IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1973
Letnik 20
6

20. LETNIK — ŠTEVILKA 6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, DECEMBER 1973

Uredniški odbor: Franc Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT univerze v Ljubljani; Franc Kvaternik, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, inštitut »J. Stefan«; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad, FNT; Anton Suhadolc, FNT; Ivan Vidav, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 6-krat letno.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

Naročnina: za člane 20 din, za nečlane 30 din, za dijake in študente 10 din, za ustanove in podjetja 40 din, za inozemstvo 51 din (3 $), posamezna številka 8 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, telefon: 61-564/53, tek. račun št. 50101-678-48363.

Člani društva naj nakazujejo na tekoči račun Komisije za tisk 20 din naročnine in 10 din članarine, skupaj 30 din.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

Članki — Stran

Stanje matematičnih znanosti 161

Reševanje sistemov linearnih enačb posebne vrste s pomočjo diskretne Fourierove transformacije (J. Malešič) 168

Novica

Zanesljiva meritev svetlobne hitrosti (J. Strnad) 174

Šola

Toplogija tudi v srednji šoli? (J. Rakovec) 179

O negativnih zapažanjih pri pouku elementarne matematike (A. Vadnal) 180

O fizikalnih krožkih (D. Repovž) 182

Domače vesti

Anketa DMFA SR Slovenije (M. Gojkovič) 183

Seznam diplomantov iz matematike in fizike ter doktorskih disertacij v letu 1972 184

Tekmovanja

Zvezno tekmovanje študentov matematike (N. Prijatelj) 187

Matematična balkaniada študentov v Atenah (D. Marušič) 188

Prejeli smo v oceno 190

Novi aparati 192

CONTENTS

Articles — Page

The Mathematical Sciences 161

On Solving Certain Systems of Linear Egnations with Means of the Discrete Fourier Transform (J. Malešič) 168

News 174

School 179

Home News 183

Competitions 187

New Books 191

New Apparatus 192

OBZORNIK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1973 LJUBLJANA LETNIK XX

Tehnični in odgovorni urednik
Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Avsec Franc, Gimnazija Kranj
Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani
Lep Jože, VTŠ Maribor
Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani
Pahor Jože, Inštitut »Jožef Stefan« v Ljubljani
Resina Mitja, FNT univerze v Ljubljani
Skulj Tomaž, Gimnazija Moste v Ljubljani
Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani
Suhadolc Anton, FNT univerze v Ljubljani
Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije s sofinanciranjem
Izobraževalne skupnosti Slovenije in Raziskovalne skupnosti Slovenije

Natisnila tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani

VSEBINA

Uvodnika

Naš minimum (F. Križanič) 1
Josip Plemelj — ob stoletnici rojstva (I. Vidav) 131

Članki

Stanje matematičnih znanosti (prevod) 2, 33, 105, 161
Difrakcija nevtronov (V. Dimic) 9
Teorija divizorjev in enolična faktorizacija v kolobarjih (J. Grasselli) 39
Črne luknje (B. Golli) 48
Elektron (R. Kladnik) 65
Zgradba atoma (J. Strnad) 70
Magnetne lastnosti atoma (M. Kregar) 78
Atomi in svetloba (D. Jamnik) 86
Ionizacija (J. Grabec) 92
Molekule (R. Blinc) 98
Uporaba nekaterih izsledkov J. Plemlja v teoriji singularnih integralnih enačb in robnih nalog linearne konjugiranosti (N. P. Vekua) 133
O Cauchyjevih integralih in o robnih nalogah linearnega konjugiranja (B. V. Hvedelidze) 145
Reševanje sistemov linearnih enačb posebne vrste s pomočjo diskretne Fourierove transformacije (J. Malešič) 168

Novici

Kvarki v astrofiziki (A. Pediček) 55
Zanesljiva meritev svetlobne hitrosti (J. Strnad) 174

Šola

Upodobitve z lečami (P. Gosar) 20
O minimalnem učnem načrtu (A. Cokan) 57
Stikalna plošča za demonstracijo poskusov iz elektrike (P. Prelog) 58
Anketa študentov na odseku za fiziko (C. Filipič, B. Golli, B. Vedlin, M. Vuk) 62
O aktivnem učenju matematike (J. Rakovec) 110
Šolski poskusi, ki dajo podatke o atomu (J. Strnad) 111
Topologija tudi v srednji šoli? (J. Rakovec) 179
O negativnih zapažanjih pri pouku elementarne matematike (A. Vadnal) 180
O fizikalnih krožkih (D. Repovž) 182

Tekmovanja

Eksperimentalna naloga na V. mednarodni olimpiadi iz fizike (T. Skulj) 29
III. zvezno tekmovanje mladih matematikov, učencev 7. in 8. razredov osnovnih šol (B. Kolenko) 64
Koledar tekmovanj iz matematike v šolskem letu 1972/73 64
Zvezno tekmovanje študentov matematike (N. Prijatelj) 187
Matematična balkaniada študentov v Atenah (D. Marušič) 188

Domače vesti

24. občni zbor DMFA SRS (M. Gojkovič) 116
7. seminar iz fizike (J. Pahor) 119
Odsek za matematiko na FNT je dobil nove prostore (I. Vidav) 120
Prijatelju prof. Francu Tonimu v slovo (A. Vadnal) 121
Odbor za proslavo stoletnice rojstva profesorja Plemlja (F. Križanič) 153
Simpozij ob stoletnici profesorja Plemlja (F. Križanič) 155
Anketa DMFA SRS (M. Gojkovič) 183
Seznam diplomantov iz matematike in fizike ter doktorskih disertacij 184

Utrinek 8

Novi aparati 192

Bibliografija o prof. Plemlju 157

Nove knjige 122

Prejeli smo v oceno 125, 190

STANJE MATEMATIČNIH ZNANOSTI*

(Nadaljevanje in konec)

MOS 01A65

Statistika

Statistiki z lahkoto prepoznajo druge statistike, čeprav so često presenečeni nad področji, na katerih delajo, in nad orodjem, ki ga uporabljajo. Minilo je že skoraj tričetrt stoletja, odkar se je Karl Pearson preusmeril od grafične mehanike k uporabi algebre in diferencialnih enačb pri problemih, ki nastanejo v analizi podatkov, ki jih dobimo pri poskusih in opazovanjih. Matematično teorijo verjetnosti, ki jo imajo sedaj za del jedra matematike, uporabljajo pri izravnavanju podatkov, najprej v geodeziji in astronomiji in potem na mnogih drugih področjih in se tako vračajo na Gaussovo in Laplaceovo delo, ki je bilo narejeno pred enim stoletjem.

Nekoč so mislili, da je statistika omejena na študij in obravnavanje velikih množic podatkov. Taki problemi so še vedno med najbolj vabljivimi. Problemi, kako zanesljivo spremeniti tri ali pet ali deset števil v primerno kvalificirane sklepe, so pa danes najmanj toliko pomembni. Posamezniki, družbe, vlade, znanstveniki, inženirji, ekonomisti — vsi uporabljajo veliko raznovrstnih statističnih metod, da ocenijo, »kaj pravijo podatki«, ter jih tako vodijo v njihovih preudarjanjih in dejanjih. Kjerkoli je množica podatkov manj kot popolna ali se samo posredno nanaša na stvar, za katero gre, — v resnici je to skoraj povsod — tam je prostor za statistiko, da razmota podatke in oceni sklepe.

Karl Pearson, »Student« (W. S. Gosset) in R. A. Fisher so imeli vodilne vloge v zgodnjem razvoju matematične statistike široke uporabe. V letih med obema svetovnima vojnama so nove statistične metode in metode za urejanje poskusov veliko prispevale k razvoju agrarne tehnologije.

Spodbujana od Studenta in Shewharta sta J. Neyman in E. S. Pearson razvila prve moderne matematične teorije formalno optimiziranega sklepanja na koncu tridesetih let dvajsetega stoletja. V teh letih in v naslednjem desetletju se je matematična teorija vzorčenja razvila, da bi zadostila potrebam po proučevanju velikih skupin ljudi, farm, podjetij in mnogih drugih populacij, z opazovanjem relativno majhnih vzorcev. Pregled vzorcev je tako postal efektiven, učinkovit in nenadomestljiv.

Vojne potrebe po še učinkovitejših pregledih podatkov so pripeljale v eni noči brez spanja Abrahama Walda, sprva čistega matematika, do osnovne teorije sekvenčne analize in so bile vir njegovemu kasnejšemu delu v statistični teoriji odločitev. Potrebe raznovrstnih problemov v geofiziki (valovi na oceanu, potresi, sunki vetra, ki motijo letala) in v tehniki (na primer odkrivanje radarjev) so zahtevale novo orodje za izoliranje pojavov, ki jih je označevala njihova frekvenca nihanja. Naglo se je razvila statistična spektralna analiza, ki se je razširila na široko področje uporab, vštevši najnovejša poizvedovanja vlade o primerni prireditvi ekonomskih časovnih serij, kot je nezaposlenost, za tisti letni čas.

Z nastopom modernega elektronskega računanja so se odprle nove možnosti skoraj na vseh področjih statistike. Rutinske sezonske prireditve ekonomskih časovnih serij ne zahtevajo več ekspertov; računalnik da odgovore v času, ki stane kvečjemu en dolar. Brez

---

* Prevod članka: The Mathematical Sciences: A Report Section II. The State of the Mathematical Sciences, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 2, 345—390 (1971). Zahvaljujemo se National Academy of Sciences, Washington D.C., U.S.A., da je dovolila prevod.

računalniške obravnave ne bi nikoli izmerili period naravnega nihanja zemlje in mnogo manj bi vedeli o zemeljski notranjosti. Toda večine globalnih problemov v zvezi z uporabo modernih računalniških sistemov za efektivno analizo podatkov se je komaj kdo šele lotil.

Računalništvo

Avtomatično računanje z veliko hitrostjo je staro komaj dvajset let. Vendar že predstavlja eno od najdragocenejših znanstvenih in ekonomskih bogastev naroda.

Razvoj računalništva pospešuje prodor matematike na stara in nova področja človekovega prizadevanja. Dejansko je bil prvotni namen razvoja računalnikov numerično reševanje matematičnih problemov. Uspeh, ki so ga dosegli v tej smeri, je bil sijajen. Računanja, s katerimi so se trudile skupine ljudi cela leta, lahko sedaj opravimo v nekaj minutah. Matematične probleme, za katere so mislili, da se ne dajo rešiti z učinkovitim numeričnim postopkom, sedaj rešimo rutinsko. Na primer, pri vsaki izstrelitvi raket rešijo na ducate nelinearnih navadnih diferencialnih enačb popolnoma avtomatično.

Numerično analizo, vejo matematike, ki se ukvarja z odkrivanjem in vrednotenjem metod za matematično računanje, je poživil prihod računalnika, Toda numerična analiza doslej ni mogla držati tempa s tehnološkimi dosežki. Računalniki so silno povečali pomembnost nekaterih delov numerične analize, druge pa so naredili za zastarele. Velikansko število aritmetičnih operacij pri reševanju enega samega problema je povzročilo celo množico težav, povezanih z omejeno natančnostjo in obsegom računalnikovih števil. Zadovoljiva rešitev teh težav je privedla do vrste novih in dobrih algoritmov za reševanje matematičnih problemov.

Važno je, da spoznamo raznovrstnost področij, na katerih je postalo računalništvo pomembno orodje. Eno od teh je matematika, toda ta je relativno majhen del celotnega obsega današnjega računanja z računalniki. Druga vključujejo eksperimentalno in teoretično fiziko, obravnavanje poslovnih podatkov, ekonomsko planiranje, knjižničarsko delo, tehnične konstrukcije (od transportnih sistemov do računalnikov samih), vzgojo, upravljanje z zalogami, policijske operacije, vesoljsko znanost, glasbeno izvajanje in vsebinske analize dokumentov. Brez pridržka lahko govorimo o »kompjuterizaciji« naše kulture, ki je že širša, čeprav ne tako globoka, kot »matematizacija«.

Moderni računalnik lahko dela mnogo stvari. Logično možnost, zgraditi univerzalen računalnik, ki načelno lahko naredi vse, kar naredi poljuben računalnik, je najprej spoznal A. M. Turing. To odkritje je vplivalo na delo matematika Von Neumanna, ki je prispeval izredno pomemben predlog, naj računalniki shranijo svoja navodila skupaj s podatki.

Računalnike lahko uporabljamo za direktno posnemanje kompliciranih tehnoloških, prirodnih in socialnih pojavov, kjer računalniški ukazi igrajo vlogo formul pri vzpostavitvi formalnega modela. Taki modeli so tako resnično matematični, kot tisti, izraženi s formulami. Seznami računalniških ukazov so lahko dolgi in komplicirano med seboj povezani, pa so še vedno izvršljivi. Če moramo obravnavati mnogo podrobnosti, lahko dobimo primere obnašanja z direktnim posnemanjem, kadar ne moremo dobiti splošnih rezultatov iz podobno kompliciranih seznamov matematičnih formul. Primeri problemov, ki so jih obravnavali z direktno simulacijo, vključujejo prometno kontrolo na avtomobilskih cestah, konstrukcijo telefonskega omrežja in konstrukcijo betonskih zaščitnih oklepov za nuklearne reaktorje.

Prav tako kot je zoologija proučevanje živali in živalskega obnašanja, tako je računalništvo proučevanje računalnikov in računanja. Sedaj so izredno pomembni trije vidiki:

1. Konstrukcija in analiza računalnikovih sestavnih delov in celotnih elektronskih in mehanskih sistemov, ki sestavljajo računalnike;

2. Izdelava in analiza osnovnih jezikov in stalnih programov, ki so potrebni, da spremenimo goli računski stroj v produktiven računalniški sistem, vštevši kontrolne programe, prevajalnike in programe, ki skrbijo za sočasno izvajanje več programov;

3. Metodologija reševanja problemov z računalniki, to je proučevanje metod, ki so skupne pri reševanju obsežnih razredov problemov. Ena od takih metod je primerna upodobitev obsežne in raznovrstne informacije. Sem ne spada izdelovanje individualnih programov za reševanje posameznih problemov.

Računalništvo je obenem abstraktno in pragmatično. Osredotočenje na dejanske računalniške sisteme predstavlja pragmatično komponento; posebno pomembna so ekonomska vprašanja, kot na primer odnosi med hitrostjo, natančnostjo in ceno predlaganega računanja na računalniku. Pri tem je pomembno tudi, kakšno konfiguracijo računalnika in katere osnovne programe predlog predpostavlja. Teoretična vprašanja eksistence in izračunljivosti, ki jih često bolje razumemo, dajejo pomembno pojmovno osnovo za proučevanje bolj perečih problemov. Po drugi strani obravnava računalništvo informacijo na abstrakten način. Pomeni simbolov in števil se lahko spreminjajo od uporabe do uporabe, tako kot pri vsaki uporabi matematike. Tako imata računalništvo in matematika skupen glavni cilj — ustvariti osnovno strukturo v jeziku notranje definiranih pojmov, ki ni vezana na nobeno posebno uporabo. Znanstveniki, ki se ukvarjajo z računalništvom, so komaj začeli ustvarjati tako osnovno strukturo in se v glavnem še vedno ukvarjajo s proučevanjem, kaj lahko računalniki ekonomično opravijo in česa ne.

Do sedaj sta numerična analiza in teorija programerskih jezikov najbolj matematični komponenti računalništva.

Optimalna alokacija, upravljanje in odločitve

Potrebe ekonomske teorije po rešitvah alokacijskih problemov, potrebe v upravljalski praksi po metodah sprejemanja odločitev (ki se dajo navadno izraziti kot alokacijski problem) in potrebe tehniške operative po modelih vodenja so privedle do enega samega kompleksa med seboj povezanih pojmov, problemov in rezultatov. Ti problemi se skoraj v vsakem primeru izkažejo kot problemi optimizacije.

Posebno pomemben dogodek za matematičen razvoj na tem področju pomeni knjiga Von Neumanna in Morgensterna: Teorija iger in ekonomskega zadržanja, ki je načela strateške in matematične probleme simultane optimizacije dobičkov dveh ali treh antagonističnih igralcev ali antagonističnih ekonomskih partnerjev.

Razvoj tega področja se je začel v glavnem z linearnim programiranjem, kjer imamo opraviti s problemom optimiziranja linearne funkcije več spremenljivk, ki ustrezajo določenim linearnim neenačbam ali enačbam. V tridesetih letih se je v Sovjetski zvezi z linearnim programiranjem kot prvi začel ukvarjati Kantorovič; njegovi rezultati mnogo let niso vzbudili nobene pozornosti. V Združenih državah pa se je malo kasneje ukvarjal s takimi problemi Hitchcock. Širjenje tega področja je v ZDA leta 1947 vzpodbudilo Dantzigovo odkritje metode simpleksov, ki je omogočila reševanje zmerno obsežnih problemov s takrat dostopnimi računalniškimi pripomočki. Uspešnost uporabe linearnega programiranja v gospodarstvu je sprožila nepričakovano hiter razvoj tudi drugih področij matematičnega programiranja. Razvilo se je nelinearno programiranje s posplošitvijo tako namenske funkcije kot tudi pogojnih neenačb. Nekateri problemi te vrste so bili taki, da so zahtevali rešitve v celih številih; reševanje teh problemov je privedlo do teorije celoštevilčnega programiranja.

Tretja smer razvoja vsebuje probleme razporeditve: Kako naj n oseb razporedimo na n delovnih mest, da bo njihov učinek največji? Kako naj več tovarn oskrbuje potrošnike z blagom, da bodo prevozni stroški najmanjši? Prav kmalu se je pokazalo, da utegnejo

biti problemi alokacije zelo težavni. Tak je na primer problem lokacije skladišč ob najmanjših prevoznih stroških; ali na primer problem trgovskega potnika: katera je najkrajša pot, ki gre skozi vsako mesto na seznamu? Reševanje teh problemov otežuje dejstvo, da jih ni mogoče kakorkoli razčleniti, ampak jih moramo obravnavati kot nedeljivo celoto.

Četrto smer razvoja predstavlja dinamično programiranje ali teorija večstopenjskih odločitvenih procesov. Ta teorija obravnava probleme z določenim številom odločitev v nekem časovnem razdobju. Obnavljanje zalog ob negotovem povpraševanju, kjer se je treba vedno znova odločati, ali in koliko blaga naj naročimo, je tipičen tak problem; taki so tudi planiranje proizvodnje, nadomestitev opreme, izkoriščanje vodnih zalog v zbiralnikih hidrocentral in še številni problemi čakajočih vrst.

Peta smer razvoja, ki jo živahno gojijo tako v Sovjetski zvezi kot v Združenih državah, obsega optimalno upravljanje sistemov, pri katerih gre pravzaprav za določevanje poti. Ko izbiramo pot rakete ob zahtevi najmanjše porabe goriva, je ta pot dejansko fizikalna. Ko se odločamo, kako naj se spreminja temperatura v posodi za kemične reakcije, da bo proizvodnja želene kemikalije največja, je pot le simbolična. V vsakem primeru je matematični problem isti in pridemo do istih matematičnih rezultatov.

PRIMERI MATEMATIKE V UPORABI

Pred mnogimi leti je Auguste Comte trdil, da je znanost znanost samo, kolikor je matematična. Matematizacija fizikalne znanosti traja že stoletja, matematizacija bioloških in upravljalskih znanosti pa šele krajši čas. Tehnika, ki je na fizikalni znanosti osnovana tehnologija, že dolgo uporablja matematiko kot uspešno orodje. Matematizacija raznovrstnih drugih tehnologij pa je šele v pogojih.

Matematika in fizika

Fizika je eksperimentalna veda, ki obravnava materialni svet okrog nas. Njen namen je, kot to fiziki danes razlagajo, opisati in korelirati množico eksperimentalnih pojavov s sredstvi teoretičnih pojmov, ki so izraženi v matematičnem jeziku. Zakaj naj bi se dali naravni pojavi opisati v jeziku matematike, je sporno. Toda neizpodbitno je, in navadno res vzeto kot samo po sebi umljivo, da prirodne pojave tako opisujemo s sijajnim uspehom.

Ker fizika obravnava kvantitativne meritve, pride matematika v fiziko naravno kot pripomoček pri računanju in kot orodje za logične operacije pri razvoju teorije. Tradicionalne glavne veje matematike — algebra, analiza in geometrija — se na ta način široko uporabljajo na mnogih področjih raziskovanja v fiziki. Takoj, ko so odkrili računalnike, so jih fiziki začeli uspešno uporabljati kot pripomoček pri obravnavanju podatkov in za reševanje numeričnih problemov.

Matematika ima v fiziki poleg pomembne vloge, ki smo jo pravkar opisali, še veliko pomembnejšo na bolj osnovni ravni. Matematika dejansko daje mnogo osnovnih pojmov, ki jih uporabljajo fiziki za opisovanje naravnih pojavov. Na primer, abstraktni matematični pojem nekomutativnega množenja se nahaja v osnovah kvantne mehanike. Neevklidska geometrija je začetna točka splošne relativnosti. So fiziki, ki mislijo, da je analitično nadaljevanje matematičen pojem, ki je potreben za opis fizikalnega principa vzročnosti.

Ko pregledujemo razvoj fizike skozi stoletja, od prvih proučevanj astronomije in Newtonove mehanike, preko formulacije elektromagnetnih pojavov ter teorije toplote in termodinamike iz devetnajstega stoletja, do modernega razvoja relativnosti, kvantne mehanike in fizike visokih energij, smo presenečeni nad vse bolj abstraktno in zapleteno naravo matematičnih pojmov, ki jih je bilo treba vpeljati za opis naravnih pojavov. Tak vtis je brez dvoma privedel pokojnega britanskega fizika Jeansa do izjave, da je Bog matematik.

Mnogi fiziki mislijo, da je osrednji problem, ki je sedaj pred njimi, namreč struktura atomskih jeder in njihovih sestavnih delov (znana tudi kot fizika visokih energij), morda rešljiv samo z uporabo matematičnih pojmov, ki jih doslej v fiziki niso uporabljali in ki jih mogoče celo matematiki še ne poznajo. Bodi kakorkoli, vedno znova je bilo dokazano, da so smisel za obliko in spoštovanje elegance, abstraktnost in posploševanje, ki so znaki pristnosti dobrega matematičnega razvoja, često tudi značilnosti novih prodorov v fizikalnem znanju. Dejansko tisto, čemur pravimo fizikalne ideje, često izhaja iz lastnosti abstraktnih matematičnih pojmov, za katere se izkaže, da imajo široko razširjeno in globoko zakoreninjeno uporabnost v naravnih pojmih. Ko je pregledoval medigro med matematiko in eno vejo fizike, je M. J. Lighthill pripomnil, da je pomembna naloga matematike proizvajati nove fizikalne ideje.

Odnos med fiziko in matematiko nikakor ni enosmerna cesta. Medtem ko fizika uporablja matematične pojme, dobiva matematika inspiracijo in stimulacijo, ki izvirata iz potreb fizikov po novi matematiki. Vpeljava infinitezimalnega računa, diferencialne geometrije, ergodične teorije predstavlja matematične dosežke, ki so jih stimulirali fizikalni problemi. Citiramo iz nedavnega poročila fizikov:

Skozi stoletja tesnega stika sta teoretična fizika in matematika močno vplivali druga na drugo v medsebojno korist. Teoretična fizika uporablja pojme, ki so se razvili v matematiki, da izrazi opise naravnih pojavov. Matematiko pa v njeni smeri razvoja stimulirajo problemi, ki jih postavlja fizika. Kaže, da je v zadnjih letih oslabel vpliv teoretične fizike na razvoj matematike. Toda še vedno obstaja mnogo vidnih primerov matematičnega razvoja, na katerega je vplivala fizika: na primer, teorija neomejenih operatorjev, teorija upodobitev nekompaktnih grup in teorija distribucij. Prenaglo bi bilo misliti, da naravni pojavi ne bodo v prihodnosti, kot so v preteklosti, spet izvor pomembnih smeri raziskovanja v matematiki.

Matematične znanosti v tehniki

Uporabe matematike v tehniki predstavljajo eno najbolj priznanih kot tudi eno najpomembnejših manifestacij splošne matematizacije naše kulture. Če gledamo relativno stare panoge, kot so gradbeništvo in strojništvo, ali relativno nove, kot so nuklearna tehnologija ali elektronika, opazimo stalno naraščanje v obsegu in zapletenosti matematike, ki jo te panoge uporabljajo. Teorija informacij je dobro znan primer. Vsebuje zelo globoke matematične probleme, toda njen dramatični razvoj je vzpodbujala praktična potreba komunikacijskih inženirjev ali elektronikov po rešitvi problema glede oddajanja dane skupine sporočil skozi dano sredstvo. Moderni dosežki v aerodinamiki so odvisni od želje, da bi zgradili letala in izstrelke, ki bodo leteli z vse večjimi hitrostmi. Opazili so, kot je bilo pričakovati, da, čim bolj napredna je tehnologija, tem bolj zapleteni so osnovni pojmi, ki jih vsebuje, in tem bolj so odvisni od matematike. Včasih je nemogoče razumeti pojme, ki jih uporabljajo inženirji (celo tako osnovne, kot je impedančno vsklajevanje, redukcija upora z interferenco in subharmonična rezonanca), ne da bi uporabljali matematiko.

Oblika, ki jo često zavzame povečana matematizacija, je razvoj bolj preciznih teorij, da bi izrabili hkraten napredek v drugih smereh. Na primer, varnostni faktor 4 često uporabljamo pri gradbeniških konstrukcijah. Tak varnostni faktor pa bi bil popolnoma nemogoč pri konstrukciji večine izstrelkov. Izstrelki bi bili pretežki, da bi se odlepili od tal. Včasih uporabljajo tako nizke varnostne faktorje kot 1,2 do 1,3. Da bi shajali s takimi faktorji, moramo aerodinamične sile, naravne načine vibracije v telesu in razporeditev pritiska veliko bolj natančno poznati, kot bi bilo to sicer potrebno. To pa samo pojasnjuje splošno dejstvo, da morata napredek na teoretični strani in napredek na fizični strani iti z roko v roki, če hočemo dobiti največjo možno korist od izpopolnjene tehnologije.

Nove matematične metode, posebno v zvezi z računalniki, često uporabljamo v položaju, kjer bi bile staromodne »peš« metode prepočasne ali pretežavne. Na primer, analizo matematičnih modelov obširno uporabljamo v modernem gradbeništvu — analizo, ki jo omogoča obstoj velikih računalnikov. Matematična formulacija često vodi k linearnemu programiranju. Napovedovanje poti satelitov, vodenih in kontroliranih, je druga dejavnost, ki vsebuje skrbno matematično formulacijo in obsežno numerično računanje. Ko enkrat program za računalnik dobro naredimo, potem je delo rutinsko in ponavljajoče se, toda prvotna formulacija često vsebuje globok vpogled, ki ga lahko pridobimo samo z matematično analizo.

Mehanika tekočin, eno od najbolj dognanih področij uporabne matematike, je pomembna na več področjih tehnike. Hrup, ki ga dela reakcijsko letalo, in udarne valove, ki so v zvezi z nadzvočnim letom, moramo razumeti do podrobnosti, preden lahko predlagamo in naredimo popravke in izboljšave; nestabilnost pri izgorevanju vodi h kritičnim problemom v razvoju raket; in sistematičnega napredka pri minimizaciji uničujočih učinkov tornadov ne moremo pričakovati, dokler se ne bo zelo izboljšalo razumevanje atmosferske dinamike.

Področje elektronike in komunikacij je posebno bogato z uporabami matematike. Nekatere od teh so kot reprezentativni problemi v drugih panogah tehnike. Na primer, teorija integriranih vezij, tako linearna kot nelinearna, ima mnogo podobnih točk kot istovrstna področja v mehaniki. Za zvezna sredstva so mnogi problemi iz teorije elektromagnetnega polja vsaj splošno podobni tipičnim problemom v mehaniki tekočin ali elastičnosti. Na primer, osnova za konstrukcijo radijskih anten so lahko interferenčni efekti, ki nastopajo pri konstrukcijah letal in ladij. Splošneje, proučevanje širjenja radijskih signalov obsega množico posebnih problemov, ki so pritegnili tako velike matematične fizike, kot je Sommerfeld, in tako velike matematike, kot je Hermann Weyl. Zadnja leta so nastala še bolj komplicirana matematična vprašanja pri študiju plazem, panogi naraščajoče pomembnosti na mnogih področjih elektrotehnike.

Najosnovnejše uporabe matematike v elektroniki in komunikacijah pa najdemo na pojmovnem nivoju. Te praviloma izvirajo iz situacij, v katerih daje matematika najboljši jezik za izražanje tako originalnega tehniškega problema kot končnega rezultata.

Mogoče najelementarnejši primer daje matematični pojem impedance. To je, čeprav inženirji to le redko opazijo, strogo vzeto matematična umetna tvorba, nefizikalna »imaginarna« količina, s pomočjo katere se dajo udobno izračunati realni tikovi in napetosti, ki končno zanimajo inženirja. Njena raba postane nujnost, kadar obravnavamo, kot često moramo, vezja, ki vsebujejo na ducate ali stotine elementov. Raba transformacijskih metod, ki je že mnogo let ustaljena v komunikacijski tehniki, daje še drug primer. Prav pred kratkim se je pokazalo, da so pojmi iz matematične logike pomembna osnova za preklopna in računalniška vezja. Toda najboljši primer je dala teorija informacij. Spoznanje, da sta komunikacijska tehnika in matematična logika dva sistema, ki se oba ukvarjata v glavnem z manipulacijo poljubnih znakov po formalnih pravilih, in ju je omogočila teorija informacij, je silovito razširila obzorje komunikacijskega inženirja in mu na mah odprla velikanska področja matematike kot vir idej za posamezne šifre in kodirne sheme.

Na splošno rečeno so moderni tehniški sistemi preveliki, prekomplicirani in preveč natančno sestavljeni, da bi jih lahko načrtali z empiričnim testom. Da bi dobili primerno zagotovilo za uspeh, moramo pred poskusom te sisteme temeljito matematično analizirati.

Primer iz znanosti o okolju: Numerično napovedovanje vremena

Znanosti o okolju vsebujejo znanosti o zemlji, oceanografijo, atmosferske znanosti, telekomunikacijske znanosti in aeronomijo. Nekateri od najtežjih in najbolj zapletenih problemov v znanostih o okolju nastanejo iz prizadevanja, da bi raziskali atmosfero in

oceane s pomočjo matematičnih modelov v obliki determinističnih sistemov tekočin. To vodi k nelinearnim parcialnim diferencialnim enačbam, ki so podrejene precej splošnim in začetnim pogojem. Najuspešnejši poskusi obravnavanja teh problemov vsebujejo uporabo hitrih računalnikov.

Posebno pomembne za vsakodnevno rabo so numerične metode za napovedovanje vremena, ki jih sedaj redno uporabljamo.

Splošna ideja matematičnega napovedovanja vremena sega v prva leta dvajsetega stoletja. Podrobni začetni predlogi in poskusi v napovedovanju vremena s približno rešitvijo ustreznih hidrodinamičnih in termodinamičnih enačb segajo nazaj do britanskega znanstvenika L. F. Richardsona v prva leta dvajsetega stoletja. Richardsonove napovedi niso bile uspešne, v glavnem zaradi kršenja takrat še neznanega stabilnostnega kriterija za numerične procese pri reševanju parcialnih diferencialnih enačb (ki so ga odkrili leta 1928 Courant, Friedrichs in Lewy). Drug razlog za neuspeh Richardsonovih napovedi so bili nezadostni podatki. Tretja težava, ki bi bila skoraj gotovo onemogočila Richardsonove prvotne predloge za numerično napovedovanje vremena (iz leta 1922), je bilo pomanjkanje pripomočkov za hitro računanje.

Tako so opravili vremenske izračune, za katere so leta 1948 potrebovali 24 ur, v letu 1951 že v petih minutah. Kasnejši napredek v konstrukciji računalnikov je šel vzporedno z napredkom v raziskovanju numeričnega napovedovanja vremena. Relativno preproste enačbe, ki so določale prve modele za atmosfero, so obsežno predelali in izpilili. V prvih modelih ni bilo podrobnosti o vertikalni strukturi atmosfere, temveč samo vertikalno povprečje njenega gibanja. Sredi leta 1962 pa je postal sistem, ki je dopuščal tri vertikalne nivoje, glavni delovni model v National Meteorological Center. Spet tega je leta 1966 zamenjal model s šestimi nivoji.

Sklepne opombe

Omenili smo samo nekaj uporab matematičnih metod v panogah izven matematičnih znanosti samih. Število takih primerov stalno narašča in često težko potegnemo mejne črte med matematičnimi znanostmi in znanostmi, ki matematiko uporabljajo.

Vse velike dobrine ustvarjajo majhna zla. Vsako novo in močno orodje se zlorablja, kakor tudi pametno uporablja. To je veljalo za tiskarstvo in mehansko silo, ko je bilo to orodje novo. Danes se bodo našli na vsakem področju dejavnosti, kjer so matematika ali statistika ali računalništvo novi, ljudje, ki bodo uporabljali to orodje nespametno, kot sredstvo prepričevanja, kadar je dokazno gradivo nepopolno ali celo napačno tolmačeno, ali kot sredstvo »blagoslavljanja« sklepov, ki ne zaslužijo podpore. Vse panoge, ki so sedaj dobro prežete z uporabo matematike, statistike ali računalnikov, so trpele zaradi teh težav. Tiste, ki so sedaj v razvoju, ali ki bodo v razvoju v bližnji prihodnosti, bodo morale tudi trpeti. Take težave pogosto upočasnijo vgraditev matematike ali statistike ali računalništva v novo področje uporabe. Bojimo se, da so ti odlogi neizbežni.

Protisredstvo, ki se je pokazalo uspešno, je povečan obseg matematične ali statistične ali računalniške znanstvene izobrazbe za večino tistih, ki delajo na tem področju. Povečanje nastopa v dveh delih, ki sta sicer ločljiva, pa sta navadno združena: na eni strani dovolj znanstvene izobrazbe o ustrezni matematiki, da se da razumeti pomen, mogoče celo podrobnosti zahtevanih postopkov: na drugi strani, često še bolj pomembni, pa razumevanje, kako se matematika ali statistika ali računalništvo prilegajo dejanskim problemom na podobnih področjih. Zadnje obsega upoštevanje ene izmed spretnosti dejanskega uporabnika: zmožnosti za pametno presojo, kaj moramo upoštevati pri formalnih ali numeričnih postopkih, kaj mogoče lahko zanemarimo in kaj je gotovo zanemarljivo. Ni lahko, teh stvari učiti eksplicitno: navadno se jih naučimo z izkustvom pri delu in postanejo tako odvisne od vsaj nekega dela spretnosti pri ustreznih postopkih. *Prevedla T B.*

REŠEVANJE SISTEMOV LINEARNIH ENAČB POSEBNE VRSTE S POMOČJO DISKRETNE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE

JOŽE MALEŠIČ

MOS 65 F 05

V članku je opisana uporaba diskretne Fourierove transformacije in diskretne konvolucije za direktno reševanje posebnih (cikličnih) sistemov linearnih algebraičnih enačb in za zmanjšanje števila neznank pri sistemih linearnih enačb, ki se pojavljajo pri numeričnem reševanju robnih problemov.

ON SOLVING CERTAIN SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WITH MEANS OF THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM

In the article the discrete Fourier transform is used to solve systems of linear algebraic equations obtained by discretising boundary-value problems.

Predmet tega članka je opis direktne metode za reševanje sistema linearnih enačb takele posebne oblike:

$$\begin{bmatrix} A_1\, A_2\, A_3 \dots A_n \\ A_n\, A_1\, A_2 \dots A_{n-1} \\ A_{n-1}\, A_n\, A_1 \dots A_{n-2} \\ \dots\dots \\ A_2\, A_3\, A_4 \dots A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Vidimo, da so vsi koeficienti matrike podani že z n-terico števil $A_1, A_2, \dots A_n$, ki se v naslednjih vrsticah ciklično premika na desno. Produkt matrike in stolpca na levi strani enačbe (1) imamo lahko za neko operacijo med dvema n-tericama števil: $(A_1, A_2, \dots A_n)$, s katero je določena matrika, in n-terico $(x_1, x_2, \dots x_n)$. Da se opaziti analogija (podrobneje o tem en razdelek kasneje) med to operacijo in konvolucijo dveh funkcij

$$(a * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-u)x(u)du$$

Znano je, da se da konvolucijsko enačbo

$$(a * x)(t) = b(t) \tag{2}$$

kjer je x neznana funkcija, a in b pa sta znani, rešiti s pomočjo Fourierove transformacije

$$(\mathcal{F}x)(t) = \hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} \cdot x(s)ds$$

Postopek je takle: Vemo, da Fourierova transformacija preslika konvolucijo dveh funkcij v produkt transformirank:

$$\mathcal{F}(a * x)(t) = (\widehat{a * x})(t) = \hat{a}(t) \cdot \hat{x}(t)$$

Zato na enačbi (2) uporabimo Fourierovo transformacijo:

$$\hat{a}(t) \cdot \hat{x}(t) = \hat{b}(t)$$

izračunamo Fourierovo transformiranko neznane funkcije x

$$\hat{x}(t) = \hat{b}(t)/\hat{a}(t)$$

in x dobimo iz $\hat{x}$ z obratno Fourierovo transformacijo

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{x})(t) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \cdot \hat{x}(u)\,du$$

Podobno bomo reševali sistem (1), najprej pa moramo zgraditi Fourierovo transformacijo in konvolucijo za n-terice.

Fourierova transformacija in konvolucija pri n-tericah

Naj bo x n-terica kompleksnih števil, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$. Njena Fourierova transformiranka $\mathcal{F}x = \hat{x}$ je spet n-terica

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots \hat{x}_n)$$

kjer je

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)} x_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \omega = e^{2\pi i/n}$$

torej analogno kot pri funkcijah, samo namesto integrala je vsota.

Definirajmo še transformacijo $\overline{\mathcal{F}}$:

$$(\overline{\mathcal{F}}x)_k = \sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{(k-1)(j-1)} x_j, \qquad k = 1, 2, \dots, n, \qquad \overline{\omega} = e^{-2\pi i/n}$$

Izračunajmo $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}x)$:

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}x)_k = \sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{(k-1)(j-1)} \sum_{m=1}^{n} \omega^{(j-1)(m-1)} x_m = \sum_{m=1}^{n} x_m \sum_{j=1}^{n} \omega^{(j-1)(m-k)}$$

Ker je

$$\sum_{j=1}^{n} \omega^{(j-1)(m-k)} = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ n, & m = k \end{cases}$$

je

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}x)_k = n \cdot x_k = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}x)_k$$

in je $(1/n) \cdot \overline{\mathcal{F}}$ inverzna transformacija k $\mathcal{F}$.

Preden definiramo konvolucijo dveh n-teric, naredimo še nekaj, kar nam bo poenostavilo definicijo konvolucije: x naj zdaj ne pomeni več n-terice $(x_1, x_2, \dots x_n)$, ampak na obe strani neskončno zaporedje

$$(\dots x_{-2}, x_{-1}, x_1;\ x_1, x_2, \dots x_n;\ x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

ki je periodično s periodo n

$$x_{k+z\,n} = x_k, \quad z \in Z$$

Z drugimi besedami, osnovno n-terico periodično nadaljujemo na obe strani.

Fourierova transformacija takega zaporedja naj bo Fourierova transformacija osnovne n-terice.

Konvolucija dveh zaporedij a in x naj bo zaporedje, označimo ga z $a * x$, ki ima tele komponente:

$$(a * x)_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k+1-j} \cdot x_j, \quad k \in Z$$

Vidi se analogija s konvolucijo funkcij, če seštevanje zamenjamo z integriranjem.

Tudi diskretna Fourierova transformacija preslika konvolucijo v produkt, točneje

$$(\widehat{a * x})_k = \hat{a}_k \cdot \hat{x}_k, \quad k \in Z$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
(\widehat{a * x})_k &= \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \cdot (a * x)_m \\
&= \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \cdot a_{m+1-j} \cdot x_j \\
&= \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)((m+1-j)-1)} \cdot a_{m+1-j} \cdot \omega^{(k-1)(1-j)} \cdot x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)} \cdot x_j \cdot \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-1)((m+1-j)-1)} \cdot a_{m+1-j}
\end{aligned}$$

Zaradi periodičnosti zaporedja a in ker je $\omega^n = 1$, je ta izraz enak

$\sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)} \cdot x_j \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \cdot a_m = \hat{x}_k \cdot \hat{a}_k$, kar je bilo treba dokazati.

Zdaj imamo dovolj sredstev za reševanje sistema (1).

Reševanje sistema enačb (1)

Kot smo nakazali že v uvodu, se da leva stran v enačbi (1) pisati kot konvolucija dveh n-teric, x in a

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n \\ A_n & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \\ & & \dots & & \\ A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = a * x \tag{3}$$

Komponente n-terice a dobimo s primerjanjem obeh strani v (3):

$$\begin{aligned}
a_1 &= A_1 \\
a_2 &= A_n \\
a_3 &= A_{n-1} \\
a_4 &= A_{n-2} \\
&\vdots \\
a_n &= A_2
\end{aligned}$$

Zdaj rešujemo konvolucijsko enačbo $a * x = b$

Po pravilu o Fourierovi transformiranki konvolucije dobimo

$$\hat{a}_k \cdot \hat{x}_k = \hat{b}_k, \quad k = 1, 2, \dots n$$

Če so vsi $\hat{a}_k \neq 0$ (kasneje bomo videli, kaj to pomeni), se dajo izračunati vsi $\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = \hat{b}_k/\hat{a}_k$$

in iz njih neznanke x_m:

$$x = (1/n)\overline{\mathcal{F}}\hat{x}, \quad x_m = (1/n) \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \cdot \hat{b}_k/\hat{a}_k$$

Tako kot sistem (1) se da rešiti s pomočjo Fourierove transformacije sistem nelinearnih enačb oblike

$$x * x = b, \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{k+1-j} \cdot x_j = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

Splošneje, sistem nelinearnih enačb m-te stopnje posebne oblike

$$P_m(x) = 0$$

kjer je P_m konvolucijski polinom m-te stopnje, se da s Fourierovo transformacijo prevesti na n navadnih enačb m-te stopnje

$$P_m(\hat{x}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrike sistema (1)

Na enačbo $Ax = a * x = \lambda x$ uporabimo Fourierovo transformacijo

$$\hat{a}_k \cdot \hat{x}_k = \lambda \hat{x}_k, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

Če vstavimo v to enačbo

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= (1, 0, 0, \ldots 0), \quad \text{dobimo } \lambda = \hat{a}_1 \\
\hat{x} &= (0, 1, 0, \ldots 0), \qquad\qquad \lambda = \hat{a}_2 \\
&\ldots . \\
\hat{x} &= (0, 0, 1, 0, .. 0), \qquad\qquad \lambda = \hat{a}_n
\end{aligned}$$

Torej so ti vektorji Fourierove slike lastnih vektorjev matrike A in so $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots \hat{a}_n$ njene lastne vrednosti.

Matrika A ni singularna natanko takrat, ko so vsi $\hat{a}_k \neq 0$.

Lastni vektorji niso odvisni od matričnih koeficientov, ampak samo od reda matrike n:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= (1/n)\,(1, 1, 1, \ldots 1) \\
x^{(2)} &= (1/n)\,(1, \overline{\omega}, \overline{\omega}^2, \ldots \overline{\omega}^{n-1}) \\
x^{(3)} &= (1/n)\,(1, \overline{\omega}^2, \overline{\omega}^4, \ldots \overline{\omega}^{2(n-1)}) \\
&\ldots . \\
x^{(n)} &= (1/n)\,(1, \overline{\omega}^{(n-1)}, \overline{\omega}^{2(n-1)}, \ldots \overline{\omega}^{(n-1)^2})
\end{aligned}$$

Uporaba opisane metode za sisteme linearnih enačb, ki nastopajo pri numeričnem reševanju robnih problemov

Opisana metoda se da uporabiti tudi za nekatere sisteme linearnih enačb, ki nimajo oblike (1) — z njo se da zmanjšati število neznank. Taki so sistemi, ki nastopajo pri nu-

meričnem reševanju robnih problemov. Oglejmo si preprost zgled: robni problem naj bo tale:

$$-\ddot{x}(t) + x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1] \tag{4}$$
$$x(0) = x(1) = 0$$

Numerično ga takole rešujemo: Interval [0, 1] razdelimo na $n + 1$ enakih delov z delilnimi točkami $t_1 = 0, t_1, t_2, \ldots t_n, t_{n+1} = 1$. Neznano funkcijo $x(t)$ iščemo samo v delilnih točkah, tj., iščemo števila $x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), \ldots, x_{n+1} = x(t_{n+1})$.

Zaradi robnega pogoja je $x_0 = x_{n+1} = 0$. Enačbe za ostale neznanke $x_1, x_2, \ldots x_n$ dobimo, ko v diferencialno enačbo (4) po vrsti postavimo $t = t_1, t = t_2, \ldots, t = t_n$ in uporabimo znane formule za približno izražanje drugega odvoda s funkcijskimi vrednostmi

$$\ddot{x}(t_1) \approx (x_1 - 2x_1 + x_2)/h^2$$
$$\ddot{x}(t_n) \approx (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})/h^2$$

(Tu smo aproksimirali drugi odvod s funkcijskimi vrednostmi v treh točkah; h je razdalja med sosednjima delilnima točkama, pri nas $h = 1/(n + 1)$.)

$$\ddot{x}(t_2) \approx (-x_0 + 16x_1 - 30x_2 + 16x_3 - x_4)/(12h^2)$$
$$\ddot{x}(t_3) \approx (-x_1 + 16x_2 - 30x_3 + 16x_4 - x_5)/(12h^2)$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ddot{x}(t_{n-1}) \approx (-x_{n-3} + 16x_{n-2} - 30x_{n-1} + 16x_n - x_{n+1}/(12h^2)$$

(To je aproksimacija s funkcijskimi vrednostmi v petih točkah.)

Torej dobimo za neznanke $x_1, x_2, \ldots x_n$ tale sistem n linearnih enačb, zapisan v matrični obliki:

$$Bx = 12h^2 f \tag{5}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ -16 & 30 & -16 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & -16 & 30 & -16 & 1 \ldots 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 \ldots 0 & 1 & -16 & 30 & -16 & 1 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 1 & -16 & 30 & -16 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} + 12h^2 I$$

I je enotna matrika.

Opazimo, da je matrika B skoraj taka kot matrika v sistemu (1). Popravimo jo v matriko A:

$$B = A + C$$

kjer je

$$A = 12h^2 I + \begin{bmatrix} 30 & -16 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 & -16 \\ -16 & 30 & -16 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 1 \\ 1 & -16 & 30 & -16 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 & -16 & 30 & -16 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 1 & -16 & 30 & -16 \\ -16 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 1 & -16 & 30 \end{bmatrix}$$

take oblike kot matrika v sistemu (1) (vrstice se ciklično premikajo na desno), popravek C pa je

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 & 0 \ldots & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -1 & 0 & 0 \ldots & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Sistem (5) se s Fourierovo transformacijo ne da docela rešiti, da se pa poenostaviti na naslednji način: pišemo $B = A + C$ in vektor Cx prenesemo na desno stran

$$Ax = 12h^2 f - Cx = b \tag{6}$$

Stolpeč Cx zaradi posebne oblike matrike C linearno vsebuje šest neznank, x_1, x_2, x_3, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n in zato jih tudi stolpec b. Sistem (6) zdaj rešujemo prav tako, kot smo reševali sistem (1): najdemo tako n-terico a, da je $Ax = a * x$ in uporabimo pravilo o Fourierovi transformaciji konvolucije

$$\hat{a}_k \cdot \hat{x}_k = \hat{b}_k \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

$$\hat{x}_k = \hat{b}_k / \hat{a}_k$$

$$x_m = (1/n) \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \cdot (\hat{b}_k / \hat{a}_k) \qquad m = 1, 2, \ldots n \tag{7}$$

Vsak $\hat{b}_k$ je linearna funkcija neznank x_1, x_2, x_3, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, zato tudi vsaka desna stran v zvezah (7), torej

$$x_m = A_m x_1 + B_m x_2 + C_m x_3 + D_m x_{n-2} + E_m x_{n-1} + F_m x_n + G_m \quad m = 1, 2, \ldots n \tag{8}$$

Kakor se vidi iz izpeljav, se koeficienti A, B, C, D, E, F, G dajo izračunati. Torej je (8) sistem linearnih enačb za neznanke x_1, x_2, ... x_n, ima pa posebno obliko: pri $m = 1, 2, 3$, $n - 2$, $n - 1$, n imamo šest enačb s šestimi neznankami x_1, x_2, x_3, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, pri ostalih m so neznanke x_m eksplicitno izražene z navedenimi šestimi neznankami. Tako smo s pomočjo Fourierove transformacije sistem n enačb (5) skrčili na sistem šestih enačb!

VIR

R. Guenther: A transform method for solving certain systems of linear algebraic equations Computing 8, 13—18 (1971).

NOVICA

ZANESLJIVA MERITEV SVETLOBNE HITROSTI

Hitrost elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru c sodi med najpomembnejše naravne konstante. Nastopa domala v vseh enačbah specialne teorije relativnosti in v enačbah, ki zadevajo elektromagnetno valovanje. Posebno vlogo igra pri merjenju razdalj na Zemlji in oddaljenosti Lune in planetov z radarjem in laserjem. Pri nekaterih merjenjih razdalj je merska tehnika tako napredovala, da je postala stara vrednost za hitrost svetlobe že premalo zanesljiva. Iz tega razloga in v želji po čim zanesljivejših vrednostih za naravne konstante so v zadnjem času večkrat na novo merili hitrost svetlobe. Pred kratkim je uspelo merjenje, ki je dalo precej zanesljivejšo vrednost kot prejšnja.[1] To merjenje odraža velik napredek merske tehnike in je zaradi tega tako zanimivo, da ga kaže opisati v glavnih potezah.

Pri večini starejših poskusov so izmerili čas, ki ga je potrebovalo elektromagnetno valovanje za prelet znane poti.[2] Pozneje so se oprijeli tudi drugačnega merskega načina. Izmerili so frekvenco ν valovanja, ki ga je oddajal stabiliziran izvir, in neodvisno od nje še valovno dolžino tega valovanja λ. Produkt frekvence in valovne dolžine je dal hitrost svetlobe $c = \lambda\nu$. Pri nekem prejšnjem merjenju te vrste so uporabili mikrovalove s frekvenco $7{,}2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s}^{-1} = 72$ GHz in z valovno dolžino 0,43 cm.[3] Kaže, da bodo v prihodnosti določali hitrost svetlobe samo še z merjenjem frekvence in valovne dolžine. Valovno dolžino je mogoče meriti tem zanesljiveje, čim manjša je in čim bliže je valovni dolžini vidne svetlobe. Frekvence na vidnem območju za zdaj še ni mogoče meriti. Velik uspeh je že merjenje frekvence na infrardečem območju.

Pri zelo zanesljivih merjenjih je treba izhajati prav od definicij za enoti meter in sekunda, ki sestavljata enoto m/s za hitrost. Meter je določen kot 1 650 763,73 valovnih dolžin oranžnordeče svetlobe, ki jo seva atom kriptona ^{86}Kr.* Sekunda je določena kot 9 192 631 770 nihajnih časov mikrovalov, ki jih seva atom cezija ^{133}Cs.** Frekvenco izbranega valovanja moramo primerjati s cezijevo frekvenco in valovno dolžino izbranega valovanja s kriptonovo valovno dolžino.

Pri merjenju, ki ga nameravamo opisati, so uporabili kot izvir valovanja z metanom stabilizirani helijsko-neonski laser.[4,1] To je izvir infrardeče svetlobe s frekvenco ν_0 okoli $8{,}85 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1} = 88{,}5$ THz (1 terahertz $= 10^{12}$ Hz) in z valovno dolžino λ_0 okoli 3,39 μm $=$ $= 33900$ Å. Izsevano valovanje je povezano z vrtilno-nihajnim prehodom molekule metana CH_4. Izviri s kolikor mogoče enobarvno svetlobo, ki so jih doslej uporabljali kot standarde, so izkoriščali prehode med stanji atomov. Za razliko od njih izkorišča novi izvir prehod med stanjema molekule. To ima več prednosti. Razpadni časi molekul pri vrtilno-nihajnih prehodih so daljši kot razpadni časi atomskih vzbujenih stanj. Spektralne črte, ki ustrezajo molekulskim prehodom, imajo tedaj zelo majhno naravno širino. Število različnih molekulskih prehodov je zelo veliko. Večkrat nanese po naključju, da leži frekvenca valovanja kakega molekulskega prehoda dovolj blizu frekvence laserskega koherentnega valovanja, ki jo je mogoče naravnavati samo za nekaj desettisočin odstotka. Od znanih molekulskih

* Gre za prehod iz vzbujenega stanja $6d_5$ v vzbujeno stanje $5p_{10}$. V prvem je elektron iz zadnje zasedene podlupine 4p v podlupini 6d in v drugem v podlupini 5p. Vrzel ostane v obeh primerih v podlupini 4s. Indeksa 5 in 10 označujeta nivoje, ki so urejeni v skupine in razvrščeni po energiji. (Celotna vrtilna količina vrzeli je sklopljena s celotno vrtilno količino zunanjega elektrona).

** Gre za prehod med stanjema, na katerih je razcepljeno osnovno stanje cezijevega atoma. V prvem sta spin jedra 7/2 in spin zunanjega elektrona 1/2 vzporedna in v drugem nasprotno vzporedna.

prehodov, ki ustrezajo tej zahtevi, je posebno pomemben prehod molekule metana. Pri tem prehodu P(7) z razpadnim časom 0,01 s v tretjem nihajnem traku se kvantno število velikosti vrtilne količine molekule poveča za 1. Frekvenca ustreznega valovanja je samo za 10^8 nihajev na sekundo, to je za dobro desettisočino odstotka, večja od frekvence enega izmed valovanj, ki jih seva helijsko-neonski laser. (V helijsko-neonskem laserju, kakršne uporabljamo po naših šolah, ne izkoriščamo tega valovanja.) S prilagoditvijo tlaka v laserjevi votlini je mogoče doseči, da se pokrijeta frekvenci laserja in molekulskega prehoda.

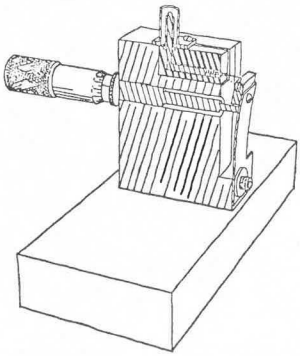
V stoječe valovanje v votlini laserja dajo celico z metanom pod tlakom do več deset 10^{-3} tor. Dokler je frekvenca laserskega valovanja malo manjša od frekvence molekulskega prehoda, absorbirajo zaradi Dopplerjevega pojava valovanje molekule z izbrano majhno komponento hitrosti v nasprotni smeri potovanja valovanja. Stoječe valovanje si mislimo sestavljeno iz dveh potujočih valovanj v nasprotnih smereh. Valovanje absorbirata dve skupini molekul. Valovanje, ki potuje proti desni, absorbirajo molekule, ki se gibljejo proti levi, valovanje, ki potuje proti levi, pa molekule, ki se gibljejo proti desni. Ko se frekvenca laserskega valovanja pokrije s frekvenco molekulskega prehoda, absorbirajo valovanje le še molekule, ki skoraj mirujejo. Tedaj je molekul, ki absorbirajo, manj kot pri nekoliko večji ali pri nekoliko manjši frekvenci laserskega valovanja. Molekule prepuščajo več valovanja iz laserja s frekvenco molekulskega prehoda. Končni učinek je tak, kot da bi molekule metana v absorpcijski celici sevale koherentno valovanje z lastno frekvenco prehoda. Ustrezna črta v spektru je zelo ozka. Ni razširjena zaradi Dopplerjevega premika, ampak samo zaradi trkov med molekulami.

Poskus, pri katerem so prvič stabilizirali helijsko-neonski laser z metanom, so napravili s tremi helijsko-neonskimi laserji.[4] V podzemeljskem laboratoriju so pritrdili laserje s kremenovimi palicami na tritonski litoželezni mizi. Prvi in drugi laser sta bila dolga po 60 cm, od česar je približno polovica odpadla na absorpcijski celici z metanom. Tretji laser ni imel celice z metanom. Merili so utripanji, ki sta nastali s sestavljanjem valovanj iz prvega in tretjega in iz drugega in tretjega laserja. Linearni pretvornik frekvence v napetost je dal napetost, ki je bila sorazmerna s frekvenco utripanja. S to napetostjo so poskrbeli preko servomehanizmov, da je ostala frekvenca utripanja konstantna. Frekvenco prvega laserja so naravnali na sredino spektralne črte molekulskega prehoda. Najprej so pri nespremenjeni frekvenci utripanja prvega in tretjega laserja počasi spreminjali frekvenco utripanja drugega in tretjega laserja. Tako so otipali spektrum svetlobe iz celice z metanom v prvem laserju pri različnih tlakih. Ugotovili so, da je merila razpolovna frekvenca $\nu_{1/2}$, ki določa širino spektralne črte 150 kHz, pri tlaku metana $0{,}25 \cdot 10^{-3}$ tor. Širina črte je bila linearna funkcija tlaka metana. Razpolovna frekvenca je narasla za 16,3 kHz, ko je narasel tlak metana za tisočino tora. S poskusom določena razpolovna frekvenca $1{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$ je okoli tisočkrat večja kot naravna razpolovna frekvenca $(\nu_{1/2})_{\mathrm{nar}} = 1/\tau = 100\ \mathrm{s}^{-1}$.

Nato so nastavili tudi za frekvenco utripanja drugega in tretjega laserja konstantno vrednost in spreminjali tlak metana v eni izmed obeh celic. Razlika frekvence utripanja prvega in tretjega laserja je ostala nespremenjena v okviru nenatančnosti ± 1 kHz pri merjenju. Neodvisnost frekvence ν_0 od tlaka metana je zaželena lastnost za izvir, ki bi ga hoteli uporabiti kot standard, saj je celo pri samem laserju mogoče s tlačnimi spremembami v ozkih mejah naravnavati frekvenco. Opisana merjenja so zagotovila, da je z metanom stabilizirani helijsko-neonski laser izvir svetlobe, pri katerem je frekvenca negotova kvečjemu za $\pm 1\ \mathrm{kHz}/\nu_0 = \pm 1{,}1 \cdot 10^{-11}$, to je za okoli 10^{-9} odstotkov.

Frekvenca z metanom stabiliziranega laserja je precej bolj stabilna kot na primer frekvenca svetlobe iz kriptonovega izvira. S tem je izpolnjen osnovni pogoj za uspešno merjenje hitrosti svetlobe. Treba je bilo še neposredno izmeriti frekvenco in neodvisno od nje valovno dolžino valovanja, ki ga oddaja z metanom stabilizirani laser. Primerjava metanove

frekvence okoli $8{,}85 \cdot 10^{13}\ s^{-1}$ s frekvenco okoli $9{,}19 \cdot 10^{9}\ s^{-1}$ cezijevega standarda je zelo zahtevna. Zmogli so jo z razširitvijo tehnike mešanja električnih nihanj, kakršno poznajo radiotehniki, na infrardeče območje. Na massachusettskem tehničnem inštitutu (MIT) v Cambridgu v ZDA so že prej razvili mešanje nihanj z zelo veliko frekvenco. Kot element z nelinearno karakteristiko so uporabili diodo kovina-kovina[5,6]. Volframov lasasti monokristal z dolžino nekaj milimetrov in premerom 2 μm se dotika zglajene nikljeve ploščice. Kristal ima konico s krivinskim radijem kakih tisoč ångstrømov. Z mikrometrskim vijakom, s katerim premikajo prožen jeziček z nikljevo ploščico, dosežejo »točkast« stik med ploščico in kristalom.



Sl. 1 Dioda kovina-kovina s točkastim stikom.[6] Desno je na prožnem jezičku pritrjena nikljeva ploščica. Lasasti kristal je v vodoravni legi. Z mikrometrskim vijakom dosežejo, da se dotika ploščice konica kristala. Zgoraj je priključek za koaksialni vodnik

Pri prvem poskusu s tako diodo so uporabili valovanje iz laserja na vodno paro z valovno dolžino 28,0 μm in valovanje iz laserja na ogljikov dioksid z valovno dolžino 9,3 μ.[5] Z lečami so zbrali na lasastem kristalu blizu točkastega stika laserska curka s premerom nekaj desetin milimetra pod majhnima kotoma proti osi kristala. Po valovnem vodiku, ki se je končal tik ob lasastem kristalu, je prihajalo do kristala valovanje iz klistrona. V diodi je nastal močan utripajoč električni tok, ko se je frekvenca mikrovalov iz klistrona ujemala z razliko med frekvenco laserja na ogljikov dioksid in trikratno frekvenco laserja na vodno paro. Dioda kovina-kovina s točkastim stikom je delovala podobno kot navadna polprevodniška dioda pri mnogo manjših frekvencah. Podrobnosti o delovanju prve še ne poznajo. Verjetno je odločilna tanka oksidna plast med kovinama, ki je ovira za prevodniške elektrone in skozi katero prehajajo elektroni zaradi tunelskega pojava. Električno polje v valovanju — tudi v laserskem valovanju — požene po površju laserskega kristala električni tok s prav tolikšno frekvenco. Zaradi nelinearnosti karakteristike diode vsebuje tok tudi enosmerno sestavino in sinusne sestavine z višjimi harmoničnimi frekvencami.

Diodo so priključili na širokopasovni medfrekvenčni ojačevalnik z medfrekvenco 57 MHz. V ojačevalniku so ojačeni tok usmerili in ga nato vodili na katodni oscilograf. Elektronski curek v osciloskopu je bil sinhroniziran z laserjema in klistronom, ki so vsi delovali v kratkotrajnih sunkih. Na zaslonu osciloskopa se je pojavil izrazit vrh pri frekvenci klistrona, ki je bila za 57 MHz večja ali manjša od 21 866 MHz. To je pomenilo, da je razlika med frekvenco laserja na ogljikov dioksid in trikratno frekvenco laserja na vodno paro 21 866 MHz. Zadnji podatek za frekvenco so izmerili na običajen način s števcem. Z znano frekvenco laserja na vodno paro so s tem podatkom izračunali frekvenco laserja na ogljikov dioksid.

Pri drugem poskusu so razširili merjenje še na večje frekvence. Pri tem so uporabili laser z ogljikovim dioksidom z valovno dolžino 10,4 μm in laser z ogljikovim monoksidom z valovno dolžino 5,2 μm.[6] Poskus so napravili podobno kot prejšnjega. Ugotovili so razliko med frekvencó laserja na ogljikov monoksid in dvojno frekvenco valovanja laserja na ogljikov dioksid. Skupina na MIT je nato opustila prizadevanja za merjenje vse višjih frekvenc, češ da sodijo bolj v laboratorije, ki se ukvarjajo s standardi.[7]

Medtem so začeli uporabljati diode kovina-kovina s točkastim stikom tudi v laboratoriju ameriškega državnega urada za standarde (NBS) v Bouldru. Skupina v tem laboratoriju je prva določila frekvenco helijsko-neonskega laserja z valovno dolžino okoli 3,39 μm.[8] Izmerili so razliko med to frekvenco in trojno frekvenco laserja na ogljikov dioksid. Za razliko od drugih so pri tem uporabili laserje z neprekinjenim delovanjem in ne laserjev, ki bi delovali v sunkih. Od prejšnjih merjenj so poznali frekvenco laserja na ogljikov dioksid. Ugotovili so še, da je bila absorpcijska frekvenca metana še za 45 MHz večja. Za to frekvenco so tako dobili (88,376 245 $\pm$ 0,000 050) THz. Z valovno dolžino, ki so jo določili drugi avtorji za z metanom stabilizirani helijsko-neonski laser 3,3922314 μm, so izračunali hitrost svetlobe (2,997 926 7 $\pm$ 0,000 020 0) $\cdot$ 10^8 m/s. Ta vrednost ni nasprotovala nekoliko zanesljivejši mednarodno sprejeti vrednosti (2,997 925 0 $\pm$ 0,000 010 0) $\cdot$ 10^8 m/s.

Naposled sta se združili na NBS skupina, ki je obvladala tehniko mešanja nihanj z zelo visokimi frekvencami, in skupina, ki je razvila z metanom stabilizirani laser. Obema skupaj je uspelo doslej najzanesljivejše merjenje hitrosti svetlobe. Frekvenco z metanom stabiliziranega laserja so povezali s frekvenco frekvenčnega standarda v več korakih, v katerih je sodelovalo pet klistronov in pet laserjev. Frekvenco klistrona z najpočasnejšim nihanjem je meril števec, priključen na cezijevo uro. Tako je bila najnižja frekvenca določena glede na frekvenco frekvenčnega standarda. Na ta klistron je bil priključen drugi klistron tako, da je bila frekvenca drugega klistrona ravno cel večkratnik frekvence prvega. Na drugi klistron je bil priključen laser na cianvodik tako, da je bila frekvenca laserja ravno cel večkratnik frekvence drugega klistrona. Valovanje cianvodikovega laserja so mešali z valovanjem laserja na vodno paro in valovanjem tretjega klistrona na diodi kovina-kovina. Posebej so merili frekvenco utripajočega toka, ki je tekel po diodi. Valovanje laserja na vodno paro so mešali z valovanjem laserja na ogljikov dioksid. Tako so najprej določili frekvenco izbranega prehoda (R(10)) v laserju na ogljikov dioksid, ki je bil stabiliziran z absorpcijo v ogljikovem dioksidu. Z mešanjem valovanja tega laserja z valovanjem cianvodikovega laserja in valovanjem klistrona so določili frekvenco drugega prehoda (R(30)) v laserju na ogljikov dioksid. Nazadnje so zmešali to valovanje laserja na ogljikov dioksid z valovanjem z metanom stabiliziranega helijsko-neonskega laserja. Po tej poti so dobili za frekvenco slednjega (88,376 181 627 $\pm$ 0,000 000 050) THz.

Neodvisno od tega so določili s posebnim Fabry-Perotovim interferometrom valovno dolžino z metanom stabiliziranega helijsko-neonskega laserja glede na valovno dolžino kriptonove svetlobe. Pri tem je motila že od prej znana asimetrija kriptonove spektralne črte.[9] Zaradi te asimetrije postane efektivna valovna dolžina nekoliko odvisna od reda interference. Nevšečnosti so se kolikor mogoče izognili s privzetkom, da sestavljata črto dva dela. Pokazalo se je, da je najugodneje pripisati dogovorjeno valovno dolžino težišču kriptonove črte (in ne vrhu črte). Tako so dobili za valovno dolžino z metanom stabiliziranega helijsko-neonskega laserja (3,392 231 376 $\pm$ 0,000 000 012) μm. Medtem ko je relativna nezanesljivost pri merjenju frekvence $\pm 6 \cdot 10^{-10}$, relativne nezanesljivosti pri merjenju valovne dolžine zaradi omenjene nevšečnosti ni mogoče izboljšati pod $\pm 4 \cdot 10^{-9}$. Z množenjem obeh podatkov dobimo za hitrost svetlobe

$$c = (2{,}997\,924\,562 \pm 0{,}000\,000\,011) \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Relativna zanesljivost $\pm 4 \cdot 10^{-9}$ izvira od nezanesljivosti pri merjenju valovne dolžine. Navzlic temu je okoli stokrat boljša kot pri prejšnjih merjenjih.

Z diodo kovina-kovina je mogoče določiti v enem koraku frekvenco, ki je kvečjemu dvanajstkratnik primerjalne frekvence. Pri višjih harmoničnih mnogokratnikih je namreč razmerje signal-šum preslabo, saj delajo z diodo pri sobni temperaturi. Mimogrede omenimo, da so dosegli z Josephsonovim spojem mnogo večje mnogokratnike.[10] Kot element z nelinearno karakteristiko so uporabili Josephsonov spoj, to je zelo tanko plast izolatorja med dvema superprevodnikoma, skozi katero prehajajo elektroni zaradi tunelskega pojava. Pri tem delu so seveda navezani na zelo nizke temperature. Najprej so primerjali v enem koraku frekvenco cijanvodikovega laserja 0,89 THz s stokrat manjšo frekvenco klistronovega frekvenčnega standarda.[11] Dosegli so že 401-kratnik, ko so primerjali frekvenco 3,82 THz laserja na vodno paro v enem koraku s frekvenco klistrona.[12] Zdaj se pripravljajo, da bi v enem koraku določili frekvenco laserja na vodno paro 10,7 THz s tisočkrat manjšo frekvenco klistronovega frekvenčnega standarda.[12]

Opisana merjenja kažejo, da veljavna definicija metra ni najbolj posrečena. Morda bomo v prihodnosti uporabili zanjo valovanje laserja. Druga možnost bi bila, da bi vzeli za osnovo hitrost svetlobe in bi definirali meter kot del razdalje, ki jo prepotuje svetloba v 1 sekundi. V obeh primerih bi bilo mogoče že danes meriti razdaljo in hitrost zanesljiveje, kakor dopušča to veljavna definicija metra.

J. Strnad

LITERATURA

[1] K. M. Evenson, J. S. Wells, F. R. Petersen, B. L. Danielson, G. W. Day, R. L. Barger, J. L. Hall: Speed of Light from Direct Frequency and Wavelength Measurements of the Methane-Stabilized Laser, Phys. Rev. Letters **29**, 1346 (1972).

[2] F. Kvaternik: Nove metode za merjenje svetlobne hitrosti, Obz. mat. fiz. **2**, 20 (1953).

[3] K. D. Froome: A new determination of the free-space velocity of electromagnetic waves, Proc. Roy. Soc. **A247**, 109 (1958).

[4] R. L. Barger, J. L. Hall: Pressure Shift and Broadening of Methane Line at 3, 39 μ Studied by Laser-Saturated Molecular Absorption, Phys. Rev. Letters **22**, 4 (1969).

[5] V. Daneu, D. Sokoloff, A. Sanchez, A. Javan: Extension of Laser Harmonic-Frequency Mixing Techniques into the 9 μ Region with an Infrared Metal-Metal Point Contact Diode, Applied Phys. Letters **15**, 398 (1969).

[6] D. R. Sokoloff, A. Sanchez, R. M. Osgood, A. Javan: Extension of Laser Harmonic-Frequency Mixing into the 5-μ Regions, Applied Phys. Letters **17**, 257 (1970).

[7] Absolute laser frequency measurements, Phys. Today **25** (4), 17 (1972).

[8] K. M. Evenson, G. W. Day, I. S. Wells, L. O. Mullen: Extension of Absolute Frequency Measurements to the cw He-Ne Laser at 88 THz (3,39 μ), Applied Phys. Letters **20**, 133 (1972).

[9] W. R. C. Rowley, J. Hamon: Quelques mesures de dyssymétrie de profils spectraux, Rev. Opt. Theor. Instrum. **42**, 519 (1963).

[10] D. Halford: Comparing Frequencies, Phys. Today **26** (2), 15 (1973).

[11] D. G. McDonald, A. S. Risley, J. D. Cupp, K. M. Evenson: Harmonic Mixing of Microwave and Far-infrared Laser Radiation Using a Josephson Junction, Applied Phys. Letters **18**, 162 (1971).

[12] D. G. McDonald, A. S. Risley, J. D. Cupp, K. M. Evenson, J. R. Ashley: Four-Hundredth-Order Harmonic Mixing of Microwave and Infrared Laser Radiation Using a Josephson Junction and a Maser, Applied Phys. Letters **20**, 296 (1972).

ŠOLA

TOPOLOGIJA TUDI V SREDNJI ŠOLI?

Svoj čas je prevladovalo mnenje, da so teoretična in abstraktna poglavja matematike pretežka za srednješolce. Danes vidimo, *da je večina učencev* srednjih šol *dostopna* za teorijo množic, teorijo grup, aksiomatično geometrijo in druga sodobna področja. Filozofsko usmerjenim učencem pa prav te stvari vzbudijo navdušenje za matematiko. Skratka, novejša matematika ni *toliko* novo breme, marveč daje pouku jasnost, globino in smisel. V tem oziru bi bilo koristno tudi srečanje s topologijo že v srednji šoli.

Nekatere osnovne topološke pojme in ideje lahko razložimo dokaj enostavno — začeli bi kar z metrično topologijo na ravnini. Najprej definiramo okolice dane točke kot odprte kroge s središčem v tej točki. Učenec bo nazorno videl, da npr. okoli dveh različnih točk lahko načrtamo okolici, ki se ne sekata (Hausdorffov aksiom). Nato vpeljemo pojem notranjosti, roba in zunanjosti poljubne množice, odkrijemo razne zveze med temi pojmi, poiščemo lastnosti odprtih in zaprtih množic itd. Učenec naj pri tem čimbolj dejavno sodeluje, pri čemer si topološko dogajanje ponazori z risbami in uporabi nove pojme v konkretnih primerih. Poleg omenjenih so zanimiva še druga poglavja iz topologije, npr. teorija grafov.

Študentom matematike in sorodnih ved na univerzi bo topologija vedno bolj potrebna. V knjigi »Ostržek« je duhovito opisano, kako se je hotel deček naučiti brati in pisati v dveh dneh. Prav tako ne moremo pričakovati, da se bo človek naučil topološko misliti kar naenkrat. Nove pojme in ideje moramo doživeti, da nam pridejo v meso in kri. Če bo srednješolec spoznal reči, kakor so okolica, adherenca, rob, odprta in zaprta množica... na nazoren način, bo kasneje mnogo laže dojemal aksiomatično definirane abstraktne prostore.

Znanje topologije, ki si ga lahko pridobi srednješolec, obsega bolj ali manj le osnovne pojme o tej vedi. Kdor se bo hotel vanjo poglobiti, jo bo moral na univerzi znova predelati v celoti, in to na višji ravni. Mlad človek si pač ne more pridobiti vse izobrazbe naenkrat, ampak si mora znanje neprestano izpopolnjevati. Zato je za srednješolca važno predvsem to, da se čimbolj usposobi za nadaljnje izobraževanje in osvajanje novih spoznanj. V tem smislu bo tudi predznanje topologije (čeprav skromno) zelo koristilo vsem mladim, ki se zanimajo za matematiko. Pomagalo jim bo, da bodo pri nadaljnjem študiju sami doživeli ves razvoj topologije od izkustvenih spoznanj do popolne abstrakcije.

S topologijo lahko popestrimo tudi srednješolsko geometrijo (ki je danes že precej abstraktna in prav primerna za topološko obravnavanje). Notranjost, rob in zunanjost trikotnika so pojmi s prvotno geometrijskim pomenom. Lahko je videti, da imajo ta imena tudi topološki pomen. Okoli vsake notranje točke trikotnika je mogoče načrtati krog (tj. okolico), ki bo ves znotraj trikotnika. Geometrijska notranjost torej sovpada s topološko notranjostjo; analogno velja za rob in zunanjost trikotnika. — Topološko lahko osvetlimo tudi aksiom o zveznosti premice. Pri delitvi premice na dva dela-poltraka obstaja delitvena točka, ki spada v enega od obeh delov, a je hkrati adherentna k notranjemu delu. S tem je premica povezana v topološkem smislu, kar tudi nazorno vidimo: delitvena točka spaja oba poltraka. S takimi razmišljanji še bolj vključimo geometrijo v sodobno matematiko. Učenec bo videl, kako se prepletajo različni načini obravnavanja prostora.

Srečanje s topologijo (npr. pri matematičnem krožku) lepo dopolnjuje podobo sodobne matematike v srednji šoli. Tisti, v katerih se skriva smisel za topologijo ali sorodna področja, bodo ob *tej vedi* odkrili svoje zmožnosti ter se še z večjo gotovostjo odločili za matematični študij.

Janez Rakovec

O NEGATIVNIH ZAPAŽANJIH PRI POUKU ELEMENTARNE MATEMATIKE

Ob branju nekaterih tujih pa tudi domačih učbenikov elementarne matematike in ob razpravah o pouku le-te se mi včasih vzbujajo kaj čudni občutki.

Res je in tudi znano je, da lahko uporabimo v matematiki tole metodo: lahko izberemo kake aksiome in predpostavke, svojevoljno lahko postavljamo definicije in nato gradimo na teh osnovah matematične konstrukcije. Pri izbiri izhodišč smo pri takem poslu navidezno popolnoma svobodni. S formalnega vidika ne moremo imeti glede takih konstrukcij nikakršnih pomislekov, dokler se taka konstrukcija tiče samo avtorja in morda še takoimenovane čiste matematike. Stvar se pa bistveno spremeni, če začnemo tako konstrukcijo uvajati med učno tvarino obveznega in splošno izobraževalnega šolstva; v tem primeru prestopi vprašanje o smotrnosti takih konstrukcij okvire čiste matematike in preraste v vprašanje splošne vzgoje in kulture.

Preveč svojevoljno in formalistično obravnavanje se je v zadnjih letih močno razširilo v nekaterih učbenikih elementarne matematike. Nekateri pisci učbenikov si dovoljujejo prevelike in neobičajne svoboščine pri izbiri definicij, simbolike, učne tvarine itd.; pri tem se pa prav malo ozirajo na tradicijo, na zgodovinski razvoj, na veljavne učne načrte in na matematično pa tudi splošno kulturno raven učencev in učiteljev, ki jim je učbenik namenjen.

V dokaz, da je temu tako, navajam nekaj izbranih primerov.

V nekem učbeniku za osnovne šole sem srečal geslo *interval*, ki je definiran samo za racionalna števila. Po tej definiciji je interval števna množica in ne kontinuum. Ta definicija je svojevoljna in v nasprotju z vsem, kar smo doslej brali v matematični literaturi, v kateri je interval kontinuum. Lahko dopustimo, da kdo rabi geslo interval po svoji presoji za katerokoli množico pri svojih privatnih matematičnih konstrukcijah; ne moremo pa tega dopustiti pri šolskem delu in sicer zato ne, ker bi taka raba vnesla nered v matematično terminologijo. Če čuti kak pisec osnovnošolskega učbenika potrebo, da posebej imenuje množico racionalnih številk interval, naj si zanjo izmisli kako novo besedo, ki v matematiki še nima ustaljenega pomena.

Neki pisec uvaja v svojem osnovnošolskem učbeniku ravninski kartezični koordinatni sistem, ki zajema samo točke z racionalnimi koordinatami. Ob branju te metodske edinice se mi je vsiljevalo vprašanje, kakšen smisel ima in čemu naj služi osnovnošolskemu učencu tak na množici racionalnih števil zasnovani koordinatni sistem. Avtorju takega koordinatnega sistema bi priporočil, da bi ga imenoval s svojim priimkom in ne z Descartesovim, ker je med obema koordinatnima sistemoma zelo bistven razloček.

Vse do pred kratkim so vsi učili, da so naravna števila samo števila 1, 2, 3, 4, ... in da 0 ni naravno število. Nenadoma pa se pojavijo osnovnošolski učbeniki, ki prištevajo med naravna števila tudi število 0. Torej zopet isto geslo za množico števil 1, 2, 3, 4, ... in tudi za množico števil 0, 1, 2, 3, 4, ... Z vidika osnov matematike je med tema dvema množicama tako nedopovedljivo velik razloček, da je nedopustno imenovati jih z istim imenom. Čemu naj služi taka sprememba vsebine pojma naravno število? Pri enem učitelju so naravna števila 1, 2, 3, 4, ..., pri drugem pa 0, 1, 2, 3, 4, ... in nič ne de, če bo učenec pri zamenjavi učitelja zbegan. V matematiki je nujno definirati in imenovati različne pojme različno, da bodo vsaj matematiki nedvoumno vedeli, o čem razpravljajo. Še več takih dvoumnih definicij, pa bo prav lahko tudi matematika zdrknila na nivo neeksaktnih znanosti, kjer lahko dva govorita isto, razumeta pa različno.

Zanimivo je zasledovati, kako je z vsebino gesla *lik*. Skraja je lik pomenil sovisno in omejeno ploskev, kot npr. kvadrat, krog, sferen trikotnik itd. Pozneje so zaradi povezave *likovna umetnost* tudi v geometriji nekateri pisci začeli razumevati pod likom vsako eno- dvo- in tri-dimenzionalno sovisno in omejeno geometrijsko figuro; po takem pojmovanju so

liki daljica, lomljenka, elipsa, kolobar, piramida, svitek itd. Po najnovejšem pa je nekaterim piscem elementarne matematike lik vsaka množica točk, npr.: dve točki sta lik, trije neprekrivajoči se kvadrati so lik, pet piramid in sedem krogel so lik, prazna množica točk je lik itd. S terminološkega vidika gre tu za nepotrebno razkošje, ker rabijo ti pisci za isti pojem dve docela enakovredni gesli *lik* in *množica točk*. Po našem ni s tako terminologijo nekaj v redu; jezikovno namreč čutimo, da je lik ožji pojem kot množica točk in da je lik samo kak tip pravih podmnožic množice točk. Če pa je po definiciji teh piscev vsak lik množica točk in vsaka množica točk lik, tedaj takoimenovani »novi« osnovnošolski matematiki zares ni več treba pri geometriji obravnavati množic točk, ampak lahko z enakim dosegom in z enako vsebino namesto teh obravnava like in se tako povrne nazaj na »staro« matematiko.

Pri pedagoškem delu na nižjih stopnjah, kjer naj skušamo učencu kar najbolj pomagati do razumevanja učne tvarine, bi odsvetovali prekomerno rabo matematične simbolike, ki razumevanje lahko zelo oteži, ker misli učenec pojmovno, besedno in vsaj na začetku ne v simbolih. Simbole lahko s pridom rabimo šele, ko učenec tvarino vsebinsko že do neke mere obvlada. Pretirana raba simbolike, kjer se je lahko izognemo, namreč pri pedagoškem delu preveč utruja. Namesto simboličnega zapisa:

$$\forall\, \varepsilon > o\ \exists\, \delta > o$$

bi morda bil vsaj na začetku bolj razumljiv stavek:

za vsako pozitivno število ε in za vsaj eno pozitivno število δ

V obeh formulacijah povemo namreč vsebinsko natančno isto.

Pogosto zapažamo, da uporabljajo pisci slovenskih učbenikov elementarne matematike različno matematično simboliko. Ta piše izjave z velikimi črkami, oni z grškimi, ta zaznamuje negacijo s črtico zgoraj, oni s tildo na desni zgoraj. Ta zaznamuje vsoto z grško črko Σ, oni z latinskim S. Itd.

Posledice rabe neenotne terminologije in matematične simbolike so hudo neprijetne. Tudi bralec ki vsebinsko že obvlada učno tvarino, se v učbeniku težje znajde, razen če ga začne brati od začetka. Zaradi tega je oteženo branje učbenika vsakomur, ki še ni treniran v piščevem duhu izražanja.

Pri nas je nedavno tega razburilo duhove razpravljanje o minimumu učne tvarine, ki naj jo v kakem letniku učitelj posreduje učencu. Razpravljanje o tem se mi zdi v načelu neresno in je odraz anarhičnosti v našem šolstvu. Učna tvarina naj bi namreč bila predpisana z učnim načrtom. To tvarino mora učitelj predelati in učenec jo mora v neki zadostni meri obvladati, če naj napreduje v višji razred. Za splošno izobraževalno šolo je nesprejemljivo priporočilo, naj učitelj sam izbira učno tvarino, prav tako nesprejemljivo pa je tudi, naj ga izbira šola ali občina. Ob skrbno in dobro pretehtanem učnem načrtu odpade avtomatično vprašanje o kakem minimumu znanja. Učnemu načrtu naj bo prilagojen učbenik; strokovna komisija, ki ga ocenjuje, naj presoja zlasti, ali je učbenik v skladu z učnim načrtom, ali ustreza znanstvenim kriterijem in ali ustreza modernim pedagoškim načelom. Ob tako sestavljenem učbeniku ne more vznikniti vprašanje o minimumu znanja. Pa tudi kakovost učiteljevega dela je v takih pogojih objektivno merljiva s tem, kako je izpolnil učni program. Ne vem natančno, kakšen je sedaj v navadi postopek pri izdajanju učbenikov elementarne matematike; vsiljuje pa se mi domneva, da pisec morda najprej napiše učbenik in nato določijo po njem učni načrt. Taka praksa pa bi lahko privedla do praznih razprav o minimumu znanja in o neznanju učiteljev elementarne matematike.

S polnim čutom odgovornosti do dela na šoli moramo zavrniti kritike, da nekateri naši učitelji, zlasti tisti, ki nasprotujejo kakim individualističnim konceptom pouka elementarne matematike, ravnajo tako zaradi tega, ker učne tvarine ne obvladajo ali ker so prestari,

da bi se tem konceptom mogli prilagoditi. Tako mnenje je zgrešeno in za šolo nesprejemljivo. Učitelj, namreč, ki se je resno in zares kvalificiral za pedagoško delo, je usposobljen obvladati, razumeti in tolmačiti učno tvarino elementarne matematike, ki jo vsebuje predpisani učbenik, pri pogoju, da je učbenik znanstveno in pedagoško neoporečen. Pri nas pa je znanstvena kritika učbenikov elementarne matematike zelo zelo redka in hkrati pristranska kritika učiteljev zelo zelo pogosta; zato obstoji nevarnost, da se bomo še nadalje izgubljali v razpravah o minimumu in o nesposobnosti učiteljev elementarne matematike.

Alojzij Vadnal

O FIZIKALNIH KROŽKIH

Sprva sem hotel napisati poročilo o dvoletnem delu fizikalnga krožka na I. gimnaziji v Ljubljani. A me pero ni hotelo ubogati in tako je nastalo tole razglabljanje o usodi našega fizikalnega krožka.

Pred dvema letoma sem prišel na bežigrajsko gimnazijo, da se pred vstopom na fakulteto fizikalno-matematično izobrazim. Svoj namen sem skoraj dosegel, saj sem dobil najboljšo vzgojo. Nekaj pa mi je manjkalo: *fizikalni krožek*. Sprehodil sem se po šoli, poiskal mlade fizike, in jih povprašal, če bi bili pripravljeni sodelovati v krožku. Drugošolci so komaj pričeli spoznavati osnove fizike in so samo prestrašeno odkimavali. Tretji razredi se za delo sploh niso zanimali, četrtošolci pa so bili dokaj skeptični. Pomembno pa je bilo dejstvo, da nihče ni hotel niti s prstom migniti za krožek.

Za nasvet sem vprašal prof. Kuščerja. Bil je nemalo začuden nad silno lenobo gimnazijcev, saj so v njegovih šolskih časih dijaki veliko pridneje sodelovali pri izvenšolskem delu. Po njegovih nasvetih sem razmnožil plakate, obveščal po zvočniku in še posebej obiskal matematične razrede. Na ustanovnem sestanku, ki je bil šele v začetku januarja, se nas je zbralo okoli pet. Z nami je bil prof. Hribar, ki nam je pomagal s svojmi predavanji prebroditi začetniške težave. Tudi dijaki smo pripravljali razna predavanja v zvezi s srednješolsko snovjo. Gradivo smo dobili povečini v reviji KVANT. Svetla točka našega delovanja je bil obisk prof. Kuščerja. Na njegovem predavanju se je zbralo okoli 30 dijakov, kar je bil letni rekord krožka. Nato je prišel čas tekmovanj, delali smo tekmovalne naloge, šli v Novo Gorico in krožka je bilo za tisto leto konec. Letna bilanca je bila kaj klavrna. Na sestanke je hodilo povprečno pet dijakov: dva drugošolca, tretješolec in dva četrtošolca. Ni čudno, da je potem letno poročilo na sestanku vodij krožkov povzročilo več smeha kot sam Marjan Kralj v nedeljo zvečer.

Letošnje šolsko leto smo začeli zelo spodbudno. Pridobili smo nove člane iz prvih in drugih razredov in izgubili dragocenega mentorja, ki zaradi prezaposlenosti ni mogel več hoditi na sestanke. Na prvem sestanku smo se domenili, da bomo nadaljevali tradicijo prejšnjega leta-predavanja. Organizirali smo predavanje prof. Pahorja o osciloskopu in popravili lanski rekord na 40 obiskovalcev. Ker je delo v krožku odmiralo, smo začeli premišljevati o praktičnih poskusih. Izkazalo se je, da nimamo ne denarja ne opreme. Ko sem predal vodstvo mlajšim, je krožek še nekaj časa životaril in se nato razsul.

To je kratka zgodovina našega fizikalnega krožka. In sedaj poglejmo, kdo je kriv, da iz vsega skupaj ni bilo nič. Mar je kriv vodja krožka? Kdo izmed bralcev bi lahko upravičeno vprašal, zakaj sem ravno jaz vodil krožek in ne kdo drug. Toda ko sem iskal člane za skupno delo, nobenemu še na misel ni prišlo, da bi prevzel vodstvo. Vsak teden sem tekal po razredih in prosil dijake, da bi morda blagovolili pripraviti kratek referat, zanimiv poizkus ali kaj podobnega. Bob ob steno!

Iz tega seveda ne sledi nujen sklep, da so dijaki lenobe. Stvar je bolj zapletena. Eno pa je res: Nismo vedeli, kaj naj počnemo, da bo dovolj zanimivo! Na žalost je treba tudi zna-

nost zaviti v čokoladni papir, če hočemo, da se bo zanjo zanimalo občinstvo. Možnosti dela v fizikalnem krožku so za gimnazijce nedvomno široke navzlic omejenemu znanju fizike. Vendar se širokogrudnost kmalu maščuje, saj lahko krožek postane tečaj za mlade elektrotehnike, modelarje in kaj podobnega. Ali je to prav ali ne, pa naj odločijo bralci sami.

Tole dolgovezno razpravljanje je imelo en sam namen. Želim zvedeti, kakšna bo usoda srednješolskih fizikalnih krožkov, ki bi bili lahko odličen pripomoček za vzgajanje mladih fizikov. Vem, da je do sedaj društvo že organiziralo vrsto tečajev in predavanj. Vendar, ali je to dovolj?

Nadvse bom hvaležen bralcem za vsako pripombo.

Dušan Repovš ml., maturant I. gimnazije v Ljubljani

DOMAČE VESTI

ANKETA DMFA SR SLOVENIJE

Upravni odbor društva je poslal v aprilu vsem svojim članom vprašalnik, s katerim je želel zvedeti za mnenje članov o delovnem načrtu društva in pripravljenosti članov za sodelovanje. Društvo, kot skupnost matematikov, fizikov in astronomov, lahko doseže samo toliko, kolikor so njegovi člani pripravljeni prispevati s svojim delom, s pobudami in idejami.

Vprašalnik je bil poslan na 805 naslovov. Odgovorov je prišlo 130. Iz osebnih podatkov razberemo, da je večina odgovorov prišla od članov z visokošolsko izobrazbo (87). Največ odgovorov je od srednješolskih profesorjev (38) in predmetnih učiteljev (24). Več kot polovica odgovorov je iz Ljubljane (74). Iz Maribora je prišlo samo 6 odgovorov, prav toliko kakor iz Celja in Kranja. Strokovno področje teh, ki so odgovorili, je največ matematika (85), fizika pa 40. Večina je zaposlena s poukom (100). Odgovori kažejo, da se člani društva zanimajo poleg svojega ožjega področja tudi za širše: za napredek znanosti, za ustvaritve v umetnosti in književnosti, da govorijo povprečno dva svetovna jezika in da gojijo raznovrstne športe.

Odgovori povejo nadalje naslednje: Na predavanja aktiva hodi redno samo 8 članov, 37 pa jih hodi občasno. Na znanstvena predavanja iz matematike in fizike jih hodi redno 17, občasno pa 56. Na predavanja gostov iz tujine jih hodi redno 14, občasno pa 42. Precejšnje zanimanje pa se pokaže za znanstvena srečanja iz predlaganih področij matematike in fizike (40—60 za posamezno področje).

Člani so pripravljeni sodelovati pri OMF. 32 bi jih pripravilo članek o pouku izbranega poglavja iz matematike, fizike ali astronomije, 47 bi jih sodelovalo kot dopisniki za posamezne rubrike, 55 pa bi jih obdelalo za OMF članek iz tujih časopisov. Za mlade bralce je pripravljeno napisati strokovni članek 31 članov. Če bi dobili nasvet za temo članka, pa še 45 članov.

Glede družabnega življenja članov v društvu so se anketiranci odločili takole: 64 bi jih šlo na ogled naravoslovnega muzeja v München (v resnici se je udeležilo ekskurzije le 20 članov!), 25 bi jih šlo na srečanje s člani hrvaškega društva na Otočcu. 76 bi jih obiskalo univerzo in observatorij v Trstu, univerzo v Zagrebu pa 59. 45 bi jih prihajalo na mesečne družabne sestanke. 65 bi se jih udeleževalo srečanj s člani drugih sosednjih društev matematikov in fizikov. 70 bi jih šlo na skupni izlet v Zagorico. Precej članov je mnenja, da bi bili koristni razgovori z drugimi strokovnimi društvi in bi se udeležili sestankov s pisatelji (49), z zdravniki (50), s filozofi (57), z ekonomisti (51), z inženirji in tehniki (64), Z gospodarstveniki (44) in s političnimi delavci (32).

V odgovorih je bilo tudi veliko nasvetov in idej za delo. Anketa je pokazala pripravljenost članov za delo, kar je pravzaprav osnova društva. Vsem se za odgovore iskreno zahvaljujemo.

Marjan Gojkovič

SEZNAM DIPLOMANTOV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE TER DOKTORSKIH DISERTACIJ*

v letu 1972

Pedagoška akademija Maribor — matematika-fizika

83. Mali Franc
84. Lukman Ida
85. Jerebic Pavel
86. Kukovec Slava
87. Klep Metka
88. Schweiger Vera
89. Jurša Edita
90. Marič Boženka
91. Arsenjuk Davorina
92. Hribernik Ivanka
93. Klarič Ruža
94. Hrašovec Jožica
95. Weigl Silvija
96. Lasič Marija
97. Trape Danijela
98. Zelenko Darinka
99. Špes Anton

Pedagoška akademija Maribor — tehnična vzgoja-fizika

90. Lebar Angela
91. Kosi Anton
92. Florjančič Franko
93. Kovačič Alojzij
94. Pulko Marija
95. Pogorevčnik Franc
96. Kronovšek Olga
97. Plaznik Stanko
98. Čander Marjan
99. Žinič Franjo
100. Verčkovnik Slavko
101. Peterlin Srečko

Pedagoška akademija Ljubljana — matematika-fizika

291. Maurin Olga
292. Žnidaršič Marija
293. Pivec-Dolšek Ida
294. Zorko Marija
295. Rovšek Ljuba
296. Zupan Vincenc
297. Zupan Janez
298. Krmac Lucijana
299. Šibanc Dragica
300. Flajs Ana
301. Dejanovič-Kretec Ana
302. Moškrič Angela
303. Mirt Jožica
304. Cmiljanič Vuko
305. Lebeničnik Frančiška
306. Mušič Janez
307. Soklič Marija
308. Temnik Miroslava
309. Žagar Ksenija
310. Razpet Izidora
311. Črnigoj Marija
312. Rakar Franc
313. Kastelic Pavel
314. Podhraški Marija
315. Kitek Marija
316. Mezgec Marija
317. Stepančič Julka
318. Bašter Janko
319. Žakelj Viktor
320. Grlj Rajko
321. Levec Elizabeta
322. Dornik Marija
323. Šubic Adela
324. Arh Stanko

* 9. seznam smo objavili v OMF. **19** (1972) str. 85.

325. Jakelj Martina
326. Markelj Irena
327. Marovat Helena
328. Polajnar Jože
329. Podgoršek Jožica

Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo

Matematika — pedagoška smer

240. Petrišič Jože
241. Konjar Zdravko
242. Cipot Rudolf
243. Usenik Janez
244. Abrahamsberg Metod
245. Batič Ivana
246. Krejan Marija
247. Krušič Vlado
248. Velušček Tatjana
249. Gojkovič Marjan
250. Moge Rudolf
251. Marovt Marija
252. Zavrtanik Petra

Matematika — tehnična smer

44. Valantič Tomaž	Neparametrična statistična analiza
45. Pisanski Tomaž	Generator slučajnih števil
46. Resinovič Aljoša	Množična strežba s čakanjem
47. Brinar Aleš	Stacionarni procesi z diskretnim parametrom
48. Pavlič Anuša	Enakomerna aproksimacija funkcij
49. Kon Margita	Programiranje numeričnih metod linearne algebre
50. Hafner Izidor	Popolnost predikatnega računa
51. Legiša Peter	Reprezentacija kolobarjev s prerezi snopov
52. Rakovec Janez	Poliedrski Schoenfliesov izrek v trirazsežnem evklidskem prostoru
53. Stanovnik Tine	Zaporedna analiza
54. Barbič Janez	Asociativna lupina Lieve algebre in njen center
55. Hvalica Dušan	Peti Hilbertov problem
56. Jakopin Primož	Numerično računanje singularnih integralov
57. Lah Pavla	Računanje ekstremov funkcij
58. Vidic Emil	QD algoritem

Fizika — pedagoška smer

34. Trampuž Miroslav
35. Bogataj Ludvik

Fizika — tehnična smer

204. Kmetec Nada	Prepustnost bizmutovega kristala za termične nevtrone
205. Lončar Franc	Dvojna jedrska resonanca N^{14} — H v TGS
206. Koželj Tomaž	Študij paramagnetnih centrov v tkivu z elektronsko spinsko resonanco
207. Laurenčič Sergej	Umeritev Ge-Li števca za merjenje energij in intenzitet žarkov gama
208. Sega Igor	Vpliv privlačnih sil na lastnosti mrežnega kvantnega plina
209. Brajnik Cveto	Študij vpliva pritiska na kristal NaH_3SeO_3 z metodo elektronske paramagnetne resonance
210. Gliha Vladimir	Reakciji $^{90}Zr(\gamma, pn)^{88}$ in $^{90}Zr(\gamma, 2n)^{88}Zr$. Priprava eksperimenta in merjenje presekov

211. Tajnik Franc	Aktivizacijska meritev preseka reakcije ^{90}Zr (γ, n) ^{89}Zr z direktnim razpadom
212. Korun Matjaž	Določitev parcialnih presekov pri fotoprotonskih reakcijah na ^{90}Zr
213. Grum Andrej	Lastna difuzija molekul tetrametilsilana TMS v tekočem kristalu 4.4' — diheptyloxyazoxybenzenu
214. Pirnat Janez	Študij jedrske kvadrupolne resonance ^{35}Cl v feroelektriku $SnCl_2 \cdot 2H_2O$
215. Fortuna Tomaž	Holografska mikroskopija
216. Kaiser Stanislav	LCAOMO študija teorije prenosa naboja vodikove vezi na dimeru vode
217. Šolmajer Tomaž	Vibracijska analiza tricloracetatnega in hidrogenditriklor — acetatnega iona
218. Pauko Miroslav	Umeritev obsevalne posode za semena v reaktorju TRIGA
219. Pumpernik Danilo	Študij gibanja A-H-B kompleksa z metodo molekulske dinamike
220. Barbič Leon	Merjenje difrakcije konstante v tekočem kristalu MRBA s sipanjem hladnih nevtronov
221. Čopič Martin	Meritev koeficienta lastne difuzije v simetrični A mezofazi 4-N-Butoksibenziliden — 4'-N-Oktilanilin s pomočjo pulzne NMR

Fizika — III. stopnja

17. Brajnik Dušan	Merjenje presekov fotonuklearnih reakcij za različna stanja residualnega jedra
18. Potokar Milan	Radiativno zajetje hitrih nevtronov v nekaterih lahkih in srednje težkih jedrih
19. Grešovnik Ferdinand	Študij strukturnih sprememb v vzmetnem jeklu pri dinamični bremenitvi z rentgensko analizo
20. Kraševec Viktor	Mikrostruktura kristalov $Ni_{1,05}$ $Mn_{0,95}$
21. Vencelj Peter	Dinamične lastnosti dislokacij v kovalentnih kristalih
22. Žumer Slobodan	Kritični efekti na NQR spektrih kristalov tipa red-nered
23. Vilfan Igor	Vpliv elektronsko fononskih iteracij na električno prevodnost v molekulskih kristalih
24. Prelovšek Peter	Gibljivost elektronov v Andersonovem modelu neurejene trdne snovi
25. Borštnik Branimir	Uporaba metode molekulske dinamike in modelov motenih oscilatorjev pri študiju oblike infrardečih absorbcijskih trakov
26. Mankoč-Borštnik Norma	Projekcija vrtilne količine in opis lahkih jeder s pomočjo metode generirajočih koordinat

Matematika — doktorske disertacije

10. **Globevnik Josip** 10, 7. 1972 **Analitične funkcije s konstantno normo.**

Klasična analitična funkcija, katere absolutna vrednost je na nekem polju konstantna, je tam tudi sama konstanta. Za vektorske analitične funkcije to v splošnem ni res. Npr. funkcija $f(z) = (1, z)$ z vrednostmi v normiranem prostoru dvojic kompleksnih števil z normo $(u, v) = \max \{ |u|, |v| \}$, analitična v vsej kompleksni ravnini, ima v enotnem krogu konstantno normo, sama pa ni konstanta.

V disertaciji je dana karakterizacija nekonstantnih analitičnih funkcij s konstantno normo, z vrednostmi v kompleksnem Banachovem prostoru. Proučeni so nekateri posebni primeri takih funkcij, npr. analitične funkcije s konstantno normo z vrednostmi v kompleksnih Banachovih algebrah (specialno v algebrah operatorjev nad kompleksnim Hilbertovim prostorom ali nad kompleksnim enakomerno konveksnim Banachovim prostorom). V disertaciji je dana tudi karakterizacija vektorskih analitičnih funkcij, katerih norma je enaka absolutni vrednosti klasične analitične funkcije. Proučeni so nekateri zanimivi posebni primeri takih funkcij.

Fizika — doktorske disertacije

38. Justin Desan	7. 10. 1972	Študij paritvenih vibracijskih stanj jeder z metodo geberairajočih koordinat
39. Kump Peter	7. 4. 1972	Raziskave jeder v območju z Z,N=50—82 z uporabo reakcije (^{16}0, 4n)
40. Žekš Boštjan	21. 6. 1972	Dinamične lastnosti feroelektričnih kristalov z vodikovimi vezmi
41. Mali Miha	21. 6. 1972	Študij feroelektričnega faznega prehoda z metodami dvojne magnetne resonance

TEKMOVANJA

ZVEZNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

V petek, 27. julija, je bilo v Ljubljani zvezno tekmovanje študentov I. in II. letnika matematike. Namen tega tekmovanja je bil predvsem v tem, da bi izbrali jugoslovanske predstavnike za II. balkanijado mladih matematikov, ki je bila letos od 20. do 30. avgusta v Atenah.

Komisija, ki so jo sestavljali Ašić Miroslav iz Beograda, dr. Fikret Vajzović iz Sarajeva, dr. Hrvoje Kraljević iz Zagreba ter dr. Ivan Vidav in dr. Niko Prijatelj iz Ljubljane, je iz predlogov, ki so jih poslala republiška društva, izbrala naslednje tekmovalne naloge:

I. letnik

(1) Naj bo X vektorski prostor, $\dim X = n < \infty$, $A_1, \ldots A_m$ pa linearni operatorji iz X v X. Označimo z r_i rang operatorja A_i in naj velja

$$\sum_{i=1}^{m} A = I \text{ (identični operator na } X), \sum_{i=1}^{m} r_i = n$$

Dokažite, da je $A_i A_j = \delta_{ij} A_j$. (Zagreb)

(2) Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija definirana na $[-a, a]$ in naj bo

$$\int_{-a}^{a} f(x) g(x) dx = 0$$

za vsako zvezno sodo funkcijo $g(x)$ na $[-a, a]$. Pokažite, da je $f(x)$ liha funkcija. (Beograd)

(3) Dokažite, da velja za vsako naravno število n in $x \geqq 0$

$$\frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{x+n^2} \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\nu}{(x+\nu^2)^2} \leqq \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{1}{x+(n-1)^2}$$

Na osnovi tega pokažite, da je

$$\lim_{x\to\infty} x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(x+\nu^2)^2} = 1/2$$ (Sarajevo)

(4) Preslikava $f: R \to R$ ima lastnosti

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{in} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

Pokažite, da je:

(a) ali $f(1) = 0$ ali $f(1) = 1$
(b) če je $f(1) = 0$, je $f(x) = 0$ za vsak $x \in R$
(c) če je $f(1) = 1$, je $f(x) = x$ za vsak $x \in Q$, f je naraščajoča in tudi $f(x) = x$ za vsak $x \in R$.

(Ljubljana)

II. letnik

(1) Naj bo $p(x) \not\equiv x$ polinom z realnimi koeficienti. Pokažite, da je polinom $p(p(x)) - x$ deljiv s polinomom $p(x) - x$. (Beograd)

(2) Izračunajte integral

$$g(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + a^2x^2)\ln(1 + b^2x^2)}{x^2}\, dx$$ (Ljubljana)

(3) Naj bodo za vsako naravno število n f_n in g_n realne funkcije na intervalu $[-1, 1]$, definirane z

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n\, dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt} \quad \text{in} \quad g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$$

Dokažite, da so $g_n(x)$ polinomi in da $g_n(x)$ enakomerno konvergira proti $|x|$ na $[-1, 1]$, ko gre $n \to \infty$. (Zagreb)

(4) Pokažite, da odprti interval $(0, 1)$ ne moremo izraziti kot unijo števno neskončno mnogih disjunktnih zaprtih množic. (Sarajevo)

Na tekmovanju je sodelovalo 8 kandidatov in sicer 6 prvoletnikov in 2 drugoletnika. Na osnovi njihovih izdelkov jih je komisija ocenila takole:

1. DRAGAN MARUŠIČ, študent I. letnika ljubljanske univerze
2. MILAN MARTINOVIĆ, študent I. letnika beograjske univerze
3. LAZAR MILIN, študent II. letnika beograjske univerze
4. OTMAR KUGONIČ, študent I. letnika ljubljanske univerze
5. LJUBOMIR POLANC, študent I. letnika ljubljanske univerze
6. MARKO TADIĆ, študent I. letnika zagrebške univerze
7. KAREL MARKELJ, študent II. letnika ljubljanske univerze
8. SMILJAN GRMEK, študent I. letnika zagrebške univerze

Prvi trije so zastopali mlade jugoslovanske matematike na balkanijadi v Atenah.

Niko Prijatelj

MATEMATIČNA BALKANIADA ŠTUDENTOV V ATENAH

Od 20. do 30. avgusta letos je potekala v Atenah II. matematična balkaniada študentov in mladih raziskovalcev. Tako kot pred dvema letoma v Bukarešti, na prvem tovrstnem srečanju, so tudi v Atenah sodelovale le štiri države: Bolgarija, Grčija, Jugoslavija in Romunija. Vsako državo so zastopali trije tekmovalci-študentje. po dva iz prvega in eden iz

drugega letnika. Seveda pa so bile delegacije posameznih držav dosti številnejše, saj so bili v njih še asistenti — mladi raziskovalci in pa profesorji, člani balkanske matematične zveze in člani mednarodne tekmovalne žirije.

V sejni dvorani študentskega doma »POLITEHNION«, ki je bil tudi naše prebivališče teh deset dni, je 21. avgusta dopoldne odprl balkaniado grški minister za kulturo. Uradnemu začetku je sledilo živahnejše nadaljevanje z ogledom atenske fakultete za matematiko in fiziko.

Tekmovalci smo se med seboj kaj hitro zbližali in spoprijateljili. S skupnimi »napori« smo se privajali na življenski utrip milijonskih Aten, v čemer smo bili kar uspešni. Sicer pa smo se ukvarjali tudi z resnejšimi zadevami. Pogovarjali smo se o matematičnih problemih, igrali šah pa tudi karte. Tako so ure do prvega tekmovalnega dneva, četrtka dopoldne, kaj hitro minile. Ta dan smo reševali štiri ure tri od štirih zastavljenih nalog. Naslednji dan se je igra ponovila in spet smo napenjali možgane ob zadanih nalogah. Tako je po končanem naporu vsem dobro del večerni ogled atenskih letnih iger. Za nami so stopili na sceno člani mednarodne žirije, ki so začeli pregledovati in ocenjevati naše delo. Za nas pa so bili ti dnevi do zaključka dosti prijetnejši. Urice lenarjenja smo si popestrili s kopanjem v okoliških letoviščih in z ogledovanjem lepot antične in moderne Grčije. Prav gotovo bosta vsem ostala v lepem spominu izlet do Pozejdonovega templja na Cap Sounionu in ekskurzija na Peloponez, kjer smo občudovali ostanke starogrške kulture v Mikenah in Epidaurosu. Na teh izletih smo se še bolj spoznali, vrstili so se prisrčni pogovori, ki so nam razkrili mnoge zanimivosti in posebnosti balkanskih držav. In tako smo pričakali sredo, 30. avgusta, zadnji dan balkaniade. Dopoldanskim zaključnim govorom in podelitvi nagrad je sledil še večerni banket, nato pa smo se udeleženci razšli, vsak v svojo domovino.

V tekmovanju študentov je kot ekipa zasedla prvo mesto Romunija, druga je bila Jugoslavija, tretja Bolgarija in četrta Grčija.

Tudi med posamezniki so bili najuspešnejši Romuni, saj so imeli v svoji vrsti absolutnega zmagovalca. Med Jugoslovani se je najbolje odrezal Milan Lazar, študent drugega letnika beograjske univerze, ki je dobil prvo nagrado. V tekmovanju prvoletnikov pa je osvojil Dragan Marušič, študent prvega letnika ljubljanske univerze, tretjo nagrado.

V tekmovanju mladih raziskovalcev do 30. leta starosti, ki jih je bilo 18, med njimi največ Romunov in Bolgarov, pa je dosegel lep uspeh, prvo nagrado, naš edini predstavnik dr. Hrvoje Kraljević iz zagrebške univerze.

Temu kratkemu poročilu naj dodam še pregled tekmovalnih nalog za prvi letnik. Prispevali so jih: 1. in 5. nalogo Bolgari, 2. in 6. Grki, 3. in 7. Romuni in 4. in 8. Jugoslovani.

Tekmovalne naloge:

Prvi dan

1. Dan je trikotnik ABC, točke M, N, P so središča stranic BC, CA in AB. Dokazati enakost

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} - 2\frac{\cos\varphi}{d_1 d_2}}$$

kjer je $D = d(\mathrm{C}, (\mathrm{AB}))$, $d_1 = d(\mathrm{C}, (\mathrm{PM}))$, $d_2 = d(\mathrm{C}, (\mathrm{PN}))$, φ pa kot med (PM) in (PN), d je razdalja.

2. Za vsak $n \in N$ je $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$. Dokazati:

a) $H_n(x)$ je polinom n-te stopnje s prvim členom $2^n x^n$,

b) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$

c) $H_n(x)$ ima n različnih načel.

3. Dana je racionalna funkcija $r(x) = p(x)/q(x)$, kjer je $q(x) = (x - x_1).(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Nadalje velja $p(x_k) \neq 0$ ter stopnja $(p) <$ stopnja (q), tako da je $\lim (x - x_k) r(x) = a_k > 0$, $x \to x_k$. Dokazati:

a) Za vsak $y > 0$ je množica $M = \{x, r(x) > y\}$ izrazljiva kot unija intervalov,

b) Za vsak $A > 0$ obstaja tak y, da je vsota dolžin intervalov enaka A.

4. Najdi splošno obliko polinoma $p(x, y)$, ki ima lastnost

$$p(x + 1, y + 1) = p(x, y)$$

Drugi dan

5. Dane so matrike A, B, C, kjer je $C = AB - BA$. Dokazati, da je C nilpotentna, če velja $AC = CA$.

6. Funkcija $f(x)$ je za iracionalen x enaka 0, za racionalen $x = p/q$, $(p, q) = 1$, pa je njena vrednost $f(x) = 1/q$. Dokazati, da je $f(x)$ zvezna za iracionalne x in nezvezna za racionalne ter da je ta nezveznost odpravljiva. Ali je $f \in R[a, b]$?

7. V kompleksnem vektorskem prostoru S_n dimenzije n je definiran skalarni produkt (x, y). Naj bo operator $A : S_n \to S_n$ definiran s predpisom

$$A(x) = (x, b)a, \text{ kjer } a, b \in S_n \text{ in } \| a \| = 1 \tag{1}$$

a) Pokaži, da je A linearni operator in poišči matriko v ortonormalni bazi.

b) Razstavi bilinearno formo $(A(x), y) = \varphi(x, y)$ v produkt dveh bilinearnih form, kjer je ena konjugirana, in poišči adjungirani operator A'.

Ali eksistirata taka vektorja a_0, b_0, da bo ustrezni A sebi adjungiran ali unitaren?

c) Če postaviš v (1) $b = y$ in se y spreminja v S_n, potem definiramo operacijo $x \circ y = (x, y)a$. Ali je ta operacija asociativna, komutativna, distributivna? Poišči zvezo med $\| x \circ y \|$ in $\| x \| \cdot \| y \|$.

8. Dano je zaporedje s predpisom $u_{n+1} = \left(2 + \frac{2}{n}\right) u_n - 1$. Določi prvi člen u_1 tako, da bo zaporedje konvergentno!

Dragan Marušič

PREJELI SMO V OCENO

»**Technical Dictionary of Vaccuum Physics & Vaccum Technology** (English, French, German, Russian). Edited by Dipl. Phys. Karl Hurrle, Dr. Ing. F. M. Jablonski, Dipl. Phys. Herbert Roth Pergamon Press, Oxford 1972. Cena £ 5.00.

K tehničnem napredku v našem stoletju je v veliki meri pripomogla tudi vakuumska tehnika, ki se je iz raziskovalnih laboratorijev razširila v elektronsko in v zadnjem času v prehrambeno industrijo. Na njej v veliki meri slonijo tudi vesoljski podvigi. Hkrati s povečanjem delovnega področja vakuumske fizike in tehnologije se je povečalo tudi število uporabljanih terminov. Treba je bilo misliti na njihov slovar v najbolj uporabljenih svetovnih jezikih.

Slovar vsebuje 5000 gesel, ki so nabrani iz mednarodnih publikacij. Gesla so nanizana po abecednem redu v angleščini in prevedena v francoščino, nemščino in ruščino. Abecedni seznam gesel v vsakem od teh treh jezikov, ki je posebej dodan, omogoča lažjo uporabo slovarja.

Slovar bo koristno služil vsem, ki delajo na področju vakuumske tehnike, posebno pri pisanju poročil v omenjenih jezikih. Pri nas bo olajšal delo terminološkim komisijam s področja fizike, elektronike itd., saj se je na osnovi prevodov v več jezikov laže odločiti za ustrezen slovenski izraz.

Franc Cvelbar

NOVE KNJIGE

Popov Radovan V.: Osnovi nacrtne geometrije sa rešenim zadacima. (:I. deo:) Drugo ispravljeno izdanje. Beograd, Naučna knjiga 1973. 190 str. 4°. Cena 75.— din.

Snov v knjigi je razdeljena na devet poglavij: 1. Kvadranti in oktanti, 2. Projekcije točke, 3. Pravokotna projekcija, 4. Ravnina, 5. Medsebojni odnos točka, premica, ravnina, 6. Transformacija, 7. Vrtenje, 8. Metrični problemi, 9. Konstrukcije pravilnih geometrijskih teles.

Knjiga je z nadaljnjo drobitvijo poglavij pregledna in dostopna celo takim, ki bi se v zahtevnejših delih te vrste težko znašli. Pisana je zelo poljudno in bogato ilustrirana. Avtor se, čeprav morda podzavestno, krepko zaveda, da je osvajanje skrivnosti opisane geometrije trnova pot, zato ne muči bralca z dokazi nevsiljeno navedenih izrekov. Bralcu je prizanesena trdota in togost aksiomatike in definicij, ki jih avtor neopazno vriva med prijetno branje. Vsa ta in še katera prizanesljivost pa je rodila množico spodrsljajev, ki bi si jih avtor kljub vsemu ne bi smel privoščiti. Zato naj bi bila knjiga priporočljiva zgolj kot zbirka rešenih nalog, nikakor pa ne kot delo, primerno za resen študij.

Franc Lebedinec

L. Rédei: Lacunary Polynomials over Finite Fields. Akadémiai Kiadó, Budapest 1973. X + 256 str.

Pri kolobarju polinomov $F[x]$ nad obsegom F se postavlja vprašanje, kateri polinomi kolobarja $F[x]$ se dajo pisati kot produkt samih linearnih faktorjev s koeficienti obsega F. Za takšne polinome se razpadni obseg ujema z obsegom F.

Avtor je že pred leti študiral to vprašanje za neke zvrsti polinomov, pri katerih so nekateri določeni koeficienti enaki nič (lakunarni polinomi), obseg F pa je končen praobseg. V zadnjem času je razširil obravnavo na še težavnejši primer, ko je F poljuben končen obseg Svoje prejšnje in zdajšnje izsledke je opisal v pričujoči knjigi, ki pomeni pravo odkritje zanimivih lastnosti polinomov nad končnimi obsegi. Knjigo zaključujejo uporabe in zbirka nerešenih problemov, ki so povezani z obravnavano snovjo.

Knjiga bo dobrodošla vsem, ki žele poglobiti svoje znanje o končnih obsegih. Nepogrešljiva pa bo tistim, ki se s to vejo matematike podrobneje ukvarjajo.

Jože Grasselli

L. Kosten: Stochastic Theory of Service Systems. Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Braunschweig 1973. Str. 158 £ 3.80

Knjižica obravnava nekaj nalog iz teorije množične strežbe. Uvodno poglavje opisuje osnovne pojme te matematične discipline, drugo in tretje pa sta namenjeni sistemu z odklanjanjem in sistemu s čakanjem, če je pritekajoči tok zahtev Poissonov in čas strežbe eksponentno porazdeljen. Ta zadnja zahteva je v četrtem poglavju opuščena. Peto poglavje obravnava nekatere nestacionarne pojave, šesto strežne sisteme s prednostjo, sedmo omeeno uporabnost sistemov, osmo pa sisteme, v katere prihajajo zahteve v skupinah ali ki strežejo v skupinah. Zadnje poglavje opisuje reševanje problemov množične strežbe s simulacijo. Knjigo končuje dodatek o rodovnih funkcijah in o Laplaceovi transformaciji.

Delo prinaša na majhnem prostoru razmeroma veliko informacije o teoriji množične strežbe. Namenjeno je predvsem uporabnikom te teorije, zato se ne ukvarja z vprašanji o eksistenci in enoličnosti rešitev, pa tudi uporabljeni matematični pripomočki so dovolj skromni: poleg običajne matematike za tehnike je le nekaj elementarnega arzenala iz verjetnostnega računa in matematične statistike.

Rajko Jamnik

NOVI APARATI

»HIBRIDNA« RAČUNALNIŠKA OPREMA

Kmalu potem, ko so izdelali prvi elektronski računalnik, so ne samo na znanstvenem in tehničnem, ampak tudi na ekonomskem področju ugotovili, da bi jim takšna naprava zelo koristila. Pred izdelovalci računalnikov se je tako odprlo veliko tržišče, ki ga je bilo treba nasititi. Najbolj so se uveljavile tiste firme, ki so imele dovolj velik kapital, sposobne strokovnjake in ki so se hitro prilagajale. Kaže, da je v tem najbolj uspela ameriška firma IBM, ki drži v svojih rokah večino svetovnega tržišča z računalniki v komercialne namene.

Seveda tudi drugi proizvajalci niso držali križem rok. Sčasoma so se nekateri specializirali na izdelavo posameznih vrst opreme za računalnike v gospodarstvu. Ti namreč delajo z velikimi množicami podatkov, za kar rabijo zmogljive vhodno-izhodne enote. Čedalje večja neodvisnost med računalniško opremo in operacijskimi sistemi je specializacijo še bolj omogočala, saj je bilo možno na procesor priključiti po tehnični plati raznovrstne periferne enote. Monopolizem se je tako na računalniškem področju skrhal. IBM je moral npr. celo znižati cene nekaterim svojim izdelkom za 15% — pred nekaj leti bi bilo to nepojmljivo — zraven pa je izgubil še nekaj pravd, ker je hotel enostransko odpovedati tehnične usluge na IBM sistemih z dodanimi tujimi enotami.

Tudi v Jugoslaviji je mogoče kupiti opremo drugih proizvajalcev. Trgovsko podjetje Metalka zastopa ameriško firmo Mohawk Data Sciences (MDS), ki proizvaja vse periferne enote, ki so v ekonomskih obdelavah pri nas danes v rabi. To so diskovne in trakovne enote, vpisovalniki na magnetni trak itd. Pri ekonomskih obdelavah so predvsem razni izpisi na formularje glavna cokla, ki zavira obdelavo. V takem primeru raje »izpišemo« vsebino na magnetne trakove preko enot, ki so od tiskalnika od 5 do 55-krat hitrejše, potem pa spravimo te zapise na papir na posebnem — posredno priključenem (off line) tiskalniku. Tako se prepustna kapaciteta računalnika zelo poveča. MDS posredno priključene tiskalnike je mogoče dobiti v več izvedbah, so zanesljivi, do 30% cenejši kot enaki firme IBM, zastopnik pa zagotavlja tudi servisno službo.

Zadnje novosti na področju hibridizacije računalniške opreme pa je pojav neodvisnih procesorjev. Kot kupite periferno opremo, tako lahko dobite tudi računalniško programsko opremo (sofware). Kje dobiti procesor, ki bo obema opremama prilagojen, je bil dosedaj velik problem, ki pa ga, kot kaže, ne bo več. G. M. Amdahl, ki je do leta 1970 vodil razvojno dejavnost v IBM in ki velja za očeta serije računalnikov (360, je osnoval podjetje in si zadal nalogo izdelati procesor, ki bi bil neodvisen od opreme. V teh prizadevanjih sta ga podprli japonska firma Fujitsu in nemška Nixdorf. Novi procesor bo izdelan z najmodernejšo tehnologijo LSI in bo hitrejši od procesorja IBM/360—165.

Čeprav gre predvsem za izboljšavo računalnikov za tehnično in znanstveno uporabo, bodo novi procesorji uporabljivi tudi na komercialnem področju. Popolno »presajanje organov« bo torej pri računalnikih uspelo prej kot pri človeku.

P. Bradač

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko ljubljanske univerze, odsek za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo in Zavod za šolstvo SRS prirejajo v dneh od 4. do 6. februarja 1974 v prostorih odseka za matematiko v Ljubljani.

5. SEMINAR IZ MATEMATIKE

za učitelje matematike in fizike na srednjih šolah pod naslovom

MESTO MATEMATIKE V EKONOMIJI

Seminar je namenjen srednješolskim učiteljem, da jih informira o problematiki in vsebini uporabe matematičnih metod v ekonomiji. Za organizacijo takega seminarja so se organizatorji odločili zlasti zato, ker se znaten del absolventov srednjih šol odloča za študij na ekonomskih višjih in visokih šolah.

Vodstva šol prosimo, da delo matematikov in fizikov, ki se bodo prijavili na seminar, organizirajo tako, da se bodo seminarja mogli udeležiti in da jim povrnejo potne stroške.

Na seminarju, ki se bo začel v ponedeljek, 4. februarja 1974 ob 9.30, bodo obravnavane naslednje teme:

Dr. A. Vadnal: **Splošni pogledi na uporabo matematike v ekonomiji**

Matematične metode so se začele uveljavljati v ekonomiji v drugi polovici prejšnjega stoletja. Danes je ekonomija že tako močno matematizirana, da si jo težko zamišljamo brez primernega obvladovanja matematike. Zaradi specifičnosti ekonomske znanosti naletimo pri uporabi matematike v njej na neprimerno večje težave in možnosti za zmote kot npr. pri uporabi v tehniki. Uvedba elektronskih računalnikov je še povečala učinkovitost matematičnih metod pri ekonomskih raziskavah.

Dr. R. Jamnik: **Matematična statistika**

Matematična statistika je del uporabne matematike, ki temelji na verjetnostnem računu in proučuje kvantitativne metode za odkrivanje zakonitosti množičnega pojavljanja. V novejšem času se vse bolj uporablja ne samo v družbenih, ampak tudi v eksaktnih znanostih. Predavatelj bo nakazal njene osnove.

Dr. A. Vadnal: **Linearno programiranje**

Z metodami linearnega programiranja rešujemo probleme vezanih ekstremov, pri katerih so pogoji linearni, linearna pa je tudi namenska funkcija. Enostavni problemi linearnega programiranja so rešljivi geometrično, za bolj komplicirane pa je potrebno poznavanje linearne algebre, neizbežen pa je tudi elektronski računalnik. Te metode, ki imajo svoj izvor pri vodenju vojaških operacij, se danes koristno uporabljajo pri reševanju raznih problemov optimalnosti v gospodarskih podjetjih in tehniki.

Dr. V. Rupnik: **Matematični model ekonomske integracije in kooperacije**

Vprašanja o svrhah in načinih integracije ali koordinacije razdrobljenih gospodarskih dejavnosti so v modernem gospodarstvu vedno pomembna. Prikazan bo matematični model integracije in kooperacije, ki je prilagojen razvoju jugoslovanskega gospodarstva.

Dr. R. Jamnik: **Teorija iger**

Strateško igro ali kar igro imenujemo igro, pri kateri vplivajo na izid zlasti subjektivne sposobnosti igralcev. Razne tipe iger, ki so matematično obdelane, je mogoče uporabiti pri realnih konfliktnih antagonističnih situacijah v športu, politiki, vojaški strategiji in zlasti v tržnem gospodarstvu.

Dr. F. Križanič: **Dinamično programiranje**

Z metodami dinamičnega programiranja rešujemo podobno kot z variacijskim računom probleme optimalnosti pri zveznih in diskretnih procesih. S to metodo določujemo npr. optimalno traso poti na nepravilnem reliefu, nabavno politiko zalog, probleme optimalnega vodenja sistemov in podobne naloge.

V popoldanskem času bodo obravnavani problemi pouka:

Aleksander Cokan: **Kombinatorika**
Sodoben pristop k problemu kombinatorike.

France Avsec: **Verjetnostni račun**
Možnosti za usklajevanje intuitivne in aksiomatične obdelave verjetnostnega računa.

Mgr. Andrej Kmet: **Diferenčne enačbe**
Diferenčne enačbe nudijo možnosti za preglednejši uvod v zaporedja in njihovo uporabo.

Razpored predavanj na seminarju

4. 2. ob 9.30 Otvoritev
Splošni pregledi na uporabo matematike v ekonomiji
10.45 Matematična statistika (2 uri)
14.30 Kombinatorika (2 uri)
16.30 Diferenčne enačbe (1 ura)

5. 2. ob 8.30 Linearno programiranje (2 uri)
10.45 Matematični model ekonomske integracije in kooperacije (2 uri)
14.30 Verjetnostni račun (2 uri)
19.00 Družabni večer

6. 2. ob 8.30 Teorija iger (2 uri)
10.45 Dinamično programiranje (2 uri)
14.30 Ogled računalniškega oddelka Ljubljanske banke

V torek, 5. februarja 1974 ob 19.00 uri bo družabni večer v šolski restavraciji »Urška«.

Vse, ki se za seminar zanimajo, prosimo, da se prijavijo z dopisnico na naslov DMFA SRS, 5. seminar iz matematike, Ljubljana, Jadranska 19, do 25. januarja 1974. Navedejo naj ime in priimek, šolo ali organizacijo združenega dela, kjer delajo, svoj naslov in hkrati prijavijo svojo udeležbo na družabnem večeru. Na družabni večer vabimo tudi one, ki se sicer seminarja ne bodo udeležili. Za morebitna dodatna pojasnila pišite na isti naslov.

Vsak udeleženec bo dobil ob prihodu na seminar izvleček iz predavanj, ki bodo kasneje objavljena v Obzorniku.

Sekretar seminarja:
Dušan Modic

OBVESTILO O NOVIH CENAH OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO V LETU 1974

25. redni letni občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je 8. 12. 1973 sprejel predlog upravnega odbora Komisije za tisk naslednje nove cene Obzornika za matematiko in fiziko v letu 1974: študenti 25.- din, posamezniki 60.- din, ustanove 100.- din in inozemstvo 7 dolarjev = 119.- din (pri čemer je pri članih društva že všteta članarina, ki znaša 10.- din).

Utemeljitev: Cena bruto stroškov za Obzornik za matematiko in fiziko za leto 1974 je 150.000.- din. V stroških so vračunani vsi tiskarski stroški, avtorski honorarji, ekspedit, vse usluge in 10% režija. Rednih naročnikov je le nekoliko več kot 1000. Zato predvidevamo največ 50.000.- din dohodka od naročnin. Razliko 100.000.- din pa bomo morali pokriti iz subvencij raziskovalne skupnosti Slovenije in republiške izobraževalne skupnosti. Primanjkljaj iz lanskega in letošnjega leta, ki je nastal predvsem zato, ker nismo že na zadnjem občnem zboru sprejeli povečane naročnine, smo pokrili z izredno dotacijo raziskovalne skupnosti Slovenije.

Sekretar komisije za tisk DMFA SRS:
Ciril Velkorh