, kot že vemo. Vidimo, da prevod naloge v jezik elementarnih dogodkov v splošnem ni enoličen. Izbrano nalogo najpreprosteje rešimo s pomočjo tiste množice elementarnih dogodkov, ki so enako verjetni, to pa je prvi primer.

Prednost takega reševanja naloge, kakršnega smo pokazali v prejšnjih dveh primerih, je, da z njim ostro razdelimo nalogo na dva dela: najprej uskladimo nalogo z matematičnim modelom, nato pa šele pričnemo izračunavanje v okviru tega modela. V praksi se namreč izkaže za koristno, da vsako nalogo, ki jo moramo rešiti, razbijamo na kose tako dolgo, da delne naloge končno lahko rešimo. Prvi del, to je usklajevanje z matematičnim modelom, je najtežavnejši. Po navadi doseže težavnost svoj vrh pri določanju verjetnosti elementarnih dogodkov.

Verjetnostni račun in računalništvo v srednji šoli

Že nekaj let poučujemo v naših šolah tudi računalništvo, za sedaj le v okviru praktičnih znanj. Obetajo pa se nam časi, ko bo ta pouk postal reden. Pri računalništvu za sedaj le tabeliramo funkcije, rešujemo enačbe z metodami zaporednih približkov, rešujemo sisteme linearnih enačb... ostale naloge pa so že uvožene z drugih področij. Kaj ko bi se pri teh urah, ki jih imamo na razpolago, lotili z računalnikom numeričnega reševanja nalog iz verjetnostnega računa?

Za kaj pravzaprav gre? Gre za eksperimentalno ilustracijo naloge s poskusom in za merjenje rezultatov tega poskusa. Izmerjene količine so približna rešitev naloge. Že v preteklosti so se matematiki zatekali k temu postopku, ni pa se mogel ohraniti kot metoda, saj je bil preveč utrudljiv, včasih pa tudi časovno nepremostljiv. Danes pa mnoge matematično zelo zahtevne naloge ali pa celo eksplicitno nerešljive naloge z lahkoto rešimo tako, da simuliramo ustrezni poskus v računalniku. Govoril bi o nekaterih takih simulacijah, primernih za srednjo šolo.

V računalniku CDC 6600 se na fortranski ukaz $X =$ RANF (1.0) (random function) vzbudi v delovanje generator vrednosti slučajne spremenljivke. Ta generator na ponoven poziv $X =$ RANF (0.0) v celico, namenjeno spremenljivki X, vpiše neko slučajno število med 0 in 1. V računalniku CDC 330 se vzbujanje opravi s pozivom $X =$ RNG (0) (random generator), generiranje pa z RNG (1). Pri drugih računalnikih pa si pomagamo s posebnim podprogramom, ki ga moramo sestaviti sami.

Poskus je v pozivu $X =$ RANF (0.0), elementarni dogodek pa je generirano število e_i, ki je obenem vrednost omenjene slučajne spremenljivke $\xi(e_i) = e_i$. Množica vrednosti, ki jih lahko zavzame ta slučajna spremenljivka, je zelo gosta, vendar diskretna. Vzemimo, da stroj generira slučajno spremenljivko na n decimalk natančno; potem vsebuje zaloga vrednosti slučajne spremenljivke ξ 10^n vrednosti; če so vse enako verjetne, je $P(e_i) = 1/10^n$. Gre torej za diskretno slučajno spremenljivko, katere vrednosti so enakomerno posejane med 0 in 1 s konstantno verjetnostno funkcijo. Pri elektronskih računalnikih, ki nimajo

generatorja slučajnih števil, je treba podprogram, ki smo ga napravili sami, predhodno še testirati. Najenostavneje je, da z računalnikom poiščemo približke prvih deset momentov slučajne spremenljivke ξ in jih primerjamo z izračunanimi. Glede na to, da je množica vrednosti slučajne spremenljivke po intervalu [0,1) enakomerno posejana in da je zelo gosta, jo lahko imam kar za zvezno slučajno spremenljivko s porazdelitveno funkcijo:

$$F(x) = P(\xi < x) = x$$

k-ti moment te slučajne spremenljivke je potem enak:

$$\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}$$

Ako odstopanja tako izračunanih vrednosti od ocenjenih niso prevelika, potem moremo s podprogramom določeno slučajno spremenljivko imeti za dobro.

Za srednje šole so interesantne le diskretne slučajne spremenljivke. Pa poglejmo, kako generiramo v stroju diskretno slučajno spremenljivko η, ki je podana s tabelo:

η	y_1	y_2	y_3	$\ldots y_n$
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots p_n$

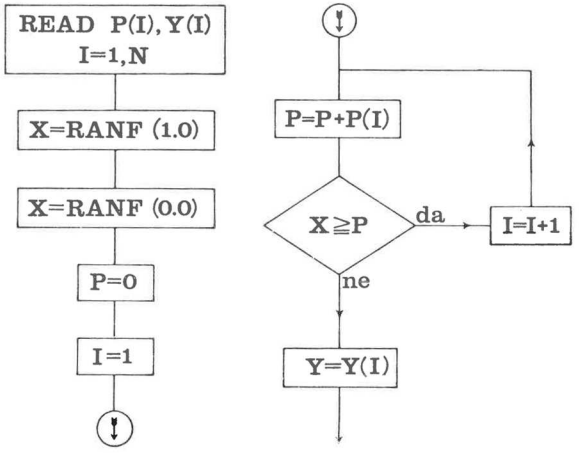
Vrednosti slučajne spremenljivke X = RANF (0.0) padajo na interval [0, 1). Interval [0, 1) pa lahko pokrijemo brez prekrivanja z vrednostmi $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ slučajne funkcije za slučajno spremenljivko η

Verjetnost, da slučajna spremenljivka X = RANF (0.0) zavzame vrednost z intervala $[0, p_1)$, je enaka p_1, da zavzame vrednosti z intervala $[p_1, p_1 + p_2)$, pa p_2 in končno, da zavzame vrednosti z intervala $[1 - p_n, 1)$, pa p_n. Če torej slučajni spremenljivki η pripišemo vrednost y_1, ko RANF (0.0) zavzame vrednost z intervala $[0, p_1)$, bo verjetnost $P(\eta = y_1) = p_1$ itd. To pa je ravno zahtevana slučajna spremenljivka.

Diagram poteka za generiranje diskretne slučajne spremenljivke z dano zalogo vrednosti in predpisano slučajno funkcijo na tej zalogi vrednosti je takle:

V jeziku FORTRAN IV je ustrezni program naslednji:

```
- - - - - - - - - -
  DIMENSION P(N), Y(N)
  READ 1 (P(I), Y(I), I = 1, N)
1 FORMAT (...)
  X = RANF (1·0)
  X = RANF (0·0)
  P = 0
  DO 2 I = 1, N
  P = P + P(I)
  IF (X. GE. P) 2, 3
2 CONTINUE
3 Y = Y(I)
- - - - - - - - - -
```



Tako oboroženi se spoprimimo s kako nalogo iz verjetnostnega računa. Poznamo igro marjanca? Na stranicah šesterorobne vrtavke piše: vzemi vse, vzemi 1, vzemi 2, daj 1, daj 2 in dajo vsi. Po zavrtitvi se vrtavka vedno ustavi na eni izmed teh oznak. Igro naj igrata dva igralca, ki imata vsak posebej neskončno mošnjo denarja. Ko se igra prične, vložita v »banko« vsak po 1 dinar. Eden od njiju zavrti. Ko se vrtavka ustavi, se izvrši ukaz, ki ga daje oznaka na vrtavki. Nato vrti vrtavko drugi itd. Igra se konča, ko se banka popolnoma izprazni. Dolžina igre naj bo število korakov, po katerih se banka izprazni, da morata pričeti znova. Dolžina igre je slučajna spremenljivka ξ, ki lahko teoretično zavzame vse naravne vrednosti 1, 2, 3, ... Vprašamo se, kolika je njena povprečna vrednost?

Poskus naj bo odigrana igra. Elementarni dogodek $e_k = \{\xi = k\}$. Nalogo rešimo tako, da igro simuliramo v stroju in jo ponovimo npr. tisočkrat (N). V polju LF (101) pa zbiram frekvence za dogodke, in sicer v celici LF (1) frekvenco za dogodek $e_1 = \{\xi = 1\}$, ... v celici LF (100) frekvenco za dogodek $e_{100} = \{\xi = 100\}$, v celici LF (101) pa frekvenco za igre, katerih dolžina bi bila morda (kar pa se zelo malokrat zgodi) večja ali enaka 101 koraku. Povprečno vrednost slučajne spremenljivke potem ocenimo po obrazcu:

$$M\xi = (1 \cdot \mathrm{LF}(1) + 2 \cdot \mathrm{LF}(2) + \ldots + 101 \cdot \mathrm{LF}(101))/N$$

Vrtenje vrtavke simuliramo v računalniku s klicema $X = \mathrm{RANF}\ (0.0)$ in $K = 6 \cdot * X + 1$. Integer spremenljivka K zavzame le vrednosti 1, 2, 3, 4, 5 in 6. Vrednost 2 zavzame npr., ko je $1/6 \leqq X < 2/6$ itd. H $K = 1$ priredimo ukaz »vzemi vse«, h $K = 2$ ukaz »vzemi 1« itd. Potek simulacije te igre v računalniku lahko razbereš iz diagrama poteka, ki je na sl. 4.

V diagramu poteka pomenijo: M — število do tistega trenutka opravljenih iger, I — dolžina igrane igre v tistem trenutku, NB — množina denarja v banki v tistem trenutku, N število vseh iger, ki jih nameravamo odigrati, XP — pa povprečno vrednost slučajne spremenljivke. Pri $N = 1000$ dobimo $M\xi = 4{\cdot}1$ koraka.

Očitno ni nič težko simulirati (s tem, da napravimo le majhne spremembe v diagramu poteka) tudi igro z več igralci. Seveda bi lahko na enak način zasledovali še druge slučajne spremenljivke, ki nastopajo v tej igri.

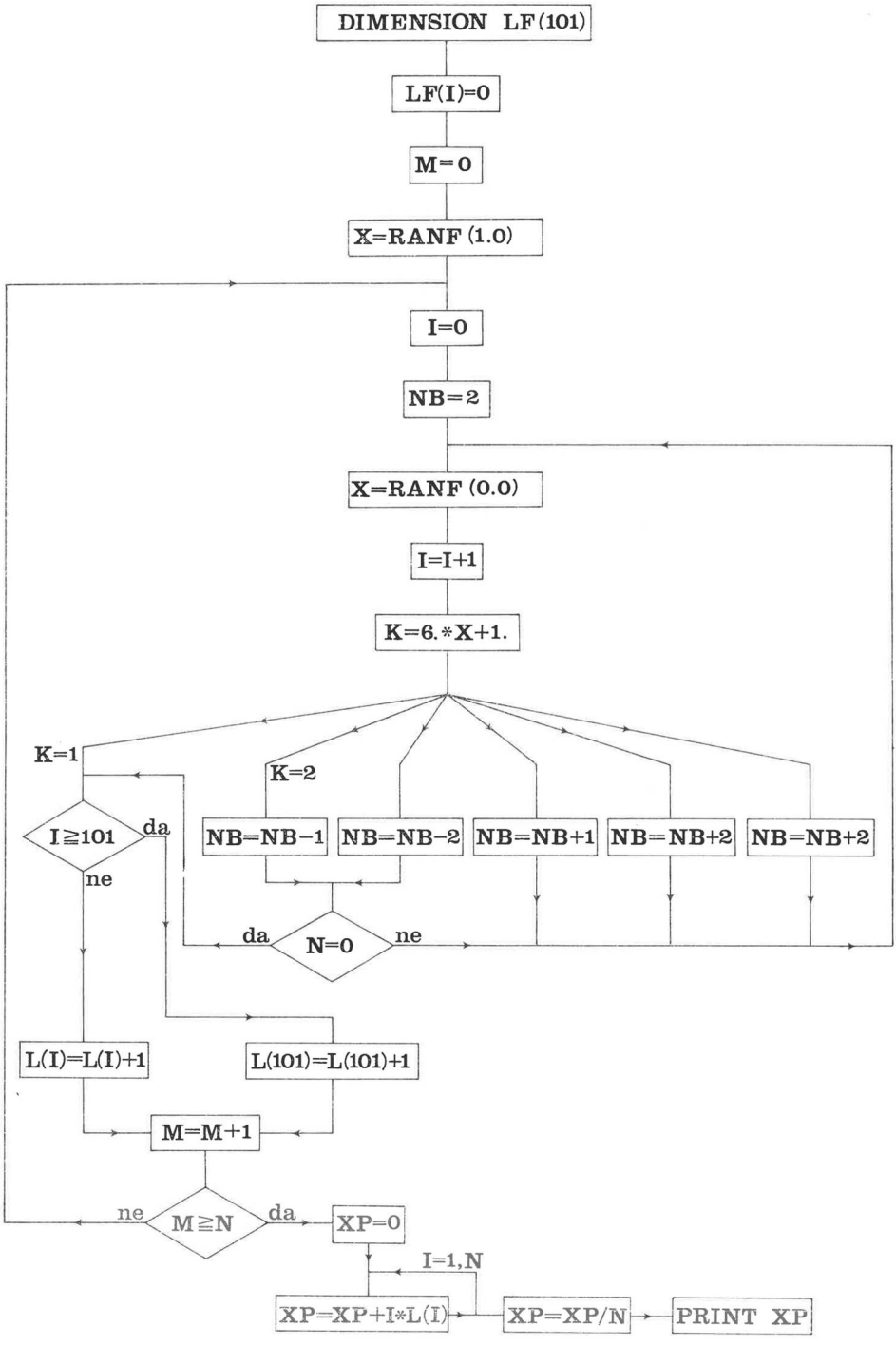
Lahko se lotimo podobne igre z igralcema, ko nimata neskončne mošnje denarja. Ta je še bolj zanimiva. Dolžino igre lahko sedaj imenujemo število korakov, po katerih eden »osuši« drugega. Zanimivo je tudi meriti verjetnost zmage enega ali drugega, če vemo, koliko imata denarja na začetku...

Očitno bi lahko simulirali tudi igro z nepravično vrtavko, le stavka $X = \mathrm{RANF}\ (0.0)$ ter $K = 6 \cdot * \mathrm{X} + 1.$, bi morali zamenjati z že omenjenim programom za splošno diskretno slučajno spremenljivko.

Na letošnjem kongresu INFORMATICA 73 sem opazil predavanje, pri katerem je predavatelj simuliral tak slučajnostni proces s področja ekonomike. Žal je bil edini!

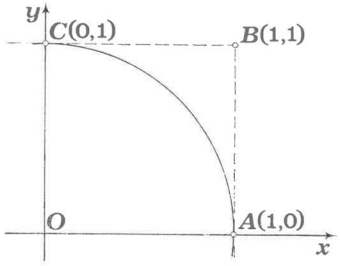
V teoriji iger se mnogokrat srečujemo z diferenčnimi enačbami. V primerih, ko ne moremo priti do rešitev diferenčne enačbe po direktni poti, moremo priti do rešitve te enačbe s simulacijo ustrezne igre v računalniku. Teorija iger je samo ožji primer tako imenovanega Random walk procesa, pri katerem se tudi vsak korak opravi neodvisno od predhodnega. Ako vzamemo pri takem procesu velikost koraka infinitezimalno majhno, preidejo omenjene diferenčne enačbe v diferencialne. Tak primer imamo v fiziki pri difuziji. Tako lahko s simulacijo ustreznih procesov v računalniku rešujemo celo parcialne diferencialne enačbe, če le robni pogoji niso preveč kompliciran.

Zelo preproste so tudi simulacije za računanje večkratnih integralov, če le ne zahtevamo prevelike natančnosti. Za srednjo šolo je zelo primerna naslednja naloga:



Sl. 4 Diagram poteka za simulacijo igre marjanca v računalniku

Krogu $x^2 + y^2 = 1$ je očrtan kvadrat, kot kaže slika:



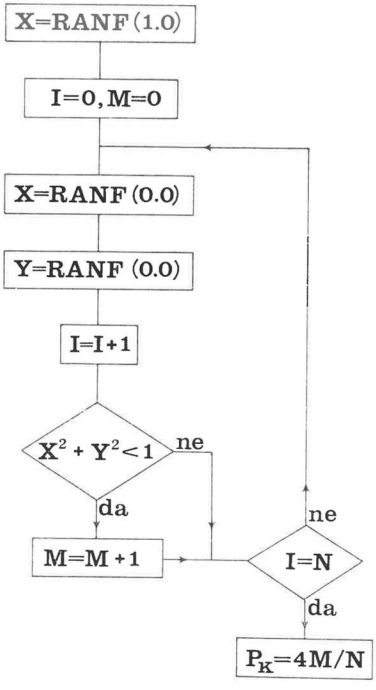
Slučajno izbiramo točke v manjšem kvadratu $OABC$. Kako bi izmerili z njimi ploščino kroga?

Nalogo rešimo takole. Slučajno izberemo N točk v notranjosti kvadrata $OABC$, in sicer tako, da bodo v notranjosti kvadrata čimbolj enakomerno posejane. To dosežemo s tem, da jemljemo za absciso in ordinato teh točk vrednosti slučajne spremenljivke $X =$ RANF (0.0), saj ima ta slučajna spremenljivka prav to lastnost [tj. njene vrednosti so enakomerno posejane med 0 in 1 in ima konstantno verjetnostno funkcijo]. Nato preštejem te, ki so padle v notranjost kroga. Število teh označimo z M. Očitno velja naslednja ocena:

$$\frac{M}{N} \doteq \frac{P_K/4}{1}$$

ki je tem boljša, čim večji je N. Tu smo s P_K označili ploščino kroga. Odtod je ploščina kroga: $P_K \doteq 4M/N$.

Diagram poteka tega procesa v računalniku je tak:



V diagramu poteka pomenita I trenutno število točk, ki smo jih generirali, M pa število teh, ki so padle v notranjost kroga.

Na dlani je sedaj, kako generiramo točke v poljubno dimenzionalnem prostoru. Zato si ni težko predstavljati, kako bi izmerili tudi še kaj več dimenzionalen integral, kot je bil zadnji.

LITERATURA

[1] Feller W., *An introduction to probability theory and its applications*, New York 1967.
[2] Gnedenko B., *Kurs teorii verojatnostej*, Moskva 1969.
[3] Jamnik R., *Verjetnostni račun*, Ljubljana 1971.
[4] Križanič F., *Aritmetika, algebra in analiza III*, Ljubljana 1969.
[5] Tutubalin V. N., *Teorija verojatnostej v estestvoznanii*, Moskva 1972.
[6] Vadnal A., *Elementarni uvod v verjetnostni račun*, Ljubljana 1972.
[7] Bratko I., Zakrajšek E., *Računalništvo*, Ljubljana 1972.
[8] Demidovič B., i Maron I., Osnovi vičisliteljnoj matematiki, Moskva 1966.

NEKAJ PRIMEROV PREPROSTIH DIFERENČNIH ENAČB

ANDREJ KMET

AMS Subj. Class. (1970) 39 A 10

V sestavku avtor obravnava linearne diferenčne enačbe prvega in drugega reda. Uporabo ilustrira na zgledih iz ekonomike in obrestnega računa.

ON SOME SIMPLE DIFFERENCE EQUATIONS

In this exposition paper some simple difference equations are treated.

V začetnih poglavjih bomo pojasnili pojem diferenčne enačbe ter obdelali nekaj tipičnih enačb, ki jih je mogoče analitično rešiti. Metode reševanja bomo le skicirali, saj jih lahko bralec poišče v Križaničevem učbeniku za srednje šole. V nadaljevanju se bomo lotili nekaterih praktičnih problemov s pomočjo diferenčnega računa.

Funkcije realne spremenljivke in zaporedja. Preslikavo

$$y : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

imenujemo realno funkcijo realne spremenljivke,

$$y : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$$

pa realno zaporedje. Sliko naravnega števila n bomo označili z $y(n)$ ali y_n. Z $\mathcal{N}$ oziroma $\mathcal{R}$ smo označili množici naravnih oziroma realnih števil.

Mnogokrat preveč ločimo »običajne« funkcije realne spremenljivke od zaporedij, ki pa imajo le drugo definicijsko območje, namreč množico naravnih števil. Zaradi te posebnosti pišemo argument pogosto kot indeks. Analitičen zapis pa je v obeh primerih identičen, le da včasih s črkami i, j, k, l, m, n poudarimo, da je argument naravno število in da je obravnavana funkcija zaporedje. Na primer

$$a_n = 2n + 1, \quad n \in \mathcal{N}$$

določa zaporedje,

$$y(x) = 2x + 1, \quad x \in \mathcal{R}$$

pa funkcijo realne spremenljivke.

Običajno so vse funkcije realne spremenljivke, ki jih srečamo v srednji šoli, definirane eksplicitno, bodisi kot polinomi, racionalne, algebrske, redko kot transcendentne funkcije.

Tudi pri zaporedjih pričakujemo, da je splošni člen zaporedja definiran analitično in ga je iz danega argumenta n mogoče direktno izračunati. Res je taka oblika podajanja preglednejša, laže je študirati monotonost, konvergenco ipd. zaporedij, vendar pa je mogoče zaporedje podati tudi kako drugače.

Diferenčne enačbe. Zelo pogosto navedemo zvezo med nekaj členi zaporedja. Oglejmo si dva znana primera. Za dva poljubna člena aritmetičnega zaporedja velja zveza

$$a_{n+1} = a_n + d$$

in podobno za geometrijsko zaporedje

$$a_{n+1} = ka_n$$

Obratno je s to relacijo, pri kateri je konstanta d oziroma k podana, in z začetnim členom a_0 zaporedje natanko določeno. Splošno zvezo med $r + 1$ členi zaporedja lahko zapišemo z izrazom

$$a_{n+r} = F(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+r-1}, n)$$

ki ga imenujemo r-člensko rekurzijo (diferenčno enačbo r-te stopnje). Tu je F dana funkcija $r + 1$ argumentov. Omejili se bomo na take funkcije F, ki so enolično definirane za vsak realen argument. Očitno je s tako diferenčno enačbo in z danimi r začetnimi členi zaporedja

$$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$$

zaporedje $\{a_n\}$ natanko določeno.

Pri zaporedjih, ki so podana z diferenčno enačbo, si lahko zastavimo različne naloge. Običajno se vprašamo, če ga le ni mogoče izraziti analitično, včasih pa se zadovoljimo, če ugotovimo, pri katerih začetnih pogojih zaporedje divergira oz. konvergira ter kakšna je v tem primeru limita. Včasih želimo vedeti, ali je zaporedje monotono ali pa morda členi oscilirajo.

Sedaj si oglejmo nekaj tipov enačb, ki jih je pogosto mogoče rešiti analitično, to je izraziti splošni člen a_n eksplicitno kot funkcijo n-ja.

Linearna diferenčna enačba prvega reda s konstantnimi koeficienti

Posplošimo diferenčno enačbo $x_{n+1} - x_n = d$, ki določa aritmetično zaporedje, takole

$$x_{n+1} - kx_n = a_n \tag{1}$$

Pri tem naj bo k konstanta, $\{a_n\}$ pa neko znano zaporedje. Obdelajmo poseben primer, ko so vsi členi zaporedja $\{a_n\}$ enaki nič. Iščemo torej rešitev homogene enačbe

$$x_{n+1} - kx_n = 0$$

Splošna rešitev je očitno geometrijsko zaporedje $x_n = x_0 k^n$, pri čemer je x_0 še poljuben. Vrnimo se sedaj k nehomogeni enačbi (1) tj. a_n niso vsi enaki nič. Denimo, da smo uganili neko zaporedje $\{X_n\}$, ki tej enačbi zadošča. Očitno pa to zaporedje ni edino, saj ustreza

$$x_n = X_n + Ak^n \tag{2}$$

isti diferenčni enačbi. Pri tem je A še poljubna konstanta. Zaporedje (2) imenujemo splošno rešitev nehomogene enačbe in je sestavljena iz neke partikularne rešitve $\{X_n\}$ ter poljubne rešitve homogene enačbe. Če si sedaj izberemo začetni člen x_0, lahko izračunamo konstanto A in je s tem zaporedje natanko določeno.

Še vedno ostane problem, kako dobiti kako partikularno rešitev $\{X_n\}$. V nekaterih preprostih primerih rešitev kar uganemo, na primer, če je zaporedje $a_n = d$ konstantno.

$$x_{n+1} - kx_n = d$$

Zlahka se prepričamo, da konstantno zaporedje $X_n = d/(1 - k)$ zadošča enačbi, če je le $k \neq 1$, v nasprotnem primeru pa gre očitno za aritmetično zaporedje, katerega splošni člen poznamo, namreč

$$x_n = x_0 + nd$$

Uganimo še partikularno rešitev enačbe

$$x_{n+1} - kx_n = q^n$$

pri tem pa naj bo $q \neq k$. Poizkusimo srečo z nastavkom $X_n = Aq^n$

$$Aq^n(q - k) = q^n$$

Odtod določimo A in dobimo

$$X_n = \frac{q^n}{q - k}$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je torej

$$x_n = \frac{q^n}{q - k} + Ak^n$$

Poiščimo partikularno rešitev še drugače. Zapišimo enačbo (1) za $n = 0, 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} x_1 - kx_0 &= a_0 \\ x_2 - kx_1 &= a_1 \\ &\ldots \\ x_{ni+1} - kx_m &= a_m \end{aligned}$$

Delimo sedaj drugo enačbo s k, tretjo s k^2 in tako dalje, zadnjo s k^m. Tako dobljene enačbe seštejmo. Opazimo, da se vsi členi razen prvega in zadnjega uničijo in dobimo

$$\frac{x_{m+1}}{k^m} - kx_0 = a_0 + \frac{a_1}{k} + \ldots + \frac{a_m}{k^m}$$

oziroma

$$x_{m+1} = k^{m+1}x_0 + \sum_{i=0}^{m} a_i k^{m-i}$$

Očitno je $k^{m+1}x_0$ splošna rešitev homogene enačbe, saj vsebuje še poljubno konstanto x_0. Zaporedje $X_n = \sum_{i=0}^{n} a_i k^{n-i}$ pa predstavlja neko partikularno rešitev nehomogene enačbe. Pravimo, da »znamo enačbo rešiti«, če nam uspe analitično izraziti vsoto, ki določa zaporedje $\{X_n\}$. V splošnem to očitno ni mogoče in le v nekaj posebnih primerih bomo uspeli Naj bo na primer

$a_i = d$ za vsak i ter $k \neq 1$; potem je

$$d \sum_{i=0}^{n} k^{n-i} = d \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

Opazimo, da smo po tej poti dobili drugačno partikularno rešitev, kot smo jo malo prej uganili. Prepričati pa se moremo, da se obe partikularni rešitvi razlikujeta za neko rešitev homogene enačbe. Poišči po tej metodi še partikularno rešitev enačbe

$$x_{n+1} - kx_n = q^n$$

in naj bo $q \neq k$.

Linearna diferenčna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti

Pogosto naletimo na diferenčne enačbe oblike

$$x_{n+2} + rx_{n+1} + sx_n = a_n \tag{3}$$

Pri tem sta r in s konstanti, $\{a_n\}$ pa neko znano zaporedje. Kot v prejšnjem razdelku obravnavajmo najprej homogeno enačbo

$$x_{n+2} + rx_{n+1} + sx_n = 0 \tag{4}$$

Poizkusimo rešitev uganiti z nastavkom $x_n = k^n$.

$$k^{n+2} + rk^{n+1} + sk^n = 0$$

Ker iščemo netrivialno rešitev, torej tako, da je $k \neq 0$, lahko delimo s k^n in dobimo kvadratno enačbo za k

$$k^2 + rk + s = 0$$

Če se ne oziramo na primer, ko sta oba korena enačbe enaka, dobimo dve bodisi realni bodisi konjugirano kompleksni rešitvi k_1 in k_2. Homogeni enačbi (4) ustrezata torej dve geometrijski zaporedji k_1^n in k_2^n. Očitno tudi poljubna linearna kombinacija zadošča tej enačbi. Splošno rešitev homogene enačbe lahko potemtakem zapišemo v obliki

$$x_n = Ak_1^n + Bk_2^n$$

in sta pri tem A ter B poljubni konstanti. Natančnejšo analizo rešitev lahko bralec poišče v Križaničevem učbeniku.

S podobnim sklepanjem kot pri enačbi prvega reda ugotovimo, da je

$$x_n = X_n + Ak_1^n + Bk_2^n$$

splošna rešitev nehomogene enačbe. Spet smo z $\{X_n\}$ označili neko partikularno rešitev nehomogene enačbe (3).

V naslednjih poglavjih bomo na nekaj konkretnih primerih ilustrirali uporabo diferenčnih enačb.

Iteracijske formule. Pri mnogih algebrskih enačbah višje stopnje, posebno pa še pri transcendentnih enačbah, korena ne moremo analitično izraziti. Tedaj določimo zaporedje približkov, ki naj konvergirajo proti rešitvi enačbe, z iteracijskim postopkom. To je eno ali veččlenska rekurzija, ki pa žal večinoma ni linearna. Enačbi, katere koren iščemo, lahko seveda na različne načine priredimo rekurzivno relacijo. Za primer vzemimo enačbo

$$x - \cos x = 0$$

Zaporedje približkov lahko tvorimo na primer takole

$$x_{n+1} = \cos x_n \tag{5}$$

ali pa

$$x_{n+1} = 2\cos x_n - x_n \tag{6}$$

ali po Newtonovi metodi

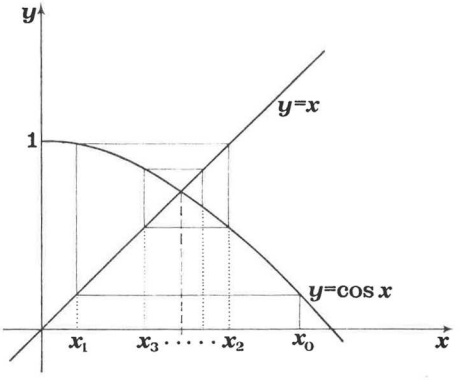
$$x_{n+1} = \frac{x_n \sin x_n + \cos x_n}{\sin x_n + 1} \tag{7}$$

itd. Seveda nam vsaka iteracijska formula definira drugo zaporedje, ki je odvisno še od začetnega približka x_0. Ugotoviti moramo, pri katerih x_0 zaporedje $\{x_n\}$ konvergira in kakšne so limite konvergentnih zaporedij. Če je različnih limit več, moramo še ugotoviti, katera ustreza iskanemu korenu enačbe. Za numerično realizacijo procesa je pomembno analizirati še hitrost konvergence, to je, kako hitro se členi zaporedja približujejo limiti.

Oglejmo si sedaj naše tri primere. V splošnem velja naslednja trditev.

Naj ima enačba $x = g(x)$ rešitev x^*. Potem zaporedje približkov, ki jih definira rekurzija $x_{n+1} = g(x_n)$, konvergira proti x^*, če je le $|g'(x)| < 1$ v neki okolici x^* in leži začetni približek x_0 v tej okolici. Nasprotno pa tako definirano zaporedje ni konvergentno, če je $|g'(x)| > 1$ ali pa je limita različna od x^*.

V primeru iteracijske formule (5) se zlahka prepričamo, da so pogoji za konvergenco zaporedja približkov izpolnjeni za vsak začetni približek $0 < x_0 < \pi/2$. Za ilustracijo je na sliki 1 prikazanih nekaj korakov iteracije. Iz slike je tudi razvidno, da tako definirano zaporedje konvergira celo za vsak začetni približek x_0.



V drugem primeru (6) je odvod funkcije $g(x) = 2\cos x - x$ enak

$$g'(x) = -2\sin x - 1$$

Torej je v okolici rešitve manjši od -1 in zato približki ne bodo konvergirali za noben x_0, različen od x^*.

Za Newtonovo metodo (7) je znano, da zaporedje približkov konvergira v dovolj majhni okolici rešitve. Povsem očitno pa je, da za $x_0 = (4k - 1)\,\pi/2$ pri poljubnem celem številu k zaporedje približkov sploh ni definirano.

Nekatera zaporedja, definirana z iteracijskim procesom, je mogoče zapisati analitično. Rešimo tole nalogo

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{a}{x_n}}$$

oziroma

$$x_{n+1}^2\, x_n = a \tag{8}$$

Če predpostavimo, da je $a > 0$ in $x_0 > 0$, so vsi členi zaporedja pozitivni in jih lahko logaritmiramo. Označimo z $X_n = \log x_n$ in $A = \log a$. Enačbo (8) lahko prepišemo v ekvivalentno obliko

$$2X_{n+1} + X_n = A$$

ki pa je linearna in jo znamo rešiti. Rešitev se glasi

$$X_n = \frac{A}{3} + C\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Pri tem je C še poljubna konstanta. Zaporedje $\{x_n\}$ je tedaj

$$x_n = \sqrt[3]{a}\, c^{(-\frac{1}{2})^n}$$

kjer je $C = \log c$. Iz začetnega pogoja x_0 določimo konstanto c in dobimo

$$x_n = a^{\frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n)}\, x_0^{(-\frac{1}{2})^n}$$

Vidimo, da za vsak $x_0 > 0$ zaporedje $\{x_n\}$ konvergira proti a.

Rekurzivno računanje členov zaporedja. Pogosto poznamo analitično izražavo členov zaporedja, vendar je bolj efektivno računati člene rekurzivno. Oglejmo si primer.

Koordinate oglišč (x_i, y_i) pravilnega n-kotnika, včrtanega enotnemu krogu, so

$$x_i = \cos\frac{2\pi i}{n} \qquad y_i = \sin\frac{2\pi i}{n} \qquad i = 0,1 \ldots, n-1$$

Če uporabimo adicijski izrek, dobimo rekurzivno relacijo med koordinatami dveh zaporednih oglišč

$$x_{i+1} = cx_i - sy_i$$
$$y_{i+1} = sx_i + cy_i$$

z začetnim pogojem $x_0 = 1$ in $y_0 = 0$

Pri tem smo označili s $c = \cos\dfrac{2\pi}{n}$ in z $s = \sin\dfrac{2\pi}{n}$. V tabelah trigonometričnih funkcij je treba poiskati količini c in s, nato pa za vsak par koordinat izvršiti štiri množenja, eno seštevanje in eno odštevanje. Ta način je gotovo prikladnejši, kadar računamo z računskim strojem.

Kljub prednostim, ki jih včasih daje rekurzivno računanje, pa moramo biti v nekaterih primerih skrajno previdni. To naj pokaže naslednji zgled.

Zaporedje

$$a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

zadošča diferenčni enačbi

$$x_{n+1} = (n+1)x_n - 1/e \tag{9}$$

$\{a_n\}$ je monotono padajoče zaporedje, ki konvergira proti 0 in predstavlja partikularno rešitev enačbe (9). Splošna rešitev pa se glasi

$$x_n = a_n + Cn!$$

pri čemer je C poljubna konstanta. Z izbiro začetnega člena x_0 je konstanta C natanko določena in je v primeru $x_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ enaka 0. Če torej zahtevamo za $x_0 = 1 - e^{-1}$, nam definira diferenčna enačba (9) ravno zaporedje $\{a_n\}$.

Za vsak drugačen x_0 pa je zaporedje $\{x_n\}$ divergentno, saj $n!$ zelo hitro narašča v neskončnost. Ker pa zaradi računanja s končnim številom decimalk ne moremo nikoli postaviti x_0 natanko $1 - \mathrm{e}^{-1}$, se nam v primeru, da računamo člene a_n po rekurziji (9), vedno pritihotapi rešitev homogene enačbe, ki kaj kmalu preglasi prave vrednosti zaporedja $\{a_n\}$. V tabeli 1 je na štiri mesta izračunanih nekaj členov zaporedja $\{a_n\}$ po rekurzijski formuli (9). Opazimo, da je sedmi člen negativen, kar je očitno napačno, saj bi morali biti vsi členi pozitivni.

n	a_n
0	0.6321
1	0.2642
2	0.1605
3	0.1136
4	0.0865
5	0.0646
6	0.0197
7	—0.2300

Diferenčna enačba za preprost model gibanja nacionalnega dohodka

Procesi, s katerimi se ukvarja ekonomija, so večinoma časovno zvezno porazdeljeni, zaradi preprostejšega modela pa jih običajno diskretiziramo. Količine merimo v enakomerno porazdeljenih trenutkih časovne skale (stanje skladišč) ali pa jih obravnavamo kot integrale preko enakih časovnih intervalov (nacionalni dohodek) V vseh primerih imamo opravka z zaporedjem, kjer pomeni indeks zaporedno število časovnega trenutka ali intervala, v katerem opazujemo določeno količino. Ker na ekonomska gibanja vplivajo razen trenutnih planov predvsem stanja pred nekaj leti, skušajo modeli, ki ponazarjajo ta gibanja, opisati te vplive z diferenčnimi enačbami.

Sestavimo preprost model za gibanje nacionalnega dohodka. Nacionalni dohodek x_n v letu n je sestavljen iz treh komponent: dohodka G_n, ki ga odvajamo za potrebe države, dohodka za osebno porabo C_n ter dohodka za razširjeno reprodukcijo (investicije) I_n:

$$x_n = G_n + C_n + I_n \tag{10}$$

Denimo, da se dohodek za osebno porabo giblje sorazmerno z nacionalnim dohodkom v preteklem letu

$$C_n = ax_{n-1}$$

Investicije naj sledijo gibanju standarda, tj. naj bodo sorazmerne spremembi dohodka za osebno porabo.

$$I_n = b(C_n - C_{n-1})$$

Nadalje predpostavimo, da je dohodek državnega aparata konstanten

$$G_n = K$$

Če postavimo zadnje relacije v (10), dobimo

$$x_n = K + a(1 + b)x_{n-1} - abx_{n-2}$$

oziroma

$$x_n - a(1 + b)x_{n-1} + abx_{n-2} = K$$

Rešimo zgornjo enačbo za primer, ko je $b = 1$ in $0 < a < 1$.

$$x_n - 2ax_{n-1} + ax_{n-2} = K$$

Določimo najprej partikularno rešitev s predpostavko, da je konstanta.

$$X_n = A$$
$$A - 2aA + aA = K$$

in odtod

$$A = \frac{K}{1 - a}$$

Nadalje poiščimo splošno rešitev homogene enačbe

$$x_n - 2ax_{n-1} + ax_{n-2} = 0$$
$$k^2 - 2ak + a = 0$$
$$k_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a} = a \pm i\sqrt{a - a^2} = \sqrt{a}\, e^{\pm i\varphi},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{(1/a) - 1}$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je tedaj

$$x_n = \frac{K}{1 - a} + \sqrt{a^n}\,(C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi)$$

Ker je $0 < a < 1$, je očitno $\lim_{n\to\infty} x_n = K/(1 - a)$, nacionalni dohodek x_n pa oscilira okrog limitne vrednosti.

Preglej še, pri katerih vrednostih a in b nacionalni dohodek eksponentno narašča, monotono konvergira proti stalni vrednosti oziroma oscilira okrog te vrednosti. Reši enačbo tudi za primer, ko G_n ni konstanta, ampak eksponentna funkcija $G_n = G_0 q^n$, $q > 1$ oziroma, če je $G_n = cx_{n-1}$, torej proporcionalen nacionalnemu dohodku v preteklem letu.

V modelu za gibanje nacionalnega dohodka smo predpostavili le zvezo med dohodki v treh zaporednih letih, analitična rešitev dobljene diferenčne enačbe pa nam da vpogled na globalno vedenje procesa.

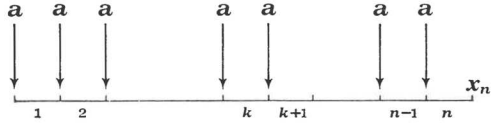
Obrestno obrestni račun. Z diferenčno enačbo je mogoče obravnavati tudi obrestno obrestni račun. Znano je, da se glavnica vsako obrestovalno dobo množi s stalnim faktorjem $q = 1 + p/100$, pri čemer je p obrestovalna mera.

Posebno pri obročnih vlaganjih in dvigih (rentah) si lahko pomagamo tako, da nastavimo diferenčno enačbo, to je, ugotovimo zvezo med glavnicama v dveh zaporednih obrestovalnih obdobjih, ter jo nato pri znanih začetnih pogojih rešimo. Za ilustracijo se lotimo tele naloge.

Vsako leto vložimo enako vsoto a. Koliko se nabere po n obrestovalnih dobah?

Nalogo lahko rešimo na več načinov. Na »klasičen« način bi ravnali takole.

Najprej narišemo časovni diagram (gl. sl. 2).



Nato sklepamo takole: zadnja vloga se je obrestovala eno leto, predzadnja dve leti itd., zadnja n let. Torej je celotna vloga na koncu enaka

$$x_n = aq + aq^2 + \ldots + aq^n$$

Nato uporabimo formulo za vsoto n členov geometrijskega zaporedja in dobimo rezultat

$$x_n = aq\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ravnamo lahko tudi takole:

Označimo z x_k stanje glavnice na koncu k-te obrestovalne dobe. Na koncu $k + 1$ obrestovalne dobe je stanje naslednje

$$x_{k+1} = (a + x_k)q$$

Na začetku pa imamo $x_1 = aq$. Potrebno je bilo ugotoviti le zvezo med k-to in $k + 1$ obrestovalno dobo ter določiti začetni pogoj, to je stanje na koncu prve obrestovalne dobe. Sedaj rešimo tako dobljeno diferenčno enačbo.

$$x_{k+1} - qx_k = aq$$

Predpostavimo, da je partikularna rešitev nehomogene enačbe konstanta.

$$A - qA = aq$$

torej

$$A = \frac{aq}{1 - q}$$

Splošna rešitev homogene enačbe

$$x_{k+1} - qx_k = 0$$

je očitno $x_k = Cq^k$, pri čemer je C poljubna konstanta. Splošna rešitev nehomogene enačbe se potemtakem glasi

$$x_k = \frac{aq}{1 - q} + Cq^k$$

Konstanto C določimo iz začetnega pogoja $x_1 = aq$

$$aq = \frac{aq}{1 - q} + Cq$$

torej

$$C = \frac{aq}{1 - q}$$

Od tod dobimo končni rezultat

$$x_n = \frac{aq^{n+1}}{q - 1} - \frac{aq}{q - 1} = aq\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Marsikdo bo menil, da zadnja pot ne poenostavlja obrestno obrestnega računa. V prid te poti pa omenimo, da je nastavitev problema mnogo preprostejša in nam ni treba obremenjevati spomina s formulo za vsoto geometrijskega zaporedja.

S tem sestavkom smo skušali pokazati, da diferenčne enačbe niso kako povsem izolirano poglavje v elementarni matematiki. Nanje naletimo zelo pogosto, saj v večini praktičnih primerov najprej nastavimo diferenčno enačbo, potem pa podrobneje raziskujemo, kakšna so zaporedja, ki jih le-ta določa. Pri tem nam je znanje diferenčnega računa v koristno oporo.

LITERATURA

[1] F. Križanič. *Aritmetika, algeara in analiza za gimnazije IV del*

[2] W. E. Milne, *Numerical Calculus*, Princeton University Press, 1949

[3] H. Meschkowski, *Differenzgleichungen*, Göttingen, 1959

[4] A. O. Gelfond, *Differenzenrechnung*, Berlin, 1958

[5] F. Scheid, *Nimerical Analysis*, Schaum's Outline Series, 1968

DOMAČE VESTI

5. seminar iz matematike:

MESTO MATEMATIKE V EKONOMIJI

Ljubljana, 4. do 6. 2. 1974

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je ob sodelovanju Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko ljubljanske univerze, odseka za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo ter Zavoda za šolstvo SR Slovenije priredilo 5. seminar iz matematike v prostorih odseka za matematiko FNT v Ljubljani. Seminar sta sofinancirali Izobraževalna skupnost SR Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

Seminar z naslovom Mesto matematike v ekonomiji je bil namenjen srednješolskim učiteljem, da bi jih informiral o problematiki in vsebini uporabe matematičnih metod v ekonomiji. Znaten del absolventov srednjih šol se namreč odloča za študij na ekonomskih višjih in visokih šolah.

Seminar je imel strokovni in metodični del.

V prvem delu so predavali dr. Alojzij Vadnal o splošnih pogledih na uporabo matematike v ekonomiji in o linearnem programiranju, dr. Rajko Jamnik o matematični statistiki in o teoriji iger, dr. Viljem Rupnik o matematičnem modelu ekonomske integracije in kooperacije ter dr. France Križanič o dinamičnem programiranju.

V drugem delu, ki je bil novost pri naših seminarjih, so predavali Aleksander Cokan o izkušnjah pri poučevanju kombinatorike v gimnaziji, France Avsec o pouku verjetnostnega računa v srednji šoli in njegovem mestu v praksi ter Andrej Kmet o diferenčnih enačbah in njihovi uporabi.

Organiziran je bil tudi ogled Republiškega računskega centra in Elektronskega računskega centra Ljubljanske banke; tako so se udeleženci seznanili s problematiko in težavami, ki jih morata ta centra premagovati, zlasti zaradi premajhnega števila ustrezno šolanih delavcev.

Seminarja se je udeležilo 105 slušateljev, med njimi je bilo 61 iz gimnazij, 11 iz ekonomskih srednjih šol in centrov. Udeležba pri predavanjih je bila vse tri dni skoraj konstantna, kar je znak, da so predavatelji z zanimivo snovjo in načinom podajanja pritegnili poslušalce. To je pokazala tudi majhna anketa, izvedena ob koncu seminarja. Zato je nerazumljivo, da nekateri ravnatelji (celo iz Ljubljane) svojim učiteljem niso dovolili, da bi se udeležili seminarja.

Ker za srednješolske učitelje Zavod za šolstvo ne prireja posebnih seminarjev, se šteje udeležba na tem seminarju kot strokovno izpopolnjevanje.

Vsak udeleženec je ob prihodu prejel lično brošurico z izvlečki predavanj, ki bodo kasneje objavljena v Obzorniku za matematiko in fiziko.

Predavanja so bila dopoldne od 8.30 do 12.30, popoldne pa od 14.30 do 17.30. Nekateri udeleženci so izrazili željo, da bi bil opoldanski presledek daljši.

Za prihodnji seminar so bile predlagane naslednje možne teme: Programiranje, Diskretna analiza, Boolova algebra, Linearna algebra (namesto klasične geometrije) in metodično poglabljanje srednješolske snovi.

Dobra polovica udeležencev in predavatelji so se zbrali pred koncem seminarja na prijetnem družabnem večeru pri »Urški«.

Sekretar seminarja:
Dušan Modic

ZAKLJUČNI RAČUN DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE IN NJENIH KOMISIJ ZA LETO 1973

Zaradi obsežnega dela in nekaterih akcij, ki so potekale še v prvih tednih letošnjega leta, je bil pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije napravljen podrobni zaključni račun šele v začetku februarja. Objavljamo kratek finančni pregled glede na dejavnosti našega društva. Za tiskovno dejavnost moramo objaviti obračun po zakonu o tisku.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je imelo v letu 1973 naslednje dohodke in izdatke po posameznih dejavnostih:

	Dohodki	Izdatki	Saldo
Predavanja in tekmovanja	76.455,75	71.816,30	+ 4.639,45
Aktivi in delo za šolo	18.828,50	16.676,20	+ 2.152,30
Seminar iz fizike in matematike	36.036,40	20.928,20	+ 15.108,20[1]
Bibliografska sekcija	3.210,60	2.926,20	+ 284,40
Druge dejavnosti in proslava Plemljeve stoletnice	40.627,35	31.924,50	+ 8.702,85
Komisija za tisk	1.520.826,05	1.069.821,70	+ 451.004,35
Skupaj DMFA SRS	1.695.984,65	1.214.093,10	+ 481.891,55

Za uspešno delo našega društva in komisije za tisk imajo velike zasluge skladi in ustanove, ki so nam namenili večje ali manjše subvencije. V letu 1973 so nam odobrili naslednje:

Raziskovalna skupnost Slovenije	216.000.— din
Kulturna skupnost Slovenije	40.000.— din
Izobraževalna skupnost Slovenije	127.378.— din
Temeljne izobraževalne skupnosti	55.500.— din
Izvršni svet Slovenije	75.000.— din
Tehniške fakultete v Ljubljani	30.000.— din
Slovenska akademija znanosti in umetnosti	10.000.— din
Univerza v Ljubljani	5.000.— din
Inštitut Jožef Stefan	1.000.— din
Skupaj	559.878.— din

Dejavnost Komisije za tisk pri DMFA SRS je bila tako obsežna, da zasluži podroben pregled. Na dan obračuna 1. 2. 1974 je bilo stanje na posameznih partijah, ki se vodijo strogo namensko, naslednje:

	Dohodki	Izdatki	Saldo
Obzornik mat. fiz. 6 številk	123.679,20	112.560,85	+ 11.118,35
Presek 2 številki	292.907,60	191.339,20	+ 101.568,40[2]
Matematika-Fizika	325.323,35	183.122,20	+ 142.181,10[3]
Sigma	162.500,00	142.149,40	+ 12.070,60
Zbirka nalog za 4. raz. gim.	34.276,00	34.276,00	—
Skripta IMFM	93.761,45	34.386,45	+ 59.375,00[4]
Mednarodni simpozij na Bledu	68.000,00	68.000,00	—
Brošura o prof. Plemlju	29.605,00	39.355,00	— 9.750,00
Društveni bilten		3.444,95	— 3.444,95
Prodaja knjig, revij in skript	316.845,00	203.764,50	+ 113.080,55[5]
10% režija	59.928,40	49.143,15	+ 10.785,25
Skupaj	1.540.826,05	1.069.821,70	+ 471.004,35

[1]) Iz tega je treba plačati še stroške seminarja Mesto matematike v ekonomiji iz februarja letos.

[2]) Iz tega je treba plačati račune za tretjo številko Preseka.

[3]) Ta sredstva bodo potrebna za subvencioniranje petih novih knjig v zbirki univerzitetnih učbenikov in monografij Matematika-Fizika.

[4]) Namensko za skripta oddelka za matematiko Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani (Postdiplomski seminar iz matematike, Publications of the Department of Mathematics, Zbirka izbranih poglavij iz matematike, magistrska dela in dr.).

[5]) Ta sredstva bodo služila za nabavo novih knjig pri založbah.

S prvim majem 1973 smo nastavili v pisarni Komisije za tisk DMFA SRS tov. Vinka Pavliča, ki v polovičnem delovnem času prodaja in razpošilja naročene knjige in ureja kartoteko naročnikov Obzornika za matematiko in fiziko ter lista Presek. V tem obdobju je bilo prodanih dijakom, študentom in članom društva s popustom naslednje

	število knjig	v vrednosti
Sigma	8.630	144.797.— din
Matematika-Fizika	443	21.552.— din
skripta inštituta	67	670.— din
skripta Univerze v Ljubljani	726	21.384.— din
raznih knjig in skript	4.317	50.460.— din
razglednic	4.329	4.329.— din
Skupaj	18.521	243.192.— din

Društveni reviji Obzornik za matematiko in fiziko ter Presek pa sta imeli naslednje dohodke in izdatke:

	Obzornik mat. fiz.	Presek
Saldo iz leta 1972	7.637,85	—
Naročnine	32.740,35	146.007,60
Izobraževalna skupnost Slovenije	17.378,00	40.000,00
Kulturna skupnost Slovenije	—	40.000,00
Raziskovalna skupnost Slovenije	45.000,00	—
Temeljne izobraževalne skupnosti	—	55.500.00
Inštitut Jožef Stefan	1.000,00	—
DMFA SRS	20.371,00	10.000,00
Oglasi	1.000,00	1.400,00
Drugi lastni dohodki	7.552,00	—
Skupaj dohodki	123.679,20	292.907,60
Tiskarski stroški	63.496,00	131.080,00
Avtorski honorarji	37.630,50	29.964,65
Drugi stroški	1.201,55	12.064,55
10% režija	10.232,80	18.230,00
Skupaj izdatki	112.560,85	191.339,20
Saldo	+ 11.118,35	+ 101.568,40

Vrednost našega imetja pa je naslednja:

		Skupaj
Gotovina		457.045,60
na žiro računu	451.004,35	
v ročni blagajni	6.041,25	
Vrednost neplačanih računov		192,154,20
Obzornik mat. fiz.	25.175,00	
Presek	109.759,00	
Sigma in druge knjige	57.220,20	
Vrednost knjig v zalogi		172.738,00
veliko skladišče	81.810,00	
priročno skladišče	90.928,00	
Skupaj		821.937,80

Ciril Velkovrh

SEZNAM ČLANOV NAŠEGA DRUŠTVA, KI SO PREJELI NAGRADE RAZISKOVALNE SKUPNOSTI SLOVENIJE

Raziskovalna skupnost Slovenije — Sklad Borisa Kidriča podeljuje vsako leto od leta 1957 za posebno pomembne dosežke na področju znanstveno-raziskovalne dejavnosti: Kidričeve nagrade, nagrade Sklada Borisa Kidriča in nagrade za iznajdbe in tehniške izboljšave oz. izpopolnitve. Med dosedanjimi nagrajenci je tudi več članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, ki so dobili nagrade za svoja dela na področju matematike in fizike. Objavljamo seznam dosedanjih nagrajencev z njihovimi sodelavci in naslove del, za katere so bili nagrajeni.

1960

Kidričeva nagrada

ing. Janez Dular, ing. Gabrijel Kernel, ing. Mitja Kregar, dr. ing. Miodrag Mihajlović, ing. Gvido Pregl, ing. Mitja Rosina in dr. Črtomir Zupančič za kolektivno delo Jedrska absorpcija žarkov gama v aluminiju, siliciju, fosforu, žveplu in kalciju.

1961

Kidričeva nagrada

dr. Robert Blinc in sodelavci: dr. Snegulka Detoni, Igor Levstek, ing. Milan Pinter, ing. Anton Prelesnik za raziskave feroelektrikov z vodikovimi vezmi.

1963

Kidričeva nagrada

prof. dr. Ivan Kuščer za razpravi Vzroki recipročnosti za termične nevtrone in Termična difuzija nevtronov.

1964

Kidričeva nagrada

dr. Peter Gosar za deli O gibljivosti iona H_3O^+ v kristalih ledu in o gibljivosti intersticialnih ionov.

1966

Kidričeva nagrada

dr. Marjan Ribarič za delo Zveza med refleksijskimi lastnostmi telesa in refleksijskimi lastnostmi njegovih delov.

1967

Kidričeva nagrada

dr. Lovro Pičman za delo Transportni koeficienti.

1969

Nagrada Sklada Borisa Kidriča

doc. dr. ing. Sergej Pahor za deli Albedo in Milnejev problem za termalne nevtrone in Večkratno sipanje in problem inverznega albeda.

Nagrada za iznajdbe in tehnične izboljšave

dr. ing. Jože Pahor, ing. Jože Šnajder in ing. Marjan Hribar za tehnično izboljšavo Analogni računalnik za vrednotenje rezultatov testa ‚Rose Bengal'.

1970

Kidričevi nagradi

prof. dr. Ivan Vidav za delo Spektri motenih polgrup z uporabo v transportni teoriji;
prof. dr. Darko in sodelavci: dr. Gabrijel Kernel, dr. Niko Bezić, ing. Dušan Brajnik, ing. Anton Brinšek, dr. Uroš Miklavžič in ing. Jože Šnajder za dela Celotni fotonuklearni

presek za ^{12}C, ^{14}N, ^{16}O in ^{19}F v območju veleresonanc, Meritev fotoabsorpcijskega preseka v energijskem območju 10—30 MeV z magnetnim comptonskim spektrometrom in Tabele totalnih absorpcijskih presekov za fotone energije med 10 in 13 MeV v Be, C, N_4H_2 H_2O, F, Si in Ca.

Nagrada za iznajdbe in tehnične izboljšave

ing. Erik Vrenko in ing. Alojz Kline za izum Koherentna svetilka za linearno polarizirano svetlobo.

1971

Kidričeva nagrada

doc. dr. Franc Cvelbar, dr. Alenka Hudoklin, prof. dr. Miodrag Mihajlović, dr. Mitja Najžer, ing. Milan Potokar in ing. Vekoslav Ramšak za dela Primerjava med aktivacijskimi in integralnimi preseki za radiacijsko zajetje nevtronov 14 MeV, Deekscitacija skozi nevezana stanja pri radiacijskem zajetju nevtronov energije 14 MeV za Si in Ca.

Nagrada Sklada Borisa Kidriča

prof. dr. Janez Strnad za članke: Pripomba na Trouton-Nobleov eksperiment, Težave z balističnim nihalom, Posplošitev Lorentzove transformacije, O problemu vzvoda v specialni relativnosti, Nadaljnji dokazi proti obstoju delcev hitrejših od svetlobe, Problem ure v specialni relativnostni teoriji, O meritvi časa z izvedljivo atomsko uro in Nadaljnji komentarji na meritev časa z izvedljivo atomsko uro.

1972

Nagrade Sklada Borisa Kidriča

prof. dr. Savo Poberaj in sodelavec doc. dr. Igor Grabec, za delo na področju fizike plazme s posebnim ozirom na deli: Teorija sklopitve val-modus za ionizacijske valove in Nelinearno sodelovanje ionizacijskih in zvočnih valov;
dr. Milan Schara in sodelavca ing. Marjeta Šentjurc, mgr. Pavel Cevc za delo na področju elektronske paramagnetne resonance zajete v devetih publikacijah.

Nagrada za iznajdbe in tehnične izboljšave

Vital Eržen, ing. Igor Levstek, Jernej Porok in dr. Ivan Župančič za izum Pulzni oljni analizator;
ing. Zdenko Milavec in ing. Franc Celar za izum Detektor maksimalnih vrednosti napetosti in analogni spomin.

1973

Kidričeva nagrada

doc. dr. Ivan Župančič s sodelavci: dr. Miha Mali, ing. Radko Osredkar, ing. Anton Prelesnik in ing. Janez Seliger za dela ^{14}N jedrska kvadrupolna resonančna spektroskopija nekaterih aminokislin in nukleinskih baz z dvojno resonanco v laboratorijskem sistemu; ^{14}N kvadrupolna sklopitev v paraelektričnem amonsulfatu; Meritve relaksacij spin-mreža z jedrsko dvojno resonanco v feroelektričnih sistemih ter dela s področja dvojne jedrske resonance, ki tvorijo s prej omenjenimi celoto.

Nagrada Sklada Borisa Kidriča

prof. dr. Anton Moljk in doc. dr. Jože Pahor ter sodelavca mgr. Marjan Hribar in mag. Alojz Kodre za dela Fluorescenčni pridelek lupine K za arzen, Fluorescenčni pridelek lupine K za argon, klor in žveplo, Fluorescenčni pridelek lupine K elementov z nizkim vrstnim številom, ki so bili določeni v plinskih vzorcih in Večžični števci;

dr. Milan Čopič za delo Metoda integralske transformacije za povprečne nevtronske transportne lastnosti mreže;
prof. dr. Alojzij Vadnal za delo Linearno programiranje.

Nagrade za iznajdbe in izpopolnitve

ing. Bogdan Bastar, ing. Zdenko Milavec, dr. Jože Pahor in dr. Boris Navinšek za tehnično izboljšavo Tiristorski regulator scenske razsvetljave.

1974

Kidričeva nagrada

prof. dr. Sergej Pahor in doc. dr. Anton Suhadolc za dela s področja transportne teorije in konkretno za razpravo O popolnosti lastnih funkcij večskupinske transportne teorije za polprostor.

Delo dr. Sergeja Pahorja, izrednega profesorja za fiziko na FNT, in dr. Antona Suhadolca, docenta za matematiko na FNT, je le člen v daljši verigi publikacij z istega področja, t. j. transportne teorije, ki stoji morda nekoliko ob robu fizike, je pa močno zanimiva za uporabno matematiko. Transportna teorija, to je veda o Boltzmannovi enačbi in njej podobnih enačbah, je v zadnjem času postala imenitno torišče za uporabo novejših matematičnih teorij, predvsem funkcionalne analize in teorije krepko zveznih polgrup. Namesto teorije kompaktnih operatorjev je pri študiju Boltzmannove enačbe prvič uporabljena teorija šibko kompaktnih in striktno singularnih operatorjev. Pokazano je, da veljajo izreki Tamarkin-Šmuljanovega tipa tudi za striktno singularne operatorje. Ti izreki so pripomoček za spektralne raziskave Boltzmannovega operatorja, njihova posplošitev pa je tudi lep teorijski prispevek k funkcionalni analizi. Fizikalne razprave opusa pa iščejo rešitev transportnih problemov za planparalelno geometrijo in razvijajo ustrezne metode. Pahor in Suhadolc sta torej na delu transportne teorije obdelala vrsto problemov, jih do konca razrešila in s tem dosegla dokaj zaokroženo matematično podobo.

prof. dr. Miodrag V. Mihajlović in prof. dr. Mitja Rosina ter sodelavca mag. Norma Mankoč-Borštnik in dr. Desan Justin za dela s področja teoretične jedrske fizike, zajeta v publikacijah Nov pristop h kolektivnim stanjem preko stanj delc — vrzel; Coulombov problem za sipalna stanja z metodo generatorske koordinate; Metoda generatorske koordinate za vezana stanja jeder in za reakcije.

Avtorji so razvili metodo generatorske koordinate za opis jedrskih stanj in jo uporabili na večjem številu primerov. Zasluga skupine je, da se je močno povečalo zanimanje za to metodo. Dela ljubljanske skupine so pomemben dosežek v teoretični jedrski fiziki. Z novimi prijemi se je skupina lotila teoretične metode in dosegla, da jo je začel uporabljati širok krog fizikov. Od te metode si je mogoče v prihodnosti obetati še več uspehov. O vrednosti samega dela pa priča tudi mednarodni ugled, ki ga prof. M. V. Mihailović, prof. M. Rosina in sodelavci nedvomno uživajo.

Nagradi Sklada Borisa Kidriča

dr. Mitja Kregar, dr. Peter Kump, Matej Pavšič, dipl. ing. Vekoslav Ramšak, dipl. ing. Peter Rupnik, dipl. ing. dr. Marko Vakselj za dela Analiza atenuiranega Dopplerjevega premika upoštevajoč proces diskretnega ustavljanja, Nov pristop k analizi merjenja atenuiranega Dopplerjevega premika in Analiza meritev atenuacije Dopplerjevega premika pri uporabi nizkostopenjskega procesa ustavljanja.

Rezultat analize, s katero so se ukvarjali avtorji, je podatek o življenjski dobi ustreznega stanja jedra, ki je bistvenega pomena za vrednotenje teorij jedrskih modelov. Dosedanje metode za računanje življenjskih dob jedrskih stanj so slonela na približku zveznega upočasnjevanja vzbujenega jedra v tarčni snovi. Avtorji so, upoštevajoč diskretno upočasnjevanje ionov, izračunali obliko črte in Dopplerjev premik njenega težišča in se njihovi rezultati bistveno razlikujejo od dosedanjih. Uspelo jim je pojasniti več let trajajoča nesoglasja med rezultati posameznih meritev kratkih življenjskih stanj atomskih jeder.

Ciril Velkovrh

PREJELI SMO V OCENO

I. Kovács and L. Zsoldos, Dislocations and Plastic Deformation, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1973, 342 str.

Delo je popravljena in razširjena inačica madžarskega originala iz l. 1965. Namen knjige je podati kratek opis teorije dislokacij in njihovega vpliva na mehanske lastnosti kristalov. Vsebinsko je razdeljena na dva dela. V prvih 6. poglavjih se seznanimo z najpomembnejšimi koncepti teorije dislokacij. Drugi del od 7. do 9. poglavja pa obravnava plastičnost kristalov, predvsem kovin, s stališča dislokacijske teorije.

Po uvodnem poglavju, ki vpelje pojem dislokacije, je v 2. poglavju podana teorija dislokacij v elastičnem kontinuumu. Dokaj izčrpno je obravnavana naslednja tematika: energija dislokacij, sile na dislokacije, napetostno polje okoli ravnih klinastih in vijačnih dislokacij, interakcija med ravnimi dislokacijami, dislokacijske zanke, vpliv dislokacij na toplotne lastnosti kristalov, pojem napetosti dislokacijskih črt in splošna kontinuumska teorija mrežnih defektov. Naslednje poglavje (4) obravnava točkaste defekte in njihovo interakcijo z dislokacijami. Do tu so bile dislokacije in tudi točkasti defekti obravnavani v kontinuumski aproksimaciji. Resnična diskretna struktura kristalov je upoštevana v poglavjih 4—6. Predstavljeni so razni modeli dislokacij, predvsem Frenklov in Peierlsov, ki upoštevajo atomsko strukturo. Seznanimo se tudi z izviri in pomnoževanjem dislokacij ter modeli in lastnostmi delnih dislokacij.

Drugi del knjige obravnava vpliv dislokacij na plastične lastnosti kristalov. Tako je 7. poglavje namenjeno razlagi tečenja kristalov pri velikih obremenitvah. Tu se seznanimo z vrsto novejših teorij. Obširneje je opisana vloga točkastih defektov pri raznih mehanizmih gibanja dislokacij. Poglavji 8 in 9 pa posredujeta mikroskopsko sliko vpliva kovanja in toplotne obdelave na elastične lastnosti snovi. V tem delu knjige avtor nakaže vrsto še nerešenih problemov.

Knjigo zaključujejo 3 priloge, ki so namenjene povzetku osnovnih pojmov in oznak v geometriji kristalov, nadalje osnovam teorije elastičnosti in računu napetostnega polja ravne klinaste in vijačne dislokacije.

Knjiga je pisana lahko razumljivo, zahteva le malo matematičnih osnov in je zelo prikladen učbenik ne samo za fizike ampak tudi za metalurge. *Peter Gosar*

P. Erdös - J. Spencer, Probability Methods in Combinatorics. Akadémiai Kiadó, Budapest 1974. Str. 106.

Znano je, da je kombinatorika neogiben pripomoček v verjetnostnem računu. Manj znano, a vendar res pa je, da je mogoče tudi v kombinatoriki uporabiti verjetnostne metode. Če hočemo npr. dokazati, da v končni množici X obstajajo elementi z lastnostjo A, lahko ravnamo ali konstruktivno, se pravi tako, da tak element pokažemo, ali pa se omejimo samo na eksistenčni dokaz; ker gre za končno množico, bo tudi s tem vsak zadovoljen. Eksistenco takega elementa pa je mogoče dokazati tako, da pokažemo, da obstaja pri slepem izbiranju elementov iz množice X pozitivna verjetnost, da bo izbran element z lastnostjo A. V tem je bistvo verjetnostne dokazovalne metode v kombinatoriki. Če jo primerno prilagodimo, je mogoče z njo včasih dobiti tudi kvantitativne ocene, ne samo eksistenčne izjave.

Avtorja na nekaj značilnih primerih (Ramseyev in Van der Waerdenov izrek, Zarankiewiczov problem, turnirji itn.) prikazujeta moč in nemoč te verjetnostne metode. Za branje ni potrebno več kot osnovno znanje kombinatorike. Poleg osnovnega teksta je v knjigi precej nalog in nerešenih problemov, med temi tudi nekaj nagradnih. Zanimivo delo; koristilo bo vsem, ki se ukvarjajo s kombinatoriko in posebej s teorijo grafov.

Rajko Jamnik

Müller A., Quantum Mechanics: A Physical World Picture. Akadémiai Kiadó, Budapespest 1974. Str. 117., 8°.

Knjiga *Kvantna mehanika: fizikalna slika sveta* sodi v vrsto knjig, ki se lotevajo osnov kvantne mehanike s širšega gledišča. Pisanje takih knjig zagotovo ni hvaležno opravilo, saj mora biti pisec podkovan v vseh podrobnostih fizike in mora biti hkrati doma v filozofiji. V kratkem zapisu ne gre soditi o tem, ali je A. Müllerju uspelo najti dokončne odgovore na nekaj vprašanj o osnovah kvantne mehanike, o katerih fiziki še nimajo enotnega mnenja.

Pisec je podrobneje analiziral vlogo naključja pri mikroskopskem opisu in povezave med raznimi vrstami interakcije. Na osnovi tega si je prizadeval, da bi pojasnil statistično naravo mikroskopskih zakonov. Po njegovem mnenju nedoločenost mikroskopskega stanja ne izvira od merjenja, ampak je posledica »odprtosti« mikroskopskih sistemov. S tem označuje dejstvo, da so mikroskopski sistemi nekakšne individualne tvorbe.

O obravnavanih vprašanjih nas poučijo nekoliko skrajšani naslovi poglavij: *Osnovni dosežki mikrofizikalnega spoznanja, klasična fizika postane nerabna; de Brogliejeva interpretacija; kopenhaška interpretacija; tako imenovana kavzalna interpretacija; Fokova interpretacija; bistvo naključne interakcije; povezava zakonov z opisom raznih interakcij; podobnost verjetnostnih opisov v klasični in kvantni mehaniki; kvalitativno različna objektivna vloga naključja pri klasičnih in kvantnih stanjih; vrste interakcij v mikrofiziki; povezava možnega in uresničenega v klasični fiziki in kvantni mehaniki; količina in matematični formalizem v fizikalnem spoznanju; merilna naprava in merilna interakcija; ontološka in epistemološka vloga merilne naprave in merilne interakcije v mikrofiziki; nekaj epistemoloških sklepov na osnovi mikrofizikalne vloge merilne naprave in merilne interakcije; stabilnost vrste in števila delcev; načelo korespondence; problem popolnega opisa, načelo komplementarnosti; splošne lastnosti mikrofizikalnega spoznanja; kavzalnost fizikalnih pojavov, determinizem.*

Glede na dejstvo, da se je v zadnjem času oživila razprava o osnovah kvantne mehanike, je knjiga zanimiva za poučenega bralca kot izraz enega izmed številnih pogledov. Ta pogled podaja avtor v skladni obliki. Bralca, ki še ne pozna problematike, pa bo knjiga uvedla v eno izmed mejnih območij fizike.

Janez Strnad

K. Sarkadi - I. Vincze, Mathematical Methods of Statistical Quality Control. Akadémiai Kiadó, Budapest 1974. Str. 415.

Pri serijski izdelavi je navadno negospodarno kontrolirati kvaliteto vsakega izdelka, kadar pa se izdelek pri kontroli uniči (npr. pri preskušanju trdnosti odlivkov, življenjske dobe žarnic, sestave zdravil ipd.), je popolna kontrola celo nemogoča. Zato se kontrolira serija navadno tako, da se iz nje izbere manjše število izdelkov (slučajen vzorec), preskusi kvaliteta le-teh in iz ugotovitev na vzorcu sklepa, kakšna je kvaliteta cele serije. Seveda je sklepanje lahko napačno. Na srečo nam matematična statistika omogoča vsaj oceniti verjetnost, da je sklepanje pravilno (torej oceniti zanesljivost kontrole), pomaga pa nam tudi pri iskanju kontrolnih metod s predpisano zanesljivostjo. Zanesljivejše metode so navadno dražje, seveda pa ima tudi nezanesljivo ocenjevanje neugodne gospodarske posledice. Zato je treba rešiti še vprašanje, katera izmed mogočih kontrolnih metod je gospodarsko vzeto najugodnejša.

S tem krogom vprašanj se ukvarja obravnavana knjiga. Po kratkem uvodnem poglavju prinaša na približno 200 straneh teoretične osnove za statistično kontrolo kvalitete: potrebne navedke iz verjetnostnega računa in zelo dober oris poglavitnih statističnih opravkov (ocenjevanje parametrov, preskušanje hipotez, korelacijska in regresijska analiza), elemente teorije odločitvenih funkcij in nekaj podatkov o slučajnih procesih. Tretje in hkrati zadnje poglavje je namenjeno obravnavi metod pri statistični kontroli kvalitete. Najprej opisuje metode

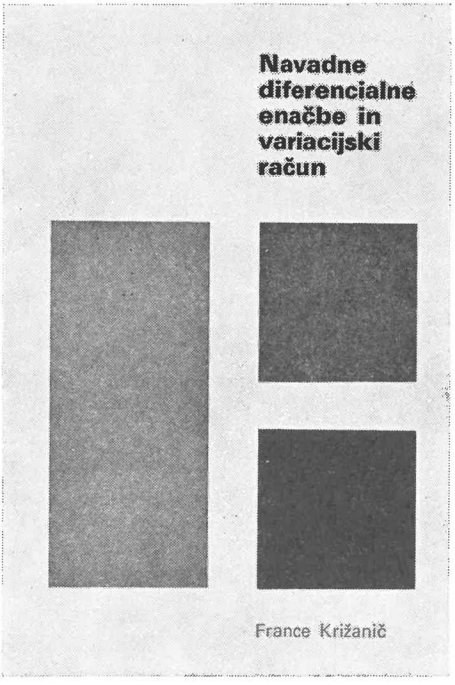
za kontrolo produkcijskega procesa; te omogočajo predvidevati, ali bo končni izdelek dober ali ne. Nato razpravlja o tako imenovani sprejemni kontroli, se pravi o statistični kontroli končnih izdelkov ali polizdelkov. Konec poglavja pa je namenjen teoriji zanesljivosti.

Delo je zanesljiv, dovolj popoln, imenitno napisan in zato lahko dostopen uvod v obravnavano področje. Koristno bo ne le tistim, ki se zanimajo za statistično kontrolo kvalitete, temveč zaradi drugega poglavja tudi vsem, ki bi se radi hitro in dovolj natanko informirali o matematični statistiki.

Rajko Jamnik

NOVE KNJIGE

France Križanič, Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1974, str. 544. Cena: pl. 190.— din, br. 150.— din.



Knjiga obsega devet poglavij: I. Elementarne metode integriranja, II. Uvod v teorijo, III. Linearne diferencialne enačbe, IV. Diferencialne enačbe v kompleksnem, V. Dinamični sistemi drugega reda, VI. Teorija stabilnosti, VII. Variacijski račun, VIII. Optimalno vodenje, IX. Parcialne diferencialne enačbe prvega reda.

Čeprav se že iz naslovov poglavij vidi, kako številna so področja, ki jih knjiga obravnava, pa se pravo bogastvo odkrije bralcu šele pri podrobnejšem pregledu: Obdelani so oscilacijski izreki, hipergeometrijska, Legendreova in Besselova enačba z ustreznimi funkcijami. Variacijski račun obsega naloge z eno in več funkcijami, naloge z gibljivimi krajišči, izoperimetrične naloge in zadostne pogoje za nastop ekstrema z Weierstrassovo teorijo. Parcialne diferencialne enačbe so zastopane samo z enačbami prvega reda, ki so v zvezi z navadnimi diferencialnimi enačbami. Deveto poglavje govori o kvazilinearnih enačbah, o Lagrange-Charpitovi metodi za reševanje splošnih enačb prvega reda, o kanonskem sistemu in Cauchyjevi nalogi. Povsod v knjigi so številni primeri iz uporabe diferencialnih enačb v geometriji, fiziki, kemiji itd.

Teorija diferencialnih enačb je klasično področje matematične analize. Avtor ga obravnava s sodobnimi metodami funkcionalne analize. Posebno pomembno vlogo igra funkcionalna analiza pri variacijskem računu.

Kakor druga dela je avtor tudi to napisal jasno in jedrnato, v čudovito lepem slogu. Z užitkom ga bo bral tudi tak, ki snov že pozna.

Ivan Vidav

KOMISIJA ZA TISK

pri DRUŠTVU MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE je v prvih štirih mesecih letošnjega leta izdala že naslednje publikacije:

MATEMATIKA — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

5. Križanič France, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, 544 str. Cena: pl. 150.— din, br. 120.— din.

6. Vidav Ivan, *Višja matematika I*, 4. nespremenjena izdaja, DZS, 480 str. Cena: pl. 100.— din, br. 80.— din.

SIGMA — knjižna zbirka

3b. Prijatelj Niko, *Uvod v matematično logiko*, 2. ponatis, DZS, 152 str. Cena 28.— din.

13a. Jamnik Rajko, *Teorija iger*, Ponatis, DZS, 256 str. Cena 45.— din.

23a. Batagelj V. in Pisanski T., *Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj*, I. del, 1950—1966. Ponatis, DZS, 180 str. Cena 34.— din.

20č. Uršič Stanko, *Štirimestni logaritmi in druge tabele*, 4. nespremenjena izdaja, 148 str. Cena 20.— din.

8a. Bohte Zvonimir, *Numerično reševanje enačb*, Ponatis, DZS, 156 str. Cena 35.— din.

10a. Jamnik Rajko, *Elementi teorije informacije*, Ponatis, DZS, 175 str. Cena 35.— din.

15a. Prijatelj Niko, *Matematične strukture* II, Ponatis, DZS, 319 str. Cena 62.— din.

16a. Strnad Janez, *Kvantna fizika*, Ponatis, DZS, 254 str. Cena 53.— din.

Zbirka izbranih poglavij iz matematike — skripta.

2. Bohte Zvonimir, *Numerična analiza*, Natis in ponatis, 200 str. Cena 28.— din.

3. Zakrajšek Egon, *FORTRAN*, 256 str., Cena 40.— din.

Publications of the Department of Mathematics. No. 6. 1971—1973. 88 str. Cena 10.— din. No. 7. 1972—1974, 104 str. Cena 10.— din.

Vadnal Alojzij, *Matematična terminologija*, DZS, 80 str. Cena: pl. 40.— din, br. 32.—din.

Člani društva, študenti in dijaki lahko dobe omenjene knjige pri Komisiji za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19. Za ostale interesente pa so knjige na razpolago v knjigarnah po nekoliko **višjih** maloprodajnih cenah.

Sekretar
Komisije za tisk DMFA SRS
Ciril Velkovrh

Obzornik mat. fiz., Ljubljana, 21 (1974) št. 3/4, str. 65—128.

Glavni urednik, Gabrijel Tomšič; **odgovorni urednik,** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; France Kvaternik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič.

Naročnina: za posameznike 60.— din (za člane društva je že vračunana članarina 10.— din), za dijake in študente 25.— din, za ustanove in podjetja 100.— din, za tujino 7 $ = 119.— din, posamezna številka 10.— din, dvojna številka 20.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS,** 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 61-564/53, žiro račun 50101-678-48363.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.