IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1973
Letnik 20
5

20. LETNIK — ŠTEVILKA 5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, OKTOBER 1973

Uredniški odbor: Franc Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT univerze v Ljubljani; Franc Kvaternik, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, inštitut »J. Stefan«; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad, FNT; Anton Suhadolc, FNT; Ivan Vidav, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 6-krat letno.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

Naročnina: za člane 20 din, za nečlane 30 din, za dijake in študente 10 din, za ustanove in podjetja 40 din, za inozemstvo 51 din (3 $), posamezna številka 8 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, telefon: 61-564/53, tek. račun št. 50101-678-48363.

Člani društva naj nakazujejo na tekoči račun Komisije za tisk 20 din naročnine in 10 din članarine, skupaj 30 din.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

Stran

Josip Plemelj (Ob stoletnici rojstva) (Ivan Vidav) 131

Članki

Uporaba nekaterih izsledkov J. Plemlja v teoriji singularnih integralnih enačb in robnih nalog linearne konjugiranosti (N. P. Vekua) AMS Subj. class. (1970) 45 E 05, 30 A 86, 30 A 88 133

O Cauchyjevih integralih in o robnih nalogah linearnega konjugiranja (B. V. Hvedelidze) AMS Subj. Class. (1970) 45 E 05, 30 A 86, 30 A 88 145

Domače vesti 153

Bibliografija 157

CONTENTS

Page

Josip Plemelj (On the centenary of his birth) (Ivan Vidav) 131

Articles

The application of some results of J. Plemelj in the theory of singular integral equations and boundary value problems of linear relationship (N. P. Vekua) 133

On Cauchy integrals and boundary value problems of linear relationship (B. V. Hvedelidze) 145

Home News 153

Bibliography 157

1873 — 1973

Pričujoča številka Obzornika za matematiko in fiziko je posvečena pomembnemu kulturnemu jubileju, stoletnici rojstva velikega slovenskega matematika, profesorja Josipa Plemlja.

V slavnostni številki so objavljena tri osnovna predavanja, ki so bila prebrana na mednarodnem simpoziju ob stoletnici rojstva Josipa Plemlja. V prvem je orisana življenjska pot našega pomembnega znanstvenika in učitelja, drugo razčlenjuje in vrednoti njegov najpomembnejši prispevek v matematično zakladnico, tretje pa spremlja zgodovinsko pot teorije, ki je zrasla iz Plemljevih idej, vse do današnjih dni.

Mednarodni simpozij ob stoletnici Josipa Plemlja in tudi tisk te številke Obzornika za matematiko in fiziko sta omogočila s finančno podporo Izvršni svet skupščine SR Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije s skladom »Boris Kidrič« kot zastopnik vseh republiških svetov za koordinacijo znanosti v Jugoslaviji.

JOSIP PLEMELJ

(Ob stoletnici rojstva)

Josip Plemelj se je rodil 11. decembra 1873 na Bledu kot sin mizarja in malega kmeta. Ko je bil star eno leto, mu je oče umrl. Mati Marija r. Mrak je po očetovi smrti s težavo preživljala družino. Zato je le po srečnem naključju lahko poslala sina na šolanje v Ljubljano. Tu je obiskoval gimnazijo od l. 1886 do 1894. Po maturi se je vpisal na dunajsko univerzo, kjer je študiral matematiko in fiziko. Med njegovimi profesorji so bili Escherich, Gegenbauer in Boltzmann. Promoviral je l. 1898 z disertacijo Über lineare homogene Differeretialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffizienten. Študije je nadaljeval najprej v Berlinu (1899/1900) in nato v Göttingenu (1900/1901) pri F. Kleinu in D. Hilbertu.

L. 1902 je postal privatni docent na dunajski univerzi. Eno leto je bil asistent za matematiko na tehniški visoki šoli (1906/7). L. 1907 je bil imenovan za izrednega in naslednje leto za rednega profesorja na univerzi v Černovicah. Po prvi svetovni vojni je bila 1919 ustanovljena slovenska univerza v Ljubljani. Plemelj je postal njen prvi rektor. Na ljubljanski univerzi je bil profesor matematike do upokojitve l. 1957. Umrl je 22. maja 1967 v Ljubljani.

Nadarjenost za matematiko je pokazal že v nižji gimnaziji. Kot četrtošolec je pomagal osmošolcem pri maturitetnih nalogah. Posebno veselje je imel pri reševanju težkih konstrukcijskih nalog. Iz gimnazijskih let izvira npr. njegova konstrukcija pravilnega sedmerokotnika s trisekcijo kota. Z višjo matematiko se je začel ukvarjati v peti gimnaziji. Zanimala ga je tudi astronomija, predvsem nebesna mehanika.

Glavna področja, na katerih je Plemelj delal, so diferencialne in integralne enačbe, teorija potenciala (harmoničnih funkcij) in funkcijska teorija.

Ko je študiral v Göttingenu, je tam E. Holmgren poročal o Fredholmovi teoriji integralnih enačb. Göttingenška šola se je z D. Hilbertom na čelu lotila raziskovanja novega področja. Med prvimi, ki so tu dosegli uspehe, je bil tudi Plemelj. Objavil je več razprav, ki so vzbudile pozornost tedanjega matematičnega sveta. Najpomembnejše njegovo delo iz uporabe integralnih enačb v potencialni teoriji je knjiga Potentialtheoretische Untersuchungen (Leipzig 1911). Zanjo je dobil nagrado znanstvenega društva kneza Jablonowskega.

Med največje uspehe Plemlja pa lahko brez dvoma štejemo duhovito rešitev Riemannovega problema. L. 1905 je Hilbert prevedel Riemannov problem na neko rešljivo integralno enačbo. Ključ do svoje rešitve je Plemelj našel v izreku o robnih vrednostih analitičnih funkcij (danes znan pod imenom Plemljeve formule). Te formule so omogočile prevesti problem na preprost sistem linearnih integralnih enačb. Njegove metode so postale

osnova za teorijo singularnih integralnih enačb, ki jo je razvila sovjetska šola pod vodstvom N. I. Mushelišvilija.

Pomembno je nadalje Plemljevo delo v teoriji uniformizacije algebraičnih enačb in v teoriji univalentnih funkcij. Prvi je odkril ostro formulacijo Koebejevega izreka o analitičnem raztegu slik. V teoriji diferencialnih enačb se je ukvarjal predvsem z enačbami Fuchsovega tipa in s Kleinovimi teoremi.

Za svoje delo je prejel več nagrad. Poleg nagrade kneza Jablonowskega je dobil l. 1912 na Dunaju nagrado Richarda Liebena, l. 1954 pa v Ljubljani Prešernovo nagrado. Dopisni član Jugoslavenske akademije v Zagrebu je postal l. 1923, dopisni član Srpske akademije nauka l. 1930, dopisni član Bavarske akademije pa l. 1954. Redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti je bil od njene ustanovitve l. 1938 dalje.

Delo na ljubljanski univerzi je pomenilo pravzaprav žrtev za Plemljevo znanstveno kariero. Povojne težave v stiku s svetom, strokovna osamljenost v majhnem mestu in bolezen so povzročile, da je bil od tedaj predvsem učitelj matematike, manj pa ustvarjalec novega.

Za razvoj matematike in tudi drugih eksaktnih znanosti pri Slovencih pa je bil njegov prihod v Ljubljano velikega pomena. Vzgojil je več generacij matematikov. Predaval je poleg splošnega tečaja matematike še triletni ciklus, ki je obsegal diferencialne enačbe, teorijo analitičnih funkcij in algebro s teorijo števil. Po drugi svetovni vojni je ta predavanja izdal v treh knjigah: Teorija analitičnih funkcij (Ljubljana 1953), Diferencialne in integralne enačbe, Teorija in uporaba (Ljubljana 1960) in Algebra s teorijo števil (Ljubljana 1962). Zadnja njegova knjiga Problems in the Sense of Riemann and Klein (v angleščino jo je prevedel prof. J. R. M. Radok) pa je izšla 1964. Obravnava področja, s katerimi se je Plemelj največ ukvarjal in največ prispeval za njihov razvoj.

Ivan Vidav

UPORABA NEKATERIH IZSLEDKOV J. PLEMLJA V TEORIJI SINGULARNIH INTEGRALSKIH ENAČB IN ROBNIH NALOG LINEARNE KONJUGIRANOSTI*

N. P. VEKUA, Matematični inštitut Akademije znanosti Gruzinske SSR, TBILISI, SSSR

1. Uvod

V svojem prispevku bi rad prikazal bistvo nekaterih rezultatov J. Plemlja in tisto uporabo, razvoj in izpopolnitev, ki so jih ti izsledki doživeli v delih gruzinskih matematikov. Ko govorim o Plemljevih rezultatih, mislim na tista dognanja, ki so objavljena v njegovi čudoviti razpravi [1], natisnjeni leta 1908. To delo je odigralo veliko vlogo pri rešitvi cele vrste robnih nalog teorije analitičnih funkcij, pa tudi pri utemeljitvi teorije sistemov singularnih integralskih enačb.

Na kratko bom poskusil povzeti navedene rezultate J. Plemlja in pokazati, kako se uporabljajo v delih gruzinskih matematikov pri reševanju tako imenovanih robnih nalog linearnega konjugiranja in pri izgradnji teorije sistemov singularnih integralskih enačb. Povzetek in prikaz bom v glavnem naslonil na monografijo akademika N. I. Mushelišvilija [2] in monografijo avtorja pričujočega sestavka [3].

2. Homogena Riemannova naloga za več neznanih funkcij s koeficienti, zveznimi po Hölderju

Naj bo L množica na kompleksni ravnini, sestavljena iz enostavnih sklenjenih gladkih lokov brez skupnih točk, ki omejujejo omejeno povezano odprto območje D^+. Z D^- bomo označili komplement unije $D^+ \cup L$ (ki je vobče nepovezan). Pozitivna naj bo tista smer obhoda L, pri kateri je D^+ na levi.

Imejmo funkcijo $\varphi(z)$, definirano na vsej kompleksni ravnini, razen v točkah množice L. Rekli bomo, da je $\varphi(z)$ odsekoma holomorfna, če zadošča pogojema: a) $\varphi(z)$ je holomorfna v D^+ in v D^-, razen kvečjemu v točki $z = \infty$. b) $\varphi(z)$ se da zvezno nadaljevati na L: kakorkoli že se približuje z k t na L po poti, ki leži vsa v D^+ (ali vsa v D^-), vselej teži $\varphi(z)$ k natanko določeni limiti $\varphi^+(t)$ (oziroma $\varphi^-(t)$).

V nadaljevanju bomo delali z vektorji in z matrikami. Rekli bomo, da je matrika zvezna, da zadošča pogoju H (Hölderjevemu pogoju)[1]) itd., če so take vse njene komponente. Prav tako bomo ravnali z vektorji.

Zastavimo si nalogo:

Poiščimo odsekoma holomorfni vektor $\varphi(z) = [\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)]$, *ki ima končni red v neskončnosti in zadošča robnemu pogoju*

$$\varphi_\alpha^+(t_0) = G_{\alpha 1}(t_0)\,\varphi_1^-(t_0) + G_{\alpha 2}(t_0)\,\varphi_2^-(t_0) + \ldots + G_{\alpha n}(t_0)\,\varphi_n^-(t_0)$$
$$\alpha = (1, 2, \ldots, n)$$

ali v vektorsko-matrični obliki

$$\varphi^+(t_0) = G(t_0)\,\varphi^-(t_0) \qquad \text{(I)}$$

---

* Iz ruščine prevedel France Križanič.

kjer je $G(t_0) = \| G_{\alpha,\beta} \| (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ *dana matrika, ki je definirana na* $\mathcal{L}$, *povsod na* $\mathcal{L}$ *neizrojena in zadošča pogoju H.*

N. I. Mushelišvili imenuje zastavljeni problem homogeno nalogo linearne konjugiranosti[2]).

Bolj splošna je očitno naloga, pri kateri imajo $G_{\alpha\beta}$ nezveznosti prve vrste v končnem številu točk na $\mathcal{L}$. To, tako imenovano nezvezno nalogo, je prvi postavil B. Riemann v posebnem primeru, ko so $G_{\alpha\beta}$ odsekoma konstantne funkcije, vendar ni navedel nobene poti za njeno rešitev. Kot vemo, se da v ta posebni primer prevesti naloga o sistemu linearnih diferencialnih enačb z racionalnimi koeficienti in z regularnimi singularnimi točkami s predpisano monodromijsko grupo[3]). Ob tem prevodu je B. Riemann tudi zastavil nalogo (I) v opisanem posebnem primeru.

Nalogo (I) je prvi postavil in deloma rešil D. Hilbert. Hilbertova rešitev pa je zelo zamotana in ne moremo ji priznati popolnosti.

Popolno in hkrati zelo bistroumno rešitev naloge (I) pa vsebuje razprava J. Plemlja [1].

Da bi pokazali vso lepoto Plemljeve rešitve in nekaj njene uporabe, jo bomo opisali v tisti obliki, v kakršni je obdelana v delu [4] in je ponovljena v [3].

Pripomnimo, da J. Plemelj ne uporablja vektorskih in matričnih označb, kar sorazmerno otežuje njegova izvajanja, vendar pa, seveda, to ni bistveno.

Zaenkrat iščimo rešitev $\varphi(z)$ naloge (I) z robnimi vrednostmi $\varphi^+(t)$ in $\varphi^-(t)$, ki zadoščajo pogoju H. Kasneje bomo to omejitev opustili.

Naloga (I) je očitno ekvivalentna tejle nalogi:

Najti vektor $\varphi^-(t_0)$, definiran na $\mathcal{L}$, pokoren pogoju H in zahtevama:

1. Vektor $\varphi^-(t_0)$ je robna vrednost vektorja $\varphi(z)$, ki je holomorfen v $\mathcal{D}^-$, zvezen vse do $\mathcal{L}$ in ima v neskončnosti predpisani glavni del $\gamma(z) = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, kjer so $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(z)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ polinomi.

2. Vektor $\varphi^+(t_0)$, ki ga veže s $\varphi^-(t_0)$ linearna transformacija

$$\varphi^+(t_0) = G(t_0)\, \varphi^-(t_0)$$

je robna vrednost vektorja $\varphi(z)$, holomorfnega v $\mathcal{D}^+$ in zveznega vse do $\mathcal{L}$.

Z lahkoto pokažemo, da sta pogoja 1. in 2. ekvivalentna zahtevama

$$(1/2)\, \varphi^-(t_0) + (1/2\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1}\, \varphi^-(t)\, dt = \gamma(t_0) \tag{2, 1}$$

$$-(1/2)\, G(t_0)\, \varphi^-(t_0) + (1/2\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1}\, G(t)\, \varphi^-(t)\, dt = 0 \tag{2, 2}$$

Prepišimo (2, 2) v obliki

$$(1/2)\, \varphi^-(t_0) - (1/2\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1}\, G^{-1}(t_0)\, G(t)\, \varphi^-(t)\, dt = 0 \tag{2, 3}$$

seštejmo (2, 1) in (2, 3), pa dobimo

$$\varphi^-(t_0) - (1/2\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1}\, [G^{-1}(t_0)\, G(t) - E]\, \varphi^-(t)\, dt = \gamma(t_0) \tag{2, 4}$$

kjer je E matrika enote.

(2, 4) je očitno Fredholmova integralska enačba druge vrste (natančneje: sistem Fredholmovih integralskih enačb). Prav nič težko ni preskusiti, da vsaka (zvezna) rešitev te enačbe zadošča pogoju H.

Iz dosedanjih razmišljanj povzamemo: brž ko ima naloga (I) rešitev $\varphi(z)$, zadošča $\varphi^-(t_0)$ enačbi (2, 4).

Radi bi še zvedeli: 1. Ali vodi vsaka rešitev enačbe (2, 4) k rešitvi naloge (I)? 2. Pod kakšnimi pogoji je enačba (2, 4) rešljiva?

Naj bo $\varphi^-(t)$ poljubna rešitev enačbe (2, 4). $\varphi^-(t)$ vodi do rešitve naloge (I) natanko takrat, ko zadošča pogojema (2, 1) in (2, 2) hkrati. Uvedimo odsekoma holomorfni vektor $\psi(z)$, definiran talole

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (1/2\pi i)\int_L (t-z)^{-1}\,\varphi^-(t)\,dt - \gamma(z), \text{ pri } z \in \mathfrak{D}^+ \\ \psi(z) &= (1/2\pi i)\int_L (t-z)^{-1}\,G(t)\,\varphi^-(t)\,dt, \text{ pri } z \in \mathfrak{D}^- \end{aligned} \tag{2, 5}$$

Očitno je $\psi(\infty) = 0$. Z novimi oznakami in z znanimi formulami Sohockega-Plemlja, prepišemo (2, 1) in (2, 2) v ekvivalentno obliko: na $\mathfrak{L}$ je

$$\psi^+(t_0) = 0 \qquad \psi^-(t_0) = 0$$

Odtod pa $\psi(z) \equiv 0$ na vsej ravnini.

Z oznakami (2, 5) prepišemo (2, 4) takole

$$\psi^+(t_0) = G^{-1}(t_0)\,\psi^-(t_0) \tag{II}$$

Torej: Z rešitvijo $\varphi^-(t)$ integralske enačbe (2, 4) in z zvezami (2, 5) sestavimo funkcijo $\psi(z)$. Če je $\psi(z)$ identično enaka 0, vodi $\varphi^-(t)$ k rešitvi naloge (I). Če pa $\psi(z)$ ni identično enaka 0, je (netrivialna) rešitev naloge (II), z vrednostjo 0 v neskončnosti.

Nalogi (II) pravi J. Plemelj spremljajoča naloga naloge (I).

Dosedanja razmišljanja strnimo v lemo:

Lema 1. *Če spremljajoča naloga* (II) *nima netrivialnih rešitev, ki so enake* 0 *v neskončnosti, vodi vsaka rešitev integralske enačbe* (2, 4) *k rešitvi naloge* (I).

Tako, kot smo priredili nalogi (I) integralsko enačbo (2, 4) za $\varphi^-(t_0)$, priredimo spremljajoči nalogi (II) Fredholmovo integralsko enačbo za $\psi^+(t_0)$. Ta enačba je

$$\psi^+(t_0) + (1/2\pi i)\int_L (t-t_0)^{-1}\,[G^{-1}(t_0)\,G(t) - E]\,\psi^+(t)\,dt = 0 \tag{2, 6}$$

če se le omejimo na tiste rešitve naloge (II), ki so v neskončnosti enake 0.

Poglejmo sedaj, kako je z rešljivostjo enačbe (2, 4). V ta namen opazujmo homogeno enačbo, adjungirano k (2, 4)

$$\psi'^+(t_0) + (1/2\pi i)\int_L (t-t_0)^{-1}\,[G'(t_0)\,G'^{-1}(t) - E]\,\psi'^+(t)\,dt = 0 \tag{2, 7}$$

kjer je G' matrika, transponirana matriki G.

Zastavimo nalogo

$$\varphi'^+(t_0) = G'^{-1}(t_0)\,\varphi'^-(t_0) \tag{I'}$$

ki je adjungirana nalogi (I), potem pa še nalogo

$$\psi'^+(t_0) = G'(t_0)\,\psi'^-(t_0) \tag{II'}$$

ki spremlja adjungirano nalogo (I'). Tako kot za (I), sestavimo Fredholmovo integralsko enačbo tudi za (I'):

$$\varphi'^-(t_0) - (1/2\pi i)\int_L (t-t_0)^{-1}\,[G'(t_0)\,G'^{-1}(t) - E]\,\varphi'^-(t)\,dt = 0 \tag{2, 8}$$

če spet omejimo pozornost le na tiste rešitve naloge (I'), ki so v neskončnosti enake 0. Fredholmova integralska enačba, ki ustreza (II') tako, kot (2, 6) nalogi (II), pa je vprav integralska enačba (2, 7).

Torej: homogena integralska enačba (2, 7), adjungirana enačbi (2, 4), je Fredholmova integralska enačba za nalogo (II′), ki spremlja adjungirano nalogo (I′).

Po vsem tem lahko dokažemo:

Lema 2. *Če niti spremljajoča niti adjungirana naloga naloge* (I) *nimata netrivialnih rešitev, enakih* 0 *v neskončnosti, je Fredholmova integralska enačba* (2, 4) *rešljiva pri vsaki desni strani* (*ki je vektor s polinomnimi komponentami*) *in vsaka rešitev te enačbe vodi k rešitvi naloge* (I).

Drugi del trditve smo že dokazali (Lema 1). Dokazati moramo le še prvega. Najprej ugotovimo, da naloga (I′) spremlja nalogo (II′). Ker po pogoju naloga (I′) nima rešitev, enakih 0 v neskončnosti, vodi po lemi 1. vsaka rešitev $\psi'^{+}(t)$ integralske enačbe (2, 7) do rešitve naloge (II′). Tedaj pa je $\psi'^{+}(t)$ robna vrednost vektorja $\psi'(z) = (\psi_1', \psi_2', \ldots, \psi_n')$ holomorfnega v $\mathfrak{D}^{+}$. Integralska enačba (2, 4) pa je, kot vemo, rešljiva natanko takrat, ko desna stran $\gamma(t)$ zadošča pogoju

$$\int_L \gamma(t)\,\psi'^{+}(t)\,dt = \int_L (\gamma_1\psi_1'^{+} + \gamma_2\psi_2'^{+} + \ldots + \gamma_n\psi_n'^{+})\,dt = 0 \qquad (2, 9)$$

kjer je $\psi'^{+}(t) = (\psi_1'^{+}, \psi_2'^{+}, \ldots, \psi_n'^{+})$ poljubna rešitev enačbe (2, 7). Toda, kakor smo pravkar videli, so $\psi_1'^{+}, \psi_2'^{+}, \ldots, \psi_n'^{+}$ robne vrednosti funkcij, holomorfnih v $\mathfrak{D}^{+}$, poleg tega so $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ polinomi. Tedaj pa je po Cauchyju pogoj (2, 9) izpolnjen vselej in lema je dokazana.

Primer, ko so izpolnjeni pogoji leme 2., je na prvi pogled izjemen. Vendar pa, kot bomo spoznali, se da na ta posebni primer prevesti tudi najsplošnejši, in še je za splošno rešitev dovolj, da znamo najti vse rešitve, ki so omejene v neskončnosti.

Denimo torej začasno, da so pogoji leme 2. izpolnjeni in vprašajmo po rešitvah naloge (I), omejenih v neskončnosti: Po lemi 2. so vse te rešitve določene z rešitvami integralske enačbe (2, 4), ki ima na desni strani poljuben konstanten vektor $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Vektor γ je vrednost iskanega vektorja $\varphi(z)$ v neskončnosti: $\varphi(\infty) = \gamma$.

Enačba (2, 4) pa je po tej isti lemi 2. rešljiva pri poljubnih konstantah $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Izberimo za γ zapored vektorje $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$ $(0,0, \ldots, 1)$. Vsakemu od njih ustreza rešitev enačbe (2, 4), ki jo imenujemo

$${}^{\alpha}\varphi^{-} = ({}^{\alpha}\varphi_1^{-}, {}^{\alpha}\varphi_2^{-}, \ldots, {}^{\alpha}\varphi_n^{-}), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2, 10)$$

Tem n rešitvam ustreza n rešitev naloge (I)

$${}^{\alpha}\varphi(z) = ({}^{\alpha}\varphi_1, {}^{\alpha}\varphi_2, \ldots, {}^{\alpha}\varphi_n) \qquad (2, 11)$$

da je

$${}^{\beta}\varphi_{\alpha}(\infty) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ pri } \alpha = \beta \\ 0 \text{ pri } \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad (2, 12)$$

Splošna rešitev enačbe (2, 4) pri poljubnem γ pa je očitno

$$\varphi^{-}(t) = \gamma_1\,{}^{1}\varphi^{-}(t) + \ldots + \gamma_n\,{}^{n}\varphi^{-}(t) + \gamma_{n+1}\,{}^{n+1}\varphi^{-}(t) + \ldots + \gamma_m\,{}^{m}\varphi^{-}(t) \qquad (2, 13)$$

kjer je ${}^{n+1}\varphi^{-}(t), \ldots, {}^{m}\varphi^{-}(t)$ poln sistem linearno neodvisnih rešitev homogene enačbe, ki ustreza (2, 4) pri $\gamma = 0$, koeficienti $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots \gamma_m$ so poljubne konstante — prvih n med njimi so komponente vektorja γ.

Rešitev naloge (I), omejena v neskončnosti, je nazadnje

$$\varphi(z) = \gamma_1\,{}^{1}\varphi(z) + \ldots + \gamma_n\,{}^{n}\varphi(z) + \gamma_{n+1}\,{}^{n+1}\varphi(z) + \ldots + \gamma_m\,{}^{m}\varphi(z)$$

kjer so ${}^1\varphi(z), {}^2\varphi(z), \ldots, {}^n\varphi(z)$ definirane že prej, ${}^{n+1}\varphi(z), \ldots, {}^m\varphi(z)$ pa so rešitve naloge (I), enake 0 v neskončnosti (ker pač ustrezajo $\gamma = 0$). Lahko je videti, da so vektorji ${}^\beta\varphi(z)$ ($\beta = 1, 2, \ldots, m$) linearno neodvisni.

Vrnimo se k splošnemu primeru, ko pogoji leme 2. morda niso izpolnjeni. Začnimo s preprosto ugotovitvijo:

Stopnja ničle v neskončnosti je navzgor omejena s številom $s \geqq 0$, ki je skupno za vse rešitve naloge (I).

Res! Homogena enačba, ki ustreza Fredholmovi enačbi (2, 4), naj ima s linearno neodvisnih rešitev, $\varphi(z)$ naj bo katerakoli rešitev naloge (I), stopnja njene ničle v neskončnosti pa enaka k. Pokažimo, da k ne presega s. Ker je k stopnja ničle v neskončnosti, so vektorji $\varphi(z), z\varphi(z), \ldots, z^{k-1}\varphi(z)$ rešitve naloge (I), enake 0 v neskončnosti. Njihove robne vrednosti $\varphi^-(t), t\varphi^-(t), \ldots, t^{k-1}\varphi^-(t)$ sestavljajo torej k rešitev homogene enačbe, ki ustreza (2, 4) pri $\gamma = 0$. Ker so te rešitve linearno neodvisne, je $k \leqq s$. To pa je vse, kar smo hoteli dokazati.

Uporabimo to ugotovitev pri spremljajoči in pri adjungirani nalogi (II) in (I′). Po njej obstoja število $r \geqq 0$, da niti (II), niti (I′) nimata rešitve, ki bi imela v neskončnosti ničlo stopnje $> r$.

Vrnimo se k nalogi (I) in vprašajmo po vseh njenih rešitvah, katerih red v neskončnosti ne presega r (po rešitvah s polom v neskončnosti stopnje $\leqq r$), kjer je r pravkar ugotovljeno število.

Naj bo $\varphi(z)$ ena od teh rešitev. Vektor $\varphi^*(z)$, definiran z

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) \text{ pri } z \in \mathfrak{D}^+, \quad \varphi^*(z) = (z - a)^{-r}\varphi(z) \text{ pri } z \in \mathfrak{D}^- \tag{2, 14}$$

kjer je a poljubna izbrana točka $\mathfrak{D}^+$, reši tedaj Hilbertovo nalogo

$$\varphi^*(t_0) = (t_0 - a)^r G(t_0)\,\varphi^*(t_0) \tag{I*}$$

in je omejen v neskončnosti. Naloga (I*) se loči od naloge (I) le v tem, da je matrika $G(t_0)$ zamenjana z matriko $(t_0 - a)^r G(t_0)$. Tako smo iskanje rešitev naloge (I) s končnim redom r v neskončnosti prevedli v iskanje tistih rešitev naloge (I), ki so omejene v neskončnosti.

Prav nič težko ni pokazati, da (I*) zadošča pogojem lem 1 in 2. Uporabimo, kar smo naslonili na lemo 2, s formulami (2, 14) se vrnimo k rešitvi prvotne naloge, pa kaj lahko pribijemo:

Izrek 1. *Vsaka rešitev naloge* (I), *katere red v neskončnosti ne presega naprej predpisanega dovolj velikega števila r, se da razčleniti v*

$$\varphi(z) = \gamma_1\,{}^1\varphi(z) + \ldots + \gamma_n\,{}^n\varphi(z) + \gamma_{n+1}\,{}^{n+1}\varphi(z) + \ldots + \gamma_m\,{}^m\varphi(z) \tag{2, 15}$$

kjer so $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ *poljubne konstante,* $\varphi^1(z), \varphi^2(z), \ldots, \varphi^m(z)$ *pa linearno neodvisne partikularne rešitve. Prvih n med njimi zadošča pogojem*

$$\lim_{z\to\infty} z^{-r}\,{}^\beta\varphi_\alpha(z) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{2, 16}$$

druge pa (*teh ni, če je* $m = n$), *imajo v neskončnosti red, manjši od r.*

Ta izrek v določeni meri rešuje homogeno nalogo, saj moremo za r izbirati kakor hočemo velika števila in s tem dosegati rešitve z redom v neskončnosti, ki ne presega poljubno izbranega števila. Toda taka rešitev je nezadostna v naslednjem pogledu: s spreminjanjem r se spreminja tudi naloga (I), z njo ustrezna Fredholmova enačba, z r se spreminja tudi m in lahko je videti, da narašča čez vsako mejo hkrati z r.

Poudarimo skoraj očitno lastnost prvih n rešitev, ki nastopajo v formuli (2, 15): Rešitev ${}^1\varphi(z), {}^2\varphi(z), \ldots, {}^n\varphi(z)$ ne veže nobena zveza

$$q_1(z)\,{}^1\varphi(z) + q_2(z)\,{}^2\varphi(z) + \ldots + q_n(z)\,{}^n\varphi(z) = 0 \tag{2, 17}$$

kjer bi bili $q_1(z), q_2(z), \ldots, q_n(z)$ polinomi, ki niso vsi identično enaki 0.

Res! (2, 17) razpade v n pogojev ($\alpha = 1, 2, \ldots n$)

$$q_1(z)\,{}^1\varphi_\alpha(z) + q_2(z)\,{}^2\varphi_\alpha(z) + \ldots + q_n(z)\,{}^n\varphi_\alpha(z) = 0$$

zaradi (2, 16) determinanta

$$\det \| {}^\beta\varphi_\alpha \| = \begin{vmatrix} {}^1\varphi_1, {}^2\varphi_1, \ldots, {}^n\varphi_1 \\ {}^1\varphi_2, {}^2\varphi_2, \ldots, {}^n\varphi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^1\varphi_n, {}^2\varphi_n, \ldots, {}^n\varphi_n \end{vmatrix}$$

ni identično enaka 0, to pa je že dovolj za dokaz.

Z dosedanjimi izreki je J. Plemelj dokazal obstoj n rešitev ${}^1\chi(z), {}^2\chi(z), \ldots, {}^n\chi(z)$, ki jih odlikujeta lastnosti:

1°. Determinanta

$$\Delta(z) = \det \| {}^\beta\chi_\alpha(z) \| \tag{2, 18}$$

je v vseh končnih točkah različna od 0.

2°. Naj bo $-\kappa_\beta$ red rešitve $\chi^\beta(z)$ v neskončnosti. Imenujmo

$${}^\beta\chi^0(z) = z^{\kappa_\beta}\,{}^\beta\chi(z) \tag{2, 19}$$

pa ima determinanta

$$\Delta^0(z) = \det \| {}^\beta\chi_\alpha{}^\circ \| \tag{2, 20}$$

v neskončnosti končno vrednost, različno od 0.

Taki n-terici rešitev pravimo kanonske rešitve, matriki

$$X(z) = \| {}^\beta\chi_\alpha \| \tag{2, 21}$$

pa kanonska matrika.

Ker je

$${}^\beta\chi^+(t_0) = G(t_0)\,{}^\beta\chi^-(t_0)$$

velja

$${}^\beta\chi_\alpha{}^+(t_0) = G_{\alpha 1}(t_0)\,{}^\beta\chi_1{}^-(t_0) + G_{\alpha 2}(t_0)\,{}^\beta\chi_2{}^-(t_0) + \ldots + G_{\alpha n}(t_0)\,{}^\beta\chi_n{}^-(t_0) \tag{2, 22}$$

ali

$$X^+(t_0) = G(t_0)\,X^-(t_0) \tag{2, 23}$$

Odtod povzamemo

$$G(t_0) = X^+(t_0)\,[X^-(t_0)]^{-1} \tag{2, 24}$$

vstavimo v (I) in dobimo

$$[X^+(t)]^{-1}\varphi^+(t) - [X^-(t)]^{-1}\varphi^-(t) = 0$$

odtod pa

$$\varphi(z) = X(z)\,p(z) \tag{2, 25}$$

kjer je $p(z) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_\alpha = p_\alpha(z)$ pa so polinomi.

S tem končujem prikaz Plemljevih dognanj o nalogi z zveznimi koeficienti.

Pripomniti moram, da je našel akademik N. I. Mushelišvili rešitev (glej [2]), ki je preprostejša od Plemljeve, tako, da je nalogo takoj prevedel v singularno integralsko enačbo.

Tudi sam sem odkril dovolj preprosto rešitev te naloge, ko sem jo prevedel v Fredholmovo enačbo, povsem različno od Plemljeve (glej [3]). Vendar sem v [3] povzel Plemljevo rešitev, ker mi je bila zelo všeč.

Kanonska n-terica seveda ni enolično določena (J. Plemelj se je zadovoljil s konstrukcijo ene same kanonske n-terice).

V delu [4], ki sva ga napisala z akademikom N. I. Mushelišvilijem (glej tudi [2], § 5), obravnavava tudi zvezo med dvema kanonskima n-tericama rešitev iste homogene naloge (I) in dokazujeva, da so števila $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ ista za vse kanonske n-terice rešitev.

Števila $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ imenujeva *delne indekse* naloge (I), njihovo vsoto

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n$$

pa *sumarni indeks naloge*.

Razen tega dokazujeva formulo, ki jo je prvi odkril N. I. Mushelišvili

$$\kappa = (1/2\pi i)\,[\ln \det G(t)]_L \tag{2, 26}$$

Nadalje sem dokazal, da se vse kanonske matrike naloge (I) dobe s formulo

$$Z(z) = X(z)\,H(z) \tag{2,27}$$

kjer je $H(z)$ matrika s polinomialnimi elementi in

$$\det H(z) = \text{konst} \neq 0$$

Naj bo

$$\kappa_1 \geqq \kappa_2 \geqq \ldots \geqq \kappa_m \geqq 0 \geqq \kappa_{m+1} \geqq \kappa_{m+2} \geqq \ldots \geqq \kappa_n$$

Imenujmo

$$\lambda = \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_m \qquad \mu = -(\kappa_{m+1} + \kappa_{m+2} + \ldots + \kappa_n)$$

Pokazati se da, da ima homogena naloga (I) natanko λ linearno neodvisnih rešitev, enakih 0 v neskončnosti, adjungirana naloga (I′) pa natanko μ rešitev, enakih 0 v neskončnosti.

In še: Če je $X(z)$ kanonska matrika naloge (I), je $[X'(z)]^{-1}$ kanonska matrika naloge (I′), delni indeksi adjungirane naloge so $-\kappa_1, -\kappa_2, \ldots, -\kappa_n$, sumarni indeks pa $-\kappa$.

3. Nehomogena naloga linearne konjugiranosti

Nehomogeno Riemannovo nalogo zastavimo takole:

Poiskati je treba odsekoma holomorfni vektor $\varphi(z) = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ s končnim redom v neskončnosti, da bo izpolnjen robni pogoj na $\mathcal{L}$

$$\varphi^+(t_0) = G(t_0)\,\varphi^-(t_0) + g(t_0) \tag{3, 1}$$

Tu je $G(t_0)$ matrika, definirana, neizrojena in pokorna pogoju H na $\mathcal{L}$, vektor $g(t_0)$ pa je prav tako definiran na $\mathcal{L}$ in zadošča pogoju H.

Potem, ko zgradimo primitivno matriko homogene naloge (I), rešimo (3,1) takole (glej [3], § 8): Zaradi (2,24) povzamemo iz (3,1)

$$[X^+(t_0)]^{-1}\,\varphi^+(t_0) - [X^-(t_0)]^{-1}\,\varphi^-(t_0) = [X^+(t_0)]^{-1}\,g(t_0)$$

Iz te formule pa zlahka dobimo

$$\varphi(z) = (1/2\pi i)\,X(z) \int_L (t - z)^{-1}\,[X^+(t)]^{-1}\,g(t)\,dt + X(z)\,p(z) \tag{3, 2}$$

kjer je $p(z) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ in so $p_\alpha = p_\alpha(z)$ polinomi.

S formulo (3,2) je določena splošna rešitev nehomogene Riemannove naloge.
Za uporabo so posebno zanimive rešitve, ki so v neskončnosti enake 0. Naj bo kot prej

$$\kappa_1 \geqq \kappa_2 \geqq \ldots \geqq \kappa_m \geqq 0 \geqq \kappa_{m+1} \geqq \kappa_{m+2} \geqq \ldots \geqq \kappa_n \tag{3, 3}$$

$$\lambda = \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_m \qquad \mu = -(\kappa_{m+1} + \kappa_{m+2} + \ldots + \kappa_n) \tag{3, 4}$$

Označimo

$$p(z) = (p_{\kappa_1 - 1}, p_{\kappa_2 - 1}, \ldots, p_{\kappa_n - 1}) \tag{3, 5}$$

$$q(z) = (q_{-\kappa_1 - 1}, q_{-\kappa_2 - 1}, \ldots, q_{-\kappa_n - 1}) \tag{3, 6}$$

kjer so p_α in q_β polinomi stopenj α in β, ter $p_\alpha = 0$, $q_\beta = 0$, če je $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

Velja tale izrek:

Izrek 2. *Naloga* (3,1) *ima rešitve, ki so v neskončnosti enake* 0, *natanko takrat, ko svobodni člen* $g(t_0)$ *zadošča pogoju*

$$\int_L g(t)\,[X'^{+}(t)]^{-1}\,q(t)\,dt = 0 \tag{3, 7}$$

kjer je $q(t)$ *poljubni vektor oblike* (3, 6). *Brž ko je ta pogoj izpolnjen, je splošna rešitev zahtevane oblike določena s formulo* (3, 2), *kjer je* $p(z)$ *poljubni vektor oblike* (3, 5).

4. Sistemi singularnih integralskih enačb z zveznimi koeficienti

Na doslej razvito teorijo lahko naslonimo osnovne izreke o sistemih singularnih integralskih enačb oblike

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=n} A_{\alpha\beta}(t_0)\,\rho_\beta(t_0) + \sum_{\beta=1}^{\beta=n} (1/\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1}\,K^\circ{}_{\alpha\beta}(t_0, t)\,\rho_\beta(t)\,dt = f_\alpha(t_0)$$

ali krajše

$$A(t_0)\,\rho(t_0) + (1/\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1}\,K^\circ(t_0, t)\,\rho(t)\,dt = f(t_0) \tag{4, 1}$$

kjer sta $A = \| A_{\alpha\beta} \|$, $K^\circ = \| K^\circ{}_{\alpha\beta} \|$, dani matriki, ki zadoščata pogoju H, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ je dani vektor, ki tudi zadošča pogoju H, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ pa je iskani vektor, prav tako iz razreda H.

Enačbo (4,1) prepišimo

$$A\rho \equiv A(t_0)\,\rho(t_0) + (1/\pi i)\,B(t_0) \int_L (t - t_0)^{-1}\,\rho(t)\,dt + (1/\pi i) \int_L K(t_0, t)\,\rho(t)\,dt = f(t_0) \tag{4, 2}$$

kjer je

$$B(t_0) = K^\circ(t_0, t_0), \qquad K(t_0, t) = (t - t_0)^{-1}\,[K^\circ(t_0, t) - K^\circ(t_0, t_0)]$$

Oglejmo si najprej tako imenovani karakteristični sistem, ki ustreza sistemu (4, 2)

$$M\rho \equiv A(t_0)\,\rho(t_0) + (1/\pi i)\,B(t_0) \int_L (t - t_0)^{-1}\,\rho(t)\,dt = f(t_0) \tag{4, 3}$$

in še sistem

$$M'\sigma \equiv A'(t_0)\,\sigma(t_0) - (1/\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1}\,B'(t)\,\sigma(t)\,dt = f'(t_0) \tag{4, 4}$$

kjer sta A' in K' matriki, transponirani A in K. Rekli bomo, da sta si sistema (4, 3) in (4, 4) adjungirana, kakršnikoli sta že desni strani f in f'.

Enačbi (4, 3) in (4, 4) rešimo kaj enostavno, če uporabimo izsledke prejšnjih razdelkov.

Uvedimo odsekoma holomorfni vektor

$$\varphi(z) = (1/2\pi i) \int_L (t - z)^{-1} \rho(t)\, dt \tag{4, 5}$$

po Sohocki-Plemljevih formulah je

$$\rho(t_0) = \varphi^+(t_0) - \varphi^-(t_0) \qquad (1/\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1} \rho(t)\, dt = \varphi^+(t_0) + \varphi^-(t_0) \tag{4, 6}$$

Vstavimo te vrednosti v enačbo (4, 3), pa dobimo

$$\varphi^+(t_0) = G(t_0)\, \varphi^-(t_0) + g(t_0) \tag{4, 7}$$

kjer je

$$G(t_0) = S^{-1}(t_0)\, T(t_0) \qquad g(t_0) = S^{-1}(t_0) f(t_0)$$

in

$$S = A + B \qquad T = A - B$$

Privzemimo še, da je povsod na $\mathcal{L}$

$$\det S \neq 0 \qquad \det T \neq 0 \tag{4, 8}$$

Če sta izpolnjena pogoja (4, 8), pravimo, da sta enačbi (4, 2) in (4, 3) normalni.

Tako smo enačbo (4, 3) prevedli v nehomogeno nalogo linearnega konjugiranja (4, 7): vsaki rešitvi enačbe (4, 3) ustreza po (4, 5) rešitev naloge (4, 7), ki je v neskončnosti enaka 0, vsaki taki rešitvi naloge (4, 7) pa ustreza po prvi formuli (4, 6) rešitev enačbe (4, 3).

Označimo

$$Z(t_0) = [X^+(t_0)]^{-1}\, S^{-1}(t_0) = [X^-(t_0)]^{-1}\, [T(t_0)]^{-1} \tag{4, 9}$$

$$A_0(t_0) = (1/2)\, [S^{-1}(t_0) + T^{-1}(t_0)], \qquad B_0(t_0) = (1/2)\, [X^+(t_0) - X^-(t_0)] \tag{4, 10}$$

Po vsem, kar smo povedali, povzamemo iz izreka 2:

Izrek 3. *Enačba* (4, 3) *je rešljiva natanko takrat, ko velja*

$$\int_L f(t)\, Z'(t)\, q(t)\, dt = 0$$

kjer je Z' *matrika, transponirana k* Z. *Brž ko je pogoj izpolnjen, je splošna rešitev enaka*

$$\rho(t_0) = A_0(t_0) f(t_0) + (1/\pi i)\, B_0(t_0) \int_L (t - t_0)^{-1} Z(t) f(t)\, dt + B_0(t_0)\, p(t_0)$$

kjer sta $p(z)$ *in* $q(z)$ *vektorja oblike* (3,5) in (3,6).

Delne indekse $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ in sumarni indeks κ naloge (4, 7) imenujemo *delne indekse* in *sumarni indeks enačbe* (4, 3).

Integralsko enačbo (4, 4) prevedemo v Riemannovo nalogo s prav tako lahkoto, kakor enačbo (4, 3), le po nekoliko drugačni poti. V ta namen uvedimo odsekoma holomorfni vektor

$$\psi(z) = (1/\pi i) \int_L (t - z)^{-1} B'(t)\, \sigma(t)\, dt \tag{4, 11}$$

pa bo

$$B'(t_0)\, \sigma(t_0) = (1/2)\, [\psi^+(t_0) - \psi^-(t_0)]$$

$$(1/\pi i) \int_L (t - t_0)^{-1} B'(t)\, \sigma(t)\, dt = (1/2)\, [\psi^+(t_0) + \psi^-(t_0)] \tag{4, 12}$$

Odtod preberemo, da je enačba (4, 4) ekvivalentna pogojema

$$2A'(t_0)\, \sigma(t_0) = \psi^+(t_0) + \psi^-(t_0) + 2f'(t_0)$$

$$2B'(t_0)\, \sigma(t_0) = \psi^+(t_0) - \psi^-(t_0)$$

ta pa s seštevanjem in z odštevanjem prepišemo v

$$\sigma(t_0) = S'^{-1}(t_0)\,\psi^+(t_0) + S'^{-1}(t_0) f'(t_0)$$
$$\sigma(t_0) = T'^{-1}(t_0)\,\psi^-(t_0) + T'^{-1}(t_0) f'(t_0) \tag{4, 13}$$

Primerjajmo desni strani, pa pridemo k nalogi

$$\psi^+(t_0) = G'^{-1}(t_0)\,\psi^-(t_0) + [G'^{-1}(t_0) - E] f'(t_0) \tag{4, 14}$$

kjer je G' matriki G transponirana matrika.

Homogeni nalogi

$$\varphi^+(t_0) = G(t_0)\,\varphi^-(t_0) \qquad \psi^+(t_0) = G'^{-1}(t_0)\,\psi(t_0) \tag{4, 15}$$

ki ustrezata nehomogenima nalogama (4, 7) in (4, 14), sta si torej adjungirani.

Po vsem tem kaj lahko odkrijemo

Izrek 4. *Homogeni sistem* $M\rho = 0$ *ima natanko* λ, *adjungirani sistem* $M'\sigma = 0$ *pa natanko* μ *linearno neodvisnih rešitev, kjer sta števili* λ *in* μ *določeni s* (3, 4). *Če so vsi* $\kappa_i \geqq 0$, *je sistem* $M\rho = f$ *rešljiv pri poljubni desni strani.*

Oglejmo si sedaj singularno enačbo splošne oblike (4, 2). Iz dosedanjih rezultatov lahko izpeljemo naslednje izreke (ki so analogni Noetherjevim) (glej [3], § 10).

Izrek I. *Število linearno neodvisnih rešitev homogene enačbe*

$$\Lambda\rho = 0$$

je končno.

Izrek II. *Nehomogena enačba*

$$\Lambda\rho = f$$

je rešljiva natanko takrat, ko velja za $\alpha = (1, 2, \ldots, l')$

$$\int_L f(t)\,{}^{\alpha}\sigma(t)\,dt = 0 \tag{4, 16}$$

kjer je ${}^{\alpha}\sigma$ *poln sistem linearno neodvisnih rešitev adjungirane homogene enačbe* $\Lambda'\sigma = 0$ *in*

$$\Lambda'\sigma = A'(t_0)\,\sigma(t_0) - (1/\pi i)\int_L (t - t_0)^{-1} B'(t)\,\sigma(t)\,dt + (1/\pi i)\int_L K'(t, t_0)\,\sigma(t)\,dt$$

Izrek III. *Števili* l *in* l' *linearno neodvisnih rešitev adjungiranih homogenih enačb* $\Lambda\rho = 0$ *in* $\Lambda'\sigma = 0$ *sta povezani s sumarnim indeksom ustrezne karakteristične enačbe* $\Lambda\rho = 0$

$$l - l' = \kappa$$

5. Nezvezna Riemannova naloga in sistemi singularnih integralskih enačb z nezveznimi koeficienti.

Naj bo $\mathcal{L}$ enostaven sklenjen gladek lok.

Oglejmo si robno nalogo (I) v primeru, ko zadošča $G(t)$ Lipschitzevemu pogoju povsod na $\mathcal{L}$, razen morda v končnem številu točk $a_1, a_2, \ldots, a_s$, kjer doživi skok prve vrste.

Vprašajmo po takih rešitvah $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ naloge (I), ki se dajo po komponentah zvezno nadaljevati na $\mathcal{L}$ tako iz $\mathcal{D}^+$ kot iz $\mathcal{D}^-$, razen morda v točkah $a_1, a_2, \ldots, a_s$. V okolicah izjemnih točk naj veljajo ocene ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$\varphi_k(z) \leqq C_k \,|\, z - C \,|^{-\alpha} \tag{5, 1}$$

C_k je pozitivna konstanta, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, C pa poljubna točka $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

V razpravi [1] je J. Plemelj obravnaval nalogo (I) v primeru, ko so $G_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ odsekoma konstantne, ko imajo na vsakem zaprtem loku $a_\alpha a_{\alpha+1}$ konstantno vrednost. To nalogo je zelo ostroumno prevedel v prav tako nalogo z zveznimi koeficienti.

Splošno nezvezno nalogo se mi je tudi posrečilo, v bistvu s Plemljevo metodo, prevesti v nalogo z zveznimi koeficienti. (Glej [3], poglavje II).

Zgradil sem kanonske rešitve določenega razreda in rešil nehomogeno enačbo z nezveznimi koeficienti.

Zasnoval sem dovolj popolno teorijo sistemov singularnih integralskih enačb z nezveznimi koeficienti.

Seveda se ne moremo ustavljati ob teh nalogah kolikor-toliko podrobno. Ob uporabi Plemljevih del bi morali navesti še vrsto razprav, ki so nastale iz prikazane teorije. Podroben pregled teh del je v monografijah [2] in [3].

Iz tega, močno nepopolnega pregleda Plemljevih izrekov je že razvidno, kakšen neprecenljiv pomen imajo za razvoj našega področja matematike.

6. Robne naloge in sistemi singularnih integralskih enačb s premikom

Naj bo sedaj L enostaven, gladek, sklenjen ljapunovski lok [4]). Naj bo $\alpha(t)$ funkcija, ki preslika L na L v obe smeri enolično, njen odvod naj bo povsod različen od 0, točki t in $\alpha(t)$ pa naj potujeta po L v isti smeri.

Zastavimo robno nalogo:

Poiskati je treba odsekoma holomorfni vektor $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ s končnim redom v neskončnosti, da bo izpolnjen robni pogoj

$$\varphi^+(\alpha(t_0)) = G(t_0)\,\varphi^-(t_0) + g(t_0) \tag{6, 1}$$

kjer sta $G = \| G_{\alpha\beta} \|$ in $g(t)$ matrika in vektor razreda H.

S Plemljevo metodo lahko zgradimo primitivno matriko homogene naloge

$$\varphi^+(\alpha(t_0)) = G(t_0)\,\varphi^-(t_0) \tag{6, 2}$$

in vsa dognanja o nalogi (3, 1) prenesemo na nalogo (6, 1).

S temi izreki lahko obravnavamo sisteme singularnih integralskih enačb s premikom ([3], poglavje IV).

Iz pregledanih dognanj je zrasla vrsta del gruzinskih matematikov, kot so I. N. Vekua, L. T. Magnaradze, B. V. Hvedelidze G. F. Mandžavidze, D. A. Kveselava, R. S. Isahanov, G. N. Aleksandrija, S. S. Čakvetadze in drugi.

Nazadnje bi rad opozoril še na tole: Leta 1946 je izšla knjiga N. I. Mushelišvilija »Singularne integralske enačbe« (prva izdaja), v kateri je v vsem obsegu ponovljeno najino skupno delo [4] (to delo je povzeto tudi v moji knjigi »Sistemi singularnih integralskih enačb« [3]). V njem je, kot smo že povedali, prikazan Plemljev prispevek s podrobnimi dokazi in z uporabo.

PRIPOMBE PREVAJALCA

[1]) Funkcija $f(z)$, definirana na množici M, zadošča na M Hölderjevemu pogoju (je zvezna po Hölderju), če obstojata pozitivni konstanti A in α, da je za poljuben par z_1 in z_2 iz M

$$|f(z_2) - f(z_1)| < A\,|z_2 - z_1|^\alpha$$

A imenujemo Hölderjev koeficient, α Hölderjev eksponent. Vse funkcije, ki zadoščajo na M Hölderjevemu pogoju, sestavljajo razred H, vse funkcije, ki zadoščajo pogoju z izbranim α, pa razred H_α.

[2]) V literaturi srečamo tudi druga imena za isto nalogo. Največkrat ji pravimo Riemannova naloga [5*]. To ime uporabljamo tudi tu in tam v prevodu.

[3]) Opazujmo homogeno linearno diferencialno enačbo reda n

$$w^{(n)} + Q_1(z)w^{(n-1)} + \ldots + Q_n(z)w = 0$$

za kompleksno funkcijo kompleksne spremenljivke $w(z)$. Koeficienti enačbe naj bodo racionalne funkcije. Vse njihove pole in točko ∞ združimo v kritično množico $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. V okolici regularne točke $z \notin \mathcal{S}$ velja eksistenčni izrek in vse rešitve sestavljajo v taki okolici n-razsežni vektorski prostor. To strukturo ohrani množica rešitev tudi pri vsakem analitičnem nadaljevanju. Vzemimo regularno točko z in sklenjen tir skozenj, ki oklepa natanko eno točko $a \in \mathcal{S}$. Izberimo še linearno neodvisno n-terico rešitev in jo analitično nadaljujmo vzdolž izbrane poti. Po enkratnem obhodu okrog singularne točke a dobimo tako iz n-terice rešitev $w(z)$ v splošnem novo n-terico rešitev $w^+(z)$. Vsaka n-terica rešitev pa se s prvotno linearno izraža. Enkratnemu obhodu okrog singularne točke a ustreza torej linearna transformacija T_a v prostoru rešitev. Transformacije T_a, $a \in \mathcal{S}$ generirajo grupo, ki ji pravimo monodromijska grupa enačbe.

Na ravnini, na kateri so dovoljeni obhodi okrog singularnih točk, rešitve niso enolične. Pa povežimo singularne točke z loki $a_j a_{j+1}$, ki se paroma ne sečejo in razrežimo ravnino vzdolž teh lokov. Tako smo onemogočili obkrožanje singularnih točk. Pri prehodu iz enega brega na drugi breg prereza, pa utrpi prostor rešitev linearno transformacijo. Da bo slika lepša, povežimo še a_m z a_1, da dobimo sklenjen rez, ki deli ravnino v dva dela. Rešitve, ki so definirane znotraj reza, so povezane z rešitvami, ki so definirane zunaj reza. Vsaki linearno neodvisni n-terici rešitev $w^+(z)$ iz notranjosti, ustreza n-terica rešitev $w^-(z)$ v zunanjosti, da velja na rezu

$$w^-(t) = Cw^+(t)$$

Matrika C je konstantna vzdolž vsakega loka $a_j a_{j+1}$, na loku $a_m a_1$ pa je kar identiteta. (Podrobnosti glej v [6*].)

[3]) *Krivulja* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ je ljapunovska, če ima v vsaki točki definirano tangento, smerni vektor na tangenti $\boldsymbol{\xi}(t)$ pa zadošča Hölderjevemu pogoju $|\boldsymbol{\xi}(t_2) - \boldsymbol{\xi}(t_1)| < A\,|\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)|^{\alpha}$.

LITERATURA*

1. J. Plemelj: Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Monatshefte für Mathematik und Physik, XIX Jahrgang, 1908, s. 211—241.

2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. Изд. третье, Москва, 1968.

3. Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравненый. Изд. второе, Москва, 1970.

4. Н. И. Мусхелишвили, и Н. П. Векуа, Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций и ее приложение к системам сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисского матем. ин-та, т.ХП, 1943, стр. 1—46.

5.* Ф. Д. Гахов, Краевые задачи. Изд. второе, Москва, 1963.

6.* J. Plemelj: Diferencialne in integralne enačbe — Teorija in uporaba. Ljubljana 1960.

* Z zvezdico označeni deli je dodal prevajalec.

O CAUCHYJEVIH INTEGRALIH IN O ROBNIH NALOGAH LINEARNEGA KONJUGIRANJA

B. V. HVEDELIDZE, Matematični inštitut Akademije znanosti Gruzinske SSR, TBILISI, SSSR

Leta 1908 sta v reviji Monatshefte für Matematik und Physik izšli dve razpravi Josipa Plemlja z naslovoma:

1. *Ein Ergänzungssatz zur Cauchy'schen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend.*

2. *Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.*

Ti dve deli sta odigrali pomembno vlogo pri obravnavi robnih lastnosti Cauchyjevega integrala in pri ustvarjanju pripomočkov za reševanje robnih nalog (pod robno nalogo bomo vselej razumeli robno nalogo teorije analitičnih funkcij kompleksne spremenljivke). V navedenih delih je obravnavana naloga

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \qquad t \in \Gamma \tag{1}$$

kjer je Γ enostaven sklenjen orientiran gladek lok, $G(t)$ zvezna funkcija ali matrika, definirana na Γ, $\Phi^+(z)$ in $\Phi^-(z)$ pa analitični funkciji ali vektorja, definirani na omejenem in na neomejenem delu ravnine, ki ju ograja lok Γ.

Nalogo (1) srečamo prvič leta 1857 pri Riemannu. Riemann je obravnaval linearne diferencialne enačbe z algebrskimi koeficienti in vprašal po diferencialni enačbi s predpisano monodromijsko grupo. To vprašanje je prevedel v nalogo (1) za n parov iskanih funkcij. Pri Riemannu ne najdemo nobenega napotka za reševanje te naloge.

Leta 1873 je v Peterburgu izšla doktorska disertacija J. V. Sohockega »Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды«. V njej je pravzaprav na nek način rešil robno nalogo

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \qquad t \in \Gamma \tag{2}$$

kjer je $g(t)$ funkcija, definirana na Γ. Ta naloga je pomemben posebni primer tele naloge

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in \Gamma \tag{3}$$

ki vsebuje kot homogeni primer (ko je $g(t) = 0$) vprav nalogo (1). Po N. I. Mushelišviliju pravimo tej nalogi naloga linearnega konjugiranja.

J. V. Sohocki je nalogo (2) rešil s formulama, ki izražata robne vrednosti Cauchyjevega integrala

$$\Phi(z) = (1/2\pi i)\int_\Gamma (\tau - z)^{-1}\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

Ti dve formuli se, kot vemo, glasita

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= (1/2)\,\varphi(t) + (1/2\pi i)\int_\Gamma (\tau - t)^{-1}\,\varphi(\tau)\,d\tau \\ \Phi^-(t) &= -(1/2)\,\varphi(t) + (1/2\pi i)\int_\Gamma (\tau - t)^{-1}\,\varphi(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{5}$$

* Iz ruščine prevedel France Križanič.

J. V. Sohocki je obravnaval primer, ko je Γ daljica, $z \to t \in \Gamma$ po normali h Γ, funkcija $\varphi(\tau)$ pa v okolici točke t na Γ zadošča Hölderjevemu pogoju. Ob teh privzetkih je izpeljal prvo formulo (5) in formulo

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \tag{6}$$

Res je, da zahtevajo razmišljanja, s katerimi je Sohocki podprl obe formuli, še nadaljnja dopolnila, vsaj kar se strogosti tiče.

Kolikor lahko danes presodimo, je razprava J. V. Sohockega prvo delo, ki obravnava robne lastnosti Cauchyjevega integrala in te lastnosti uporablja za rešitev preprostih robnih nalog. Zgodilo pa se je, da je ostala razprava Sohockega neopažena in ni vplivala na nadaljnji razvoj teorije.

Prvi se je homogene naloge linearnega konjugiranja (1) lotil D. Hilbert leta 1905. Obravnaval je nalogo z enim parom in z dvema paroma neznanih funkcij. Z drugo nalogo je dokazal eksistenco linearne diferencialne enačbe drugega reda s predpisano monodromijsko grupo. Plemljeva dela pa so kmalu pokazala, da je Hilbertova metoda precej zamotana, njena realizacija pa zahteva od loka Γ analitičnost, od funkcije $G(t)$ obstoj zveznega drugega odvoda po loku. S temi omejitvami je Hilbert prevedel nalogo v Fredholmovo integralsko enačbo, za katero pa je potreboval Greenovi funkciji (ustrezne Neumannove naloge) za območji, ki ju ograja Γ. Ko je analiziral enačbo, je dognal izrek o alternativi — rešljiva je ena od dveh nalog: ali s koeficientom $G(t)$ ali s konjugiranjem koeficientom $G^*(t)$.

V Plemljevih delih je predlagana bolj elementarna in bolj popolna rešitev naloge (1), kakor jo najdemo pri Hilbertu. To se je posrečilo z uporabo Cauchyjevih integralov. Te Plemljeve raziskave vzbujajo pri bralcu iskreno navdušenje z bogastvom idej, z novostjo in z originalnostjo predlagane metode in še z zelo ostroumno uporabo.

Ker je Plemljev pripomoček za reševanje naloge (1) Cauchyjev integral, je začel svoje raziskave s študijem osnovnih lastnosti tega integrala. Izvedel je formuli (5) in ju strogo utemeljil. Tem formulam pravimo pogosto Sohocki-Plemljevi formuli. Potem pa je dokazal pomemben izrek o singularnem Cauchyjevem integralu

$$(S\varphi)(t) = (1/2\pi i) \int_\Gamma (\tau - t)^{-1} \varphi(\tau) d\tau \qquad t \in \Gamma \tag{7}$$

kjer je nepravi integral mišljen kot glavna vrednost. Ta izrek pravi: Če gostota $\varphi(t)$ zadošča Hölderjevemu pogoju ali kot pravimo pogoju H_μ, tedaj mu zadošča tudi $(S\varphi)(t)$. Omejitve, ki jih je postavil poti integriranja, so v razpravi premalo ostro označene. Po kontekstu pa lahko sodimo, da je mislil na gladko krivuljo. Ko se je ukvarjal z zveznostjo integrala (7), ni poudaril posebnega primera, ko je Hölderjev eksponent $\mu = 1$. Videti je, da je ves čas mislil na $\mu < 1$.

Leta 1916 je I. I. Privalov neodvisno obravnaval zveznost integrala (7), ko je Γ krog in $\mu \leqq 1$. Potem pa je leta 1939 z razvojem in s poglobitvijo Plemljeve metode utemeljil te izsledke za poljubno enostavno odsekoma gladko krivuljo brez povratnih točk. Danes ta izrek v literaturi pogosto imenujejo izrek Plemlja-Privalova. N. I. Mushelišvili je leta 1946 pokazal, da povratne točke niso izjema.

Ko je dognal lastnosti Cauchyjevega integrala, se je J. Plemelj lotil naloge (1). Njegovo drugo delo je v celoti posvečeno nalogi (1) za n parov neznanih funkcij in uporabi teh izsledkov za dokaz eksistence diferencialnih enačb s predpisano monodromijsko grupo. Naloge (1) za več neznanih funkcij ne bomo obravnavali. Ves čas bomo imeli pred očmi le nalogo za en par neznanih funkcij. V tem primeru je naloga eksplicitno rešljiva, kar pri več neznanih funkcijah ne gre. Na načelno možnost take konstrukcije je prvi opozoril J. Plemelj.

Prva Plemljeva razprava, ki smo jo omenili v začetku, se konča s formulo

$$\ln \Phi(z) = (1/2\pi i) \int_{\Gamma} (t - z)^{-1} \ln G(t)\, dt \tag{8}$$

če je $\ln G(t)$ enolična funkcija. Ta pomembna pripomba opozarja, da je v Cauchyjevem integralu skrita pot do eksplicitne rešitve naloge (1). Po štirinajstih letih, leta 1922, je k istemu sklepu prišel Carleman. Obravnaval je singularno integralsko enačbo

$$a(t)\, \varphi(t) + (1/\pi i)\, b(t) \int_{\Gamma} (\tau - t)^{-1}\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \qquad t \in \Gamma \tag{9}$$

in predlagal takole originalno pot do njene rešitve: Rešitvi naloge (9) je priredil Cauchyjev integral (4). Potem pa je s Sohocki-Plemljevimi formulami kaj lahko pokazal, da mora Cauchyjev integral rešiti robno nalogo (3), kjer se $G(t)$ in $g(t)$ izražata z $a(t)$, $b(t)$ in $f(t)$. Rešitev naloge (3) je Carleman eksplicitno zgradil s Cauchyjevimi integrali. Ta rešitev v homogenem primeru ($g(t) = 0$) v bistvu sovpada s Plemljevo formulo (8). Ko je ugnal nalogo (3), je s (6) zgradil rešitev enačbe (9).

Kasneje je postalo očitno, da sta Plemljeva in Carlemanova razprava idejno pomembni, ker vsebujeta zamisel, ki vodi do daljnosežnih posplošitev metod za reševanje dovolj splošno postavljene naloge (3) s Cauchyjevimi integrali.

Plemelj in Carleman sta obravnavala nalogo (3) v precej posebnih primerih, kot se to rado zgodi pri temeljnih delih. Formulacija naloge (3) je morala biti še bistveno razširjena, preden je bila pojasnena njena resnična narava. Ta pripomba pa ne velja za homogeno nalogo (1) za n parov funkcij in z zvezno matriko $G(t)$. Tu J. Plemelj ni samo odkril metode za raziskovanje, ampak je, v bistvu, prišel do dokončnih rezultatov.

Hkrati s Carlemanovim moramo omeniti tudi Noetherjevo delo, ki je izšlo skoraj istočasno (leta 1921). Noether je naslonil teorijo singularnih integralskih enačb na robno nalogo: v območju, ki ga omejuje enostavni sklenjeni lok Γ, poišči analitično funkcijo $\Phi(z)$, da bo izpolnjen robni pogoj

$$\operatorname{Re}\,[a(t)\, \Phi(t)] = f(t), \qquad t \in \Gamma \tag{10}$$

kjer je $a(t)$ zvezna funkcija, definirana na Γ. To nalogo je postavil in rešil Hilbert (1905).

Čeprav v tem Noetherjevem delu ni novih spoznanj o robnih nalogah, je posredno odigralo pomembno vlogo pri nastajanju njihove teorije.

Hkrati z raziskavami Riemanna, Hilberta, Plemlja, Noetherja in Carlemana so pomembno vlogo odigrala tudi dela N. E. Žukovskega, S. A. Čapligina, G. V. Kolosova in N. I. Mushelišvilija, v katerih so bile robne naloge uporabljene za reševanje mnogih problemov mehanike. Pod njihovim vplivom so se v Sovjetski zvezi začela v drugi polovici tridesetih let intenzivna raziskovanja robnih nalog.

Na kratko preglejmo osnovne rezultate o nalogi (3) za en par neznanih funkcij, ki so bili doseženi v Sovjetski zvezi. V tem primeru je že Plemelj ugotovil, da reši nalogo (1) Cauchyjev integral (8), če je $\ln G(t)$ enolična funkcija. Pot do eksplicitne rešitve naloge (3) s Cauchyjevim integralom je kasneje nakazal Carleman ob pogojih: $\Gamma = (-1, 1)$, $G(t)$ in $g(t)$ analitični, $G(t) \neq 0$ in $\arg G(t)$ leži na enem krogu. Kot vidimo, sta Plemelj in Carleman obravnavala (3) v dovolj ozkih pogojih.

Dvanajst let po Carlemanovem delu je leta 1934 izšla razprava I. I. Privalova o nalogi (3). Ničesar novega ni prispevala k metodi reševanja, v bistvu je uporabljala Plemljevo metodo za več parov neznanih funkcij. Pomembna pa je zaradi formulacije naloge (3), ki v največji meri upošteva njeno naravo, in zaradi metode za njeno obravnavanje. O tem bomo govorili kasneje.

Formulacija naloge (3), kakor pač vsake robne naloge, je bistveno odvisna od treh skupin omejitev: 1) zahteve, ki jih postavljamo loku Γ, ki nosi robne pogoje, 2) zahteve,

ki jih postavljamo funkcijam $G(t)$ in $g(t)$, 3) zahteve, ki jih postavljamo robnemu vedenju iskanih analitičnih funkcij. Po zadnji skupini omejitev delimo robne naloge v tri skupine: a) naloga je zvezna, če naj bodo iskane funkcije zvezne vse do roba Γ, b) naloga je odsekoma zvezna, če sme biti prejšnja omejitev kršena v končno mnogih točkah na Γ, c) naloga je nezvezna v vseh drugih primerih.

Poostrimo razmišljanja Sohockega (1873), Plemlja (1908) in Carlemana (1922) pa uvidimo, da ne gre brez tehle omejitev: znane funkcije v robnih pogojih morajo biti zvezne ali vsaj odsekoma zvezne po Hölderju, lok enostavna gladka krivulja, neznana analitična funkcija pa odsekoma holomorfna. Po Muskhelišviliju je $\Phi(z)$ odsekoma holomorfna funkcija s krivuljo skokov Γ in z odlikovanimi točkami $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \Gamma$, če je $\Phi(z)$ holomorfna na vsakem omejenem območju ravnine z, ki ne vsebuje točk krivulje Γ, če se da z desne in z leve zvezno nadaljevati v vsako točko Γ, razen morda v odlikovanih točkah, v okolici odlikovane točke c pa velja ocena

$$|\Phi(z)| < \text{konst.} \, |z - c|^{-\alpha} \qquad \alpha < 1 \tag{11}$$

Te zahteve imenujemo običajno klasične omejitve. O nalogi s takimi omejitvami pa pravimo, da je klasično zastavljena. Robne naloge v klasični formulaciji so vselej zvezne ali odsekoma zvezne.

Prvi bistveni korak v razvoju Plemljeve in Carlemanove metode za reševanje (3) pripada F. D. Gahovu. V razpravi, ki je izšla leta 1937, se mu je posrečilo popolnoma rešiti zvezno klasično zastavljeno nalogo (3) v primeru, ko je Γ en sam sklenjen lok, $G(t)$ in $g(t)$ zadoščata na Γ Hölderjevemu pogoju, $G(t) \neq 0$, neznana odsekoma holomorfna funkcija $\Phi(z)$ pa ima končen red v neskončnosti. Preglejmo njegova dognanja.

Naj bo κ indeks funkcije $G(t)$

$$\kappa = \text{ind}\, G(t) = (1/2\pi)\,[\arg G(t)]_\Gamma \tag{12}$$

kjer pomeni $[\ ]_\Gamma$ prirastek izraza, ki je v oklepaju, pri enkratnem obhodu loka Γ. V nadaljevanju bomo govorili le o rešitvah, ki so v neskončnosti enake 0. Tedaj je pri $\kappa \geqq 0$ nehomogena naloga (3) rešljiva, kakršenkoli je že svobodni člen $g(t)$, njena splošna rešitev pa je

$$\Phi(z) = (1/2\pi i)\, X(z) \int_\Gamma (t - z)^{-1} [X(t)]^{-1} g(t)\, dt + X(z)\, P(z) \tag{13}$$

kjer je $P(z)$ poljuben polinom stopnje $\kappa - 1$,

$$X(z) = \exp h(z) \text{ znotraj } \Gamma, \qquad X(z) = z^{-\kappa} \exp h(z) \text{ zunaj } \Gamma$$

in

$$h(z) = (1/2\pi i) \int_\Gamma (t - z)^{-1} \ln [t^{-\kappa} G(t)]\, dt$$

Funkcija $X(z)$ reši homogeno nalogo (1). Imenujemo jo kanonsko rešitev naloge (1) ali kanonsko funkcijo za $G(t)$. Če je $\kappa < 0$, naloga (3) v splošnem ni rešljiva; rešljiva je natanko takrat, ko svobodni člen $g(t)$ zadošča $-\kappa - 1$ pogojem ($k = 0, 1, \ldots, -\kappa - 1$)

$$\int_\Gamma [X^+(t)]^{-1} g(t) t^k dt = 0$$

Brž ko so ti pogoji izpolnjeni, ima naloga natanko določeno rešitev, ki jo dobimo iz (13), če postavimo $P(z) = 0$.

Metoda, ki jo uporablja F. D. Gahov za rešitev homogene naloge, predstavlja nadaljnji razvoj Plemljeve metode, nehomogeno pa reši po poti, ki je nadaljevanje Carlemanove. Načelna novost v izsledkih F. D. Gahova pa so pogoji rešljivosti in obravnava števila rešitev.

Dokaz navedenih rezultatov je močno oprt na Sohocki-Plemljevi formuli in izrek Plemlja-Privalova. Če je Γ nesklenjena krivulja, vzniknejo pri reševanju naloge (3) nove principielne težave, ki so povezane z vedenjem Cauchyjevega integrala v okolici začetne in končne točke Γ. Za premostitev teh težav je N. I. Mushelišvili uvedel posebne razrede funkcij, ki jih je označil s H^*.

Naj bo $\Gamma = ab$ nesklenjena krivulja s pozitivno smerjo od a proti b. Kadar je vseeno, o katerem koncu krivulje govorimo, ga označimo s c. Naj bo $\varphi(t)$ definirana na Γ. Rekli bomo, da je $\varphi(t) \in H^*$, če 1) na vsakem zaprtem delu $a'b'$ loka ab zadošča Hölderjevemu pogoju, 2) v okolici končne točke jo lahko zapišemo

$$\varphi(t) = (t - c)^{-\gamma}\, \varphi^*(t), \qquad \gamma = \alpha + i\beta, \qquad 0 \leqq \alpha < 1 \tag{14}$$

kjer sta α in β realni konstanti, $\varphi^*(t)$ pa zadošča v okolici c Hölderjevemu pogoju.

N. I. Mushelišvili je dokazal: če je gostota Cauchyjevega integrala (4) v razredu H^* in je naprimer $\gamma \neq 0$, $z \notin \Gamma$, je

$$\Phi(z) = \pm\, (e^{\pm \gamma\pi i}/2i \sin \gamma\pi)\, \varphi^*(c)\, (z - c)^{-\gamma} + \Phi_0(z) \tag{15}$$

zgornji predznak velja pri $c = a$, spodnji pri $c = b$, člen $\Phi_0(z)$ pa je omejen in teži k določeni limiti, ko gre z proti c, če je $\alpha = 0$; če pa je $\alpha > 0$, je $|z - c|^{\alpha_0} |\Phi_0(z)| < \text{konst}$, kjer je konstanta $\alpha_0 < \alpha$.

Analogna formula velja tudi za $z = t \in \Gamma$.

Iz teh dognanj neposredno sledi: Če je gostota Cauchyjevega integrala $\varphi(t) \in H^*$, je Cauchyjev integral (4) odsekoma holomorfna funkcija, singularni integral (7) pa je funkcija razreda H^*.

Na teh rezultatih je N. I. Mushelišvili zgradil eksplicitno rešitev odsekoma zvezne naloge (3) v klasični formulaciji, če sestavlja Γ končno mnogo nesklenjenih enostavnih lokov brez presečišč. Tudi v tem primeru je rešitev zapisana s (13), če le ustrezno definiramo celo število $\varkappa$ in funkcijo $X(z)$.

Dognanja F. D. Gahova in N. I. Mushelišvilija so močno vplivala na obravnavanje robnih nalog.

Raziskovanja so tekla v dveh smereh. Prva je ob klasičnih omejitvah obravnavala naloge, ki vprašujejo po funkciji $\Phi(z)$, definirani na ravnini, razrezani vzdolž Γ, ki zadošča robnim pogojem, različnim od (3). Uvajala je tudi druge robne naloge. Druga pa je poskušala omiliti klasične omejitve in ugotoviti, kako potrebne so klasične omejitve za veljavnost rezultatov, ki so bili doseženi ob njihovem privzetku. Nekoliko podrobneje se ustavimo ob drugi smeri, ki je posebno blizu avtorjevim znanstvenim interesom.

Vrsto oslabitev klasičnih omejitev sta našla N. I. Mushelišvili in F. D. Gahov. N. I. Mushelišvili je pokazal, da obstane teorija tudi pri odsekoma gladkih krivuljah (neodvisno od njega je do podobnih ugotovitev prišel tudi poljski matematik V. Pogorzelski). F. D. Gahov pa je opazil, da sme biti koeficient $G(t)$ v robnem pogoju pri nekaterih privzetkih enak 0 ali ∞. Pozneje so to nalogo obravnavali tudi drugi matematiki (N. P. Vekua, L. A. Čikin, B. V. Hvedelidze, A. E. Dračinski in drugi).

L. D. Magnaradze je ugotovil, da smemo v izrekih N. I. Mushelišvilija in F. D. Gahova zamenjati funkcije, ki zadoščajo Hölderjevemu pogoju, s širšimi podrazredi zveznih funkcij.

Klasične omejitve zahtevajo, da bodi v nalogi (3) iskana funkcija odsekoma holomorfna, zato jo vselej lahko zapišemo s Cauchyjevim integralom. Brž ko se odpovemo zahtevi, da naj bo neznana funkcija $\Phi(z)$ odsekoma holomorfna in obravnavamo nezvezno zastavljeno nalogo, vznikne kot prvo vprašanje po takih podrazredih analitičnih funkcij, ki dopuščajo zapis s pripomočki, bolj ali manj primernimi za raziskavo robnih nalog. Prvi je nezvezno robno nalogo (3) formuliral I. I. Privalov. V razpravi, ki smo jo že omenili, je

privzel, da je Γ izmerljiva krivulja, iskani funkciji $\Phi^+(z)$ in $\Phi^-(z)$ pa se da v obeh delih, na katere deli Γ ravnino, zapisati s Cauchyjevim integralom. To formulacijo zlahka spremenimo v: neznano funkcijo v nalogi (3) iščimo med Cauchyjevimi integrali s krivuljo skokov Γ in s celim glavnim delom v neskončnosti

$$\Phi(z) = (1/2\pi i) \int_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau) d\tau + P(z) \tag{16}$$

Rekli bomo, da je robna naloga zastavljena po Privalovu, če zahteva, da je neznana funkcija predstavljiva s Cauchyjevim integralom (z analitično ali z drugačno gostoto) in ima tak ali drugačen glavni del v neskončnosti.

Pri obravnavi tako zastavljene naloge je pomembno ugotavljanje lastnosti, ki odlikujejo Cauchyjeve integrale z integrabilnimi gostotami.

Osnovno delo, ki je začelo raziskovanje Cauchyjevega integrala, je prva Plemljeva razprava, ki smo jo navedli v začetku. Fundamentalne raziskave Cauchyjevih integralov z integrabilnimi gostotami sta prispevala V. V. Golubev in I. I. Privalov.

Obravnavanje naloge (3) po Privalovu se bistveno opira na veljavnost dveh trditev:

1° Če je $\varphi(t) \in L(\Gamma)$, — $\varphi(t)$ je na Γ integrebilna funkcija — eksistira singularni integral (7) skoraj povsod.

2° Če je $\varphi(t) \in L_p(\Gamma)$, — $\varphi(t)$ ima na Γ integrabilno p-to potenco — odlikuje ta lastnost tudi singularni integral (7).

I. I. Privalov je (1918) pokazal, da velja 1°, če je Γ sestavljen iz končnega števila lokov, ki imajo definirano konveksnost. Ta zahteva je dovolj huda. Očitno ji ne zadošča vsaka gladka krivulja, to je krivulja, pri kateri je smerni kot tangente zvezna funkcija dotikališča. Ne zadošča ji niti vsaka ljapunovska krivulja, to je krivulja, pri kateri zadošča smerni kot tangente kot funkcija dotikališča Hölderjevemu pogoju. Drugi izrek za primer, ko je Γ krog, je dokazal N. N. Luzin (1915) za $p = 2$, M. Riesz (1928) pa za poljuben $p > 1$.

Obravnava robnih nalog po Privalovu je terjala dokaz izreka 2° za Lebesguesove funkcijske prostore $L_p(\Gamma, \rho)$ z utežjo

$$\rho(t) = |t - c_1|^{\alpha_1} |t - c_2|^{\alpha_2} \dots |t - c_m|^{\alpha_m}$$

kjer je $c_k \in \Gamma$ in $-1 < \alpha_K < p - 1$.

Avtor tega pregleda je pokazal (1946): če je Γ ljapunovska krivulja, veljata 1° in 2°, pa še (1951), da velja 2° za ljapunovsko Γ in $\varphi(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$, $p > 1$. Po teh izrekih se je dalo dokazati osnovne lastnosti, ki odlikujejo Cauchyjev integral po ljapunovski krivulji z gostoto iz Lebesguesovega funkcijskega prostora.

Ti rezultati so vodili do ugotovitve: Če je Γ ljapunovska krivulja, $G(t)$ zadošča klasičnim omejitvam, $g(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$, števila α_K, ki nastopajo v definiciji uteži $\rho(t)$, odvisna od točk nezveznosti $G(t)$, $\Phi^+(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$ in $\Phi^-(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$, je robna naloga po Privalovu eksplicitno rešljiva. Vse rešitve naloge (3) so spet zajete v formuli (13). Pripomniti moram, da je v tem izreku zelo razširjen razred za svobodni člen $g(t)$ in za neznano funkcijo $\Phi(z)$. Nespremenjen je ostal razred za koeficient $G(t)$, dopustne krivulje pa je bilo treba zožiti od gladkih do ljapunovskih.

Naslednje raziskave so pokazale, da moremo od $G(t)$ zahtevati le zveznost (V. V. Ivanov, I. B. Simonenko, G. F. Mandžavadze, B. V. Hvedelidze). Potem se je posrečila razširitev razreda dopustnih $G(t)$ z nekaterimi razredi integrabilnih funkcij (I. B. Simonenko, I. I. Daniljuk, ameriški matematik Widom). Razširitev razreda funkcij, dopustnih za $\Phi(z)$ je bila dosežena s procesi integriranja, splošnejšimi kot je Lebesguesov (P. L. Uljanov, A. G. Džvaršejšvili, G. A. Huskivadze). Tako je bil občutno razširjen razred dopustnih funkcij za znane in za neznane funkcije v (3), razred dopustnih lokov pa je bil še vedno zožen na ljapunovske krivulje.

Povsem naravno je nastalo vprašanje o opustitvi te omejitve. Pozitivni odgovor nanj zahteva dokaz domnev 1° in 2° za gladko krivuljo Γ. Kljub velikim naporom mnogih matematikov, je vprašanje, ali veljata 1° in 2° tudi za gladke krivulje, še vedno brez odgovora. Posrečilo se je najti nekatere negladke krivulje, za katere trditvi veljata (A. G. Džaršejšvili, G. C. Tumarkin, V. P. Havin, T. G. Gegelija, G. A. Huskivadze, E. G. Gordadze, I. I. Daniljuk, V. J. Šeljepov in drugi), dokazano je na primer, da veljata za odsekoma ljapunovske krivulje (E. G. Gordadze). Odkritih je več funkcijskih razredov, v katerih velja 2° (L. G. Magnaradze, I. B. Simonenko, I. I. Daniljuk, V. M. Kokilašvili, V. A. Paatašvili in drugi).

Naloga (3) je ob nekaterih privzetkih obravnavana, ko je Γ sestavljen iz štev no mnogih sklenjenih lokov (S. A. Freidkin, I. N. Karcivadze in B. V. Hvedelidze, V. A. Paatašvili in drugi).

V klasičnih delih je indeks funkcije $G(t)$ celo število. N. V. Govorov, G. P. Jurov in drugi so obravnavali primer, ko je indeks $G(t)$ tako ali drugače neskončen.

O. S. Parasjuk, B. I. Čerskij, V. S. Rogožin in drugi so obravnavali nalogo (3) tudi v razredu posplošenih funkcij — distribucij*) (to so funkcionalni nad nekim prostorom osnovnih funkcij). A. V. Mesis, L. I. Čibrikova, J. L. Rodin, R. N. Abdulaev, E. I. Zverovič, V. I. Pokazeev in drugi so zastavili in obravnavali nalogo na Riemannovih ploskvah.

Robna naloga (3) v formulaciji Privalova je ekvivalentna singularni integralski enačbi (9). Za teorijo rešljivosti zadošča obravnava v eni od obeh oblik. Ko je dognana ena, je ugnana tudi druga. Oblika (3) je primerna za široko uporabo funkcijske teorije, oblika (9) pa za funkcionalno analizo. S. G. Mihlin, I. C. Gohberg, N. J. Krupnik, R. V. Dudučava in drugi so zgradili teorijo robnih nalog (3) z obravnavo enačbe (9).

Eksplicitna rešitev naloge (3) — formula (13) — je bila uporabljena za eksplicitno rešitev enačbe (9), pa tudi v teoriji singularnih integralskih enačb (9) v primeru, ko je na desni strani povsem nezvezen člen (I. N. Vekua, N. I. Mušelišvili, V. D. Kupradze, F. D. Gahov, B. V. Hvedelidze, I. I. Daniljuk, I. B. Simonenko, G. F. Mandžavidze in drugi).

Naloga (3) je bila obravnavana tudi v primeru, ko nastopajo robne vrednosti neznane funkcije v različnih točkah loka Γ (naloga s premikom)

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma$$

V tem primeru se eksplicitna rešitev ni posrečila, z integralskimi enačbami pa je bila zgrajena popolna teorija (D. A. Kveselava, N. P. Vekua, L. I. Čibrikova, V. S. Rogožin, G. F. Mandžavidze, B. V. Hvedelidze, I. B. Simonenko in drugi).

S prevodom v ustrezno integralsko enačbo je bila raziskana tudi naloga

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + G_1(t)\,[\Phi^-(t)]^* + g(t), \quad t \in \Gamma$$

(N. P. Vekua, B. V. Bojarskij, L. G. Mihajlov in drugi). Na isti način je raziskana splošna linearna naloga, ko v robnih pogojih nastopajo ob vrednostih iskanih funkcij tudi njihovi odvodi do določenega reda (L. G. Magnaradze, J. N. Krikunov, N. P. Ganin, R. S. Isahanov, V. S. Rogožin in drugi). Te splošne naloge so obravnavane tudi s premikom (N. P. Vekua, G. F. Mandžavidze, R. S. Isahanov, R. A. Kordzadze, G. S. Litvinčuk, Z. I. Zverovič in drugi).

V. S. Vladimirov, V. A. Kakičev in drugi so obravnavali nekaj nalog linearne konjugiranosti tudi za funkcije več kompleksnih spremenljivk.

Naloga je postavljena in raziskana tudi za nek sistem eliptičnih enačb prvega reda, bolj natančno, za posplošene analitične funkcije po I. N. Vekui.

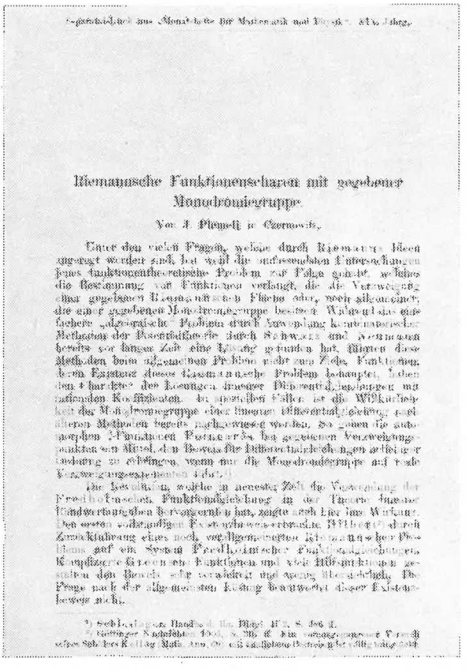
---

*) Tu moramo omeniti tudi prispevek jugoslovanskega matematika D. Mitrovića (pripomba prevajalca).

Razen nalog linearne konjugiranosti in njim sorodnih nalog, v katerih je iskana funkcija definirana na vsej ravnini, razrezani vzdolž Γ, obstojajo številne raziskave robnih nalog, pri katerih je neznana funkcija definirana na danem sovisnem območju in zadošča predpisanim robnim pogojem na robu območja. Najpreprostejša med njimi je Riemann-Hilbertova naloga (10). Osnovna dela pri študiju teh nalog pripadajo I. N. Vekui in F. D. Gahovu.

V kratkem pregledu ne moremo niti površno zajeti vseh rezultatov, ki so jih v teoriji robnih nalog dosegli sovjetski matematiki. V začetku smo si zastavili kot cilj le grobo predstavo o tistih raziskavah, ki so bolj ali manj povezane s prvo Plemljevo razpravo. Podrobnejše navedbe o omenjenih delih in o drugih študijah, ki obravnavajo robne lastnosti Cauchyjevega integrala, bo bralec našel v knjigi »История отечественной математики«, т. 4, кн. 1, Киев, 1970.

Josip Plemelj, 1904



Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe

Von J. Plemelj in Czernowitz.

Plemljeva Razprava, 1908

DOMAČE VESTI

ČASTNI ODBOR ZA PROSLAVO STOLETNICE PROFESORJA PLEMLJA

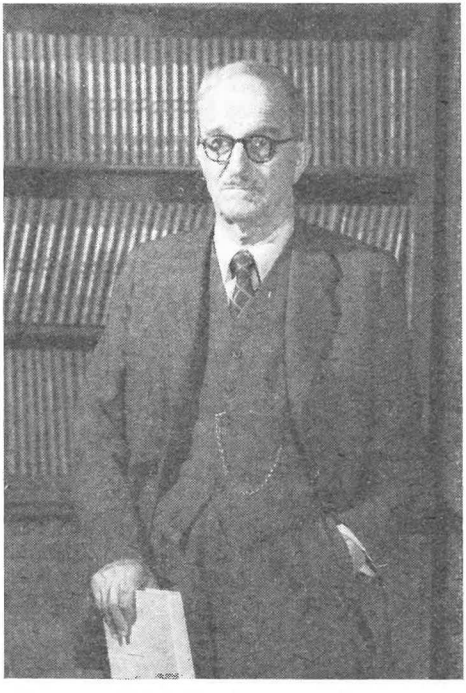
Pobudo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, da se jubilej profesorja Josipa Plemlja ustrezno proslavi, sta sprejeli SAZU in Univerza v Ljubljani, pridružili sta se ji Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije ter Balkanska unija matematikov.

Predsedstvo in izvršni odbor republiške konference SZDL pa sta na skupni seji 6. aprila 1973 imenovala častni odbor za proslavo jubileja:

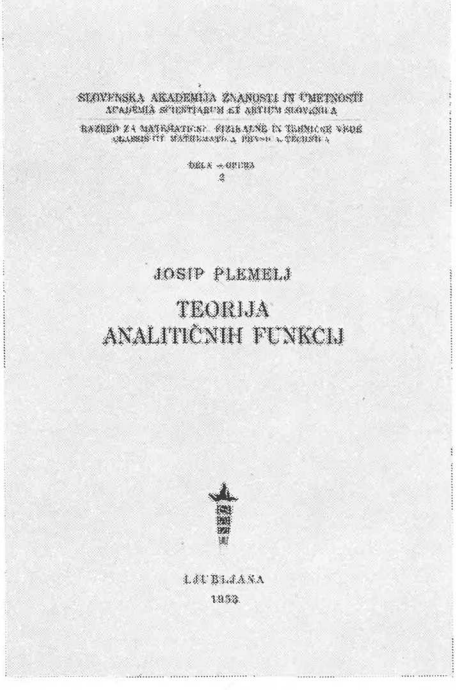
Predsednik: Mitja Ribičič, predsednik republiške konference SZDL Slovenije

Člani: Boris Andrijanič, Tomaž Bizajl, Danilo Blanuša, Robert Blinc, Tone Bole, Lavo Čermelj, Mirjan Gruden, Branko Hočevar, Milan Kac, Stanko Kajdiž, Bogomila Kolenko, Aleksandra Kornhauser, Miha Košak, France Križanič, Tomaž Kšela, Anton Kuhelj, Peter Kunc, Djuro Kurepa, Avguštin Lah, Boris Lipužič, Vladimir Logar, Anton Moljk, Milan Osredkar, Anton Peterlin, Miloš Poljanšek, Stojan Požar, Živko Pregl, Metod Rotar, Viktor Turnšek, Ivan Vidav, Josip Vidmar, Bogdan Volavšek, Franc Žvan.

Predlog je v imenu Društva matematikov, fizikov in astronomov ter Univerze v Ljubljani obrazložil France Križanič. Takole je govoril:



Josip Plemelj, 1953



Plemljeva knjiga, 1953

Pred Vami je predlog častnega odbora, ki naj bi bedel nad proslavami ob stoletnici rojstva Josipa Plemlja, velikega slovenskega matematika in prvega rektorja Univerze v Ljubljani.

Prepričan sem, da bosta predsedstvo in izvršni odbor RK SZDL predlog sprejela in s pokroviteljstvom dala jubilejnim prireditvam tako širok politični okvir, kakor jim gre.

Dovolite mi, da to svoje prepričanje utemeljim:

Josipa Plemlja, sina blejskega mizarja, sta zvezdno nebo nad nami in uka žeja vodila na Dunaj, kjer je astronomijo kaj kmalu zamenjal za matematiko, ki ji je potem posvetil vse življenje. S svojim delom, predvsem z razpravami med leti 1901 in 1911 je posegel v vsa, takrat živa področja matematike, najznamenitejša pa je njegova rešitev Riemannove robne naloge. Ta se je dobrih petdeset let upirala mnogim matematikom, po Plemljevi rešitvi pa je postala začetek teorije singularnih integralskih enačb, ki je še danes živa, plodna in uporabna. Profesor Plemelj se je rad loteval le težkih nalog, rešitve pa izbrusil do konca, njegove razprave niso samo pravilne in globoke, so tudi lepe, pa naj gre za čisto notranjo, matematično estetiko, ali za zunanjo, jezikovno obliko.

S svojim izrednim prispevkom matematiki je profesor Plemelj v velikem znanstvenem svetu bleščeče predstavljal svoj mali, zaničevani in zatirani slovenski narod. Brez dvoma smo mu lahko hvaležni za slavo, ki jo je ponesel v svet. Toda življenje je postavilo pred Josipa Plemlja še eno nalogo, še eno protislovje, ki ga je zmogel. Prav to pa daje njegovemu jubileju v našem trenutku tisti široki kulturno-politični in sploh politični pomen, ki ga bo SZDL priznala s svojim pokroviteljstvom.

Za tole gre: Znanost je internacionalna, živi in razvija pa se znotraj nacionalnih kultur. Znanstvenik, ki mu gre le za znanost in za svoj uspeh v njej, lahko izbira: večji narod, bogatejša kultura mu bosta dala boljše možnosti za delo. Toda narod, pa naj bo še tako maloštevilen, se ne more odreči znanosti, kakor ne more zavreči umetnosti. Obe sta neodtujljiva dela njegove kulture. Slovenski narod je to vedel in izpričal v znanih zahtevah po ustanovitvi slovenske univerze. Ko jih je po zlomu germanskega jarma tudi uresničil, je bila odločitev profesorja Plemlja jasna: prišel je v Ljubljano. S to odločitvijo je tako, kot vsa njegova generacija velikih slovenskih znanstvenikov: plejada slavistov, Milan Vidmar in drugi, še enkrat potrdil in utrdil odločenost slovenskega naroda, da gradi svojo kulturo celovito. Ljubljanska leta so bila za Josipa Plemlja manj plodna od avstrijskih, razmere manj naklonjene. Šele po osvoboditvi, tik pred upokojitvijo, je lahko izdal svoja predavanja v slovenščini. Kajti kljub univerzi je bil v stari Jugoslaviji slovenski univerzni učbenik matematike razkošje, ki si ga ni znal nihče predstavljati. Kot profesor, kot utemeljitelj slovenske matematične šole je Josip Plemelj z delom znotraj naše družbe zaslužil vsaj tako priznanje, kot mu ga dajemo za slavo, ki jo je razširil navzven.

Prireditve ob stoletnici bodo podčrtale obe obdobji Plemljevega dela: Plemlja-znanstvenika bomo počastili z mednarodnim simpozijem, ki ga v njegov spomin prirejata Balkanska unija matematikov in Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije. Simpozij bo od 29. maja do 2. junija na Bledu. Plemlja-učitelja pa se bomo spomnili v domačem krogu na slavnostnem 25. občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in na slavnostih, ki jih bo ob 11. decembru, Plemljevem rojstnem dnevu, priredila Univerza. Na Bledu, v rojstnem kraju Josipa Plemlja, pa nameravamo ob stoletnici odkriti spomenik.

Prepričan sem torej, da zasluži Josip Plemelj, znanstvenik svetovnega slovesa, jugoslovanski patriot in slovenski univerzni učitelj, vso tisto pozornost, ki mu jo daje SZDL z imenovanjem častnega odbora. Zato si tudi upam predlagati Predsedstvu in Izvršnemu odboru, da sprejmeta predlagano pokroviteljstvo.

INTEGRALSKE, DIFERENCIALNE IN FUNKCIONALNE ENAČBE

Poročilo o delu mednarodnega simpozija

Ob stoletnici rojstva profesorja Josipa Plemlja je bil na Bledu od 29. maja do 4. junija 1973 mednarodni simpozij z naslovom INTEGRALSKE, DIFERENCIALNE IN FUNKCIONALNE ENAČBE.

Simpozij sta organizirali Balkanska unija matematikov ter Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije. Priprave za simpozij je prevzelo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, ki je tehnično plat organizacije zaupalo podjetju za kongresni turizem »Magistrat« v Ljubljani.

Delo simpozija sta s finančno podporo omogočila Izvršni svet Skupščine SRS in Raziskovalna skupnost Slovenije s skladom »Borisa Kidriča« kot zastopnik vseh republiških svetov za koordinacijo znanstvenih dejavnosti. Del stroškov je pokrila kotizacija.

Organizacijski odbor simpozija so sestavljali: predsednik: prof. dr. Ivan Vidav, Ljubljana, podpredsednik: prof. dr. Blagoj Popov, Skopje, sekretar: izr. prof. dr. France Križanič, Ljubljana, člani: prof. dr. Svetozar Kurepa, Zagreb, prof. dr. Dragiša Mitrovič, Zagreb, izr. prof. dr. Niko Prijatelj, Ljubljana.

Pripravljalni odbor je izdal dve obvestili o simpoziju, tiskani v angleščini in v ruščini, prvo v 700 izvodih, drugo v 200 izvodih. Pred simpozijem je izšla v 250 izvodih brošura z življenjepisom profesorja Josipa Plemlja, s kratkimi povzetki prijavljenih predavanj in z naslovi prijavljencev.

Vseh udeležencev simpozija je bilo 47, prijav pa je prispelo 87. Udeležba po državah je bila takale (v oklepaju je število prijav):

Avstrija 2 (4), Bolgarija 4 (12), Češkoslovaška 2 (3), Grčija — (2), Italija 2 (2), Jugoslavija 21 (22), Kanada 3 (2), Nemška demokratična republika 1 (1), Nizozemska 1 (1), Poljska 3 (3), Romunija 2 (4), Sovjetska zveza 2 (25), Velika Britanija 1 (1), Turčija — (1), Združene države Amerike 1 (1), Zvezna republika Nemčija 3 (3).

Pripravljalni odbor je povabil kot goste simpozija več predavateljev, ki naj bi prispevali obzorne preglede. Univerza v Ljubljani pa je kot svoje goste povabila delegaciji iz Tbilisija in iz Minska. Povabilu so se odzvali:

B. V. Hvedelidze (Tbilisi): O Cauchyjevih integralih in o robnih nalogah linearne konjugiranosti.

A. Jeffrey: (Newcastle upon Tyne): Kvazilinearni hiperbolični sistemi z dvema neodvisnima spremenljivkama.

J. Nečas (Praha): Vrednosti nelinearnih operatorjev in uporaba pri robnih nalogah.

D. Mitrović (Zagreb): Distribucije in robne naloge analitičnih funkcij.

A. Pliš (Krakow): Posplošene navadne diferencialne enačbe in teorija vodenja.

N. P. Vekua: (Tbilisi): Uporaba nekaterih izsledkov J. Plemlja v teoriji singularnih integralskih enačb in robnih nalog linearne konjugiranosti.

Na simpoziju so bili prebrani še tile krajši referati:

M. A. Arolska, D. D. Bajnov, M. A. Hekimova (Sofija, Plovdiv): Asimptotična metoda za reševanje večtočkaste robne naloge za sistem nelinearnih integro-diferencialnih enačb z malim parametrom pri najvišjem odvodu.

R. Aronson, I. Kuščer, I. Vidav (New York, Ljubljana): Uporaba matrične Riemannove naloge pri linearni Boltzmannovi enačbi.

D. D. Bajnov, S. D. Miluševa (Sofija): Uporaba metode povprečja pri neki dvotočkasti robni nalogi za Volterrov sistem integro-diferencialnih enačb, nerešenih po odvodu.

M. Čanak (Zemun): Rešitev naloge Riemannovega tipa z uporabo diferencialne enačbe $y = f(y'/y)$.

J. Detki (Subotica): Oscilacijski problemi za nekatere nelinearne diferencialne enačbe.

B. Fleishmann (Deft): Robne naloge za nelinearne diferencialne enačbe z nezveznimi nelinearnostmi.

A. Genov, N. Šopolov (Sofija): Posplošene rešitve druge robne naloge za nekatere nelinearne parcialne diferencialne enačbe.

D. Gronau (Graz): Eksistenca in edinost regularnih rešitev nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb z danimi konvergentnimi mejami potenčnih vrst.

S. Guiasu (Bucureşti): Funkcionalne enačbe v teoriji informacij.

O. Hadžić (Novi Sad): Eksistenca rešitve enačbe $x = G(x, S(x))$ v lokalno konveksnih prostorih.

Dž. Karapandžić (Beograd): Prispevek k uporabi Poissonove metode (parcialne diferencialne enačbe drugega reda).

M. M. Konstantinov, D. D. Bajnov (Sofija): O eksistenci in edinosti periodičnih rešitev nekega razreda diferencialno-funkcionalnih enačb.

Dž. Kurepa (Beograd): Leva faktorielna funkcija v obsegu kompleksnih števil.

V. Marić, M. Skendžić (Novi Sad): Neomejene rešitve Thomas-Fermijeve diferencialne enačbe.

J. Mika (Świerk): Singularna perturbacijska metoda za linearne diferencialne enačbe v Banachovih prostorih.

S. D. Miluševa, D. D. Bajnov (Sofija): Fundacija metode povprečja za integro-diferencialne enačbe Volterrovega tipa na neskončnem intervalu.

K. Orlov (Beograd): Računanje Cauchyjevega integrala diferencialne enačbe reda n iz ustreznih numeričnih podatkov.

S. Pahor (Ljubljana): O neki singularni integralski enačbi iz nuklearne medicine.

P. Pejović: (Novi Sad): Intervalska enačba nelinearne Fredholmove integralske enačbe.

B. Rašajski (Beograd): O Darbouxovih sistemih v involuciji.

L. Reich (Graz): O konvergenci potenčnega razvoja rešitve sistema linearnih diferencialnih enačb v okolici pola matrike koeficientov.

M. Ribarič (Ljubljana): Nekaj neenačb za konveksne funkcije.

G. H. Sarafova, D. D. Bajnov (Plovdiv, Sofija): Rešitev neke robne naloge o lastnih vrednostih z metodo povprečja.

B. Stanković (Novi Sad): O dveh integralskih enačbah.

I. A. Šapkarev (Skopje): O polinomskih rešitvah homogene linearne diferencialne enačbe reda n.

N. Teodorescu (Bucureşti): O obliki singularnosti rešitev parcialne diferencialne enačbe reda $m \geqq 2$.

K. Wiener (Halle): O integralskih enačbah s Hadamardovimi integrali s singularnimi desnimi stranmi.

C. Withalm (Graz): Raziskave o načelu podobnosti.

Posebej naj omenimo otvoritev simpozija 29. maja 1973. Zasedanje je odprl predsednik Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije B. Popov (Skopje), v imenu Balkanske unije matematikov pa ga je pozdravil njen podpredsednik L. Iliev (Sofija). Potem sta govorila podpredsednik Balkanske unije matematikov N. Teodorescu (Bucureşti) o sodelovanju balkanskih matematikov in predsednik pripravljalnega odbora I. Vidav (Ljubljana) o življenju in delu profesorja Josipa Plemlja. Po slavnostnem delu so se zvrstila obzorna predavanja N. P. Vekua (Tbilisi), B. V. Hvedelidzeja (Tbilisi) in D. Mitrovića (Zagreb).

Zvečer prvega dne je bil na blejskem gradu sprejem, ki ga je ob simpoziju priredila podpredsednica IS Slovenije dr. Aleksandra Kornhauser. Na sprejemu je s krajšim sporedom nastopil Slovenski oktet.

Turistični program je obsegal izlet čez Vršič in Trento do Cerknega in bolnice Franje. Gosta iz Gruzije pa sta posebej obiskala rektorja Univerze v Ljubljani dr. ing. M. Grudna.

Vsi prispevki simpozija bodo objavljeni v reviji Mathematica Balkanica, ki jo izdaja Balkanska unija matematikov.

Simpozij je bil lepa počastitev stoletnice velikega slovenskega matematika.

Osnovna pomanjkljivost organizacije pa je bil velik osip med prijavljenci. Vzrok zanj je pozen začetek priprav na simpozij, povezan s precejšnjo neizkušenostjo slovenskih matematikov pri takih akcijah, s slabimi vezmi Ljubljane s svetom.

F. K.

BIBLIOGRAFIJA

SEZNAM ČLANKOV IN DRUGIH PUBLIKACIJ, OBJAVLJENIH V JUGOSLAVIJI, POSVEČENIH PROFESORJU DR. JOSIPU PLEMLJU IN NJEGOVEMU DELU

1. Plemelj Josip. Petdesetletnica vseučiliškega profesorja dr. Josipa Plemlja. *Slovenski narod.* **56** (1923) št. 282, str. 3.
2. Profesor Josip Plemelj. Ob njegovi petdesetletnici. (S portretom M. Šubica) — Karlin Pavel: Iz Plemljevega življenja. — Plemelj kot znanstvenik. — *Jutro.* **4** (1923) št. 289.
3. Dr. Josip Plemelj — foto Bešter — prvi rektor ljubljanske univerze. *Ilustrirani Slovenec.* **53** (1925) št. 288, str. 2.
4. Plemelj Josip — slika. Rektor 1919/1920. *Zgodovina slovenske univerze v Ljubljani do leta* 1929. Str. XIII.
5. Plemelj Josip — bibliografija. *Zgodovina slovenske univerze v Ljubljani do leta* 1929. Str. 522—523.
6. Ljubljanska kronika. September 1919. (Za rednega profesorja so imenovali ... dr. Josip Plemelj...) (S sliko). *Kronika slovenskih mest.* **I** (1934) št. 2, str. 153.
7. Univerzitetni prof. dr. Josip Plemelj (S portretom). *Jutro.* **20** (1938) št. 250, str. 3.
8. [Ramovš Fran]: Josip Plemelj (S sliko in bibliografijo). *Letopis SAZU v Ljubljani.* **1** (1938/1942/1943) Str. 93—94 + 91.
9. Akademiki Akademije znanosti in umetnosti. Josip Plemelj... *Slovenski narod.* **75** (1943) št. 169, str. 4.
10. Akademik Jos[ip] Plemelj 70 letnik. *Jutro.* **23** (1943) št. 279, str. 3.
11. Peterlin A[nton]: Prof. Josip Plemelj — petinsedemdesetletnik. (S sliko) *Proteus.* **11** (1948/49) št. 6, str. 145—146.
12. Ptn. (Peterlin Anton): Biografija in bibliografija prof. dr. Josipa Plemlja. *Slovenski bibliografski leksikon.* **2.** knjiga, 6. zvezek (1949) str. 378—379.
13. V[idav] I[van]: Pomemben jubilej slovenskega znanstvenika. Ob petdesetletnici akademskega dela profesorja dr. Josipa Plemlja. (S sliko) *Naši razgledi.* **1** (1952) št. 4. str. 20.
14. Žabkar Albin: Jubilej akademika dr. J. Plemlja. Ob petdesetletnici akademskega dela. *Ljubljanski dnevnik.* **2** (1952) štev. 96.
15. Peterlin A[nton]: Petdeset let predavateljske aktivnosti prof. dr. Josipa Plemlja. (S sliko) *Slovenski poročevalec.* **13** (1952) št. 97.

16. Akademik dr. J. Plemelj odlikovan. (S sliko) Ob petdesetletnici akademskega dela. *Ljubljanski dnevnik*. **2** (1952) št. 98.
17. Še nekaj visokih obletnic. (S slikami) Življenje in delo... Josipa Plemlja. *Primorski dnevnik*. **8** (1952) št. 107, str. 2103.
18. Ž[abkar] A[lbin]: Profesor Plemelj 80-letnik. (S sliko) *Slovenski poročevalec*. **14** (1953) št. 292.
19. Gabrovšek Ludvik: Akademik dr. Josip Plemelj — osemdesetletnik. (S sliko) *Ljudska pravica-Borba*. **18** (1953) št. 307, str. 5.
20. Križanič France: Enoliste konformne upodobitve. (Ob 40-letnici pomembnega odkritja prof. J. Plemlja v teoriji enolistih konformnih preslikav) *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953) št. 4, str. 142.
21. Profesorju Josipu Plemlju ob osemdesetletnici prisrčno čestitamo in mu posvečamo to številko našega lista. (S fotografijo J[anko] Branc) *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953) št. 5/6, str. 129.
22. Seznam del prof. J. Plemlja. *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953) št. 5/6, str. 130. (Dodatek je objavljen v OMF. 20 (1973) št. 5, str. 160
23. Peterlin A[nton]: Znanstveno delo akademika Josipa Plemlja. Predavanje ob proslavi njegove osemdesetletnice na slavnostni skupščini Akademije dne 11. decembra 1953. *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953) št. 5/6, str. 131.
24. Plemelj Josip: Pravilni sedmerokotnik. Die Siebenteilung des Kreises. Monatshefte 23 (1912) str. 309. Prevedel N[iko] Prijatelj. *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953) št. 5/6, str. 134—135.
25. Plemelj J[osip]: Nerešljivost enačbe $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ v obsegu $K(\sqrt{5})$. Die Unlösbarkeit von $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ im Körper $k\sqrt{5}$. Monatshefte. 23 (1912) str. 306. Prevedel in dodal opombe I[van] Vidav. *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953) št. 5/6, str. 135—138.
26. Vidav I[van]: Obseg $K(\sqrt{5})$. (Pojasnilo k prejšnjemu članku) *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953/54) št. 5/6, str. 138—142.
27. Vidav I[van]: Josip Plemelj, Teorija analitičnih funkcij. *Obzornik za matematiko in fiziko*. **3** (1953) št. 5/6, str. 180—181.
28. Plemelj Josip. Biografija in bibliografija do l. 1956. *Biografije in bibliografije univerzitetnih učiteljev in sodelavcev*. Ljubljana, Univerza v Ljubljani 1957. str. 27—28.
29. K[rižanič] F[rance]: Drugi del trilogije. (Ocena knjige J. Plemelj: Diferencialne in integralne enačbe) *Naši razgledi*. **10** (1961) št. 11 (226), str. 256.
30. Akademik Josip Plemelj. Častni doktor matematičnih in tehniških znanosti. (S sliko) *Delo*. **5** (1963) št. 325, str. 5.
31. [Vidav Ivan]: Učenec o svojem učitelju. Ob devetdesetletnici prof. Plemlja. (S sliko) *Ljubljanski dnevnik*. **13** (1963) št. 332, str. 8.
32. Vidav Ivan: Profesor Josip Plemelj. (S fotografijo in bibliografijo) Ob devetdesetletnici njegovega rojstva. *Matematička biblioteka*. **25** (1963) str. 3—10.
33. Pot velikega učenjaka. Akademik dr. Josip Plemelj devetdesetletnik. (S sliko) *Delo*. **5** (1963) št. 338, str. 5.
34. [Šnuderl Maks]: Zvestoba poklicu in narodu. Iz nagovora rektorja ljubljanske univerze ob podelitvi častnega doktorja Josipu Plemlju. *Delo*. **5** (1963) št. 339, str. 5.
35. Vidav Ivan: Akademik Josip Plemelj. (S sliko: Jakac Božidar, Josip Plemelj — 1952) *Naši razgledi*. **12** (1963) št. 24, str. 469—470.
36. Akademik profesor doktor Josip Plemelj — častni doktor matematičnih in tehniških znanosti. (S fotografijo) (Ob 90. rojstnem dnevu...) *Obzornik za matematiko in fiziko*. **10** (1963) št. 4, str. 145.

37. Križanič France: Ob devetdesetletnici akademika prof. dr. Josipa Plemlja. (S sliko) *Proteus.* **26** (1963/64) št. 4/5, str. 97.
38. Vidav Ivan: Akademik Josip Plemelj. *Delo.* **8** (1967) št. 137, str. 2.
39. Željeznov Dušan: Umrl je veliki matematik. (S sliko) *Ljubljanski dnevnik.* **17** (1967) št. 139, str. 7.
40. Umrl je učenjak dr. Josip Plemelj. (S sliko) *Primorski dnevnik.* (1967) št. 125.
41. Kuhelj Anton: Akademik Josip Plemelj. Beseda ob krsti. *Naši razgledi.* **16** (1967) št. 11, str. 280.
42. S[truna] A[lbert]: Josip Plemelj (:1873—1967:). *Nova proizvodnja.* **18** (1967) št. 4, str. 179.
43. Profesor dr. Josip Plemelj. 11. decembra 1873 — 22. maja 1967. (S sliko) *Obzornik za matematiko in fiziko.* **14** (1967) št. 1, str. 1.
44. Vidav Ivan: Dragi gospod profesor! Iz govora, ki ga je imel ob odprtem grobu. *Obzornik za matematiko in fiziko.* **14** (1967) št. 1, str. 2.
45. Križanič France: Spoštovani tovariš profesor. Govor ob odprtem grobu. *Obzornik za matematiko in fiziko.* **14** (1967) št. 1, str. 3.
46. P[ucelj] I[van]: Josip Plemelj, Problems in the sense of Riemann and Klein. *Obzornik za matematiko in fiziko.* **14** (1967) št. 2, str. 94.
47. Vidav Ivan: Josip Plemelj. *Letopis SAZU.* **18** (1967) str. 73—78.
48. Vidav Ivan: Profesor dr. Josip Plemelj. *Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola.* **18** (1967/68) št. 1, str. 1—4.
49. Mitrovič Dragiša: Plemelj formulas and analytic representations of distributions. *Glasnik matematički.* Ser. III. **3** (1968) str. 231—239.
50. Kurepa Djuro: Plemelj Josip. *Matematički vesnik.* **5** (1968) str. 229—242.
51. Plemelj Josip. Bibliografija in biografija (:1956—1966:). *Bibliografije in biografije univerzitetnih učiteljev in sodelavcev.* Ljubljana, Univerza v Ljubljani 1969. str. 209.
52. Vidav Ivan: O življenju in delu prof. Josipa Plemlja. Govor pri odkritju spomenika. (S fotografijo doprsnega kipa pred glavnim poslopjem Univerze v Ljubljani, delo B. Kalina) *Obzornik za matematiko in fiziko.* **16** (1969) št. 4. str. 146—148.
53. Struna Albert: Dva spomenika — ob petdesetletnici slovenske univerze v Ljubljani. *Nova proizvodnja.* **21** (1970) št. 2/3, str. 47—48.
54. Savić Mile: Poživitev spomina na velike matematike. Ob stoletnici rojstva profesorja Josipa Plemlja. *Ljubljanski dnevnik.* 5. 5. 1973.
55. Ž[agar] P[rimož]: Učenjak je živ. Pred blejskim simpozijem, prvim dejanjem počastitve bližnje stoletnice rojstva znanstvenika Josipa Plemlja. *Delo.* 18. 5. 1973.
56. *Spominska ovojnica s sliko* — 100 letnica rojstva slovenskega matematika Josipa Plemlja. Bled 1973.
57. Vidav Ivan: Josip Plemelj. Ob stoletnici rojstva (v angleščini in ruščini). (S sliko na naslovni strani: B. Jakac, Josip Plemelj — 1949) *Integral, differential and functional equations.* International conference. Bled, 29. 5. — 2. 6. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1973. str. 9—14.
58. Križanič France: Več kot enačbe. Simpozij ob stoletnici Josipa Plemlja. *Naši razgledi.* **22** (1973) št. 11 (514), str. 283.
59. Vavpotič I[van]: *Josip Plemelj* — barvna razglednica. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1973.
60. Jakac [Božidar]: *Josip Plemelj* — stenska slika. Ljubljana, Državna založba Slovenije 1973.
61. Vidav Ivan: *Josip Plemelj. Ob stoletnici rojstva.* Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1973.

V spomin na velikega slovenskega matematika prof. dr. Josipa Plemlja sta z njegovim imenom poimenovani tudi Plemljeva ulica, Ljubljana A-1 in Osnovna šola Josipa Plemlja na Bledu.

SEZNAM DEL PROF. J. PLEMLJA

objavljena od leta 1953 do smrti*

30. [Utrinek] *Obzornik za matematiko in fiziko.* **3** (1953) št. 5/6, str. 178.
31. Rešitev sistema enačb $X^2 + 5Y^2 = U^2$, $X^2 - 5Y^2 = V^2$ v celih številih. *Obzornik za matematiko in fiziko.* **4** (1955—56) št. 1, str. 41—44.
32. *Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba.* Ljubljana, SAZU 1960.
33. *Algebra in teorija števil.* Ljubljana, SAZU 1962.
34. *Problems in the sense of Riemann and Klein.* New York, Interscience publishers 1964.

SEZNAM UMETNIŠKIH DEL — PORTRETOV PROF. PLEMLJA**

1. Šubic M[irko]: [*Josip*] *Plemelj*, (risba-svinčnik, rdeča kreda — 1923).
2. Šubic Mirko: [*Josip Plemelj*] — karikatura, (tuš — 1923).
3. Vavpotič I[van]: [*Josip Plemelj*], (olje — ...).
4. Jakac B[ožidar]: [*Josip*] *Plemelj*, (risba — 1949). (Univerza v Ljubljani, Trg revolucije 11).
5. Jakac B[ožidar]: [*Josip*] *Plemelj*, (risba — 1952).
6. Sever [Anton]: Josip Plemelj — plaketa, 1954.
7. Pečar Borut: *Josip Plemelj* — karikatura, 1967.

Doprsni kipi, delo Borisa Kalina:

8. mavec — 1955, (Boris Kalin).
9. prvi odlitek — 1955, (spominska soba na Bledu).
10. drugi odlitek — 1967, (na pokopališču Žale v Ljubljani).
11. povečana kopija — 1969, (pred centralno zgradbo Univerze v Ljubljani).

Ciril Velkovrh

---

* Seznam del, ki so izšla do leta 1953, so objavljena v OMF 3 (1953—54) št. 5/6, str. 130.

** Dela, pri katerih v oklepaju ni posebej napisano, so shranjena v Matematični knjižnici v Ljubljani, Jadranska c. 19.

BLED,
7. — 8. decembra 1973

Spored:

Petek, 7. 12. 1973
do 11. ure sprejem za udeležence v hotelu Jelovica, Bled
ob 11. uri predavanje o razvoju sodobne matematike
ob 14. uri kosilo
ob 16. uri otvoritev spomenika prof. Josipu Plemlju
ob 19.30 družabni večer

Sobota, 8. 12. 1973
ob 9. uri proslava 25-letnice DMFA in 20-letnice izhajanja OMF
ob 10.30 25. občni zbor

odreži

Podpisani _____ iz _____

ulica _____ zaposlen _____

prijavljam udeležbo na 25. občnem zboru DMFA SRS na Bledu 7. in 8. decembra 1973.

Rezervirajte mi:

— sobo za eno osebo: da — ne
— sobo za dve osebi: da — ne
— ležišče: da — ne
— kosilo 7. 12.; 8. 12.
— večerjo 7. 12.
(cena penziona je od 100 din do 120 din)

Ustrezno obkroži!

Izpolnjeno prijavo pošljite do 25. novembra 1973!

Podpis:

_____

DRUŠTVO MATEMATIKOV,
FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

vabi na

BLED

7. — 8. decembra 1973

100-letnica rojstva slovenskega matematika prof. Josipa Plemlja
25-letnica Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS
20-letnica izhajanja Obzornika za matematiko in fiziko
25. letni občni zbor DMFA SRS

K udeležbi vljudno vabi odbor!

Pripravljalni odbor
občnega zbora DMFA SRS

GIMNAZIJA JESENICE

64270 Jesenice