IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1973
Letnik 20
3-4

20. LETNIK — ŠTEVILKA 3-4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, AVGUST 1973

Uredniški odbor: Franc Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT univerze v Ljubljani; Franc Kvaternik, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, inštitut »J. Štefan«; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad, FNT; Anton Suhadolc, FNT; Ivan Vidav, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 6-krat letno.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

Naročnina: za člane 20 din, za nečlane 30 din, za dijake in študente 10 din, za ustanove in podjetja 40 din, za inozemstvo 51 din (3 $), posamezna številka 8 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, telefon: 61-564/53, tek. račun št. 50101-678-48363.

Člani društva naj nakazujejo na tekoči račun Komisije za tisk 20 din naročnine in 10 din članarine, skupaj 30 din.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

Članki Stran

Elektron (R. Kladnik) ... 65
Zgradba atoma (J. Strnad) ... 70
Magnetne lastnosti atoma (M. Kregar) ... 78
Atomi in svetloba (D. Jamnik) ... 86
Ionizacija (J. Grabec) ... 92
Molekule (R. Blinc) ... 98
Stanje matematičnih znanosti ... 105

Šola

O aktivnem učenju matematike (J. Rakovec) ... 110
Šolski poskusi, ki dajo podatke o atomu (J. Strnad) ... 111

Domače vesti

24. občni zbor DMFA SRS (M. Gojkovič) ... 116
7. seminar iz fizike (J. Pahor) ... 119
Odsek za matematiko na FNT je dobil nove prostore (I. Vidav) ... 120
Prijatelju prof. Francu Toninu v slovo (A. Vadnal) ... 121

Nove knjige ... 122

Prejeli smo v oceno ... 125

CONTENTS

Articles Page

The Electron (R. Kladnik) ... 65
The Structure of the Atom (J. Strnad) ... 70
Magnetic Properties of Atom (M. Kregar) ... 78
Atoms and Light (D. Jamnik) ... 86
Ionization (I. Grabec) ... 92
Molecules (R. Blinc) ... 98
The Mathematical Sciences ... 105

School ... 110

Home News ... 116

New Books ... 122

ATOMI
7. seminar iz fizike
Ljubljana, 6—9. 2. 1973

ELEKTRON

RUDI KLADNIK

UDK 539.124

Podan je kratek pregled zgodovinskega razvoja koncepta elektrona s poudarkom na atomski strukturi električnega naboja. Valovna interpretacija obnašanja elektrona je obravnavana na pedagoški ravni.

THE ELECTRON

A brief historical development of the electron concept is presented with emphasis on the atomicity of the electrical charge. The wave interpretation of the electron behaviour is discussed on an instructional level.

Elektroni so osnovni gradniki snovi in sodelujejo pri raznih spremembah snovi. Fiziki so spoznali elektrone, obravnavajoč različne pojave, kot so npr. elektroliza, električno prevajanje plinov, sevanje svetlobe v magnetnem polju, katodni žarki, fotoelektrični pojav itd. S pomočjo elektronov lahko navidezno različne lastnosti in spremembe snovi pojasnjujemo, izhajajoč iz skupnega koncepta. Dandanes se nam to zdi samo po sebi umevno, v prejšnjih stoletjih pa so fiziki obravnavali zgoraj omenjene pojave povsem ločeno.

B. Franklin je že v začetku raziskovanja električnih pojavov (leta 1750) sklepal, da je električni naboj verjetno atomiziran. Vendar je bila njegova misel, da se električna materija sestoji iz skrajno drobnih delcev, ki z lahkoto prodirajo tudi skozi najgostejšo navadno materijo, le filozofska spekulacija. Eksperimentalne izkušnje tedaj še niso bile tako bogate in raznovrstne, da bi zahtevale vpeljavo električnih delcev.

Faradayevi poskusi s prevajanjem električnega toka skozi raztopino elektrolita (leta 1833) so nakazovali obstoj električnih atomov, ki potujejo skozi raztopino. Pod vplivom električnega toka se iz raztopine izločajo atomi snovi; verjetno se obenem izločajo tudi »električni atomi«. Faraday je sklepal, da atomi snovi nosijo s seboj »električne atome«; vsak »električni atom« je mnogokratnik nekega »osnovnega električnega atoma«.

S pomočjo atomske teorije elektrenine je J. J. Stoney (leta 1874) podrobno pojasnil elektrolizo. Mereč naboj, ki je potreben, da se iz raztopine izloči 1 g vodika, in s pomočjo Avogadrovega števila, ki si ga je sposodil iz kinetične teorije plinov, je določil vrednost osnovnega električnega naboja. Osnovni električni naboj je imenoval *elektron*. Sklepal je, da pozitivni ioni prenašajo pozitivne elektrone, negativni ioni pa negativne elektrone. Vsak atom ima enako število pozitivnih in negativnih elektronov, tako da je navzven električno nevtralen. Tako so se izražali nekateri pomembni fiziki (npr. Thomson in Rutherford) celo do dvajsetih let tega stoletja.

Drugače so mislili o prevajanju električnega toka skozi kovine. Ker električni tok v kovinah ne povzroča opaznih materialnih sprememb, atomarna teorija elektrenine ni prodrla. Faraday in Maxwell sta mislila, da se elektrenina prenaša skozi kovine podobno, kot se širi zvok. Tedaj so že razvili teorijo elektromagnetnega polja in teorijo o etru kot elastičnem mediju, ki prenaša elektromagnetne motnje. Pod vplivom teh teorij so obravnavali elektrenino v kovini kot stanje nekakšne napetosti v kovini.

Okrog leta 1880 je H. A. Lorentz, obravnavajoč disperzijo svetlobe v snovi, predpostavil, da se v snovi nahajajo električni delci, ki nihajoč oddajajo elektromagnetne valove ter tako vplivajo na prehod svetlobe skozi snov. Na ta način je sicer lahko kvalitativno pojasnil disperzijo svetlobe v snovi, ni pa mogel iz meritev disperzije določiti naboja hipotetičnih

delcev, saj je bilo vpletenih preveč neznanih faktorjev. Kasneje (leta 1896) je P. Zeeman uporabil Lorentzovo predpostavko in razložil razcepitev črt, ki jih natrij seva v močnem magnetnem polju. S klasično teorijo o vplivu magnetnega polja na hipotetične elektrine delce sta Lorentz in Zeeman kvantitativno pojasnila Zeemanov pojav in iz meritev določila e/m teh delcev. Ugotovila sta, da so ti delci električno negativni in da je njihov e/m okrog 2000 večji kot dotedaj največje razmerje e/m, ki so ga poznali iz elektrolize. Lorentz je prvi povezal ime elektron s hipotetičnim električno negativnim delcem.

Medtem so se eksperimentalna dejstva v zvezi z razelektrenjem v plinih množila. Vendar kljub obilici eksperimentalnih dejstev niso vedeli, kako se električni tok prevaja skozi plin. Po odkritju rentgenskih žarkov (leta 1895) in radioaktivnih žarkov (leta 1896) so ugotovili, da je mogoče s temi žarki izprazniti nabit elektroskop skozi zrak. Izkazalo se je, da žarki v plinih ustvarjajo pozitivne in negativne ione. Ker se to dogaja tudi v čistih, enoatomnih plinih, sledi, da rentgenski in radioaktivni žarki razbijajo atome plinov na električno pozitivne in negativne delce. Torej so električni delci sestavni deli atomov plinov. Posebno odločilni so bili pojavi v razredčenih plinih. Katodne žarke so odkrili že leta 1879 (W. Crooks). Vedeli so, da katodni žarki izhajajo iz kovinske elektrode, se razširjajo premočrtno skozi vakuum in na drugi strani cevi povzročajo fluorescenco stekla. Katodni žarki spreminjajo električni naboj ploščice, na katero zadenejo, ter ploščico odrinejo. Ploščica, ki absorbira katodne žarke, se segreje. Potemtakem se katodni žarki obnašajo kot materialni delci z električnim nabojem.

J. J. Thomson je (leta 1897) z odklonom katodnih žarkov v električnem in magnetnem polju nedvoumno dokazal, da so to električno negativni delci, katerih e/m je okrog $2 \cdot 10^{11}$ As/kg. Ker je dobljeno razmerje e/m neodvisno od vrste kovinske elektrode, ki seva katodne žarke, je sklepal, da različne kovine vsebujejo enake negativne delce, ki jih je imenoval korpuskuli.

Vzporedno so raziskovali fotoelektrični pojav, ki ga je (leta 1887) povsem slučajno odkril H. Hertz. Svetloba izbija negativni naboj iz kovinske elektrode. Da negativnega naboja ne odnašajo iz kovine negativni kovinski ioni, ampak izredno lahki delci, je eksperimentalno dokazal Lenard šele leta 1900. Mereč e/m teh delcev, so dobili približno enako vrednost kot za katodne žarke. Sklepali so, da so v obeh primerih vpleteni enaki delci, ki so identični s hipotetičnimi delci Lorentza.

Ob prelomu tega stoletja so tako iz različnih smeri zaključili, da se v snovi nahajajo lahki, električno negativni delci, ki so jih začeli imenovati *elektroni*. Iz dejstva, da je produkt naboja iona in Avogadrovega števila ($N_A e$) iz meritev pretakanja pozitivnih vodikovih ionov enako velik kot iz meritev pretakanja negativnih plinskih ionov, lahko sklepamo, da je naboj elektrona enako velik kot naboj vodikovega iona:

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{As}$$

Sledi, da je masa elektrona okrog 2000 krat manjša od mase najlažjega (vodikovega) atoma:

$$m = 0{,}9 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

Osnovni naboj (e) so pravzaprav neposredno merili le z elektrolizo, mereč pretečeni naboj in množino izločene snovi, pri čemer so uporabili Avogadrovo število, ki ga npr. določimo z uklonom rentgenskih žarkov na kristalih. Drugo neposredno meritev osnovnega naboja je izvedel R. A. Millikan (leta 1909): V prostor med vodoravni plošči kondenzatorja je razpršil oljne kapljice in z mikroskopom opazoval njihovo gibanje v navpični smeri. Oljne kapljice se po obsevanju zraka z rentgenskimi ali radioaktivnimi žarki naelektrijo. Opazujoč več tisoč kapljic, so Millikan in njegovi sodelavci merili naboj kapljic. Vsakokrat so dobili, da je naboj kapljice mnogokratnik osnovnega naboja, ki je enak osnovnemu naboju iz elektrolize. Millikan je sklepal, da je naboj kapljice posledica viška ali primanj-

kljaja večjega ali manjšega števila elektronov. Dobljeni osnovni naboj je potemtakem naboj elektrona.

Opazovanje elektronov

Najpomembnejši vir elektronov so kovine, ki vsebujejo razmeroma veliko na pol prostih elektronov. Elektrone zvlečemo iz kovine bodisi s segrevanjem (termična emisija), bodisi z obsevanjem (fotoelektrični pojav, sekundarna emisija) ali z učinkovanjem močnega električnega polja (hladna emisija). Naravni vir prostih elektronov so jedrske reakcije, ki jih kozmični žarki prožijo v zgornjih slojih zemeljskega ozračja. Tudi β^- aktivne snovi so v nekaterih primerih koristen vir elektronov.

Elektroni so najmanjši delci snovi. Kot posamezniki so prešibki, da bi jih lahko neposredno opazovali. Kakršenkoli način opazovanja elektrona vpliva na sam elektron in spreminja njegovo stanje. Kar lahko zaznamo, je rezultat sodelovanja med elektronom in opazovalnim postopkom.

Elektrone v glavnem opazujemo na dva načina:

1. Elektron, prehajajoč skozi snov, ionizira atome in pušča za seboj ionske pare. Nastali ioni učinkujejo kot kondenzacijska jedra (v megličnì celici) ali kot jedra za nastanek parnih mehurčkov (v mehurčni kmori); prožijo kemične reakcije (v fotografski emulziji) ali nadaljno ionizacijo atomov (v močnem električnem polju, npr. v geigerski cevi). Na ta način lahko opazujemo sled elektrona, četudi samega elektrona ne vidimo.
2. Elektron, prehajajoč skozi snov, vzbuja atome snovi. Vzbujeni atomi oddajo del prejete energije v obliki svetlobe. Oddana svetloba je sicer prešibka, da bi jo lahko neposredno opazovali, vendar če več elektronov v enakih okoliščinah (elektronski curek!) povzroči enake efekte, ki se superponirajo, lahko celokupno oddano svetlobo opazimo. Elektronski curek vidimo kot svetlečo sled (v razredčenem plinu) ali kot svetlečo liso na fluorescenčnem zaslonu (npr. na televizijskem zaslonu).

Elektron potroši precej kinetične energije, da izdaja svojo pot. Torej lahko opazujemo le elektrone precejšnjih energij. Energijsko šibki elektroni so nevidni.

Valovne značilnosti elektronov

Gibanje elektronskega curka skozi vakuum ali skozi zelo razredčeno snov lahko obravnavamo na klasični način. Iz poteka elektronskega curka ugotovimo električno in magnetno silo, s katerima električno in magnetno polje učinkujeta na curek elektronov. Če predpostavimo, da se vsak elektron v curku enako obnaša, lahko sklepamo na potek posameznih elektronov. Pravimo, da na vsak elektron učinkuje električna sila $e\boldsymbol{E}$ ali magnetna sila $e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, da se elektron giblje po določenem tiru itd. V resnici mislimo curek velikega števila elektronov. Na ta način lahko potek elektronov skozi elektronski mikroskop računamo s klasičnimi metodami dinamike.

Drugače je, če elektronski curek prodira skozi snov. Elektronski curek npr. pošljemo skozi kristalno snov. Vsak elektron iz curka kot posameznik sodeluje z elektroni snovi. Kako elektroni v posameznih primerih medsebojno sodelujejo, ne vemo, niti ne moremo zvedeti. Kar lahko ugotovimo, je povprečni rezultat sodelovanja velikega števila elektronov, povprečje, ki ga npr. kažejo curki prepuščenih elektronov. Prepuščene elektrone prestrežemo s fluorescenčnim zaslonom. Opazimo simetrično razporejene lise, podobno kot pri prehodu svetlobe ali drugih elektromagnetnih valovanj skozi snov. Curki prepuščenih elektronov kažejo na uklonski pojav, ki je značilen za valovanje. Čeprav ne poznamo posameznih dogodkov medelektronskega sodelovanja pri prehodu elektronskega curka skozi kristalno snov, je povprečni rezultat njihovega medsebojnega učinkovanja očitno takšen, da ga lahko opišemo s pomočjo valovnega koncepta. Lahko rečemo, da se curek elektronov

pri prehodu skozi snov obnaša kot nekakšno valovanje. Specifičnosti sodelovanja med elektroni, ki so od primera do primera drugačne, se v povprečju izgubijo. Iz povprečja se izluščijo le splošne karakteristike, ki jih lahko popišemo s parametri valovanja, npr. z valovno dolžino. Ni potrebno vedeti, kakšno je tovalovanje, kaj torej valuje. Pomembno je le, da lahko s konceptom valovanja popišemo povprečno obnašanje množice elektronov, da lahko ugotovimo tiste karakteristike, ki so neodvisne od specifičnih dogodkov in ki jih lahko preverjamo z eksperimentom.

Nekaj podobnega je pri molekulah v plinih in tekočinah. Plinske molekule trkajo druga ob drugo. Kaj se pri posameznih trkih dogaja, ne vemo. Vendar se specifičnosti trkov v povprečju zabrišejo, tako da lahko povprečno obnašanje molekul množice popisujemo, npr. s plinsko enačbo. Molekule v gibajoči se tekočini med seboj živahno in neurejeno sodelujejo. Njihovo povprečno obnašanje je npr. predstavljeno z enačbami hidrodinamike. Lahko rečemo, da se tekočinske molekule v povprečju obnašajo hidrodinamsko.

Molekule tekočin ali plinov nas kot posameznice večinoma ne zanimajo. Zadovoljujemo se s popisom povprečnega obnašanja množice molekul. Pri elektronih je drugače. Elektron je zaradi naboja in drugih lastnosti pomemben osnovni delec snovi. Ni dovolj, da poznamo povprečno obnašanje množice elektronov v določenih okoliščinah. Želimo tudi vedeti, kaj se lahko s posameznim elektronom dogaja, v kakšnih stanjih se elektron lahko nahaja. Valovne značilnosti množice elektronov povežemo s posameznim elektronom, predpostavljajoč, da se vsak elektron v povprečju enako obnaša. Z valovanjem, ki ga pripišemo elektronu, potemtakem lahko popisujemo povprečno obnašanje elektrona v določenih okoliščinah.

Elektron kot materialni delec ima energijo W in gibalno količino p. Ti količini določimo v klasični mehaniki tako, da vpeljemo maso m in krajevno koordinato elektrona (npr. x) ter izračunamo: $p = m\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ in $W = p^2/2m + V(x)$, pri čemer je $V(x)$ potencialna energija elektrona na mestu x. Ker krajevne koordinate elektrona ni mogoče meriti (ne da bi vplivali na elektron in spreminjali njegovo stanje), si v valovni mehaniki pomagamo drugače. Energijo in gibalno količino elektrona predstavimo z energijo in gibalno količino potujočega valovanja, ki nadomešča elektron. Smer širjenja valovanja kaže smer gibanja elektrona, frekvenca (ν) valovanja je merilo za energijo (W) elektrona, valovna dolžina (λ) pa merilo za gibalno količino (p) elektrona. Zvezo med ustreznimi količinami izpeljemo po analogiji z elektromagnetnim valovanjem in fotoni, kjer so razmere podobne.

Poznamo valovno dolžino (λ) in frekvenco (ν) različnih elektromagnetnih valovanj. Energija W in gibalna količina p ustreznih fotonov sta določeni z enačbama:

$$W = h\nu \quad \text{ter} \quad p = h/\lambda$$

pri čemer je h Planckova konstanta: $6{,}6 \cdot 10^{-34}$Js.

V našem primeru bi radi energijo in gibalno količino elektrona povezali s frekvenco in valovno dolžino ustreznega valovanja. Predpostavljamo podobno zvezo kot pri fotonih:

$$\nu = W/h \quad \text{ter} \quad \lambda = h/p$$

Fazna hitrost valovanja, ki je po definiciji produkt frekvence in valovne dolžine ($c_\mathrm{f} = \lambda\nu$), je v našem primeru enaka količniku med energijo in gibalno količino elektrona:

$$c_\mathrm{f} = W/p$$

Fazna hitrost fotonskih (svetlobnih, elektromagnetnih) valov je kar enaka hitrosti fotonov: $c_\mathrm{f} = c$ (ker je $W = pc$), medtem ko fazna hitrost elektronskih valov nima fizikalnega pomena.

Elektron, ki potuje s stalno energijo W in s stalno gibalno količno p (npr. vzdolž osi x), lahko predstavimo z ravnim potujočim valovanjem:

$$\Psi(x, t) = \text{konst. exp } [\mathrm{i} \cdot 2\pi(x/\lambda - \nu t)] = \text{konst. exp } [\mathrm{i}(px - Wt)/\hbar],$$

pri čemer je $\hbar = h/2\pi$.

Valovna funkcija $\Psi(x, t)$ je matematična količina, s katero izražamo valovanje elektronov. Lahko rečemo, da valovna funkcija nadomešča krajevno koordinato elektrona, vsaj v tem smislu, da lahko z njeno pomočjo ugotovimo energijo in gibalno količino elektrona. Če po vsej sili želimo pripisati valovni funkciji fizikalni pomen, lahko sklenemo naslednje: Kvadrat valovne funkcije, $|\Psi(x, t)|^2$, predstavlja verjetnost, da se elektron nahaja na mestu x.

Časovni in krajevni parcialni odvod valovne funkcije $\Psi(x, t)$ dasta energijo in gibalno količino elektrona:

$$W = (\mathrm{i}\hbar/\Psi)\partial\Psi/\partial t \quad \text{ter} \quad p = -(\mathrm{i}\hbar/\Psi)\partial\Psi/\partial x$$

S pomočjo valovne funkcije lahko preko zgornjih enačb določimo energijo in gibalno količino elektrona, ne da bi bilo treba vpletati krajevno koordinato elektrona, ki itak ni dostopna eksperimentu.

Večkrat obravnavamo stacionarno stanje elektrona, to je stanje, v katerem je energija elektrona stalna: $W = \text{konst.}$ Za ta primer velja: $(\mathrm{i}\hbar/\Psi)\partial\Psi/\partial t = W = \text{konst.}$ ali po integraciji:

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) \exp [-\mathrm{i}(W/\hbar)t]$$

Časovni del valovne funkcije za stacionarno stanje elektrona ima obliko eksponentnega faktorja z imaginarnim eksponentom. Funkcija $\Psi(x)$ predstavlja krajevni del valovne funkcije za elektron, ki je v stacionarnem stanju z energijo W. Takšna oblika valovne funkcije $\Psi(x, t)$ je značilna za stoječe valovanje. Torej je stoječe valovanje valovna slika stacionarnega stanja elektrona.

Recimo, da se elektron nahaja v določenem potencialnem polju! Potencialna energija elektrona je npr. odvisna le od krajevne koordinate: $V(x)$. Vsota kinetične in potencialne energije elektrona v stacionarnem stanju je stalna, četudi ne vemo, kaj elektron v stacionarnem stanju počenja:

$$p^2/2m + V(x) = W = \text{konst.}$$

Valovni zapis te enačbe ima obliko:

$$-(\hbar^2/2m\Psi)\mathrm{d}^2\Psi/\mathrm{d}x^2 + V(x) = W \quad \text{ali}$$

$$\mathrm{d}^2\Psi/\mathrm{d}x^2 + (2m/\hbar^2)[W - V(x)]\Psi(x) = 0$$

Dobljena diferencialna enačba za valovno funkcijo $\Psi(\mathrm{x})$ se imenuje *Schrödingerjeva valovna enačba* za stacionarno stanje elektrona. Rešitve valovne enačbe za določeno potencialno polje in za določene robne pogoje dajo vsa možna stacionarna stanja elektronov v potencialnem polju. Na ta način lahko poiščemo stacionarna stanja elektronov v različnih potencialnih poljih, npr. v coulombskem polju znotraj atoma, v molekuli itd. Žal se matematični problem zaplete, brž ko potencialno polje $V(x)$ kolikor toliko predstavlja realne razmere.

Teoretiki spreminjajo $V(x)$, računajo valovno funkcijo in s pomočjo valovne funkcije določujejo različne parametre, ki jih nato primerjajo z eksperimentalnimi podatki. Ujemanje z eksperimentom je kriterij za pravilnost teorije, to je za pravilno izbiro potencialnega polja $V(x)$. Toda eksperimenti niso enostavni, potrebne so zapletene korekture. Eksperimentalci spreminjajo korekture in iščejo ujemanje z napovedmi teorije.

LITERATURA

[1] L. N. Cooper, An Introduction to the Meaning and Structure of Physics, Harper & Row, New York, 1969.

[2] R. A. Millikan, Elektroni I. in II. (prevod), Prosveta, Beograd 1948.

[3] M. Born, Atomic Phyiscs, Blackie, London, 1963.

[4] F. K. Richtmyer, E. H. Kennard, T. Lauritsen, Introduction to Modern Physics, McGraw-Hill, New York, 1955.

ZGRADBA ATOMA*

JANEZ STRNAD

UDK 539.18

Članek podaja osnove zgradbe atomov v okviru kvantne mehanike. Vodikov atom je mogoče obdelati dosledno. Njegovo stanje določajo štiri kvantna števila. Pregled nad vsemi mogočimi stanji vodikovega atoma izkoristimo za opis atomov z več elektroni v približku krogelno simetričnega poprečnega polja. Z izključitvenim načelom pojasnimo zgradbo atomov in odvisnost nekaterih lastnosti elementov od vrstnega števila.

THE STRUCTURE OF THE ATOM

In this article the fundamentals of atomic structure in the scope of quantum mechanics are given. The hydrogen atom can be treated exactly. Its state is specified by four quantum numbers. The survey of all possible states of the hydrogen atom is helpful for the description of atoms with many electrons in the central symmetric effective field approximation. Using the exclusion principle the structure of atoms and the dependence of some properties of elements on the atomic number can be explained.

Poskusi kažejo, da je premer atomov nekaj ångstrømov, da so atomi zgrajeni iz zelo drobnega jedra in elektronov in da imajo diskretna energijska stanja.[1] Jedro, v katerem je zbrana skoraj vsa atomova masa, ima Z pozitivnih osnovnih nabojev, če je Z vrstno število elementa. V nevtralnem atomu se giblje Z elektronov v električnem polju jedra. Lastnosti atomov želimo pojasniti z njihovo zgradbo. V ta namen se lotimo teorije atomov! Vodikov atom obdelamo dokaj dosledno, atome z več elektroni pa le s približkom.

*

V vodikovem atomu se giblje okoli jedra en sam elektron. Pri natančnosti, s katero se zadovoljimo, smemo vzeti, da težko jedro miruje. Energijo vodikovega atoma sestavljata tedaj kinetična energija elektrona $\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} p^2/m_e$ in potencialna energija elektrona v električnem polju jedra $-e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r$:

$$W = \tfrac{1}{2} p^2/m_e - e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r. \qquad (1)$$

Energijo nič ima atom, če elektron ni vezan na jedro in mirujeta oba delca. Pozitivna energija ustreza ionskemu paru, če imata jedro in elektron še kinetično energijo.

Primerjajmo elektron z osončjem! Elektron-planet kroži okoli jedra-sonca. Centripetalna sila je Coulombova sila: $m_e v^2/r = e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Ta enačba poveže kinetično energijo elektrona z absolutno vrednostjo potencialne energije in da z (1) energijo atoma $W =$

* Prvi del predavanja je objavljen posebej v Obzorniku za matematiko in fiziko.[1]

$= -e_0^2/8\pi\varepsilon_0 r$. Za razdaljo elektrona od jedra ni omejitve, tako da ima lahko energija atoma po zapisani enačbi katerokoli negativno vrednost. To je v nasprotju s poskusi, ki kažejo, da se energija atoma ne more spreminjati zvezno in da ima atom diskretna energijska stanja. S klasično fiziko atomu že ne moremo priti do živega.

Za opis atoma moramo uporabiti *kvantno mehaniko*. Kvantna mehanika se sicer zgleduje po klasični, toda v njej priredimo dinamičnim spremenljivkam *operatorje*. Kinetični energiji $p^2/2m_e$ priredimo operator $[(\hbar/\mathrm{i})\nabla]^2/2m_e = -(\hbar^2/2m_e)\nabla^2$, če je ∇^2 *Laplaceov operator*. *Planckova konstanta* $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js ali konstanta $\hbar = h/2\pi = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Js je značilna za enačbe kvantne mehanike. Potencialni energiji priredimo zelo preprost operator $-e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r$.

Zanimamo se za popolnoma sam sebi prepuščen atom vodika. V takem, *stacionarnem primeru* je energija atoma *konstanta gibanja:*

$$W' = -(\hbar^2/2m_e)\nabla^2 - e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r. \tag{2}$$

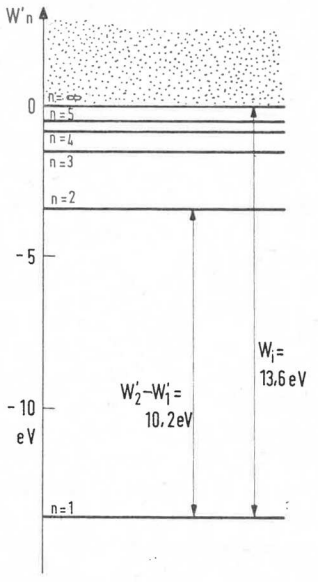
Obdelajmo problem lastnih vrednosti energijskega operatorja (2)! Lastne funkcije energijskega operatorja $\Psi(r)$ imenujemo *lastne valovne funkcije*, ustrezne energije W' pa so *lastne energije atoma.* Dobimo *Schrödingerjevo enačbo*

$$-(\hbar^2/2m_e)\nabla^2\Psi - (e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r)\Psi = W'\Psi. \tag{3}$$

To enačbo je treba rešiti pri pogoju $\Psi(r \to \infty) = 0$ in pri pogoju, da je valovna funkcija povsod končna. Le pri teh pogojih opiše lastna valovna funkcija atom, v katerem je elektron vezan na jedro.

Lastne valovne funkcije vodikovega atoma v krogelnih koordinatah (r je razdalja od izhodišča, to je od jedra, ϑ je polarni kot in φ azimut) in ustrezne lastne energije[3] so:

$$\Psi_{n=1,\ l=0,\ m_l=0} = \pi^{-1/2}\,\alpha^{3/2}\,e^{-ar} \qquad W_1' = -m_e e_0^4/32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 = -13{,}6\ \mathrm{eV}$$



Sl. 1. Spektrum energijskih stanj vodikovega atoma. Vsaka od vodoravnih črt ustreza diskretnemu energijskemu stanju. Stanje z glavnim kvantnim številom $n = 1$ in z najmanjšo lastno energijo W_1' je *osnovno stanje*. Stanja z večjo lastno energijo so *vzbujena stanja*

$$\Psi_{n=2,\ l=0,\ m_l=0} = (32\pi)^{-1/2}\, a^{3/2}(2 - ar)e^{-ar/2} \qquad W_2' = W_1'/4$$

$$\Psi_{n=2,\ l=1,\ m_l=0} = (32\pi)^{-1/2} a^{5/2}\, re^{-ar/2} \cos\vartheta \qquad W_2' = W_1'/4$$

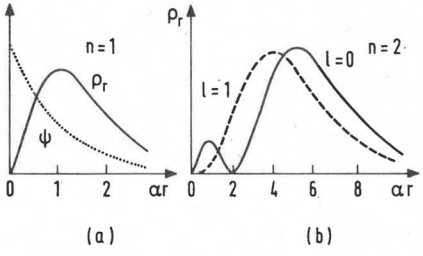
$$\Psi_{n=2,\ l=1,\ m_l=\pm1} = (64\pi)^{-1/2}\, a^{5/2}\, re^{-ar/2} \sin\vartheta e^{\pm i\varphi} \qquad W_2' = W_1'/4$$

. . .

$r_1 = 1/\alpha = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_e e_0^2 = 0{,}53$ Å je radij prvega »diskretnega tira« v *Bohrovem modelu atoma.** Lastno valovno funkcijo ali *lastno stanje vodikovega atoma* določajo trije parametri. To so *glavno kvantno število* $n = 1, 2, 3 \ldots$, *tirno kvantno število* $l = 0, 1, \ldots n - 1$ in *tirno magnetno kvantno število* $m_l = 0, \pm1, \ldots \pm l$. Lastno energijo določa samo glavno kvantno število (sl. 1)

$$W_n' = -m_e e_0^4/32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2 = W_1'/n^2. \tag{4}$$

Stanji n, l, m_l in n, l', m_l' imata enako lastno energijo. Tirno kvantno število določa velikost vrtilne količine pri gibanju elektrona okoli jedra: $[l(l+1)]^{1/2}\hbar$. Tirno magnetno kvantno število določa komponento te vrtilne količine $m_l\hbar$ v odlikovani smeri (osi z), denimo v smeri zunanjega magnetnega polja. Za $l = 0$ (in $m_l = 0$) valovne funkcije niso odvisne od kotov ϑ in φ: so krogelno simetrične.



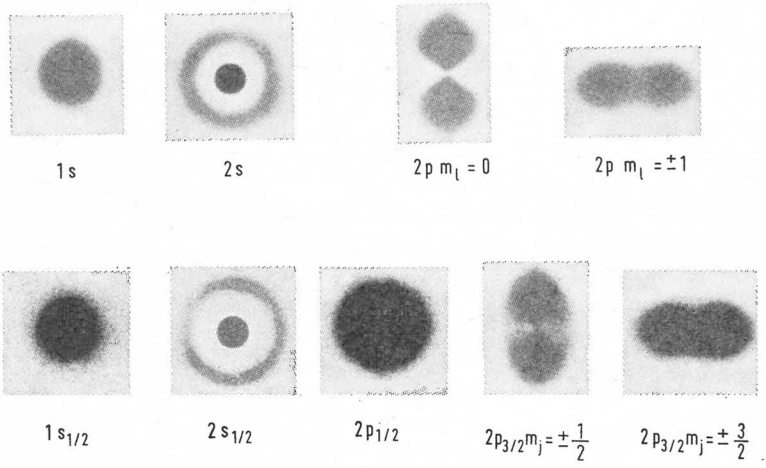
Sl. 2. Valovna funkcija (pikčasto) in radialna verjetnostna gostota (sklenjeno) v osnovnem stanju (a) in radialna verjetnostna gostota za vzbujena stanja z $n = 2$ (b) v vodikovem atomu. Radialna verjetnostna gostota ni odvisna od tirnega magnetnega kvantnega števila m_l

Valovna funkcija vsebuje vse potrebne podatke o lastnem stanju atoma. Z merjenjem pa je ne moremo določiti neposredno. Določimo lahko verjetnostno gostoto $\Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r})$. Valovno funkcijo $\Psi(\boldsymbol{r})$ normiramo z zahtevo $\int\Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3r$, pri tem integriramo po vsem prostoru. $\Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3r$ je verjetnost, da naletimo na elektron v prostorninskem elementu d^3r okoli točke, do katere vodi od jedra krajevni vektor $\boldsymbol{r}$. Verjetnostna gostota je v vseh stanjih vodikovega atoma valjasto simetrična okoli osi z. (Azimut nastopa kvečjemu v izrazu $e^{im_l\varphi}$, kar da 1 po množenju s konjugirano kompleksno vrednostjo). Pogosto navedemo radialno verjetnostno gostoto $\rho_r(r)$. Pri tem je $\rho_r(r)\,\mathrm{d}r$ verjetnost, da je elektron na intervalu razdalje med $r - \frac{1}{2}\mathrm{d}r$ in $r + \frac{1}{2}\mathrm{d}r$ od jedra. Za stanja z $l \neq 0$ je radialna verjetnostna gostota $\int 2\pi r^2\Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r})\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$, za stanja z $l = 0$ pa je kar $4\pi r^2\Psi^*(r)\Psi(r)$.

Za verjetnostno gostoto v vodikovem atomu ni eksperimentalnih podatkov, s katerimi bi preverili teoretične rezultate. Pač pa lahko preverimo enačbo (4) za lastne energije. Po tej enačbi ima prvo vzbujeno stanje za $W_2' - W_1' = -3{,}4$ eV $- (-13{,}6$ eV$) = 10{,}2$ eV višjo energijo od osnovnega. To se sklada z merjenji pri neprožnih trkih elektronov z vodikovimi atomi.[1] Po enačbi (4) je treba dovesti atomu vodika v osnovnem stanju vsaj energijo $W_\infty' - W_1' = 0 - (-13{,}6$ eV$) = 13{,}6$ eV, da odtrgamo elektron od jedra. Zares je iz-

* N. Bohr je pred vpeljavo kvantne mehanike pojasnil diskretni energijski spektrum vodikovega atoma s samovoljno predpostavko, da smejo elektroni krožiti okoli jedra samo po krogih z izbranimi radiji. Zahtevo $r_n = n\hbar/m_e v$ je preprosto dodal klasičnim enačbam.

merjena ionizacijska energija vodikovega atoma 13,6 eV. Najzanesljiveje preverimo enačbo (4) z merjenjem valovne dolžine svetlobe, ki jo seva razredčeni vodik.*



Sl. 3. Ponazoritev vodikovega atoma v osnovnem stanju in v vzbujenih stanjih z $n = 2$ brez upoštevanja spina[5] (zgoraj) in z upoštevanjem spina[6] (spodaj). Podobe je dobil H. E. White s fotografiranjem vrtečih se modelov. Večja počrnitev približno ustreza večji verjetnostni gostoti $\Psi^*(r)\Psi(r)$. Pri krogelno simetričnih stanjih ($l = 0$), gre za verjetnostno gostoto v ravnini xz, ki vsebuje odlikovano smer (os z), pri drugih stanjih ($l \neq 0$) pa za projekcijo verjetnostne gostote na to ravnino

Radi bi dobili pregled nad vsemi stanji vodikovega atoma. Pri tem ne moremo mimo *spina*. Natančna merjenja valovne dolžine svetlobe, ki jo sevajo atomi, in razcepa atomskih curkov v nehomogenem magnetnem polju (Stern-Gerlachov poskus) pokažejo, da moramo pripisati elektronu spin $\frac{1}{2}$. (Pravzaprav bi morali reči, da je *spinsko kvantno število* elektrona $s = \frac{1}{2}$). Spinu približno ustreza lastna vrtilna količina, ki jo ima v klasični mehaniki delec zaradi vrtenja okoli težiščne osi. Velikost elektronovega spina je $[s(s+1)]^{1/2}\hbar = [\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)]^{1/2}\hbar$, njegova komponenta v odlikovani smeri pa je $m_s\hbar$. *Spinsko magnetno kvantno število* m_s je $\frac{1}{2}$ ali $-\frac{1}{2}$. V prvem primeru pravimo, da je spin vzporeden z odlikovano smerjo, v drugem pa, da je nasprotno vzporeden z odlikovano smerjo.

V knjigovodstvu stanj vodikovega atoma navedemo po vrsti glavno kvantno število n, tirno kvantno število l, tirno magnetno kvantno število m_l in spinsko magnetno kvantno število m_s. Vrednost tirnega kvantnega števila zaznamujemo s spektroskopsko oznako s, če je $l = 0$, s p, če je $l = 1$, z d, če je $l = 2$, z f, če je $l = 3$, in dalje po abecedi. Stanja z enakim glavnim kvantnim številom imajo enako lastno energijo. Lastno energijo W_1' imata dve stanji:

$$1\,s\,0\,\tfrac{1}{2}, \quad 1\,s\,0\,-\tfrac{1}{2}.$$

Lastno energijo W_2' ima osem stanj, dve s tirnim kvantnim številom 0 in šest s tirnim kvantnim številom 1:

$$2\,s\,0\,\tfrac{1}{2}, \quad 2\,s\,0\,-\tfrac{1}{2},$$
$$2\,p\,1\,\tfrac{1}{2},\ 2\,p\,1\,-\tfrac{1}{2};\ 2\,p\,0\,\tfrac{1}{2},\ 2\,p\,0\,-\tfrac{1}{2};\ 2\,p\,-1\,\tfrac{1}{2},\ 2\,p\,-1\,-\tfrac{1}{2}.$$

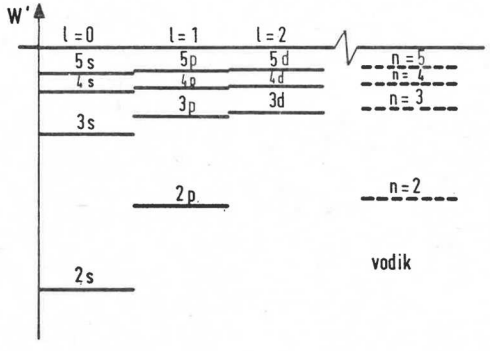
* Gledano klasično se giblje elektron v vodikovem atomu pospešeno in seva zato elektromagnetno valovanje. Atom tako izgublja energijo, dokler elektron ne pade v jedro.[4] Klasično atom sploh ne more biti v stacionarnem stanju. V kvantni mehaniki pa atom ne seva, dokler se njegova energija ujema z eno izmed lastnih energij W_n'. Seva le pri prehodu iz lastnega stanja n v lastno stanje n'. Razliko energij W_n', — W_n' odnese foton z valovno dolžino $\lambda = hc/(W_n', - W_n')$.

Lastno energijo W_3' ima osemnajst stanj, dve s tirnim kvantnim številom 0, šest s tirnim kvantnim številom 1 in deset s tirnim kvantnim številom 2 ... Izbranemu glavnemu kvantnemu številu n, se pravi izbrani lastni energiji W_n', ustreza $2n^2$ stanj.

Namesto četverice kvantnih števil nlm_lm_s je uporabna za označevanje stanj vodikovega atoma tudi četverica $nljm_j$. Pri tem je *j kvantno število celotne vrtilne količine* in *m_j magnetno kvantno število celotne vrtilne količine*. Celotno vrtilno količino dobimo, ko sestavimo tirno vrtilno količino in spin. Njena velikost je $[j(j+1)]^{1/2}\hbar$, njena komponenta v odlikovani smeri $m_j\hbar$. Za magnetno kvantno število celotne vrtilne količine velja $m_j = m_l + m_s$. Za kvantno število celotne vrtilne količine pa sta dve možnosti: $j = l + \frac{1}{2}$ in $j = l - \frac{1}{2}$, razen pri $l = 0$, ko je ena sama možnost $j = \frac{1}{2}$. Izbranemu kvantnemu številu j pripada $2j + 1$ različnih možnih vrednosti m_j, ki gredo od $-j$, $-j + 1$, ... do j.

*

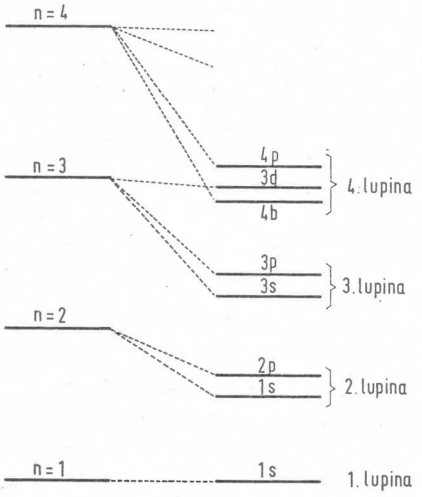
Pri atomih z več elektroni so razmere znatno bolj zapletene. Energijo takega atoma sestavljajo v glavnem skupna kinetična energija vseh Z elektronov, skupna potencialna energija vseh elektronov v električnem polju jedra in skupna potencialna energija vseh elektronov v električnem polju drugih elektronov. Zadnji prispevek povzroči velike težave. Zato se zatečemo k *približku krogelno simetričnega poprečnega* (*efektivnega*) *polja*, v katerem obravnavamo vsakega od Z elektronov ločeno. Mislimo si, da se giblje izbrani Z-ti elektron v električnem polju jedra in oblaka naboja vseh preostalih $Z - 1$ elektronov. Oblak naboja vzamemo za krogelno simetričen. To ni daleč od resnice, saj vsiljuje težko jedro s svojim poljem atomu krogelno simetrijo. V tem primeru je Z-ti elektron popolnoma določen z isto četverico kvantnih števil kot pri vodikovem atomu. Da ne bi prišlo do dvoumnosti, govorimo o *energijskih nivojih* posameznega elektrona v atomu. *Energijsko stanje atoma* pa je določeno, če navedemo razvrstitev vseh Z elektronov po energijskih nivojih.



Sl. 4. Spektrum energijskih nivojev elektrona v atomu z več elektroni. Okvirno odvisnost lastnih energij od tirnega kvantnega števila ugotovimo v približku krogelno simetričnega poprečnega polja. Risba kaže z merjenjem valovne dolžine vidne izsevane svetlobe ugotovljene elektronske nivoje v litijevem atomu. Na desni je za primerjavo dodan vodikov spektrum

Kakšen je vrstni red elektronskih nivojev v atomu? Opazujmo Z-ti elektron v električnem polju, h kateremu prispevata jedro in krogelno simetrični oblak negativnega naboja! Jakost polja, ki jo občuti elektron v razdalji r od jedra, izvira samo od naboja v notranjosti krogle z radijem r. V bližini jedra občuti opazovani elektron skoraj samo polje jedra z nabojem Ze_0. (Če bi se gibal okoli jedra zares samo en elektron, bi bile lastne energije $-m_eZ^2e_0^4/32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2 = Z^2W_n'$. To sledi iz enačbe (4) za vodikov atom, če nadomestimo v njej e_0^2 z Ze_0^2). Čim dalje od jedra je opazovani elektron, tem več naboja iz negativnega oblaka mu

zastira naboj jedra. V zelo veliki razdalji od jedra zastira naboj jedra Ze_0 naboj $-(Z-1)e_0$ vseh preostalih $Z-1$ elektronov, tako da občuti elektron podobno polje kot elektron v vodikovem atomu. Opazovani elektron, ki je v poprečju zelo daleč od jedra, ima tedaj približno tolikšne lastne energije kot vodikov atom (W_n'). Čim bliže jedru je v poprečju opazovani elektron, tem manjše postajajo lastne energije (in tem bliže so Z^2W_n'). Primerjajmo elektrone v atomu v nivojih z enakim glavnim kvantnim številom n! Pogled na diagram za vodik (sl. 2b) pokaže, da je radialna verjetnostna gostota v neposredni bližini



Sl. 5. Razvrstitev podlupin v težjem atomu z več elektroni. Medtem ko imajo v vodikovem atomu podlupine z enakim glavnim kvantnim številom enako lastno energijo, se v atomu z več elektroni razcepijo podlupine z različnim tirnim kvantnim številom in se uredijo v lupine. Risba je le shematična: njeni deli niso narisani v pravem merilu

jedra tem manjša, čim večje je tirno kvantno število l. Pri izbranem glavnem kvantnem številu je tem manj verjetno, da je elektron v neposredni bližini jedra, čim večje je tirno kvantno število. Pri največjem tirnem kvantnem številu ($n-1$) je lastna energija blizu ustrezne vrednosti za vodik.

Lastna energija elektrona v atomu z več elektroni je odvisna tudi od tirnega kvantnega števila. V atomu z več elektroni imajo enako lastno energijo nivoji z enakim glavnim kvantnim številom n in z enakim tirnim kvantnim številom l. Vsi nivoji z izbranim glavnim kvantnim številom in izbranim tirnim kvantnim številom sestavljajo *podlupino*. V podlupini 1s sta dva nivoja:

$$1\,s\,0\,\tfrac{1}{2}, \quad 1\,s\,0\,-\tfrac{1}{2}.$$

V podlupini 2s sta prav tako dva nivoja:

$$2\,s\,0\,\tfrac{1}{2}, \quad 2\,s\,0\,-\tfrac{1}{2}.$$

V podlupini 2p je šest nivojev:

$$2\,p\,1\,\tfrac{1}{2},\ 2\,p\,1\,-\tfrac{1}{2};\ 2\,p\,0\,\tfrac{1}{2},\ 2\,p\,0\,-\tfrac{1}{2};\ 2\,p\,-1\,\tfrac{1}{2};\ 2\,p\,-1\,-\tfrac{1}{2}.$$

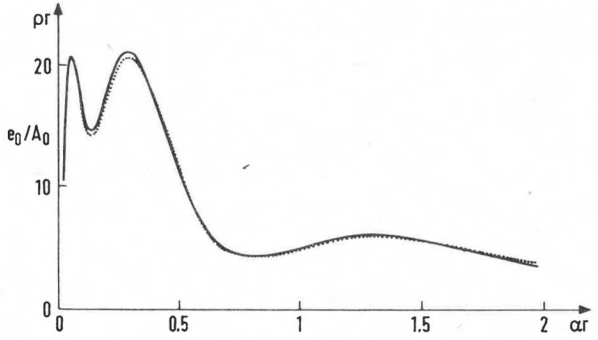
V podlupini 3s sta dva nivoja:

$$3\,s\,0\,\tfrac{1}{2}, \quad 3\,s\,0\,-\tfrac{1}{2}.$$

V podlupini 3p je šest nivojev:

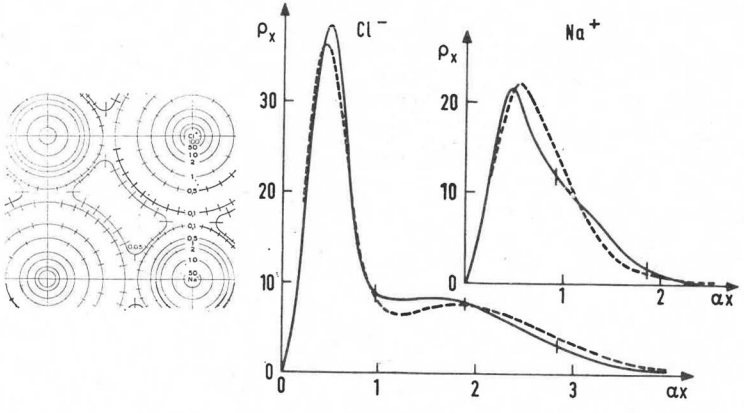
$$3\,p\,1\,\tfrac{1}{2},\ 3\,p\,1\,-\tfrac{1}{2};\ 3\,p\,0\,\tfrac{1}{2},\ 3\,p\,0\,-\tfrac{1}{2};\ 3\,p\,-1\,\tfrac{1}{2},\ 3\,p\,-1\,-\tfrac{1}{2}.$$

Podrobnejši računi in merjenja pokažejo, da je med podlupinama 2s in 2p, med podlupinama 3s in 3p ... majhen energijski razmik, medtem ko je med podlupinama 1s in 2s, med podlupinama 2p in 3s ... precej večji energijski razmik. Podlupine so razvrščene v skupine, ki jim pravimo *lupine*. Prvo lupino sestavlja samo podlupina 1s. Drugo lupino sestavljata podlupini 2s in 2p. Tretjo lupino sestavljata podlupini 3s in 3p. Podlupina 3d ima precej večjo energijo od podlupin 3s in 3p in sodi v naslednjo višjo lupino.



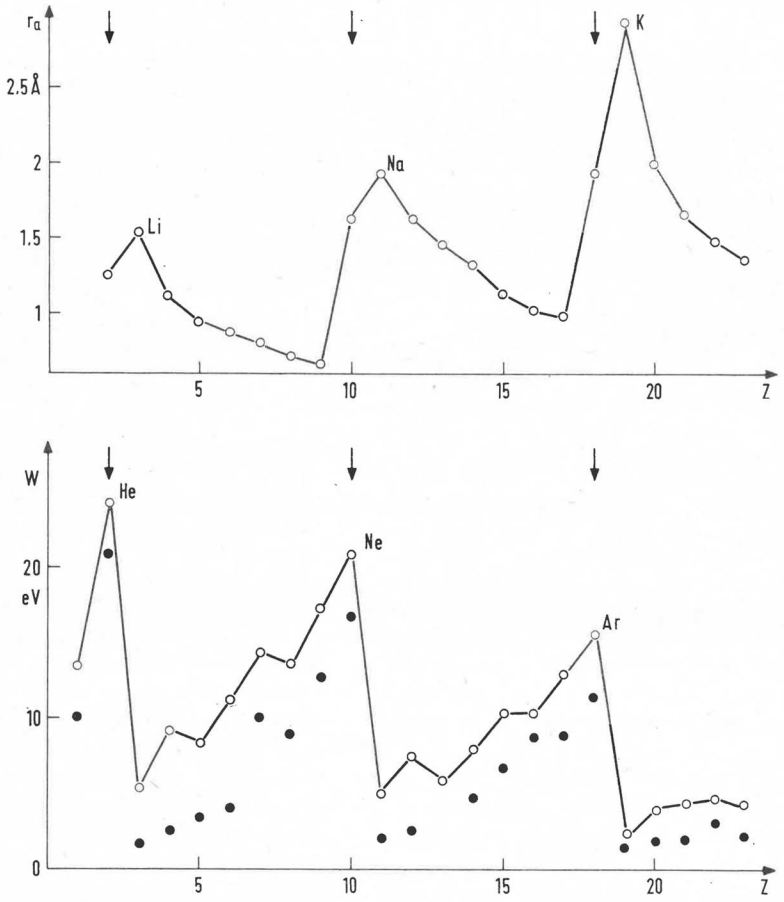
Sl. 6. Izračunana skupna radialna verjetnostna gostota elektronov v atomu argona. Račun gradi na približku krogelno simetričnega poprečnega polja.[2] Sklenjeno krivuljo dobijo, če upoštevajo, da so elektroni v atomu med seboj nerazločljivi, pikčasto pa, če postopajo, kot da bi jih bilo mogoče med seboj razločevati.[7]

Kako so razvrščeni elektroni na nivoje v atomih z več elektroni? V osnovnem stanju atoma niso vsi elektroni v nivoju z glavnim kvantnim številom 1. Če bi bilo tako, bi se morale lastnosti elementov zvezno spreminjati z naraščajočim vrstnim številom Z. Toda lastnosti elementov se spreminjajo skokovito in skoraj periodično. To pojasnimo s *Paulijevim izključitvenim načelom.* Po tem načelu se morata dva elektrona v atomu razločevati vsaj po enem izmed četverice kvantnih števil. V vsakem nivoju sme biti kvečjemu en elektron.



Sl. 7. Na osnovi rentgenskih interferenc izmerjena skupna verjetnostna gostota elektronov v kristalu kuhinjske soli. Na levi so črte enake verjetnostne gostote v ravnini jeder klora in natrija. Na desni je skupna »radialna« verjetnostna gostota elektronov (v enotah $1/Å^3$) v ionih Na^+ in Cl^- po zveznici njunih jeder. Črtkano sta vrisani teoretični napovedi. Razmere v kristalu upoštevamo tako, da pomnožimo skupno radialno verjetnostno gostoto za prosti ion s posebnim faktorjem. Prečne črtice označujejo mersko negotovost.[8]

Zdaj neprisiljeno pojasnimo periodno tabelo elementov! Atom vodika ima en elektron v prvi lupini, atom helija dva elektrona v prvi lupini. S tem je izpolnjena prva lupina. Atomi litija, berilija, bora, ogljika, dušika, kisika, fluora in neona imajo izpolnjeno prvo lupino in po 1, 2; 3, 4, 5, 6, 7 in 8 elektronov v drugi lupini. Z osmimi elektroni je izpolnjena druga lupina. Atomi natrija, magnezija; aluminija, silicija, fosfora, žvepla, klora in argona imajo izpolnjeni prvi dve lupini in po 1, 2; 3, 4, 5, 6, 7 in 8 elektronov v tretji lupini. Izpolnjene lupine imajo atomi žlahtnih plinov. V periodni tabeli je pred žlahtnim plinom halogeni element in za njim alkalijski element. Atomom prvih manjka en elektron do izpolnjene lupine, atomi drugih imajo zunaj izpolnjene lupine en elektron. Na tej osnovi je mogoče okvirno pojasniti spreminjanje snovnih konstant za elemente v odvisnosti od vrstnega števila.[2]



Sl. 8. Skoraj periodični potek ionizacijske energije (o) in energijske razlike med prvim vzbujenim in osnovnim stanjem (•)[9] (spodaj) in atomskega radija[10] (zgoraj) v odvisnosti od vrstnega števila. Upoštevani so samo atomi, v katerih se polnijo z elektroni prve tri lupine. Radiji atomov so določeni po razmiku med jedri v molekulah in kristalih, v katere veže atome kovalentna kemijska vez.[10] Navpične puščice zaznamujejo atome z izpolnjenimi lupinami

LITERATURA

[1] Šolski poskusi, ki dajo podatke o atomih, Obz. mat. fiz. **20**, 111 (1973).
[2] Zgradba atoma, predavanje na seminarju »Atom«, Ljubljana (Odsek za fiziko), 1973 (skripta).
[3] Vodikov atom, Obz. mat. fiz. **12**, 88 (1965).
[4] Vodikov atom klasično, Obz. mat. fiz. **14**, 81 (1967)
[5] H. E. White: Pictorial Representatitions of the Electron Cloud for Hydrogen-like Atoms, Phys. Rev. **37**, 1416 (1931).
[6] H. E. White: Pictorial Representations of the Dirac Electron Cloud for Hydrogen-like Atoms, Phys. Rev. **38**, 513 (1931).
[7] D. R. Hartree, W. Hartree: Self-Consistent Field with Exchange for Potassium and Argon, Proc. Roy. Soc. A **166**, 450 (1937).
[8] G. Schoknecht: Röntgen-Kristallstrukturanalyse mit Faltungsintegralen II, Z. Naturforschg. **12a**, 983 (1957).
[9] D'Ans-Lax: Taschenbuch für Chemiker und Physiker I, Berlin (Springer), 1967, str. 1—81.
[10] Landolt-Börnstein: Zahlenwerte und Funktionen, Atom und Molekularphysik, 4. Teil, Kristalle, str. 533.

MAGNETNE LASTNOSTI ATOMA

MITJA KREGAR

UDK 539.183.4

Z modelom tokovne zanke skušamo reproducirati vedenje enostavnega atoma v magnetnem polju. S pomočjo analize Stern Gerlachovega poskusa vpeljemo še spin elektrona. Opisana je tudi Rabijeva metoda za natančno merjenje atomskih magnetnih momentov.

MAGNETIC PROPERTIES OF ATOMS

Current loop model for the description of the behaviour of simple atoms in magnetic field is discussed. The extention of the model is made with the introduction of spin via the analysis of the Stern-Gerlach experiment. Rabi's method for the exact measurement of atomic magnetic moments is also described.

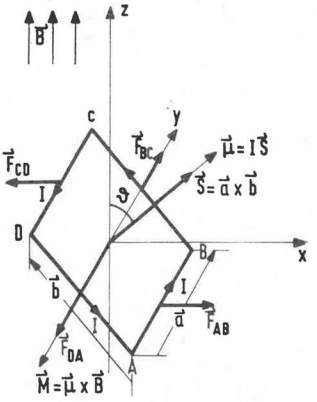
S študijem vedenja atomov v magnetnem polju dobimo mnogo dragocenih informacij. Z njimi preverjamo naše razumevanje atoma. Pravimo, da atom razumemo, če znamo njegovo vedenje v celoti opisati. V ta namen izdelamo model atoma, s katerim želimo reproducirati vedenje atoma.

Analizirajmo najprej lastnosti enoelektronskega atoma, na primer atoma vodika. Vzemimo, da kroži elektron v električnem polju zanemarljivo majhnega in zelo težkega jedra, tako kot kroži Zemlja v gravitacijskem polju Sonca.

Elektron ima negativni naboj $q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$ in maso $m = 0{,}9 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$. Radij krožnice in pa frekvenco kroženja določimo z Bohrovim semiklasičnim modelom. Radij krožnice je $a_B = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$, frekvenca pa je $\nu = 7 \cdot 10 \cdot {}^{15}\mathrm{s}^{-1}$. Gibanje elektrona ustreza toku $I = e\nu$ po krožni zanki s ploščino $S = \pi a_B^2$. Smer toka je zaradi negativnega naboja elektrona nasprotna smeri kroženja elektrona.

Magnetne lastnosti atoma morajo biti posledica električnih tokov v atomu. Zanima nas, ali smo z zgornjo enostavno predstavo o zgradbi enolektronskega atoma sposobni reproducirati vedenje atoma v magnetnem polju. Poiščimo najprej, kaj pričakujemo, in nato rezultate preverimo z eksperimenti!

Opišimo zato vedenje tokovne zanke v homogenem magnetnem polju! Zaradi enostavnosti računa naj bo zanka pravokotna in naj ima stranici a in b! Homogeno magnetno polje pa naj ima smer osi z (sl. 1)! Sila na stranico $\overline{AB}$ je $F_{AB} = I \cdot a \cdot B$ in ima na sliki smer pozitivne osi x. To silo lahko zapišemo tudi vektorsko $\boldsymbol{F}_{AB} = I \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{B}$, če označimo z $\boldsymbol{a}$ vektor od A do B. Nasprotno enaka sila deluje na stranico $\overline{CD}$. Podobno sta nasprotno enaki sili na stranici $\overline{BC}$ in $\overline{DA}$, ki sta $F_{BC} = I \cdot b \cdot B \cdot \cos\vartheta = F_{DA}$, ali zapisano vektorsko $\boldsymbol{F}_{BC} = I \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{F}_{DA}$. Tu je $\boldsymbol{b}$ vektor od točke B do točke C. Vsota vseh sil na takšno zanko v homogenem magnetnem polju je torej enaka nič.



Sl. 1. Tokovna zanka v magnetnem polju

Navor teh sil pa v splošnem ni enak nič. Sili $\boldsymbol{F}_{AB}$ in $\boldsymbol{F}_{CD}$ povzročata skupno navor $M = 2 \cdot (1/2) \cdot b \cdot I \cdot a \cdot B \cdot \sin\vartheta = I \cdot a \cdot b \cdot B \cdot \sin\vartheta = I \cdot S \cdot B \cdot \sin\vartheta$, ali vektorsko zapisano $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{b}/2) \times \boldsymbol{F}_{AB} - (\boldsymbol{b}/2) \times \boldsymbol{F}_{CD} = I \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{B} = I \cdot \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B}$. Tu smo označili ploščino zanke z $S = a \cdot b$ in vektor površine zanke z $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Ta navor skuša zavrteti zanko okrog osi y (sl. 1). Zapišemo ga lahko tudi takole:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B},$$

če pišemo krajše

$$\boldsymbol{\mu} = I \cdot \boldsymbol{S}$$

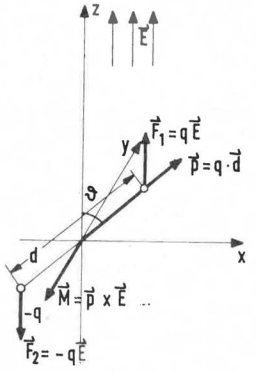
Ta produkt imenujemo (dipolni) magnetni moment zanke.

Energijo te zanke v homogenem magnetnem polju B izračunamo tako, da si zamislimo zanko najprej v prostoru, ki je brez polja, nato pa povečujemo gostoto magnetnega polja do končne vrednosti B. Sila magnetnega polja na tokovodnik, ali bolje na nosilce toka, to je elektrone, je vedno pravokotna na smer njihovega gibanja (saj je $\boldsymbol{F} = q \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$!), zato ta sila ne opravlja dela. Toda spreminjajoče se magnetno polje inducira v zanki napetost $U_i = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = -\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t$. Delo te inducirane napetosti pa je $A = \int U_i \cdot I \cdot \mathrm{d}t = -I \cdot \boldsymbol{S} \cdot \int_0^{\boldsymbol{B}} \mathrm{d}\boldsymbol{B} = -I \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} = -\mu \cdot \boldsymbol{B}$. Tolikšna je torej sprememba energije zanke zaradi prisotnosti magnetnega polja. To spremembo energije označimo z W, torej

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$$

To delo inducirane napetosti je enako delu navora polja, če le-to zavrti tokovno zanko iz lege, ko je os vrtenja pravokotna na smer polja v lego, ko je os od smeri polja nagnjena za kot ϑ.

Podobni formuli za navor in za energijo veljata za električni dipol v homogenem električnem polju $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ in $W = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$. Tu je $\boldsymbol{p} = q \cdot \boldsymbol{d}$ električni dipolni moment dipola (sl. 2). Potemtakem ima tokovna zanka v magnetnem polju podobno vlogo, kot jo ima električni dipol v električnem polju. Tokovna zanka v resnici predstavlja magnetni dipol. Magnetno polje daleč stran od zanke je v resnici dipolno polje. To ugotovimo, če na osnovi Biot-Savartovega zakona izračunamo gostoto magnetnega polja, ki ga tokovna zanka ustvarja daleč stran od zanke. Ker za dolgotrajen račun ni prostora, privzemimo podobnost zgornjih enačb z enačbami za električni dipol kot potrditev dipolne narave električne zanke!

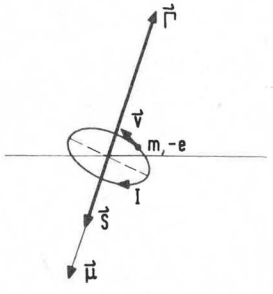


Sl. 2. Električni dipol v električnem polju

Če magnetno polje ni homogeno, vsota sil na zanko v splošnem ni enaka nič. Naj bo $B_z = B_z(x)$! Potem lahko zapišemo $F_{AB} = I \cdot a \cdot B_z\left(x = \frac{b}{2} \cdot \cos\vartheta\right) = I \cdot a \cdot \left[B_z(0) + \frac{dB}{dx} z \cdot \frac{b}{2} \cdot \text{ciso}\,\vartheta\right]$ in podobno $F_{CD} = -I \cdot a \cdot \left[B_z(0) - \frac{dB}{dx} z \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos\vartheta\right]$. Vsota teh dveh sil je celotna sila na zanko v smeri osi x:

$$F_x = I \cdot a \cdot b \cdot \frac{dB}{dx} z \cdot \cos\vartheta = \mu \cdot \frac{dB}{dx} z \cdot \cos\vartheta = \mu_z \cdot \frac{dB}{dx} z$$

Tokovno zanko, katere os je vzporedna s smerjo magnetnega polja, vleče v gostejše magnetno polje, v nasprotnem primeru pa ven. Tu smo z μ_z označili projekcijo magnetnega momenta v smeri magnetnega polja.



Sl. 3. Ilustracija vrtilne količine Γ in magnetnega momenta atoma μ, ki ga povzroča krožeči elektron

Uporabimo te rezultate za opis vedenja enoelektronskega (vodikovega) atoma v magnetnem polju! Magnetni moment atoma je kar (sl. 3)

$$\mu = I \cdot S = (e \cdot \nu) \cdot \pi \cdot a_B^2 \cdot \frac{S}{|S|}$$

Smer vektorja **S** definiramo s smerjo toka. Numerična vrednost tega magnetnega momenta je

$$\mu = 0{,}93 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{Am}^2 = \mu_B$$

To je enota za magnetni moment atoma in jo imenujemo Bohrov magneton.

Elektron ima zaradi kroženja vrtilno količino (sl. 3)

$$\Gamma = a_B \times m \cdot v = -m \cdot \omega \cdot a_B^2 \cdot \frac{S}{|S|} = -2 \cdot \pi \cdot m \cdot \nu \cdot a_B^2 \cdot \frac{S}{|S|}$$

Vektor vrtilne količine Γ je torej usmerjen v nasprotni smeri kot pa vektor magnetnega momenta μ. Oba sta sorazmerna, zato lahko zapišemo

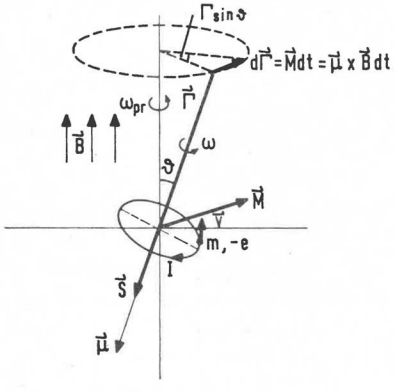
$$\mu = -\frac{e}{2m} \cdot \Gamma$$

Na ta krožeči elektron deluje v homogenem magnetnem polju navor M, ki skuša zasukati os vrtenja v smer magnetnega polja. Vendar se to zaradi lastne vrtilne količine atoma ne zgodi. Pač pa se začne os zanke vrteti okrog smeri magnetnega polja, tako kot precesira nagnjena vrtavka v težnostnem polju.

Precesijsko kotno hitrost hitro določimo. Zapišimo navor takole: $|M| = |\mu \times B| = (e/2m)\,|(\Gamma \times B)| = (e/2m) \cdot (\Gamma \cdot B \cdot \sin\vartheta)$! Zaradi tega navora se vrtilna količina v času dt spremeni za $d\Gamma = M \cdot dt$. Ta sprememba je pravokotna na vektor vrtilne količine Γ, zato zanka elektrona precesira. Precesijska kotna hitrost pa je (sl. 4).

$$\omega_{pr} = d\varphi/dt = (d\Gamma/dt)\,(\Gamma \sin\delta)^{-1} = eB/2m.$$

Izračunamo, da je precesijska frekvenca elektrona v magnetnem polju z gostoto 1 T: $\nu_{pr} = \omega_{pr}/(2\pi) = 1{,}5 \times 10^{10}\ \mathrm{sek}^{-1}$. Ta precesijska frekvenca je očitno znatno manjša od frekvence kroženja elektrona okrog jedra.

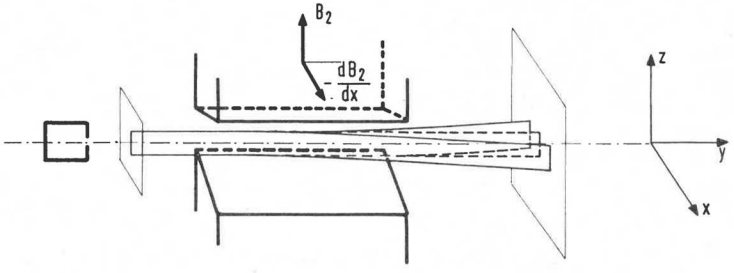


Sl. 4. V zunanjem magnetnem polju os vrtenja elektrona precesira okrog smeri magnetnega polja s precesijsko obhodno frekvenco $w_{pr} = \mu B/\Gamma$

Prisotnost magnetnega polja vpliva tudi na energijo sistema atomsko jedro — elektron. Celotna energija se spremeni za $W = -\mu \cdot \boldsymbol{B}$. Ta sprememba energije pa je pri $B = 1\,\mathrm{T}$ in $\cos\vartheta = 1$ komaj $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ eV. To je zelo malo v primerjavi z energijo atoma zunaj magnetnega polja $U = -13{,}6$ eV (disociacijska energija za vodikov atom). Kako pa zunanje magnetno polje vpliva na atom? Energija atoma sestoji iz potencialne energije elektrona v Coulombskem polju jedra in pa iz rotacijske energije elektrona. Magnetno polje vpliva le na spremembo rotacijske energije. Ni težko ugotoviti, da je relativna sprememba energije

$$\Delta U/U = W/U = 2\Delta\Gamma/\Gamma = 2(\omega_{pr}/\omega)\cos\vartheta.$$

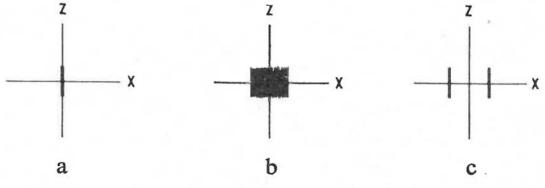
Atom v magnetnem polju lahko zavzame vse energije, ki leže v intervalu med $U + \mu B$ in $U - \mu B$.



Sl. 5. Shematska slika Stern-Gerlachovega poskusa

Stern Gerlachov eksperiment.

Najbolj neposredno merimo vpliv magnetnega polja na atome tako, da curek atomov iz pečice (sl. 5) spustimo skozi vertikalno režo na zaslon. Slika reže na zaslonu je vertikalna črta, če na atome v curku ne vplivamo. Če pa gre atomski curek vzdolž magneta (na sl. 5 v smeri osi y), v katerem je nehomogeno magnetno polje dB_z/dx, pa je sila na atome $F_x = \mu \cdot (dB_z/dx) \cdot \cos\vartheta$. Ta sila je v smeri pozitivne osi x, če je vektor μ vzporeden z $\boldsymbol{B}$, in v nasprotni smeri, če je μ nasprotno orientiran.



Sl. 6. a) Slika reže, ki jo curek atomov vodika pusti na zaslonu, pri Stern-Gerlachovem poskusu, če je $dB_z/dx = 0$, b) Pričakovana slika reže pri $dB_z/dx \neq 0$. c) Eksperimentalno dobljena slika

Zaradi vseh klasično dovoljenih orientacij pričakujemo, da se curek atomov (ki naj imajo vsi enako hitrost) pri prehodu skozi takšno magnetno polje razmaže v smeri osi x, tako kot kaže sl. 6b. V resnici pa dobimo s curkom vodikovih atomov dve razločno razmaknjeni črti, tako kot je na sl. 6c. Tega eksperimentalnega rezultata pa ni več mogoče pojasniti v okviru klasične fizike. Rezultate lahko sicer interpretiramo tako, da so v magnetnem polju magnetni momenti teh atomov očitno orientirani le na dva načina: vzdolž polja ali pa v nasprotni smeri. Zakaj je tako, lahko pojasnimo le s kvantno mehaniko.

Po kvantni mehaniki lahko zavzema vrtilna količina le diskretne vrednosti

$$\Gamma_l = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

(Kvantizacijo vrtilne količine smo že implicitno že privzeli — vendar ne popolnoma pravilno — ko smo izbrali radij elektronskega tira a_B). Kvantizirane so tudi vrednosti za projekcijo vrtilne količine vzdolž magnetnega polja:

$$\Gamma_{l,z} = m\hbar$$

kjer je m celo število med $-l \leqq m \leqq l$ in ga imenujemo magnetno kvantno število. Seveda sta potem kvantizirana tudi magnetni moment in njegova projekcija vzdolž magnetnega polja

$$\mu_l = (e/2m)\Gamma = (e\hbar/2m)\sqrt{l(l+1)} = \mu_B\sqrt{l(l+1)}$$

$$\mu_{l,z} = m\mu_B$$

pa tudi sila na atom v magnetnem polju:

$$F_x = m\mu_B\,(\mathrm{d}B_z/\mathrm{d}x)$$

S pomočjo kvantne mehanike pa tudi ugotovimo, da je vrtilna količina vodikovega atoma v osnovnem stanju enaka nič: $\Gamma_l = 0$. To pomeni, da je $l = 0$ in zato tudi $m = 0$ ter $F_x = 0$. V zgornjem opisanem poskusu bi morali dobiti s curkom vodikovih atomov le nepremaknjeno črto. Če pa bi privzeli, da je $l = 1$ (če bi bili vodikovi atomi v vzbujenem stanju, ali pa če bi približno veljal Bohrov model), pa bi pričakovali tri črte: poleg skrajnih dveh za $m = \pm 1$ še srednjo za $m = 0$ Pojava le dveh črt, ki jih dobimo s curkom vodikovih atomov, tako ne moremo razložiti.

Iz zagate se rešimo, če privzamemo, da ima elektron spin, to je vrtilno količino zaradi vrtenja okoli lastne osi. Spin lahko vpeljemo korektno s pomočjo relativistične kvantne mehanike, manj korektno pa fenomenološko. Ubrali bomo drugo, lažjo pot. Kot bomo videli, lahko pojasnimo zgornje eksperimentalne rezultate, pa še mnogo drugih lastnosti atoma le, če vpeljemo spin. Zato se ga splača vpeljati, četudi bi ne imeli drugega, globljega opravičila. Spin elektrona in pa njegovo projekcijo v magnetnem polju formalno pišemo podobno kot prej:

$$\Gamma_s = \sqrt{s(s+1)}$$

$$\Gamma_{s,z} = m_s\,\hbar$$

Temu pripada magnetni moment, oziroma projekcija

$$\mu_s = g_s \cdot \mu_B \cdot \sqrt{s(s+1)}$$

$$\mu_{s,z} = g_s \cdot \mu_B \cdot m_s$$

Brezdimenzijska konstanta g_s bi bila 1, ko bi elektron spet bil enostavna tokovna zanka. Ker pa je električni tok znotraj elektrona komplicirano porazdeljen, je $g_s \neq 1$.

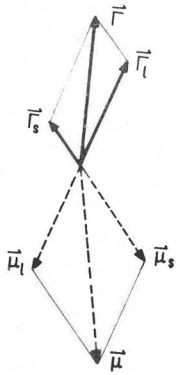
Razcepitev curka vodikovih atomov na dva žarka lahko razložimo le, če elektronu v atomu vodika pripišemo $l = 0$ in $s = 1/2$. Potem namreč sledi $m_s = \pm 1/2$, sila v nehomogenem magnetnem polju pa je $F_x = \pm(1/2)g_s\mu_B\,(\mathrm{d}B_z/\mathrm{d}x)$. Iz velikosti razcepa pa potem ugotovimo, da je $g_s = 2$.

Kaj pa, če elektron ni na prvem tiru? Naj bo npr. elektron v stanju, ki ga popišemo s kvantnimi števili $n = 2$, $l = 1$! Magnetni moment je tedaj vsota prispevkov magnetnih momentov zaradi obhodne in spinske vrtilne količine

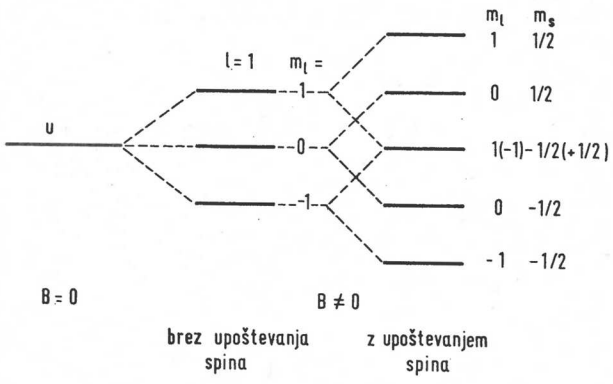
$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_s = -(e/2m)\,(\boldsymbol{\Gamma}_l + g_s\boldsymbol{\Gamma}_s)$$

Magnetni moment v splošnem ni več vzporeden s celotno vrtilno količino (sl. 7). Komponenta magnetnega momenta v smeri magnetnega polja pa je

$$\mu_z = -(m + g_s m_s)\,\mu_B$$



Sl. 7. Sklopitev obhodne in spinske vrtilne količine elektrona ter sklopitev pripadajočih magnetnih momentov



Sl. 8. Razcepitev energijskega nivoja enoelektronskega atoma z $l = 1$ in $s = 1/2$ v močnem zunanjem magnetnem polju, a) brez upoštevanja spina, b) z upoštevanjem spina

Razmere so tako preproste le, če je atom v močnem zunanjem magnetnem polju. Pravimo, da je magnetno polje močno, če prevlada nad medsebojnim vplivom magnetnih momentov μ_l in μ_s. Tedaj lahko zapišemo energijo atoma v magnetnem polju takole:

$$U_m = U - \boldsymbol{\mu B} = U + (m + g_s m_s)\,\mu_B B.$$

Magnetno polje razcepi energijsko stanje z energijo U v več magnetnih stanj, ki so določena z vrednostjo $(m + g_s m_s)$. Primer za $l = 1$ je na sl. 8. Energijska stanja so enakomerno razmaknjena za $\mu_B B$.

Če medsebojni vpliv magnetnih momentov μ_l in μ_s prevlada nad vplivom zunanjega magnetnega polja, se ti magnetni momenti najprej orientirajo drug glede na drugega in šele nato v zunanjem magnetnem polju. Tedaj popišemo stanje atoma z novim kvantnim številom $j = l + s$, ki definira tako velikost kot projekcijo vrtilne količine v zunanjem magnetnem polju:

$$\Gamma_j = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar$$

$$\Gamma_{j,z} = m_j \hbar$$

Seveda velja potem za magnetni moment

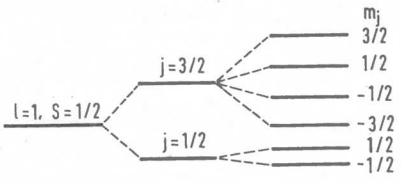
$$\mu_j = g_j \mu_B \sqrt{j(j+1)}$$

$$\mu_{j,z} = g_j m_j \mu_B$$

Za brezdimenzijsko konstanto g_j dobimo brez večjih težav tale izraz:

$$g_j = [3j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)]/2j(j+1)$$

Za enoelektronski atom z $l = 1$ in $s = 1/2$ je lahko $j = 3/2$ (in $g_j = 4/3$), ali pa $j = 1/2$ (in $g_j = 2/3$). Energija atoma je za obe stanji različna že zunaj magnetnega polja, magnetno polje pa razcepi nivoje še naprej (sl. 9). Stanja so enakomerno razmaknjena za $g_j \mu_B B$.



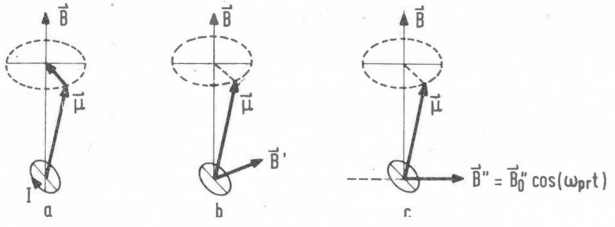
Sl. 9. Razcepitev energijskega nivoja enoelektronskega atoma z $l = 1$ in $s = 1/2$ v šibkem zunanjem magnetnem polju. a) brez zunanjega polja, b) v zunanjem polju

V resnici ne velja za atom natančno ne prva ne druga slika, ampak je pravi opis nekje vmes. Podobno opišemo vedenje večelektronskih atomov. Zaradi večjega števila elektronov so razmere bolj zapletene. Vendar se elektroni običajno orientirajo tako, da se njihovi magnetni momenti paroma izničijo in je magnetni moment atoma določen z lastnostmi neparnega elektrona ali nekaj neparnih elektronov.

Cepitev energijskih nivojev v magnetnem polju študiramo tako, da opazujemo svetlobo, ki jo sevajo vzbujeni atomi pri prehodu na nižja energijska stanja (Zeemanov efekt).

Rabijeva metoda za natančno merjenje magnetnih momentov atoma

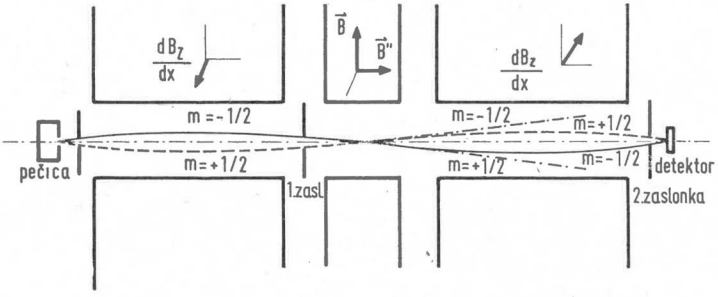
V homogenem magnetnem polju atom precesira. Njegova energija zaradi orientacije pa je $W = -\mu B$. Te svoje orientacije atom ne spremeni. Na orientacijo atoma lahko vplivamo le z dodatnim magnetnim poljem B', ki je pravokotno tako na B kot na μ (sl. 10, b). Takšno polje lahko suče atom v smeri magnetnega polja. Prav tako uspešno je nihajoče magnetno polje $B'' = B_0'' \cos \omega t$, ki je pravokotno le na B (sl. 10, c), če je krožna frekvenca tega polja ravno enaka precesijski frekvenci atoma v magnetnem polju B: $\omega = \omega_{pr} = \mu B / \Gamma = g_j \, (eB/2m)$. To je resonančno vzbujanje.



Sl. 10. Orientacijo magnetnega momenta atoma v zunanjem magnetnem polju B lahko spremenimo, če b) učinkujemo na atom z magnetnim poljem B', ki je pravokotno tako na magnetno polje B in magnetni moment μ, ali pa c) z oscilujočim magnetnim poljem B'', ki je pravokotno na B

Na tej osnovi deluje Rabijeva metoda. Dva stranska magneta (sl. 11) z nasprotno usmerjenim nehomogenim magnetnim poljem dB_z/dx učinkujeta na curek atomov tako, da atome z izbrano orientacijo, ki jih prvi magnet ukrivi skozi zaslonko v sredino srednjega magneta, drugi magnet fokusira naravnost skozi zadnjo zaslonko na detektor. Na sl. 10 sta narisani poti dveh atomov z nasprotno enako orientacijo. Ta curek atomov pa v srednjem magnetu s homogenim poljem B vzbujamo še z oscilujočim magnetnim poljem B''.

Ko doseže krožna frekvenca tega polja precesijsko frekvenco atomov v magnetnem polju B, se atomom orientacija spremeni. Zato sta smer ali velikost sile na preorientiran atom v zadnjem nehomogenem magnetu drugačna in ti atomi ne gredo skozi zaslonko na



Sl. 11. Shema Rabijevega aparata za merjenje atomskih magnetnih momentov

detektor. Zato detektor atomskega curka zaznamuje zmanjšan tok. Ker oscilujočim magnetnim poljem lahko zelo natančno spreminjamo frekvenco, so tudi meritve magnetnih momentov, ali bolje konstant g_j, zelo natančne.

LITERATURA

[1] Richtmyer and Kennard, Introduction to modern physics, McGraw-Hill, 1947.
[2] Feynman, Leighton, Sands, Lectures on physics, Addison-Wesley, 1963.

ATOMI IN SVETLOBA

D. JAMNIK, Odsek za fiziko FNT

UDK 539.183.4

Članek obravnava interakcijo svetlobe in atomov z modelom klasičnega oscilatorja. Obsega emisijo, širino spektralnih črt, absorbcijo in resonančno fluorescenco. Na koncu se dotakne veljavnosti uporabljenega modela.

ATOMS AND LIGHT

The interaction of light with atoms is studied by means of the classical oscilator model. Emission, spectral line width, absorption, and resonant fluorescence are considered. Finally, the validity of the model is briefly discussed.

Procesi, ki spadajo pod zgornji naslov, so povezani na eni strani z zgradbo atoma, na drugi pa s sodelovanjem elektromagnetnega polja z elektronom. Prvo je predmet kvantne mehanike atoma, drugo pa kvantne elektrodinamike. Obe ti dve poglavji fizike sta danes tako zadovoljivo izdelani, da ju smatramo že za skoraj klasični. Zato je tudi naša slika o svetlobnih pojavih v zvezi z atomi razmeroma dovršena.

Pri strogem obravnavanju problema se je treba poslužiti formalizma, ki nam ni vedno domač. Za popis nekaterih pojavov, ki si jih bomo ogledali, pa je kar uspešen preprosti model klasičnega oscilatorja in zato ga bomo uporabili tudi mi; na omejitve njegove veljavnosti pa bomo posebej opozorili.

Pri oscilatorju gre za delec z maso m in nabojem q, ki lahko harmonično niha okrog mirovne lege, tako da je odmik enak $x = x_0 \cos\omega_0 t$, njegova energija pa $W = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2$. Ker gre za pospešeno gibanje naboja, seva oscilator pri nihanju elektromagnetno valovanje z valovno dolžino $\lambda = 2\pi c/\omega_0$, če je c hitrost svetlobe. V primeru, kakršnega bomo predpostavili, da je odmik majhen v primerjavi z valovno dolžino, je sevanje pretežno dipolno. Oscilator predstavlja nihajoč električni dipol z dipolnim momentom qx, ki seva v časovnem povprečju moč

$$P = \omega_0^4 q^2 x_0^2/12\pi\varepsilon_0 c^3 = (\omega_0^2 q^2/6\pi\varepsilon_0 mc^3)W = \gamma W$$

Izsevana energija gre na račun energije oscilatorja in nihanje je v resnici dušeno. Pri šibkem dušenju, kjer moremo spremembo amplitude v času enega nihaja zanemariti, pa še vedno velja zgornja zveza, če delamo časovno povprečje preko enega nihaja. Ker je $-(dW/dt) = P = \gamma W$, je tudi $W = W_0 e^{-\gamma t}$. Za elektron s $q = e$ je eksponent enak $\gamma = \gamma_0 = \lambda^{-2} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-5}\ ms^{-1}$, kar da za vidno svetlobo valovne dolžine $\lambda = 5000$ Å $\gamma_0 = 0{,}9 \cdot 10^8\ s^{-1}$. Pri ustrezni frekvenci $\omega_0 = 3{,}6 \cdot 10^{15} s^{-1}$ to res pomeni šibko dušenje.

Atomi imajo stanja diskretne energije in pri prehodu iz začetnega v končno stanje izsevajo foton z energijo $\hbar\omega_0 = E_z - E_k$, če je $\hbar = h/2\pi$ in h Planckova konstanta $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ joule sek, E_z in E_k pa energija začetnega in končnega stanja. Proces poteka slično kakor radioaktivni razpad, število atomov v začetnem stanju N pada po zakonu $dN/dt = -N/\tau$ ali $N = N_0 e^{-t/\tau}$. Zakon je statistične narave in velja ob majhni relativni napaki le pri zadosti velikem številu atomov. τ je razpadni čas ali povprečna življenjska doba, saj velja $\frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\,dN = \tau$. Spet se omejimo na primer, kjer so atomi majhni proti valovni dolžini izsevane svetlobe in je dober dipolni približek, ki da za razpadni čas zvezo

$$1/\tau = \omega_0^3 e^2 \,|\, \boldsymbol{r}_{zk} \,|^2 / 3\pi\varepsilon_0 \hbar c^3$$

Za en elektron je $\boldsymbol{r}_{kz} = \int \Psi_k^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\Psi_z(\boldsymbol{r})\,dV$ t.j. matrični element za prehod med začetnim in končnim stanjem, ki ju popisujeta valovni funkciji Ψ_z in $\Psi_k \cdot \boldsymbol{r}$ je krajevni vektor v koordinatnem sistemu, ki ima jedro za izhodišče, zvezdica pomeni konjugirano kompleksno vrednost, integral pa gre po prostoru elektrona. Valovni funkciji sta določeni z vrednostjo posameznih kvantnih števil ustreznega stanja atoma.

Izraz za τ nam postane morda nekolko bolj domač ob naslednjem premisleku. Sistem N atomov naj seva v časovnem povprečju isto moč kakor sistem N klasičnih oscilatorjev $-(dN/dt)\hbar\omega_0 = N\omega_0^4 q^2 x_0^2/12\pi\varepsilon_0 c^3$. Iz zveze $dN/dt = -N/\tau$ dobimo tako $1/\tau = \omega^3 q^2 x_0^2/12\pi\varepsilon_0\hbar c^3$. Kakor vidimo, igra 2 $[\boldsymbol{r}_{kz}]$ vlogo amplitude odmika oscilatorja x_0.

Po velikosti je $\boldsymbol{r}_{kz}$ v večini primerov le nekoliko manjši od razsežnosti atoma. Za $|\boldsymbol{r}_{kz}| = 1$ Å in $\lambda = 5000$ Å dobimo $1/\tau = 6 \cdot 10^7\ s^{-1}$, kar je istega reda kakor γ_0. V prenesenem pomenu je tudi atom zelo šibko dušen sistem in izkaže se, da je to tudi v kvantni mehaniki pogoj za veljavnost eksponencialnega zakona pri razpadu.

Navajeni smo že, da govorimo o gibalni količini fotona. Za primer, kateremu ustreza ravno svetlobno valovanje, je gibalna količina enaka $\hbar\omega_0/c$. Fotonu pa pripišemo lahko tudi vrtilno količino. Kadar popisuje njegovo razširjanje po prostoru (kakor v našem primeru) valovanje iz dipola, se izkaže, da se obnaša slično kakor delec, ki mu ustreza kvantno število kvadrata vrtilne količine z vrednostjo 1, tako da je iznos njegove vrtilne količine enak $\sqrt{2}\hbar$. Tudi elektron v atomu ima v danem stanju določeno vrtilno količino, karere iznos je $\sqrt{j(j+1)}\hbar$, če je j kvantno število kvadrata vrtilne količine atoma. Splošna pravila kvantne mehanike za seštevanje vrtilnih količin atoma in fotona pa dajo rezultat, da je razlika med j v začetnem

in končnem stanju atoma enaka lahko le $j_z - j_k = 0, \pm 1$, če naj velja ohranitev vrtilne količine. V okviru tega rezultata je še izključitev prehoda iz $j_z = 0$ v $j_k = 0$, kar izraža dejstvo, da je vrtilna količina fotona različna od nič. Za električno dipolno sevanje je pomembno premikanje električnega naboja, kateremu ustreza tirna vrtilna količina. Zato velja še posebej za kvantno število tirne vrtilne količine l pravilo $l_z - l_k = \pm 1$. Vsa ta pravila, ki povedo, za koliko se pri prehodu lahko spremenijo posamezna kvantna števila, imenujemo izbirna pravila. Njihova osnova je ohranitev vrtilne količine, izražajo pa se v tem, da matrični element izgine, če tem pravilom ni zadoščeno.

Primerjajmo še enkrat atome z oscilatorji! Izsevana moč je za atome $-(\mathrm{d}N/\mathrm{d}t)\hbar\omega_0 = \tau^{-1} N_0 e^{-t/\tau} \hbar\omega_0$, za oscilatorje pa $-N_0 (\mathrm{d}W/\mathrm{d}t) = \gamma N_0 W_0 e^{-\gamma t}$. Glede izsevane moči je torej oscilator enakovreden atomu, če je $W_0 = \hbar\omega_0$ in $\gamma = \tau^{-1}$. Vendar je razlika v sliki: pri atomih pada s časom N, pri oscilatorjih pa W_0. Navadno izrazimo γ v enotah γ_0 : $\gamma = f\gamma_0$. Številčni faktor f, ki karakterizira jakost prehoda, imenujemo oscilatorska moč in ga dobimo v tabelah. Poleg te definicije za oscilatorsko moč pa najdemo v literaturi še še druge.

Atome vzbudimo na več načinov. V fluorescenčnih svetilkah gre v veliki meri za neelastične trke med atomi in elektroni delno ioniziranega plina. Lahko pa se atom vzbudi tudi pri neelastičnem trku s sosednjim atomom, če je energija gibanja zadosti velika. Pri višjih temperaturah ima lahko znatno število atomov takšno energijo in plin sveti, če ga segrevamo.

Pri temperaturi T je od N_0 atomov N_z v vzbujenem stanju, N_k pa v osnovnem. Po Boltzmanovi porazdelitvi velja v grobem:

$$N_z/N_k \approx e^{-E_z/kT}/e^{-E_k/kT} = e^{-\hbar\omega_0/kT} \ll 1, \quad N_k \approx N_0.$$

Ta sistem seva moč $P = N_z \gamma\hbar\omega_0 \approx N_0 e^{-\hbar\omega_0/kT} \gamma\hbar\omega_0$. Za $\hbar\omega_0 = 2{,}5$ eV in $T = 600°$K je $e^{-\hbar\omega_0/kT} \approx 2 \cdot 10^{-22}$, kar da pri 1 litru plina z $N_0 = (1/22) \cdot 6 \cdot 10^{23}$ in $\gamma = 10^8\ s^{-1}$ $P = 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ W. Spomnimo se, da zazna oko pri zeleni svetlobi še okoli 10^{-12} W m^{-2}.

Širina spektralne črte

Oscilator je dušen in njegova energija s časom pada $W = W_0 e^{-\gamma t}$. Ker je energija sorazmerna kvadratu amplitude, pada amplituda $x_0 = Ae^{-\gamma/2t}$. Električna poljska jakost E, ki ustreza izsevani svetlobi, je sorazmerna amplitudi dipolnega momenta qx_0 in ima zato naslednjo časovno odvisnost: za $t \geq 0$ je

$$E = E_0 e^{-\gamma/2t} \cos(\omega_0 t + \beta)$$

Za $t < 0$ pa je $E = 0$ (Slika 1). Takšna funkcija časa predstavlja mešanico nihanj različnih frekvence $E(t) = \int_0^\infty E(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]\, \mathrm{d}\omega$, pri čemer so amplitude komponent, ki jih določimo po znanem postopku, enake

$$E(\omega) = (1/2\pi)\, E_0\, [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]^{-1/2}$$

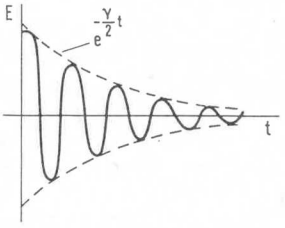
Za realističen primer, ko niha dušeno veliko število oscilatorjev, katerih začetki nihanj pa so v času kaotično razmetani, se izkaže, da se pri časovnem povprečju jakosti svetlobe seštevajo kar kvadrati amplitud posameznih barvnih komponent. Gostota toka v pasu med ω in $\omega + \mathrm{d}\omega$ je sorazmerna $E^2(\omega)\mathrm{d}\omega$, izsevana moč na oscilator v istem pasu pa je

$$P_\omega \mathrm{d}\omega = (\gamma/\pi)\, \hbar\omega_0\, \gamma[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]^{-1} \mathrm{d}\omega$$

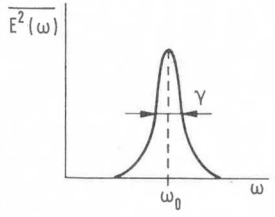
Normalizacijska konstanta te porazdelitve je določena s pogojem, da mora biti izsevana moč, sešteta po vseh frekvencah, enaka $\gamma\hbar\omega_0$. Svetloba, ki jo oddaja oscilator, je torej sestavljena iz različnih frekvenc znotraj pasu širine $\triangle\omega = \gamma$ (Slika 2.). Takšen rezultat izraža princip nedoločenosti, ki velja v kvantni mehaniki. Po tem principu je produkt iz nedoločenosti časa $\triangle t$ = življenjska doba stanja τ in nedoločenosti energije $\triangle E = \hbar\triangle\omega = \hbar\gamma$ reda velikosti $\hbar$:

$$\hbar \approx \triangle E\, \triangle t = \hbar\gamma\, \tau$$

od koder sledi $\gamma = 1/\tau$, v skladu s prejšnjo določitvijo γ. Širina pasu frekvence za vidno svetlobo $\gamma = 10^8 s^{-1}$ ustreza širini pasu energije $0{,}6 \times 10^{-7}$ eV in pasu valovne dolžine $\triangle\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Å. Ta končna širina izvira iz dušenja atoma zaradi sevanja in jo imenujemo naravna širina črte. Da bi to širino eksperimentalno otipali, bi potrebovali za red velikosti boljšo ločljivost spektralnih aparatov od $\lambda/\triangle\lambda = 4 \cdot 10^7$, česar pa ne dosezamo. Vendar pa imajo črte svetlobe, ki jo oddajajo atomi pri sevanju v rednih pogojih dosti večje širine, tako velike, da jih lahko merimo. Vzrokov za to je več in oglejmo si nekatere:



Sl. 1



Sl. 2

Trk vzbujenega atoma z drugim atomom lahko povzroči prehod v osnovno stanje brez emisije fotona. Energija $\hbar\omega_0$ gre pri tem lahko popolnoma v povečanje kinetične energije obeh atomov pri trku, ali pa le deloma, ker se ostali del porabi za vzbujanje drugega atoma. Če je število teh prehodov na sekundo $dN_t/dt = -\gamma_t N$, potem je število vseh prehodov zaradi sevanja in zaradi trkov na sekundo in na atom $\Gamma = \gamma + \gamma_t$. To je tudi nova konstanta dušenja za oscilator in ustrezna spektralna črta ima zdaj širino Γ. Izsevana moč na atom, sešteta po vseh frekvencah, je še vedno $\gamma\hbar\omega_0$:

$$P_\omega d\omega = (\gamma/\pi)\, \hbar\omega_0 \Gamma\, [(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4]^{-1} d\omega$$

Omenimo naj, da vsebuje Γ v splošnem tudi druge oblike dušenja, npr. sevanje svetlobe še druge valovne dolžine iz istega nivoja.

Število trkov posamezne molekule v sekundi, kar predstavlja zgornjo mejo za γ_t, je pri danem polmeru molekule r, gostoti molekul n in hitrosti molekule v približno enako $4n\pi r^2 v$; za $v = 500\ ms^{-1}$, $n = 0{,}3 \cdot 10^{26} m^{-3}$ in $r = 1$ Å je od tod $\gamma_t \geq 16 \cdot 10^8$.

Iz atoma, ki seva svetlobo s krožno frekvenco ω_0 in se giblje s hitrostjo v pod kotom α napram vektorju razdalje atom — opazovalec, zazna le-ta svetlobo s krožno frekvenco $\omega = \omega_0[1 + (v/c)\cos\alpha]$ (Dopplerjev pojav). Ker so pri toplotnem gibanju vse smeri enakomerno zastopane, je tako ω razmazan približno v pasu širine $\triangle\omega_D = 2(v/c)\omega_0 = 4\pi(v/\lambda)$. Za vodik pri 300°K je $v = 2 \cdot 10^3 ms^{-1}$ in pri $\lambda = 6000$ Å dobimo $\triangle\omega_D = 4 \cdot 10^{10} s^{-1}$. Za Hg je $v = 140\ ms^{-1}$ in $\triangle\omega_D = 2 \cdot 8 \cdot 10^9 s^{-1}$, kar pa je še vedno približno 30 krat več od naravne širine.

Kako različni pogoji, v katerih so svetleči se atomi, vplivajo na širino črte, vidimo na primeru dveh živosrebrnih svetilk. Ena dela pri tlaku plina Hg 1 atm, druga pa pri 100 atm.

V spektru, ki ga dobimo z uklonsko mrežo, v primeru svetlike z nižjim tlakom lepo ločimo obe rumeni črti 5770 Å in 5791 Å. V spektru svetlike z visokim tlakom pa teh dveh črt praktično ne ločimo več, ker sta preširoki. Razlika v širini je očitna tudi za spodnjo (zeleno) črto 5461 Å. (Slika 3). Tako velike širine (nekaj Å) ne moremo razložiti z zgoraj opisanima efektoma in je posledica efekta Starka, to je premika frekvence sevanja, kadar je sevajoči atom v električnem polju. V živosrebrni svetilki gre za električno praznenje v plinu Hg, tako da je znaten del atomov ioniziran. Ker je gostota atomov in ionov velika, so razdalje med njimi majhne in so atomi izpostavljeni razmeroma močnim poljem ionov. Premik frekvence ima največkrat kvadratno odvisnost od električnega polja. Oblika spektralne porazdelitve v črti je izrazito asimetrična in seveda ni podobna obliki, s katero smo imeli opravka zgoraj.

V primeru, da so lastne frekvence oscilatorjev različne in je njihova porazdelitev okoli ω_0 slična Gaussovi, ima emitirana svetloba spekter, ki je podoben prvotnemu, le širina H je večja:

$$P_\omega \mathrm{d}\omega = (\gamma/\pi)\hbar\omega_0 \mathrm{H}[(\omega - \omega_0)^2 + H^2/4]^{-1},\ \mathrm{H} > \gamma$$

Smatrali bomo, da zgornja porazdelitev vsaj kvalitativno ustreza realističnim primerom.

Absorpcija

Oscilator, ki se znajde v električnem polju $E = E_0 \cos\omega t$ vpadne svetlobe z gostoto toka $j = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c$, niha vsiljeno. V stacionarnem primeru je odmik $x = x_0 \cos(\omega t - \delta)$ z

$$x_0 = (qE/m)\,[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2]^{-1/2} \quad \text{in} \quad \mathrm{tg}\,\delta = \Gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2).$$

Oscilator je dušen in troši moč Fx, katere časovno povprečje je enako

$$P_\mathrm{a} = (q^2/2m)\omega^2\Gamma E_0^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2]^{-1}.$$

Ob upoštevanju šibkega dušenja in izraza za γ in j sledi od tod

$$P_\mathrm{a} = (3/8\pi)\lambda^2\gamma\Gamma j[(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4]^{-1}.$$

Navadno gre za vpadno svetlobo različnih barv, tako, da je v intervalu med ω in $\omega + \mathrm{d}\omega$ gostota vpadnega toka $j_\omega \mathrm{d}\omega$. V tem primeru dobimo absorbirano moč v istem frekvenčnem intervalu $P_{\mathrm{a}\omega}\mathrm{d}\omega$ iz zadnjega izraza, kjer nadomestimo j z $j_\omega \mathrm{d}\omega$. Razmazanost po lastnih frekvencah oscilatorjev da končno

$$P_{\mathrm{a}\omega}\mathrm{d}\omega = (3/8\pi)\lambda^2\gamma H j_\omega\,[(\omega - \omega_0)^2 + H^2/4]^{-1}\mathrm{d}\omega.$$

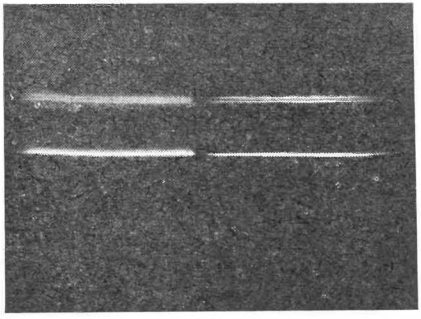
Črta absorbirane svetlobe ima isto obliko kakor črta emitirane svetlobe, v skladu s Kirchoffovim zakonom.

Absorbirana moč na enoto gostote vpadnega toka ima razsežnost ploskve, in to imenujemo absorpcijski presek $\sigma(\omega) = P_{\mathrm{a}\omega}/\mathrm{j}_\omega$. Atom se glede absorpcije obnaša kakor črna ploščica ploščine σ, ki vso svetlobo, ki jo prestreže, absorbira. Največja je absorpcija v primeru, ko je $\omega = \omega_0$; presek je takrat $\sigma_{\max} = (3/2\pi)\lambda^2(\gamma/\mathrm{H})$. Za $\lambda = 6000$ Å, $\gamma = \gamma_0$ in $\mathrm{H} = \gamma_0 \cdot 10^3$ je $\sigma_{\max} = 1{,}8 \cdot 10^4 \text{Å}^2$, kar je za rede velikosti več od dejanskih dimenzij atoma. Zato v primeru $\omega = \omega_0$ že zelo redek plin znatno absorbira. Za naš primer je za še dobro merljivi absorpcijski koeficient $\mu = n \cdot \sigma = 1\ \mathrm{m}^{-1}$ (gostota toka svetlobe j, ki jo prepušča plast debeline d je pri gostoti toka vpadne svetlobe j enaka $j = j_0\,\mathrm{e}^{-\mu d}$), potrebno število atomov na enoto prostornine $\mathrm{n} = 0{,}5 \times 10^{16}\ \mathrm{m}^{-3}$, kar je komaj 2×10^{-10} gostote plina pri normalnih pogojih. Zaradi razmeroma ozkih črt je metoda absorpcijske spektralne analize pri plinih zelo občutljiva.

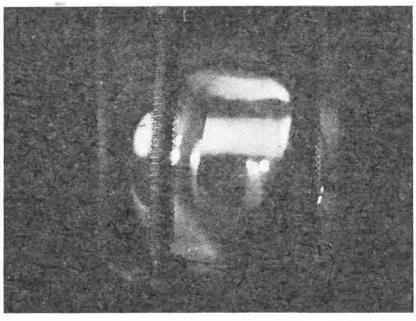
Znan poskus za demonstracijo absorpcije v ostri črti je absorpcija bele svetlobe pri prehodu skozi natrijevo paro. To ustvarimo z močnim segrevanjem koščka natrija s plinskim plamenom. Plinski plamen se obarva rumeno, ker je del atomov natrija v vzbujenem stanju in ti atomi svetijo. Seveda pa je velika večina atomov natrija v osnovnem stanju in ti atomi absorbirajo iz bele svetlobe ozek frekvenčni pas, kar se pokaže v zveznem spektru kot temna črta. Če vpadno belo svetlobo odstranimo, vidimo na mestu temne črte zdaj rumeno črto svetlobe, ki jo emitirajo sveteči atomi v plamenu natrija.

Resonančna fluorescenca

Rumena črta natrija ustreza prehodu med prvim vzbujenim in osnovnim stanjem atoma. Po absorpciji se atom iz vzbujenega stanja lahko povrne v osnovno z emisijo fotona iste energije. To je pojav, ki ga imenujemo z naslovom tega poglavja. Seveda pa vzbujeni atom v splošnem ne bo emitiral fotona v smer, iz katere ga je absorbiral. Atom svetlobo absorbira iz dane vpadne smeri in jo razpršuje po vseh smereh, kar imenujemo tudi sipanje.



Sl. 3



Sl. 4

Obravnavanje resonančne fluorescence navežemo na razmere, ki smo jih srečali pri absorpciji. Oscilator v polju vpadne svetlobe predstavlja nihajoč dipol, ki seva sipano svetlobo z močjo

$$P_s = \omega_0^4 q^2 x_0^2 / 12\pi\varepsilon_0 c^3 = (3/8\pi)\lambda^2\gamma^2 j\,[(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4]^{-1} = (\gamma/\Gamma)P_a.$$

Do izraza za sipano moč pridemo lahko tudi direktno iz P_a, če upoštevamo, da se le γ/Γ-ti del absorbirane moči ponovno izseva. To velja tudi za primer sipane moči v intervalu ω, $\omega + d\omega$ $P_{s\omega}d\omega$, če je vpadna svetloba porazdeljena po barvah in tudi če so lastne frekvence oscilatorjev razmazane

$$P_{s\omega} = (\gamma/\Gamma)P_{a\omega}.$$

Resonančno sipanje lepo opazujemo kot viden pramen natrijeve svetlobe, ki gre skozi natrijevo paro. Paro dobimo s segrevanjem steklene posode, v kateri je natrij. Parni tlak natrija pri 200° C = 10^{-5} tora. Ko posvetimo skozi posodo s pramenom rumene svetlobe, ki jo dobimo s filtriranjem bele svetlobe, sipanja ne vidimo, ker je resonanca preozka. Na sliki 4 je fotografirana steklena posoda kroglaste oblike, v kateri je natrij. Posodo segrevamo s štirimi pokončnimi grelci, ki so vidni na sliki. Natrijeva svetloba pada na posodo z leve strani. Nekateri madeži na steni posode predstavljajo tanko plast natrija, ki še ni izparel.

Omejitve veljavnosti modela

Naš preprosti model seveda ne drži v vseh pogledih. Zlasti kar se tiče kotne porazdelitve emitirane svetlobe iz orientiranih atomov ali sipane svetlobe, ter polarizacije svetlobe, oscilatorski model ne da pravilnih rezultatov. Na tiho smo npr. predpostavljali, da niha oscilator v smeri električne poljske jakosti vpadne svetlobe. Sipana svetloba bi bila v takem primeru linearno polarizirana, če je takšna tudi vpadna svetloba. Pri nihanju naboja v molekulah pa gre lahko za vezano gibanje, kjer premik naboja ni v smeri zunanje sile, in opravka imamo zato z depolarizacijo svetlobe pri sipanju.

Poleg tega in še nekaterih klasičnih razlogov pa omejuje veljavnost oscilatorskega modela pri resonančnih procesih, ki potekajo preko določenih stanj, predvsem kvantizacija možne usmeritve atomov. Vzemimo le najbolj drastičen primer! Vzbujeno stanje, iz katerega atom emitira, naj ima vrtilno količino enako nič! Potem je edina možnost za magnetno kvantno število $m = 0$, in ustrezna valovna funkcija sploh ni odvisna od orientacije koordinatnega sistema. To predstavlja popolnoma neorientiran atom, ki mora sveda sevati nepolarizirano svetlobo izotropno na vse strani.

Kvantizacija po smereh pa se pozna tudi pri presekih za absorpcijo (in resonančno fluorescenco, ki je poseben primer absorpcije), kjer pride do izraza v statističnem faktorju $(2j + 1)/(2j_0 + 1)$, s katerim je treba pomnožiti absorpcijski presek. Pri tem je j kvantno število vrtilne količine za vzbujeno stanje, j_0 pa za osnovno.

Nekateri sodelavci na Odseku za fiziko FNT so pomagali pri izvedbi in dokumentaciji poskusov v zvezi s sliko 3 in sliko 4. Hvala lepa.

IONIZACIJA

IGOR GRABEC

UDK 539.184.5

Članek obravnava osnovne procese, ki vodijo do ionizacije plinov. S pomočjo klasične obravnave so izpeljani pogoji za nastop ionizacije pri trkih dveh delcev. Ionizacijske efektivnosti različnih delcev so prikazane z diagrami.

IONIZATION

Most common ionization processes are discussed in the article. A clasical treatment is used to obtaine conditions at which the ionization occurs in various collisions. Ionization efficiencies of several particles are given in the diagrams.

Razcepitev atoma ali molekule na nabite delce na splošno imenujemo ionizacija. Snov postane zaradi električnih nabojev, ki se sprostijo ob ionizaciji, električno prevodna. Ionizacijo zato najenostavneje dokažemo z merjenjem električne prevodnosti snovi.

Ionizacija sodi med pomembne pojave v naravi. Vsakodnevno imamo opravek z gorenjem, električnim tokom v plinskih ceveh, topljenjem soli v vodi, obsevanjem snovi z različnimi vrstami sevanja itd.

Pri preprostem poiskusu s plamenom, ki ga usmerimo med plošči nabitega kondenzatorja, se kondenzator sprazni. Do tega pride zaradi električne prevodnosti plamena, ki je posledica ionizacije v plamenu. Ionizacijo bomo bolje razumeli, če se pomudimo ob nekaterih osnovnih značilnostih.

Da pride do ionizacije, moramo atomu ali molekuli dovesti energijo. To lahko storimo tako, da atom obstreljujemo z različnimi delci. Ob trku atoma z vpadlim delcem lahko sprejme atom tolikšno energijo, da pride do ionizacije. Splošno lahko ionizacijo opišemo z reakcijsko enačbo

$$A + B \rightarrow C^+ + D^- + B' - Q.$$

V tej enačbi smo z A označili atom, s katerim trči delec B. Po trku se atom razcepi na nabita delca C^+ in D^-, za kar se potroši energija Q. Energija vpadlega delca se zato pri trku zmanjša, kar smo označili s črtico na B.

Oglejmo si sedaj nekaj osnovnih pojavov, ki lahko povzroče ionizacijo v plinih! Pri večini pojavov v plinih se atom A pod vplivom vpadlega delca B razcepi na pozitivni ion A^+ in elektron:

$$A + B \rightarrow A^+ + e^- + B' - Q$$

Delec B, ki prinese energijo, je lahko elektron, pozitivni ion, nevtralni atom, foton in vzbujen atom.

Ionizacija z elektronom nastopi, če elektron z dovolj visoko energijo trči z atomom. Med trkom elektron in atom izmenjata gibalno količino in energijo. Izmenjava poteka v skladu z zakonom o ohranitvi gibalne količine in energije. Strogo moremo obdelati ta pojav s kvantnomehanskimi prijemi. Tako lahko izračunamo verjetnost za ionizacijo, če poznamo interakcijo med delci.

Nekatere osnovne značilnosti procesa lahko napovemo na osnovi klasičnega približka. Če je energija vpadlega elektrona večja od energije, ki je potrebna za razcepitev atoma, se lahko pri trku odcepi en elektron od atoma. Energiji obeh izhodnih elektronov na splošno nista enaki, temveč sta odvisni od kota med smerema gibanja. Preden se lotimo obravnavane izmenjave energije pri trku, povejmo nekaj kvalitativnega o mehanizmu sprostitve elektrona od atoma!

Ko se primarni elektron približuje atomu, lahko s svojim električnim poljem deluje na najbližji elektron v atomu. Če je sila, s katero vpadli elektron deluje na elektron v atomu, dovolj velika in deluje dovolj časa, lahko povzroči odcep sekundarnega elektrona. Hitrost primarnega elektrona se pri tem neelastičnem sipanju zmanjša. Atoma seveda ne moremo obravnavati kot togo porazdelitev pozitivnega in negativnega naboja. Približajoči se elektron povzroči premestitev elektronov v atomu in polarizacijo. Stopnja inducirane polarizacije narašča z vrstnim številom, ker postajajo z naraščanjem števila elektronov v povprečju zunanji elektroni vse šibkeje vezani. Izmenjava gibalne količine, ionizacijska energija in verjetnost za ionizacijo so na splošno odvisni od zmožnosti atoma za polarizacijo. Da se inducira dipol, je potreben določen čas. Čas, ki ga primarni elektron prebije v bližini atoma, in najbližja razdalja od atoma določata velikost induciranega dipola. Zelo hiter elektron prebije ob atomu premalo časa, da bi lahko povzročil polarizacijo.

Ionizacijsko energijo lahko teoretično napovemo le za zelo preproste atome, kot so na primer vodik, enkrat ionizirani helij, dvakrat ionizirani litij, itd. Z ionizacijo definiramo ionizacijski potencial z enačbo

$$W_i = e_0 V_i,$$

v kateri je e_0 osnovni naboj in V_i ionizacijski potencial. Večinoma določimo ionizacijski potencial. Na splošno je ta potencial tem večji, čim več elektronov je v zunanji lupini atoma. Ionizacijski potencial V_i je zato pri alkalnih kovinah najmanjši, pri žlahtnih plinih največji. Z naraščanjem vrstnega števila, kot smo že omenili, pri sorodnih atomih ionizacijski potencial pada. Tabela 1 podaja nekaj ionizacijskih potencialov za atome in molekule.

Tabela 1: Ionizacijski potencial atomov in molekul (v voltih)

H	13.6	H_2	15.4
He	24.5 (54.2)	C_2	12
Li	5.4 (75.3, 122)	N_2	15.5
C	11.3 (24.4, 48, 65, 390)	O_2	21.1
N	14.5 (29.5, 47, 73, 97)	F_2	16.5
O	13.5 (35, 55, 77, ...)	Cl_2	11.5
F	17.4 (35, 63, 87, 114)	Br_2	10.7
Ne	21.5 (41, 63, 87, 114)	I_2	9.4
Na	5.1 (47.5, 72)	CO	14.0
Cl	13 (22.5, 40, 47, 68)	NO	9.25
A	15.7 (28,41)	OH	13.8
K	4.3 (32, 47)	H_2O	13
Ca	6 1 (12, 51, 67)	CO_2	13.7
Fe	7.9 (16, 30)	NO_2	11
Ni	7.6 (18)	BF_3	17
Cu	7.7 (20.3)	BCl_3	11
Br	11.8 (19, 36)	NH_3	11.2
Kr	14 (27, 37, 68)	Hg_2	9.7
Eb	4.2 (28, 47, 80)	C_6H_6	9.6
Mo	7.4	parafini	10—12

Vrednosti v oklepajih se nanašajo na večkratno ionizacijo.

Določimo, kolikšno energijo lahko elektron odda atomu pri trku! S tem dobimo pogoj za nastop ionizacije. Privzamemo, da atom z maso m miruje, elektron z maso m_e pa čelno trči vanj. Zaradi ohranitve energije velja

$$\tfrac{1}{2} m_e v_{e0}^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_e v_{e1}^2 + W$$

Indeksi e, 0, 1 označujejo elektron pred trkom in po njem, W pa energijo, ki se lahko pri trku prenese z elektrona na atom. Ionizacija lahko nastopi, če je $W \geq e_0 V_i$.
Iz zakona o ohranitvi gibalne količine sledi

$$m_e v_{e0} = m v_1 + m_e v_{e1}$$

Če vstavimo v_1 iz te enačbe v zgornjo, dobimo

$$v_{e0}^2 = v_{e1}^2 + (m_e/m)(v_{e0} - v_{e1})^2 + 2W/m_e$$

Ker poznamo v_{e0}, dobimo maksimalno vrednost izmenjane energije iz enačbe

$$dW/dv_e = 0$$

ali

$$v_{e1}/v_{e0} = m_e/(m + m_e)$$

Pri največjem prenosu energije torej elektron zapusti atom s hitrostjo, ki je manjša od od 1/2000 hitrosti vpadlega elektrona. To pomeni, da se lahko praktično vsa energija elektrona prenese na atom. Točnejši izraz za največji prenos energije sledi iz prejšnjih enačb

$$W_{max} = \tfrac{1}{2} m_e v_{e0}^2 \cdot m/(m + m_e)$$

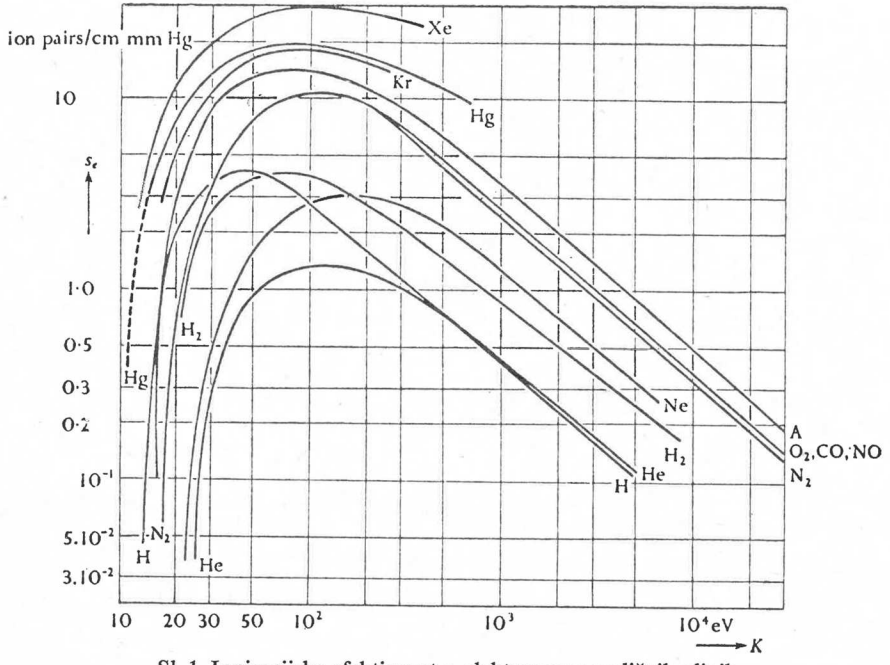
Pogoj za nastop ionizacije pri trku elektrona lahko zapišemo približno z

$$\tfrac{1}{2} m v_{e0}^2 \geq e_0 V_i$$

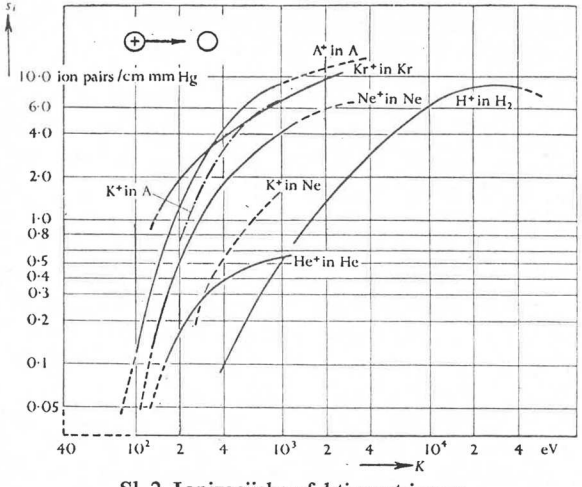
Če bi bili vpadli delci ioni ali atomi iste vrste kot atom sam, bi zgornji pogoj dobil obliko

$$\tfrac{1}{2} m v^2 \geq 2 e_0 V_i$$

Čim težji je delec, tem manj svoje energije lahko odda pri trku. Četudi je zapisani pogoj izpolnjen, še ni rečeno, da do ionizacije pri trku res pride. Kot smo že omenili, je to odvisno od hitrosti elektrona in možnosti za polarizacijo atoma. Običajno opišemo ionizacijo tako, da podamo število ionskih parov, ki jih napravi vpadni delec na 1 cm poti v plinu pri tlaku



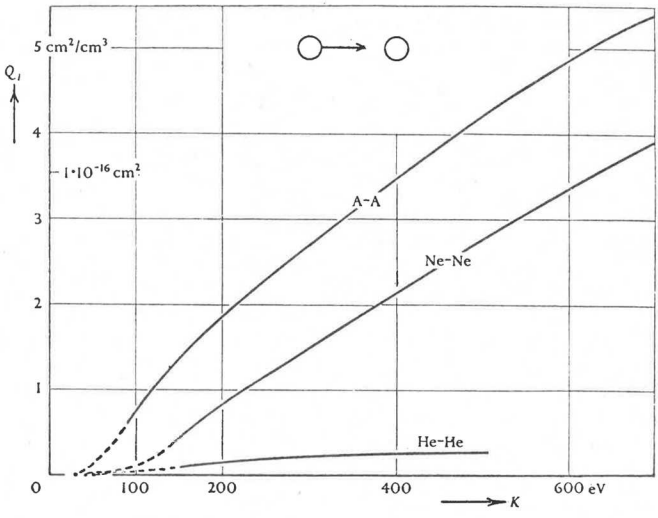
Sl. 1. Ionizacijska efektivnost s_i elektronov v različnih plinih



Sl. 2. Ionizacijska efektivnost ionov

1 tor in 0° C. Ta tako imenovani ionizacijski izkoristek s_i, se ujema po velikosti z ionizacijskim presekom σ_i, ki ga da kvantnomehanski opis ionizacije. Na sl. 1 je nekaj eksperimentalno dobljenih podatkov o ionizacijskem izkoristku elektronov v različnih plinih.

Ionizacijski izkoristek je različen od 0, če je kinetična energija elektronov večja kot ionizacijska energija. Optimalno vrednost doseže za večino plinov med 80 in 120 eV. Tam ima velikostno stopnjo 10 ionskih parov/cm. Z naraščajočo energijo elektronov začne zopet padati. Podane krivulje že upoštevajo dejstvo, da lahko elektron z dovolj visoko energijo odcepi tudi dva ali več elektronov od atoma. Zaradi tega so tudi izkoristki največji pri energiji, ki je dosti nad ionizacijsko.



Sl. 3. Ionizacijska efektivnost nevtralov

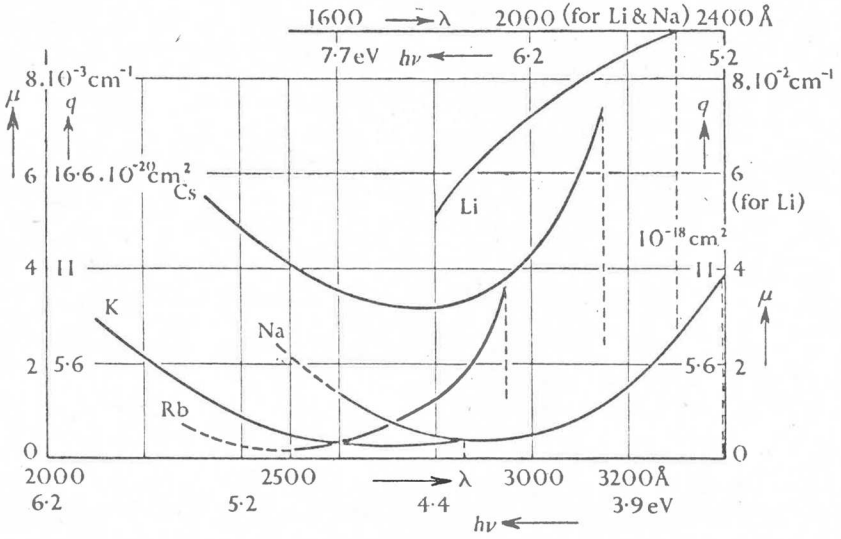
Ionizacija z elektroni igra bistveno vlogo v ionizacijskih števcih žarkov. Žarki β so hitri elektroni in povzroče ionizacijo v plinu, skozi katerega se gibljejo. Če je plin med dvema elektrodama kondenzatorja, se nastali pari ion-elektron razidejo in povzroče spraznitev kondenzatorja. Če žarek β izgubi vso energijo v plinu med elektrodama, je sprememba naboja na elektrodah kar mera za to energijo.

Ionizacija z elektroni ima tudi glavno vlogo pri samostojnem toku v plinih. Če je plin med nabitima elektrodama, ki sta prikladno razmaknjeni, in je tlak plina nekaj torov, nastopi lahko samostojni tok, če je napetost dovolj velika. Posamezni elektroni, ki so v plinu zaradi naravne radioaktivnosti ali pojavov, ki jih bomo kasneje omenili, se pospešijo v električnem polju med elektrodama. Pospešeni elektroni ionizirajo plin, novo nastali elektroni se zopet pospešijo in ponovno ionizirajo. Po tej poti preide plin v stanje, v katerem je vedno nekaj ionov in elektronov. Na omenjeni pojav naletimo pri tlilnem toku, ki ga opazujemo na primer v reklamnih in fluorescentnih ceveh.

Podobno kot elektroni lahko delci ionizirajo atom z ioni ali nevtralnimi atomi. Bistvena razlika je v energiji, pri kateri omenjeni delci najbolje ionizirajo. Na splošno so ioni ali nevtralni atomi z energijo velikosti $e_0 V_i$ tako počasni, da se elektroni v atomu ob trku zlahka prilagodijo spremembam, ne da bi prišlo do ionizacije. Ioni in nevtralni delci sprožijo ionizacijo šele pri večjih hitrostih, ki jim ustreza energija okoli 10^3 do 10^4 eV. Sl. 2 in 3 kažeta nekaj izmerjenih ionizacijskih izkoristkov ionov in nevtralnih delcev.

Ionizacijo s hitrimi ioni uporabljamo za štetje ionov v ionizacijskih števcih, ki so v bistvu enako zgrajeni kot števci za sevanje žarkov β. Atom lahko ioniziramo tudi s svetlobo. O tem priča poskus, pri katerem posvetimo z ultravijolično svetlobo na plin med ploščama kondenzatorja. Kondenzator se sprazni, kar je znak, da so se v plinu sprostili naboji.

Glede na energijo fotonov razlikujemo dve vrsti ionizacije s svetlobo. V prvem primeru je energija fotonov približno enaka ionizacijski $h\nu \cong e_0 V_i$. Elektron, ki ga izbije foton, ima po trku energijo $\frac{mv^2}{2} = h\nu - e_0 V_i$.



Sl. 4. Absorpcijski koeficient ultravijolične svetlobe v parah alkalnih elementov

Fotoni najbolj učinkovito ionizirajo, če je njihova energija le okoli 0,5 eV nad ionizacijsko. Na splošno je ionizacija s svetlobo odvisna od valovne dolžine in narave plina. Zmožnost svetlobe za ionizacijo izrazimo z absorpcijskim koeficientom. Sl. 4 kaže nekaj izmerjenih absorpcijskih koeficientov za svetlobe v plinih.

Zanimivo je, da lahko ionova svetloba z manjšo energijo fotonov, kot je ionizacijska energija, povzroči ionizacijo. To je posledica postopnega vzbujanja atoma pri zaporednih trkih s fotoni.

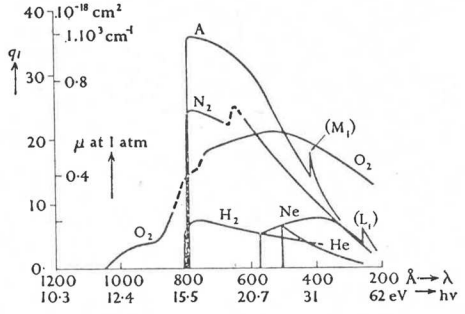
Ionizacijska plina s svetlobo poteka malo drugače, če je energija fotonov dosti nad ionizacijsko:

$$h\nu \gg e_0 V_i$$

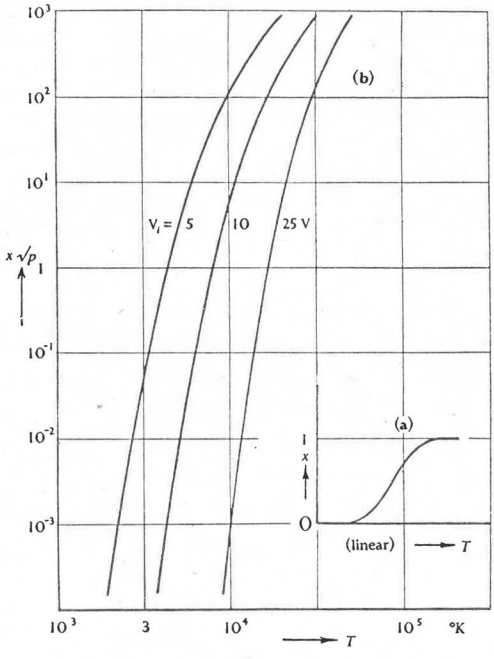
Temu pogoju zadoščajo rentgenska svetloba in γ žarki. Fotoni rentgenske svetlobe ali fotoni γ lahko izbijejo iz atoma elektron iz sredice. Večino energije prevzame elektron, ki nato nadalje ionizira. Del energije se porabi za izbitje še kakšnega elektrona. Izpraznjeno mesto v eni notranjih podlupin zasede elektron iz višjih podlupin. Energija, ki se pri tem sprosti, se lahko porabi za odcep elektronov iz zunanjih podlupin. To je Augerov pojav. Ionizacija s fotoni visokih energij je torej precej zamotan pojav. Sl. 5 in sl. 6 kažeta absorpcijski koeficient za oba karakteristična primera.

Do ionizacije atoma pride lahko tudi pri trku atoma z drugim vzbujenim atomom. Pri tem se vzbuditvena in kinetična energija porabita za ionizacijo atoma. Pojavi te vrste so pomembni v plinskih razelektorjih.

Vsi našteti pojavi, ki vodijo do ionizacije, lahko nastopijo hkrati. To se zgodi na primer pri visoki temperaturi. Če so pojavi, ki vodijo do ionizacije, v ravnovesju z rekombinacijskimi pojavi, pride do ravnovesnega stanja. Na splošno je koncentracija ionov in elek-



Sl. 5. Absorpcijski koeficient ultravrolične svetlobe v nekaterih plinih



Sl. 6. Stopnja ionizacije plina v odvisnosti od temperature

tronov odvisna od temperature plina. Čim višja je temperatura, tem več atomov je ioniziranih. V termodinamskem ravnovesju opiše koncentracije nabitih delcev Sahova enačba:

$$x^2/(1 - x^2) = \text{konst.}\ T^{5/2} \cdot e^{-e_0 V_i/k\,T_e}$$

V njej je T_e absolutna temperatura plina in x koncentracija elektronov.

Ionizacijo v vročem plinu pokažemo z merjenjem električne prevodnosti plamena. Le-ta se poveča, če plamenu primešamo kakšno sol alkalijskih kovin, ker s tem zmanjšamo ionizacijski potencial.

MOLEKULE

ROBERT BLINC

UDK 539.19

V članku je podan kratek pregled elementarne teorije kemijske vezi. Kot primer je obdelan molekularni ion H_2^+.

MOLECULES

The elementary theory of the chemical bond is illustrated on the example of the molecular ion H_2^+.

Mi sami in svet okoli nas smo sestavljeni iz molekul. Te so lahko majhne — kot je to primer za molekulo vode H_2O — ali pa velike, kot na primer molekula DNA, ki je nosilec

dednih lastnosti. Vsa ogromna množica raznih molekul je zgrajena iz atomov približno stotih kemijskih elementov.

V tem predavanju bomo skušali odgovoriti na vprašanje, zakaj se atomi vežejo v molekule. Kot primer bomo obdelali najenostavnejšo molekulo, H_2^+.

Odgovor na vprašanje o naravi sil, ki povzročajo tvorbo molekul, je povsem jasen. Privlačne elektrostatske interakcije med negativno nabitimi elektroni in pozitivno nabitimi jedri so v celoti odgovorne za stabilnost molekul. Magnetne sile imajo le zelo majhen vpliv, gravitacijske sile pa lahko povsem zanemarimo. Posebna imena, s katerimi označujemo razne karakteristične primere kot

— kovalentna vez
— ionska vez
— kovinska vez
— van der Waalsova vez
— vodikova vez

uporabljamo le zaradi lažje kategorizacije. Osnovne interakcije, ki vežejo atome v molekule, pa so v vseh primerih elektrostatske narave.

Dva atoma se združita v molekulo, če se pri tem totalna energija sistema zniža. Razliko med energijo molekule in vsoto energij obeh prostih atomov imenujemo *vezavno energijo* sistema.

Določitev stabilnosti molekul zahteva točen izračun vezavne energije oziroma energijskega spektra molekularnega sistema. Kvantna mehanika, ki je uspela razložiti energijsko spektre in strukturo izoliranih atomov, nam tudi tu pomaga. Čeprav imamo tu opravka s problemom množice elektronov in jeder, ki ga tudi klasično ne moremo eksaktno rešiti, nam približna rešitev kvantno mehanskega problema vseeno omogoča razumeti vse osnovne značilnosti molekul.

Problem si olajšamo s tem, da razdelimo elektrone na dva dela: na valenčne elektrone, katerih valovna funkcija se močno spremeni pri tvorbi molekule, in na elektrone notranjih lupin, katerih valovna funkcija je v molekuli praktično ista, kot je bila prej v prostem atomu. To aproksimacijo lahko opravičimo s tem, da so vezavne energije molekul običajno nekaj elektronskih voltov, medtem ko so vezavne energije elektronov v notranjih lupinah težjih atomov tudi 1000 elektronskih voltov in več. Znižanje celokupne energije sistema pri tvorbi molekule je torej predvsem posledica spremembe v porazdelitvi valenčnih elektronov, to je elektronov zunanjih atomskih lupin.

Da bi s pomočjo elektrostatske interakcije med valenčnimi elektroni in pozitivno nabitim ostankom atoma povezali atome v stabilno molekulo, bi morali izpolniti štiri zahteve, ki si med seboj delno nasprotujejo:

1. Pozitivne ione bi morali čimbolj oddaljiti drug od drugega, da bi tako zmanjšali coulomski odboj med naboji istega predznaka.

2. Iz istega razloga bi morali tudi valenčne elektrone čimbolj oddaljiti drug od drugega.

3. Da bi zvečali privlačno interakcijo med naboji istega predznaka, bi morali čimbolj približati valenčne elektrone pozitivnim ionom.

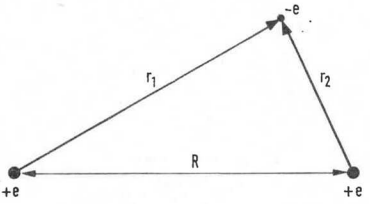
4. Gornje tri zahteve znižajo potencialno energijo sistema. Izpolniti pa jih moramo tako, da pri tem kinetična energija sistema ne naraste preveč. Vsaka lokalizacija elektrona privede namreč do povečanja njegove kinetične energije. Da je temu res tako, najlaže vidimo s pomočjo Heisenbergove relacije:

$$\triangle (mv) \cdot \triangle (x) = h/2\pi$$

pri čemer je h Planckova konstanta. Če je elektron lokaliziran na področju $\triangle x = 10^{-8}$ cm, je njegova kinetična energija že približno 3 eV.

Oglejmo si, kako so te štiri zahteve izpolnjene pri najpreprostejši molekuli H_2^+, to je enkrat ionizirani vodikovi molekuli! Teorija kemijske vezi v molekularnem ionu H_2 ima za razumevanje zgradbe molekul enak pomen, kot ga ima vodikov atom za razumevanje atomske strukture.

Model molekularnega iona H_2^+ je prikazan na sliki 1.



Slika 1. Model molekularnega iona H_2^+

Ion H_2^+ sestavljata dva protona in en elektron. Ker sta protona mnogo težja od elektrona, se gibljeta razmeroma počasi v primeri z elektronom. V prvi aproksimaciji lahko torej privzamemo, da protona mirujeta in da se elektron giblje v potencialnem polju obeh protonov. Problema se bomo lotili tako, da bomo najprej privzeli, da se protona nahajata v razdalji R, in izračunali energijo elektrona pri tej medprotonski razdalji. Nato bomo izračunali energijo celotnega sistema v odvisnosti od razdalje med obema protonoma. Izkazalo se bo, da ima energija celotnega sistema minimum pri določeni medprotonski razdalji R_0. Ta razdalja predstavlja dolžino kemijske vezi v ionu H_2^+.

Schrodingerjeva enačba za ta sistem se glasi:

$$H\psi = E\psi$$

pri čemer je Hamiltonova funkcija sistema podana s

$$H = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

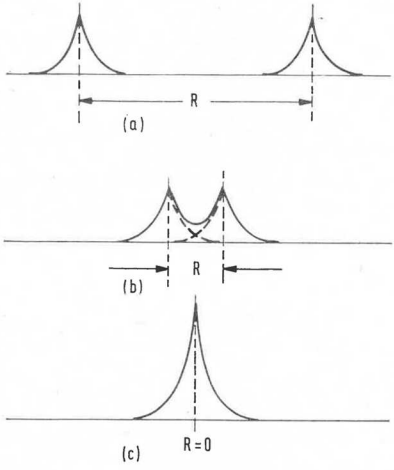
Tu predstavlja prvi člen kinetično energijo elektrona, drugi člen potencialno energijo elektrostatske interakcije elektrona z drugim protonom, tretji člen potencialno energijo elektrostatske interakcije elektrona z drugim protonom, četrti člen pa elektrostatsko interakcijo med obema protonoma.

Preden skušamo najti rešitev kvantnomehanskega problema, si poglejmo, kako bi problem rešili z ugibanjem!

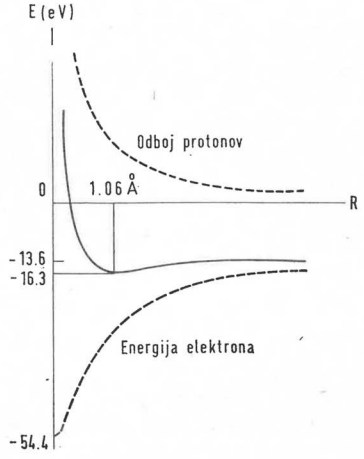
V primeru, da je medprotonska razdalja zelo velika, se problem reducira na problem vodikovega atoma in pa H^+ iona. Elektronska valovna funkcija v bližini prvega atoma bo kar enaka valovni funkciji elektrona v vodikovem atomu. Prav enaka pa bo situacija, ko se bo elektron nahajal v bližini drugega protona. Ker sta verjetnosti, da najdemo elektron v bližini prvega ali drugega protona enaki, ne moremo povedati, kateri proton pripada vodikovem atomu, kateri pa H^+ ionu. Valovni funkciji elektrona v okolici enega in drugega protona sta torej normalizirani tako, da je verjetnost, da najdemo elektron pri katerimkoli izmed obeh protonov, enaka $\frac{1}{2}$. Valovni funkciji, ki odgovarjata temu primeru, sta prikazani na sliki 2a.

Tudi v primeru, če je medprotonska razdalja enaka 0, rešitev problema že poznamo. V tem primeru imamo opraviti z ionom He^+. Valovna funkcija za ta primer je prikazana na sliki 2c.

V primeru, da je razdalja med obema protonoma sicer majhna, toda končna, bo elektronska valovna funkcija našega sistema v osnovnem stanju kar superpozicija dveh valovnih funkcij za vodikov atom (slika 2b).



Slika 2. Elektronska valovna funkcija sistema H_2^+ v osnovnem stanju



Slika 3. Energija sistema H_2^+ v osnovnem stanju

S podobnim premislekom, kot smo našli valovno funkcijo, poskušajmo najti sedaj še energijo osnovnega stanja molekule H_2^+!

Če je medprotonska razdalja neskončno velika, je energija našega sistema kar energija vodikovega atoma v osnovnem stanju:

$$E_H = -13.6 \text{ eV}$$

Če je medprotonska razdalja nič, pa je elektronska energija našega sistema kar energija He^+ iona, ki je zaradi dvakrat večjega jedrskega naboja štirikrat večja od energije vodikovega atoma v osnovnem stanju:

$$E_{He^+} = -54.4 \text{ eV}$$

Pri končni medprotonski razdalji bo elektronska energija sistema ležala med temi vrednostmi. K energiji našega sistema moramo prišteti še coulomsko odbojno energijo med obema protonoma. Ta energija bo sorazmerna 1/R in bo monotono naraščala proti neskončnosti, ko gre R od zelo velikih vrednosti proti nič. Ker smo privzeli, da jedri mirujeta, je totalna energija sistema kar vsota elektronske energije (ki vsebuje tudi kinetično energijo elektrona) in »odbojne« energije obeh jeder. Kot vidimo iz slike 3, bo totalna energija imela minimum pri končni vrednosti R. Pri tej vrednosti dobimo torej stabilno vezano stanje sistema — tvori se molekula H_2^+. Ravnovesna razdalja R_0 je 1.06 A, energija sistema pri tej medprotonski razdalji pa 16.3 eV. Vezavna energija sistema, to je energija, ki jo moramo dovesti, če želimo, da molekula H_2^+ razpade na H in H^+, pa je: 16.3 — 13.6 = 2.7 eV. Poskušajmo sedaj rešiti še Schrödingerjevo enačbo za molekulo H_2^+!

Z ozirom na gornji premislek skušajmo najti elektronsko valovno funkcijo našega sistema kot

$$\Psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

kjer sta φ_1 in φ_2 rešitvi Schrödingerjeva enačba za izoliran vodikov atom, c_1 in c_2 pa konstanti, ki ju izberemo tako, da bo energija sistema minimalna.

Zaradi enostavnosti spustimo zaenkrat interakcijo med obema protonoma in izračunajmo najprej elektronsko energijo sistema!

Če množimo Schrödingerjevo enačbo $H\Psi = E\Psi$ z leve strani s Ψ in integriramo po vsem prostoru, dobimo energijo sistema v obliki

$$E = \frac{c_1^2 H_{11} + 2c_1c_2H_{12} + c_2^2H_{22}}{c_1^2S_{11} + 2c_1c_2S_{12} + c_2^2S_{22}}$$

Tu so matrični elementi H_{11}, H_{12} in S_{11} in S_{12} definirani z

$$H_{11} = \int \varphi_1 H \varphi_1 \mathrm{d}V \qquad S_{11} = \int \varphi_1^2 \mathrm{d}V = 1$$
$$H_{22} = \int \varphi_2 H \varphi_2 \mathrm{d}V \qquad S_{22} = \int \varphi_2^2 \mathrm{d}V = 1$$
$$H_{12} = H_{21} = \int \varphi_1 H \varphi_2 \mathrm{d}V = \beta \qquad S_{12} = S_{21} = \int \varphi_1 \varphi_2 \mathrm{d}V = S,$$

konstanti c_1 in c_2 pa sta variacijska parametra, ki ju izberemo tako, da je naš nastavek najboljši možni približek resnični valovni funkciji sistema. Ker mora biti energija sistema stacionarna z oziroma na c_1 in c_2, dobimo od tod pogoja

$$\frac{\delta E}{\delta c_1} = 0, \qquad \frac{\delta E}{\delta c_2} = 0$$

in sekularni enačbi

$$c_1(H_{11} - ES_{11}) + c_2(H_{12} - ES_{12}) = 0$$
$$c_1(H_{12} - ES_{12}) + c_2(H_{22} - ES_{22}) = 0$$

Rešitev tega sistema dveh enačb nam da energijo E osnovnega stanja in pa razmerje koeficientov c_1 in c_2.

Iz simetrijskih lastnosti problema takoj vidimo, da mora veljati

$$H_{11} = H_{22} = E_0$$

pri čemer je E_0 energija izoliranega vodikovega atoma ter

$$c_1^2 = c_2^2$$

Od tod dobimo takoj rešitev gornjega sistema kot

$$E_{\pm} = E_0 \pm \frac{\beta - E_0 S}{1 \pm S}$$

Če zanemarimo matrični element S, ki nam pove, v kakšni meri se obe atomski valovni funkciji prekrivata in ki je običajno mnogo manjši od ena, lahko rešitev napišemo v preprostejši obliki:

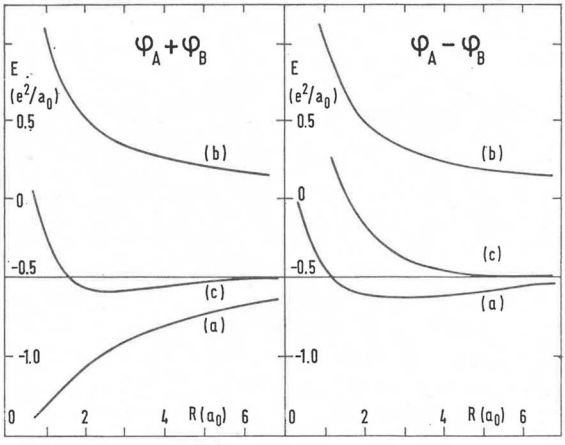
$$E_{\pm} = E_0 \pm \beta$$

Gornja enačba nam pove, kako se osnovni energijski nivo obeh izoliranih »atomov« $E_0 = H_{11} = H_{22}$ razcepi pri tvorbi molekule na dva nivoja E^+ in E^-, od katerih ima eden višjo, drugi pa nižjo energijo kot E_0. Z ozirom na to, da je »resonančni« integral negativen, ima stanje s + predznakom nižjo energijo od stanja z — predznakom. Odgovarjajoči valovni funkciji sta

$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad \Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Če k gornji rešitvi za elektronsko energijo molekule prištejemo še energijo odbojne interakcije med obema protonoma vidimo (sl. 4), da simetrična rešitev E_+ in Ψ_+ omogoča vezano stanje, antisimetrična rešitev E_- in Ψ_- pa ne.

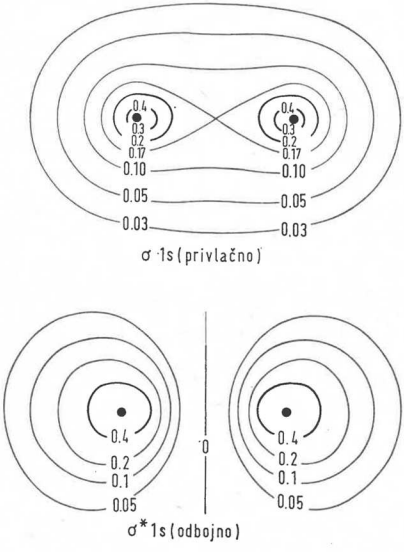
Slika 5 nam kaže, da je elektronska gostota med obema jedroma mnogo večja pri simetrični rešitvi kot pri antisimetrični. To dejstvo je odločilno za tvorbo stabilne molekule.



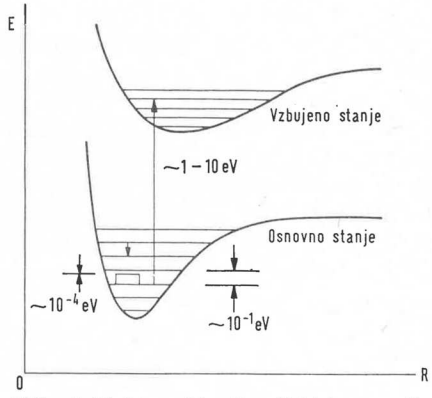
Slika 4. Odvisnost elektronske (a), medprotonske (b) in totalne energije molekule H_2^+ od medprotonske razdalje za simetrično in antisimetrično rešitev Ψ_+ in Ψ_-

Elektron istočasno privlači obe jedri in ju »zlepi skupaj« v stabilno molekulo. Zaradi tega se je potencialna energija elektrona bolj znižala, kot pa se je kinetična povečala.

Pri antisimetrični rešitvi pa je koncentracija elektronske gostote v področju med obema jedroma premajhna, da bi omogočila tvorbo stabilne molekule.



Slika 5. Krivulje konstantne elektronske gostote $|\Psi|^2$ za simetrično in antisimetrično osnovno stanje molekule H_2^+



Slika 6. Elektronski, vibracijski in rotacijski energijski nivoji dvoatomske molekule

Na povsem enak način lahko razložimo tudi tvorbo nevtralne vodikove molekule H_2: tu le dodamo drugi elektron v osnovno stanje. Zaradi Paulijevega principa sta spina obeh elektronov antiparalelna, zaradi večje elektronske gostote med obema jedroma pa je vezavna energija molekule H_2 večja od vezavne energije molekularnega iona H_2^+ (tabela I). Če bi molekuli H_2 dodali še tretji elektron, bi zaradi Paulijevega principa moral iti v »vzbujeno« antisimetrično stanje. Zaradi tega bi bil ion H_2^- verjetno nestabilen. Prav tako bi bila nestabilna tudi molekula He_2, saj bi dva elektrona šla v osnovno stanje, dva pa v vzbujeno. Molekularni ion He_2^+, ki bi imel le en elektron v vzbujenem stanju, pa bi bil stabilen.

Tabela I

Molekula	Razdalja med jedroma (Å)	Vezavna energija (eV)	Molekula	Razdalja med jedroma (Å)	Vezavna energija (eV)
H_2^+	1.06	2.65	Li_2	2.67	1.03
H_2	0.74	4.72	HF	0.92	6.4
He_2^+	1.08	3.1	LiF	—	6.6
He_2	nestabilna	nestabilna	NaCl	2.51	3.58

Poudariti moramo, da lahko vezavno energijo molekul izračunamo povsem klasično s pomočjo elektrostatike, če je porazdelitev elektronske gostote poznana. Določitev elektronske gostote pa je seveda kvantnomehanski problem, kjer klasična fizika odpove.

Vse to velja za poliatomske molekule prav tako kot za diatomske. Razlika je le v težavnosti problema. Že izračun elektronske strukture majhnih molekul kot H_2O ali NH_3 zahteva uporabo visokozmogljivih računalnikov, obdelava večjih molekul pa zaenkrat v kvantitativnem smislu ni možna. Neodvisno od tega pa smemo reči, da nam že enostavni primer molekule H_2^+ omogoča razumevanje narave kemijske vezi.

Energijske nivoje molekul lahko proučujemo s pomočjo meritev molekularnih emisijskih in absorpcijskih spektrov. Poleg *elektronskih* prehodov lahko opazujemo še *vibracijske* in *rotacijske* prehode (slika 6).

Nihanje jeder okoli ravnovesne lege lahko vsaj približno opišemo s pomočjo harmonskega oscilatorja. Kvantna mehanika nam pove, da ima harmonski oscilator diskreten energijski spekter. Energijski nivoji so podani z enačbo:

$$E_n = (n + 1/2)h\nu$$

pri čemer je vibracijsko kvantno število n enako 0, 1, 2, 3, ... Pri molekuli NaCl na primer so vibracijski energijski nivoji razmaknjeni za $h\nu_0 = 0.04$ eV. Ker so vezavne energije molekule reda velikosti enega elektronskega volta, imamo približno 20 vibracijskih nivojev v dani potencialni jami. Prehodi med vibracijskimi nivoji leže v infrardečem delu spektra.

Tudi rotacija molekule okoli težišča je kvantizirana. Rotacijski energijski nivoji diatomske molekule so podani z

$$E_L = \frac{\hbar^2}{2J} L(L + 1)$$

pri čemer je L rotacijsko kvantno število, J pa vztrajnostni moment diatomske molekule, $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$. Tu sta m_1 in m_2 masi obeh jeder, r_1 in r_2 pa odgovarjajoči razdalji jeder od težišča molekule.

V nasprotju z vibracijskimi, rotacijski energijski nivoji niso ekvidistantni. Razmak med dvema energijskima nivojema je

$$E_L - E_{L-1} = (\hbar^2/J)L$$

V primeru molekule NaCl je $(\hbar^2/J) = 5 \cdot 10^{-5}$ eV. Razmak med rotacijskimi nivoji je torej znatno manjši kot razmak med vibracijskimi. Prehodi med rotacijskimi nivoji leže v mikrovalovnem področju.

Omenimo naj še dejstvo, da se pri elektronskih prehodih običajno spremeni tudi vibracijsko in rotacijsko kvantno število. Prehodi med temi nivoji leže običajno v vidnem delu spektra. Ker je za začetno in končno stanje na razpolago veliko število vibracijskih in rotacijskih podnivojev, so ti elektronski molekularni spektri običajno zelo komplicirani. Namesto ostrih črt, kot jih vidimo pri atomskih absorpcijskih spektrih, dobimo pri molekulah vrsto *trakov*.

Če vzbujeno stanje ni vezano stanje sistema, potem povzroči elektronski prehod disociacijo molekule. V spektru dobimo v tem primeru absorpcijski kontinuum.

STANJE MATEMATIČNIH ZNANOSTI

(Nadaljevanje)

MOS 01A65

Diferencialna geometrija. Kot lahko Fermatovo in Descartesovo analitično geometrijo in njen kasnejši razvoj v algebraično geometrijo opišemo kot uporabo algebre v geometriji, tako lahko diferencialno geometrijo opišemo kot uporabo infinitezimalnega računa v geometriji. Zrelost je dosegla šele, ko so se matematiki naučili živeti v prostorih z več kot tremi dimenzijami. Na tem nivoju abstrakcije ne moremo risati likov, ampak moramo delati s formulami, in formule same postanejo tako komplicirane, da postane glavno delo iznajdba primernega zapisovanja. To delo so dovršili italijanski geometri proti koncu 19. stoletja. »Tenzorska analiza« ali »Riccijev račun«, ki so ju ustvarili, sta bila v tistem času primer samostanske matematike v najbolj ezoteričnem smislu. Toda ko je Einstein iskal matematični jezik, da bi izrazil ideje o splošni relativnosti, ga je vodilo, čeprav z velikim notranjim odporom, kot je sam izjavil, k tenzorski analizi.

Nepričakovana raba diferencialne geometrije v relativnosti je vodila k razcvetu te panoge, ki se nadaljuje še danes. Prvotno delo v diferencialni geometriji je bilo predvsem »lokalno«; študirali so omejen, navadno zelo majhen del prostora, ki so ga proučevali. V moderni diferencialni geometriji pa proučujejo »globalne« lastnosti, to je, lastnosti prostora kot celote, predvsem pa jih zanima zveza med lokalnimi in globalnimi lastnostmi.

Splošna topologija. Ta veja geometrije je predvsem študij zelo splošnih geometrijskih objektov v navadnem prostoru. Klasična geometrija, od Grkov do 19. stoletja, je omejila svoja proučevanja na razmeroma preproste like — premice, trikotnike, kroge, elipse in podobno. Teorija množic je povzročila, da so začeli matematiki obravnavati tudi »divje« like — krivulje brez tangent, krivulje, ki gredo skozi vsako točko v kvadratu (tako imenovane Peanove krivulje) itd. Ko je nastala ta vrsta matematike, so jo nekateri matematiki, vključno s tako velikim možem, kot je bil Poincaré, odklonili, češ da je to študij spačkov. Pokazalo pa se je, da se spački, za katere je Poincaré mislil, da so si jih izmislili ljudje, ki so iskali grdoto, sami pojavljajo v zvezi z lepimi klasičnimi predmeti (to so opazili v teoriji tako imenovanih Kleinovih grup, ki jih je vpeljal sam Poincaré!) in nadaljnja raziskovanja odkrijejo lepoto in harmonijo tam, kjer je bil v začetku videti svet kaosa.

Drugi vidik splošne topologije je logična analiza naših najosnovnejših idej o prostoru.

Algebraična topologija. Topologija študira oblike geometrijskih objektov in kvalitativne lastnosti zveznih transformacij med takimi objekti. Prvotni imeni za panogo sta bili »analysis situs« in kasneje kombinatorna topologija. Pri proučevanju kvalitativnih vidikov geometrije so najprej obravnavali objekte, sestavljene iz najpreprostejših sestavnih delov, ki si jih lahko mislimo — na primer iz točk, daljic, trikotnikov, tetraedrov. Brouwer, eden od ustanoviteljev topologije, je imenoval te sestavne dele »simplekse«. Določeni osnovni objekti, ki jih proučujemo v algebraični topologiji, se imenujejo »kompleksi«. Sestavljeni so iz simpleksov tako, da imata dva simpleksa, ki se dotikata, skupno celo stransko ploskev. Pri proučevanju kompleksov ne upoštevamo njihove velikosti ali oblike, ampak samo način, kako so kombinirani različni simpleksi. Od tu izvira ime »kombinatorna topologija«. Spremenili so ga v algebraično topologijo, ko je postalo očitno, da je napredek panoge nujno odvisen od uporabe kompliciranega algebraičnega orodja. Danes je na razpolago mnogo različnih

algebraičnih pripomočkov za študij topologije. Nekatere dele topologije so dejansko popolnoma zreducirali na algebro, in čeprav dobljeni algebraični problemi še niso popolnoma rešeni, so ugotovili njihovo efektivno izračunljivost, torej so teoretično rešljivi.

Opisali bomo en osnoven problem na meji med splošno topologijo in algebraično topologijo. Ali metoda, s katero predstavimo geometrijski objekt kot kompleks, res zajema vse geometrijske lastnosti, ki jih hočemo zajeti? Natančneje, mislimo si, da imamo dva kompleksa, ki sta topološko ekvivalentna, to je taka, da lahko med njunimi točkami ugotovimo takšno povratno enolično korespondenco, pri kateri bližnjim točkam v enem kompleksu ustrezajo bližnje točke v drugem. Ali lahko nato komplekse razdelimo v finejše na tak način, da so dobljeni delni kompleksi »kombinatorično ekvivalentni«, tako da pri ustrezni povratno enolični korespondenci vrhovom simpleksa v enem kompleksu ustrezajo vrhovi simpleksa v drugem?

Odgovor je odvisen od dimenzije, v kateri delamo. Pritrdilen je za dimenzije 1, 2 in 3, toda Milnor je dokazal pred petimi leti, da je odgovor na splošno negativen. Po drugi strani pa je odgovor verjetno pritrdilen za komplekse, ki imajo določeno lastnost gladkosti, v tehničnem jeziku za mnogoterosti. (Pritrdilen odgovor za primer tridimenzionalnih mnogoterosti je našel Moise leta 1952. Njegov dokaz je genialen, toda elementaren. Pritrdilen odgovor za določene mnogoterosti z dimenzijo vsaj 5 je čisto pred kratkim dobil šestindvajsetletni matematik Sullivan. Uporabljal je mnoge dele mašinerije, ki so jo razvili topologi v zadnjih dvajsetih letih. Primer štirih dimenzij se zdi danes popolnoma nedostopen).

Ena od najpomembnejših uporab topologije je v analizi, zlasti pri reševanju diferencialnih enačb. En člen med topologijo in analizo je osnovan z znano »Morsejevo teorijo« kritičnih točk. Kaže, da bo nedavna razširitev te teorije na neskončno dimenzionalne prostore (Smalea in drugih) pomembna za reševanje nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb.

Diferencialna topologija. V algebraični topologiji obravnavamo komplekse, to je, geometrijske objekte, ki se dajo razstaviti v preproste sestavne dele, simplekse. Drugi način obdelave pa je tak, da obravnavamo objekte, ki se dajo opisati blizu vsake točke s sistemom koordinat, kot tiste v analitični geometriji. Primer je površina krogle, na kateri so točke določene s pomočjo zemljepisnih koordinat, širine in dolžine. V splošnem je nemogoče uporabiti en sistem koordinat za ves objekt. Na primer, v primeru zemljepisnih koordinat sta na obeh polih singularnosti. Zahtevamo pa, da lahko pokrijemo ves objekt s kosi, na katerih lahko določimo koordinate; zahtevamo tudi, da formule, ki opisujejo prehod iz enega koordinatnega sistema v drugi, vsebujejo samo gladke (odvedljive) funkcije. Če geometrijski objekt lahko pokrijemo s takimi koordinatnimi kosi, ga imenujemo gladka mnogoterost; če definiramo sistem koordinatnih kosov, pravimo, da smo na našem objektu definirali odvedljivo strukturo.

Dolgo časa so mislili, da je odvisno od tehnične prikladnosti, ali obravnavamo topologijo pohlevnih objektov s kompleksi ali z odvedljivimi mnogoterostmi. Mislili so, na primer, da je nujen samo en način, na katerem lahko določimo odvedljivo strukturo na smiselnem objektu. Prednost obravnave s kompleksi je v možnosti, da uporabljamo algebro. Prednost obravnave z mnogoterostmi pa je v možnosti, da uporabljamo analizo, odvajanje in integriranje. Slavni izreki de Rhama, ki je pokazal, da lahko pridemo do določenih števil, ki označujejo obliko objekta s stališča algebraične topologije, tudi z integralnim računom, so bili zgodnji triumf tega pristopa.

Toda diferencialna topologija kot popolnoma neodvisna panoga je nastala šele leta 1952 z Milnorjevim pomembnim odkritjem, da se da celo pri tako preprostem objektu — s topološkega vidika — kot je sedemdimenzionalna sfera, na več kot en način definirati odvedljiva struktura. To odkritje je delilo usodo drugih osnovnih »protiprimerov«. Najprej se je zdelo, da so tako imenovane »Milnorjeve sfere« spački, za katere je bil njihov odkritelj

dovolj genialen, da jih je konstruiral, ki pa se nikakor ne morejo pojaviti v pametni matematični zvezi. Toda pred kratkim so odkrili, da se Milnorjeve sfere neizogibno pojavljajo v teoriji funkcij več kompleksnih spremenljivk. Eksistenca različnih struktur je daleč od tega, da bi bila grda in kaotična, in odkriva svet skrite harmonije in simetrije.

Diferencialna topologija je sedaj postala ena od najaktivnejših matematičnih panog. Bolj kot katerakoli druga veja topologije je povezana z diferencialno geometrijo, teorijo diferencialnih enačb in algebraično geometrijo. V nekem smislu predstavlja nastanek diferencialne topologije povratek k njenemu izvoru v problemih mehanike in diferencialnih enačb. Tu so spet jasno vidne tendence po združevanju v sodobni matematiki.

Liejeve grupe. Prej smo omenili, da je grupa algebraičen pojem, ki opisuje simetrijo. V teoriji Liejevih grup (tako imenovanih po norveškem matematiku iz 19. stoletja, Sophusu Lieju) so geometrija, analiza in algebra neločljivo povezane. Liejeve grupe so grupe v navadnem smislu, katerim je dodana lastnost, da se dajo parametrizirati, vsaj lokalno, z realnimi števili. (Primer za to je skupnost vseh pomikov togega telesa. To je grupa, kajti zaporedje pomikov je spet pomik, in vsak pomik lahko uničimo z drugim. Pomik togega telesa lahko opišemo s šestimi števili; tri povedo, kam je bila premaknjena določena točka v telesu, tri pa, kako je telo rotiralo okrog te točke. Torej je grupa togih gibanj v navadnem prostoru šestparametrična Liejeva grupa). Ta parametrizacija ima takojšnje in daljnosežne posledice, kajti s tem postanejo uporabne metode iz analize in Liejev prvotni pojem, infinitezimalna grupa (ki jo sedaj imenujemo Liejeva algebra), zavzame osrednje mesto v teoriji. Geometrijski objekti so seveda vodili k bogati zalogi primerov in mnogo truda so vložili v to, da so klasificirali Liejeve grupe na osnovi teh primerov.

Liejeve grupe igrajo prevladujočo in združujočo vlogo v moderni matematiki; stimulirale so pomembno raziskovalno delo v algebri in topologiji in tako zelo različni področji, kot sta teorija končnih grup in diferencialna geometrija, sta danes močno pod vplivom teorije Liejevih grup. »Teorija reprezentacij« Liejevih grup, ki je bila ob raznih prilikah vir inspiracije važnih odkritij v fiziki, predlaga popolnoma nove smeri v analizi, in s tem vgrajuje in na novo oživlja velike dele klasične analize.

UPORABNE MATEMATIČNE ZNANOSTI

Področja matematične znanosti izven jedra so različna.

Računalništvo ni samo matematična znanost, ampak še nekaj več. V sedanji obliki ne more obstajati brez matematike. Toda računalništvo bi bilo popolnoma neplodno brez računalnika, kot nam je dostopen sedaj in kot si ga lahko predstavljamo v prihodnosti.

Moderna statistika ne more delovati brez matematike, posebno ne brez teorije verjetnosti. Prav tako ne more obstajati brez stimulacije, ki jo dajejo kvantitativni aspekti znanstvene metode. Kakor računalništvo tudi statistika ni samo matematična znanost, ampak še nekaj več.

Kot druga skrajnost obstajajo panoge — kot na primer matematična ekonomija, matematična psihologija, matematična lingvistika —, ki obravnavajo matematične vidike precej specifičnih področij.

Na vmesnem nivoju glede širine in istovetnosti so panoge, ki izhajajo z nekega področja uporabnosti, ki je navadno precej široko. Te panoge so sprva izbrale orodje, primerno za reševanje problemov z ustreznega področja uporabnosti, a so rasle in se razvile tako daleč, da imajo lasten matematičen značaj, ter so si s tem pridobile določeno neodvisnost obstoja in širino uporabnosti, ki bi je sicer ne imele. Odličen primer je fizikalna matematika, ali klasična uporabna matematika, ki je zrasla iz matematike klasične fizike do stopnje, kjer obravnava veliko raznovrstnih uporab matematične analize.

Dinamika tekočin: primer za fizikalno matematiko

Da bi ilustrirali značaj fizikalne matematike (klasične uporabne matematike), bomo dokaj podrobno opisali enega od tipičnih in osrednjih pododdelkov — matematično teorijo gibanja tekočin. Temu opisu bo sledilo nekaj splošnih pripomb o sorodnih področjih.

Tako kapljevine kot plini (nevtralni ali ionizirani) so tekočine. Če se natančno izrazimo, je študij gibanja tekočin del fizike. Toda že več desetletij se z njim v glavnem ukvarjajo uporabni matematiki, inženirji, astrofiziki in geofiziki (vključno z meteorologi in oceanografi). Uporabna matematika je v študiju gibanja tekočin dosegla nekaj svojih najbolj spektakularnih uspehov, pretrpela pa je tudi nekaj opaznih porazov, za katere upamo, da so samo začasni.

Poskusi, da bi matematično opisali gibanje tekočin, so skoraj tako stari kot matematična analiza. Zgodnja zgodovina dinamike tekočin je povezana z imeni, kot so Bernoulli, Euler in D'Alembert. Klasična dinamika tekočin je privedla do nekaterih najpomembnejših dosežkov v matematiki ter do metod in idej, ki so se dale uporabiti marsikje drugje. Riemann je prispeval k osnovni teoriji širjenja močnih kompresijskih valov. Njegove ideje so vodile do razvoja pojma »karakteristike«, ki je močno vplival na teorijo parcialnih diferencialnih enačb. Mnogo Hadamardovega dela obravnava širjenje valov. Vse to delo je položilo temelje za mnogo nedavnih dosežkov v teoriji nadzvočnega gibanja in udarnih valov, ki se pojavljajo tako na zemlji (prebitje zvočnega zidu z nadzvočnimi letali) kot tudi pri zvezdah (nove in supernove).

Za precejšen del klasične dinamike nestisljivih tekočin je v začetku kazalo, da bo popolnoma neuporaben kot model za fizikalno realnost. Na primer, D'Alembert je dokazal, da telo, ki se giblje skozi tekočino, ne čuti upora. Seveda je D'Alembertova izpeljava zanemarila viskoznost (težnjo dela tekočine, da potegne s seboj sosednje delce); toda njegov rezultat je bil nasproten izkustvu celo v primerih, kjer je kazalo, da so učinki viskoznosti zanemarljivi.

Teorije o pretakanju tekočin, ki so bile uporabne za fizikalno realnost, so se pojavile šele v devetnajstem stoletju in v začetku dvajsetega stoletja, v glavnem kot odgovor na potrebe aeronavtike. Eden najpomembnejših dosežkov je bila Prandtlova teorija o mejni plasti, ki je pokazala, v katerih primerih lahko uporabimo klasično dinamiko tekočin, da dobimo fizikalno veljavne rezultate, in kako v takih primerih omejimo učinke viskoznosti na tanko plast tekočine zraven premikajočega se telesa (od tu ime »mejna plast«). Mimogrede rečeno, teorija o mejni plasti je vodila k pomembnim dosežkom v splošni teoriji diferencialnih enačb.

Stisljivost zraka je bila zanemarjena v aerodinamiki, ki je zadoščala za tehnične potrebe dobe do 2. svetovne vojne. Zanimanje za polete z veliko hitrostjo je zahtevalo upoštevanje stisljivosti in soočiti se je bilo treba z bistveno nelinearno teorijo plinskega toka. Medtem ko so določena matematična vprašanja v tej teoriji še vedno nepojasnjena, je danes na razpolago dovolj teoretičnega razumevanja za praktične potrebe. Pokazalo se je, da je »zvočni zid« v glavnem namišljen, toda velike višine, ki so jih dosegli pri poletih z raketami, so zahtevale nov tip dinamike tekočin, dinamiko razredčenih plinov. Ta teorija je prispevala k uspešni rešitvi problema za povratek zemljinih satelitov.

Mlada in zelo aktivna panoga moderne dinamike tekočin je magnetna hidrodinamika, ki opisuje, kako vplivajo elektromagnetna polja in prevodne kapljevine ali ionizirani plini (plazme) drug na drugega. Upamo, da bo ta predmet prispeval k bodočemu toku razvoja matematike prav toliko, kot so prispevali posamezni predmeti elektromagnetne teorije, dinamike tekočin in statistične mehanike. Magnetna hidrodinamika se uporablja v astrofiziki (zvezdne atmosfere in medzvezdna snov), pri iskanju vódene termonuklearne reakcije in pri obetajoči uporabi armatur ioniziranih plinov za generiranje električne energije. Pre-

senetljiva spiralna struktura mnogih galaksij (vključno z našo) se da sedaj razložiti s sredstvi magnetne hidrodinamike in statistične dinamike zvezdnih sistemov. Tukaj igra prevladujočo vlogo ravno zelo star predmet o tekočinah z lastno privlačnostjo, ki so ga proučevali MacLaurin, Riemann in, v drugi zvezi, Dedekind.

Znano je, da se da obnašanje zvezdnih sistemov in razredčenih plazem opisati s posebnim tipom »Boltzmannove enačbe brez trkov« in da ti sistemi kažejo »skupinsko obnašanje«. Še v večjem merilu govorjeno, često obravnavamo razporeditev snovi v vesolju kot tekočine, ki se vedejo po Einsteinovi splošni relativnostni teoriji. Vprašanje o obstoju gravitacijske radiacije vodi k težkim nelinearnim diferencialnim enačbam, ki prosijo za rešitev.

V zadnjih letih je prišlo do velikega porasta študija mehanike tekočin z namenom, da bi lahko opisali pojave v geofiziki (meteorologiji in oceanografiji), kjer rotacija zemlje često igra pomembno vlogo. Veliko dela so opravili uporabni matematiki; Von Neumann je bil med začetniki v uporabi numeričnih metod pri napovedovanju vremena. Problemi hidrodinamične stabilnosti, ki predstavljajo še vedno živo področje, se pojavljajo na različne načine.

Toda nekateri problemi v dinamiki tekočin, ki so skoraj tako stari kot znanost sama, se še vedno upirajo vsem naporom matematičnega obravnavanja. Izstopajoč primer je turbulenca, pojav, ki ga lahko opazi vsak, ki gleda razblinjenje dima iz tovarniškega dimnika ali iz cigarete. Čeprav se je nekaj najboljših fizikov in matematikov poskusilo s tem problemom in doseglo nekaj delnih uspehov, je za zdaj malo upanja za zadovoljivo rešitev v bližnji prihodnosti. Sedaj je jasno, da se nanašajo tako obstoječe raziskave kot tudi nerešeni problemi na širše področje nelinearnih slučajnih procesov.

Vendar teorija osnovnih parcialnih diferencialnih enačb, ki opisujejo gibanje nestisljivega viskoznega toka, še ni popolnoma razvita. Zato ostaja vabljiv in zanimiv problem za čiste matematike in vir nenehne velike vzpodbude za delo.

Pojmi in metode, ki nastanejo v eni veji uporabne matematike, se dajo često uporabiti v drugih vejah. Ko enkrat teorijo postavimo v matematično obliko, celo v obliko, ki še ne zasluži resne pozornosti jedra matematike, je lahko osnovne pomembnosti za druge veje uporabne matematike. Ravnotežje, stabilnost in nestabilnost, valovanje, linearni proti nelinearnim procesom, reverzibilni proti ireverzibilnim procesom, entropija — in lahko jih naštejemo še mnogo več — so gotovo pojmi, katerih uporaba je splošna. Matematična teorija ekonomije uporablja mnoge od njih. Tudi nova znanost, teorija informacij, s svojimi zanimivimi izreki o kodiranju in pomembnimi uporabami pri praktičnih problemih v komunikacijski tehniki, uporablja pojem entropije.

Ta opazovanja kažejo, da ima mnogo klasične uporabne matematike težnjo, da se spoji v skladno celoto preko tradicionalnih znanstvenih panog in s tem prispeva k moči in koristnosti celega področja dejavnosti.

*(Nadaljevanje prihodnjič)**

---

* Prevod članka: The Mathematical Sciences: A Report Section II. The State of the Mathematical Sciences, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 2, 345—390 (1971). Zahvaljujemo se National Academy of Sciences, Washington D.C., U.S.A., da je dovolila prevod.

ŠOLA

O AKTIVNEM UČENJU MATEMATIKE

Nekoč smo gledali matematiko predvsem kot reševanje nalog. V zadnjem času posvečamo v šoli več pozornosti tudi teoriji, katere poglobitev je nujno potrebna pri novejši matematiki. Žal pa je še razširjeno mnenje, da sta teorija in reševanje nalog dve ločeni stvari in da je učenje teorije le pasiven pristop k matematiki, ki mu bo šele pozneje sledilo samostojno delo. In vendar — če pojem problema razumemo širše, bomo našli številne probleme tudi v teoriji sami; s preučevanjem le-teh bo postalo že učenje teorije zares samostojno delo.

Problem ni samo običajna naloga, kjer je iz nekaterih podatkov treba dobiti druge, marveč je problem tudi razmišljanje o tem, zakaj je dokaz nekega izreka ravno tak in ne drugačen, kakšen pomen in posledice imajo razni aksiomi in izreki, kako so si kakšni matematični pojmi sorodni. Morda se zdijo taki, teoretični ali celo filozofski problemi pretežki za mladega človeka. A marsikak srednješolec bo ob njih spoznal harmonijo in širino matematike, kar ga bo opogumilo in navdušilo za to znanost.

Učenec naj ne gleda problemov le tam, kjer mu jih postavijo drugi v obliki nalog, marveč naj jih zna poiskati tudi sam. Za to je seveda potrebna neka mera zanimanja in idealizma. Resnično zanimanje za stroko daje človeku zavest, da ima vse njegovo prizadevanje smisel. Ne glede na zunanje uspehe tak človek čuti, da lahko tudi on prispeva svoj delež k matematiki.

Naj navedem nekaj napotkov za samostojno iskanje problemov in s tem aktivno učenje matematične teorije:

1. Ob aksiomih, definicijah in izrekih v knjigi naj si učenec njihovo vsebino nazorno predstavlja in poišče konkretne primere za te trditve — tako iz izkustva kakor iz dosedanjega znanja matematike. Primer: Ob aksiomih in izrekih o skladnosti v geometriji si bo učenec razložil konstrukcijske naloge, ki jih pozna iz osnovne šole.

2. S preučevanjem dokazov raznih izrekov si učenec pridobi osnovne ideje, ki nastopajo pri dokazovanju v neki teoriji. S pomočjo tega bo poskusil sam dokazati še druge izreke (ne da bi dokaz takoj prebral).

3. Ko učenec pozna nekaj izrekov, jim lahko sam poišče analogne izreke, ki jih nato prav tako samostojno dokaže. Primer: Ko učenec spozna Paschev aksiom in iz njega sledeče izreke, bo lahko postavil podobne trditve za četverokotnik in mnogokotnik. Pri dokazu zanje si bo pomagal tako, da bo lik razdelil na trikotnike in upošteval izreke za trikotnik. Prav tako je zlahka postaviti primerne lastnosti za presek množic, ko enkrat poznamo lastnosti unije.

Dokazi izrekov, ki jih posredujemo učencu, so v osnovi formalni preskusi pravilnosti teh izrekov. Za razvoj samostojnega mišljenja pa je treba dati učencu še nekaj več: dokazi naj mu pomagajo, da bo zares »videl« razne povezave v matematiki; ideje v dokazih naj bodo za učenca izkušnje, s katerimi bo oblikoval svoje matematično mišljenje. — Zato je tudi dobro obravnavati matematična področja z različnih vidikov. Geometrijo, na primer, se da formalno najlepše izraziti na algebraičen način. Vendar je tudi geometrična, t. j. sintetična obravnava zelo koristna, saj razvija človekovo intuicijo ter mu daje mnogo zanimivih idej in matematičnih doživetij.

Množina matematične snovi, ki jo predelamo v šoli, je nujno omejena. Zato je pametno, če se učenec dodatno izobražuje z branjem učbenikov in dostopnejših knjig, predvsem iz tistih področij, za katera čuti največ veselja. Tu so še posebej koristni zgoraj omenjeni načini učenja (če morda v knjigi ni dodanih vaj in nalog, si jih bo učenec z nekaj domišljije

postavil sam). Sploh je zelo dobro, da si človek sam postavlja probleme, saj se jih tako globlje zaveda in jih zato — ob pomoči intuicije — tudi laže reši. Tak način dela slednjič pripomore k vsestranskemu razvoju človekovih *matematičnih sposobnosti.*

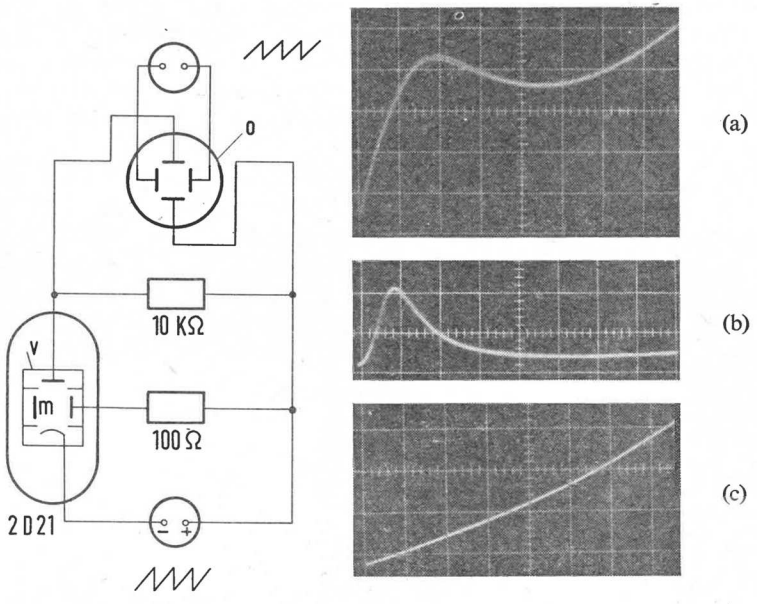
Janez Rakovec

ŠOLSKI POSKUSI, KI DAJO PODATKE O ATOMU*

V zadnjem letniku srednje šole naj bi si izoblikovali dijaki pri fiziki tudi kvantitativno predstavo o atomih. Do te bi prišli najlaže, če bi ocenili osnovne podatke o atomih pri šolskih poskusih. Zato preglejmo manj zahtevne poskuse, pri katerih lahko ocenimo *velikost atoma, velikost jedra* in izvemo ključni podatek o *energiji atoma*! V sedanjih razmerah so opisani poskusi najbrž še prezahtevni za srednje šole. Po napredku v zadnjih letih pa morda ni neutemeljeno pričakovati, da jih bodo v prihodnosti kazali tudi na nekaterih naših srednjih šolah.

Ramsauerjev poskus. Pri tem poskusu dobimo oceno za velikost atoma ksenona.[1,2] Uporabimo plinsko triodo — *tiratron* 2D21 — napolnjeno s ksenonom pri tlaku okoli 0,05 tora. Na mrežico, ki je zvezana z zaščitnim valjem, damo majhno pozitivno napetost.

* Prirejeno po prvem delu predavanja »Zgradba atoma« na seminarju »Atom«. Drugi del je objavljen skupaj s preostalimi predavanji.



Sl. 1. Ramsauerjev poskus z osciloskopom. (Taka izvedba je prikladnejša za demonstracijo, posebno, če gre le za oceno[2], medtem ko je zanesljivejše merjenje z občutljivim instrumentom[1].) Vezje (levo): *m* je mrežica v tiratronu 2D21, ki je zvezana z zaščitnim valjem *v*. Izvir daje žagasto napetost, ki narašča od 0 do 8 V. Žagasta napetost z enako frekvenco je priključena na ploščici za vodoravni odklon. Odvisnost anodnega toka v tiratronu od napetosti izvira (desno): Kurilna napetost na katodi je 4 V in maksimum je pri napetosti malo manjši od 2 V (vodoravna stranica kvadrata ustreza 1 V) (a). Kurilna napetost je izključena. Zaradi ohlajanja katode se zmanjša tok na mrežico in z njim padec napetosti na mrežnem uporu; maksimum se premakne proti napetosti 1 V (b). Vrh tiratrona je potopljen v tekoči zrak. Enota na ordinatni osi je 20-krat večja kot na prejšnjih slikah (c). Poskus sta pripravila M. Tavzes in A. Kregar, fotografiral je A. Kregar. Obema se lepo zahvaljujem.

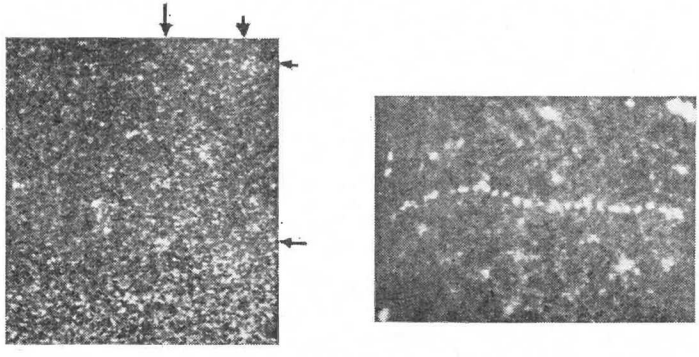
Ta napetost pospeši elektrone, ki izhajajo iz katode. Večamo napetost izvira in merimo tok na anodo. Najprej narašča anodni tok z naraščajočo napetostjo. Nato tok izrazito pade, ko preseže napetost izvira približno dva volta.

Elektroni s kinetično energijo enega ali dveh elektronvoltov se prožno sipajo na atomih ksenona. O tem, da se sipajo na atomih ksenona, se prepričamo, ko previdno potopimo vrh tiratrona v tekoči zrak. Ksenon se utekočini in iz tiratrona nastane prava (vakuumska) trioda. V njej tok strmo in monotono narašča z naraščajočo napetostjo. O tem, da se sipajo prožno, pa priča dejstvo, da ksenon v triodi niti malo ne seva. (Do neprožnih trkov z atomi ksenona in do sevanja bi prišlo, ko bi kinetična energija elektronov presegla 8,5 eV.)

Potek anodnega toka v odvisnosti od napetosti je tedaj v tesni zvezi s prožnim sipanjem elektronov na atomih ksenona. Pri maksimumu anodnega toka se elektroni najmanj sipajo. Kinetično energijo elektronov, ki se najmanj sipajo, ocenimo z 1 eV. To je manj kot kinetična energija, ki ustreza napetosti izvira pri maksimumu anodnega toka (približno 2 V). Upoštevati moramo namreč padec napetosti na mrežnem uporu[1] in še razliko izstopnih del (izstopno delo volframa na anodi je večje kot izstopno delo barijevega oksida na katodi) in kinetično energijo elektronov ob izstopu iz katode.[3]

Curku elektronov s kinetično energijo $W_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = e_0 U$ smemo pri približnem obravnavanju večkrat pripisati lastnosti valovanja z valovno dolžino $\lambda = h/m_e v = h/(2m_e e_0 U)^{1/2}$. Pri tem je h Planckova konstanta, m_e masa elektrona in e_0 o novni naboj, tako da meri koeficient $h/(2m_e e_0)^{1/2} = 12{,}3\ \text{Å V}^{1/2}$. Elektronom s kinetično energijo okoli 1 eV ustreza tedaj valovna dolžina okoli 12 Å.

Elektron iz curka, ki vdre v atom, ima v atomu poleg kinetične še potencialno egergijo. Atom ima na elektron v curku podoben učinek kot ploščica iz prozorne snovi na svetlobni curek. Pri približnem obravnavanju vzporedimo debelino ploščice s premerom atoma $2r$ in vzamemo, da pade svetlobni curek na ploščico pravokotno. Take razmere so nam domače od interference svetlobe na tankih plasteh.[4] Del valovanja se odbije na sprednji mejni ploskvi, del na zadnji. Plast najbolj prepušča valovanje, če se ojačita delno valovanje, ki se ne odbije, in delno valovanje, ki se odbije najprej na zadnji in nato še enkrat na sprednji



Sl. 2. Fotografiji atomov z rasterskim elektronskim mikroskopom.[5] V njem otipa predmet curek elektronov s premerom okoli 1 μm, podobno kot otipa curek zaslon televizijske cevi. Sliko dobijo na zaslonu katodne cevi, v kateri je elektronski curek sinhroniziran s predmetnim curkom. Tok elektronov v slikovnem curku je bil v izbranih primerih sorazmeren z razmerjem med prožno sipanim in neprožno sipanim tokom elektronov v predmetu. Nosilec je bila okoli 20 Å, to je v poprečju pet atomskih plasti, debela ploščica ogljika. Na levi sliki sta vidna dva para uranovih atomov v spojini, ki je nastala iz uranilacetata in benzenkarboksilne kisline. Med uranovima atomoma je razmik 12 Å, ki ga določa benzenski obroč. Povečano 2,15 · 10^6-krat. Na desni sliki je viden niz atomov torija v polimerni spojini, ki je nastala iz torijevega nitrata in benzenkarboksilne kisline. Manjše pege ustrezajo posameznim atomom torija, večje pa skupinam atomov. Povečano 1,4 . 10^6-krat.

mejni ploskvi. Do ojačenja pride, če je dodatna pot drugega delnega valovanja, to je $2 \cdot 2r$, enaka valovni dolžini valovanja v plasti. (Obakrat se odbije valovanje na vakuumu. Če bi bilo več ojačenj, bi bila dodatna pot enaka mnogokratniku valovne dolžine.)

Iz zveze $2 \cdot 2r = \lambda$ sledi $r = \lambda/4$, kar da za radij ksenovega atoma $r = 12\ \text{Å}/4 = 3\ \text{Å}$. Ker gre za oceno, smo izenačili valovno dolžino elektrona, ki vdre v atom, z valovno dolžino elektrona zunaj atoma. Tudi premeri drugih atomov merijo po nekaj ångstrømov. (Ramsauerjev pojav pa opazimo samo pri težkih žlahtnih plinih, ker so njihovi atomi okrogli in se elektronu na meji atoma dovolj skokovito spremeni potencialna energija.)

Novejši elektronski mikroskopi in ionski mikroskopi dosežejo ločljivost nekaj ångstrømov. Ali je tedaj mogoče »videti« posamezne atome? Zares dobijo s posebnimi prijemi slike, na katerih se posamezni atomi ali skupine atomov razločujejo od atomov v okolici.

Ocenimo z dobljenim podatkom za premer ksenonovega atoma še Avogadrovo število in maso 1 atomske enote mase! V kritičnem stanju pri temperaturi 16,6° C in tlaku 57 kp/cm² ima ksenon gostoto $\rho = 1{,}16\ \text{g/cm}^3$. Računajmo, da odpade na vsak ksenonov atom prostornina kocke z robom $2r = 6\ \text{Å}$! Po tem je v kiloatomu ksenona z maso M = 131 kg

$$N_A \approx M/\rho(2r)^3 = 5 \cdot 10^{26}$$

atomov. Masa 1/12 atoma ogljika ^{12}C ali 1 atomske enote mase je tedaj

$$1\ \text{kg}/N_A \approx 2 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}.$$

Za primerjavo naj služita pravi vrednosti $6{,}0 \cdot 10^{26}$ in $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, ki ju poznajo dijaki iz kemije. Naš račun je dal zadovoljiva približka. Navzlic temu si ne smemo predstavljati atomov kot toge kroglice z ostro mejo. Pravilneje je, če si jih predstavljamo kot oblake z zabrisano mejo.

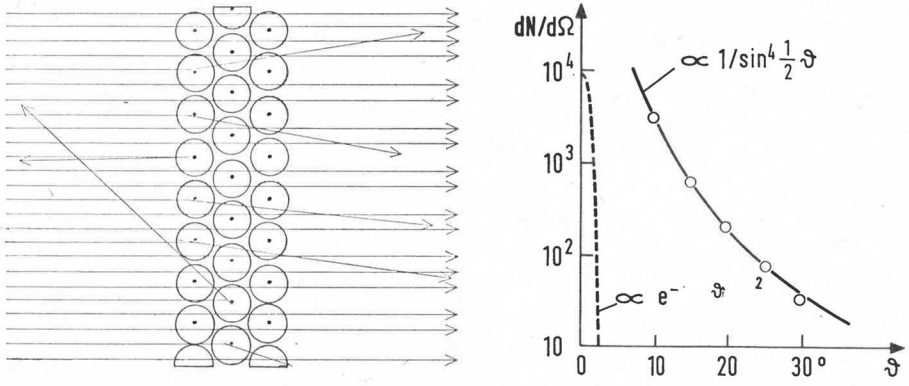
Rutherfordov poskus. Sestavni del atomov je elektron, ki ima en negativni osnovni naboj in je okoli 1800-krat lažji kot vodikov atom. V nevtralnem atomu je Z elektronov, če je Z vrstno število elementa. V nevtralnem atomu mora biti tedaj še Z pozitivnih osnovnih nabojev s skupno maso, ki je samo malo manjša kot masa atoma. Rutherfordov poskus pokaže, kako je v atomu porazdeljen pozitivni naboj. Curek hitrih delcev α iz radioaktivnega izvira usmerimo na tanek kovinski listič. Opazujemo delce α, ki so se sipali na atomih v lističu.[6]

Uporabni so na primer delci α s kinetično energijo 6 MeV, ki jih oddaja radioaktivni izotop, v katerega razpade radon. Večina delcev α gre skozi listič, ne da bi se znatno odklonila od začetne smeri. Majhen delež se jih znatno odkloni, nekaj pa se jih odkloni celo nazaj.* Po tem sklepamo, da deluje v atomu na delec α zelo velika sila. Pozitivni naboj v atomu izvaja na delec α z dvema pozitivnima osnovnima nabojema dovolj veliko Coulombovo silo $2Ze_0^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$ le, če je dovolj majhen, da se mu lahko delec α močno približa. Pozitivni naboj v atomu mora biti tedaj zbran v *jedru*, ki je mnogo manjše od atoma. Elektron v atomu je tako lahek in ima tako majhno kinetično energijo, da ne zmoti zaznavno leta delca α, tudi če trči z njim. Težko jedro pa z veliko Coulombovo silo odkloni delec α tudi za 180° od začetne smeri, če se mu dovolj približa.

Sipanje delcev α s kinetično energijo 6 MeV na lističu srebra z vrstnim številom 47 popolnoma pojasnimo s Coulombovo silo med jedrom in delcem α, ki je sam jedro helijevega atoma. Gibanje delca α v električnem polju jedra spominja na gibanje kometa po hiperboli v gravitacijskem polju Sonca. Iz tega sledi zgornja meja za radij jedra. Delec α se približa

* E. Rutherford je na osnovi opisanega poskusa prvi uvidel, da je pozitivni naboj atoma zbran v majhnem jedru. Povedal je, da še nikoli v svojem življenju ni bil tako presenečen kot tedaj, ko je opazil, da se sipajo nekateri delci α na kovinskem lističu nazaj, medtem ko gredo drugi skoraj nemoteno skozenj. To se mu je zdelo domala tako presenetljivo, kot če bi ustrelili z granato kalibra 37 cm proti listu svilenega papirja, pa bi se granata odbila in nas zadela.[7]

središču jedra srebra najbolj do razdalje r_1, v kateri je kinetična energija delca α enaka Coulombovi potencialni energiji $W_k = 2Ze_0^2/4\pi\varepsilon_0 r_1$. To se dogodi pri centralnem trku, po katerem se delec α odbije nazaj. Vzamemo, da ostane jedro zaradi svoje velike mase pri miru. Radij jedra srebra mora biti vsekakor manjši od razdalje $r_1 = 2Ze_0^2/4\pi\varepsilon_0 W_k = 0{,}0002$ Å. V nasprotnem primeru bi delec α vstopil v jedro in sipanja ne bi mogli pojasniti tako preprosto. Vsekakor je jedro tako majhno, da ga smemo imeti pri obravnavanju atoma za točkasto. Zanesljivejša merjenja pokažejo, da imajo jedra okoli stotisočkrat manjši premer kot atomi. Atom je »prazen«: v prostoru okoli zelo drobnega in težkega jedra je le zelo gosto električno polje, v katerem se gibljejo zelo lahki elektroni.

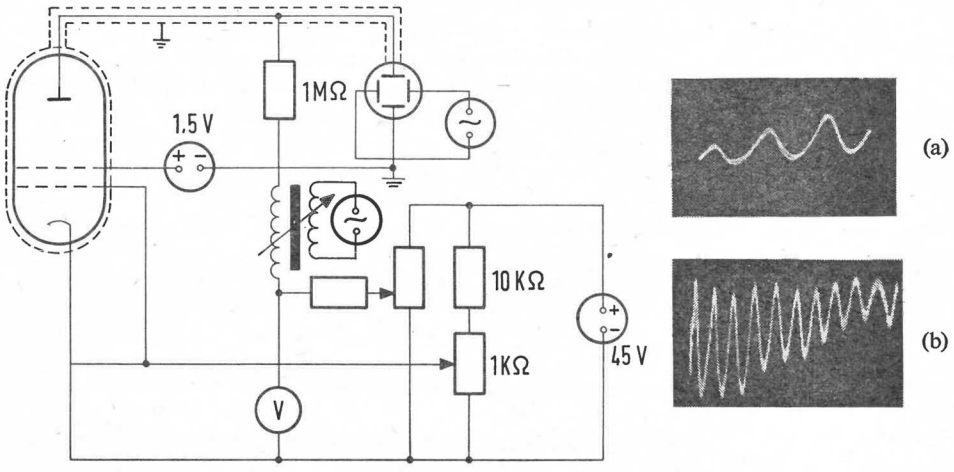


Sl. 3. Ponazoritev gibanja delcev α skozi kovinski listič z debelino samo treh atomskih plasti (levo).[7] Rezultati merjenja pri demonstracijskem Rutherfordovem poskusu (desno).[8] Izvir je bil izotop polonija ^{210}P na nikljevi ploščici. (Ravnanje s takim izvirom ni brez nevarnosti.) Delci α so imeli kinetično energijo 4 MeV. Listič je bil iz zlata z debelino 0,002 mm. Delce α so zaznavali s polprevodniškim števcem. Na vsakih 5° so po 2 minuti šteli delce α. Na ordinatno os je naneseno število preštetih delcev α, na abscisno os pa sipalni kot ϑ. Črtkano je nakazan rezultat, ki bi ga pričakovali, če pozitivni naboj ne bi bil zbran v jedru, ampak bi bil razmazan po vsem atomu (Thomsonov model). V krogelno simetričnem oblaku naboja prispevajo namreč k polju v izbrani točki samo deli naboja, ki so bliže središču kot izbrana točka. V notranjosti pozitivnega oblaka naboja je tedaj jakost električnega polja tem manjša, čim bliže smo središču.

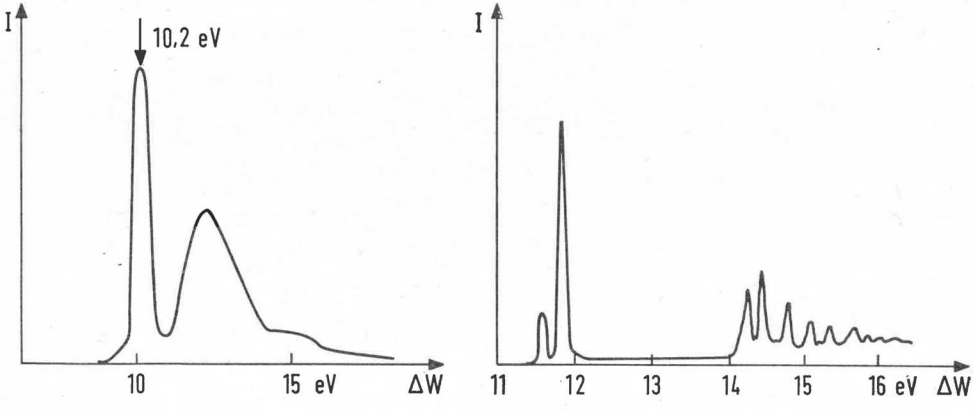
Franck-Hertzov poskus. S tem poskusom preiščemo neprožne trke elektronov z atomi živega srebra. Najprikladnejša je posebej za ta namen izdelana živosrebrna trioda,[8,9] za silo pa je uporaben tudi živosrebrni tiratron, na primer GL 5557/FG 17. Na mrežico priključimo pospeševalno napetost, na anodo pa konstantno negativno napetost 1,5 V proti mrežici. Večamo pospeševalno napetost in merimo anodni tok. Z naraščajočo anodno napetostjo anodni tok naraste, nato močno pade, zopet naraste, zopet močno pade... Dve sosednji dolini ali dva sosednja vrhova sta v razmiku po 4,9 V.

Med katodo in mrežico se elektroni pospešujejo in dosežejo ob mrežici kinetično energijo $W_k = e_0 U$. Mrežica je zelo blizu katode; tako da so trki elektronov in živosrebrnih atomov v prostoru med katodo in mrežico malo verjetni. Trki v prostoru med mrežico in anodo so mnogo verjetnejši. Med mrežico in anodo se elektroni zavirajo. Do anode dospejo le elektroni, ki imajo ob mrežici večjo kinetično energijo kot 1,5 eV. Z naraščajočo pospeševalno napetostjo narašča kinetična energija elektronov. Anoda odbije vse manj elektronov in anodni tok se veča. Do padca anodnega toka pri pospeševalni napetosti preko 4,9 V pride zaradi neprožnih trkov med elektroni in atomi živega srebra. Pri takem trku zgubi elektron s kinetično energijo 4,9 eV vso kinetično energijo in ne dospe do anode. Padec anodnega toka ni skokovit, ker imajo elektroni, ki izhlapevajo iz katode, že majhno kine-

tično energijo.[10] Elektroni dobijo zadosti kinetične energije, da dospejo do anode, ko naraste pospeševalna napetost preko 4,9 V. Pri pospeševalni napetosti $2 \cdot 4{,}9 = 9{,}8$ V doživijo elektroni po dva zaporedna neprožna trka z atomoma živega srebra, ostanejo brez kinetične energije in ne dospejo do anode. Anodni tok pade. Pri nadaljnjem naraščanju



Sl. 4. Vezje za Franck-Hertzov poskus z osciloskopom (levo).[8] Izmenični del pospeševalne napetosti in napetost na vodoravnih odklonskih ploščah osciloskopa da kar omrežje. Uporabili so živosrebrno triodo družbe Leybold. Triodo in neozemljeni vodnik do osciloskopa so morali posebej oklopiti, da so zmanjšali motnje iz omrežja. Prvi trije vrhovi v odvisnosti anodnega toka od pospeševalne napetosti (desno, a), vrhovi od 14 do 23. (b). Veliko število vrhov dobijo s posebnim prijemom: s posebno napravo preprečijo motnje iz omrežja in z višjo temperaturo živosrebrne pare poskrbijo za višji tlak.[9]



Sl. 5. Neprožno sipanje elektronov s kinetično energijo 25 keV na vodiku[11] pri temperaturi okoli 2800 K (levo) in na argonu[12] (desno). Narisani sta porazdelitvi neodklonjenih elektronov po izgubi kinetične energije, to je po razliki med začetno in končno energijo. Pri poskusu z vodikom je treba doseči s segrevanjem, da razpade znaten delež molekul H_2 v atome. Vrh pri izgubi energije 10,2 eV ustreza neprožnemu sipanju elektronov na atomu vodika, druga dva vrhova pa neprožnemu sipanju elektronov na molekulah vodika. Večje število vrhov pri argonu priča, da lahko sprejme atom argona enega izmed večjega števila ostro določenih obrokov energije. Po tem sklepamo, da imajo atomi več diskretnih energijskih stanj.

pospeševalne napetosti se igra ponovi. Da pride do neprožnega sipanja, potrjuje značilno sevanje, ki ga oddaja živosrebrna para, če je pospeševalna napetost večja kot 4,9 eV. Izsevana svetloba ima valovno dolžino 2500 Å, ki ustreza energiji fotonov 4,9 eV.

Franck-Hertzov poskus kaže, da ne more sprejeti živosrebrni atom poljubne energije. Sprejme pa lahko energijo 4,9 eV. Tudi drugi atomi lahko sprejmejo samo ostro določeno energijo. Pri enem izmed zanesljivejših poskusov pospešijo v vakuumski posodi elektrone, ki izvirajo iz majhne katode. Z elektrostatičnimi in magnetnimi lečami izberejo ozek elektronski curek z določeno kinetično energijo. Curek pade na celico s plinom in elektroni se neprožno sipajo na atomih. Elektrone, ki zapustijo celico, analizirajo z elektrostatičnimi in magnetnimi lečami po energiji. Tako dobijo porazdelitev elektronov po kinetični energiji. Po vrhovih v tej porazdelitvi sklepajo, kolikšne energije lahko sprejme atom pri neprožnem trku z elektronom. Poskusi kažejo, da se energija atoma ne more spreminjati zvezno, ampak le v skokih. Energija atoma ima izbrane, ostro določene vrednosti. Takih *diskretnih energijskih stanj* zagotovo ni mogoče pojasniti s klasično fiziko.

Janez Strnad

LITERATURA

[1] S. G. Kukolich: Demonstration of the Ramsauer-Townsend Effect in a Xenon Thyratron, Am. J. Phys. **36**, 701 (1968)

[2] B. Š. Perkalskis: Demonstracija effekta Ramzauera, Uspehi fiz. nauk **105**, 735 (1971)

[3] G. A. Woolsey: An Extension of the Ramsauer-Townsend Experiment in a Xenon Thyratron, Am. J. Phys. **39**, 558 (1971)

[4] I. Kuščer in A. Moljk: Fizika, Ljubljana (DZS), 1960, str. 499

[5] A. V. Crewe: A High-Resolution Scanning Electron Microscope, Sci. Am. **224** (4), 26 (1971)

[6] R. H. Lindsay, D. H. Ehlers, R. McLeod: Rutherford Scattering Apparatus for Laboratory and Lecture Demonstration, Am. J. Phys. **32**, 1055 (1964)

[7] E. N. da C. Andrade: The Birth of the Nuclear Atom, Sci. Am. (11) 93 (1956)

[8] R. A. Bernheim, A. C. Gossard, R. V. Pound: Modification of the Franck-Hertz Experiment, Am. J. Phys. **24**, 630 (1956)

[9] J. W. Dewdney: Improvement to the Franck-Hertz Experiment, Am. J. Phys. **27**, 645 (1959)

[10] R. J. Genolio: Average Energy of Electrons in a Franck-Hertz Tube, Am. J. Phys. **41**, 288 (1973)

[11] H. Boersch, J. Geiger, H. J. Reich: Energieverluste von 25 keV-Elektronen im atomarem Wasserstoff, Z. Phys. **161**, 296 (1961)

[12] H. Boersch, J. Geiger, W. Stickel: Das Auflösungsvermögen des elektrostatisch-magnetischen Energieanalysators für schnelle Elektronen, Z. Phys. **180**, 415 (1964)

DOMAČE VESTI

24. OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE V LJUBLJANI

24. občni zbor DMFA SRS je bil 10. 2. 1973 v Ljubljani v veliki predavalnici za fiziko FNT na Jadranski cesti. Zboru je prisostvovalo 156 članov društva. Vodilo pa ga je delovno predsedstvo, v katerega so bili izvoljeni dr. A. Vadnal, B. Kolenko in P. Prelog.

Občni zbor je najprej počastil spomin na Nikolaja Kopernika. Prigodniški govor ob 500-letnici rojstva je imel prof. dr. Fran Dominko. Predstavil je ideje in delo Kopernika, orisal uveljavljanje novih pogledov ter nakazal ob vrednotenju dela Kopernika večno vlogo ustvarjalnega misleca v danem življenjskem okolju.

Po spominski slovesnosti so se zvrstila poročila o delu društva in komisij.

O delu društva je poročal predsednik dr. F. Križanič (poročilo je objavljeno posebej).

Tajnik društva, I. Pavliha je v svojem poročilu omenil, da je prišlo okrog 500, odšlo pa 200 dopisov, kjer pa niso všteti dopisi posameznih komisij. Društvo je honorarno zaposlilo tov. M. Kordiš iz pisarne matematično fizikalnega oddelka FNT za administrativno delo.

O denarnem poslovanju je poročala I. Snoj. Društvo je dobilo od Izobraževalne skupnosti 94.800,— din, iz ostalih dohodkov pa 60.773,80 din. Izdatkov je bilo za 134.918,90 din, tako da znaša saldo 20.654,90 din.

O delu komisije za tisk je poročal dr. N. Prijatelj. Komisija je v času po prejšnjem občnem zboru izdala naslednje knjige: Knjižnica Sigma: A. Vadnal: Elementarni uvod v verjetnostni račun — 2. predelana izdaja. N. Prijatelj: Matematične strukture III. del. Zbirka Matematika: I. Vidav: Algebra. Izven obeh zbirk je izšla v sodelovanju z DZS Zbirka rešenih nalog za III. razred gimnazij, ki jo je sestavila skupina avtorjev.

Društveno glasilo Obzornik za matematiko in fiziko je s štirimi številkami pravočasno zaključilo svoj 19. letnik. Letos je predvidenih šest številk OMF.

Zaradi težav v dogovorih z Mladinsko knjigo je komisija sklenila z DZS pogodbe za naslednje knjige: Sigma — priročniki: Batagelj-Pisanski: Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj — I. del, ki obsega naloge iz let 1950—1966. Zbirka Matematika: dr. F. Križanič: Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun, I. Vidav: Višja matematika I. ponatis. Skupina avtorjev z I. Vidavom kot glavnim urednikom: Višja matematika II, Višja matematika III.

A. Moljk je poročal o sekciji za raziskovalno dejavnost. Ta ima skrb za izdajanje znanstvenega časopisja in za organizacijo znanstvenih srečanj, za širše razprave o raziskovalnih perspektivah glede na sedanji znanstveni in tehnični razvoj ter za informiranje širše strokovne javnosti o rezultatih in možnostih.

Zveza društev izdaja dva znanstvena časopisa in sicer za matematiko MATEMATIČNI GLASNIK, za fiziko FIZIKO, ki izhaja kot časopis za splošno fiziko pod okriljem Evropskega fizikalnega društva. Zvezi je bila dana pobuda, da začne z izdajanjem znanstveno-strokovno informativnega biltena. Društvo je prevzelo pripravo prve številke. Ni pa rešeno vprašanje urednika, niti niso zagotovljena sredstva. Ta so za začetek potrebna, čeprav bi se kasneje bilten verjetno lahko vzdrževal iz naročnine.

Društvo razmišlja o organizaciji znanstvenih konferenc, kakor jih prirejajo strokovna društva drugod. Ko se društvo oživlja kot skupnost matematikov in fizikov, ki delajo na raznih področjih in v raznih ustanovah, nastaja potrebni dovolj širok forum neodvisnih raziskovalcev.

O delu komisije za osnovno šolo je poročal P. Zajc. Povečalo se je zanimanje za tekmovanja za Vegova priznanja med mladimi učenci, saj je bila večja udeležba in boljši uspeh. Potrebno pa bi bilo izdajati več matematičnih brošur, ki bi bile namenjene učencem višjih razredov. Poskusna izdaja Preseka je to potrdila, saj je vzbudila med učitelji in učenci živo zanimanje.

J. Povšič je poročal, da je gradivo za bibliografijo Jurija Vege skoraj v celoti zbrano. O Juriju Vegi je pripravil dva krajša biografska zapisa za OMF, daljšega pa za Slovenski biografski leksikon. V teh zapisih so navedeni novi podatki iz Vegove biografije.

Celjska podružnica je organizirala tri predavanja za srednješolce. S knjigami iz zbirke Sigma je nagradila 15 učencev, ki so tekmovali v Celju na republiškem tekmovanju za Vegovo priznanje. Za učitelje so pripravili dve predavanji.

Člani novomeške podružnice so se udeleževali predavanj, ki so bila v Ljubljani, sami jih niso organizirali. V sodelovanju z novomeško enoto Zavoda za šolstvo je bil organiziran enodnevni seminar za učitelje fizike na osnovnih šolah, ki se ga je udeležilo 26 učiteljev. Govora je bilo o učilih za pouk in o vajah iz elektrike in elektronike.

Novogoriška podružnica je v preteklem letu organizirala republiško tekmovanje in zvezno tekmovanje mladih fizikov. Ob tej priliki so organizirali tudi tekmo v preskusu znanja med skupinami z 8 gimnazij, ki je zelo lepo uspela. Na gimnaziji v Novi Gorici in Ajdovščini delujeta matematična krožka, v Novi Gorici tudi fizikalni krožek. Za profesorje in ločeno za dijake je predaval o Silah pri kroženju prof. Perne.

Po poročilih je delovni predsednik dr. A. Vadnal povzel, da je iz poročil razvidno zelo aktivno delo društva v preteklem obdobju.

V razpravi so bile izražene naslednje pripombe in mnenja.

Na občni zbor so bili povabljeni uredniki vseh slovenskih listov, žal se vabilu niso odzvali. Potrebno bi bilo navezati stike z učitelji na šolah v zamejstvu in organizirati obiske šol.

Akcijo za zvanja srednješolskih profesorjev, po izobrazbi in uspešnosti, o kateri je bilo govora na prejšnjih občnih zborih, je treba nadaljevati.

Predlog novega učnega načrta za pouk astronomije po sklepu Nacionalnega komiteja so poslali zvezi društev.

Govora je bilo o organizaciji seminarjev iz fizike pri Zavodu za šolstvo SRS. Seminar ATOMI ni bil v planu, zato Zavod tudi ni mogel nuditi pomoči, ker sta bila organizirana dva druga seminarja iz fizike, finančna sredstva za seminarje pa so močno skrčena. Poudarjeno je bilo, da mora društvo tesneje sodelovati z Zavodom za šolstvo SRS, da bo dosežena številna udeležba na seminarjih. Seminarji naj ne sovpadajo z drugimi seminarji (kemija).

Glede na izredno uspešno organizacijo republiškega in zveznega tekmovanja iz fizike v Novi Gorici pod vodstvom Franceta Perneta, je občni zbor izrekel pohvalo podružnici in še posebej prof. Pernetu.

Predsednik nadzornega odbora A. Kregar je pohvalil odbor za prizadevno in uspešno delo v preteklem obdobju in predlagal razrešnico, ki je bila soglasno sprejeta.

Predlog za novi odbor DMFA SRS je sestavila posebna 7 članska komisija. Tov. Kernel je predlagal, da se ožji odbor poveča za člana, ki se ukvarja izključno z raziskovalnim delom v svojem poklicu. Predlog je bil sprejet, za člana pa predlaga dr. U. Miklavžiča. Volitve so bile javne z dviganjem rok. Novi upravni odbor je bil soglasno izvoljen v naslednji sestavi:

Ožji odbor: predsednik: dr. A. Moljk
podpredsednik: F. Plevnik
tajnik: M. Gojkovič
blagajnik: I. Mulec
odborniki: dr. A. Vadnal, dr. F. Dominko, T. Skulj, J. Pavlišič in dr. U. Miklavžič
Predsednik komisije za znanstveno dejavnost: dr. A. Moljk
Predsednik komisije za tisk: dr. G. Tomšič
Sekretar komisije za pedagoško dejavnost: D. Modic
Sekretar komisije za popularizacijo: B. Roblek
Odbornik za osnovno šolo: P. Zajc

Razširjeni upravni odbor sestavljajo člani ožjega odbora, vodje sekcij, podčrtani člani komisij in zastopniki podružnic.

Vodja sekcije za terminologijo matematike: dr. A. Vadnal
Vodja sekcije za terminologijo fizike: dr. R. Kladnik
Vodja sekcije za terminologijo astronomije: M. Prosen
Vodja sekcije za bibliografijo: J. Povšič

Sestav komisij:

Komisija za pedagoško dejavnost: M. Koman, S. Križanič, F. Plevnik, P. Prelog, R. Torkar, B. Žumer in *M. Vagaja*

Komisija za popularizacijo:

predsedniki tekmovalnih komisij: dr. I. Vidav, dr. A. Moljk in F. Galič

sekretarji tekmovalnih komisij: B. Kolenko in P. Zajc

sekretar komisije za predavanja: J. Pavlišič

člani: *J. Ferbar, F. Oblak* in *T. Skulj*

Komisija za tisk:

Upravni odbor: predsednik: dr. G. Tomšič
podpredsednik: dr. J. Strnad
sekretar: —
blagajnik: J. Markelj
člana: F. Kvaternik in T. Skulj

Uredniški odbor »Sigme«: dr. F. Križanič, dr. R. Jamnik, dr. M. Rosina, dr. J. Strnad, dr. A. Vadnal in dr. I. Vidav

Uredniški odbor OMF: F. Avsec, dr. R. Blinc, tehnični in odgovorni urednik: F. Kvaternik, J. Lep, dr. A. Moljk, dr. J. Pahor, dr. M. Rosina, T. Skulj, dr. J. Strnad, dr. A. Suhadolc in dr. I. Vidav

Nadzorni odbor: predsednik: A. Kregar
člana: V. Pivk in N. Benkovič

Častno razsodišče: F. Ahlin, F. Bezjak in dr. I. Vidav.

Predsedniki podružnic: Celje: S. Lorger
Koper: B. Kolenko
Murska Sobota: A. Čisar
Novo mesto: D. Modic
Nova Gorica: F. Perne
Maribor: F. Bezjak

Občni zbor sklene, da bo naslednji občni zbor decembra letos ob 100-letnici rojstva Josipa Plemlja na Bledu (to je 25. jubilejni občni zbor) in prepusti organizacijo in izvedbo upravnemu odboru.

Novi predsednik društva dr. A. Moljk se je zahvalil za izkazano zaupanje, obenem pa prosi, da vsi člani društva aktivno sodelujejo s kritiko, novimi idejami in delom.

Tajnik društva
Marjan Gojkovič

7. SEMINAR IZ FIZIKE: ATOMI

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko ljubljanske univerze, odsek za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo in Inštitut Jožef Stefan so priredili v dneh od 6. do 9. februarja 1973 v Ljubljani v prostorih odseka za fiziko seminar za srednješolske učitelje fizike z naslovom Atomi. Tema je bila izbrana na sugestijo udeležencev 6. seminarja pred dvema letoma.

Namen seminarja je bil osvežiti znanje, ki smo si ga nekoč nabrali o atomu, pa nam je medtem že nekoliko izplahnelo. Ker pa se je v zadnjih desetletjih močno izpopolnila tehnika otipavanja atoma, je lahko seminar dal tudi marsikaj novega. Druga možnost, ki jo je seminar nudil, je bila preskušnja novih prijemov, s katerimi bi poskusili razmeroma abstraktno snov bolj približati našim srednješolcem. Vodilna misel seminarja je bila

predstavljanje novih eksperimentov in seznanjanje z aparaturami, ki lahko dajejo podatke o atomu. Zaradi tega je bil velik del seminarja posvečen praktičnemu delu.

V dopoldanskem delu seminarja so se zvrstila naslednja predavanja: dr. R. Kladnik: Elektron, dr. J. Strnad: Zgradba atoma, dr. M. Kregar: Magnetne lastnosti atoma, dr. D. Jamnik: Sevanje in vzbujena stanja, dr. I. Grabec: Ionizacija, dr. A. Moljk: Rentgenski spektri in dr. R. Blinc: Molekule.

Predavanja so dopolnjevali filmi: Millikanov poskus, Uklon elektronov, Ruthefordov model atoma, Franck-Hertzov poskus in Fotoni in fotoefekt.

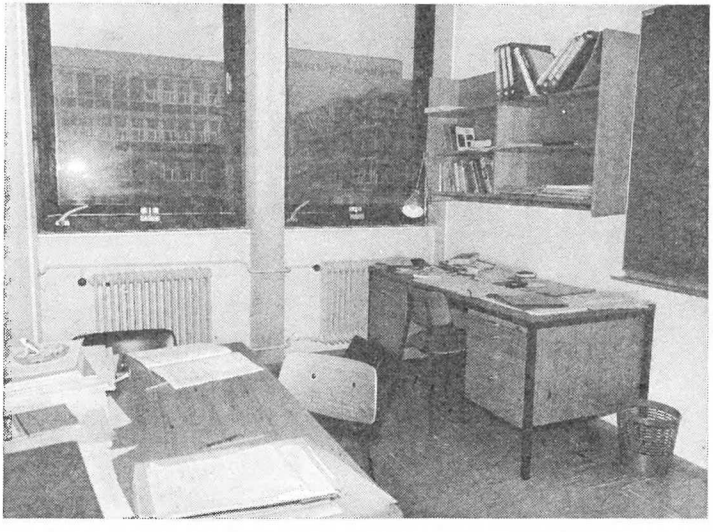
Posebna mikavnost seminarja so bile popoldanske praktične vaje, ki so jih pripravili člani odseka za fiziko. Nekatere od vaj so bile demonstracijske in primerne za prenos v šolo, druge so vodile do kvalitativnih rezultatov, pri nekaterih pa so se udeleženci seminarja seznanjali s sodobnimi raziskovalnimi pripomočki pri študiju atoma. Temu namenu so služili tudi popoldanski ogledi nekaterih laboratorijev na Institutu Jožef Stefan in skupinsko delo na velikih aparaturah: elektronskem mikroskopu, rentgenskem fluorescenčnem analizatorju in infrardečem spektrometru. Pri tako pestrem programu je verjetno vsak od udeležencev našel vsaj nekaj, kar ga je ogrelo.

Rad bi izkoristil priložnost in se še enkrat zahvalil vsem, ki so kakorkoli pripomogli, da je seminar uspel. In teh sodelavcev, znanih in neznanih, ni bilo malo.

Sekretar seminarja
Jože Pahor

ODSEK ZA MATEMATIKO NA FNT JE DOBIL NOVE PROSTORE

Ko se je odsek za matematiko pred štirimi leti izselil iz glavnega univerzitetnega poslopja, je dobil v novi stavbi za fiziko prostor za knjižnico in več kabinetov kakor prej. Toda tudi po preselitvi je imel eno samo predavalnico in seminarsko sobo. Pri tem pa se je število slušateljev matematike v zadnjih letih zelo povečalo.



(Fotografiral: Smrke Marjan)

Možnost, da bi matematika prišla do novih predavalnic, se je pokazala, ko je l. 1971 Republiški računski center začel zidati za svoje potrebe stavbo z dvema etažama na temeljih, ki so bili namenjeni za trakt za matematiko in mehaniko IMFM. Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo se je tedaj posrečilo zbrati sredstva, s katerimi je sezidala še tretjo etažo s predavalnicami. Za to etažo je fakulteta prispevala iz lastnih sredstev 500000 N din, pri Republiški izobraževalni skupščini (RISK) je najela posojilo 1800000 N din, od Republiške raziskovalne skupnosti (RSS) pa je dobila posojilo 700000 N din kot najemnino za 400 m² prostorov v novi stavbi.

Gradbena in obrtniška dela so bila končana novembra 1972. Predavanja v novih predavalnicah pa so se začela že v začetku oktobra. Odsek za matematiko je pridobil z novo etažo tele prostore: tri predavalnice, eno z 99, drugo z 90 in tretjo s 40 sedeži, seminarsko sobo s 24 sedeži, računski praktikum in 13 kabinetov za učitelje in asistente. Zdaj imajo drugi, tretji in četrti letnik vsak svojo predavalnico. Manjka pa večja predavalnica za prvi letnik. V stavbi za fiziko so matematiki obdržali tretje nadstropje in predavalnico v prvem nadstropju. Seminarsko sobo so prepustili odseku za fiziko, ki jo bo preuredil v knjižnico za študente, prejšnji računski praktikum pa je postal podiplomski seminar.

Odsek za matematiko se najlepše zahvaljuje vsem, ki so mu pripomogli do novih prostorov. Predvsem pa je dolžan zahvalo fakulteti za naravoslovje in tehnologijo in njenemu dekanu prof. dr. ing. Dragu Ocepku, Republiški izobraževalni skupščini in Republiški raziskovalni skupnosti za posojila.

I. Vidav

PRIJATELJU PROF. FRANCU TONINU V SLOVO

Prvič sem Franceta srečal, ko sva se vpisovala leta 1930 na oddelek za teoretično matematiko tedanje Filozofske fakultete Univerze v Ljubljani. Brž sva postala neločljiva prijatelja in skupaj doživljala vse sladkosti in tegobe tedanjega slovenskega študenta. V drugem letniku je F. Tonin prevzel za skromen honorar knjižničarske posle v tedaj še bolj skromni fizikalni knjižnici. Ta majhen dogodek pa je postal pravzaprav za oba življenjskega pomena. Ta nama je namreč omogočil, da sva se lahko v dvoje in skupaj pripravljala za vse tri diplomske izpite. Ob skupnem študiju sem lahko spoznaval njegovo bistrost, talent in zavzetost za matematiko. Predvsem pa sem občudoval njegovo temeljitost in vztrajnost; preko težjega mesta pri študiju ni šel in ni šel, dokler nisva oba vsega dodobra razumela. Za časa predavanj je bilo v knjižnici lepo toplo zakurjeno, v času božičnih in semestralnih počitnic pa sva pri študiju zmrzovala, da je bilo kaj; Univerza tedaj pač ni imela toliko sredstev, da bi lahko ogrevala vse prostore.

Kmalu po diplomi sva se ločila. Prof. F. Tonina je ministrski dekret postavil za suplenta v Šabac, od koder se je po kratkem vmesnem službovanju v Mariboru vrnil l. 1940 na drugo realno gimnazijo v Ljubljano. Med vojno in po vojni sva žal lahko izkoristila le redke priložnosti za prijateljske pomenke. Ves svoj čas je prof. F. Tonin posvetil delu z mladino. Vse svoje bogate pedagoške skušnje, ki si jih je nabral ob vzgajanju gimnazijske mladine, je pozneje, ko je postal inšpektor za matematiko, in še pozneje, ko je leta 1961 postal profesor Višje pedagoške šole, posredoval mlajšemu rodu učiteljev. Svoje vzgojno delo je vedno opravljal z zavestjo največje odgovornosti do mladega rodu, ki mu bo hvaležen za vse njegovo požrtvovalno in neumorno delo. Žal ga je od dela odtrgala mnogo prekmalu zavratna bolezen, ki ji je podlegel 24. decembra 1972.

Alojzij Vadnal

NOVE KNJIGE

DVA UČBENIKA FIZIKE ZA UNIVERZO

Za univerzo dolgo nismo imeli nobenega učbenika fizike v slovenščini, z izjemo predvojnih Peterlinovih skript. Potem pa smo naenkrat (1966 in 1967) dobili kar dve deli, ki sta nedavno izšli v lepših novih izdajah:

1. Rudolf Kladnik: Osnove fizike za tehnike, I, II, DZS, Ljubljana, 1969, 1971, skupaj 632 strani (tiskano), 55 + 95 din.

2. Janez Strnad: Uvod v fiziko, I, II, Univerza v Ljubljani, 1970, 1971, skupaj 912 strani (razmnoženo na kseroks-ofset), 28 + 40 din.

Na željo uredništva poročam o obeh knjigah, ki sta v nadaljnjem navedeni s kraticama K in S, skupaj s številkami strani.

V predgovoru se obrača Strnad predvsem na matematike in fizike, medtem ko daje Kladnik prednost študentom tehniških strok. Razlika med tem, kar potrebujejo eni in drugi, pa ni tako velika, da bi opravičevala pisanje in tiskanje dveh učbenikov. Kvečjemu bi potrebovali drugačen učbenik za tiste študente (biologe, psihologe, medicince), ki se morajo učiti fizike brez ustreznega matematičnega znanja.

Knjigi Kladnika in Strnada se tako po obsegu snovi kot po zahtevnosti precej ujemata in nikjer ne zasledimo obetane usmeritve za takšne ali drugačne študente. Kaki specialni dodatki, kot npr. upogib nosilca (K 155) ali dvodelčna korelacijska funkcija (S 741), te ugotovitve ne morejo spremeniti.

Pri obeh avtorjih izhaja osnovni koncept iz sodobne fizike. Povsod je poudarjena fizikalna slika, ki ni nikjer zameglena z podrobnimi opisi aparatov ali strojev, kot je bila to včasih navada. Tudi sicer ne zasledimo nepotrebne starine (le Fahrenheitove stopinje se še pojavijo, K 208). V obeh knjigah je okvirni razpored kolikor toliko tradicionalen; vendar najdemo velike razlike v drobni razdelitvi in v načinu podajanja. Primerjava je poučna in pokaže, kako malo je pouk fizike še standardiziran.

Značilen razloček je, da Kladnik že na koncu mehanike vrine razpravo o atomski zgradbi snovi, medtem ko Strnad s tem odlaša do zadnjega poglavja »Atomika«. Ena in druga pot imata svoje prednosti in slabosti. Nevšečno je, če pri razlagi o atomski zgradbi bralec ne zve sproti, kako so ljudje prišli do tega znanja. Marsikaj je tedaj treba vpeljati z dekretom, kot npr. Kladnik Boltzmannovo konstanto (str. 187). Forsiranje molekularne slike včasih lahko zapelje v napačno predstavo, kot kaže Kladnikova razlaga površinske napetosti. Beremo (str. 199), da deluje na molekulo v površinski plasti rezultanta, ki je v povprečju usmerjena v notranjost tekočine. Če bi bilo to res, bi se vse molekule, ki so v kapljici blizu površine, začele pospešeno gibati proti središču, dokler se kapljica ne bi pomanjšala v točko.

Po drugi strani je nerodno, če se je treba predolgo omejiti na makroskopski opis pojavov in odlagati njihovo razlago za dosti kasnejšo razpravo. S konstantama $c_1 = 3{,}74 \cdot 10^{-16}$ W m^2 in $c_2 = 0{,}0144 \cdot 10^{-2}$ m K zapisana Planckova formula (S 644) je nekako skrivnostna. Vsaj eksponent nam je ljubši v neposredno razumljivi obliki $h\nu/kT$ ali $hc/\lambda kT$.

Pisec takšne knjige se težko upre skušnjavi, da bi vpletal mikavne dodatke, ki pa žal kmalu presežejo zmogljivost in potrebe študenta v prvem letniku. Čeprav so dodani odstavki marsikje zaznamovani kot neobvezni, je vendarle nevarno, da se začetnik izgubi v obilici snovi, namesto da bi se dobro naučil osnov fizike. Oba pisca, na primer, razpravljata o tako imenovanem tretjem zakonu termodinamike (K 253, S 361), ne da bi dovolj pojasnila njegov pomen. Kladnikova razprava je precej sporna; zlasti pa je neutemeljen vtis, ki ga dobi bralec, kot da tretji zakon sledi iz drugega.

Med stvari, ki presegajo osnove fizike, se zdi, da spadajo še: podroben opis Eötvösovega poskusa (S 88), deviacijski momenti ali »centrifugalni vztrajnostni momenti« (le-ti so zlasti odveč, če razen imena ni drugega pojasnila, K 102), kvantitativno obravnavanje Brownovega gibanja (K 197), izračun $c_p - c_V$ za poljubno snov (S 373), Fresnelove cone pri uklonu (K 473, S 600), klasična teorija diamagnetizma (K 360, S 820).

Hvalevredno je, da se oba avtorja lotita osnov kvantne mehanike in specialne teorije relativnosti, ki sta priznano trda pedagoška oreha. Kladnik vpelje relativnost bolj prepričevalno (str. 498) kot Strnad (str. 843), dasi je slednji kasneje izčrpnejši in doslednejši. Pri kvantni mehaniki je boljša Strnadova razlaga, čeprav je ponekod preskopa in zato za začetnika najbrž težko razumljiva. Kladnikovo 22. poglavje »Kvantna in valovna mehanika« vzbudi precej dvomov. Trditev, da je »materialno valovanje nekakšno vodilo materialnih delcev« (K 524) lahko zavede do predstave, kot da delci jahajo valove. Težko se je sprijazniti s trditvijo, da »elektromagnetno polje ni fizikalna tvorba, ampak le izredno domiselna matematična struktura, s katero lahko matematično popisujemo (mišljeno je: opisujemo) povprečno obnašanje velikega števila fotonov« (K 522). Nerazumljiv pa je tale stavek (K 526): »Povprečno obnašanje materialnih delcev, ki ga izraža valovna teorija, interpretiramo kot krajevno in časovno porazdelitev verjetnega obnašanja delcev.«

Če je govora samo o verjetnosti in ne o verjetnostni amplitudi, ni mogoče pojasniti linearne superpozicije, ki je bistvena za kvantno mehaniko. Tako pri fotonih, katerih spin je z enako verjetnostjo obrnjen naprej ali nazaj, še ni gotovo, da je svetloba linearno polarizirana (K 521). Lahko je tudi nepolarizirana ali delno linearno polarizirana. Dodatno pojasnilo, da pri nepolarizirani svetlobi spin neurejeno »prevrača kozolce«, je nesmiselno. Samo s štetjem levo in desno cirkularno polariziranih fotonov ni mogoče razločiti linearno polarizirane svetlobe od nepolarizirane.

Nadaljnjega hudo trdega oreha — osnovnih idej statistične mehanike — se je lotil samo Strnad (str. 699 in dalje), vendar ne povsem uspešno. Razprava o Boltzmannovi formuli za entropijo, $S = k \ln P$, ni prepričevalna. S to formulo so sploh sitnosti, ker jo je težko utemeljiti za kaj drugega kot za plin.

Ker je pri recenzijah že taka navada, naj navedem še nekaj posameznih pomankljivosti, predvsem takšnih, ki se vztrajno ponavljajo v knjigah in pri pouku. Spodrsljaje najdemo seveda v vsakem učbeniku in neverjetno težko jih je do kraja eliminirati,* zlasti če je avtor sam, tako da njegovo pisanje ne gre sproti skozi kritiko soavtorjev.

Oba avtorja izpeljeta izrek o vrtilni količini najprej za konstanten vztrajnostni moment, potem pa ga uporabita pri znanem poskusu z možem, ki na vrtečem se stolu z iztegovanjem rok spreminja vztrajnostni moment (K 92, S 102). Šele kasneje vpeljeta potrebno posplošitev.

Meja prožnosti ni isto kot meja linearnosti (K 61 in 150). Pri kavčuku sta (ob običajni merski natančnosti) meji lahko precej vsaksebi.

Hudo zbode tale stavek (K 128): »Mehanska energija se stalno zmanjšuje, če nastopajo tudi nekonservativne sile, katerih delo je vedno negativno.« Če bi bilo to res, ne bi bilo ne toplotnih strojev ne življenja. V drugi obliki se trditev ponovi pri definiciji ireverzibilnosti (K 241). — Priljubljeni pojem mehanične energije je že sam po sebi nejasen. Ali pridobi plin, ki ga adiabatno stisnemo, mehanično energijo ali kakšno?

Z Bernoullijevo enačbo so težave, ker velja le približno in le pri majhni viskoznosti. Tedaj pa je Reynoldsovo število veliko in zato ne bi smeli vztrajati, da je gibanje laminarno (K 178).

---

* Za strokovnjaka, ki je v uradnem mnenju o nekem delu zapisal, da je »avtorju uspelo napisati učbenik v kratkem času in brez večjih spodrsljajev,« moramo torej sklepati, da bodisi knjige sploh ni prebral ali pa, da je ni razumel.

O »povprečnem številu molekul, ki se v plinu gibljejo v izbrani smeri« (K 185), ni dobro govoriti. To število je namreč nič, ker je smerna porazdelitev molekul zvezna.

Razširjena je trditev, da se samo pri plinih specifični toploti c_p in c_V znatno razlikujeta, medtem ko naj bi bilo pri kapljevinah in pri trdnih snoveh $c_p \approx c_V$ (K 219). Pri vodi to zaradi njene nenavadno majhne razteznosti kar drži, v splošnem pa ne, čeprav je vzrok razlike pri kondenziranih snoveh drug kot pri plinih. Tekoči alkohol in alkoholna para imata, na primer, približno enak kvocient $c_p/c_V = 1{,}2$.

Pri izpeljavah z analogijo je treba razločno povedati, da gre za ugibanje, in slediti mora preverjanje rezultata. Strnadova izpeljava Biot-Savartove formule (str. 470) v tem pogledu ni popolna.

Stefanov zakon za nečrne površine ne velja, tudi če pristavimo ustrezni koeficient (K 406), razen če je površina siva.

Viskoznost je lastnost tekočine, ki bi jo morali definirati tako, da vrednost ni odvisna od velikosti merilne priprave. Zato ni dosledno, če govorimo o zmanjšani viskoznosti pri razredčenem plinu, kadar je merilna priprava premajhna (S 732).

Ponekod so izpeljave prezamotane. Naboja pri kondenzatorju z dielektrikom ne bi bilo treba računati z neskončno vrsto (K 311). Učena znamenja in igre s predznaki tudi lahko otežijo razumevanje, kot npr. tale zapis zakona o električnem pretoku (S 446):

$$\int D\, dS = \sum_{j'} e_j^+ - \sum_{j} |e_j^-|.$$

Na desni bi zadoščal Σe_j ali sploh samo e, ter nekaj pojasnil z besedami.

Tu in tam najdemo nepotrebne pojme, kot npr. »izotone« (S 804) in »gibalno stanje« (K 51). Nepotrebno je pojasnilo, da je vzgon »navpična projekcija rezultante...« (K 171). Saj je rezultanta že navpična. Neutemeljena želja, da naj bi bila vsaka reč formalno definirana, rada zapelje v pleonazme in prazne trditve, kakršna je naslednja (K 27): »Pod pojmom gibanje razumemo premikanje teles v določenem prostoru.« Pri fiziki naj bi se človek naučil, da se tako ne sme govoriti!

Med splošnimi lastnostmi obeh del ne smemo prezreti dokaj dobrega sloga in čistega jezika. Ponekod, pa ne povsod, piše Kladnik živahneje kot Strnad. Pri tem se ne boji drznih primerjav, čeprav se zdijo včasih prehude. Uokvirjene pomembnejše formule nemara privlačijo tistega študenta, ki se kampanjsko uči za izpit, ne da bi želel dosti premišljevati. Gotovo pa privlači izredno lepa, skoraj razkošna oprema Kladnikove knjige in lepe slike v njej, medtem ko ima Strnadov učbenik — po nepotrebnem — še vedno skromno in skoraj odbijajočo obliko univerznih skript.

Ob tehtanju vsega tega zmagajo strokovni vidiki, po katerih je treba priporočiti Strnadovo knjigo, ki nima veliko napak, zlasti ne hujših. Dasi je obseg za začetnika prevelik, mu bo knjiga pri študiju dobro služila, če bo znal kdaj pa kdaj kaj preskočiti. Zlasti matematik in fizik se bosta k preskočenim poglavjem kasneje še vračala.

Obžalovati moramo, da niso prednosti enega in drugega učbenika združene v enem samem delu. Saj je bila izdaja dveh knjig za isti namen popolnoma nepotreben napor in tudi nepotreben izdatek. Hkrati je to žalostno spričevalo za brezupno razdrobljenost naše univerze, ki ni zmožna uskladiti svoje dejavnosti niti v eni sami stroki.

Ivan Kuščer

Alojzij Vadnal, Linearno programiranje, teorija i upotreba u privredi. Informator, Zagreb 1972, str. 403. Cena 150 din.

To obsežno delo je sestavljeno iz štirih delov. V prvem je uvod in razprava o takih uporabah linearnega programiranja, ki jih je mogoče rešiti z načrtovanjem. V drugem delu so razloženi tisti pripomočki iz linearne algebre, ki so potrebni za splošno teorijo line-

arnega programiranja. V tretjem delu pisec razlaga, v kakšnih oblikah je mogoče zastaviti linearni program, opisuje njegove možne rešitve in odvisnost optimalne možne rešitve od koeficientov namenske funkcije. Nato je razložena metoda simpleksov in njena numerična izvedba in nazadnje še zveza med linearnim programiranjem in teorijo matričnih iger. Četrti del prinaša uporabe simpleksne metode, nadalje programiranje večfaznih procesov in posebne metode za reševanje linearnih programov pri transportnih nalogah in nazadnje še bilinearno programiranje.

Delo je napisano temeljito in se prijetno bere. Po matematični strani dovolj izčrpno podaja poglavitne dosežke linearnega programiranja, poleg tega pa prinaša zelo bogato zbirko uporab. Tako bo dobrodošlo vsem, ki jih zanima ta veja matematike. Posebno pa bo koristno tistim, ki jim gre predvsem za uporabe linearnega programiranja, in takih interesentov bo gotovo največ. Lahko ga bodo uporabili celo bravci, ki se ne žele ukvarjati s teorijo linearnega programiranja: zanje je avtor zbral veliko zanimivih primerov že v prvem delu knjige in so dostopni povsem elementarno.

Rajko Jamnik

Batagelj V. in Pisanski T.: Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj. I. del. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1973. 180 str. Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Knjižnica SIGMA — priročniki. Cena 42.— din.

I. del knjige vsebuje naloge desetih republiških tekmovanj od l. 1950 do vključno 1966 in ima rešenih 154 nalog za vse štiri razrede srednjih šol (po 36 nalog za vsak razred, 5 nalog je skupaj za 1. in 2. razred, 5 nalog pa za 3. in 4. razred). Podatkov je 25 strani, rešitve nalog pa obsegajo 143 strani. Knjigo sta avtorja posvetila anonimnim sestavljavcem nalog na teh tekmovanjih.

Ker naloge niso bile dane točno po sedanjem učnem načrtu, je lahko vsaka od teh zanimiva tudi za tretješolca in četrtošolca, posebej še zato, ker sta avtorja pogosto rešila naloge iz nižjih razredov tudi po metodah, ki so znane le dijakom višjih razredov. Med nalogami je precej takih, ki jih ni mogoče uvrstiti po učnem načrtu v noben razred, zahtevajo pa splošno matematično razgledanost in smisel za logično mišljenje.

Avtorja (nekdanja uspešna tekmovalca na teh tekmovanjih) sta se pri reševanju nalog zelo potrudila. Vsako nalogo sta rešila tako, da bi bila dijakom ustreznega razreda najbolj razumljiva, postopek pa čim krajši. Posamezne naloge sta rešila tudi na več različnih načinov (različni načini so označeni z A, B, C, D, E). Vsaka naloga ima nastavek (osnovno idejo, enačbo, sklep, analizo) in vse bistvene korake do rešitve. Lažji računski postopki med posameznimi koraki niso navedeni.

Posebej je treba pohvaliti lep, pregleden tisk in jasne ter nazorne slike.

Knjigo zelo priporočam profesorjem matematike, posebej še mentorjem matematičnih krožkov in vsem dijakom, ki jih zanima reševanje matematičnih nalog, pa tudi drugim ljubiteljem matematike. Vsi bodo dobili v knjigi mnogo zelo dobrih prijemov pri reševanju nalog in iz naših srednješolskih učbenikov manj znanih načinov reševanja.

Ivan Štalec

PREJELI SMO V OCENO

Alfréd Rényi, Letters on Probability, 86 str., Akadémiai Kiadó, Budapest 1972

Poglavitni del te očarljive knjižice sestavljajo štiri fiktivna Pascalova pisma Fermatu. V jeziku tedanjega časa obravnavajo nekatera osnovna vprašanja verjetnostnega računa. Tem pismom je dodan kratek življenjepis Pascala, zapisek o zgodovini verjetnostnega

računa ter razpravica o matematičnem pojmu verjetnosti — od klasične definicije do pogojnih verjetnostnih prostorov. Delo zaključuje kratek življenjepis avtorja, ta je pred kratkim umrl.

Knjiga je napisana privlačno in jasno, za razumevanje ni potrebna kakšna posebna matematična izobrazba. Zato bo dobrodošla vsem, predvsem pa tistim, ki bi se radi na hitro informirali o mestu verjetnostnega računa v matematični zgradbi.

Rajko Jamnik

Bogoljubov N. N.: A Method for Studying Model Hamiltonians. Pergamon Press, Oxford 1972. X + 170 str. 8°. Cena £ 5,00.

Statistična mehanika se v zadnjem času vse bolj posveča eksaktno rešljivim sistemom. Pričujoča knjiga prinaša podrobno razčlenitev nekaterih modelskih sistemov, ki so eksaktno rešljivi v termodinamski limiti, ko gre prostornina sistema čez vse meje. Iz obravnave sledijo napotki za reševanje realističnih problemov, ki vključujejo interakcije štirih fermionov: pri tem je poudarjena temeljna razlika med sistemi s pozitivno in negativno interakcijo. V zadnjih poglavjih se ukvarja avtor tudi s sistemi z interakcijo mešanega tipa, pri čemer izpelje novo splošno načelo — minimax principle. Eksaktne rešitve vključujejo izraze za prosto energijo, za Greenovo funkcijo ter za korelacijske funkcije različnih redov.

Knjiga bo zanimiva predvsem za specialiste s področja statistične kvantne mehanike: pri tem ji kroga bralcev ne zožuje toliko jezik, ki le redko seže preko formalizma druge kvantizacije, kolikor sam obseg obravnavanih problemov, ki za pretežno večino fizikov z drugih področij še niso zanimivi.

Alojz Kodre

Batten, A. H.: Binary and Multiple Systems of Stars. Pergamon Press, Oxford 1973, 278 str. 8°. Cena £ 4.00.

Knjiga podaja kritični pregled raziskav in študija dvojnih in večkratnih zvezdnih sistemov.

Delo je v prvi vrsti pisano za astronome, ki raziskujejo na drugih področjih, nato pa tudi za fizike in druge znanstvenike, ki jim je do tega, da bi si pridobili malo več znanja s tega posebnega področja astronomije. Služi lahko tudi kot dopolnilo za podiplomske študije v astronomiji in drugih sorodnih znanostih.

Avtor začne z definicijo in klasifikacijo dvojnih zvezd, obdela orbitalne elemente in njihovo določitev, nato obravnava posebej dvojne in večkratne zvezde ter njihov obseg med drugimi zvezdami, se zaustavi pri določevanju periode, mase in radija, opiše apsidne motnje, tesne dvojice in modele zvezdnih atmosfer, konča pa s teorijo evolucije in nastankom dvojnih zvezd. Na koncu je podana še obsežna bibliografija.

Marijan Prosen

Logique, automatique, informatique. Ed. de l'Academie de la republique socialiste de Roumanie, Bucarest 1971. 456 str. 8°.

V knjigo, ki je napisana v francoščini, je strnila svoja dognanja skupina romunskih znanstvenikov pod vodstvom G. C. Moisila. Knjiga je po snovi in obravnavi precej heterogena. Sega v področja čiste logike, uporabe algebre v logiki, teorije vezij, teorije avtomatov in celo umetne inteligence. Nekatera poglavja v knjigi so zelo zgoščena, tako da ponekod izrekom niso priloženi dokazi, kar nedvomno otežuje študij te ne lahke knjige. Znanje, ki je potrebno za razumevanje snovi, je pri vsakem poglavju drugačno, vsekakor pa mora bralec dobro poznati osnove algebre in matematične logike.

Tomo Pisanski

DOPISNA DELAVSKA UNIVERZA V LJUBLJANI, Parmova 39, nam je poslala naslednje knjige in skripta v oceno:

Osnovna šola

Učni listki za matematiko z navodili za uporabo. (Zavod za šolstvo SRS) b. 1. 3. razred (Fras M.), 4. razred. (Šoper A.)
Košorok J. in V. Mazi: Matematične naloge. Predelana izdaja. 1972. 8°. ZŠ SRS. 3. razred. 48 str., 4. razred. 75 str.
Pilgram V.: Matematika. 1968. 4°. 5. razred. 248 str. 6. razred. 231 str.
Štalec I.: Matematika. 4°. 7. razred. 1968. 196 str. 8. razred. 1971. Ponatis. 195 str.
Plevnik F.: Fizika za 7. razred. 1971. Ponatis. 115 str. 4°.
Kvaternik F.: Fizika za 8. razred. 1971. Ponatis. 121 str. 4°.

Administrativna šola

Andolšek D. in L. Kovačič: Gospodarsko računstvo. 4°. 1. razred. 1971. 99 str. 2. razred. 1972. 75 str.

Ekonomska srednja šola

Štalec I.: Poglobitvena matematika. 1972. 115 str. 4°.
Štalec I.: Matematika za 1. razred. Ponatis. 1971. 234 str. 4°.
Pilgram V.: Matematika. Ponatis. 1972. 4°. 2. razred. 254 str. 3. razred. 188 str.
Andolšek D. in L. Kovačič: Finančna matematika za 4. razred. Predelana izdaja. 1971. 351 str. 4°.
Andolšek D. in L. Kovačič: Uzance za gospodarsko matematiko. 1972. 53 str. 8°.
Toš S.: Gospodarsko računstvo. 1. del. 1972. 164 str. 8°.
Andolšek D. in L. Kovačič: Gospodarsko računstvo. 4°. 2. razred. Ponatis. 1972. 120 str. 4. razred. 1971. 256 str.
Škraban A.: Statistika za 4. razred. 1971. 145 str. 4°.

Tehniške šole

Podlesnik M.: Tabele. b. 1. 8°. 1. zvezek. 23 str. 2. zvezek. 20 — 133 str.
Štalec I.: Tehniško računstvo PT. 1972. 4°. 1. del. 100 str. 2. del. 93 str.
Šubert L.: Opisna geometrija za prvi razred. Ponatis. 1971. 75 str. + 77 pril. 4°.
Šubert L.: Planimetrijske konstrukcije za 1. razred. Ponatis. 1971. 35 str. + 17 pril. 4°.
Podlesnik M.: Matematika — algebra. Ponatis. 1971. 4°. 1. razred. 447 str. 2. razred. I. del. 219 str. II. del. 220—394 str. 3. razred. 401 str.
Pilgram V.: Matematika — planimetrija za 1. razred. 1972. 301 str.
Pilgram V.: Matematika — trigonometrija. Ponatis. 4°. 1. razred. 1972. 68 str. 2. razred. 1971. 69—162 str. 3. razred. 1971. 102 str.
Pilgram V.: Matematika — stereometrija za drugi razred. 1972. 152 str. 4°.
Pilgram V.: Matematika — analitična geometrija v ravnini za 3. razred. 1972. 205 str. 4°.
Sladič V. in F. Kvaternik: Fizika. 1972. 4°. 1—5. zvezek. 174 str. 6—7. zvezek. 175—300 str. 8—9. zvezek. 301—377 str.
Opeka M.: Fizika za 2. razred tehniške šole za elektrotehniško šolo. Ponatis. 1971. 264 str. 4°.

Interesenti lahko dobijo publikacije na ogled v matematični knjižnici.

Ciril Velkovrh

V LETU 1972 SMO PREJELI NASLEDNJE REVIJE V ZAMENO ZA OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1. ACTA ARITHMETICA. Warszawa 1972. T. 22.
2. ACTA FAC. RERUM NATUR. UNIV. COMENIANAE. Math. Bratislava 1966. Vol. 13,14, 1967. Vol. 15,17, 1968. Vol. 18—22, 1970. Vol. 23,24, 1972. Vol. 26—28.
3. ACTA UNIV. CAROLINAE. Math. Phys. Praga 1971. T. 12.
4. ALGEBRA I LOGICA. Novosibirsk 1962. T. 1., 1963. T. 2, 1964. T. 3, 1971. T. 10.
5. ANALELE STI. UNIV. AL. I. CUZA DIN IASI. Math. Iasi 1971. T. 17, 1972. T. 18.
6. ANALELE UNIV. BUCARESTI. Acta logica. Bucaresti 1971. T. 14.
7. ANALELE UNIV. BUCARESTI. Fizica. Bucaresti 1971. T. 20.
8. ANALELE UNIV. BUCARESTI. Mat. mecanica. Bucaresti. 1971. T. 20.
9. ANALELE UNIV. TIMISOARA. Fizica-chemica. Timisoara 1971. T. 9.
10. ANALELE UNIV. TIMISOARA. Matematica. Timisoara 1970. T. 8, 1971. T. 9.
11. ANNALES ACAD. SCI. FENNICAE. Math. Helsinki 1971. 498—502, 1972. 504—526.
12. ANNALES POLONICI MATH. Warszawa 1971. T. 25, 1972. T. 26.
13. ARKIV MATH. Stockholm 1972. T. 10.
14. ASTRONOMSKE EFEMERIDE Ljubljana 1972.
15. BERICHTE DER GESELISCHAFT FÜR MATH. Bonn 1972. H. 52—59, 62—66.
16. BILTEN NA DRUŠTVATO NA MAT. FIZ. OD NARODNA REP. MAKEDINIJA. Skopje 1970. T. 21.
17. BOLETIN ACAD. SCIEN. FIS. MAT. NATURALES. Caracas 1971. T. 31.
18. BULLETIN ACAD. POLONAISE SCI. Math. astr. phys. Varsovie 1972. T. 20.
19. BULLETIN SCI. Zagreb 1972. T. 27.
20. BULLETIN SOC. MATH. FRANCE. Paris 1972. T. 100.
21. BONNER MATH. SCHRIFTEN. Bonn 1972. H. 52—56, 1971. H. 46—51.
22. COMMENTATIONES MATH. UNIV. CAROLINAE. Praga 1972. T. 13.
23. DIFFERENCIAL'NYE URAVNENIJA. Minsk 1972 T 8
24. DISCRETNYJ ANALIZ. Novosibirsk 1972. T. 20.
25. ECONOMIC COMPUT. ECONOM. CYBERNETIC STUD. RES. Bucaresti 1972.
26. ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK. Ljubljana 1972. Leto 39.
27. EUROPHYSICS NEWS. Geneve. 1972. Vol. 3.
28. FARMACEVTSKI VESTNIK. Ljubljana 1972. Leto 23.
29. FIZIKA. Zagreb 1972. Vol. 4.
30. FUNDAMENTA MATH. Warszawa 1972. T. 76.
31. GLASNIK MAT. Zagreb 1972. g. 7.
32. GODIŠEN SBORNIK. Mat. fiz. hem. Skopje 1972. g. 22.
33. GODIŠEN SBORNIK. Skopje 1970. g. 4.
34. GODIŠNIK VISŠ. TEHN. UČEB. ZAVED. Mat. Sofija 1967. Vol. 4, 1968/69. Vol. 5, 1970. Vol. 6.
35. HIROSHIMA MATH. J. Hiroshima 1971. Vol. 1, 1972. Vol. 2.
36. IDRIJSKI RAZGLEDI. Idrija 1972. Leto 17.
37. INFORMATION PROCESSING IN JAPAN. Tokyo 1971. Vol. 11.
38. INFORMATOR. Ljubljana 1972.
39. INTERNATIONAL MATH. NACHRICHTEN. Wien 1972.
40. IZVESTIJA MAT. INSTITUT. Sofija 1972. T. 13.
41. JOURNAL FRANKLIN INSTITUTE. Phyladelphia 1972. Vol. 293, 294.
42. JOURNAL INDIAN MATH. SOC. Madras 1970. Vol. 34, 1971. Vol. 35, 1972, Vol. 36.
43. MATEMATIČESKI ČASOPIS. Bratislava 1972. ročnik 22.
44. MATEMATIČKI LIST ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE. Beograd 1972. g. 6.
45. MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST. Zagreb 1971/72. g. 22.

46. MATEMATIČKI VESTNIK. Beograd 1972. g. 9.
47. MATEMATIKA. Gdansk 1972. Nr. 6.
48. MATEMATIKA A FYZIKA VE ŠKOLE. Olomuc 1971/72. r. 2.
49. MATHEMATICAL GAZETTE. London 1972. Vol. 56.
50. NAUČNI TRUDOVE. Plovdiv 1972. T. 10.
51. OSAKA J. MATH. Osaka 1972. Vol. 9.
52. POROČILO — Inštitut J. Štefan. Ljubljana 1972.
53. PROCEEDINGS AMER. MATH. SOC. Providence 1972. Vols 31—36.
54. PROCEEDINGS FAC. SCI. TOKAI UNIV. Tokyo 1972. Vol. 7.
55. PROCEEDINGS MATH. PHYS. SOC. U.A.R. Cario 1969. Vol. 33.
56. PROSVETNI DELAVEC. Ljubljana 1972. Leto 23.
57. PROTEUS. Ljubljana 1971/72. Leto 34.
58. PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA. Beograd 1972.
59. RADOVI ZAVODA ZA FIZIKU. Zagreb 1970—1971.
60. RAZPRAVE. Društvo meteorologov Slovenije. Ljubljana 1972. Leto 14.
61. REPORT — Institut J. Štefan. Ljubljana 1972.
62. REVISTA MAT. HISPANO-AMER. Madrid 1972. T. 31.
63. REVISTA MAT. UNIV. PARMA. Parma 1970. Vol. 11.
64. REVISTA UNION MAT. ARGENTINA Y ASOC. FIS. ARGENTINA. Buenos Aires 1972/73. Vol. 26.
65. REVUE ROUMANE MATH. PURES APPL. Bucarest 1972. T. 17.
66. ROZHLEDY MAT. FIZ. Praga 1972. T. 51.
67. RUDARSKO-METALURŠKI ZBORNIK. Ljubljana 1972.
68. SCRIPTA F.S.N.U.P. BRUNESIS. Mat. Brno 1971. T. 1.
69. SODOBNA PEDAGOGIKA. Ljubljana 1972. Vol. 24.
70. STUDII CERC. MAT. Bucaresti 1972. T. 24.
71. UČENYE ZAPISKI TARTUSKOGO GOS. UNIV. Trudy po mat. i meh. Tartu 1971. T. 10, 11.
72. UKRAINSKIJ MAT. ŽURNAL. Kiev 1972. T. 24.
73. USPEHI MATEMATIČESKIH NAUK. Moskva 1972. T. 27.
74. VARILNA TEHNIKA. Ljubljana 1972. Leto 21.
75. VESCI AN Beloruskog SSR. Fiz. mat. Minsk 1972.
76. VESTNIK LENINGRADSKOGO UNIV. Fiz. hemija. Leningrad 1972.
77. VESTNIK MOSKOVSKOGO UNIV. Mat. mehanika. Moskva 1972. T. 27.
78. VZGOJA IN IZOBRAŽEVANJE. Ljubljana 1972. Leto 3.
79. ZBORNIK RADOVA PRIR. MAT. FAK. Mat. Novi Sad 1972. g. 2.
80. ZBORNIK ZA HISTORIJU ŠKOLSTVA I PROSVETE. Zagreb 1971. g. 6.
81. ZDRAVSTVENI VESTNIK. Ljubljana 1972. Leto 41.

Ciril Velkovrh

Naročnike vljudno prosimo, da poravnajo naročnino za revijo

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

za leto 1973 (cena je nespremenjena: 30.— din), zamudniki pa tudi za leto 1972, kajti v naslednjem mesecu bomo morali vsem dolžnikom poslati opomin. Želimo pa si, da bi bilo teh čim manj.

V mesecu juniju smo poslali vsem članom Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS na ogled nekaj knjig iz zbirke

SIGMA

v skupni vrednosti 161.— din. Vljudno prosimo vse, ki nam še niso poravnali omenjenega zneska ali pa vrnili knjig, da to storijo čimprej in nam s tem prihranijo mnogo neprijetnega dela s terjatvami.

Pred nekaj dnevi je izšla prva številka novega slovenskega lista za mlade matematike, fizike in astronome z naslovom

PRESEK

Poslali smo ga vsem članom Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije na ogled. Predlagamo vam, da se na list čimprej naročite pismeno ali po telefonu na naslov KOMISIJA ZA TISK DMFA SRS, Jadranska c. 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. št. 61-564/53 ali pa nam nakažete letno naročnino 20.— din na naš žiro račun 50101-678-48363. Naslednja številka bo izšla že 1. decembra letos.