IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1974
Letnik 21
1—2

21. LETNIK — ŠTEVILKA 1—2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, FEBRUAR—APRIL 1974

VSEBINA

Članki Stran

Slavnostni nagovor na proslavi stoletnice rojstva prof. dr. Josipa Plemlja (Mitja Ribičič) 1
O matematiki na Slovenskem (France Križanič) 5
Značaj in mesto sodobne matematike v moderni znanstveni misli (Vladimir Devide) 9
Fredholmove integralske enačbe prve vrste (Edi Kramar in Anton Suhadolc) 17
Nekaj o algebrski topologiji (Peter Petek) 26

Novice

Dvom o odkritju gravitacijskih valov (Janez Strnad) 29
Trenje (Dušan Repovš) 37

Domače vesti

25. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije na Bledu 7. in 8. decembra 1973 (Bogomila Kolenko in Dušan Modic) 38
Ob petindvajsetletnici Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije (Niko Prijatelj) 42
Strokovno izpopolnjevanje (Dušan Modic) 45
Izdajateljska dejavnost društva (Gabrijel Tomšič) 47
Dvajset letnikov Obzornika za matematiko in fiziko (Janez Strnad) 48
Zahvala dosedanjemu odgovornemu uredniku (Janez Strnad in Ciril Velkovrh) 49
Poročilo komisije za popularizacijo (Tomaž Skulj) 50
S seje upravnega odbora Društva matematikov, fizikov in astronomov 19. 12. 1973, 9. 1. 1974 in 26. 1. 1974 (Dušan Modic) 52
Aktiv v letu 1972 (Dušan Modic) 52
Poročilo o delu oddelka za matematiko IMFM v šolskem letu 1972/73 (Zvonimir Bohte) ... 54
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko (Anton Suhadolc in dr.) 56

Nove knjige 59

Nekaj navodil avtorjem za pripravo rokopisa (Ciril Velkovrh) 62
Seznam publikacij Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije in njene Komisije za tisk v letih 1969—1973 (Ciril Velkovrh) III

CONTENTS

Articles Page

The festal address at the celebration of Professor Josip Plemelj's centenary of birth (Mitja Ribičič) 1
On mathematics in Slovenia (France Križanič) 5
Significance and place of contemporary mathematics in modern scientific thought (Vladimir Devide) 9
On Fredholm integral equations of the first kind (Edi Kramar and Anton Suhadolc) 17
Something on algebraic topology (Peter Petek) 26
News 29
Home News 38
New Books 59

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 1/2

SLAVNOSTNI NAGOVOR

na proslavi stoletnice rojstva prof. dr. Josipa Plemlja

MITJA RIBIČIČ

Tovarišice in tovariši, spoštovani gostje!

Zbrali smo se danes na Bledu, da bi počastili pomemben kulturni jubilej. Pred sto leti se je v preprosti delavsko-kmečki hiši rodil ugledni slovenski in jugoslovanski znanstvenik, raziskovalec in ustvarjalec, začetnik slovenske matematične šole ter vzgojitelj več generacij matematikov, veliki rodoljub in humanist — profesor Josip Plemelj, prvi rektor prve slovenske univerze.

O njegovem življenju in delu ter pomenu njegovega prispevka za znanost, za univerzo, za razvoj matematike na Slovenskem, v Jugoslaviji in svetu, o Josipu Plemlju kot Blejcu bodo spregovorili govorniki za menoj. Moji pozdravni besedi v imenu Socialistične zveze delovnega ljudstva, ki je skupaj s Slovensko akademijo znanosti in umetnosti, univerzo in Društvom matematikov pokrovitelj in organizator proslave, gre predvsem za to, da poudari družbenopolitični pomen tega jubileja.

Današnje slavje ima namen, da razgrne pred vso slovensko javnostjo Plemljevo življenjsko pot, to pa je bila težka, samorastniška pot, značilna za mlada leta skorajda vseh slovenskih sinov kmečkega in delavskega rodu ob koncu prejšnjega stoletja. Ob Plemljevi stoletnici bi radi razčlenili profesorjeve zamisli in delo v razdobju njegovega največjega ustvarjalnega poleta na dunajski univerzi in v Černovicah, poglobiti bi se hoteli v njegov dragoceni prispevek k izgradnji slovenske univerze po prvi svetovni vojni, ne da bi zmanjševali rezultate njegovega pedagoškega dela v osvobojeni domovini vse do njegove upokojitve in tudi po njej, ko je takorekoč do smrti razdajal celemu rodu slovenskih mladih matematikov, fizikov, inženirjev neizčrpno bogastvo iz svoje duhovne zakladnice.

Verjetno ni mogoče — ob vsej dobri volji in prizadevanju — ob taki priložnosti in na enem mestu v celoti pregledati Plemljev življenjski in znanstveni opus, vendar daje že to, kar je bilo zapisanega in rečenega v pripravah te proslave, dovolj gradiva za oceno pomena njegovega prispevka našemu narodu in vsej naši skupnosti. Nedvomno se bo današnji zbor uglednih znanstvenih in družbenih delavcev strinjal s tem, da je njegov prispevek za družbeni, gospodarski, znanstveni in kulturni napredek slovenskega naroda — in ne le zanj, tudi za Jugoslavijo in uveljavitev znanosti v svetu — izreden, rekli bi lahko — zgodovinski. In prepričan sem, da se njegov pomen in ugled tudi v bodoče ne bosta zmanjšala — če upoštevamo nesluten razvoj nove matematike v današnjem svetu tehnološke in znanstvene revolucije: prvič zato, ker je utemeljitelj klasične slovenske matematične šole, v kateri se bodo tudi poslej oblikovali novi rodovi slovenskih matematikov, fizikov in astronomov, in drugič zato, ker se razvijamo kot družba, v kateri vsakršno ustvarjalno delo in znanje predstavlja temeljno prvino, na kateri se gradi celovit družbeno politični in ustavni sistem samoupravnega socializma.

Izredne okoliščine, v kakršnih je živel, delal in ustvarjal Josip Plemelj, še posebej poudarjajo moralno vrednost njegovega ustvarjanja in žrtvovanja. Bil je sin malega naroda, kateremu zgodovina ni bila naklonjena. Samo zaradi svoje izredne nadarjenosti se je lahko prebil v vrh svetovne znanosti, pretolkel skozi birokratske čeri v tedanji avstrijsko-madžarski

ječi narodov, ko je znanstvena uveljavitev in profesorska služba postavljala pogoje, ki so zahtevali narodnostno poniževanje ter celo hlapčevstvo. Josip Plemelj je kljuboval vsem tem preizkušnjam. Ostal je pokonci mož, ki se je uveljavljal s svojim izrednim talentom, znanjem in pridnostjo, ob tem pa je ostal globoko zakoreninjen in zvest svojemu narodu, povezan s svojim Bledom, z Ljubljano, s slovenskimi ljudmi, zlasti v vrstah z najbolj ustvarjalnimi duhovi takratnih slovenskih intelektualcev. V slehernem obdobju njegovega življenja in dela bomo našli dokaze za to.

Sl. 1. Na slavnosti je zapel več pesmi akademski pevski zbor Toneta Tomšiča.

Vodilna življenjska filozofija mu je bila Platonova misel — ako hočeš ustvariti nekaj velikega, moraš v to vložiti vse svoje življenje — in Goethejeve besede, da je zgodovina znanosti velika fuga, v kateri prihajajo vse bolj do veljave glasovi ljudstva. Čeprav je bil jezik njegovega izražanja, ko je oblikoval integralne in diferencialne enačbe, njegovi okolici v veliki večini nerazumljiv, pa je celotni njegov lik, vse njegovo vedenje, delovanje v šoli in način osebnega življenja obdržal razumljivo preprostost rodu, iz katerega je izšel. Plebejski, delavsko-kmečki izvor je dal temeljno črto in smer njegovemu življenju, rekli bi lahko celo, da je bil vpliv teh korenin dostikrat močnejši od njegovih znanstvenih in družbenih ambicij. Kjerkoli je delal po svetu, ga je nekaj vleklo nazaj v domovino. Vedel je, da je takratna Ljubljana majhna, da ima poleg velikih duhov tudi vse lastnosti podeželske ozkosrčnosti, vedel je, da bo imel velike težave zaradi tega v svojem strokovnem razvoju, da bodo njegovi stiki s svetom ovirani in da bo v mnogočem strokovno osamljen. Kljub vsemu temu se je vrnil domov in začel z vso vnemo delati na ljubljanski univerzi, ustvarjati pomembno vzgojno središče za razvoj matematike in drugih eksaktnih znanosti, enega izmed temeljev za prihodno kulturno, znanstveno in družbeno rast vsega naroda. Kakor da bi hotel pred pol stoletja s svojim primerom in žrtvovanjem gorenjsko trmoglavo dokazati nekaj, kar nam

je danes več ali manj jasno in kar postaja nujnost v sodobnih razmerah, da namreč znanost ne more biti samo monopol in privilegij velikih, močnih, bogatih držav in narodov. Profesor Plemelj je pripadal krogu tistih pionirjev raziskovalne, znanstvene in pedagoške dejavnosti na Slovenskem, ki so se zavedali ogromnega pomena znanosti za gospodarski in kulturni napredek svojega naroda, za njegovo enakopravno uveljavljanje v svetu. Za te znanstvenike je bilo ustvarjalno in pedagoško delo v narodu, sredi ljudstva, samo del bitke tega naroda za njegovo polno suverenost, za njegovo polno družbeno-politično in državno samostojnost.

Sl. 2. Udeleženci med slavnostnim govorom.

In to je morda tista plemenita značilnost Plemljevega zgleda, ki bi jo na prvem mestu hoteli poudarjati v današnjem času, ko naši mnogi nadarjeni in ambiciozni znanstveniki stojijo na križišču: ena pot jih vodi v težko, dostikrat negotovo vsakdanjo tlako za znanstveni in gospodarski napredek ljudstva, socialistične skupnosti, medtem ko jih druga mami v zunanji svet na videz neomejenih možnosti. Težke pravimo zato, ker ne idealiziramo položaja znanosti in znanstvenih delavcev v naši družbi, ko je materialno in moralno vrednotenje znanstvenega dela še močno odvisno od nizke ravni splošne gospodarske razvitosti. Kljub vsemu, ne glede na vse težave, ki jih premagujejo naši znanstveni delavci in raziskovalci pri svojem delu, pa je vendarle v naš družbeni razvoj, v naš samoupravni socializem vtkana kontinuirana povezanost s Plemljevim nemirnim iskanjem resnice, z njegovo zavzetostjo za svobodno in ustvarjalno znanstveno-raziskovalno delo, za zasidranost tega dela v narodu, v družbi, za vračanje znanosti k človeku, ki jo je ustvaril zase, da mu služi, da ga razvija in plemeniti. Plemelj je veroval v znanost kot instrument napredka človeštva in globoko ga je vznemirjalo zlorabljanje znanstvenih dosežkov v protiljudske namene, za podrejanje narodov, izkoriščanje ljudi ter uničevanje človeških življenj.

O tem govorim zaradi tega, ker smo danes sredi zelo pomembne in odločilne bitke za uresničenje nove ustave, za uveljavitev združenega dela, za samoupravno integriranje in moderno organiziranje gospodarstva, za usposabljanje samoupravnih subjektov za dolgoročno usmerjanje, da bomo lahko vzdržali tudi visoke stroške znanstvene, raziskovalne in razvojne dejavnosti in rizike, ki jih te dejavnosti v sebi nosijo. Ker nam je danes vsem jasno, da je produktivnost funkcija tehnologije in tehnologija funkcija znanosti, lahko trdimo, da je naša današnja bitka sočasno bitka za znanost, za mobilizacijo znanstveno-raziskovalnih potencialov družbe, za ustvarjanje in širjenje nacionalnega znanstvenega fonda.

Ne le socialistična zveza delovnega ljudstva, tudi drugi organizatorji današnje proslave verjetno razumejo njen aktualni motto, ki ni usmerjen samo v preteklost, v oživljanje zanimive samonikle osebnosti Josipa Plemlja, pač pa hoče tudi vznemirjati našo sedanjo zavest in jo mobilizirati v družbeno akcijo. Tako je nastal ob tej proslavi na pobudo Društva matematikov tudi zanimiv dokument, ki nosi naslov Naloge in problemi slovenske matematike. V njem so številni predlogi, ki naj bi bili osnova za vrsto organizacijskih, kadrovskih in drugih ukrepov na tem važnem področju naše znanstvene politike. V imenu republiškega vodstva socialistične zveze vam zagotavljam, da bomo te pobude politično podprli.

Na koncu bi vas ob tej priložnosti obvestil, da smo pri Predsedstvu SZDL ustanovili nov, poseben svet za znanost s prvenstveno nalogo angažirati znanost in znanstvenike v Socialistični republiki Sloveniji, spodbujati znanstveno kritično misel, alternativne predloge in sugestije. Predolgo bi vas zadrževal, če bi na drobno pojasnjeval vlogo in pomen tega sveta in njegov program dela, hotel sem vam samo povedati, da se v Socialistični zvezi delovnega ljudstva zavedamo, da mora biti znanost vključena na vseh ravneh in v vse samoupravne in politične odločitve, zaradi česar prosim vas, znanstvenike, pedagoge in delavce na raziskovalnem področju, da se aktivno vključite in sodelujete pri graditvi naše samoupravne socialistične družbe. Hoteli bi, da bi tako odličen znanstvenik, kakršen je bil profesor Josip Plemelj, v naši stvarnosti ne bil izjema, pač pa pravilo in vzor za delo, vedenje in žrtvovanje stoterih posameznikov, strokovnih skupin in vse družbe.

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 1/2

O MATEMATIKI NA SLOVENSKEM

Govor na proslavi stoletnice rojstva prof. dr. Josipa Plemlja

FRANCE KRIŽANIČ

Spoštovani gostje, tovarišice in tovariši!

Dovolite mi, da na tem svečanem zboru v širokih in grobih potezah orišem razvoj visokošolskega pouka matematike v Sloveniji in tudi v tem okviru poudarim osrednjo vlogo profesorja Josipa Plemlja.

Preden začnem, pa naj opravičim pouk matematike na visokih šolah nasploh. Matematiko ustvarjajo vsi narodi sveta, gradili so jo vsi rodovi, kar jih pomni zgodovina. Zato bi lahko rekli: kaj bi se ubadali z že odkritim, kaj bi po nepotrebnem obremenjevali gospodarstvo: če bo kdaj kaj terjalo delovno mesto, nam bodo radi dali tisti, ki imajo. Toda v znanosti, tako kot v umetnosti ali še bolj, je že tako, da nam nihče ne more dati, česar si ne znamo vzeti. Evropa, pravijo, je dala človeštvu Goetheja in Mozarta. A kaj pomagata Goethe in Mozart narodu, ki si ju ne more prisvojiti, ker nima lastne umetniške besede, nima svoje glasbene kulture? Kako pomembna je sposobnost zajemanja v tehniki in v tehnologiji, najbrž ni treba poudarjati. Žal pa moramo še vedno razlagati, kako odločujoča je za to sposobnost matematična izobrazba, matematična kultura. Celo v učiteljskem svetu včasih slišimo, da je za bodočega slovenskega tehnika dovolj, da obvlada tuje jezike. Toda brez znanja matematike sodobne tehniške knjige ne bo razumel, pa četudi zna vse svetovne jezike »od besede do besede naizust«. Profesor Plemelj je znal to misel povedati v enem stavku:

»Tehnik rabi toliko matematike, kolikor je zna, potrebuje pa je mnogo več.«

K pouku matematike smo Slovenci veliko prispevali že v stari Avstriji. Omenim naj v prvi vrsti Jurija Vego, ki je s svojimi *Predavanji* v štirih zajetnih knjigah prvi širil višjo matematiko ali matematično analizo v avstrijskih deželah. Delo, ki je prvič izšlo v letih 1782 do 1803, je vzdržalo na trgu celih petdeset let. Dobro je znan tudi izredno pomembni prispevek slovenskih matematikov k pouku matematike na avstrijskih srednjih šolah. Dovolj je, da se spomnimo na številne učbenike Franca Močnika.

Vendar se za nas začenja pouk matematike v slovenščini na vseh ravneh šele z ustanovitvijo slovenske univerze, s prihodom Josipa Plemlja v Ljubljano. Josip Plemelj je postavil temelje naši šoli in mirno lahko rečemo, da je s svojo osebnostjo, s svojo usodo določil tudi razvoj naše matematike po svojem odhodu. Večkrat je že bila poudarjena tragična plat Plemljevega prihoda v Ljubljano: z njim se je odpovedal dotedanji bleščeči znanstveni poti, v Ljubljani ni zasnoval matematične šole v tistem pomenu besede, ki v njej vidi predvsem znanstveno delavnico, ki se loči od drugih z izbrano tematiko, s svojskimi metodami dela in seveda z rezultati.

Josip Plemelj je s prihodom v Ljubljano zamenjal vlogo ustvarjalca z vlogo poustvarjalca. S seboj je prinesel bogato dediščino klasične matematike, ki jo je še nedavno sam pomagal ustvarjati. Njegova predavanja so bila tekoče poustvarjanje, pred učenci je matematika znova nastajala. Profesor Plemelj ni predavanj nikdar bral, ničesar ni vtepal v glavo, vse, kar bi lahko motilo občutek neposrednega ustvarjanja, je zavrgel. Vsem, ki smo ga poslušali, so ostala predavanja v dvojnem spominu. To ali ono iz vsebine je morda s časom zbledelo,

ostal pa je živ spomin na umetniško doživetje. Še prav posebno velja to za Plemljeva predavanja iz teorije analitičnih funkcij.

Plemelj je nemalo dela posvetil tudi študentom tehnike, ki jih je izmenoma vodil skozi prvi dve leti študija, jim dajal osnovno matematično ali, kar odkrito povejmo, osnovno tehniško izobrazbo. To dvojno delo je bilo posledica šibke kadrovske zasedbe na ljubljanski univerzi med vojnama in še nekaj let po osvoboditvi. Toda, četudi je izviralo iz hibe, je imelo svoj čar in pomen. Tehniki so zajemali matematiko pri samem viru, matematika in njena uporaba v tehniki sta bili povezani v personalno unijo, živeli sta v lepem in plodnem sožitju, ki se po Plemljevem odhodu ni nikdar več ponovilo.

Plemljevo delo je v veliki meri vplivalo in še vedno vpliva na slovensko matematiko, na njene metode, cilje, pota in dosege.

Predvsem poskuša naša matematika nadaljevati tisto obliko predavanja-poustvarjanja, ki jo je uveljavil Plemelj. Tu je Plemelj nedosežen vzor. Hkrati pa poskuša slovenska matematika premagati tiste okope, ki so utesnjevali Plemlja. Nenehno iskanje se najbolje odraža v spreminjanju in prilagajanju učnih načrtov in programov. Velika Plemljeva trojka: algebra s teorijo števil, teorija analitičnih funkcij in diferencialne enačbe, je še vedno v učnem načrtu, toda njena podoba se je v zadnjem desetletju močno spremenila. To velja posebno za algebro. Ob tej trojki je zrasla vrsta novih predmetov, ob predavanjih pa še seminarsko, individualno delo. Pouk matematike na univerzi smo v zadnjem desetletju močno spremenili, pravkar pa stojimo pred novo reformo, ki jo zahteva čas in omogoča kadrovska rast.

Druga pomembna naloga, ki izvira iz Plemljeve dediščine, je hkratnost pedagoškega in znanstvenega dela. Omenili smo že, da Plemelj v Ljubljani ni ustanovil znanstvene matematične šole. Toda zapustil nam je oster kriterij za znanstveno delo in močnega naslednika, ki je v novih razmerah po socialistični revoluciji lahko začel dopolnjevati tisto, kar je bilo Plemlju v stari družbi onemogočeno. Danes lahko omenimo že nekaj raziskovalnih smeri, ki žive v slovenski matematiki. Tu je predvsem najobsežnejša šola funkcionalne analize, ki jo vodi profesor Ivan Vidav, potem uporaba matematičnih pripomočkov v fiziki (I. Kuščer, I. Vidav, M. Ribarič), na ekonomski fakulteti deluje šola profesorja A. Vadnala, ki se ukvarja z matematičnimi metodami v ekonomiji. Mlajša generacija pa uvaja v naš prostor topologijo s teorijo mnogoterosti in z globalno analizo (J. Vrabec). Omenimo še numerično matematiko in programiranje, pa smo našteli vse. Dosežki znanstvenih raziskovanj so objavljeni v mednarodnih matematičnih revijah, občasno pa ta dela povzame Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko v svojih Publikacijah. Doslej je pripravil že pet snopičev matematičnih razprav.

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, v katerem poteka vse raziskovalno delo, je matična enota za matematiko — ali vsaj za njen raziskovalni del — na naši univerzi. Morda lahko prav ob inštitutu najlepše pokažemo kadrovsko rast matematike na univerzi v celoti: matematični oddelek inštituta šteje danes 44 članov, profesorjev, docentov, asistentov in drugih sodelavcev, med njimi je 17 doktorjev znanosti in en redni član SAZU.

Take enotnosti in povezanosti pri pedagoškem delu ni. To je le eden od ciljev, ki jih naša matematika vidi pred seboj. Zato se v tem pregledu omejimo le na tisti študijski smeri, ki vzgajata matematike. Osnovna smer, ki teče od ustanovitve univerze dalje, daje predvsem učitelje matematike za srednje šole. Doslej je na tej smeri diplomiralo 260 matematikov. Od leta 1960 pa obstaja vzporedna tehniška smer z nekaj težjim in obsežnejšim programom. Na njej je doslej diplomiralo 70 matematikov. Trenutno je vpisanih na pedagoški smeri 94, na tehniški pa 212 študentov.

Podiplomski študij teče na šolskem tiru šele tretje leto. Usmerjen je v funkcionalno analizo. Vpisanih je 11 slušateljev, magistrsko delo je doslej ubranil 1 kandidat.

Spomenik
prof. dr. Josipu Plemlju
odkrit na Bledu
ob stoletnici rojstva.

Pred ustanovitvijo formalnega študija na tretji stopnji je podiplomsko izobraževanje potekalo le na Inštitutu, ki poleg znanstvenega dela goji tudi pedagoško delo, pravzaprav povezuje obe obliki dela v svojih seminarjih. V preteklem šolskem letu so delali štirje seminarji, ki so skupno zasedali 185 ur.

Podiplomsko izobraževanje srednješolskih profesorjev pa organizirata skupaj Univerza in Društvo matematikov, fizikov in astronomov. Vsakoletni seminar je izmenoma posvečen matematiki in fiziki.

Nazadnje moramo omeniti še publicistično delo naših matematikov v slovenščini. Tudi tu je opravil pionirsko delo Josip Plemelj, saj je slovenski matematični besedi posvečal največjo skrb. Do Plemljevih predavanj v Ljubljani je v slovenščini živela le elementarna matematika, s Plemljem pa je spregovorila po slovensko tudi višja matematika. V tiskani slovenski besedi smo dobili višjo matematiko pravzaprav šele po osvoboditvi. Prva slovenska računica, Marka Pohlina *Bukuvce za rajtengo* je izšla leta 1781, prvi visokošolski učbenik matematike v slovenščini pa leta 1949. To je bila I. Vidava *Višja matematika* I, napisana po Plemljevih predavanjih. Kasneje je izšla še *Višja matematika* II, SAZU pa je izdala Plemljev

triletni cikel: *Algebra s teorijo števil, Teorija analitičnih funkcij* ter *Diferencialne in integralne enačbe — teorija in uporaba.* Od leta 1966 izdaja Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko zbirko univerznih učbenikov *Matematika.*

Ob vseh svojih akcijah so matematiki vselej uživali polno podporo in razumevanje družbe, pa naj bo skupščinskih organov, predvsem izvršnega sveta, ali pa samoupravnih skupnosti, izobraževalne, raziskovalne in kulturne. Matematika ima tudi solidno materialno bazo v Matematični knjižnici, za katero skupaj skrbita inštitut in fakulteta. Matematična knjižnica je naše nepogrešljivo okno v svet.

Povzemimo: Josip Plemelj je postavil temelje slovenski matematiki in dosegel vrh ustvarjanja, ki ne bo kmalu ponovljen. Slovenska matematika je iz teh temeljev po osvoboditvi in socialistični revoluciji rasla in zrasla, kot je vedela in znala. Vedno se je zavedala nalog, ki jih ima kot pomemben del družbenega življenja, pa naj bo v izobraževanju in vzgoji, v raziskovanju ali v povezanosti enega in drugega z neposrednim ustvarjanjem duhovnih in tvarnih dobrin. Njena rast je količinsko velika, če primerjamo današnje stanje z začetnim, zelo skromna, če matematiko primerjamo z drugimi, uspešnejšimi vedami, na primer s fiziko in s kemijo. Prav zato, da bi lahko matematika v Sloveniji zaživela tako kot sorodne, enako pomembne znanosti, moramo njeno rast v bodočnosti še pospešiti. Za to bodo potrebni še mnogi napori matematikov, pa tudi družbena pomoč, predvsem dosedanje razumevanje, in če le gre, še dolgoročna politika.

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 1/2

ZNAČAJ IN MESTO SODOBNE MATEMATIKE V MODERNI ZNANSTVENI MISLI

Predavanje ob praznovanju stoletnice rojstva prof. Josipa Plemlja*

VLADIMIR DEVIDÉ, Zagreb

AMS Subj. Class. (1970) 02 A 05, 00 A 25

Avtor najprej omenja nekaj kriz v zgodovini matematike, ki so nastale v zvezi z nesoizmerljivimi dolžinami, neevklidičnimi geometrijami in razvojem matematične analize. Pove, kako so bile te krize obvladane in transcendirane. Z antinomijami klasične teorije množic pa je nastopila sedanja kriza v osnovah matematike. Nekateri novejši rezultati v logiki in teoriji množic zahtevajo nekako revizijo klasičnih pojmovanj o obstoju matematičnih objektov, o legitimnosti matematičnega sklepanja in o gledanju na matematiko kot znanost sploh. Vse to ima svoje implikacije na filozofijo znanosti in tudi na samo filozofijo. Avtor poudarja, da sedanje relativiziranje nekaterih matematičnih spoznanj nikakor ne zmanjšuje vrednosti matematike in njenega pomena. Naglaša tudi vlogo estetskih komponent pri graditvi matematike in s tem umetniški pogled v matematičnem ustvarjanju.

THE CHARACTER AND PLACE OF CONTEMPORARY MATHEMATICS IN MODERN SCIENTIFIC THOUGHT

The author first mentions some of the crises in the history of mathematics, which arose in connection with the incommensurable lengths, the non-Euclidean geometries, and the development of mathematical analysis. He tells how these crises were mastered and transcended. With the antinomies of the classical set theory, however, began the present crisis in the foundations of mathematics. Some newer results in logic and set theory demand, in a certain sense, a revision of the classical conceptions about the existence of mathematical objects, the legitimacy of mathematical concluding, and the view on mathematics as a science on the whole. All this has its implications on the philosophy of science and also on philosophy in general. The author emphasizes that the modern relativizing of some mathematical recognitions by no means depreciates the value of mathematics and its importance. He accents also the role of aesthetic components in the construction of mathematics and so the aspect of art in mathematical creation.

Vloga in pomen matematike v današnjem razvoju tehnike ali, kakor danes navadno govorimo, v sodobni tehnološki revoluciji, sta tako vidna, da o njiju ni treba govoriti. Druga stvar je vsekakor vprašanje, ali je ta razvoj tehnologije srečen, do kod nas je pripeljal in kam nas bo odvedel v prihodnosti, če z njim nadaljujemo; kaj bi bilo potrebno napraviti, da izločimo ali vsaj kar najbolj zmanjšamo tiste njegove manifestacije in posledice, za katere vedno bolj prepričljivo spoznavamo, da niso zmeraj pozitivne. Taka vprašanja glede vrednotenja, naše sodobne tehnične civilizacije ne spadajo v predmet, o katerem želim govoriti. Vendar pa ni dvoma, da je pri nasprotjih v današnji tehnični civilizaciji, pri njenih dobrotah kakor tudi pri njenih krizah, dilemah in razpotjih soudeležena tudi matematika ali, bolje rečeno, matematiki, z ustreznim deležem zaslug in odgovornosti.

Rad pa bi v tem referatu govoril o vlogi matematike v znanstveni misli, o prispevku, ki ga dajejo sodobni rezultati matematikov znanosti sploh, o filozofskih implikacijah teh rezultatov, posebno pa o njihovem pomenu za filozofijo znanosti. Seveda tudi v razmeroma dolgem referatu, kakor je ta, ni mogoče obdelati take problematike v vseh podrobnostih

* Opomba urednika. Sestavek je prva polovica govora, ki ga je imel prof. dr. V. Devidé. V drugi polovici je prečital več citatov znanih matematikov, ki se ukvarjajo z matematično logiko in osnovami matematike. Teh obširnih citatov v Obzorniku ne bomo objavili, ker se nam zde povečini za naše bralce težko dostopni. Kogar zanimajo, jih lahko dobi v originalu ali slovenskem prevodu v Matematični knjižnici.

niti omeniti vseh njenih oblik. Skušal se bom zato omejiti na nekoliko ožji spekter vprašanj in na neke misli, na katere bom poskusil vsaj deloma odgovoriti. Komu se bodo morda zdele te misli nekoliko problematične; vsekakor bodo nekatere med njimi v nekem smislu »nekonformistične«, da ne rečem »heretične«. To pač glede na pojmovanja, ki še vedno prevladujejo v širših krogih ne le intelektualcev nematematikov, marveč tudi mnogih matematikov samih, posebno tistih, katerih delovno in interesno področje vsaj do zdaj še ni zajeto ali se ne zdi zajeto v globokih dilemah in krizah, a tudi v velikih novih dosežkih, spoznanjih in programih refundiranja matematike, posebno njenih osnov. Zato bi si dovolil to obravnavanje uporabiti predvsem za pripravo in za formulacijo teh misli o sodobni matematiki, manj pa za njihovo podrobno utrjevanje in argumentiranje. Oprostite mi, prosim, če se bo v tem delu tu in tam ponovil kakšen kos besedila, ki sem ga v taki ali podobni obliki načel že prej kje drugje. Želel bi namreč, da teh mest ne sprejmete kot gola ponavljanja že prej povedanih misli, marveč kot rezultat trdnejšega prepričanja o njihovi pravilnosti, okrepljenega z nadaljnjim razvojem in z novimi rezultati, ki so bili doseženi medtem v matematiki, še posebej v matematični logiki in, širše, v filozofiji matematike. Tu povedane misli kakor tudi citati so nastali na podlagi analize in presoje stvarnega novega gradiva, s katerim se je matematika obogatila — predvsem mislim na matematično logiko — v zadnjih desetletjih. Z vsem tem pa nikakor ne želim sugerirati posebnih »zaslug« ali »vrednosti« tez, ki jih bom postavil; nasprotno menim, da se te tako naravno in tako močno vsiljujejo, da njihova formulacija ne more imeti pretenzij na kakršnokoli »odkrivanje«, marveč hoče biti sprejeta le kot zapis dejstev, za katera mislim, da jih ne moremo več argumentirano zanikati.

Posebej pa je treba pri tem poudariti nekaj, kar bo v referatu namenoma večkrat v raznih oblikah ponovljeno, včasih tudi v metaforah, ki seveda niso obvezne za tistega, ki jih ne mara: da namreč v nobenem primeru niti vsebina teh tez niti njihov namen ni v tem, da bi se spraševali o sami **vrednosti** matematike. Nasprotno, če jih prav razumemo, naj bi to vrednost še posebej in znova poudarile in naglasile, a z drugačnimi argumenti, kakor so to delali včasih, ko so razglašali matematiko za »kraljico znanosti«. Vendar ne zato, ker sta bila medtem število kraljev in njihova moč zmanjšana, marveč zato, ker smo spoznali, da obstajajo globlje in trajnejše vrednote, kot je kraljevska krona. Na kratko povzeto, teze bodo take, da vrednost matematike ni v tem, da bi njeni rezultati v nasprotju z rezultati drugih znanosti — tudi tako imenovanih eksaktnih — bili indiskutabilni, večni in absolutni, da bi bili božansko dovršeni; skratka zato, ker sploh niso taki. Vrednost matematike pa ostane, in sicer v tem, da vsebuje številna od največjih, najpogumnejših in najlepših stvaritev človeškega duha. Ali, še krajše rečeno, njena vrednost je v tem, da **ni** delo bogov, marveč delo ljudi. Prav zato imamo sedaj **še več** razlogov, da smo na matematiko ponosni, še več vzpodbud, da jo gradimo naprej, in še več možnosti, da uživamo njeno lepoto.

Če hočemo govoriti na splošno o matematiki, se moramo varovati naivne in kratkovidne zmote, da bi vsebino in obseg pojma »matematika«, čeprav nezavedno, istovetili z vsebino in obsegom matematike **danes**. Matematika ni nepremična kristalna palača, marveč živ organizem. Če hočemo dobiti predstavo o teku kake reke v celoti, se ne smemo omejiti na merjenje, čeprav še tako natančno in podrobno, njenega korita na določenem kraju. Če si hočemo napraviti kolikor toliko realno podobo o tem, kaj je matematika, se ne smemo omejiti na to, da popisujemo in razčlenjujemo njen sedanji fundus. To je sicer očitno, vendar tudi mnogi sicer kompetentni matematiki včasih grešijo — če ne »matematično«, pa vsaj kulturnozgodovinsko — ker imajo današnjo matematiko, posebno tisto vejo, s katero se sami ukvarjajo, za dokončno, da matematiko preteklosti ignorirajo ali omalovažujejo in da od matematike prihodnosti ne pričakujejo bistvenih in korenitih sprememb v pojmovanjih; posebno pa ne uvidijo, da se jim lahko zgodi, da bo morda že prihodnja generacija matematikov s podobnimi stališči jutri gledala na njihovo današnjo matematiko tako ali podobno, kakor sami danes gledajo na včerajšnjo matematiko svojih matematičnih očetov in dedov.

Zato bomo, preden preidemo k nadrobnejši predstavitvi nekaterih sodobnih matematičnih rezultatov, dilem in kontroverz, ki so jih izzvali, vsaj bežno pogledali nekaj zgodnejših dogodkov v zgodovini matematike, krize, do katerih je prišlo, kadar je posamezna matematična doba in okolje storilo, kar je moglo, pa vendar ni dobilo odgovora na vsa vprašanja, ki si jih je zastavilo.

Zdi se, da je matematika dosegla raven tistega, kar so pozneje navadno imenovali deduktivno znanost stare Grčije. Evklidovi elementi sodijo zares tudi danes med največje ohranjene spomenike ne le matematične, ampak znanstvene misli sploh. Toda prav starogrški matematiki so doživeli in preživeli prvo veliko, globoko, a tudi rodovitno krizo matematike: odkritje nesoizmerljivih dolžin, danes bi morda raje rekli iracionalnih števil; že samo ime izdaja, da tem objektom ni bilo lahko priboriti si državljanske pravice zakonitih matematičnih objektov. Ohranjene legende o brodolomu, ob katerem je utonil predrznež, ki si je upal ugrabiti ta misterij bogovom in ga izročiti ljudem, pričajo o presenečenju, da ne rečemo pretresu, ki ga je odkritje nesoizmerljivih dolžin povzročilo med matematiki tistega časa. Evdoksova teorija splošnih mer, danes bi zopet raje rekli realnih števil, pa je veličasten spomenik in pričevanje, kako more biti velika kriza prebredena z veliko stvaritvijo, ki jo obvlada, reši in presega.

Podobno je bilo z odkritjem neevklidičnih geometrij. Čeprav nekatera novejša odkritja kažejo na to, da so že pri Aristotelu tu in tam zametki idej o možnosti takih geometrij, v katerih torej ne velja znameniti postulat o vzporednicah, je vendar morala miniti vrsta stoletij, da so se te nove geometrije razvile, bile sprejete in postale logično enakopravne s svojo mnogo starejšo sestro. Da tudi to ni šlo lahko in gladko, kažejo življenjepisi njihovih prvih stvariteljev Gaussa, Lobačevskega, Bolyaija in drugih, kakor tudi znani Gaussov stavek, da svojih rezultatov o teh novih geometrijah ni objavil, ker se je — in to po pravici — bal vika in krika Beočanov.

Tudi matematična analiza je šla skozi krize prečiščevanja in prekaljevanja. Dandanes je lahko zviška gledati na »naivnost«, s katero so Newton, Leibniz, Euler in drugi pionirji infinitezimalnega računa ravnali z diferenciali, neskončnimi vrstami in podobnimi — gledano v tedanji obliki z današnjimi očmi — problematičnimi objekti. Potrebni so bili geniji kakor na primer Cauchy in Weierstrass, da so zgradili matematično analizo v obliki teorije, za katero je nato nekaj generacij verjelo, da ji ni in ji ne bo več mogoče kaj očitati.

Nova kriza matematike, ki še traja, je sicer na videz »v praksi« omejena na osnove matematike, resno vzeta pa v veliki meri »ogroža« vso klasično in moderno matematiko. Nje ni bilo več moč ignorirati po antinomijah Cantorjeve teorije množic. Hilbert ni hotel, da bi nas kdaj mogel kdo izgnati iz raja, ki je bil z njo ustvarjen. V tem raju so pa osrednje mesto zasedle aktualne neskončnosti, za katere se je pokazalo, da so v marsičem blizu drevesu spoznanja iz znane svetopisemske zgodbe: ko smo okusili njegove sadeže, smo postali podobni bogovom, toda za kazen smo **bili** izgnani iz raja, v katerem prej ni bilo dvomov. Zares, če primerjamo to do zdaj zadnjo krizo v matematiki s prejšnjimi, ni dvoma, da je veliko globlja. Tega ne kaže le dejstvo, da ni premagana niti po skoraj enem stoletju, v katerem so se z njo ukvarjali in se z njo bojevali številni največji matematiki našega časa. Seveda ta boj ni bil brezuspešen in že do zdaj doseženi sadovi so več kakor kompenzacija za skrbi in stiske, ki nam jih je povzročila kriza. Vendar moramo priznati, da smo še zelo zelo daleč od tega, da bi mogli slutiti pomirjenje te krize. In skoraj ni upanja v dokončen in zadovoljiv izhod iz nje — v podobnem smislu, kot je Evdoks prebredel krizo nesoizmerljivih dolžin ali Lobačevski krizo postulata o vzporednicah ali Weierstrass krizo, ki so jo izzvali »neskončno majhni« diferenciali.

Vzrokov za tak položaj je več. Če stvari podrobneje razčlenimo, bomo najprej ugotovili, da so korenine težav veliko globlje in starejše od Cantorjeve teorije množic. Strogo vzeto, segajo v davno preteklost, ko je človek začel šteti in na izkustvu tega štetja začel v svojem

duhu, v mislih, ustvarjati nekaj, kar so pozneje imenovali abstraktni pojem naravnega števila. Pred dva tisoč in več leti se je zdel ta pojem gotovo večini — čeprav zelo verjetno ne vsem — takratnih matematikov in filozofov eden najbolj zanesljivih, najjasnejših, najčistejših ter najbolj dokončnih in vsekakor tudi najbolj nespremenljivih pojmov, kar jih je človek kdaj ustvaril. Danes vemo o naravnih številih, o možnostih aksiomatskega formuliranja na njih zgrajenih struktur in posledic, do katerih te vodijo, neprimerno več, kakor so vedeli celo matematiki 19. stoletja. Istočasno s tem in še predvsem zaradi tega vemo tudi to, da je naš pojem »abstraktnega naravnega števila«, s katerim so se naši matematični predniki postavljali, zelo problematična stvar, da nikakor ni indiskutabilen in da ni dosti upanja, da bi v prihodnosti ušel neizogibnim in korenitim revizijam. Ena od potencialnih možnosti, ki se tu odpirajo, je skicirana v daljšem citatu iz nekega dela A. S. Jesenjina-Voljpina. Če nas ta skica njegovega programa »pretrese«, če se nam zdi absurdna, nikar ne pozabimo, da so bili v podobnem položaju starogrški matematiki, ko so zvedeli za nesoizmerljive količine, in klasični geometri, ko je bila zanikana nujnost sprejemanja Evklidovega petega postulata, in klasični analitiki, ko so jim očitali, da je tisto, kar delajo z diferenciali, nedopusten nesmisel.

Zdaj ne bi podrobneje govoril o velikih programih rekonstrukcije matematike, s katerimi so skušali rešiti zadnjo krizo v osnovah matematike — in s tem seveda v matematiki kot celoti. Razlaga koncepcij Russell-Whiteheadovega tako imenovanega logicističnega programa, Brouwerjevega t. i. intuicionističnega programa, Hilbertovega t. i. formalističnega programa ali teorije dokazov bi zahtevala veliko več časa, kakor ga imamo tu na voljo, obenem pa predpostavljamo, da večina matematikov, pa tudi znatno število filozofov in fizikov danes v glavnem pozna to problematiko. Zato se bom omejil na to, da naštejem samo nekatere **rezultate** raziskovanj, vzpodbujenih s temi programi.

Za elementarno aritmetiko, ki se — kot »intuitivna« klasična veja matematike — zdi definitivno kategorična teorija, to je teorija, katere vsi modeli so med seboj izomorfni, se je pokazalo med drugim: če se **aksiomatizira** in **formalizira** na »standardni« način — žal tu ni mogoče natančneje opredeliti pomena tega pojma — tedaj ima takšna aritmetika tudi t. i. »nestandardne« modele, se pravi, **ni** z aksiomi določena kot kategorična teorija. Če se elementarna aritmetika aksiomatizira in formalizira znotraj t. i. logike prvega reda, potem je ves ta matematično-logični sestav nujno **bodisi** nekonsistenten **bodisi** nepopoln. To pomeni, da je v njem ali vsaka trditev, ki se sploh more formulirati, hkrati že izrek — s čimer je tedaj kajpak vsa teorija brez vrednosti — ali pa se dajo efektivno napisati izjave, ki so znotraj teorije **neodločljive,** se pravi, ni jih mogoče v njej niti dokazati niti ovreči, čeprav predstavljajo v intuitivni reinterpretaciji trditev, ki bi, klasično gledano, nujno morala imeti določeno »resničnostno vrednost«. Z drugimi besedami, matematične teorije, ki je dovolj bogata, da vsebuje elementarno teorijo števil, ne moremo formalizirati z določenimi zelo splošnimi matematično-logičnimi sestavi tako, da bi bile v njih dokazljive tiste in samo tiste trditve, ki so v intuitivni interpretaciji resnične. Dalje, če **je** takšna formalizacija aritmetike konsistentna, tedaj se s sredstvi, ki jih lahko formaliziramo znotraj teorije, **ne more dokazati,** da je konsistentna. To vsekakor še ne pomeni, da je načelno nemogoč sprejemljiv dokaz njene konsistentnosti, vendar vsaj za sedaj ne vemo, kako bi tak dokaz potekal.

Seveda so okoliščine v zvezi s teorijo množic še bolj zapletene. Omejimo se le na vprašanje znamenite Cantorjeve hipoteze kontinuuma, to je predpostavke, da je $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Za določene široke razrede aksiomatizacij in formalizacij teorije množic sledi iz fundamentalnih Gödelovih in Cohenovih rezultatov — ki so bili, ne brez vzroka, ob svojem času velika senzacija — da je v njih hipoteza kontinuuma neodločljiva. Se pravi, če predpostavimo, da je sama teorija sploh konsistentna, se v njej hipoteza kontinuuma ne more niti dokazati niti ovreči. Torej lahko spet pri isti predpostavki konsistentnosti tako aksiomatizirane in/ali formalizirane teorije množic to teorijo konsistentno razširimo z nadaljnjimi aksiomi tako,

da imajo dobljene nove teorije modele, ki niso »izomorfni« in torej prvotna teorija ni kategorična. To je v očitnem nasprotju s prepričanjem o kategoričnosti intuitivne teorije množic, pa tudi z rezultatom, da moremo za nekatere aksiomatizacije teorije množic v logiki **drugega** reda dokazati s sredstvi tako imenovane teorije modelov, da **so** kategorične, kar zadeva hipotezo kontinuuma: da je namreč v njih $2^{\aleph_0}$ povsem določen alef, povsem določeno kardinalno število — le da nihče ne samo ne ve, **katero,** temveč nima niti pojma, po kateri poti bi se morebiti dalo to zvedeti. Iz vsega tega sledi, da moramo **ali** sprejeti stališče, da se intuitivna teorija množic — kakor sicer tudi intuitivna elementarna teorija števil — **ne da** adekvatno formalizirati, vsaj ne z doslej znanimi sredstvi in aksiomi, **ali** pa moramo sprejeti stališče, da sam pojem intuitivne teorije množic — ali aritmetike — sploh ni kategoričen v smislu, v katerem smo to verjeli, torej ni, strogo vzeto, niti legitimen. V tem drugem primeru bi bilo prepričanje o kategoričnosti teh intuitivnih teorij fikcija, ki je pogojena morda bolj s psihološkimi in manj z »matematičnimi« razlogi.

Položaj je torej tu bistveno težji, kakor je bil v primeru neevklidičnih geometrij. Tam je absolutna geometrija, se pravi evklidska geometrija brez petega postulata, nekategorična tako kot intuitivna kakor tudi kot aksiomatizirana teorija. Medtem pa se teorija množic, seveda brez hipoteze kontinuuma kot postulata, kaže intuitivno kategorična in taka je, kar zadeva hipotezo kontinuuma, tudi v logiki drugega reda, medtem ko ni taka v logiki prvega reda.

V nasprotju z omenjenimi in neomenjenimi prejšnjimi krizami se sedanja kriza matematike odlikuje s tem, da problem ni več v tem, kako bi **prišli do** neke matematične resnice, marveč se sprašujemo o samem pojmu matematične resnice, pojmu **obstojnosti** določenih matematičnih objektov in pojmu **legitimnosti** sklepanja v matematiki. Verjetno bi bila zanimiva širša znanstveno-zgodovinska primerjalna analiza vprašanja, ali je in v kakšni meri je to relativiziranje vrednotenja v matematiki v zvezi s splošnim relativiziranjem in spraševanjem o vrednotah, od znanstvenih do etičnih, ne samo našega časa, marveč tudi desetletij pred njim; razume pa se, da takšna analiza izstopa iz okvira tega predavanja. Vendar menim, da prihodnji kulturnozgodovinski analitiki ne bodo več mogli kompetentno govoriti o vrenjih v 20. stoletju brez določenega poznavanja rezultatov matematične logike, kakor že danes filozofi ne morejo več kompetentno govoriti o pojmih prostora in časa brez nekega poznavanja teorije relativnosti in kvatne mehanike.

Prej nakazano problematiko ustrezajoče aksiomatizacije moremo v nekem smislu razumeti kot poseben primer širšega vprašanja **rešljivosti** matematičnih problemov. Že na najbolj začetni ravni bo odgovor na tako vprašanje odvisen od tega, **kakšna sredstva** dopuščamo pri reševanju. Klasični starogrški problemi duplikacije kocke, trisekcije kota in kvadrature kroga niso geometrično rešljivi z izključno uporabo ravnila in šestila, rešljivi pa so z drugačnimi instrumenti, ali, prevedeno v algebraični jezik, z izrazi, ki se ne dajo prevesti na ponavljanje t. i. osnovnih algebraičnih operacij in računanja kvadratnega korena. Bistveno drugačnega značaja so problemi o t. i. **algoritemski rešljivosti,** ker iščemo, grobo rečeno, splošno metodo reševanja določenega **razreda** matematičnih problemov. Danes imamo že izredno bogato literaturo o algoritemsko rešljivih in algoritemsko nerešljivih t. i. »masovnih« matematičnih problemih.

To, kar že stoletja ne zanima le matematike, pa so predvsem vprašanja »načelne« rešljivosti konkretnih, posameznih matematičnih problemov, kot je npr. znameniti Fermatov problem. Danes številni matematiki **načelno** sploh ne bodo hoteli govoriti o »načelni« rešljivosti matematičnih problemov, ker menijo, da je ta pojem tako nedoločen, da nima pomena o njem razpravljati. Dejstvo je, da je razpravljanje o neki »načelni« rešljivosti ali nerešljivosti v »absolutnem smislu«, se pravi brez kakršnihkoli omejitev glede metod reševanja — razen seveda, da so te legitimne, pri čemer tudi pomen te omejitve nikakor ni kar jasen — da je tako razpravljanje samo diskutabilno in problematično. Vendar so takšna tudi številna druga vprašanja, ki posegajo v osnove matematike in s katerimi se matematiki kljub temu

le in še kako ukvarjajo. Zato si bomo dovolili, če že zahajamo v spekulacije, spregovoriti nekaj tudi o vprašanjih rešljivosti matematičnih problemov v »absolutnem« smislu — pri čemer narekovaji nimajo drugega pomena, kakor da nas znova spomnijo na pridržke, ki jih je treba pri tem vedno imeti v mislih.

Še v začetku tega stoletja je bil tudi veliki Hilbert prepričan, da je vsak posamezen matematičen problem rešljiv, da je mogoče najti odgovor na vsako matematično vprašanje, ki se sploh da »smiselno« formulirati. Hilbert je neko svoje predavanje končal z optimističnim, ponosnim, drznim in dramatičnim stavkom: »Moramo vedeti. Vedeli bomo.«

Čeprav do danes ne poznamo nobenega konkretnega matematičnega problema, ki bi bil **dokazano** nerešljiv, to je tak, za katerega bi dejansko dokazali, da ga je načelno nemogoče rešiti (odgovor na stavljeno vprašanje »sam po sebi« seveda »mora biti«), je kljub temu prepričanje, da takega nerešljivega problema **ne more biti,** vsaj sporno. Vsekakor takega prepričanja ne moremo prepričljivo braniti z **matematičnimi** argumenti. To je le prepričanje — čeprav bo tudi danes morda celo večina matematikov menila, pa tudi mnogi matematiki-logiki bodo dejali, da so močni razlogi za tako prepričanje. A kot vedno, kadar skušamo filozofsko interpretirati matematični rezultat ali celo samo slutnjo, moramo biti tudi tu skrajno previdni. Morebitni obstoj v »absolutnem« smislu nerešljivega posameznega matematičnega problema še ni nujno argument v prid »agnosticizma« v matematiki. Pojasnjevanje, zakaj je to tako, bi zahtevalo daljših razglabljanj in ga moramo tu opustiti.

Kaže, da je danes zelo težko brezpogojno in zanosno zagovarjati načelno nemožnost obstoja matematičnih problemov, ki bi bili v absolutnem pomenu nerešljivi, čeprav mora biti, klasično gledano, odgovor na vprašanje, ki ga zastavljajo, nedvoumno določen.

Med drugimi okoliščinami, ki govorijo v prid takšnemu prepričanju — znova poudarjam, tudi **tukaj** gre le za prepričanje, za katero menimo, da so zanj »močni razlogi« — je tudi tale: dokazati je mogoče — čeprav tudi tega dokaza ne moremo sprejeti brez kakršnekoli pripombe — da je **nepravilna** vsaj ena od naslednjih treh trditev:

1. Velja tako imenovana Churchova teza o ujemanju pojma intuitivne izračunljivosti s preciziranimi pojmi izračunljivosti v smislu Turingovih strojev ali rekurzivnih funkcij ali Markovljevih algoritmov.
2. Ne obstaja absolutno nerešljiv posamezen matematičen problem.
3. **Tertium non datur** je vedno legitimno pravilo sklepanja.

Razni matematiki bodo — če sploh sprejmejo tako nezdružljivost navedenih treh trditev — različno ocenili »verjetnost«, katera med njimi je nepravilna; argumenti za to bodo pa komaj močnejši od tistih, s katerimi se že tisočletja pobijajo med seboj filozofi raznih nazorov ali teologi raznih verstev. Če bi bil jaz sam prisiljen, da se izjavim o tem vprašanju, mislim, da bi dvomil o pravilnosti kar **vseh treh** navedenih trditev.

Tu je skica poti sklepanja, ki vodi do omenjene medsebojne nezdružljivosti:

Omejen na primer funkcij ene spremenljivke, pravi Kleenejev izrek o normalni obliki za splošno rekurzivne funkcije tole: obstaja efektivno dana primitivno rekurzivna, torej izračunljiva, funkcija ene spremenljivke U in efektivno dan primitivno rekurziven, torej izračunljiv, tromesten predikat $T_2(t, x, y)$, tako da za vsako splošno rekurzivno funkcijo ene spremenljivke f obstaja vsaj en tak t, da velja

$$(\forall x)\,(\exists y)\,T_2(t, x, y) \quad \& \quad (\forall x)\,f(x) = U((\mu y)\,T_2(t, x, y));$$

pri tem je μ Kleenejev operator minimizacije. Če je efektivno dana pot graditve za f, lahko ustrezajoči t efektivno najdemo.

Za funkcijo $\varphi(t, x)$, definirano s

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} (\mu y)\,T_2(t, x, y) & \text{za } (\exists y)\,T_2(t, x, y) \\ 0 & \text{za } \overline{(\exists y)}\,T_2(t, x, y) \end{cases}$$

je mogoče dokazati, da **ni** splošno rekurzivna; vendar je povsod definirana, če sprejmemo tertium non datur.

Če bi pa bil vsak posamezen matematičen problem rešljiv, bi bil za vsak par (t, x) predikat $(\exists y)T_2(t, x, y)$ intuitivno odločljiv in s tem tudi funkcija $\varphi(t, x)$ intuitivno izračunljiva.

Manj »tehnična« in bolj »hevristična« argumentacija za isti rezultat bi bila na primer tale:

Vse simbole, potrebne za izgradnjo zapisa splošno rekurzivnih funkcij, lahko oštevilčimo in s tem efektivno leksikografsko razporedimo njihova končna zaporedja v zaporedje tipa ω. Znano je, da problem, kateri od členov tega zaporedja predstavljajo splošno rekurzivno funkcijo in kateri ne, ni rekurzivno odločljiv. Če bi bil vsak posamezen matematičen problem rešljiv, bi moralo biti za vsak posamezen člen zaporedja intuitivno odločljivo, ali predstavlja splošno rekurzivno funkcijo ali ne. Tako bi mogli **vse** splošno rekurzivne funkcije razvrstiti v efektivno, potencialno števno neskončno zaporedje. Od tod bi lahko s standardnim postopkom diagonalizacije efektivno pridobili intuitivno izračunljivo funkcijo na primer ene spremenljivke, ki ne bi bila splošno rekurzivna.

Zanimivo je tudi tole: a priori, kolikor danes vemo, ni izključeno, da je Fermatov problem nerešljiv. Mogoče pa je dokazati — čeprav seveda dokaz spet ni take narave, da bi ga vsi matematiki priznali brez pridržka za zakonitega — tole: **če** je Fermatov problem nerešljiv, potem se njegova nerešljivost ne more dokazati. Hevristična skica dokaza: vse četverke naravnih števil x, y, z, n, $n > 2$, lahko efektivno razvrstimo v zaporedje tipa ω. Če je torej Fermatova trditev nepravilna, lahko to preverimo in s tem dokažemo v končnem številu korakov. Če je potemtakem Fermatova trditev neodločljiva, ne more biti nepravilna, se pravi, da mora biti pravilna. Če bi torej mogli **dokazati,** da je neodločljiva, bi bila s tem dokazana njena **resničnost,** kar je protislovje.

Isti sklep velja tudi za problem štirih barv: kolikor je nerešljiv, se ta nerešljivost ne more dokazati. Po drugi strani pa so tudi taki problemi iz elementarne teorije števil, za katere zgornji sklep ni izvedljiv — na tisti način kakor v primeru Fermatovega problema in problema štirih barv. Ti problemi so torej **morda** nerešljivi, a zanje po našem današnjem znanju tedaj **ni** a priori izključeno, da bi se ta morebitna nerešljivost dala tudi dokazati. Za ilustracijo naj navedem primer takega problema, ki ga lahko formuliramo skrajno preprosto, a je po vsem, kar nam kažejo dosedanje izkušnje, izjemno težak.

Začenši z nekim naravnim številom n, konstruiramo zaporedje $f_i(n)$ takole: prvi člen $f_1(n) = n$; dalje, če je $f_m(n)$ sodo število, naj bo $f_{m+1}(n) = \frac{1}{2} f_m(n)$, če pa je $f_m(n)$ liho število, naj bo $f_{m+1}(n) = 3f_m(n) + 1$. Npr. za $n = 7$ dobimo tako zaporedje 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ... — naprej bi se ciklično ponavljalo 4, 2, 1. Vprašanje je, ali za **vsak** n v zaporedju $f_i(n)$ obstaja člen, enak 1? Za primer morebitne nerešljivosti tega problema se ne da analogno, kot smo to videli pri Fermatovem problemu, dokazati, da je tedaj nerešljivost nedokazljiva. Saj tu morebitni nasprotni primer — kjer v zaporedju ne nastopi enica — morda ni nujno preverljiv kot tak v končnem številu korakov. Čeprav so v zadnjih letih mnogi prvovrstni specialisti za teorijo števil vložili veliko truda v reševanje tega problema, vsekakor še niso našli odgovora, kakor je sicer naloga sama varljivo »krotka«, in njena morebitna nerešljivost se za zdaj ne zdi izključena.

Sodim, da **so** omenjeni problemi, rezultati in še odprta vprašanja relevantni ne le za matematično logiko in matematiko sploh, ampak da imajo svoje implikacije za celotno filozofijo znanosti in, s potrebno previdnostjo pri izvajanju posledic in v interpretacijah, tudi za filozofijo v ožjem pomenu. Če se omejimo na matematiko, mislim, da takih rezultatov ne bi smeli ignorirati niti v načrtih sodobne modernizacije pouka matematike od osnovnih šol do univerz; seveda ne v tem smislu, da bi morali **priti** v zadevne učne načrte, ampak da bi jih morali **upoštevati** pri sestavljanju teh načrtov. Prepričan sem, da bi se s tem izognili tudi mnogim nepotrebnim zgreškom v neizbežno potrebnih, pogosto tudi radikalnih spremembah tega pouka ne le pri nas, ampak tudi drugod.

Dosedanja razlaga pravzaprav že hkrati bolj ali manj sugerira naznanjene misli in teze, o katerih sem govoril v začetku. Dovolil si jih bom sedaj kratko formulirati takole:

1. Tako imenovane »matematične resnice« niso nujno vse indiskutabilne, večne in absolutne. O mnogih načelnih vprašanjih matematike, npr. o obstoju matematičnih objektov in legitimnosti matematičnega sklepanja, se mišljenja tudi prvovrstnih matematikov včasih bistveno razločujejo: nekaj, kar je za tega očitno, je lahko za drugega nelegitimno in kot tako nesprejemljivo. Danes se ne zdi verjetno, da bodo te razlike kdaj do konca obvladane in odpravljene. Veliko verjetneje je, da bodo razna pojmovanja, razne smeri v matematiki še naprej vsekakor do neke mere mogle »reinterpretirati« druga drugo v svojem jeziku; tako bo npr. formalistična interpretacija intuicionizma še naprej formalizem, intuicionistična interpretacija formalizma pa bo še nadalje intuicionizem.

2. Kot so bile v matematiki tudi prej »krizne« dobe in kakor tudi sedaj matematika preživlja tako krizo, ni razloga, da bi verjeli, da je to tudi njena zadnja kriza. Celo, če bi bila ta, v nasprotju s predvidevanjem, razloženim pod 1., kdaj dokončno likvidirana, ne bi to v nobenem primeru zagotavljalo, da matematike v njenem prihodnjem razvoju ne čakajo nadaljnje krize.

3. Ni objektivnih razlogov za prepričanje, da bo matematika na vse, kar lahko postavi kot vprašanje, mogla dati tudi zadovoljiv odgovor. To ne pomeni nujno skepticizma ali agnosticizma v matematiki. Mutatis mutandis bi mogli tudi za matematiko uporabiti Goethejev znani izrek: »Najlepša sreča mislečega človeka je, da je raziskal, kar se raziskati da, in da mirno spoštuje, česar ni mogoče raziskati.«

4. Če je — in prepričani smo, da **je** — matematika najbolj eksaktna med znanostmi, ni to »absolutno« eksaktna znanost. Matematika ni okamnela in vkopana za nerazrušljivimi okopi v središču kontinenta eksaktnih znanosti; ob njegovih obalah leži, ob oceanu umetnosti. Tudi **estetski** kriteriji in motivacije se močno kažejo bodisi pri izvajanju konkretnega dokaza kakega matematičnega izreka bodisi pri izbiri izhodnih definicij in aksiomov za izgradnjo matematične teorije v celoti.

5. Kot sem poudaril že v začetku tega predavanja, vse to niti najmanj ne pomeni degradacije matematike, ne pomeni zmanjšanja njenega pomena ali dvoma o njeni vrednosti. Res, sprejemanje takih idej o matematiki morda zahteva določene žrtve in neki »pogum« od tistega matematika, ki je doslej v svoji znanosti iskal in videl le resnico, ne pa tudi lepote. S tem pa matematika samo **pridobiva,** saj stopa v krog tistih dejavnosti in doživljanj, katerih sodelavci se prej ali slej srečujejo z dilemo: ali bodo preskočili prepad, ki se je pokazal na robu zemlje, ki so jo dotlej obdelovali, in šli naprej — ali pa bodo še naprej ostali na prejšnjih položajih, bodisi preprosto iz udobja bodisi iz strahu, da jim ne bi očitali ali da si sami ne bi očitali, da so se bojevali za »propadlo stvar«. Samo tisti, ki matematike ne pozna dovolj, ki je dovolj ne ljubi in ne ceni, samo tak matematik lahko podvomi o njeni vrednosti in njeni lepoti, ko zapazi in prizna določeno relativnost nekaterih njenih spoznanj. Matematika je dovolj bogata, da ji nista potrebni ne deklarirana dogma ne ponarejeno spričevalo o načelni nezmotljivosti. Prav raziskovanja osnov matematike, ki jih je spodbudila njena zadnja kriza, so tako obogatila že prej prepolno zakladnico matematike, da ni vzroka za bojazen glede neizčrpnosti njenih bogastev. Ona ne izgublja, če je odstopila kot kraljica, in ne preživlja časa, občudujoč se v lastnem ogledalu. Vsakemu matematiku, ki ljubi svojo znanost, bo ta še naprej vračala ljubezen. Ni razloga, da bi se odrekli stavku iz nekega staroindijskega besedila: »Kakor krona pri pavu in žlahtni dragulj na kobrini glavi, tako zaseda matematika najvišje mesto med znanostmi.«

Prevedel *Janez Rakovec*

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 1/2

FREDHOLMOVE INTEGRALSKE ENAČBE PRVE VRSTE

EDI KRAMAR IN ANTON SUHADOLC

AMS Subj. Class. (1970) 45 B 05, 65 R 05

V članku obravnavamo Fredholmovo integralsko enačbo prvega reda. Pokažemo, da reševanje take enačbe ni korektno zastavljena naloga. Zato običajne numerične metode za približno reševanje integralskih enačb odpovedo. Približno reševanje integralske enačbe prvega reda prevedemo na reševanje neke druge, korektno zastavljene naloge.

ON FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Abstract. In the paper Fredholm integral equations of the first kind are considered. It is shown that solving such an equation is not a well-posed problem. A regularisation method is presented. Also approximate solving of Fredhom integral equations of the first kind is briefly considered.

Enačbo oblike

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{1}$$

imenujemo linearno integralsko enačbo prve vrste. Funkciji $K(x, y)$ in $f(y)$ sta dani, $\varphi(x)$ iščemo; $K(x, y)$ imenujemo jedro integralske enačbe, $f(x)$ pa desno stran. Če je jedro zvezna funkcija ali vsaj merljiva in s kvadratom integrabilna, torej

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx\, dy < \infty \tag{2}$$

imenujemo enačno (1) Fredholmova integralska enačba prve vrste. Za desno stran predpostavljamo, da je zvezna funkcija ali vsaj merljiva in s kvadratom integrabilna. Leva stran enačbe (1) določa linearni operator **A** s predpisom

$$(\mathbf{A}\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \tag{3}$$

Enačbo (1) zapišemo na kratko v operatorski pisavi

$$\mathbf{A}\varphi = f \tag{4}$$

Največkrat študiramo operator **A** kot operator, ki deluje v prostoru $C[a, b]$ na intervalu $[a, b]$ zveznih funkcij ali pa v prostoru $L^2(a, b)$ na intervalu (a, b) merljivih in s kvadratom integrabilnih funkcij. Če je npr. jedro K zvezna funkcija obeh spremenljivk, interval $[a, b]$ pa končen, je operator **A**, definiran z enačbo (3), gotovo zvezen v prostoru $C[a, b]$ in v prostoru $L^2(a, b)$.

Enačbe oblike (4) je klasificiral Hadamard na dva razreda. **A** naj bo operator, linearen ali nelinearen, ki preslika elemente množice X v elemente množice Y (ki more biti kar enaka X). Rečemo, da je reševanje enačbe (4) korektno zastavljena naloga, če so izpolnjeni pogoji:

1. enačba $\mathbf{A}\varphi = f$ je rešljiva za vsak element f množice Y;
2. pri vsakem f iz Y ima enačba eno samo rešitev v X;
3. rešitev φ enačbe $\mathbf{A}\varphi = f$ je zvezno odvisna od desne strani f.

Točka 3 potrebuje pojasnila. Predpostavimo, da sta X in Y normirana prostora. Naj bosta f in g dani funkciji iz prostora Y, φ in ψ pa rešitvi enačb $\mathbf{A}\varphi = f$ in $\mathbf{A}\psi = g$. Če za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da iz $\| f - g \| < \delta$ sledi $\| \varphi - \psi \| < \varepsilon$, rečemo, da je rešitev enačbe (4) zvezno odvisna od desne strani.

Zgornjo definicijo korektno zastavljene naloge moremo prevesti v jezik funkcionalne analize. Zahteva 1 pove, da je zaloga vrednosti $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ operatorja $\mathbf{A}$ ves prostor Y. Točka 2 zahteva, da se dve različni funkciji iz prostora X preslikata v različni točki v Y, eksistira torej k preslikavi $\mathbf{A}$ obratna preslikava $\mathbf{A}^{-1}$. Rešitev moremo zapisati formalno v obliki $\varphi = \mathbf{A}^{-1} f$. Zahteva 3 pa reče, da mora biti inverzni operator $\mathbf{A}^{-1}$ zvezen.

Če študiramo enačbo (4), kjer deluje linearni operator $\mathbf{A}$ iz Banachovega prostora X v Banachov prostor Y in je $\mathbf{A}$ zvezni operator, bi mogli pokazati, da je zahteva 3 že posledica zahtev 1 in 2. V primeru, ko je $\mathbf{A}$ operator v prostoru $C[a, b]$ definiran s predpisom (3), kjer je jedro zvezna funkcija, zahteve 1, 2 in 3 niso nikoli izpolnjene! Ali $\mathbf{A}$ sploh nima inverznega, ali pa $\mathbf{A}^{-1}$ ni omejen operator. Teh trditev ne bomo dokazali, oglejmo si jih le na primeru!

Naj bo $K(x, y) = xy$. Tedaj je za vsako zvezno funkcijo $\varphi(x)$ slika

$$\mathbf{A}\varphi = \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = x \int_a^b y\varphi(y)\,dy$$

proporcionalna x, saj je pri danem φ integral $\int_a^b y\varphi(y)\,dy$ število. Ves prostor $C[a, b]$ se torej preslika v enodimenzionalni podprostor funkcij oblike cx. Enačba (4) ima za ta operator rešitve kvečjemu za desne strani $f(x)$ oblike $f(x) = cx$. Pogoj 1 tedaj ni izpolnjen.

Vzemimo integralski operator z jedrom

$$K(x, y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq x \leq 2\pi \\ 0, & 2\pi \geq y > x \geq 0 \end{cases}$$

Enačba (1) ima sedaj obliko

$$\int_0^x y\varphi(y)\,dy = f(x)$$

Če pri danem f eksistira zvezna rešitev φ, sledi iz enačbe, da mora biti f zvezno odvedljiva funkcija. Z odvajanjem dobimo

$$\varphi(x) = f'(x)/x$$

Naj bo npr. $f(x) = (\cos nx)/n$. Tedaj je po zgornjem

$$\varphi(x) = (-\sin nx)/x$$

V prostoru $C[a, b]$ je norma funkcije φ definirana kot maksimum absolutne vrednosti funkcije φ po intervalu $[a, b]$. Normi zgornjih funkcij f in φ sta, upoštevaje $a = 0$, $b = 2\pi$

$$\| f \| = \max \left| (\cos nx)/n \right| = 1/n, \qquad \| \varphi \| = \max \left| (\sin nx)/x \right| = n$$

Desna stran ima majhno normo, $1/n$, rešitev pa veliko: n. Od tod sledi, da pogoj 3 v definiciji korektno zastavljene naloge ni izpolnjen.

Reševanje Fredholmove integralske enačbe prvega reda torej ni korektno zastavljen problem. Vendar so celo v fiziki često zanimive nekorektno zastavljene naloge, glej npr. inverzni problem prevoda toplote, članek [3]. Zato je pogosto treba numerično reševati enačbo (1) pri danem jedru K in dani desni strani f. Naloge bi se mogli naivno lotiti takole:

integral nadomestimo npr. s končno vsoto po trapezni formuli. Interval $[a, b]$ razdelimo na n enakih delov širine $h = (b - a)/n$. Približek za integral je tedaj

$$\int_a^b g(x)dx \approx h[\tfrac{1}{2}g(a) + g(a+h) + g(a+2h) + \ldots g(a+(n-1)h) + \tfrac{1}{2}g(b)]$$

Namesto integralske enačbe (1) dobimo tako sistem linearnih enačb

$$\tfrac{1}{2}hK(a+jh, a)\varphi_0 + h\sum_{i=1}^{n-1} K(a+jh, a+ih)\varphi_i + \tfrac{1}{2}hK(a+jh, b)\varphi_n = f_j$$
$$j = 0,1, \ldots, n \qquad (5)$$

Tu pomeni $f_j = f(a+jh)$, φ_i pa so približki za vrednost iskane funkcije $\varphi(x)$ v točkah $a + ih$.

Nasploh bi pričakovali, da so rešitve sistema, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dobri približki k vrednostim iskane funkcije $\varphi(x)$ v točkah $a, a+h, \ldots, b$. Ko večamo n, število podintervalov, bi pričakovali, da bodo konvergirali približki k vrednostim funkcije $\varphi(x)$. Pričakovanje se ne izpolni! Med računanjem rešitev sistema (5) napravimo seveda zaokrožitvene napake, ki lahko na rezultat porazno učinkujejo. Pri večanju števila podintervalov n se često približki slabšajo. Vse to je posledica dejstva, da reševanje enačbe (1) v prostoru $C[a, b]$ ni korektno zastavljena naloga.

Zgornje trditve si oglejmo na primeru. Naj bo

$$A\varphi = \int_0^x y\varphi(y)dy + \int_x^1 x\varphi(y)dy$$

Integralsko enačbo $\mathbf{A}\varphi = f$ moremo v tem primeru rešiti z odvajanjem. Če pri danem f obstaja zvezna rešitev $\varphi(x)$, velja enačba

$$\int_0^x y\varphi(y)dy + \int_x^1 x\varphi(y)dy = f(x) \qquad (6)$$

Sem vstavimo $x = 0$ in dobimo $f(0) = 0$. Ker je $\varphi(x)$ zvezna funkcija, sta oba integranda zvezna in integrala smemo odvajati na x. Tudi desna stran mora biti odvedljiva, ker je leva.

Odvajanje enačbe (6) nam da

$$\int_x^1 \varphi(y)dy = f'(x)$$

Sem vstavimo $x = 1$ in dobimo $f'(1) = 0$. Leva stran zgornje enačbe je odvedljiva na x, saj je integrand zvezna funkcija. Torej mora biti odvedljiva tudi desna stran. Z odvajanjem na x dobimo

$$\varphi(x) = -f''(x) \qquad (7)$$

Povzemimo: če ima enačba (6) zvezno rešitev $\varphi(x)$, mora biti desna stran $f(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva in mora zadoščati pogojema $f(0) = 0$ in $f'(1) = 0$.

Ni težko pokazati, da so ti pogoji tudi zadostni za eksistenco zvezne rešitve enačbe (6).

Če vzamemo $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$, se hitro prepričamo, da so zgornji pogoji izpolnjeni. Po formuli (7) dobimo $\varphi(x) = -1$.

Skušajmo rešiti enačbo (6) približno z uporabo trapezne formule! Dobljeni sistem (5), zapisan v matrični obliki, je

$$h^2 M\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \qquad (8)$$

kjer pomeni $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_k = \frac{1}{2}k^2h^2 - kh$ in

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2/2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 & 3/2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n/2 \end{bmatrix}$$

Pri računanju z računalnikom so zaokrožitvene napake neizbežne. Privzemimo, da napravimo pri izračunu zadnje desne strani f_n napako ε. Tedaj rešujemo namesto sistema (8) malo spremenjeni sistem

$$h^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{f} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Predzadnja in zadnja enačba tega sistema sta

$$h^2[\psi_1 + 2\psi_2 + \ldots + (n-1)\psi_{n-1} + \tfrac{1}{2}(n-1)\psi_n] = \tfrac{1}{2}(n-1)^2h^2 - (n-1)h$$
$$h^2[\psi_1 + 2\psi_2 + \ldots + (n-1)\psi_{n-1} + \tfrac{1}{2}n\psi_n] = \tfrac{1}{2}n^2h^2 - nh + \varepsilon$$

Če ju odštejemo, dobimo

$$\tfrac{1}{2}\psi_n = n - \tfrac{1}{2} - 1/h + \varepsilon/h^2$$

Isti postopek za sistem (8) pa da

$$\tfrac{1}{2}\psi_n = n - \tfrac{1}{2} - 1/h$$

Primerjava rezultatov pove: ena sama zaokrožitvena napaka pri izračunu desnih strani sistema (8) povzroči, da se pripadajoča približka ψ_n in φ_n razlikujeta za $2\varepsilon/h^2$. Ker je $h = 1/n$, je napaka $\psi_n - \varphi_n$ tem večja, čim večji je n! Reševanje sistema (8) je torej nestabilno, saj napaka ε pri eni desni strani povzroči napako $2\varepsilon n^2$ pri približku za rešitev. Zato izračunani približki za rešitev $\varphi(x)$ pogosto niso v nobeni zvezi z rešitvijo.

Zaradi tega pojava je bilo treba za približno reševanje nekorektno zastavljenih nalog izdelati popolnoma nove numerične metode. Namesto enačbe (4) rešujemo drugo enačbo, $\mathbf{B}\psi = g$, ki prvotno enačbo (4) »dobro« aproksimira. Operator $\mathbf{B}$ pa izberemo tako, da je reševanje enačbe $\mathbf{B}\psi = g$ korektno zastavljeno. Take postopke imenujemo regularizacijo nekorektno zastavljene naloge.

Za reševanje integralske enačbe (1) si bomo ogledali en tak postopek za regularizacijo. Več postopkov je obdelanih npr. v delu [1]. Naj bo torej $[a, b]$ končen interval, K dano zvezno jedro in f dana zvezna funkcija, pri kateri je enačba (1) rešljiva. Naj bo $q(x)$ poljubna zvezna pozitivna funkcija na intervalu $[a, b]$ in α poljubno pozitivno število. Tvorimo regularizujoči funkcional

$$F_\alpha(\psi) = \int_a^b [(\mathbf{A}\psi)(x) - f(x)]^2 dx + \alpha \int_a^b q(x)\psi(x)^2 dx \tag{9}$$

Tu je $\psi(x)$ poljubna zvezna funkcija. Ker je $F_\alpha(\psi)$ vsota dveh nenegativnih členov, je smiselno iskati minimum tega funkcionala. Pri $\alpha = 0$ je minimum gotovo enak 0; dobimo ga, če vzamemo $\psi = \varphi$, kjer pomeni φ rešitev enačbe (1). Pri $\alpha > 0$ iščemo minimum takole: naj bo h majhno število, χ poljubna zvezna funkcija. Po receptih variacijskega računa tvorimo prvo variacijo funkcionala F_α:

$$F_\alpha(\psi + h\chi) - F_\alpha(\psi) = 2h\left[\int_a^b (\mathbf{A}\psi - f)\mathbf{A}\chi\, dx + \alpha \int_a^b q\psi\chi\, dx\right] + h^2\left[\int_a^b (\mathbf{A}\chi)^2 dx + \alpha \int_a^b q\chi^2 dx\right]$$

Če naj bo minimum funkcionala F_α dosežen pri funkciji ψ, mora biti razlika $F_\alpha(\psi + h\chi) - F_\alpha(\psi)$ nenegativna za vsak h in vsako funkcijo χ; to pa bo le, če bo prvi izraz enak 0. Vzemimo nasprotno, da bi bil v zgornji enačbi izraz v prvem oklepaju na desni različen od nič. Pri danem ψ in χ prvi člen na desni spremeni znak, če spremeni znak število h. Drugi člen na desni je pozitiven za vsak $h = 0$ in v primeri s prvim členom pri majhnem h majhen, saj vsebuje faktor h^2. Znak zgornje razlike je določen torej s prvim členom. Minimum za naš ψ tedaj ni dosežen. Potrebni pogoj za nastop minima je torej: izraz v prvem oklepaju na desni mora biti enak nič

$$\int_a^b (\mathbf{A}\psi - f)\mathbf{A}\chi\, dx + \alpha \int_a^b q\psi\chi\, dx = 0 \tag{10}$$

Za $\mathbf{A}\psi$ in $\mathbf{A}\chi$ vstavimo izraza po enačbi (3). Po zamenjavi vrstnega reda integracij in uvedbi novega jedra

$$K_2(x, y) = \int_a^b K(t, x)K(t, y)\, dt \tag{11}$$

dobimo iz enačbe (10)

$$\int_a^b \left[\int K_2(x, y)\psi(y)\, dy - \int_a^b K(t, x)f(t)\, dt + \alpha q(x)\psi(x)\right]\chi(x)\, dx = 0$$

Tu je funkcija $\chi(x)$ še poljubna, zato mora biti izraz v oklepaju enak 0:

$$\alpha q(x)\psi(x) + \int_a^b K_2(x, y)\psi(y)\, dy = \int_a^b K(t, x)f(t)\, dt \tag{12}$$

To enačbo imenujemo regularizacijo enačbe (1).

Prav lahko se prepričamo, da je pogoj (12) tudi zadosten za nastop minima funkcionala F_α.

Enačba (12) je Fredholmova integralska enačba druge vrste za neznano funkcijo ψ. Navadno pišemo Fredholmove integralske enačbe v standardni obliki

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b L(x, y)\varphi(y)\, dy = g(x) \tag{13}$$

Iz primerjave z enačbo (12) sledi

$$L(x, y) = K_2(x, y)/q(x),\ \lambda = -1/\alpha,\ g(x) = \int_a^b K(t, x)f(t)\, dt/\alpha q(x).$$

Oglejmo si homogeno integralsko enačbo, ki pripada enačbi (12):

$$\alpha q(x)\psi(x) + \int_a^b K_2(x, y)\psi(y)\, dy = 0 \tag{14}$$

Predpostavimo, da ima ta enačba netrivialno rešitev $\varphi(x)$ pri nekem realnem številu α_0! To rešitev vstavimo v enačbo (14). Dobljeno enačbo pomnožimo s $\varphi(x)$ in jo integriramo na x v mejah od a do b; dobimo

$$\alpha_0 \int_a^b q(x)\varphi(x)^2\, dx + \int_a^b \int_a^b K_2(x, y)\varphi(y)\varphi(x)\, dy\, dx = 0$$

Tu upoštevamo definicijo (11) jedra K_2, pa dobimo

$$\int_a^b \left(\int_a^b K(t, y)\varphi(y)\, dy\right)\left(\int_a^b K(t, x)\varphi(x)\, dx\right) dt = -\alpha_0 \int_a^b q(x)\varphi(x)^2\, dx$$

Ker je $q(x)$ nenegativna funkcija, je integral na desni pozitivno število, izraz na levi pa je kvadrat realnega števila in zato tudi nenegativno število. Zato mora biti število α_0 nepozitivno. Homogena integralska enačba (14) pri $\alpha > 0$ nima netrivialne rešitve. Po Fredholmovih

izrekih (Glej npr. [2], str. 220) ima integralska enačba (12) natanko eno rešitev pri dani desni strani za vsak α, pri katerem pripadajoča homogena integralska enačba (14) ni netrivialno rešljiva. Kot smo ugotovili, je enačba (14) rešljiva kvečjemu pri $\alpha \leq 0$, zato je enačba (12) rešljiva enolično za vse $\alpha > 0$. Označimo njeno rešitev s $\varphi_\alpha(x)$. Pri tem $\varphi_\alpha(x)$ ima funkcional F_α minimum, zato velja za vsako funkcijo ψ ocena

$$F_\alpha(\varphi_\alpha) \leq F_\alpha(\psi) \tag{15}$$

Vstavimo za ψ v zgornjo neenačbo funkcijo φ, ki je rešitev enačbe (1). Iz formule (9) vidimo, da je prvi člen pri tem φ enak 0, zato dobimo oceno

$$F_\alpha(\varphi_\alpha) \leq F_\alpha(\varphi) = \alpha \int_a^b q(x)\varphi(x)^2 dx$$

Zadnji integral je nenegativno število, zato ga moremo pisati kot c^2 pri primernem številu c. Zgornja ocena dobi tako obliko

$$F_\alpha(\varphi_\alpha) \leq \alpha c^2$$

To zapišemo na dolgo

$$\int_a^b (\mathbf{A}\varphi_\alpha - f)^2 dx + \alpha \int_a^b q\varphi^2 dx \leq \alpha c^2$$

Ker sta oba člena na levi strani neenačbe nenegativna, velja še toliko bolj ocena

$$\int_a^b (\mathbf{A}\varphi_\alpha - f)^2 dx \leq \alpha c^2$$

Ko manjšamo α po pozitivnih vrednostih proti 0, dobimo iz zgornje ocene

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_a^b [\mathbf{A}\varphi_\alpha - f]^2 dx = 0 \tag{16}$$

Ta enačba predstavlja glavni rezultat naše teorije.

Izrek: Naj bo integralska enačba (1) *rešljiva. Tedaj je rešljiva njena regularizacija, enačba* (12), *za vsak* $\alpha > 0$. *Rešitve* φ_α *enačbe* (12) *približno rešijo enačbo* (1) *v smislu: ostanek* $r_\alpha = \mathbf{A}\varphi_\alpha - f$ *je majhen v kvadratičnem povprečju, točneje, velja enačba*

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_a^b r_\alpha^2 dx = 0$$

Dobljeni rezultat ni najboljši od možnih. Pri primernih predpostavkah se da dokazati mnogo več: približne rešitve $\varphi_\alpha(x)$ limitirajo proti neki rešitvi enačbe (1). Za dokaz izrekov te vrste glej npr. [1].

Iz zgornjega izreka dobimo navodilo za približno reševanje integralske enačbe prve vrste. Namesto enačbe (1) rešujemo regularizirano enačbo (12), ki je integralska enačba druge vrste. Rešitve te enačbe so približki k rešitvi enačbe (1) po oceni (16).

Na tem mestu se moramo vprašati, če nismo morda prišli iz dežja pod kap: ali je reševanje enačbe (12) lažja naloga kot reševanje enačbe (1)? Pritrdilen odgovor na zastavljeno vprašanje nam da ugotovitev: reševanje enačbe (12) pri $\alpha > 0$ je korektno zastavljena naloga. Točki 1 in 2 definicije korektno zastavljene naloge sta izpolnjeni, kot sledi iz Fredholmovih izrekov, glej npr. [2], str. 200 in naprej. Veljavnost zahteve 3 spoznamo iz formule za rešitev integralske enačbe (13), glej [2], str. 200, formula (η):

$$\varphi(x) = g(x) - \lambda \int_a^b F(x, y, \lambda) g(y) dy \tag{17}$$

Tu je $F(x, y, \lambda)$ zvezna funkcija x in y za vsak λ, pri katerem pripadajoča homogena enačba nima netrivialne rešitve. Za take λ dobimo oceno

$$|\varphi(x)| \leq \max_{a\leqslant x\leqslant b} |g(x)| + |\lambda| \cdot (b-a) \max_{a\leqslant x,y\leqslant b} |F(x, y, \lambda)| \max_{a\leqslant x\leqslant b} |g(x)|$$

Ocena velja za vsak x iz intervala $[a, b]$, zato tudi za maksimum:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi(x)| \leq [1 + |\lambda| (b-a) \max_{a\leqslant x,y\leqslant b} |F(x, y, \lambda)|] \cdot \max_{a\leqslant x\leqslant b} |g(x)|$$

Pri danem λ je izraz v oglatem oklepaju neko število, označimo ga z M. Če vzamemo funkcijo $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ majhno, npr. $\max |g(x)| \leq \varepsilon/M$, je tedaj tudi $\max |\varphi(x)| \leq \varepsilon$, kot sledi iz zgornje ocene. Izpolnjen je torej tudi pogoj 3 korektno zastavljene naloge. Za numerični račun ima ta ugotovitev pomembno posledico. Če med računom napravimo napako velikostnega reda ε, bo imela tudi napaka rešitve velikost istega reda!

Oglejmo si teorijo na našem zgledu

$$\int_0^x y\varphi(y)dy + \int_x^1 x\varphi(y)dy = f(x) \tag{18}$$

Vemo, da mora biti funkcija $f(x)$ zvezna, zvezno odvedljiva in zadoščati mora robnima pogojema $f(0) = 0$, $f'(1) = 0$. Vzemimo v definiciji (9) funkcionala F_α za q kar konstanto, $q(x) = 1$. Izračunajmo najprej jedro K_2:

$$K_2(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{2} x^2 y + xy, & x \geq y \\ -\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} xy^2 + xy, & x \leq y \end{cases}$$

Enačba (12) je sedaj

$$\begin{aligned} &\alpha\psi(x) + \int_0^x (-\tfrac{1}{6} y^3 - \tfrac{1}{2} x^2 y + xy)\psi(y)\, dy + \\ &+ \int_x^1 (-\tfrac{1}{6} x^3 - \tfrac{1}{2} xy^2 + xy)\psi(y)\, dy = \int_0^x yf(y)\, dy + \int_x^1 xf(y)\, dy \end{aligned} \tag{19}$$

Enačbo (19) odvajamo štirikrat na x in dobimo

$$\begin{aligned} &\alpha\psi'(x) + \int_0^x (-xy + y)\psi(y)\, dy + \int_x^1 (-\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} y^2 + y)\psi(y)\, dy = \int_x^1 f(y)\, dy \\ &\alpha\psi''(x) - \int_0^x y\psi(y)\, dy - \int_x^1 x\psi(y)\, dy = -f(x) \\ &\alpha\psi'''(x) - \int_x^1 \psi(y)\, dy = -f'(x) \\ &\alpha\psi^{(IV)}(x) + \psi(x) = -f''(x) \end{aligned} \tag{20}$$

V prvo in tretjo enačbo vstavimo $x = 1$, v drugo in v enačbo (18) pa $x = 0$ in dobimo pogoje, ki jim mora zadoščati $\psi(x)$:

$$\psi(0) = 0,\ \psi'(1) = 0,\ \psi''(0) = -f(0)/\alpha,\ \psi'''(1) = -f'(1)/\alpha \tag{21}$$

Reševanje integralske enačbe (19) smo prevedli na reševanje linearne diferencialne enačbe (20) s konstantnimi koeficienti in z robnimi pogoji (21). Vzemimo konkretni primer $f(x) =$

$= \frac{1}{2}x^2 - x$. Pri tem $f(x)$ vemo, da je rešitev enačbe (18) kar $\varphi(x) = -1$. Enačba (20) in pogoji (21) so sedaj

$$\alpha\psi^{(IV)} + \psi = -1, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(1) = 0, \quad \psi''(0) = 0, \quad \psi'''(1) = 0$$

Zaradi lažjega računa vpeljimo nov parameter po formuli $\alpha = 1/(4c^4)$. Rešitev diferencialne enačbe dobimo po znanih receptih:

$$\varphi_\alpha(x) = -1 + Ae^{c(1+i)x} + Be^{c(1-i)x} + Ce^{-c(1+i)x} + De^{-c(1-i)x}$$

Če še upoštevamo robne pogoje, dobimo po enostavnem, a daljšem računu rezultat

$$\varphi_\alpha(x) = -1 + [e^{-c(1+i)(1-x)} + e^{c(1+i)(1-x)}]/2\,[e^{c(1+i)} + e^{-c(1+i)}] + \\ + [e^{-c(1-i)(1-x)} + e^{c(1-i)(1-x)}]/2\,[e^{c(1-i)} + e^{-c(1-i)}] \qquad (22)$$

Dokazani izrek pravi, da limitira ostanek $\mathbf{A}\varphi_\alpha - f$ v kvadratičnem povprečju proti 0. V našem primeru velja več. Naj bo x poljubno število med 0 in 1. Ko manjšamo α po pozitivnih vrednostih proti 0, narašča $c = 1/(2^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{4}})$ po pozitivnih vrednostih proti ∞. V rešitvi $\varphi_\alpha(x)$, enačba (22), zlahka spoznamo, da tedaj limitirata drugi in tretji člen na desni proti 0, rešitev $\varphi_\alpha(x)$ zato limitira proti -1. Dobili smo torej rezultat: rešitve regularizirane enačbe (19) konvergirajo pri $\alpha \to 0+$ za vsak $x \in (0, 1)$ proti rešitvi prvotne enačbe (18).

Enačbo (19) bomo reševali približno, z uporabo trapezne kvadraturne formule, tako kot smo že reševali enačbo (18). Namesto sistema (8) linearnih enačb dobimo sedaj sistem

$$\alpha\psi + h\mathbf{N}\psi = \mathbf{k}$$

Tu pomeni $h = 1/n$, $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_i = k(i/n)$, $k(x) = \int_0^x yf(y)\,dy + \int_x^1 xf(y)\,dy = -x^4/24 + x^3/6 - x/3$. Količina ψ_i je približek za vrednost rešitve $\varphi_\alpha(x)$ v točki $x = i/n$. Matrika $\mathbf{N}$ ima elemente

$$N_{ki} = \begin{cases} -\frac{1}{6}\left(\frac{i}{n}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{i}{n} + \frac{ki}{n^2}, & k > i \\ -\frac{1}{6}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{k}{n} + \frac{ki}{n^2}, & k \leq i \leq n-1 \\ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \frac{k}{n}\right], & i = n \end{cases}$$

Sedaj se moramo odločiti, kakšno vrednost naj damo parametru α. Pri izboru α je treba upoštevati dve dejstvi. Pri $\alpha \to 0$ konvergira $\int_a^b (\mathbf{A}\varphi_\alpha - f)^2 dx$ proti 0; rešitev φ_α bo torej tem bolj natančno rešila enačbo $\mathbf{A}\varphi = f$, čim manjši bo α. Ta ugotovitev nas sili, da vzamemo α čim manjši. Pri ugotavljanju, da je reševanje enačbe (13) korektno zastavljena naloga, smo rabili tudi formulo (17). Če upoštevamo zvezi

$$\lambda = -1/\alpha, \quad g(x) = \int_a^b K(t, x) f(t)\,dt/[\alpha q(x)],$$

dobimo iz enačbe (17)

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\int_a^b \frac{K(t, x) f(t)}{q(x)}\,dt + \frac{1}{\alpha^2}\int_a^b F(x, y, -1/\alpha)\left[\int_a^b \frac{K(t, y) f(t)}{q(y)}\,dt\right] dy$$

Od tod spoznamo, da se $\varphi_\alpha(x)$ pri majhni spremembi funkcije $f(x)$ že zaradi prvega člena spremeni za približno $1/\alpha$-krat toliko. Ko gre $\alpha \to 0$, postane rešitev enačbe (19) vedno bolj občutljiva za zaokrožitvene napake v računu. Ta premislek kaže, da ni dobro izbrati α premajhen.

V praksi določimo primerni α takole: v integralski enačbi (1), ki jo želimo numerično rešiti, si izberemo desno stran tako, da rešitev poznamo eksaktno. Nato rešujemo pri tako izbrani desni strani integralsko enačbo (12) numerično pri različnih α. Dobljene približke primerjamo z znano rešitvijo. Za optimalni α vzamemo tisti, pri katerem se pripadajoča rešitev $\varphi_\alpha(x)$ najmanj razlikuje od eksaktne rešitve. Zdi se smiselno, da bo ta α približno optimalen tudi pri vsaki drugi desni strani enačbe (1), pri kateri eksaktne rešitve navadno ne poznamo.

LITERATURA

Kramar E., *Fredholmove integralske enačbe prve vrste*, diplomsko delo, Ljubljana 1970.
Plemelj J., *Diferencialne in integralne enačbe*, Ljubljana, SAZU 1960.
Suhadolc A., *O nekorektno zastavljenih problemih*, Obzornik mat. fiz., **17** (1970), 109—114.

UTRINKI

ZANESLJIVI SIGNALI O NAVZOČNOSTI NLP

Člani sarajevskega kluba so uporabili *matematično logiko*. Vzeli so vrh Trebevića kot referentno točko sončnega zahoda in ugotovili, da je časovna razlika med sončnim zahodom v Sarajevu in zahodom sonca za leteči predmet 20 minut. Nato so upoštevali hitrost zemljine rotacije na sarajevski geografski širini (5 minut) in z enostavnim geometričnim izračunom ugotovili, da je NLP 24 kilometrov visoko.

Dnevnik, 22. decembra 1973, str. 12.

»RALLY MATEMATIKE«

Rally Tour D'Europe mnogi imenujejo tudi rally **matematike** in vzdržljivosti. **Zakaj matematike**? Mnogo je namreč posebnih izpitov, ki jih mora tekmovalec prevoziti v točno določenem času. Posebno težavno je to na gorskih etapah, kjer se zahteva na primer povprečna hitrost 50 km na uro, obstoja pa celo možnost, da tekmovalec to povprečje preseže. Če vozi hitreje, prav tako prejme kazenske točke, sicer pa je večina gorskih izpitov takšnih, da tekmovalec le s težavo doseže predpisano povprečje in je takšen izpit potem ena sama dirka.

Moto revija, 203 (1973) 276

KAM?

Marsikomu se ni lahko odločiti za študij. Tudi jaz sem bil v dvomih, kam naj se vpišem. Obiskal sem dr. Križaniča in mu razložil, da se ne morem odločiti niti za matematiko niti za fiziko, ker me oboje privlači. Prijazni profesor me je pozorno poslušal in mi nato mirno odvrnil: »Nič vam ne morem svetovati. Enkrat bo pač treba metati kovanec...«

Dušan Repovš

Obzornik mat. fiz. **21** (1974) št. 1/2

NEKAJ O ALGEBRSKI TOPOLOGIJI

PETER PETEK

MOS 18—01

V tem članku — in še dveh, ki bosta sledila — namerava avtor predstaviti bralcu klasični primer iz algebrske topologije — homologijo simplicialnih poliedrskih kompleksov.

SOMETHING ON ALGEBRAIC TOPOLOGY

In this article — and two more to follow — the author intends to present a "classical" subject of algebraic topology, the homology of simplicial polyhedral complexes.

A. Diferencialna stopničasta grupa. Homološka grupa.

Privzeli bomo, da je bralec seznanjen s pojmi grupe, Abelove grupe in proste Abelove grupe. V nasprotnem primeru naj vzame v roke knjigo: Vidav, Algebra (MK, Ljubljana 1972).

Imejmo zaporedje Abelovih grup $\{A_n\}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, torej za vsako celo število eno grupo. Napravimo direktno vsoto $A = \bigoplus A_n$. Elementi te grupe so končne vsote oblike

$$a = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{ik} \qquad i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \qquad a_{ij} \in A_{ij}$$

Če nastopa v vsoti en sam člen $a = a_{ij}$, imenujemo element a homogen in celo število i_j njegovo *stopnjo*, kar zapišemo tudi takole $deg(a) = i_j$ (od angleške besede degree = stopnja). Ker leži nevtralni element 0 v vsaki grupi A_n, mu lahko priredimo katerokoli celo število kot stopnjo.

Definicija 1. Bodi grupa A direktna vsota Abelovih grup

$$A = \bigoplus_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n$$

Grupo A imenujemo *stopničasto* (ali s tujko *graduirano*) *Abelovo grupo*.

Stopničasto grupo tedaj poznamo, če vemo za njene elemente, če poznamo pravilo za seštevanje in hierarhijo stopenj v grupi.

Primer: Postavimo $A_n = 0$ za $n < 0$ in $A_n = \boldsymbol{Z}$ za $n \geqq 0$. Da ločimo elemente posameznih stopenj med seboj, označimo generatorje po vrsti z a_0, a_1, a_2 itd. Tako imamo na primer element $a = 2a_0 + 3a_1 - 5a_3 + a_{19}$.

Ta primer se odlikuje po dveh posebnih lastnostih. Prvič, vse grupe z negativnimi indeksi so trivialne. Taki grupi rečemo, da je *nenegativno stopničasta*. In drugič, vse grupe A_n so proste Abelova. Seveda je zato prosta Abelova tudi grupa A sama.

Vpeljimo pojem diferencialne grupe!

Definicija 2. Naj bo G Abelova grupa in $\partial : G \to G$ homomorfizem z lastnostjo $\partial^2 = 0$. Par (G, ∂) se imenuje *diferencialna Abelova grupa*, homomorfizem ∂ pa *diferencial* (*mejni operator*) grupe.

Jedro homomorfizma ∂ imenujemo *grupo ciklov*, $Ker\ \partial = Z$, in njene elemente *cikle*. Sliko homomorfizma ∂ imenujemo *grupo mej*, $Im\ \partial = B$, elemente *meje*. Ker je kvadrat diferenciala trivialen, je seveda grupa mej podgrupa grupe ciklov ($B \subset Z$), vsaka meja je tudi cikel. Zato moremo tvoriti faktorsko grupo.

Definicija 3. Faktorska grupa grupe ciklov po grupi mej Z/B se imenuje *homološka grupa* para (G, ∂). Označimo jo s $H(G, \partial)$.

Primer: Vzemimo za G grupo ostankov pri deljenju z 12. Običajna oznaka za to abstraktno grupo je $\mathbf{Z}_{12}$. Elementov ima seveda 12 in jih označimo kar z 0, 1, 2, ... 11. Homomorfizem ∂ naj prevede vsak element $x \in \mathbf{Z}_{12}$ v njegov šestkratnik $\partial x = 6x$. To je res diferencial, saj je $\partial^2 x = 36x = 0$.

Kaj so cikli? To so tista števila, ki so po množenju s šest deljiva z 12, torej vsa soda števila 0, 2, 4, 6, 8, 10. In meje? Soda števila se z diferencialom preslikajo v nič, liha v element 6. V grupi mej sta le dva elementa, 0 in 6.

Homološka grupa? Tri elemente ima, cikli so namreč po dva in dva ekvivalentni $0 \sim 6$, $2 \sim 8$, $4 \sim 10$. Če označimo ekvivalenčni razred z manjšim številom, lahko napišemo elemente grupe $H(G, \partial) = \{0, 2, 4\}$. Grupna operacija je seštevanje po modulu 6; seveda je ta homološka grupa izomorfna grupi ostankov po modulu 3 : $H(G, \partial) \cong \mathbf{Z}_3$.

Sedaj združimo oba pojma, stopničasto in diferencialno Abelovo grupo. Definicija skoraj ni potrebna. Homološka grupa stopničaste diferencialne grupe je spet stopničasta, če je le diferencial stopnje r, t. j. $\partial A_n \in A_{n+r}$. Z drugimi besedami, če poveča stopnjo homogenega elementa natanko za r. Vsi diferenciali seveda niso tako lepi.

Posebno zanimiv je primer, ko diferencial ∂ zmanjšuje stopnjo natanko za 1 — diferencial ∂ je stopnje -1. Če je še obenem grupa A prosta, zasluži posebno ime in definicijo.

Definicija 4. Prosta stopničasta diferencialna Abelova grupa C z diferencialom stopnje -1 se imenuje *verižni kompleks* ali tudi *kompleks verig*. Elemente grupe imenujemo *verige*.

Ker je ∂ stopnje -1, lahko za vsako celo število n definiramo homomorfizem $\partial_n : A_n \to A_{n-1}$ kot zožitev diferenciala na n-to stopničko A_n. Jedro tega homomorfizma označimo z Z_n in imenujemo *grupo ciklov stopnje n*. Slika ∂_n leži v A_{n-1} in jo zato imenujemo *grupo mej stopnje n—1*: $\partial_n A_n = B_{n-1}$. Tako dobi stopničenje tudi homološka grupa $H_n(C, \partial) = Z_n/B_n$. Narišimo še običajni diagram verižnega kompleksa

$$\xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} C_{n+2} \xleftarrow{\partial_{n+3}} \ldots.$$

Povejmo mimogrede, da se v primeru, ko ima diferencial stopnjo $+1$, grupa A imenuje *kompleks koverig* in elementi *koverige*. (Primerjaj F. Križanič, Vektorska in tenzorska analiza, VII. poglavje; MK 1966).

Primer: Kompleks (C, ∂) naj bo takle

$C_1 = \mathbf{Z}(a, b)$

$C_1 = \mathbf{Z}(A, B, C, D)$

$C_n = 0$ za $n \neq 0, 1$

Tu pomeni $\mathbf{Z}(a, b)$ prosto Abelovo grupo z generatorjema a in b. Diferencial je dan s predpisom

$$\partial A = \partial B = 0, \quad \partial C = a + b, \quad \partial D = 2a - 3b$$

in seveda $\partial a = \partial b = 0$, ker je $C_{-1} = 0$. In očitno je $\partial^2 = 0$.

Poiščimo homološko grupo! Edini netrivialni stopnici nosita indeksa 0 in 1.

Kaj so cikli stopnje nič? Cela grupa C_0, saj je ∂_0 trivialni homomorfizem: $Z_0 = C_0$. In meje? Vsak element iz C_1 lahko zapišemo kot celoštevilsko linearno kombinacijo $\alpha a + \beta b$. Pa zapišimo raje

$$\alpha a + \beta b = \alpha(a + b) + (\beta - \alpha)b$$

in se vprašajmo, kdaj je ta element v sliki $B_0 = \partial_1 C_1$!
Ker je $a + b = \partial C$ že v sliki, mora biti meja tudi $(\beta - \alpha)b$.

Recimo, da je $$(\beta - \alpha)b = \partial(xC + yD)$$

tedaj $$x(a + b) + y(2a - 3b) = (\beta - \alpha)b$$

in ker sta a in b prosta generatorja

$$x + 2y = 0$$
$$x - 3y = \beta - \alpha$$

Odštejemo $$5y = \alpha - \beta$$

Če naj bo y celo število, mora biti $\alpha - \beta$ deljivo s 5, torej $\alpha - \beta = 5\gamma$, ali z drugimi besedami: α lahko izberemo poljubno, prav tako γ, potem je $\beta = \alpha - 5\gamma$. Koliko je ekvivalenčnih razredov? Pet, ker toliko je različnih možnih ostankov $\beta - \alpha$ po deljenju s 5; ker je tudi seštevanje običajno, je grupa $H_1(C, \partial)$ izomorfna Z_5.

Grupo ciklov stopnje 1 $Ker\ \partial_1 = Z_1$ je lahko najti.
Recimo, da je $x = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ cikel

$$\partial(\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D) = 0$$

Uporabimo pravilo meje in dobimo zvezo

$$\gamma(a + b) + \delta(2a - 3b) = 0$$

in ker sta a in b neodvisna generatorja

$$\gamma + 2\delta = 0$$
$$\gamma - 3\delta = 0$$

in od tod

$$\gamma = \delta = 0,$$

medtem ko sta α in β poljubni celi števili. Zato $Z_1 = \boldsymbol{Z}(A, B)$. Ker je $C_2 = 0$, je tudi $B_1 = \partial_2 C_2 = 0$ in $H_1 = Z_1/B_1 = Z_1 = \boldsymbol{Z}(A, B) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$
Ostale homološke grupe kompleksa C so seveda trivialne.

Vse do zdaj smo zanemarili preslikave. V jeziku kategorij bi rekli, da smo opisali objekte, izpustili pa morfizme. Povejmo definicijo le za preslikave med verižnimi kompleksi.

Definicija 5. Naj bosta (C, ∂) in (C', ∂') verižna kompleksa. Homomorfizem $f : C \to C'$ se imenuje *preslikava verig* ali *verižna preslikava*, če velja

(i) $fC_n \subset C'_n$ za vsako celo število n
(ii) $\partial' f = f\partial$

Prvi pogoj uglasi preslikavo f s stopničasto strukturo, drugi z diferencialno. Zaradi pogoja (i) moremo homomorfizem f razbiti na zaporedje homomorfizmov $f_n : C_n \to C'_n$. Drugi pogoj povemo tako, da narišemo diagram — lestvico preslikave

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \xleftarrow{\partial_{n-2}} & C_{n-2} & \xleftarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & C_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & C_{n+1} & \xleftarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+2} & \xleftarrow{\partial_{n+3}} & \\
 & & \downarrow f_{n-2} & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_{n+2} & & \\
 & \xleftarrow{\partial'_{n-2}} & C'_{n-2} & \xleftarrow{\partial'_{n-1}} & C'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & C'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & C'_{n+1} & \xleftarrow{\partial'_{n+2}} & C'_{n+2} & \xleftarrow{\partial'_{n+3}} &
\end{array}$$

in zahtevamo, da »komutirajo« vsi kvadrati te lestvice.

Verižni kompleksi iz definicije 4 in preslikave iz definicije 5 tvorijo *kategorijo verižnih kompleksov in preslikav*.

NOVICI

DVOM O ODKRITJU GRAVITACIJSKIH VALOV

Obzornik za matematiko in fiziko je poročal o merjenjih, pri katerih naj bi J. Weber zaznal močne *sunke gravitacijskih valov*. Poročal je tudi o nadaljnjih poskusih, ki naj bi pričali, da so gravitacijski valovi le *tenzorski* in ni *skalarnih* valov, kakršne predvideva *tenzorsko-skalarna teorija gravitacijskega polja*. Ob objavi Webrovih rezultatov je nekaj astrofizikov izrazilo pomisleke teoretične narave. (Od tod vprašaj v naslovu »Gravitacijsko valovanje — odkrito?«) Vendar je Weber izvedel poskuse zelo skrbno in je prepričljivo trdil, da je izločil vse motnje. Tako je prevladalo mnenje, da je zares odkril gravitacijske valove in da se bodo pokazali teoretični nasprotni razlogi za neutemeljene. V zadnjem času pa narašča število tistih, ki ne verjamejo, da je Webru uspelo odkriti gravitacijske valove. O razlogih za to spremembo mnenja govori pričujoči sestavek.

Nihče ne dvomi o obstoju gravitacijskih valov, ki sledijo naravno iz *splošne teorije relativnosti*. Vendar trdijo Webrovi nasprotniki, da so sedanje antene še premalo občutljive, da bi jih mogle zaznati. Večinoma so antene, s katerimi poskušajo zaznati gravitacijske valove, aluminijski valji. Skoraj vse Webrove antene imajo maso po 1,5 ton, dolžino okoli 1,5 m in osnovno lastno frekvenco okoli 1,66 kHz. Valj je obešen z vodoravno geometrijsko osjo v posodi, iz katere je izsesan zrak, in je kolikor mogoče neodvisen od motenj iz okolice. Posebej je poskrbljeno, da se nanj ne bi prenašalo nihanje iz nje. Na plašču Webrovih anten so drobni piezoelektrični transduktorji, ki spreminjajo deformacije valja v električno napetost. Gravitacijski valovi, ki zadenejo valj pravokotno na geometrijsko os, vzbudijo lastno vzdolžno nihanje valja. Električno nihanje, ki nastane zaradi tega v transduktorjih, ojačijo in registrirajo. Sunek nihanja z nenavadno veliko amplitudo, za katerega ni zaznavnega zunanjega vzroka, utegne biti znanilec sunka gravitacijskih valov iz vesolja.

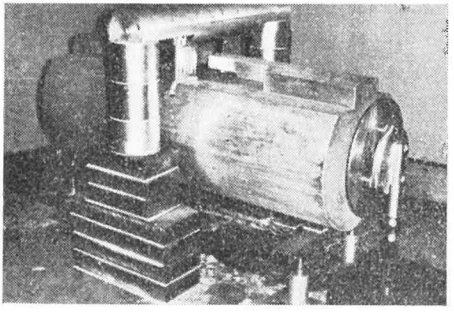
Da bi zanesljivo izločil neželene zunanje vplive, na primer elektromagnetne in potresne motnje, je opazoval Weber koincidence. Prva antena je stala na marylandski univerzi, druga pa v razdalji okoli 1000 km v Argonnu blizu Chicaga. Nihanje argonnske antene je speljal po telefonu do marylandske in je registriral koincidence sunkov z obeh anten. Dogodke, to je koincidence, ki so preostale po izločitvi naključnih in morebitnih lažnih koincidenc, je Weber pripisal močnim sunkom gravitacijskih valov. Skupina dveh anten je posebno občutljiva za gravitacijske valove iz dane smeri. Ta smer se spreminja z vrtenjem Zemlje in je določena z zvezdnim časom. Dogodki so bili najpogostejši, ko je kazala smer največje občutljivosti anten proti središču Galaksije. Po tem je sklepal, da prihajajo sunki gravitacijskih valov iz središča Galaksije.

Sporna je *občutljivost*, ki jo navaja Weber za svoje antene. Po najnovejšem Webrovem podatku naj bi bila občutljivost njegovih anten $kT/7$ v letih 1969-70 in $kT/100$ pozneje. Z občutljivostjo je mišljena najmanjša energija, ki jo mora antena sprejeti od gravitacijskih valov, da je mogoče nihanje valja ločiti od šuma. Poprečna kinetična energija valja pri temperaturi T zaradi termičnega nihanja atomov je $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}m\omega^2\overline{x^2} = \frac{1}{2}kT$. Tu je m masa valja, ω lastna krožna frekvenca, $\overline{v^2}$ poprečna vrednost kvadrata hitrosti in $\overline{x^2}$ poprečna vrednost odmika delov valja. Če bi bila občutljivost antene kT, bi zaznali premike osnovne ploskve valja proti drugi osnovni ploskvi z velikostno stopnjo $(\overline{x^2})^{\frac{1}{2}} = (kT/m\omega^2)^{\frac{1}{2}}$. Za valj pri sobni temperaturi dobimo z Webrovimi podatki $1{,}6 \cdot 10^{-16}$ m. To je približno štiridesetina premera atomskega jedra aluminija. Weber trdi, da zaznajo njegove antene še desetino te vrednosti.

Weber je ocenil največjo gostoto energijskega toka v sunku gravitacijskih valov z nekaj vati na kvadratni meter. Zaradi tega podatka je nastala resna zadrega. Pri tolikšnem energijskem toku bi se morala namreč spremeniti v energijo gravitacijskih valov v središču Galaksije vsako leto tisočkratna do desettisočkratna masa Sonca. Zaradi tolikšne izgube mase bi živela Galaksija samo 10^6 do 10^7 let in ne bi dočakala starosti več milijard let, ki ji jo pripisujejo. Poleg tega bi se Galaksija zaradi izgubljanja mase še dodatno razpenjala. Sodeč po gibanju zvezd v bližini Sonca v zadnjih 10^8 letih ni zgubila Galaksija v poprečju na leto niti dvesto sončnih mas (D. W. Sciama, G. B. Field, M. J. Rees, 1969).

Tudi še ni znan pojav, pri katerem naj bi nastali gravitacijski valovi s tolikšno gostoto energijskega toka. Proučevanje sevanja gravitacijskih valov je močno povečalo zanimanje za črne luknje. To so zelo težka in zelo majhna telesa, ki jih ne more zapustiti niti svetloba. Druga telesa, ki bi jih pritegnilo izredno gosto gravitacijsko polje črne luknje, bi izdatno sevala gravitacijske valove, ko bi padala proti črni luknji. Toda celo pri padanju telesa v črno luknjo se spremeni v energijo gravitacijskih valov samo del lastne energije telesa. Prav tak sklep velja za potrese na pulzarjih in druge nenavadne pojave. Vse to je povzročilo začetne dvome o Webrovih ugotovitvah.

Toda pravi dvomi izvirajo od merjenj. Po Webrovi zaslugi se ukvarja danes z zaznavanjem gravitacijskih valov več kot deset skupin. Na moskovski univerzi so V. B. Braginskij, A. B. Manukin, E. I. Popov, V. N. Rudenko in A. A. Horev zgradili anteni, ki sta bili v osnovi podobni Webrovim. Aluminijska valja sta imela maso po 1,3 tone in osnovni lastni frekvenci 1,64 kHz, Razmik med antenama je bil 20 km. Uporabili so več novosti. Nihanja valjev ne zaznavajo prek deformacij s transduktorji. Pač pa sta valja na krajiščih zavihana navzgor v nekakšen ročaj. V tem »ročaju« je reža, ki rabi kot ploščati kondenzator (sl. 1). Kondenzator je vključen v uravnovešen radiofrekvenčni mostiček, kakršne uporabljajo za merjenje upora ali kapacitete. Gravitacijski valovi povzročijo deformacijo valja, zaradi katere se spremeni razmik med elektrodama kondenzatorja. Sprememba kapacitete spravi mostiček iz ravnovesja. Pri tem nastane signal, ki ima okoli tisočkrat večjo amplitudo kot signal na piezoelektričnih transduktorjih. Signal ojačijo, vodijo na osciloskop in fotografsko registrirajo.



Sl. 1. Antena V. L. Braginskega in sodelavcev z moskovske univerze. Valj visi na jarmu, ki je postavljen na stebra iz jeklenih in kavčukovih opek. Dobro je viden nastavek v obliki ročaja z režo, ki služi kot ploščati kondenzator v mostičku za zaznavanje nihanj. Ploščati kondenzator za umerjanje je med sprednjo osnovno ploskvijo valja in posebno ploščo.

Nadaljnja posebnost je v tem, da anteni nista povezani s telefonom, ampak imata vsaka svoj osciloskop in registrirno napravo z zanesljivo uro. Za sinhronizacijo poskrbijo z radijskimi signali. Po končanem merjenju primerjajo zapisa z obeh anten in ugotovijo koincidence. Tudi Weber namerava preiti na tak način zaznavanja koincidenc. Pri telefonski zvezi obstaja namreč nevarnost, da sproži elektromagnetna motnja, ki zadene prvo anteno, preko telefona nihanje druge antene in s tem lažno koincidenco.

Občutljivost moskovskih anten je mogoče določiti neposredno. V ta namen uporabijo drugi ploščati kondenzator, ki mu je prva elektroda ena izmed osnovnih ploskev valja,

druga pa posebna plošča, vzporedna z osnovno ploskvijo. Na ta kondenzator priključijo kratkotrajen sunek izmenične napetosti z lastno frekvenco valja. S tem dovedejo valju znano energijo nihanja, na osciloskopu pa preberejo ustrezno amplitudo napetosti. Tako so ugotovili, da je občutljivost antene $9kT$.

Med dvajsetimi urami merjenja so opazili kakih trideset naključnih dogodkov, pri katerih sta bila sunka z obeh anten zakasnjena za manj kot 10 s. Nekaj dogodkov je bilo z manjšo zakasnitvijo kot 1 s. Toda zaradi popolnoma različnih časovnih potekov registriranih sunkov na obeh antenah, so sodili, da anteni nista zaznali nobenega sunka gravitacijskega valovanja.

Najnovejši rezultati moskovske skupine so podobni prejšnjim. V februarju in marcu 1973 so merili deset dni. To pot so skrbneje obdelali merske podatke. Kot dogodek so sprejeli sunka z obeh anten, če sta si sledila z manjšo zakasnitvijo kot 2 s in če sta bili amplitudi višji kot KA_T. Pri tem je K številski koeficient in A_T amplituda, ki ustreza termičnemu nihanju anten. V njihovih razmerah napoveduje teorija z verjetnostjo 0,95 34 naključnih koincidenc s $K = 1{,}5$, 18 s $K = 2$ in 4 s $K = 3$. Opazili pa so 26 dogodkov s $K = 1{,}5$, 14 s $K = 2$ in 3 s $K = 3$. Po tem so sklepali, da so bili vsi njihovi dogodki naključne koincidence in da nista zaznali anteni niti enega sunka gravitacijskih valov.

R. W. P. Drever z univerze v Glasgowu je zgradil par anten, od katerih ima vsaka tretjino mase Webrove antene, a približno enako lastno frekvenco. Vsaka antena je sestavljena iz dveh enakih aluminijskih valjev, ki sta spojena s plastjo piezoelektrične snovi. S tem je dosežena boljša sklopitev med deformacijo in električno napetostjo kot pri piezoelektričnih transduktorjih, ki so nalepljeni po plašču valja. Elektronske naprave dopuščajo zelo dobro časovno ločljivost. Posebno pozornost posveča Drever obdelavi električnega nihanja. Uporablja zapleten analizator sunkov po višini. Njegova naprava zapiše sunke na magnetni trak. Vezje je urejeno tako, da lahko z njim sproti proučuje tudi korelacijo med nihanjema obeh anten. Lahko tudi umetno zakasni eno izmed njiju. Korelacijski koeficient bi moral biti največji pri zakasnitvi nič, če bi anteni zaznavali sunke gravitacijskih valov.

Drever je meril z eno samo anteno eno leto, z obema skupaj pa pol leta. Pri tem je zanihala po ena izmed anten okoli dvajsetkrat. Enkrat samkrat sta zanihali obe hkrati. Toda Drever misli, da je šlo za naključno koincidenco.

J. A. Tyson iz Bellovih laboratorijev v Holmdellu (ZDA) je zgradil 4 m dolgo anteno z maso 4 tone in z lastno frekvenco 0,71 kHz. Tudi ta antena ima proti Webrovim nekatere izboljšave. Piezoelektrični transduktorji so pritrjeni na plašč valja v štirih pasovih in zvezani zaporedno. Tako ne zaznavajo prečnega (upogibnega) nihanja valja, ki ga gravitacijski valovi ne vzbudijo. Stebra iz jeklenih in kavčukovih opek, na katerih stoji jarem z obešenim valjem, lebdita na zračni blazini. Naprava zapiše električno nihanje na magnetni trak in ga neprestano primerja z nihanjem električnega oscilatorja, ki niha z osnovno lastno frekvenco valja. Tudi Tyson je umeril svojo anteno tako, da je preko posebnega kondenzatorja dovedel valju znano energijo nihanja. Med enoletnim merjenjem ni opazil niti enega znatnega nenadnega porasta amplitude električnega nihanja.

R. Garwin in J. L. Levine sta postavila v raziskovalnem središču IBM blizu New Yorka 1,5 m dolgo anteno s premerom 19 cm, z maso 118 kg in z lastno frekvenco 1,695 kHz. Antena je v vakuumski posodi, obešena podobno kot druge antene. Vsa vakuumska posoda je pritrjena na ogrodju, ki preko servomehanizmov izloči nihanja zgradbe z majhno frekvenco. Nihanje antene zaznava majhen piezoelektrični transduktor, ki je pritrjen med osnovno ploskev antene in telo z maso 5 kg. To telo je z žico pritrjeno na anteno in niha proti anteni z mnogo manjšo frekvenco od lastne frekvence antene. Tako smemo približno vzeti, da miruje glede na anteno. Signal iz transduktorja skrbno obdelajo, poprečijo preko 24 ms in zapišejo na magnetni trak.

Merili so 9 dni. Pri kasnejšem proučevanju dobljenih rezultatov se je pokazalo, da je porazdelitev števila sunkov nihanja po energiji Boltzmannova. Tako so vse opazovane sunke pripisali termičnemu šumu. Izjema je bil samo en sunek, a ta je bil verjetno posledica napake v elektronskem vezju. Tudi Levine in Garwin sta umerila svojo anteno tako, da sta ji dovedla preko kondenzatorja na krajišču znano energijo nihanja. Ugotovila sta, da je zaznala antena dve tretjini vseh sunkov z energijo $2kT$. Taka antena bi morala zaznati znaten delež Webrovih dogodkov, če bi šlo zares za gravitacijske valove. Ker antena ni zaznala teh sunkov, sta na koncu sklepala, da Webrovi dogodki niso v zvezi z gravitacijskimi valovi ali da so bili gravitacijski valovi v času merjenja šibkejši kot ob času Webrovih merjenj, ali pa so sunki valov mnogo daljši kot 24 ms.

K. Maischberger, B. Bertoti in G. Fioco so zgradili v Frascatiju blizu Rima anteno, ki je kolikor mogoče podobna Webrovi. H. Biling ima skoraj povsem enako anteno na Planckovem institutu v Münchnu. Obe anteni v razdalji dobrih 700 km delujeta v koincidenci.

G. E. Moss, L. R. Miller in R. L. Forward so razvili anteno posebne vrste, osnovano na Michelsonovem interferometru z laserjem. Vse dosedaj opisane antene sprejemajo le valove s frekvenco na nekaj tisočin hertza širokem območju okoli lastne frekvence valja, interferometrska antena pa sprejema na širokem pasu od 0,5 do 24 kHz. Dve izmed zrcal v interferometru, ki določata pot obeh delnih curkov svetlobe, sta pritrjeni na dveh rahlo vpetih telesih. Zaradi gravitacijskega valovanja se spremeni razmik med telesoma, kar se pokaže kot sprememba razlike poti obeh delnih curkov. Premik prog je premajhen, da bi ga mogli neposredno opazovati. Zato zaznajo spremembe na način, ki spominja na obdelavo signala v radijskem sprejemniku. Tako so že določili premike okoli $8 \cdot 10^{-6}$ Å. S to anteno so opazili nekaj nenavadnih sprememb razdalje med telesoma. Toda tega niso pripisali sunkom gravitacijskih valov. Antena te vrste je mnogo bolj dušena kot valji, ki nihajo z lastno frekvenco. Njena prednost pa je v tem, da je mogoče brez večjih težav povečati razdaljo med telesoma z zrcaloma in dobiti zelo dolgo anteno.

V mnogih laboratorijih gradijo antene z nihajočimi valji, na primer v Bristolu in Readingu v Angliji. Načrtujejo tudi antene z votlimi valji in antene z močno hlajenimi valji. W. Fairbank in W. Hamilton nameravata zgraditi anteno s 4-tonskim aluminijskim valjem pri temperaturi nekaj tisočin kelvina. V valj in v posodo bodo vgrajene superprevodne tuljave, tako da bo valj lebdel zaradi magnetne sile. Premike valja bodo zaznavali z Josephsonovimi spoji.

Večina opisanih rezultatov še ni bila objavljena. O njih so poročali na raznih sestankih. Na enem izmed sestankov, ki so ga priredile univerze iz Londona, Oxforda in Cambridgea v Oxfordu aprila 1973, je popolnoma prevladalo mnenje, da Webrove antene ne zaznavajo sunkov gravitacijskih valov. Drugi eksperimentatorji so si bili edini v tem, da prisoja Weber svojim antenam predobro občutljivost. Še ob podatku kT za občutljivost Webrovih anten so menili, da utegne biti desetkrat premajhen. Morda so Webrove antene zares občutljivejše od anten v drugih laboratorijih. Vendar bi tudi katera druga antena morala zaznati kak sunek gravitacijskih valov, če zaznavajo Webrove antene v poprečju po tri sunke na dan.

Na tem mestu moramo omeniti enega izmed najresnejših očitkov na Webrov račun. Številni fiziki sodijo, da je Webrov kriterij, s katerim izbira dogodke, premalo zahteven. Dejstvo, da narasteta amplitudi nihanja obeh anten v kratkem časovnem razmiku čez predpisano mejo, po njihovem mnenju še ne priča, da sta anteni zaznali sunek gravitacijskih valov. Prav lahko gre za naključno koincidenco zaradi termičnega nihanja anten. Mnogo zanesljivejše je neposredno opazovanje časovnega poteka nihanja anten. Le če bi bila časovna poteka za obe anteni do podrobnosti podobna, bi anteni zelo verjetno zares zaznali sunek gravitacijskih valov. Toda trditev, da so vsi Webrovi dogodki lažne koin-

cidence, gre najbrž predaleč. Pri lažnih koincidencah namreč ne bi bilo mogoče pojasniti odvisnosti od zvezdnega časa.

R. W. P. Drever je podal na oxfordskem sestanku pregled poskusov za zaznavanje gravitacijskih valov. Poudaril je, da doslej še nihče razen Webra ni trdil, da je zaznal sunke, ki bi jih bilo mogoče zanesljivo pripisati gravitacijskim valovom. Po njegovem mnenju bi utegnili biti Webrovi rezultati posledica motenj v zemeljskem magnetnem polju. Webrove antene imajo za razliko od drugih mnogo feromagnetnih sestavnih delov, čeprav seveda valji niso feromagnetni. Druga možnost, namreč da je ravno Weber po naključju ujel frekvenco, ki naj bi jo imeli zelo močni enobarvni gravitacijski valovi, je skrajnje neverjetna.

Teoretikov sklep na tem sestanku ni presenetil. Tako je odpadla zadrega zaradi tisoč do deset tisoč sončnih mas, ki naj bi se letno v središču Galaksije spremenile v energijo gravitacijskih valov. Menili so, da bi utegniie zaznati sunke gravitacijskih valov šele antene, ki bi bile okoli 10^8-krat občutljivejše od današnjih. V težave bi zašli šele, če z napravami, ki bi bile 10^{12}-krat občutljivejše od današnjih, ne bi zaznali gravitacijskih valov. Izboljšava občutljivosti za faktor 10^8 se zdi zelo zahtevna, vendar je dosegljiva najbrž že v nekaj letih.

Domneva o možni povezavi med motnjami v zemeljskem magnetnem polju in dogodki, ki jih zaznavajo Webrove antene, ni neosnovana. R. A. Adamjanc, A. D. Alekseev in N. I. Kososnicyn so izračunali korelacijski koeficient med Webrovimi dogodki s konca 1968 in začetka 1969 in spremembami v zemeljskem magnetnem polju. Ugotovili so, da obstaja korelacija med dnevi, ko so Webrove antene zaznale dogodke, in dnevi izrazitih sprememb v zemeljskem magnetnem polju. Pri tem imamo v mislih spremembe zemeljskega magnetnega polja zaradi sprememb v magnetosferi, to je v plasti na meji ozračja, ki je izpostavljena toku hitrih nabitih delcev s Sonca. Razmere v magnetosferi so odvisne od sončne aktivnosti. Zato ne preseneča dokaj izrazita korelacija med Webrovimi dogodki in številom sončnih peg, če upoštevajo Webrove dogodke za dva dni zakasnjene za sončnimi pegami. Podatki, s katerimi so razpolagali ruski fiziki, so bili zelo skopi. Zato so bili njihovi rezultati nezanesljivi.

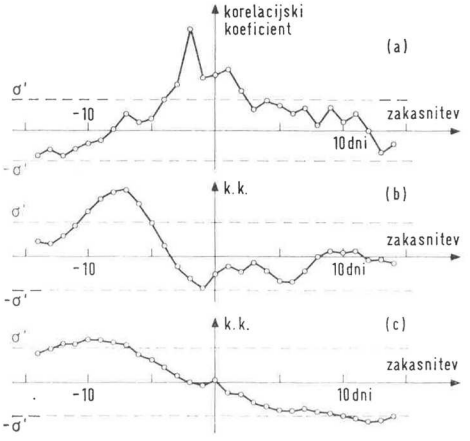
Izpopolnili so jih J. A. Tyson, C. G. Maclennan in L. J. Lanzerotti, ki so obdelali 262 dogodkov iz leta 1969, o katerih so dobili podatke naravnost od Webra. Izračunali so korelacijske koeficiente med nizom Webrovih dogodkov in nizi podatkov o nekaterih drugih količinah. Pri tem so spreminjali čas zakasnitve med obema nizoma podatkov od —14 do +14 dni. (V 28 dneh se Sonce zasuče okoli svoje osi.) Druge količine, ki so jih vključili v svoj račun, so razdelili v dve skupini. V prvo skupino so prišle količine, pri katerih je bilo mogoče pričakovati korelacijo z Webrovimi dogodki. To so bile: mera za magnetosferski tok, koeficient geomagnetne aktivnosti, število sončnih peg in dnevna vsota amplitude potresov v točki med Marylandom in Chicagom. V drugo skupino so prišle količine, za katere ni bilo mogoče pričakovati korelacije z Webrovimi dogodki in ki so rabile bolj kot osnova za primerjavo. To so bile: dnevna razlika največjega in najmanjšega zračnega tlaka, srednja dnevna temperatura zraka, izračunana vsota plimskih sil Sonca in Lune v točki med Marylandom in Chicagom — ta naj bi merila napetost v zemeljski skorji — in največja dnevna cena izbranega izdelka na chicaškem trgu izdelkov.

Korelacijski koeficient so izračunali z enačbo

$$(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} W_i X_{i+z} - \overline{WX})/\delta_X \delta_W,$$

v kateri je W_i število Webrovih dogodkov na dan i in X_i vrednost druge količine na dan i, $\overline{W}$ poprečno dnevno število Webrovih dogodkov, $\overline{X}$ poprečna vrednost druge količine in δ_W in δ_X ustrezna efektivna odmika; z je zakasnitev sprememb druge količine za Webrovimi dogodki, merjena v dneh. Negativna zakasnitev pomeni, da je Webrov dogodek

zaostal za spremembo druge količine; n je število dni (121), za katere so razpolagali s podatki o Webrovih dogodkih. Drugo količino so morali zaradi zakasnitve poznati na širšem intervalu kot Webrove dogodke.



Sl. 2. Korelacijski koeficient med Webrovimi dogodki in magnetosferskim tokom (a), številom sončnih peg (b) in najvišjo dnevno ceno izbranega izdelka na chikaškem trgu (c) v odvisnosti od zakasnitve. Črtkano sta narisani premici pri σ' in $-\sigma'$.

Znano je, da je korelacijski koeficient enak nič, če sta oba niza podatkov stohastično neodvisna, in enak ± 1, če imamo opraviti s sorazmernostjo. Vendar je v preiskanem primeru velikost korelacijskega koeficienta premalo zanesljiva mera za stopnjo korelacije. Pri oceni te stopnje si je bolje pomagati z efektivnim odmikom korelacijskega koeficienta σ', ki so ga izračunali z enačbo

$$\sigma' = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_X(i) f_W(i).$$

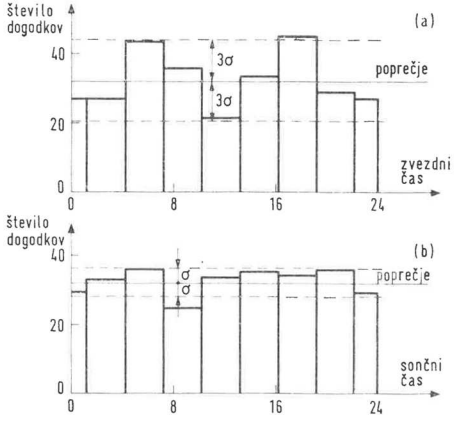
V njej sta f_X in f_W avtokorelacijski funkciji za niz podatkov o drugi količini in za niz podatkov o Webrovih dogodkih. Avtokorelacijske funkcije določijo za tipične avtokorelacijske čase: 9 dni pri Webrovih dogodkih, 5 dni pri meri za magnetosferski tok, 3 dni pri koeficientu geomagnetne aktivnosti. V primeru, da med nizoma dogodkov ni omembe vredne korelacije, pričakujemo, da je korelacijski koeficient le za tretjino vseh obdelanih dni večji kot σ' ali manjši kot $-\sigma'$.

Pri magnetosferskem toku je imel korelacijski koeficient vrh $2{,}7\sigma'$ pri zakasnitvi —2 dni. Korelacijski koeficient pri treh drugih količinah iz prve skupine je imel manj izrazite vrhove, ki so segali do $2\sigma'$. Doline korelacijskega koeficienta so segale pri vseh teh količinah nekako do $-\sigma'$. Pri količinah iz druge skupine se je spreminjal korelacijski koeficient v odvisnosti od zakasnitve le med σ' in $-\sigma'$. Samo približno ena tretjina vrednosti je bila za malenkost večja kot σ' in za malenkost manjša kot $-\sigma'$. Med temi količinami in Webrovi dogodki torej zares ni bilo upoštevanja vredne korelacije.

V porazdelitvi Webrovih dogodkov po zvezdnem času segata vrhova, ki ustrezata valovom iz smeri proti središču Galaksije, do 3σ. (σ je tu navaden efektivni odmik za dano porazdelitev.) Vrhovi v porazdelitvi Webrovih dogodkov po kakem drugem parametru, na primer po sončnem času, pa segajo samo do σ.

Pri vsej previdnosti, ki je na mestu ob statistični obdelavi podatkov, kažejo ti rezultati, da utegne biti vsaj del Webrovih dogodkov v nekakšni zvezi s pojavi na Zemlji ali na Soncu. V tem primeru ne more iti za gravitacijske valove iz globin vesolja. O vzroku za Webrove dogodke to nič ne pove. O tem je mogoče samo ugibati. Weber je preskusil odziv svojih anten na magnetne motnje. To je storil spočetka samo pri motnjah s frekvenco

lastnega nihanja valjev 1,66 kHz. V tem primeru so železne posode, ki obdajajo valje, zadostna zaščita pred motnjami. Za motnje z majhno frekvenco, ki so dovolj razsežne, da prizadenejo hkrati marylandsko in argonnsko anteno, pa bi utegnile biti železne posode prešibka zaščita. Spremembe magnetnega polja z zelo majhno frekvenco bi lahko preko feromagnetnih delov anten vzbudile lastno nihanje valjev.



Sl. 3. Porazdelitev Webrovih dogodkov po zvezdnem (a) in po sončnem času (b). Črtkano so narisane premice, ki so za 3σ (a) in σ (b) premaknjene proti poprečni vrednosti.

Pred kratkim je preskusil Weber s sodelavcem tudi odziv svojih anten na počasno se spreminjajoče magnetno polje. S tuljavo s premerom 1,2 m in z 200 ovoji je objel v vseh mogočih legah vakuumsko posodo z delujočo gravitacijsko anteno. Po tuljavi je napeljal izmenični tok, katerega frekvenco je spreminjal od 0,1 do 30 s^{-1}. Največja gostota magnetnega polja v prazni tuljavi je bila od 10^{-6} do $4 \cdot 10^{-5}$ T. Spremembe gostote v zemeljskem magnetnem polju so vsaj stokrat manjše. Webrove antene so se pokazale popolnoma neobčutljive za spreminjajoče se magnetno polje. Torej tudi počasi se spreminjajoče magnetno polje ne more biti krivo za Webrove dogodke.

V zadnjem času je prišel J. Shaham na presenetljivo misel. Predpostavil je, da so Webrove antene mnogo občutljivejše od drugih in da zares zaznavajo nekakšne dogodke. Vzrok za te dogodke pa naj ne bi bil povezan z globinami vesolja, ampak z našim Osončjem. S tem bi odpadla težava z nerazložljivo močnimi izviri v središču Galaksije. Dejstvo, da ima porazdelitev Webrovih dogodkov po zvezdnem času vrh pri času, ki ustreza smeri proti središču Galaksije ali nasprotni smeri, pa je mogoče pojasniti drugače.

Pri Zemlji ima presečišče *odlikovane ravnine* z ekliptiko (rektascenzija 18^h, višina —23° 27′) po naključju skoraj enako smer kot zveznica Sonca s središčem Galaksije (rektascenzija $17^h 43^{min}$, višina —28° 54′). Odlikovana ravnina je določena tako, da ležita v njej tirna vrtilna količina Zemlje pri gibanju okoli Sonca in njena lastna vrtilna količina pri vrtenju okoli težiščne osi. Vzemimo, da obstaja pojav s podobnimi značilnostmi, kot jih ima sklopitev spin — tir za elektron v atomu. Za zdaj nimamo pojma, kakšen pojav naj bi to bil. Lahko bi bil povezan z gravitacijskim poljem ali tudi ne. A če bi obstajal in bi bili njegova posledica Webrovi dogodki, bi mogli razumeti, da so Webrovi dogodki najpogostnejši okoli smeri, ki leži v odlikovani ravnini.

Seveda je zadnja domneva zelo drzna. Dejstvo, da se ukvarjajo tudi s takimi domnevami, priča o resni zadregi v zvezi z Webrovimi dogodki. Glede gravitacijskih valov je položaj danes vsekakor bolj zamotan, kot je bil pred leti. Tolažimo se lahko z mislijo, da to vzpodbuja napredek. Pogosto so sprožila podobna nasprotja v fiziki nova in presenetljiva odkritja.

J. Strnad

LITERATURA

Adamjanc R. A., Alekseev A. D., Kososnicyn N. I., *Korreljacija »Gravitacionnyh signalov« v opytah Webera s solnečnoj i zemnoj magnitnoj aktivnostju*, Pisma v ŽETF **15** (1972), 277.

Braginskij V. B., Manukin A. B., Popov E. I., Rudenko V. N., Horev A. A., *Poiski gravitacionnogo izlučenija vnezemnogo proihoždenija*, Pisma v ŽETF **16** (1972) 157.

Braginskij V. B., Manukin A. B., Popov E. I., Rudenko V. N., *The Search for Gravitational Radiation of Non-Terrestrial Origin*, *Physics Letters*, **45A** (1973) 271.

Garwin R. L., Levine J. L., *Single Gravity-Wave Detector Results Contrasted with Previous Coincidence Detection*, Phys. Rev. Letters, **31** (1973) 176.

Golli B., *Črne luknje*, Obzornik mat. fiz., **20** (1973) 48.

Gravitational Radiation, Waving Godbye to Weber's Waves, Nature **243**, (1973) 61.

Levine J. L., Garwin R. L., *Absence of Gravity-Wave Signals in a Bar at* 1695 *Hz*, Phys. Rev. Letters, **31** (1973) 173.

Logan J. L., *Gravitational Waves — a Progress Report*, Physics Today, **26** (1973) No. 3, 44.

Možina J., *Gravitacijsko valovanje*, Obzornik mat. fiz., **15** (1968) 116.

Sciama D. W., Field G. B., Rees M. J., *Upper Limit to Radiation of Mass Energy Derived from Expansion of Galaxy*, Phys. Rev. Letters, **23** (1969) 1514.

Shaham J., *Sidereal Period of Weber Events*, Nature Physical Science, **246** (1973) 25.

Strnad J., *Gravitacijsko valovanje — odkrito?*, Obzornik mat. fiz., **16** (1969) 97.

Strnad J., *Poskusi — za splošno teorijo relativnosti*, Obzornik mat. fiz., **18** (1971) 162.

Tyson J. A., Maclennan, C. G., Lanzerotti L. J., *Correlation of Reported Gravitational Radiation Events with Terrestrial Phenomena*, Phys. Rev. Letters, **30** (1973) 1006.

Weber J., *Detecting Gravity Waves*, Physics Today, **26** (1973) No. 4, 44.

Weber J., Trimble V., *On the Response of a Gravitational Radiation Detector to Magnetic Field Fluctuations*, Physics Letters, **45A** (1973) 353.

UTRINEK

VAN DE GRAAFF

S potovanja po Evropi. Ko sem se poleti potepal po tujini, sem v večjih mestih spraševal za muzeje ali rojstne hiše velikih znanstvenikov. Bil sem razočaran, ko v Amsterdamu niso imeli pojma, kdo bi utegnil biti van de Graaff, čeprav si je pred nekaj leti celo neka moderna skupina glasbenikov nadela ime njegovega izuma — van de Graaffov generator.

Dušan Repovš

TRENJE

Navadno trdimo, da je *največja sila lepenja* F_l sorazmerna s *pravokotno silo* F_0

$$F_l = k_l F_0. \tag{1}$$

k_l je *koeficient lepenja*. Trdimo tudi, da velja podobna zveza za *silo trenja* F_t

$$F_t = k_t F_0. \tag{2}$$

k_t je *koeficient trenja*. Koeficient lepenja je odvisen od sestava telesa, od sestava podlage in od obdelave stičnih ploskev, koeficient trenja pa še od hitrosti telesa glede na podlago. (Koeficient lepenja je mogoče imeti za koeficient trenja pri hitrosti nič.) Za oba koeficienta navadno vzamemo, da sta neodvisna od pravokotne sile.

Merjenja so pokazala, da zadnji privzetek ni upravičen.[1,2] Oba koeficienta sta odvisna od pravokotne sile: sta tem manjša, čim večja je pravokotna sila. V. Konečny je določal koeficient lepenja $k_l = F_l/F_0$ z merjenjem največjega kota, pri katerem kvader na klancu še ne zdrsne.[2] Osnovna ploskev lesenega kvadra je imela robova 4,4 cm in 6,6 cm. Teža kvadra je bila 0,20 N, a z nakladanjem uteži jo je povečal do 100 N. Za les na lesu se je koeficient lepenja zmanjšal od 0,59 pri pravokotni sili 0,17 N na 0,28 pri pravokotni sili 97 N.

S poskusi ugotovljeno zvezo med največjo silo lepenja in pravokotno silo je dobro opisala enačba

$$F_l = \kappa_l F_0^{\alpha_l}. \tag{1'}$$

Za les na lesu, plastiko na plastiki, kovino na plastiki, les na kovini, les na plastiki, plastiko na lesu so dala merjenja za eksponent $\alpha_l = 0{,}91$. Rezultati so bili nezanesljivi za nekaj odstotkov. Za kovino na kovini pa je bil rezultat v posamičnih primerih približno $\alpha_l = 1{,}1$. Za koeficient κ_l, ki ni neodvisen od izbire enot, je dobil pri lesu na lesu $0{,}67\ \mathrm{N}^{0{,}09}$.

Koeficient trenja $k_t = F_t/F_0$ je meril z istim kvadrom, ki ga je padajoča utež vlekla po vodoravni podlagi.[1] Izbral je tako utež, da je bila hitrost kvadra na opazovanem kraju približno konstantna in enaka okoli 15 cm/s. Koeficient trenja se je za les na lesu zmanjšal od 0,34 pri pravokotni sili 0,20 N na 0,16 pri pravokotni sili 100,2 N.

Opazovano zvezo med silo trenja in pravokotno silo je dobro opisala enačba

$$F_t = \kappa_t F_0^{\alpha_t}. \tag{2'}$$

Za vse preiskane primere je bil eksponent α_t v bližini 0,91, torej enak kot ustrezni eksponent α_l. Koeficient κ_t pa je bil $0{,}36\ \mathrm{N}^{0{,}09}$ za kovino na kovini, $0{,}31\ \mathrm{N}^{0{,}09}$ za kovino na lesu, $0{,}41\ \mathrm{N}^{0{,}09}$ za les na lesu, $0{,}59\ \mathrm{N}^{0{,}09}$ za steklo na steklu, $0{,}24\ \mathrm{N}^{0{,}09}$ za steklo na lesu in $0{,}50\ \mathrm{N}^{0{,}09}$ za les na sljudi.

Najbrž v srednji šoli ali v prvem letniku na univerzi ne bi kazalo obdelovati enačb (1') in (2'). Zadostujeta slej ko prej enačbi (1) in (2). Le pri navajanju vrednosti za koeficient lepenja k_l in koeficient trenja k_t je treba biti previdnejši. Treba je navesti območje pravokotne sile, na katero se nanaša navedena vrednost. Če upoštevamo, da so vsi podatki, ki zadevajo trenje, dokaj nezanesljivi, to ni težko napraviti.

Dušan Repovš

LITERATURA

Konečny V., *On the First Law of Friction*, Am. J. Phys., **41** (1973) 58 8.

Konečny V., *On Maximum Force of Static Friction*, Am. J. Phys., **41** (1973) 733.

DOMAČE VESTI

25. OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE NA BLEDU 7. IN 8. DECEMBRA 1973

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je imelo svoj 25. občni zbor na Bledu. Občni zbor je bil povezan s svečanostmi ob stoletnici rojstva slovenskega matematika Josipa Plemlja.

V petek dopoldne je predaval Vladimir Devidé z zagrebške univerze o vlogi matematike v moderni znanstveni misli.* Popoldne je predsednik Občinske skupščine Radovljica Stanko Kajdiž odkril spomenik Josipu Plemlju. Odkritja so se udeležili predstavniki slovenskega javnega in kulturnega življenja. Na spomeniku je vklesana Plemljeva misel »Matematika mi je bila življenjska potreba in umetniški užitek« in enačbi, ki nosita ime po njem. Zapel je pevski zbor osnovne šole Josipa Plemlja in zaigrala godba iz Gorij. Svečanost se je nadaljevala v festivalni dvorani. Tam so govorili Mitja Ribičič, predsednik RK SZDL Slovenije in podpredsednik Predsedstva SFRJ, Ivan Vidav, Janez Milčinski, Bogdan Vovk, France Križanič, Blagoje Popov, Vladimir Devidé. Po svečanosti je predsednik RK SZDL SRS in podpredsednik Predsedstva SFRJ priredil sprejem v prostorih hotela Golf na Bledu.

V hotelu Jelovica, kjer so stanovali udeleženci občnega zbora, se je po večerji začel družabni večer s plesom. Poživil ga je domiselni »antikviz« v režiji Antona Moljka. Tri tekmovalne ekipe — Presečki, veliki matematiki in mladi fiziki — so se kosale v »nefaktografskem« znanju fizike. Ko so se godci umaknili, so neutrudni pevci še vztrajali in čakali, da se bo prikazal komet Kohoutek.

V soboto je bil najprej ogled blejske osnovne šole, po deveti uri pa se je pričel občni zbor. Na njem smo najprej proslavili petindvajsetletnico društva in dvajset letnikov Obzornika za matematiko in fiziko. Najprej smo izvolili delovno predsedstvo z Ivanom Kuščerjem na čelu. Nato so v prvem delu govorili o delu društva in njegovih sekcij in o Obzorniku Niko Prijatelj, Dušan Modic, Gabrijel Tomšič, Tomaž Skulj in Janez Strnad. Pred odmorom so pozdravili občni zbor še delegati društev iz SR BiH in SRH. Delovni predsednik je prebral pozdravne brzojavke.

Po kratkem odmoru se je začel drugi del občnega zbora. Najprej je poročal o delu v preteklem letu predsednik Anton Moljk. V poročilu je omenil prizadevanje odbora, da bi čim bolj pridobil člane za sodelovanje. Na anketo s predlogi za delo in sodelovanje je odgovorilo manj kot 20 % vprašanih. Navzlic temu je mogoče dobiti iz odgovorov obilo pobud za delo.

Republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike je organizirala koprska podružnica. Sodelovalo je 167 tekmovalcev. Podelili so 4 prve, 3 druge in 10 tretjih nagrad ter 31 pohval. Republiško tekmovanje iz fizike je organizirala celjska podružnica. Sodelovalo je 200 tekmovalcev. Podelili so 2 prvi, 4 druge in 10 tretjih nagrad ter 13 pohval. Zvezno tekmovanje je bilo v Velenju. Na republiškem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje je sodelovalo 268 tekmovalcev, med katerimi jih je 84 prejelo to priznanje. Sodelovali smo tudi na balkanskem tekmovanju iz matematike za študente univerze.

Ob odkritju spominske plošče fiziku Ignaciju Klemenčiču v Trebnjem je v imenu društva govoril Lavo Čermelj. Društvo je organiziralo uvoz učil, za kar je Izvršni svet SRS odobril potrebne devize. Ekskurzije v Tehnični in naravoslovni muzej v Münchnu se je udeležilo 20 članov.

* Predavanja in poročila so objavljena posebej.

Veliko dela so dale priprave za proslavo ob stoletnici Plemljevega rojstva. Ob tej priliki je želel odbor v strokovni in širši javnosti oživiti spomin na Plemljevo življenje in delo, pokazati na rast matematike na Slovenskem in na vlogo matematike v sodobni družbi. Priprave na mednarodno konferenco o integralskih enačbah, ki so se začele že lani, je vodil poseben odbor. Ob proslavi je izšla brošura o Plemlju, ki jo je napisal Ivan Vidav. Izšla je posebna številka Obzornika. Izdali smo stensko sliko in razglednico Josipa Plemlja. Organizirali smo oddaje na RTV in poskrbeli za članke v dnevnem časopisju. Razposlali smo plakate in vabila v vse kraje Slovenije in vabila za proslavo članom matematičnih inštitutov v Jugoslaviji in bližnjem zamejstvu. Ob konferenci je pošta na Bledu pripravila posebno ovojnico, ob proslavi pa poseben žig. Pokroviteljstvo nad proslavami je prevzela RK SZDL Slovenije, ki je imenovala odbor za proslavo. Vse priprave so bile uspešno zaključene z odkritjem spomenika in svečano akademijo na Bledu.* Za občni zbor smo izdali bilten s poročili.

Predsednik se je zahvalil vsem, ki so sodelovali pri proslavah, in vsem sodelavcem in članom odbora, ki so v preteklem letu pomagali, da je bilo delo odbora uspešno. Posebej se je zahvalil kolegom z Bleda in Jesenic, ki so uspešno organizirali občni zbor. Nato je pozval občni zbor, naj podpre naslednje predloge:

— Zveza društev MFA naj podeljuje Plemljevo medaljo za uspešno poučevanje matematike in fizike na osnovnih,** srednjih, višjih in visokih šolah, za odlično napisane učbenike ali uspešno vzgojo mladih matematikov in fizikov.

— RIS naj razpiše Plemljeve nagrade za odlične študente matematike in fizike.

— V mestih naj po Plemlju imenujejo eno od ulic.

— Matematično-fizikalni oddelek na univerzi naj začne preučevati zgodovino matematike in fizike na Slovenskem.

— RIS in RSS naj razpišeta štipendije za podiplomski študij učiteljev matematike in fizike pri nas in za krajše tečaje v tujini.

— Uvedejo naj strokovne nazive za učitelje.

— Tisk, radio in televizija naj povečajo število prispevkov o znanstveni dejavnosti.

— Zaprosimo gospodarske organizacije, naj prispevajo v sklad za vzdrževanje hiše, ki jo je zapustil Plemelj društvu in bo v njej urejena spominska soba.

— K sodelovanju pri delu društva vabimo vse, ki se ukvarjajo z matematiko in fiziko ter astronomijo.

— Prihodnji občni zbor naj organizira koprska podružnica društva v Portorožu.

— Vsem, ki so omogočili proslavo stoletnice rojstva, se iskreno zahvaljujemo.

Z glasovanjem, ki je bilo po razpravi, so člani predloge soglasno sprejeli.

Tajnik Marjan Gojkovič je poročal o delu tajništva, o prizadevanjih za organizacijo družbenega življenja med člani in o anketi. Blagajničarka Iva Mulec je poročala o stanju blagajne. Zlasti zaradi tekmovanj, ki jih prireja društvo, je nastal primanjkljaj. Začasno so ga poravnali s sredstvi, ki so namenjena za seminar iz matematike. Tako je trenutno končno stanje vendarle pozitivno.

* Na Plemljev rojstni dan, 11. 12. 1973, je bila še svečana seja univerzitetnega sveta in univerzitetne študijske komisije, proslave pa so imele tudi nekatere šole.

Na predvečer, 10. decembra 1973, so stoletnico rojstva Josipa Plemlja počastili tudi na Matematični fakulteti Beloruske državne univerze v Minsku. Na zasedanju znanstvenega seminarja katedre za matematično analizo je o življenju in delu Josipa Plemlja govoril predstojnik katedre, član Akademije znanosti Beloruske SSR, profesor dr. F. D. Gahov.

V. A. Dobrovol'skij pa je v reviji Uspehi matematičeskih nauk, **28** (1973) 6, str. 223, objavil daljši prispevek o delu in življenju prof. dr. Josipa Plemlja s fotografijo iz leta 1963.

** Upoštevan je popravek, ki ga je predlagal France Perne.

Sledila so poročila o delu komisije za pedagoško dejavnost, za tisk in revije, sekcije za bibliografijo in terminologijo.

Sekcija za bibliografijo nadaljuje z zbiranjem materiala. Pri tem so težave, ker je raztresen po različnih knjižnicah v tujini. Vegovo razstavo v Zagorici bo treba dopolniti z novim materialom.

Terminološka sekcija za astronomijo je zbrala nad dva tisoč gesel, ki zdaj čakajo na nadaljnjo obravnavo. Matematična terminologija je tik pred izidom.

O delu mariborske podružnice je poročal Franc Bezjak. Podružnica je prenesla težišče dela na krožke po šolah, ker so člani in učenci preobloženi z delom. V oktobru je Franjo Jakhel predaval o problemskem pouku fizike.

O delu novogoriške podružnice je poročal France Perne. Na prvem sestanku so obravnavali učni načrt iz matematike za osnovno šolo, na drugem pa je Anton Fajfar govoril o programiranem pouku. Poskusno tekmovanje iz fizike za učence osmega razreda je dobro uspelo.

O delu koprske podružnice je poročala Bogomila Kolenko. Podružnica je izvedla republiško tekmovanje iz matematike.

Podružnica si tudi prizadeva, da bi pridobila čim več podpornih članov med gospodarskimi organizacijami. Poročevalka je posebej spregovorila o sodelovanju članov pri organizaciji osnovnošolskega tekmovanja. Podružnica je priredila tudi predavanje o Koperniku.

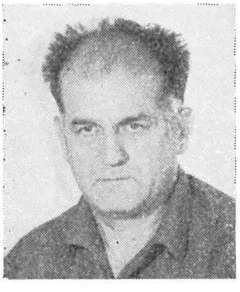
O delu celjske podružnice je poročala Anda Tomec. Podružnica je izvedla republiško in zvezno tekmovanje srednješolcev iz fizike v Celju in v Velenju. Po zveznem tekmovanju je priredila še tekmovanje osnovnošolcev za Vegovo priznanje. Oktobra so na sestanku obravnavali učne načrte, Presek in druge probleme. Novembra pa je Franjo Jakhel predaval o programiranem pouku fizike.

Murskosoboška podružnica je imela junija občni zbor, na katerem so med drugim obravnavali učni načrt iz matematike za osnovno šolo. Člani se udeležujejo predavanj, na katere jih vabi mariborska podružnica.

Fran Dominko je načel vprašanje programiranega pouka in želel dobiti informacijo o pripravah nanj. Precej obširno je razglabljal o vlogi društva pri ustvarjanju javnega mnenja o problemih, ki sodijo v matematiko, fiziko in astronomijo.

Tovarišica Majda Poljanškova je kot zastopnica RK SZDL pozdravila občni zbor. Glede Plemljevih nagrad je opozorila, da na primer tudi v zdravstvu ni nagrad za zaslužne delavce. Društvo naj problem predloži preko sekretariata za šolstvo, da se bodo ta vprašanja reševala enotno. Sporočila je tudi, da je bila formirana skupina, ki je pripravila material za uvedbo strokovnih nazivov za učitelje. Treba ga je zahtevati in preučiti.

Kot prejšnja leta je društvo tudi letos podelilo nekaterim članom priznanje za uspešno delo z mladimi matematiki in fiziki. Predsednik je izročil priznanja: Ivanu Breclju, Antonu Fajfarju, Mariji Jemec, Vladimirju Kustru, Nedi Marjanov, Franciju Oblaku in Andi Tomec.



Ivan Brecelj poučuje na gimnaziji v Kopru. Uspešno vodi astronomski krožek, poglablja se v metodiko fizike in predava na aktivih, ki jih prireja koprska podružnica društva.

Anton Fajfar poučuje na osnovni šoli v Kanalu. V poučevanje matematike uvaja novosti. Sodeluje pri organizaciji tekmovanja iz matematike za učence osnovnih šol, z uspehom pa je uvedel tudi tekmovanje iz fizike.

Marija Jemec je pedagoška svetovalka na zavodu za šolstvo v Ljubljani. Prej je poučevala na osnovni in srednji šoli. Zdaj se posveča uvajanju novih metod pri pouku matematike, zlasti v nižjih razredih. Pri širjenju zanimanja za matematiko sodeluje s koprsko podružnico društva. Nekaj časa je vodila aktiv matematikov in fizikov.

Vladimir Kuster poučuje na kranjski gimnaziji. Prej je poučeval na jeseniški gimnaziji. Posebej se posveča vzgoji dijakov, katerih nadarjenost za matematiko odkrije pri pouku. Z veseljem jih vodi in usmerja. To mu omogoča dobro poznavanje matematike. Njegovi učenci dosegajo na tekmovanjih zavidljive uspehe.

Neda Marjanov poučuje na osnovni šoli v Novi Gorici. V šoli uvaja nove delovne metode. Vodi sodobno usmerjen matematični krožek, katerega člani uspešno tekmujejo na osnovnošolskih tekmovanjih vseh stopenj. Sodeluje pri prizadevanjih za popularizacijo v okviru novogoriške podružnice.

Franci Oblak poučuje na pedagoški gimnaziji v Ljubljani. Je član komisije za popularizacijo matematike in fizike in eden od ustanoviteljev časopisa Presek ter sodi med najprizadevnejše člane v uredniškem odboru. Na šoli si prizadeva, da bi bodočim učiteljem vsadil veselje do matematike.

Društvo je izreklo priznanje tudi Andi Tomc s pedagoške gimnazije v Celju, ki je s kolektivom vzorno organizirala republiško in zvezno tekmovanje v fiziki. Tomčeva pa se je nagradi odpovedala v korist društva.

Predsednik komisije za tisk DMFA SR Slovenije Gabrijel Tomšič je obvestil občni zbor, da mora biti po novih predpisih o tisku ustanovljen družbeni organ upravljanja za Obzornik, Presek in Sigmo. Predložil je sestav tega organa in temeljne vsebinske zasnove naših publikacij. Predlog je bil sprejet brez pripomb.

V imenu nadzornega odbora, ki je pregledal zlasti blagajniško poslovanje društva, je poročal Aleksander Kregar. Ugotovil je, da je bilo blagajniško poslovanje vzorno. Predlagal je razrešnico odboru.

Niko Prijatelj je predlagal občnemu zboru, naj dosedanji odbor razreši s pohvalo. To je bilo soglasno sprejeto. Predlagal je še, naj dosedanji odbor z manjšimi spremembami vodi društvo še eno leto. Po krajši razpravi je bil predlagan naslednji odbor:

Upravni odbor

Predsednik Anton Moljk, podpredsednik Dušan Modic, tajnik Bogomila Kolenko, namestnik tajnika Darka Hvastja, blagajnik Iva Mulec, odborniki: Fran Dominko, Jože Pavlišič, Tomaž Skulj, Alojzij Vadnal, Pavle Zajc;

sekretar komisije za pedagoško dejavnost Martina Koman, člani: Sonja Križanič, Dušan Modic, Rado Torkar, Marjan Vagaja in Boris Žumer;

vodja sekcije za terminologijo Alojzij Vadnal;

vodja sekcije za bibliografijo Jože Povšič;

predsednik komisije za tisk in glavni urednik publikacij Gabrijel Tomšič;

sestav komisije: podpredsednik Janez Strnad, sekretar Ciril Velkovrh, blagajnik Janez Markelj, zastopniki publikacij Janez Strnad in Anton Suhadolc za OMF, Tomaž Skulj za Presek in Ciril Velkovrh za zbirko SIGMA, Ciril Velkovrh (tehnični urednik).

Uredniški odbori:

Obzornik: odgovorni urednik Janez Strnad, člani: France Avsec, Robert Blinc, France Kvaternik, Jože Lep, Anton Moljk, Jože Pahor, Mitja Rosina, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc (odgovarja za matematiko), Janez Strnad (odgovarja za fiziko), Ciril Velkovrh in Ivan Vidav;

Presek: odgovorni urednik Tomaž Skulj, člani Vladimir Batagelj, Jože Dover, Tomaž Fortuna, Marjan Hribar (odgovarja za fiziko), Andrej Kmet, Jože Kotnik, Matilda Lenarčič, Biserka Mikoš, Franci Oblak (odgovarja za matematiko), Tomaž Pisanski, Marijan Prosén, Jože Pavlišič, Dušan Repovš, Marijan Vagaja, Ciril Velkovrh;

Sigma: odgovorni urednik Ivan Vidav, člani Rajko Jamnik, France Križanič, Ivan Kuščer, Mitja Rosina, Janez Strnad, Alojzij Vadnal, Ciril Velkovrh;

nadzorni odbor:

Franc Plevnik, Zdravko Pivk, Ivan Štalec;

častno razsodišče:

France Bezjak, Milica Potisek, Ivan Vidav.

Člani razširjenega odbora so tudi predsedniki podružnic.

Predlagani odbor je bil izvoljen z veliko večino glasov. Ker je Anton Moljk izjavil, da ne bo sprejel predsedniškega mesta, je občni zbor na predlog predsedujočega pooblastil podpredsednika, da do ureditve tega vprašanja vodi upravni odbor in skliče njegovo prvo sejo.

Bogomila Kolenko, Dušan Modic

OB PETINDVAJSETLETNICI DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

Ko sem dobil prijazno vabilo, naj bi ob 25-letnici našega društva v širokih potezah predstavil njegovo dejavnost v tem obdobju in tudi uprl pogled naprej, sem se počutil nesrečnega. Nenadoma sem se namreč zavedel dejstva, bržčas velja to za vse nas, ki nismo poklicni zgodovinarji ali futurologi, da živim le za »danes« in kvečjemu še za »jutri«. Da bi se torej uprl tej zoprni omejenosti in hkrati vsaj delno ustregel vabilu, sem storil dvoje: začel sem brskati po spominu in listati naš Obzornik.

Spomin je kajpada nezanesljiv, luknjav in subjektiven. Zato ne jamčim, da je teh nekaj fragmentov »čista« resnica. Zame je, za druge, ki so morda drugače doživljali iste dogodke, pa lahko ne.

Svoje delo v društvu sem začel leta 1953 na povabilo ljubeznive gospe Marte Klopčič, takratne neutrudne voditeljice sekcije za dvig pouka in predavanja. Seje odbora društva so bile v bivšem matematičnem seminarju na Kongresnem trgu in se skoraj po pravilu končavale s hrenovko in kozarcem vina v eni izmed bližnjih gostilnic. To so bila romantična leta našega društva. Vsem odbornikom je bilo očito, kje smo in kam želimo, le pot ni bila vselej razvidna. Največ smo razpravljali o dijaških krožkih, seminarjih in seveda o našem tisku. Za uresničitev razmeroma skromnih načrtov je bilo treba premostiti kopico drobnih težav. Tako na primer Obzorniku ni nikoli povsem uspelo, da bi imel hkrati zagotovljene prispevke, denar in tiskarno. Vendar je vztrajno izhajal. Če ni šlo drugače, je pač mladostno preskočil kakšno leto. Predsednik Alojzij Vadnal je bil neugnan optimist. Ponavljal je, da bomo izpeljali vsak razumen načrt, če ne danes pa jutri, treba je le potrpežljivo vztrajati. V tistih letih je bil upravni odbor »glava« še ne popolnoma prebujenega organizma. Na letnih skupščinah smo bili namreč pogosto nesklepčni in šele čudovita klavzula naših pravil, ki je po polurnem čakanju podelila pravico manjšini navzočih, da odloča v imenu večine, je omogočila, da smo »zakonito« izvolili nov upravni odbor. Največji problem je bil vedno — in je še danes — najti predsednika. Po moji sodbi je to vsekakor simpatična značajska pomanjkljivost v deželi, kjer pomeni biti predsednik ali vsaj sekretar pomembno eksistencialno kategorijo. Za tajnikovanja Toma Skubica, ki je izvedel tako rekoč obvezno registracijo in mobilizacijo članstva, smo šele ugotovili, da smo pravzaprav veliko društvo. Odtistihmal smo bili menda na občnih zborih vedno sklepčni. Da bi se poudaril splošno slovenski značaj društva, je bila kasneje vpeljana lepa navada, da smo prirejali letne občne zbore v različnih krajih Slovenije. Nadalje se spominjam srditih debat v zvezi s članarino. Rečeno nam je bilo: če ste društvo, mora biti tudi članarina. Mi pa smo za Ivanom Kuščerjem trmoglavo ponavljali, da ne potrebujemo članarine, ampak vneta srca in voljo za delo. Tudi sicer smo bili kar se da razboriti v vseh stvareh, ki so zadevale vlogo matematike, fizike ali astronomije v naši družbi, pa naj je šlo za nedomišljene reforme pouka, učne načrte, potrebne ali nepotrebne reorganizacije ali pa za načelno priznanje družbenega pomena naših strok. V tem pogledu smo se vedno lahko zanesli na ostro in duhovito pero Franceta Križaniča.

Naj zdaj dopolnim te splošne vtise še z nekaterimi podatki, ki so zabeleženi v Obzorniku.

Neposredni vzrok za ustanovitev društva je bil prvi kongres jugoslovanskih matematikov, fizikov in astronomov leta 1949 na Bledu, za katerega pripravo in organizacijo so bili zadolženi slovenski matematiki in fiziki. Po uspešno opravljenem kongresu se je naše društvo spoprijelo z domačimi problemi in težavami. Najtrši oreh, žal ga ni bilo mogoče streti z enim udarcem, je bilo veliko pomanjkanje strokovnih kadrov glede na naglo naraščajoče potrebe v novih povojnih razmerah. Ob tem pa je še hitri razvoj naših strok v svetu neogibno zahteval trajno izpopolnjevanje že tako maloštevilnega kadra. Zato so bile v društvu najprej ustanovljene sekcije za tisk, za predavanja in dvig pouka, za terminologijo in za zbiranje bibliografije.

Leta 1951 je izšla prva številka Obzornika. Že na platnicah prve številke je bila napovedana izdaja Strokovne knjižnice, v kateri naj bi vsako leto izšlo 6 zvezkov s 40 do 60 stranmi srednje velikosti. Vsak zvezek naj bi v zaključeni obliki obravnaval kakšno ožje področje matematike ali fizike. Ta zamisel žal ni bila takoj uresničena, ni pa zamrla, saj je osem let pozneje začela izhajati naša zbirka SIGMA. Leta 1959 je namreč izšla prva knjiga zbirke Ivana Vidava Rešeni in nerešeni problemi matematike. Doslej je izšlo v tej zbirki 24 knjig. Mnoge med njimi so bile že ponatisnjene, trenutno je 9 razprodanih. V

zadnjih letih pa se je tiskovna dejavnost društva, predvsem po zaslugi neugnanega Cirila Velkovrha, bistveno povečala. V sodelovanju z univerznim institutom za matematiko, fiziko in mehaniko je bila osnovana še ena, obsežnejša in zahtevnejša zbirka univerznih

Delovno predsedstvo (zg.) in udeleženci (sp.) na 25. občnem zboru DMFA SRS

učbenikov in monografij MATEMATIKA. Prva knjiga v tej zbirki, Franceta Križaniča Vektorska in tenzorska analiza, je izšla leta 1966, do danes pa so izšle še tri knjige. Poleg tega je pričelo letos društvo izdajati tudi nov periodični list za mlade matematike, fizike in astronome PRESEK, ki naj bi vzbujal zanimanje za naše stroke že pri učencih osnovnih šol širom po Sloveniji.

Tudi sekcija za predavanja in dvig pouka, ki je dobila kasneje naziv komisija za pedagoško dejavnost, je v teh dveh desetletjih in pol uspešno opravila ogromno delo. Vse od začetka pa do danes je bilo nič koliko sestankov aktivov, na katerih so se izmenično vrstila strokovna predavanja in razprave o problemih sodobnega pouka. Iz skrbi za stalno in načrtno strokovno izpopolnjevanje se je rodila tudi organizacija večdnevnih seminarjev, na katerih so bila v strnjeni obliki obravnavana različna aktualna področja iz matematike in fizike. Od leta 1964 naprej so ti seminarji redno vsako leto, izmenoma iz matematike in fizike, in doslej so bili vedno izredno dobro obiskani.

Sekciji za terminologijo in za zbiranje bibliografije sta vztrajno opravljali sicer manj vidno, a zato nič manj potrebno delo. Obe sta že dolgo v stikih z ustreznimi komisijami pri SAZU. Prva je že zaključila terminološko obdelavo doslej objavljene domače matematične literature, druga pa s spoštljivo natančnostjo nadaljuje z zbiranjem biografskih in bibliografskih podatkov prvih pomembnih slovenskih matematikov. Povšičeva Bibliografija Franceta Močnika je izšla leta 1966 pri SAZU, izdelana pa je že tudi bibliografija Jurija Vege.

Z namenom, da bi pomagali pri razvoju naše industrije in gospodarstva, je bila leta 1952 pri društvu organizirana Matematična služba, ki je bila pripravljena opraviti za interesente vsakršna matematična in računska dela. Žal pa se ustanove in podjetja niso tako odzvale, kot bi bilo pričakovati.

Da bi čim bolj razširili med našimi ljudmi splošno matematično in fizikalno vednost in omiko, je društvo v prvih letih svojega obstoja prirejalo številna javna predavanja. Skupaj z Ljudsko univerzo je organiziralo tudi daljše tečaje iz matematike in eksperimentalne fizike.

Kmalu je postalo očitno, da bo mogoče zanesljivo napredovati le, če začnemo sistematično delati z mladino. Zato je bila ustanovljena posebna komisija za popularizacijo. Ta je pripravila, prvič v šolskem letu 1957/58, posebne matematične krožke za dijake srednjih šol, ki so jih mladi radovedneži obiskovali nepričakovano vestno in v presenetljivo velikem številu. Kasneje so sledili tudi krožki iz fizike z eksperimenti. Zadnja leta prireja komisija predavanja srednješolcem tudi v drugih krajih Slovenije. Že vrsto let organizira komisija republiška tekmovanja iz matematike in fizike, sodeluje pri vsakoletnih zveznih tekmovanjih in na mednarodnih matematičnih olimpiadah. Tekmovalni duh pa je prevzel tudi naše osnovne šole; tam se učenci vsako leto pomerijo med seboj za Vegova priznanja. Komisija je skratka povsem upravičila svoj obstoj.

Pri tem bežnem pregledu je izpadla še marsikatera pomembna dejavnost našega društva v petindvajsetih letih njegovega obstoja. Vesel bom, če me boste dopolnili. Vsekakor pa menim, da je že iz tega fragmentarnega zapisa razviden nesporni napredek in razvoj. Potemtakem tudi navdušenje in dobra volja, s katerima so se zavzeli za delo v društvu številni naši tovariši, nista bila zaman. To pa je najlepše objektivno priznanje in hkrati zahvala za njihov trud.

Niko Prijatelj

STROKOVNO IZPOPOLNJEVANJE

Med osnovnimi nalogami društva je bila že od vsega začetka skrb za strokovno izpopolnjevanje članov. V letu 1950 so se začela strokovna predavanja pod vodstvom Marte Klopčičeve. Predavanja so imela namen pomagati učitelju pri izboljšanju pouka in osve-

žiti in poglobiti znanje. Zato je sekcija za dvig pouka in strokovna predavanja prirejala strokovna in metodična predavanja, razprave, predvajala filme in prirejala ekskurzije in družabne večere. Organizirala je tudi matematično-fizikalno posvetovalnico za pomoč pri pouku, ki jo je vodil France Ahlin.

Po vojni ustanovljene nove šole niso imele ne dovolj usposobljenih učiteljev ne učil. Zato so bili tečaji za eksperimentiranje, prirejeni v letih 1956 do 1961, nuja. Na njih so se učitelji seznanjali z učili in spoznavali možnosti za improvizacije pri eksperimentiranju. Sedanji seminarji in predavanja so še vedno tako usmerjeni kot prvi: poglabljajo strokovno raven in seznanjajo z novostmi. Ne ukvarjajo pa se več z izdelovanjem primitivnih učil, temveč z uvajanjem sodobnih učnih pripomočkov.

Sekcija je pod vodstvom prizadevnih odbornikov Franceta Šušteršiča, Franca Plevnika, Milice Potisek, Marije Jemec in Marijana Opeke bolj ali manj uspešno še nadalje prirejala predavanja. Leta 1961 pa je bil organiziran prvi seminar iz moderne fizike, postopoma pa so mu sledili še drugi. Tako je bil letos februarja že sedmi seminar iz fizike. Modernizacija matematike v gimnaziji je zahtevala tudi dopolnilno izobraževanje učiteljev. 1964 smo organizirali prvi seminar iz matematike; obravnaval je strukture in verjetnostni račun. Prihodnje leto bo že peti seminar iz matematike. Pri prirejanju seminarjev sodelujeta odseka za fiziko in matematiko fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Inštitut Jožef Stefan in Zavod za šolstvo.

Danes skrbi za strokovno izpopolnjevanje pri društvu komisija za pedagoško dejavnost, ki je bila formirana leta 1971. Poleg aktiva matematikov in fizikov prireja seminarje iz matematike ali fizike in se ukvarja z vprašanji pouka, to je z učnimi načrti, predlogi za učbenike, učila in podobnim.

V dejavnosti komisije se odražajo težave, s katerimi se srečujejo učitelji pri svojem delu. Zato delo ni načrtovano za več let vnaprej. Še danes imamo podobne težave, kot jih je imela sekcija na začetku. Zdi se, da beremo sodobno poročilo, ko najdemo v poročilu Marte Klopčičeve tole:

»Težko je razumeti, zakaj stoji ob strani precejšen odstotek na naših šolah zaposlenih matematikov in fizikov... Manjka predavateljev, ki bi prinašali v delo aktiva živo problematiko prakse, vse svoje uspehe in neuspehe, težave in dosežene rezultate pri pouku matematike in fizike. Člani aktiva dajejo vse premalo pobud in predlogov.«

Danes je strokovno izpopolnjevanje uzakonjeno. Zato bi se morala z njim ukvarjati poklicna ustanova, društvo pa naj bi ga le usmerjalo in dajalo pobude. Čas za izpopolnjevanje se mora šteti v redno delo. Seminarji in predavanja ne zadoščajo. Omogočiti je treba študij na drugi in tretji stopnji. Tako celoletno delo je za učitelja, če ni preobložen s poukom, čudovito poživilo in vzpodbuda. Posebno je potrebno, če učitelj dolga leta uči in je več ali manj navezan sam nase, ker ne more »k sosedu v vas« ali po znanje v tujino.

* * *

Obdobje med dvema občnima zboroma je bilo krajše kot običajno. Poleg tega je zavod za šolstvo priredil za učitelje več seminarjev, tako seminar za ideološko vzgojo, razstavo učil, razgovore o učnem načrtu za fiziko. Tako so bili termini za običajna predavanja zasedeni in sta bila 1973 le dva aktiva. V maju je Ivan Štalec vodil razgovor o geometriji v drugem razredu gimnazije (33 udeležencev), Dušan Modic pa je ob pomoči Marjana Hribarja pred 52 poslušalci demonstriral Teltronovo zbirko za pouk atomike.

Člane aktivov smo povabili tudi k odkritju spominske plošče Ignaciju Klemenčiču 13. 5. 1973 v Trebnjem. Žal je bila udeležba pičla. Seminar iz matematike z naslovom Mesto matematike v ekonomiji bo šele od 4. do 6. februarja 1974.

Po seminarju o atomih smo organizirali uvoz učil za atomiko. RIS je vsem šolam, ki so se odločile za nakup, povrnila polovico stroškov. Učila je naročilo 11 šol, tako da

akcija lahko velja za uspešno. Na željo nekaterih šol, ki se takrat niso odločile za nakup, bomo v prihodnjem letu akcijo ponovili.

Komisija za pouk matematike (F. Galič, J. Jelenc, N. Kotnik, F. Križanič, J. Lorger, M. Lužnik, M. Jemec, M. Pagon, Š. Pirnat, F. Oblak, I. Štalec, M. Vagaja in P. Zajc, D. Modic kot sekretar) je uspešno dokončala delo z osnutkom učnega načrta za matematiko od 5. do 8. razreda osnovne šole. Člani so ugotovili, da tako delo presega amaterske okvire udejstvovanja. Vsem, ki so sodelovali pri delu komisije, se lepo zahvaljujem.

Po posredovanju komisije so se podiplomskega seminarja za srednješolske učitelje, ki ga vsako leto prireja belgijska vlada (lani je bil v Gentu), udeležili štirje člani. Vabimo, da se prijavijo vsi, ki se zanimajo za seminar avgusta 1974. Stroške bivanja v Belgiji bo poravnal organizator, plačati je treba le prevoz.

Dušan Modic

IZDAJATELJSKA DEJAVNOST DRUŠTVA

Ena od pomembnih in uspešnih nalog društva je publicistična dejavnost. Že 20 let izhaja strokovno glasilo *Obzornik za matematiko in fiziko*, od leta 1959 znana zbirka SIGMA, tej se je leta 1966 pridružila zbirka matematičnih učbenikov in monografij MATEMATIKA (izdajanje skupaj z IMFM). Delo z izdajanjem teh publikacij je že tako naraslo, da je bila v maju 1970 v okviru društva ustanovljena posebna komisija za tisk (KT). Namen te komisije je, da pospešuje in usklajuje izdajanje slovenske matematične, fizikalne in astronomske literature, da zbira finančna sredstva za subvencioniranje posameznih del. Dalje skrbi komisija še za redno izdajanje revij, knjig in skript za vse stopnje izobraževanja in znanstveno-raziskovalnega dela. Tako sedaj v okviru KT redno izhajajo publikacije društva, tem pa se je letos pridružila revija za mlade matematike, fizike in astronome PRESEK.

Povzetek izdajateljske dejavnosti pokaže, da je izšlo pri SIGMI 24 knjig in 11 ponatisov, v zbirki MATEMATIKA 5 knjig in 1 ponatis in množica raznih skript, povzetkov predavanj, namenjenih za vse potrebe: od osnovne šole do podiplomskih seminarjev, drugih učnih pripomočkov in brošur (50),* dalje dvajset letnikov OMF in prve številke PRESEKA. V tem letu (1973) se je izdajateljska dejavnost še posebej povečala zaradi publikacij ob proslavah stoletnice rojstva prof. J. Plemlja in seveda zaradi rednega izhajanja revije PRESEK.

Ob vsem tem izdajateljskem delu pa se je delo KT tako razširilo, da brez stalne administrativne moči komisija ne bo mogla normalno opraviti vsega dela. Uspeh tega leta je gotovo tudi odprtje pisarne KT v hiši za matematiko in fiziko (Jadranska 19/III); v njej je zaposlen uslužbenec tri ure dnevno.

Pri izdajateljskem delu uspešno sodelujemo z založbama MK in DZS. Še posebej se moramo zahvaliti založbi MK; ta je bila v začetku edina, ki se je odločila založiti nedonosne matematične knjige. DZS je zaupala KT vse priprave in organizacijo pri izdajanju in tiskanju tistih knjig, ki jih pri njih založijo.

Ena od neprijetnih nalog društva pri tej izdajateljski dejavnosti, katere namen je med drugim razširiti čim več strokovne literature in čim cenejšo strokovno literaturo, pa je iskanje potrebnih finančnih sredstev za subvencioniranje vseh teh publikacij. Tu se moramo za vso pomoč in razumevanje zahvaliti predvsem institucijam RRS, RIS, KSS. Vendar društvu še ni uspelo, da bi dokončno in stalno uredilo problem financiranja.

Vsa finančna sredstva se pri KT vodijo strogo namensko po posameznih izdajateljskih dejavnostih in upravni odbor skrbno pazi, da posamezne dejavnosti ne bi zašle v prevelik primanjkljaj.

Gabrijel Tomšič

---

* Podroben pregled naslovov je objavljen na 3. in 4. strani ovitka.

DVAJSET LETNIKOV OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Obzornik za matematiko in fiziko je začel izhajati 1951, a v letih 1954/55 in 1958/59 skupno tri leta ni izhajal. Na leto so izšle po štiri številke, od lani pa izide po šest številk. Letni obseg je 192 strani. Doslej se je nabralo skupaj 3780 strani (z imenskim in stvarnim kazalom po 15. letniku), to je več kot 17 cm debela knjiga.

Obzornik je začel izdajati uredniški odbor, ki so ga sestavljali Ivan Štalec (odgovorni urednik), Ivan Kuščer, Anton Moljk in Albin Žabkar. Kmalu je pristopil N. Toš kot tehnični urednik. Pozneje so urednikovali še (po vrsti, kot so postali člani uredniškega odbora): Ivan Vidav, Niko Prijatelj, Anton Kuhelj, Robert Blinc, Peter Gosar, France Križanič, Franc Kvaternik, Stanko Uršič, Janez Strnad, Zvonimir Bohte, Jože Pahor, Valentin Pivk, Mitja Rosina, France Šušteršič, Aleksander Cokan, Franc Avsec, Franc Garb, Tomaž Skulj, Anton Suhadolc in Jože Lep. 1959 je prevzel posle odgovornega in tehničnega urednika Franc Kvaternik. Zdaj šteje uredniški odbor enajst članov.

Po programu ob začetku izhajanja naj bi prinašal Obzornik strokovne *članke* in *novice* iz matematične in fizikalne literature. Poleg tega naj bi imel še razdelke: *navodila za poskuse, novi instrumenti, novice in vesti z naših šol in institutov, razprave o učnih načrtih, učilih in o novih knjigah, razgovori o strokovnem jeziku, vprašanja in odgovori* in *utrinki.*

Pred dobrimi tremi leti je uredniški odbor ponovno pretresal program. Tedaj je tekla razprava tudi o želji, da naj bi postal Obzornik dostopnejši za dijake. Uredniški odbor ni mogel sprejeti take dodatne obveznosti, ker bi s tem spremenil preteklo usmeritev lista. Ponovno je poudaril, da želi Obzornik skrbeti za strokovno in pedagoško izpopolnjevanje in stalno informiranje s področij matematike, fizike in astronomije. Ob tem se je rodila zamisel o Preseku — listu za srednješolce in osnovnošolce, ki je medtem že začel izhajati.

Najpomembnejše je vprašanje o vsebini Obzornika. Ali je Obzornik izpolnil postavljeni program? Ali so člani društva zadovoljni s svojim glasilom? Zdi se, da je Obzornik v glavnem dosegel postavljeni cilj. S članki in novicami je skrbel za širjenje strokovnega obzorja. Če se primerja z drugimi podobnimi listi, Obzornika ni treba biti sram. Od drugih razdelkov ustrezajo še društvene vesti, razglabljanja o učnih načrtih in poročila o novih knjigah. V zadnjih letnikih pa pogrešamo poročila o novih instrumentih, navodila za poskuse in poročila o novih učilih. Tudi vprašanja in odgovori so skoraj usahnili. Razprav o strokovnem jeziku je bilo že od vsega začetka zelo malo.

O zadovoljstvu bralcev ni oprijemljivih podatkov. Kaže, da Obzornik ugaja študentom in jim koristi. Od članov matematično-fizikalnega oddelka, ki so številno zastopani v uredniškem odboru, ni slišati tehtnejših pripomb. Zdi se, da so z Obzornikom najmanj zadovoljni učitelji in profesorji, ki učijo matematiko in fiziko na osnovnih in srednjih šolah. Nekateri izmed njih pravijo, da je Obzornik prezahteven. To da misliti, saj gre za najštevilnejšo skupino bralcev.

Strokovni list ne more biti lahko branje. Nekatere članke je treba pazljivo preštudirati. Ves trud s pisanjem in izdajanjem Obzornika pa je tem bolje naložen, čim več bralcev zbrano prebere članke s svojega področja. Nekateri članki so zares zahtevni, posebno za bralce, za katere študij ne sodi več k vsakdanjemu delu. Takih člankov bo v Obzorniku tem manj, čim več nezahtevnih člankov bodo prispevali bralci. Poziv k sodelovanju je upravičen, saj je le okoli 14 % prispevkov prišlo iz vrst učiteljev in profesorjev z osnovnih in srednjih šol. Okoli 80 % so jih napisali člani matematično-fizikalnega oddelka in študenti, okoli 5 % pa člani zavoda za šolstvo, akademij in visokih šol (podatki za prvih petnajst letnikov).

Uredniški odbor sam glede pritožb bralcev o preveliki zahtevnosti člankov ne more napraviti dosti. Lahko kvečjemu prosi avtorje, naj pišejo razumljiveje. Najbrž bi ravnal napak, če bi se spustil v širšo akcijo za znižanje ravni Obzornika, posebno zdaj, ko

imamo Presek. Še to: pritoževanje naročnikov o preveliki zahtevnosti strokovnih listov je precej splošno. Velja na primer tudi za bralce American Journal of Physics. Ta pojav se da preprosto pojasniti. Naročniki bi radi prebirali list in se izobraževali. Toda nimajo časa, če ga pa imajo, so preutrujeni za zbrano branje. To ni nič čudnega za koga, ki ima čez 20 ur pouka na teden. Razkorak med željami in možnostmi privede do neugodnega občutja, ki se prenese na list, češ da je prezahteven.

Obzornik s svojo nizko naklado okoli 1500 izvodov in s sorazmerno majhno ceno ne bi mogel izhajati brez izdatne družbene podpore. Največ je Obzorniku pomagal sklad za pospeševanje založništva, zdaj pa ga podpirata Izobraževalna skupnost in Raziskovalna skupnost. Želeli bi si le, da bi se ti skupnosti sporazumeli, po kakšnem ključu bosta prispevali za Obzornik. Tako bi mogel uredniški odbor delati načrte za daljši čas.

Novi uredniški odbor si mora prizadevati, da bi razširil krog sodelavcev in povečal število bralcev. Izbiral naj bi zanimive in neprezahtevne prispevke. Poleg tega bi moral skrbeti za redno izhajanje, da bi Obzornik bolj informiral člane o dejavnosti društva. Člani bi morali vsekakor pogosteje pisati v Obzornik: poročali naj bi o uspehih in težavah pri delu na šolah, vsaj v obliki dopisov uredništvu. Če se bomo trudili vsi po najboljših močeh, bomo dosegli, da bo postal Obzornik pravo društveno glasilo.

Janez Strnad

ZAHVALA DOSEDANJEMU ODGOVORNEMU UREDNIKU

Profesor Franc Kvaternik je po dvajsetem letniku prenehal biti odgovorni in tehnični urednik Obzornika za matematiko in fiziko, bo pa še naprej član uredniškega odbora. Delno zaradi določil novega zakona o tisku, ki zahteva drugačno razdelitev dolžnosti v uredniškem odboru, in delno zaradi preobremenjenosti je po lastni želji odložil posle, ki jih je opravljal od leta 1959, to je štirinajst let. Pomagal je na svet štirinajstim od dvajsetih letnikov Obzornika. Pri tem je opravil veliko, raznovrstno in pogosto nehvaležno delo. Njegova skrb je segala od nabiranja rokopisov in sredstev (dokler ni bila ustanovljena komisija za tisk) do nošenja rokopisov v tiskarno, raznašanja korekturnih odtisov in (na začetku) razpošiljanja lista. Vse to je opravljal kljub zaposlenosti s šolskim delom. Člani sedanjega uredniškega odbora in njegovi sodelavci se v imenu članov Društva matematikov, fizikov in astronomov in naročnikov zahvaljujejo profesorju Francu Kvaterniku za njegov prispevek pri urejanju in izdajanju Obzornika.

Janez Strnad, Ciril Velkovrh

POROČILO KOMISIJ ZA POPULARIZACIJO

V letu 1950 je bilo prvo republiško tekmovanje mladih matematikov, v šolskem letu 1950/51 pa prvo širše tekmovanje mladih matematikov, fizikov in biologov. Društvo pri pripravah za ta tekmovanja ni sodelovalo, pač pa je prvič leta 1957 pripravilo tečaj za srednješolce (251 udeležencev) in leto kasneje tekmovanje iz matematike. Tudi v naslednjem letu je društvo organiziralo tečaj iz matematike (60) udeležencev in prvič tudi tečaj iz fizike (okoli 300 udeležencev). V naslednjih letih je pripravilo podobne tečaje in predavanja za srednješolce in tekmovanje mladih matematikov in od leta 1964 tudi tekmovanja mladih fizikov. Na tečajih so dijakom govorili predavatelji matematike in fizike ljubljanske univerze o področjih matematike, o katerih slišijo v šoli malo ali nič. Pri fiziki pa so bila predavanja povezana s številnimi poskusi. Podobna predavanja so bila tudi po nekaterih drugih mestih po Sloveniji; organizirali so jih domači učitelji matematike in fizike. V zadnjih letih pa so te kraje obiskali tudi predavatelji z ljubljanske univerze. V Mariboru pripravljajo podobna predavanja predavatelji z višjih šol.

Društvo je izdalo za dijake, ki se pripravljajo na šolska in republiška tekmovanja, 6 zbirk nalog iz matematike in 3 zbirke nalog iz fizike. Deset let po ustanovitvi republiškega društva je začela izhajati knjižna zbirka SIGMA, namenjena tudi srednješolcem, ki se zanimajo za matematiko in fiziko. V zadnjem času sta izšli v SIGMI dve zbirki nalog, matematičnih in fizikalnih, z republiških in zveznih tekmovanj in z olimpiad.

V letih 1970 in 1971 se je delo sekcij za popularizacijo matematike in fizike močno razmahnilo. Leta 1971 je naše društvo prvič organiziralo zvezno tekmovanje mladih fizikov v Ljubljani. V teh letih je društvo tudi prvič sodelovalo v pripravah občinskih tekmovanj za srebrna Vegova priznanja in republiškega tekmovanja za zlato Vegovo priznanje.

V šolskih letih 1969/70 in 1970/71 je društvena komisija za popularizacijo skupaj z odsekom za fiziko pripravila akcijo za obiske učiteljev in asistentov odseka na srednjih šolah. V dveh letih se je na 16 gimnazijah zvrstilo 17 predavanj in razgovorov o študiju matematike in fizike. Leto kasneje je društvo organiziralo 5 predavanj iz matematike, fizike in astronomije. Predavanja so bila najprej v Ljubljani, nato pa še po drugih krajih po Sloveniji. Bila so zelo dobro obiskana (okoli 100 do 200 poslušalcev).

Leta 1972 so prevzele pripravo republiških tekmovanj mladih matematikov in fizikov posamezne podružnice. Matematično tekmovanje je organizirala podružnica v Mariboru (194 tekmovalcev), fizikalno tekmovanje pa podružnica v Novi Gorici (198 udeležencev). Tokrat je bil prvič na sporedu tudi fizikalni kviz. Zvezno tekmovanje je bilo to pot v Novi Gorici. Lani smo nadalje uresničevali zamisel, da bi bila republiška tekmovanja po vseh večjih krajih. Taka tekmovanja, posebno zvezno, prispevajo k zvečanju zanimanja za matematiko in fiziko. Tako je lani bilo tekmovanje v matematiki v Kopru, v fiziki pa v Celju. Zvezno tekmovanje je organizirala celjska podružnica v Velenju.

Pred tremi leti sta sekciji za popularizacijo matematike in fizike začeli obširne priprave za dopisno tekmovanje v časopisu Delo. Žal tekmovanja ni bilo. Prizadevanja pa so sprožila razmišljanja o mladinskem listu za mlade matematike, fizike in astronome. V marcu 1972 leta je izšla poskusna številka PRESEKA. Septembra 1973 je izšla prva številka PRESEKA, januarja letos pa druga številka že v nakladi 14000 izvodov. S PRESEKOM uresničujemo dolgoletne želje mladih, ki se zanimajo za matematiko, fiziko in astronomijo.

Težko je v nekaj besedah očrtati več kot petnajstletno sistematično prizadevanje društva za popularizacijo matematike, fizike in astronomije. Še teže je povedati, kje bi bili lahko bolj učinkoviti, česa nismo izkoristili, kdaj smo na kakšno pomembno stvar pozabili. Vendarle lahko omenimo nekaj slabosti. Premalo smo bili aktivni navzven, do družbe. Premalo smo izkoristili pomembne dogodke v matematiki, fiziki in astronomiji doma in na tujem za popularizacijo teh znanosti. Premalo je prispevkov iz matematike, fizike in

astronomije za najmlajše, pa tudi za širšo javnost po dnevnih časopisih in revijah. Pri tekmovanjih za srednješolce smo se preveč osredotočili na republiško tekmovanje z velikim številom tekmovalcev. Tako komaj polovica od njih doseza polovične uspehe.

V prihodnje ne smemo popustiti. Čaka nas še veliko dela: pomoč pri krožkih na osnovnih in srednjih šolah, tekmovanja po podružnicah z velikim številom tekmovalcev, na republiških tekmovanjih — matematični in fizikalni kviz, letne ali zimske šole mladih fizikov, dopisno tekmovanje v PRESEKU, knjige z matematično, fizikalno in astronomsko vsebino za najmlajše, široka popularizacija matematike, fizike in astronomije v časopisih in revijah, v radiu in na televiziji, prikazi poskusov, predavanja in filmi za vsakogar. Delo znamo opraviti, le volje in časa je včasih premalo.

Pri predavanjih, izdajanju zbirk nalog in knjig SIGME, pri PRESEKU, na tekmovanjih so nam pomagali Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Inštitut Jožef Stefan, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Republiški sekretariat za prosveto in kulturo, Izvršni svet, Republiška izobraževalna skupnost, Republiška kulturna skupnost, Republiška raziskovalna skupnost, temeljne izobraževalne skupnosti, Zavod za šolstvo ali njihovi predhodniki.

Zasluge za lepe uspehe in množičnost na predavanjih ali republiških tekmovanjih in za uspehe naših dijakov na zveznih tekmovanjih in na mednarodnih olimpiadah si deli mnogo ljudi. Med njimi so znani in manj znani, včasih tudi anonimni, osnovnošolski in srednješolski učitelji, univerzni asistenti in profesorji, člani raznih sekcij, tekmovalnih komisij, sekretarji in predsedniki teh komisij, sestavljalci nalog in korektorji, predavatelji in asistenti, laboranti. Kdo bi znal našteti vse! Vsakemu izmed njih pa velja naša iskrena zahvala.

Posebej moramo poudariti zasluge mnogih osnovnošolskih in srednješolskih učiteljev matematike in fizike po raznih krajih Slovenije. Ti so vzpodbujali svoje dijake k dodatnemu študiju in jim pri njem pomagali. Od leta 1968 izreče društvo javno priznanje in nagradi učitelje, ki s svojim delom na šoli ali zunaj nje širijo med učenci zanimanje za svoj predmet.

V imenu novih mladih generacij še prošnja: nadaljujmo z delom! Trud je vselej poplačan, če ne drugače — s hvaležnimi pogledi in priznanji naših mladih matematikov, fizikov in astronomov.

Tomaž Skulj

UTRINEK

Pametna rešitev. Na zboru delovnih ljudi matematično-fizikalnega oddelka Fakultete za naravoslovje in tehnologijo je tekla beseda o samoupravnih oblikah. Astronomi in meteorologi so povedali, da se bodo v primeru dveh TOZD, matematičnega in fizikalnega, odločili takole: astronomi se bodo povezali z matematiki, meteorologi pa s fiziki. Tedaj se je prof. Križanič nagnil k prof. Dominku in dejal: »*To ste pametno naredili. Oblake ste z meteorologi poslali nad fiziko in sedaj imate jasno nebo nad matematiko.*«

Tomaž Skulj

S SEJ UPRAVNEGA ODBORA DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV 19. 12. 1973, 9. 1. 1974 IN 26. 1. 1974

Seje so bile posvečeni razdelitvi dolžnosti v odboru in obravnavi delovnega načrta za tekoče delovno obdobje. Najprej smo razpravljali o sodelovanju med člani, ki delajo v šolah, in člani, ki delajo v proizvodnji ali kot raziskovalci. To vprašanje je bilo načeto na zadnjem občnem zboru. Že dalj časa namreč v društvu čutimo, da je sodelovanja premalo. Čeprav je od leta 1973 v odboru član, ki se ukvarja le z raziskovalnim delom, se stanje ni izboljšalo.

Upravni odbor ugotavlja, da v društvu več delajo člani, ki poučujejo na šolah. Vendar tudi za druge, ne manjka dela. Ti prav tako lahko prispevajo k utrjevanju društvenega ugleda. Raziskovalci v proizvodnji in inštitutih bi mogli sodelovati v komisijah za popularizacijo in pedagoško dejavnost s predavanji in pri organizaciji seminarjev in tekmovanj. Pomagali bi lahko krožkom mladih fizikov in matematikov, zbirali materialna sredstva in pisali za Obzornik, Presek in Sigmo. Največ bi lahko naredili v sekciji za znanstveno dejavnost. Sodelovanje vseh je potrebno tudi pri pravilnem postavljanju in reševanju načelnih in splošnih vprašanj, ki spadajo v območje društvene dejavnosti. Upravni odbor poudarja, da bo društvo močno le, če bomo v njem delali vsi.

Upravni odbor je poveril aktivu matematikov in fizikov v Ptuju izvedbo republiškega tekmovanja srednješolcev v matematiki in aktivoma v Kranju in v Škofji Loki izvedbo republiškega in zveznega tekmovanja srednješolcev v fiziki. Tekmovanji naj bi bili konec aprila ali na začetku maja. Upravni odbor je predlagal izbirna tekmovanja, ki naj dajo po 25 tekmovalcev iz vsakega letnika za republiško tekmovanje. Za predsednika tekmovalnih komisij bo odbor ponovno zaprosil dosedanja predsednika I. Vidava in A. Moljka. Tekmovanja za Vegovo priznanje bodo tudi letos tekla po utrjenem tiru. Podkomisija za ta tekmovanja bo pravočasno določila čas tekmovanj in ga objavila v Preseku.

Letos bodo ponovno organizirana predavanja za srednješolce. Program aktivov bomo poskusili objaviti v Obzorniku. Prvi bo predaval P. Gosar o piezoelektrikih, v februarju pa J. Ferbar o »raziskovalnem eksperimentiranju« v osnovni šoli. Za nadaljnja predavanja se dogovarjamo. Seminar iz matematike bo v kratkem, za seminar iz fizike izbiramo temo.

V zvezi z delovnim načrtom je treba izdelati finančni načrt in zaprositi za denar pri RIS in RSS.

Vodji društvene pisarne M. Kordiš smo podaljšali pogodbo do 31. 8. 1974.

F. Plevnik je poročal o delu komisije, ki je pregledala učbenik F. Kvaternika v zvezi s pritožbo I. Kuščerja in A. Moljka. Upravni odbor je povzel mnenje komisije in sklenil, da bo opozoril pisce učbenikov, naj v bodoče pravočasno uredijo vprašanja v zvezi z uporabljenimi viri in naj uporabljene vire tudi navedejo.

Upravni odbor je z nekaterimi pripombami sprejel osnutek Sklepa o ureditvi izdajateljskih razmerij med društvom kot izdajateljem in Obzornikom, Presekom in Sigmo. Sprejel je tudi osnutek Pravil o urejanju in izdajanju Obzornika, Preseka in Sigme in osnutek Temeljnih vsebinskih zasnov, s katerimi se je strinjal že občni zbor na Bledu. V izdajateljski svet je po predhodni privolitvi imenoval Milana Kaca, Ivana Štalca in Borisa Žumra.

Dušan Modic

AKTIV V LETU 1972

Od občnega zbora v Murski Soboti do 10. februarja 1972 so bila v Ljubljani naslednja predavanja za člane:

B. Roblek je 14. apr. 1972 poročal o uporabi računalnika pri delu v šoli. Po uvodu o pomenu in uporabi računalnikov pri poslovanju podjetij je predavatelj orisal delo, ki je

bilo opravljeno pri pripravah za programirani pouk v naših šolah, posebej pri vrednotenju testov. Predavanja se je udeležilo 30 članov.

Dr. P. Gosar je 10. maja 1972 pred 30 poslušalci predaval o notranjem trenju v trdnih snoveh. Po uvodu o deformacijah je opisal notranje trenje in prikazal model, ki dokaj zadovoljivo pojasnjuje eksperimentalna dognanja.

Predavanju, ki ga je imel 8. nov. 1972 dr. J. Grasselli o diofantskih enačbah, je prisostvovalo 34 članov. Predavatelj je najprej nakazal problem: iščemo rešitev enačbe $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, kjer je f polinom, n pa večji ali enak 0, v kolobarju Z; pri tem je treba ugotoviti, če je enačba rešljiva ali ne, ali je rešitev končno ali neskončno mnogo in poiskati postopek, ki da vseh teh končno oziroma neskončno rešitev. Navedel je potrebne pogoje za rešitev, nakar se je omejil na enačbe prve in druge stopnje, omenil Hassejev izrek in nekaj posledic ter razširil problem na rešitve v obsegu racionalnih števil Q.

V predavanju Digitalno računanje, ki je bilo 13. dec. 1972, je dr. J. Pahor opisal nekaj eksperimentov, s katerimi lahko uvedemo v šoli osnove računalnika. Pokazal je tudi preprosto pripravo, ki jo je moč izdelati z domačimi deli. Predavanju je prisostvovalo 42 članov.

Zaradi napake pri obveščanju je 10. jan. 1973 predavanju mg. A. Kmeta prisostvovalo le 19 poslušalcev, čeprav je bila tema z naslovom Diferenčne enačbe za gimnazijske učitelje zelo mikavna. Predavatelj se je naslonil na učbenik za četrti razred gimnazije in prikazal, kako je mogoče podati snov v srednji šoli.

Dušan Modic

UTRINKI

Nepogrešljivi eter. Kadar zastavljamo vprašanje deljivosti materije, tedaj seveda trčimo na vprašanje etra. Morda bi bila najboljša, čeprav groba definicija etra, da je to množica vseh oblik gibanja materije, ki jih v fizikalnem polju še niso odkrili. Konkretno, tudi elektron je bil po mojem mnenju, dokler ga niso odkrili, sestavni del etra.

Vse je že vnaprej jasno. Izkrivljanje prostora mora potekati glede na nekatere smeri, zato pa se s takim postopkom ne more niti dokazati niti opravičiti končnost prostora, če se gleda na svet v celoti. Tu nič ne pomagajo ne Einsteinovi ne Eddingtonovi izračuni celo polmera vesoljstva, ker je priznavanje končnosti vesoljstva v bistvu napačno. Krivina zmeraj predpostavlja določeno smer kakor tudi prostor, v katerega ta smer seže. To pomeni, da mora prostor obstajati tako zunaj zakrivljenosti kakor tudi znotraj nje. Drugače povedano, dialektično-materialistično orientiran učitelj in znanstveni delavec ne more sprejeti za znanstveno trditev, da je vesoljstvo omejeno in končno. Prostor je neskončen. To spada v resnici v bistvo materialističnega pojmovanja narave. Tega v resnici tudi nikoli ni mogoče pobiti, zato morajo vsi poskusi, da bi to naziranje pobili, doživeti neuspeh.

Oj te grde črne luknje! Druga težava s tem v zvezi je, da na površju takega telesa čas preneha teči, oziroma ura mora nehati delovati. Sprijazniti se s tem, da bi se kjerkoli ustavil tok časa, pomeni opustiti znanstveno pojmovanje narave časa in gibanja. Prav spričo takih težav lahko sklepamo, da je to teorijo treba predrugačiti, morda pa tudi opustiti, ker je s takimi pojmovanji nevzdržna.

Ivanović D. M., *Nekatera vprašanja idejnosti pri pouku fizike*, Vzgoja in izobraževanje **4**, (1973) 198. Gradivo s seminarja za pedagoške delavce, ki sta ga aprila 1973 organizirala Zavod za šolstvo SRS in Marksistični center pri CK ZKS.

Utrinke izbral in dodal naslove *Ivan Kuščer*

POROČILO O DELU ODDELKA ZA MATEMATIKO IMFM V ŠOLSKEM LETU 1972/73

1. Raziskovalno delo

Člani oddelka za matematiko so v šolskem letu 1972/73 končali tele raziskovalne naloge, ki jih je financiral Sklad Borisa Kidriča:

R. Jamnik: Ortogonalni sistemi funkcij,

S. Pahor in A. Suhadolc: Inverzni problem albeda,

I. Vidav in J. Globevnik: Vektorske analitične funkcije s konstantno normo,

I. Vidav in P. Mizori-Oblak: Posplošenje Tamarkin-Smulyanovih izrekov na Banachove algebre,

J. Vrabec, A. Cedilnik, P. Legiša in J. Rakovec: Aciklične trirazsežne mnogoterosti.

T. Klinc: Razvoj po posplošenih lastnih funkcijah sebi adjungiranih operatorjev in uporaba na problemih v transportni teoriji nevtronov.

Iz prejšnjih let sta ostali nedokončani dve nalogi:

J. Grasselli: Adicijski izreki v teoriji grup in v teoriji števil,

E. Zakrajšek: Avtomatizacija faktorske analize,

Letos so v delu štiri raziskovalne naloge:

I. Vidav, J. Globevnik, G. Tomšič in P. Legiša: Metrične lastnosti analitičnih funkcij v Banachovih prostorih,

J. Vrabec, P. Petek in M. Hladnik: Kohomološki kolobarji simetričnih grup,

A. Suhadolc in M. Omladič: Nove kvadraturne formule,

Z. Bohte: Stabilnost numeričnih procesov linearne algebre (nadaljevanje triletne teme).

Za prihodnje leto so naši člani prijavili na Sklad Borisa Kidriča šest nalog.

Število prijavljenih raziskovalnih nalog počasi narašča, nekoliko hitreje narašča število sodelavcev pri nalogah.

Ker objavljamo ponatise znanstvenih del naših članov v Publikacijah oddelka za matematiko, jih tu ne bomo posebej naštevali.

2. Seminarji

V juliju in avgustu 1972 sta bila dva seminarja iz topologije:

J. Vrabec: Teorija homologije (18 ur),

J. Malešič: Psevdodiferencialni operatorji (8 ur).

V šolskem letu 1972/73 smo imeli v okviru štirih seminarjev tale predavanja:

a) Četrtkov seminar (vodja Z. Bohte, 20 udeležencev).

J. Vrabec: Grupa unitarnih operatorjev v Hilbertovem prostoru (3 ure),

B. Vilfan: O neki posplošitvi Dirichletovega principa (Ramseyev izrek) (2 uri),

G. Tomšič: Homogeni normalni operatorji (1 ura),

J. Vrabec: Bijektivne zvezne preslikave (1 ura),

A. Suhadolc: O konvergenci Fourierjevih vrst (1 ura),

B. A. Fleishman: On nonlinear boundary value problems (1 ura),

R. R. Korfhage: Computer science and mathematics (1 ura).

b) Seminar iz globalne analize (vodja J. Vrabec, 9 udeležencev)

Ciklus predavanj o indeksu eliptičnih diferencialnih operatorjev: P. Petek (10 ur), J. Vrabec (8 ur), J. Malešič (3 ure),

I. Vidav: Indeks kompaktne družine fredholmskih operatorjev (4 ure),

J. Malešič: Psevdodiferencialni operatorji na evklidskih prostorih in mnogoterostih (12 ur).

c) Topološki seminar (vodja J. Vrabec, 8 udeležencev).
Ciklus predavanj: J. Vrabec (7 ur), J. Rakovec (4 ure), P. Legiša (2 uri), P. Petek (9 ur),
Ciklus predavanj o acikličnih mnogoterostih: J. Vrabec (6 ur), A. Cedilnik (9 ur),
J. Rakovec (9 ur), P. Legiša (7 ur),
J. Vrabec: Uporaba homološke teorije (5 ur).
d) Seminar za numerično in računalniško matematiko (vodja Z. Bohte, 10 udeležencev).
Ciklus predavanj iz teorije rekurzivnih funkcij: B. Vilfan (11 ur), V. Batagelj (3 ure),
J. Kozak: Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb (5 ur),
E. Zakrajšek: O nekem variacijskem problemu (1 ura),
T. Pisanski: Teorija grafov in matrike (2 uri),
V. Batagelj: Grafi z vrednostjo (2 uri),
B. Vilfan: O težavnosti funkcij (2 uri),
A. Kmet: Teorija zlepkov (8 ur),
Z. Breška: Iterativno reševanje sistemov nelinearnih enačb (4 ure),
E. Zakrajšek: Stabilnost diferenčnih metod (4 ure),
J. Kozak: Zlepki v dveh dimenzijah (5 ur),
B. Vilfan: Množenje matrik (2 uri),
A. Kmet: Reševanje diferencialnih enačb z zlepki (1 ura),
R. R. Korfhage: Sparse systems of linear equations (2 uri).
Skupno smo imeli torej v seminarjih 185 ur predavanj.

3. **Knjižnica**

Institut za matematiko, fiziko in mehaniko naroča za matematično knjižnico 170 matematičnih revij, katerih nabavo financira Sklad Borisa Kidriča. Ker so bila odobrena sredstva zaradi podražitev revij znatno premajhna (60.000.—), smo prosili za leto 1973 dodatnih 75.000.—, dobili pa le 60.000.—. Za leto 1974 smo prosili skupaj 157.000.—.

4. **Strokovno izpopolnjevanje**

Ker inštitut ne dobiva več dotacij za strokovni dvig kadrov, je v tem letu na inštitutske stroške potoval le en član našega oddelka, in sicer J. Globevnik na konferenco *Infinite dimensional holomorphy* v Lexington (ZDA), kjer je imel referat. Dr. Globevnika so glede na njegova dela in nastop na tej konferenci povabili za eno leto v isti kraj.

5. **Tisk**

V preteklem šolskem letu je izšla številka 3/4 Podiplomskega seminarja iz matematike, kjer so objavljena predavanja na seminarjih v šolskem letu 1971/72:

J. Vrabec, *Ovojno število in nekaj primerov njegove uporabe*, str. 7—22,
A. Suhadolc, *O neki kvadraturni formuli*, str. 23—30,
Z. Bohte, *O redukciji algebraične enačbe*, str. 31—44,
J. Vrabec, *O Cantorjevi množici*, str. 45—80.

Tik pred izidom je šesta številka Publikacij oddelka za matematiko. Vso skrb za tisk inštitutskih publikacij je prevzela Komisija za tisk Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS, ki se bo v bodoče borila tudi za finančna sredstva pri raznih skladih.

Poleg znanstvenih in strokovnih člankov so naši člani avtorji ali soavtorji tehle samostojnih publikacij, ki so izšle v preteklem šolskem letu:

N. Prijatelj, *Matematične strukture III. Okolice*, Knjižnica Sigma, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1972,

V. Batagelj in T. Pisanski, *Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj*, Prvi del, 1950—1966, Knjižnica Sigma, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1973,

M. Ribarič, *Functional-analytic concepts and structures of neutron transport theory*, Vol. I in Vol. II, Ljubljana, Slovenska akademija znanosti in umetnosti 1973,

A. Vadnal, *Linearno programiranje*, Zagreb, Informator 1972,

A. Vadnal, *Višja matematika za ekonomiste I in II*, Skripta, Ljubljana, Ekonomska fakulteta 1972,

Računalništvo (J. Grad, E. Zakrajšek in drugi), Ljubljana, Zavod za šolstvo 1972.

6. **Organizacijsko delo**

Člani oddelka za matematiko so se v preteklem letu sestali trikrat. Obravnavali so tekoče probleme. Izvolili so komisijo za razvoj matematike v sestavu: I. Vidav, N. Prijatelj, F. Križanič, Z. Bohte, J. Grad, J. Globevnik, T. Pisanski in C. Velkovrh. Ta komisija se je večkrat sestala in obravnavala poleg finančnih problemov oddelka tudi stališča v zvezi z reorganizacijo univerze v Ljubljani. Sestavili so osnutek stališč in ga poslali vsem članom. Zaradi pomanjkanja podatkov je delo tu obstalo. Sprožili so tudi vprašanje nove samostojne stavbe za matematiko in sestavili osnutek vloge na Izvršni svet SRS. Ker je ta problem tudi povezan z reorganizacijo, za zdaj delo v tej smeri počiva.

7. **Članstvo**

V preteklem letu se je število članov našega oddelka povečalo za 6. Izpopolnjujemo seznam članov, ki je bil objavljen v OMF XVIII (1971), 183—184:

35. PISANSKI ing. Tomaž, asist. FNT
36. ZOHIL ing. Josip, asist. EF
37. LEGIŠA ing. Peter, asist. FNT
38. RAKOVEC ing. Janez, asist. FNT
39. KON ing. Margita, asist. EF
40. HAFNER ing. Izidor, asist. FE
41. PUCELJ Ivan, profesor PA
42. CEDILNIK Anton, asist. BF
43. PETRIŠIČ ing. Jože, asist. FS
44. ŠREKL ing. Jože, asist. FS

Zvonimir Bohte

RAZISKOVALNE NALOGE MATEMATIČNEGA ODDELKA INŠTITUTA ZA MATEMATIKO, FIZIKO IN MEHANIKO

S tem naslovom sta bila objavljena v Obzorniku za matematiko in fiziko 13 (1966) str. 118—123 in 15 (1968) str. 123—125 pregleda raziskovalnih nalog, ki so jih opravili člani matematičnega oddelka Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko. Od tedaj je bilo izdelano še 10 raziskovalnih nalog. Danes objavljamo poročila še o nekaterih izmed njih.

STRUKTURA POLNIH REGULARNIH INVOLUTORNIH KOLOBARJEV

Nosilca sta bila I. Vidav in N. Prijatelj, sodelavec J. Vrabec. Nalogo je financiral sklad B. Kidriča.

Naloga obravnava posebne *-regularne kolobarje, v katerih veljajo še nekateri dodatni aksiomi, ki so sicer veljavni v C*-algebrah. O rezultatih naloge so avtorji poročali v dveh člankih, ki sta bila objavljena v mednarodnih matematičnih revijah.

N. Prijatelj

FUNKCIONALNO ANALITIČNI PROBLEMI V TRANSPORTNI TEORIJI

Nosilec je bil I. Vidav, sodelavca J. Grasselli in A. Suhadolc. Nalogo je financiral sklad B. Kidriča.

Fizikalno ozadje naloge so problemi tele vrste. V nekem telesu imamo dano porazdelitev hitrosti nevtronov. Vemo tudi, kako se nevtroni po snovi gibljejo, kako se absorbirajo in kako se porajajo novi. Zanima nas, kako se spreminja porazdelitev nevtronov v telesu s časom. Enačba, ki opisuje ta pojav, se imenuje Boltzmannova enačba. Ta je silno kompliciran. Nadomestimo jo z enostavnejšo, linearizirano Boltzmannovo enačbo. Neznana funkcija 7 realnih spremenljivk nastopa v tej enačbi tudi v odvodih in pod integralom, enačba je torej integrodiferencialna.

Linearizirano Boltzmannovo enačbo obravnavamo kot poseben primer linearne operatorske enačbe v različnih Banachovih prostorih. V nalogi so bile izdelane funkcionalno analitične metode za obravnavanje te enačbe. Za nekatere primere (npr. transport nevtronov v plošči in v končnem plinastem telesu) so bili izpeljani pogoji, pri katerih ima enačba rešitev pri dani začetni porazdelitvi. Raziskana je bila tudi narava spektra operatorjev, ki nastopajo pri študiju linearizirane Boltzmannove enačbe.

O rezultatih naloge so avtorji poročali v štirih člankih, ki so bili objavljeni v mednarodnih matematičnih revijah.

Anton Suhadolc

ŠTUDIJ UNIVERZALNIH ALGEBER

Nosilec je bil N. Prijatelj. Nalogo je financiral sklad B. Kidriča.

Uvodni del naloge je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz., 17 (1970) 97—108.

ORTONORMIRANI SISTEMI SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

Nosilec naloge je bil R. Jamnik. Nalogo je financiral Sklad B. Kidriča.

Znano je, da polni ortonormirani sistemi paroma neodvisnih slučajnih spremenljivk (odslej »sistemi«) obstajajo v verjetnostnih prostorih z zvezno mero in v končnem verjetnostnem prostoru, če je v tem verjetnost primerno porazdeljena, in da imajo vsi nekonstantni elementi sistema po dve od nič različni vrednosti. V vseh znanih sistemih imajo vsi nekonstantni elementi isto zalogo vrednosti.

Naloga se ukvarja z eksistenco sistemov v števno neskončnem verjetnostnem prostoru in z vprašanjem, ali je nujno, da imajo vsi nekonstantni elementi sistema isto zalogo vrednosti. Dalo se je dokazati, da v števno neskončnem verjetnostnem prostoru ni omejenega sistema in da imajo v končnem verjetnostnem prostoru vsi nekonstantni elementi isto zalogo vrednosti.

Del naloge bo objavljen v Publ. Dep. Math. Ljubljana.

Rajko Jamnik

INVERZNI PROBLEM ALBEDA

Nosilca naloge sta bila S. Pahor in A. Suhadolc, sodelavec E. Zakrajšek. Programiranje numeričnega poskusa je opravil E. Kramar. Nalogo je financiral sklad B. Kidriča.

Problem albeda za ploščo moremo na kratko opisati takole. Na eno ploskev plošče z znanimi optičnimi lastnostmi pada šop svetlobe. Zanima nas, kakšna je porazdelitev odbite in prepuščene svetlobe. Pri inverznem problemu albeda pa se vprašamo, kaj lahko iz znane porazdelitve odbite in prepuščene svetlobe rečemo o optičnih lastnostih plošče.

V delu je na kratko obdelana neka metoda za reševanje inverznega problema albeda.

Ker moramo pri računanju inverznega problema albeda rešiti veliko direktnih problemov albeda, je v delu temeljito obdelana nova inačica numerične metode za reševanje problema albeda.

Glavni rezultati naloge bodo objavljeni v publikacijah Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko.

Anton Suhadolc

VEKTORSKE ANALITIČNE FUNKCIJE S KONSTANTNO NORMO

Nosilec naloge je bil I. Vidav, sodelavec J. Globevnik. Nalogo je financiral sklad B. Kidriča.

V teoriji analitičnih funkcij je dobro znan izrek: če je absolutna vrednost funkcije, analitične na nekem območju v kompleksni ravnini, konstanta, je tudi funkcija sama konstanta.

Pojem analitične funkcije moremo posplošiti na analitične funkcije v Banachovem prostoru. Taka funkcija je definirana na območju v kompleksni ravnini, njene vrednosti pa so elementi Banachovega prostora. Izkaže se, da za tako posplošene analitične funkcije izrek, ki smo ga na začetku omenili, nasploh ne velja. V nalogi avtorja obravnavata predvsem tale problem: karakterizacija analitičnih funkcij v Banachovem prostoru, ki imajo konstantno normo.

Iz naloge je izšla tudi doktorska disertacija, ki jo je J. Globevnik uspešno obranil. Rezultati naloge so bili objavljeni v več člankih, ki so izšli v mednarodnih matematičnih revijah.

Anton Suhadolc

ACIKLIČNE 3-MNOGOTEROSTI

Nosilec naloge je bil J. Vrabec, sodelavci A. Cedilnik, P. Legiša in J. Rakovec. Nalogo je financiral sklad B. Kidriča.

V nalogi je najprej dokazano, da je poljubna vložitev poljubne sklenjene ploskve S v poljubno 3-mnogoterost, ki ima trivialno prvo homološko grupo, s stališča »geometrične« homološke teorije ekvivalentna standardni vložitvi ploskve S v 3-razsežni evklidski prostor. Posledica: vsako kompaktno podmnožico poljubne 3-mnogoterosti, ki ima trivialno prvo homološko grupo, je mogoče vložiti v neko homološko 3-sfero. Dani so potrebni in zadostni (homološki) pogoji, ki jim mora kompaktna 3-mnogoterost ustrezati, da jo je mogoče vložiti v kako acikličnо 3-mnogoterost (oziroma v neko homološko 3-sfero). Nato so dokazani analogni rezultati za homologijo s koeficienti v Z_v, pri čemer je v poljubno naravno število. Na koncu je diskusija problema posplošitve omenjenih rezultatov na nekompaktne ploskve oziroma nekompaktne 3-mnogoterosti.

Jože Vrabec

NOVE KNJIGE

Mladen Car, Matematika za ekonomiste, Zagreb, Narodne novine 1973, 666 str. 8°. Cena 130.— din.

Knjiga je dokaj obsežen učbenik matematike in je namenjen slušateljem prvega letnika ekonomskih fakultet in ekonomskih višjih šol. Njen namen je posredovati slušatelju tisto minimalno osnovno matematično znanje, ki je ekonomistu nujno potrebno pri spremljanju ekonomske literature, ki uporablja matematične metode.

Vsebina. Knjiga se deli na 13 poglavij, od katerih jih 10 obravnava pretežno snov iz teoretične matematike, 3 poglavja pa obravnavajo ožjo gospodarsko problematiko, kot so poslovni računi, finančna matematika in zavarovalna matematika. Iz teoretične matematike zajema knjiga matematične strukture, infinitezimalni račun in verjetnostni račun, ne zajema pa linearne algebre.

1. poglavje obravnava izjavni račun kot del matematične logike. Dokaj pozornosti je ob tem avtor posvetil ponazoritvi logičnih odnosov z električnimi omrežji. 2. poglavje govori o osnovnih pojmih teorije množic, med katerimi srečamo tudi pojem kardinalnega števila. 3. poglavje obravnava števila. Običajnemu obravnavanju realnih števil doda avtor še kompleksna števila. Obdela tudi kongruence, ki jih uporabi pri preizkusih z devetičnim in enajstičnim ostankom. Po obravnavanju osnov Boolove algebre se poglavje konča s historiatom in prvimi osnovami računanja z elektronskimi računalniki. 4. poglavje o kombinatoriki obravnava na običajen način binomske simbole, permutacije, kombinacije in variacije. 5. poglavje govori o funkciji ene, dveh in več neodvisnih spremenljivk. Pri linearni funkciji vplete avtor začetke geometričnega linearnega programiranja. 6. poglavje obravnava osnovne poslovne račune. 7. poglavje obravnava limito zaporedja in funkcije in vrste s konstantnimi členi. 8. poglavje o diferencialnem računu obdelava odvode funkcij ene neodvisne spremenljivke, parcialne odvode, diferenciale, Taylorjevo vrsto in ekstremalne probleme infinitezimalnega računa. 9. poglavje o integralnem računu obravnava nedoločeni in določeni integral, izlimitirane integrale in se konča z dvojnimi in trojnimi integrali. 10. poglavje o diferencialnih enačbah podaja navadne diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama, linearne diferencialne enačbe prvega reda, Bernoullijevo diferencialno enačbo in homogene diferencialne enačbe. 11. poglavje obravnava na običajen način finančno matematiko. 12. poglavje govori o osnovnih pojmih verjetnostnega računa vključno s porazdelitvami verjetnosti, med katerimi srečamo binomsko in normalno porazdelitev. 14. poglavje o zavarovalni matematiki obravnava tabele umrljivosti, komutativna števila, osebne rente, življenjsko zavarovanje, mešana zavarovanja, premije in matematične rezerve.

Vsakemu poglavju je dodan spisek uporabljene literature. Na koncu so po poglavjih urejene naloge z rešitvami. V dodatku so navedene osemdecimalne tabele finančne matematike in tabele umrljivosti.

Ugodna zapažanja. Kot učbenik matematike je knjiga zelo dobra; z matematičnega vidika je kot celota neoporečna, prav taka je tudi s pedagoškega stališča. Avtorju je uspelo tudi težja mesta prikazati razumljivo, tako da se bralec razmeroma lahko prebije tudi prek težjih tekstov. Knjiga je vredna pohvale tudi s tehnične strani, saj je lepo pregledna in prijetna na pogled. Zaradi teh odlik ugodna zapažanja daleč odtehtajo neugodna, ki so povrh tega izrazito detajlna in jih bo avtor v novi izdaji z lahkoto odpravil.

Neugodna zapažanja. Predvsem pogrešam pri knjigi stvarno kazalo; po mojem mnenju je stvarno kazalo zlasti pri učbeniku nepogrešljivo in poveča uporabno vrednost učbenika.

Na str. 50 je avtor pred pravilno definicijo imaginarne enote $i^2 = -1$ po nepotrebnem vrinil napačno definicijo:

$$\sqrt{-1} = i = \text{imaginarna enota}$$

Iz te definicije izvira namreč znani napačni račun:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = +1$$

Na str. 174 omenja avtor harmonično funkcijo v nevajeni obliki $y = a \sin b(x + c)$. Ker je ta tip funkcij važen za analizo periodičnih procesov, bi priporočil, da ne bi te funkcije samo omenil, ampak da bi jo bolj izčrpno obdelal.

Na str. 251 izvede avtor obrazec

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

kot primer za računanje limite zaporedja. To je napačno, ker gre tu za limito funkcije. To snov bi bilo treba prenesti na str. 268. Zaradi te neprimerne razmestitve zaide avtor v zadrego pri 2. primeru na str. 268, ko obravnava obrazec

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 4x}{2x} = 6$$

Ker tu ne uporabi zgornjega obrazca, ne izračuna limite 6 s tem obrazcem, ampak se sklicuje na kasnejše l'Hospitalovo pravilo.

V 8. poglavju o diferencialnem računu pogrešam razdelek o elastičnosti funkcije, ki je za ekonomista zelo pomemben.

V 9. poglavju o integralnem računu se mi zdi odveč razdelek o dvojnem in trojnem integralu. Na tej stopnji in za te potrebe namreč te snovi ni mogoče podati z zadovoljivo matematično natančnostjo; zato ostaja ta razdelek na višini površnega repetitorija.

Alojzij Vadnal

PUBLIKACIJE OB STOLETNICI ROJSTVA PROF. DR. JOSIPA PLEMLJA

Bralce naše revije in druge interesente: osnovne in srednje šole, fakultete, institute itd., obveščamo, da je Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije pripravila ob stoletnici rojstva prof. dr. Josipa Plemlja naslednje izdaje:

1. Ivan Vavpotič, *Josip Plemelj* — olje (barvna razglednica). Cena 1.— din
2. Božidar Jakac, *Josip Plemelj* — risba 1952 (stenska slika 35 × 50 cm). Cena 15.— din (10.— din)
3. Ivan Vidav, *Josip Plemelj*, *Ob stoletnici rojstva*, Brošura z življenjepisom in opisom njegovih del. Cena 30.— din (25.— din)

Vse te novosti lahko dobite pri Državni založbi Slovenije v Ljubljani, Mestni trg 26, in njenih poslovalnicah po Sloveniji. Člani društva pa lahko dobijo publikacije po znižanih cenah (v oklepaju) pri Komisiji za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19.

Urednik
Ciril Velkovrh

Richard W. Copeland: Mathematics and the Elementary Teacher. 2. izd. Philadelphia, Saunders Company, 1972. X + 336 str. Cena £ 3.95.

Knjiga je namenjena metodiki matematičnega pouka za otroke, stare pet do dvanajst let. Izčrpno obravnava računske operacije z naravnimi števili, številske sisteme in uvedbo racionalnih števil. Teorija množic je omejena le na nekaj najpreprostejših pojmov. Glede na dosedanjo šolsko prakso je najbolj nov in zanimiv pogled na puuk geometrije.

Avtor gradi na raziskavah in izkušnjah J. Piageta in drugih priznanih matematičnih pedagogov. Opozarja na rezultate številnih preizkusov, ki dokazujejo, kako zgrešene so večkrat predstave o tem, katero matematično gradivo ali metoda obravnave je primerna za učence na določeni razvojni stopnji. Navaja tudi širok izbor strokovne metodične literature. Delo je namenjeno predvsem študentom in učiteljem razrednega pouka, dobrodošlo pa bo vsem, ki se zanimajo za pouk matematike v osnovni šoli.

Franc Galič

John E. Maxfield and Margaret W. Maxfield: Keys to Mathematics. Philadelphia, W. B. Saunders Comp. 1973. X + 328 str. 8°. Cena £ 3.50.

Avtorja prinašata kratek pregled sodobne matematike. Govorita o teoriji grafov, kongruenčni aritmetiki, logiki, algebraičnih strukturah, analitični geometriji, topologiji, statistiki in računalništvu. S številnimi prepričljivimi slikami in domiselnimi primerami je knjiga zelo mikavna in dostopna širokemu krogu ljudi, saj ne zahteva posebnega matematičnega predznanja. V vsako področje nas avtorja uvedeta s problemi, ki nam jih ponuja vsakdanje življenje; s postopno abstrakcijo pridemo do ustrezne matematične teorije, ki se nam pokaže kot nekaj življenjskega in tudi uporabnega. Kratki pregledi na koncu posameznih poglavij nas opozarjajo na to, kako matematika prihaja v naše življenje ne samo s številkami, marveč še bolj po svojih strukturah in načinu mišljenja. Sistematično izbrane naloge, vnesene med besedilo, vzpodbujajo bralca k samostojnemu iskanju, presojanju in reševanju problemov. — Knjiga naj bi pomagala doživeti lepoto matematike vsem tistim, ki so se do zdaj srečali s to vedo le bežno ali celo z odporom. Mladi, ki jim že današnji pouk odpira matematične skrivnosti, pa bodo v knjigi našli zanimivo dopolnilno branje in prenekatero vzpodbudo.

Janez Rakovec

Lawrence F. Shampine, Richard C. Allen, Jr.: Numerical Computing: an introduction. Philadelphia, Saunders Company 1973. VIII + 258 str.

Knjiga je učbenik numeričnega računanja. Dostopna je vsem, ki poznajo osnove infinitezimalnega računa. Ker se avtorja ne izogibata uporabi numerične matematike, je priporočljivo tudi poznavanje fortrana. Knjiga je razdeljena na pet delov. V uvodnem delu avtorja obravnavata računanje v pomični vejici in napake v zvezi s tem. Drugi del nosi naslov numerična analiza in je jedro knjige. Zajema interpolacijo in aproksimacijo, integriranje, iskanje korenov nelinearnih enačb in reševanje navadnih diferencialnih enačb. Tretji del je posvečen sistemom linearnih enačb. Knjiga se končuje z obširnimi rešitvami nalog, zbranih ob posameznih poglavjih, in z dobro komentiranimi programi v fortranu. Avtorja se v vsej knjigi izogibata slabo pogojenim problemom. Zaradi preglednosti ob vsakem problemu razložita le eno metodo. Pri programih dajeta prednost kombiniranim in adaptivnim postopkom. Za samouke bo knjiga dober učitelj, za študente, ki poslušajo numerično matematiko, pa soliden pomožni učbenik.

Tomo Pisanski

NEKAJ NAVODIL AVTORJEM ZA PRIPRAVO ROKOPISA

Stavljenje matematičnega teksta je zelo težko, dolgotrajno in drago. Da bi vsaj nekoliko olajšali delo stavcu, se dogovorimo za nekatere enotne oznake in poenostavitve pri pripravi rokopisa. Najvažnejše je, da v rokopisu uporabljamo čim manj znakov in oblik matematičnih izrazov, ki jih v tiskarni ne morejo postaviti na monotype stavnem stroju. V monotype okvir lahko vložijo le 255 različnih matric. Vse ostale znake pa morajo vlagati z dragim ročnim stavljenjem. Avtorjem priporočamo, da čimveč znakov natipkajo s pisalnim strojem in jih ne vpisujejo ročno. Pri tem jim bo lahko v veliko pomoč IBM pisalni stroj z vrtljivo glavo, katero lahko tudi zamenjajo z drugo, ki ima drugačne znake od običajne stature. Na matematično-fizikalnem oddelku fakultete za naravoslovje in tehnologijo si lahko ogledate odtise naslednjih šestih glav: dve z običajnimi znaki, s kurzivno pisavo, z rusko cirilico, tehnično glavo ter dve različni glavi z matematičnimi simboli in grškimi črkami.

Rokopis naj bo natipkan v dveh izvodih s pisalnim strojem na dober papir formata A-4 z vsaj 2 cm širokim robom na obeh straneh in z dvojnim razmikom med vrsticami. Besed, predvsem kratkih, rajši ne delimo. Izogibajmo se raznih dodatnih znamenj nad in pod matematičnimi simboli, ker jih v tiskarni ne morejo postavljati strojno. To so predvsem puščice pri vektorjih, integracijske meje, pike pri odvodih na čas, povprečne in konjugirane vrednosti, eksponenti druge vrste, koreni, ulomki in podobno.

Navedimo nekaj primerov, kako lahko postavimo nekatere matematične izraze brez škode za razumevanje in preglednost:

namesto	naj bo
$\overline{\underset{\sim}{A}}$, $\overline{\overline{\underset{\sim}{b}}}$, $\hat{\underset{\sim}{c}}$, $\dot{\underset{\sim}{y}}$	$\underset{\sim}{A}'$, $\underset{\sim}{b}''$, $\underset{\sim}{c}^*$, $\underset{\sim}{y}'$
$\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$	lim sup, lim inf
$e^{-\frac{\underset{\sim}{x}^2 - \underset{\sim}{y}^2}{\underset{\sim}{a}^2}}$	$\exp(-(\underset{\sim}{x}^2 - \underset{\sim}{y}^2)/\underset{\sim}{a}^2)$
$\sqrt[n]{\underset{\sim}{a}^2 - \underset{\sim}{b}^2}$	$\sqrt[n]{(\underset{\sim}{a}^2 - \underset{\sim}{b}^2)}$ ali $(\underset{\sim}{a}^2 - \underset{\sim}{b}^2)^{1/n}$
$\frac{7}{8}$, $\frac{\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}}{\underset{\sim}{c}}$	$7/8$, $(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})/\underset{\sim}{c}$ ali $(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})\underset{\sim}{c}^{-1}$

$$A \xrightarrow{f} B \qquad f: A \longrightarrow B$$

$$\frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[n]{a - \frac{b}{c}}} \qquad \cos(1/x)/(a - b/c)^{1/n}$$

$$\int_{x-a}^{x+a} F(x)dx \qquad \int_{x-a}^{x+a} F(x)dx$$

Manjše, manj pomembne in neoštevilčene enačbe vgradimo v tekst, če je le mogoče. Pomembnejše in daljše enačbe postavljajmo v posebno vrsto na sredino strani. Če se le da, jih ne pišimo v dveh vrstah. Kadar jih moramo deliti, jih delimo pri enačaju. Pazimo tudi na to, da sta oklepaj in ustrezni zaklepaj v isti vrsti. Na koncu enačb, ki stoje v samostojnih vrstah, ne pišimo ločil razen v nujnih primerih. Enačbe, na katere se v tekstu sklicujemo, oštevilčimo z arabskimi številkami, ki jih postavimo na desni strani v okroglem oklepaju. Sestavljena decimalna števila za označevanje enačb niso priporočljiva, zato numeracijo pričnimo v vsakem poglavju znova.

Nekatere dele rokopisa je treba v tiskano besedilo staviti s posebnimi črkami. Zato morajo biti že v rokopisu ti deli teksta in posamezne črke označeni na dogovorjen način. Podčrtavanje opravimo ročno, npr. z modro barvico, da se loči od drugega teksta in se ne maže. *Kurzivne* (poševne) črke in besede podčrtamo z valovito neprekinjeno črto, **polkrepke** podčrtamo z ravno neprekinjeno črto, **krepke** pa z dvojno ravno neprekinjeno črto. Tekst, ki naj bo odtisnjen razprto, podčrtamo s prekinjeno črto. Pisane črke, s katerimi navadno označujemo množice, obkrožimo z rdečo barvico, gotske črke pa s kakšnim drugim znakom. Pri tem pa ne smemo podčrtavati posameznih ločil in matematičnih operacijskih znakov, ker so navadno stavljeni pokonci. Tekst, za katerega želimo, da ga stavec postavi z manjšimi črkami, na robu označimo in pripišemo »petit«.

V matematičnem tekstu morajo biti postavljeni kurzivno vsi matematični simboli, vse grške črke, navadno tudi besedila izrekov in definicij, naslovi del, ki jih navajam v literaturi, važnejši pojmi, ko v tekstu prvič nastopajo (predvsem tisti, ki jih bomo vključili v stvarno kazalo) itd. Po dogovoru pišejo matematiki tudi *dx* / *dy* kurzivno!

Poleg običajnega teksta so navadno pokončne tudi vse številke, ter matematične kratice za standardne funkcije (sin, cos, tg, ctg, log, ln, min, max, exp itd.) ter vsa ločila in matematični operacijski znaki.

Polkrepko so postavljeni vektorji (brez puščic), matrike ter navadno naslovi razdelkov in podobno.

Pri tipkanju izrazov v števcih, korenskih eksponentih in še na drugih mestih moramo puščati dovolj prostora za podčrtavanje matematičnih simbolov, pri čemer pa grških črk nikdar ni potrebno podčrtati, ker jih bo vsak stavec sam vedno postavljal kurzivno.

V rokopisu ločimo črko *l* in številko 1 ter črki *O*, *o* in ničlo 0 tako, da črki, ki nastopata kot matematična simbola, vedno valovito podčrtamo. Številke pa so vedno nepodčrtane. V nekaterih knjigah se slabo ločijo naslednji simboli: krat $\times$ in črka x, grške črke Δ, α, ν, ρ z znamenjem za trikotnik Δ ter kurzivnimi *a*, *v*, *p*. Tem podobnostim se ognemo, če izberemo druge simbole. Enako velja za pisane črke $\mathcal{I}$ in $\mathcal{J}$, $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{J}$, velike Φ, Π, Ψ ter male φ, π, ψ ter vezaj in minus.

Če avtor odstopa od omenjenih dogovorjenih oznak, mora rokopisu predložiti ustrezna navodila.

Slike in skice morajo biti narisane na belem ali prozornem papirju s črnim tušem. Vse naj bodo narisane dvakrat večje, kot bodo v knjigi, pri čemer pa igra pomembno vlogo format publikacije. Pri prekinjenih črtah ne smejo biti pike in črtice preveč skupaj, da se pri pomanjšanju ne bodo združile. Črke in številke naj imajo na slikah enako debele poteze in naj bodo tako velike, da bodo v knjigi enako velike ali manjše, kot so črke v besedilu. Skice slik morajo biti narisane tudi v besedilu. Da avtorju ni treba dvakrat risati skic, lahko rokopis kopira po končani redakciji na kseroks kopirnem stroju.

Pri korekturah, ki jih opravljamo vsaj dvakrat na odtisih iz tiskarne, uporabljamo ustrezne korekturne znake, ki so objavljeni in razloženi v vsakem pravopisu in v vsakem žepnem koledarju Tiskarne Ljudske pravice. Priporočamo tudi, da odtisnjeni tekst prebere še tretja oseba, ki ni sodelovala pri pripravi rokopisa. Avtorje prosimo, da ob branju korektur čim manj dodajajo ali krčijo tekst.

Literaturo pa bomo navajali takole:

Za knjigo: ime in priimek avtorja, naslov knjige (kurzivno), kraj, založba ter letnica in stran.

Za revijo: ime in priimek avtorja, naslov članka (kurzivno), naslov revije, številka letnika s polkrepko arabsko številko (letnica v oklepaju) ter prvo in zadnjo stran. Naj navedemo dva primera:

Za knjigo: F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1974, str. 256.

Za revijo: R. Kladnik, *Elektron*, Obzornik mat. fiz., **20** (1973) 65—70.

Kadar se v tekstu sklicujemo na literaturo, ponovimo v oglatem oklepaju le zaporedno številko publikacije iz seznama, ki ga navedemo na koncu knjige ali poglavja. Če pa dela navajamo po abecednem redu avtorjev, pišemo priimke pred imeni. Pri sklicevanju na sliko ali tabelo pa napišemo v oklepaju le (Sl . 17) oz. (Tab. 7).

Ciril Velkovrh

LITERATURA

Srečko Mrak, *Ročni stavec*, 3. del. Ljubljana. Šolski center tiska in papirja, 1974.

Navodila avtorjem v revijah Springer Verlag, Berlin.

A Manual for Authors of Mathematical Papers, Providence, American Mathematical Society 1962.

Žepni koledar Tiskarne Ljudske pravice v Ljubljani.

SEZNAM PUBLIKACIJ

DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE IN NJENE KOMISIJE ZA TISK V LETIH 1969—1973*

Naklada

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO, 16—20 (1969—1973) 8°. do 1.500

Novo računstvo. 4. seminar iz matematike. Obzornik mat. fiz. **19** (1972) str. 97—152. DZS 1972. 8°. 800

Atomi. 7. seminar iz fizike. Obzornik mat. fiz. **20** (1973), str. 65—104. DZS 1973. 8°. 500

PRESEK. 0 (1972) *Prapresek*, **1** (1973/74), št. 1. in 2. 8°. do 15.000

SIGMA — knjižna zbirka. 8°. (9 novih knjig in 9 ponatisov) do 2.000

1a. Vidav I., *Rešeni in nerešeni problemi matematike* (Ponatis), 1972.
2a. Vadnal A., *Elementarni uvod v verjetnostni račun* (2. predelana izdaja), 1972.
3b. Prijatelj N., *Uvod v matematično logiko* (Ponatis), 1969 in 1973.
7a. Križanič F., *Vektorji, matrike, tenzorji* (2. predelana izdaja), I. in II. knj., 1972.
9a. Prijatelj N., *Matematične strukture* I. (Ponatis), 1971.
12b. Vadnal A., *Funkcije* I. (2. ponatis), 1971.
13a. Jamnik R., *Teorija iger* (Ponatis), 1973.
16. Strnad J., *Kvantna fizika*, 1969.
17. Strnad J., *Relativnost*, 1969.
18. Pucelj I., *Neevklidične geometrije*, 1969.
19. Lebedinec F. in A. Vadnal, *Funkcije* II, 1970.
20a. Uršič S., *Štirimestni logaritmi in druge tabele* (Ponatis), 1970 in 1972.
21. Hribar M., *Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj*, 1971.
22. Vadnal A., *Rešeni problemi linearnega programiranja*, 1971.
23. Prijatelj N., *Matematične strukture* III, 1972.
24. Batagelj V. in T. Pisanski, *Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj*, I. d., 1950—1966, 1973.

Za **Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani** — oddelek za matematiko, smo izdali naslednje publikacije:

MATEMATIKA — Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij. 8° do 2.000

2. Križanič F., *Linearna algebra in linearna analiza*, 1969.
3. Jamnik R., *Verjetnostni račun*, 1971.
4. Vidav I., *Algebra*, 1972.
5. Križanič F., *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, 1973.
6. Vidav I., *Višja matematika* I. (4. nespremenjena izdaja), 1973.

PUBLICATIONS OF THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS. Nos 2—6. 8° 250

POSTDIPLOMSKI SEMINAR IZ MATEMATIKE. 8°. 250

1. Vidav I., *O kategorijah in algebrski K-teoriji*, 1971.
2. Križanič F., *Funkcije več kompleksnih spremenljivk*, 1971.
3/4. Več avtorjev, 1972.

MAGISTRSKA DELA. 4° do 100

1. Mizori-Oblak P., *Pramen tetraedralnih kompleksa*, 1969.
2. Vrabec J., *Dehnova lema in sorodni problemi*, 1969.
3. Tomšič G., *Novi rezultati v neskončno dimenzionalni topologiji*, 1969.
4. Vencelj M., *Hiperprostori podkontinuov in zaprtih podmnožic*, 1970.
5. Globevnik J., *Lomljene potence operatorjev*, 1971.
6. Indihar S., *Izotopija v evklidskem prostoru*, 1971.
7. Petek P., *Primarne kohomološke operacije*, 1971.

---

* Seznam publikacij, ki so izšle do vključno leta 1968, je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **16** (1969), 3. str. ovoja. Seznam vsebuje 15 letnikov Obzornika za matematiko in fiziko, 15 del knjižnice Sigma in 19 drugih različnih publikacij.

ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ MATEMATIKE. 8°. do 1.000

1. Križanič F., *Dinamični sistemi*, 1972.
2. Bohte Z., *Numerična analiza*, 1973.
3. Zakrajšek E., *FORTRAN*, 1973.

Učbeniki in priročniki za matematiko, fiziko in astronomijo za srednje šole. 8° in 4°.

Učbeniki in priročniki za matematiko in fiziko, ZŠ SRS (1971).
Zbirka nalog iz matematike pri zaključnih izpitih na gimnazijah v SRS v letih od 1965—1970, I. in II. del, 1970—1971. 50
Avsec F. in M. Prosen, *Astronomija za srednje šole*, 1969. 2.000
Avsec F. in M. Prosen, *Astronomija za* 4. *razred gimnazije*. DZS 1971.
Pucelj I. in I. Štalec, *Geometrija za* 2. *razred gimnazije*. 1. *in* 2. *poglavje*, 1970. 200

Zbirka nalog iz aritmetike, algebre in analize:
— *za* 3. *razred gimnazije* (Napisali: F. Avsec, A. Cokan, M. Potisek, I. Pucelj, B. Roblek, I. Štalec, M. Vagaja), 1969 z dotisom in ponatisi 1970—1971. 8.000
— *za* 4. *razred gimnazije* (Napisal I. Štalec), 1973. 3.000

Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize:
— *za* 1. *in* 2. *razred gimnazije* (Napisal I. Štalec), DZS 1970 in ponatisi.
— *za* 3. *razred gimnazije* (Napisali: F. Avsec, A. Cokan, I. Molinaro, I. Pucelj, B. Roblek, I. Štalec in M. Vagaja), DZS 1972.

Razne publikacije ob seminarjih in predavanjih:

Vrabec J., *Ovojno število in nekaj primerov njegove uporabe*, 1970. 350
Vidav I., *Grupe v geometriji*, 3. *seminar iz matematike*, 1970. 350
Poglavja iz fizikalne optike, 6. *seminar iz fizike*, 1971. 350
Novo računstvo. Ekspres informacija, 4. *seminar iz matematike*, 1972. 350
Atomi (Napisali: R. Kladnik, J. Strnad, M. Kregar, D. Jamnik, I. Grabec, A. Moljk, R. Blinc), 7. *seminar iz fizike*, 1973. 200

Za tekmovalce smo pripravili:

Vegova priznanja — zlata, srebrna in bronasta, DZS 1971 in 1973. 19.000
Uršič S., *Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev* 8-*ih razredov osnovnih šol v Sloveniji*, 1972 in 1973. 3.000

Ob stoletnici rojstva Josipa Plemlja pa smo izdali naslednje:

Integral, Differential and Functional Equations. Povzetki predavanj na mednarodnem simpoziju ob 100-letnici rojstva prof. dr. Josipa Plemlja, Bled 1973. 250
Vidav I., *Josip Plemelj. Ob stoletnici rojstva* (S portretom). Ljubljana, DZS 1973. 1.500
Jakac B., *Josip Plemelj* — risba, 1952. Stenska slika, DZS 1973. 600
Vavpotič I., *Josip Plemelj* — slovenski matematik. Barvna razglednica, 1973. 5000

Ciril Velkovrh

Obzornik mat. fiz., Ljubljana, **21** (1974) št. 1/2, str. 1—64.

Glavni urednik, Gabrijel Tomšič; **odgovorni urednik,** Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; France Kvaternik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (tehnični urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT.

Naročnina: za posameznike 60.— din (za člane društva je že vračunana članarina 10.— din), za dijake in študente 25.— din, za ustanove in podjetja 100.— din, za tujino 7 $ = 119.— din, posamezna številka 10.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS,** 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 61-564/53, žiro račun 50101-678-48363.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.