IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1973
Letnik 20
2

XX. LETNIK — ŠTEVILKA 2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1973

Uredniški odbor: Franc Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT univerze v Ljubljani; Franc Kvaternik, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, inštitut »J. Štefan«; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad, FNT; Anton Suhadolc, FNT; Ivan Vidav, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 6-krat letno.

Izdajo revije sofinancira Kulturna skupnost Slovenije.

Naročnina: za člane 20 din, za nečlane 30 din, za dijake in študente 10 din, za ustanove in podjetja 40 din, za inozemstvo 51 din (3 $), posamezna številka 8 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, pp. 227, telefon: 61-564/22, tek. račun št. 50101-678-48363

Člani društva naj nakazujejo na tekoči račun Komisije za tisk 20 din naročnine in 10 din članarine, skupaj 30 din.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

Članki Stran

Stanje matematičnih znanosti 33
Teorija divizorjev in enolična faktorizacija v kolobarjih (J. Grasselli) 39
Črne luknje (B. Golli) 48

Novica

Kvarki v astrofiziki (A. Pediček) 55

Šola

O minimalnem učnem načrtu (A. Cokan) 57
Stikalna plošča za demonstracijo poskusov iz elektrike (P. Prelog) 58
Anketa študentov na odseku za fiziko (C. Filipič, B. Golli, B. Vedlin, M. Vuk) 62

Tekmovanja

III. zvezno tekmovanje mladih matematikov, učencev 7. in 8. razredov osnovnih šol (B.Kolenko) 64
Koledar tekmovanj iz matematike v šol. letu 1972/73 64

CONTENTS

Articles Page

The mathematical Sciences 33
The Theory of Divisors and Unique Factorization in Rings (J. Grasselli) 39
The Black Holes (B. Golli) 48

News

Quarks in the Astrophysics (A. Pediček) 55

School 57

Competitions 64

STANJE MATEMATIČNIH ZNANOSTI

(Nadaljevanje)

MOS 01A65

Teorija grup. Grupe so med najpreprostejšimi in najpomembnejšimi algebraičnimi strukturami. Eden od najelementarnejših primerov grupe je množica vseh pozitivnih racionalnih števil, v kateri obravnavamo samo operacijo množenja. Grupa je množica elementov, v kateri je določena ena operacija, ki jo imenujemo grupna operacija ali grupno množenje; ta operacija se mora pokoravati istim formalnim pravilom kot navadno množenje racionalnih števil, samo da ne zahtevamo komutativnega zakona (to je, ni treba, da sta *ab* in *ba* enaka). Cela števila tvorijo grupo, če je grupna operacija navadno seštevanje; ta grupa je neskončna (vsebuje neskončno mnogo elementov) in komutativna. Nekoliko bolj kompliciran primer je končna grupa S_n, ki je sestavljena iz vseh permutacij prvih n naravnih števil.

Osnoven problem teorije grup je določiti strukturo vseh končnih grup. Ker so sestavni deli, iz katerih so sestavljene vse končne grupe, tako imenovane končne enostavne grupe, je važen del problema, da določimo strukturo teh grup. Pred kratkim je prišlo pri tem predmetu do odločilnega koraka naprej z dokazom (Thompsona in Feita), da je število elementov v končni enostavni grupi ali praštevilo ali sodo število. Ta rezultat je že imel daljnosežne posledice in močno podpira upanje, da bo v bližnji prihodnosti eksplicitno določena struktura vseh končnih enostavnih grup.

Grupe so bistveno važne pri mnogih matematičnih raziskavah in v mnogih uporabah matematike. Nekateri ljudje so prepričani, da dajejo grupe natančen matematičen pomen pomembnemu geometrijskemu pojmu simetrije.

Galois je uporabljal končne grupe za študij rešljivosti algebraičnih enačb s koreni, to je, s formulami, ki vsebujejo samo aritmetične operacije in korenjenje. Pokazal je, da lahko enačbo rešimo s koreni le, če koreni kažejo določeno simetrijo. Ta simetrija je vedno navzoča pri enačbah 2., 3. in 4. stopnje, na splošno pa ne pri enačbah višjih stopenj. Na primer, ni splošne formule za rešitev enačbe 5. stopnje z radikali. (Do tega epohalnega rezultata je prišel pred Galoisom Abel, še en matematični genij, ki je umrl mlad).

Teorija grup je pomembna v kemiji in fiziki. Teorijo končnih grup uporabljajo v kristalografiji, v teoriji anorganskih kompleksnih jonov in v spektroskopiji. V dvajsetih in tridesetih letih 20. stoletja so neskončne grupe uporabljali v kvantni mehaniki. Zadnji dosežki v ospredju fizikalnega raziskovanja so tesno povezani s pojmom simetrije in zato z grupami. Pravzaprav fiziki sedaj uporabljajo precej komplicirane rezultate iz teorije grup.

Homološka algebra in teorija kategorij. Moderno matematiko karakterizira vse večja uporaba algebre v drugih matematičnih panogah. Posebno presenetljiv primer je topologija, veja geometrije, ki obravnava bolj kvalitativne kot kvantitativne vidike oblik geometrijskih objektov. V začetku dvajsetih let 20. stoletja so spoznali, posebno pod vplivom Emmy Noetherjeve, da so metode, ki jih uporabljajo topologi, v osnovi algebraične. Toda prav tako kot vsaka znanost, ki uporablja matematiko, ne izkorišča samo obstoječih matematičnih teorij, ampak jih preoblikuje za lastne potrebe, so topologi razvili algebraično orodje, primerno svojim potrebam. Naslednja stopnja je bil povratek k čisti algebri. Algebraične metode, ki so jih ustvarili za potrebe topologije, so analizirali, uredili in študirali zaradi njih samih. To je pripeljalo do dveh novih pododdelkov v algebri: do teorije kategorij in homološke algebre. Ti dve sta morda najbolj abstraktni veji v algebri. Kategorije dajejo

jezik za obravnavanje *vseh* algebraičnih sistemov danega tipa. Rezultat je, kot se tako često zgodi v matematiki, široka množica uporab na mnogovrstnih matematičnih področjih, v tem primeru od logike do takih »uporabnih« področij, kot je teorija avtomatov.

Analiza

Analiza, najmlajša izmed treh tradicionalnih panog matematike, sestoji iz poganjkov infinitezimalnega računa, predmeta, ki so ga odkrili v 17. stoletju. Izum infinitezimalnega računa, ki je običajno povezan z imeni Newtona in Leibnitza, je bil pomemben dogodek v zgodovini človeštva in je omogočil moderno fizikalno znanost.

Od ustvaritve infinitezimalnega računa je analiza prodrla skoraj v vse dele matematike, tako zaradi svojega notranjega bogastva, kakor zaradi svoje mnogostranske uporabnosti. Njeni pododdelki so zaživeli lastna življenja in se često ukvarjajo z njimi zaradi njih samih. Izkušnja pa kaže, da teorija diferencialnih enačb skoraj vedno uporablja metode in ideje, ki so se razvile v navidezno oddaljenih delih analize, kakor tudi v drugih vejah matematike. Na kratko bomo omenili nekaj panog v analizi, ki so sedaj aktivne in pri katerih so bili pred kratkim doseženi pomembni rezultati.

Funkcije kompleksnih spremenljivk. Že dolgo je, kar so spoznali, da postanejo določeni deli infinitezimalnega računa razumljivi in harmonični samo, če razširimo sistem »realnih« števil tako, da priključimo »imaginarna« in »kompleksna« števila. Na primer, ta razširitev združuje teorije elementarnih funkcij, kot so trigonometrične funkcije, logaritemska in eksponentna funkcija. Kompleksna analiza je teorija analitičnih funkcij kompleksnih spremenljivk. To so funkcije, ki jih lahko predstavimo z določenimi neskončnimi vrstami (potenčnimi vrstami). Kot neodvisna panoga se je teorija analitičnih funkcij razvijala iz del Cauchyja, Riemanna in Weierstrassa v 19. stoletju. Riemannovo delo je uporabljalo fizikalno in geometrijsko predstavo, toda mnoge znanstvenike je presenetilo, da se je kompleksna analiza pokazala kot koristna panoga za tako veliko drugih področij v znanosti (za elektrotehniko, dinamiko tekočin itd.). V zadnjih letih se je pokazalo, da je pojem analitičnih funkcij koristen prav v osnovah fizike visokih energij.

Kompleksna analiza pojasnjuje prej izraženo trditev o stekanju področij. Pred več desetletji je bila teorija kompleksnih funkcij uspevajoče področje, a s strogo opisanimi mejami. Matematiki, ki so delali na tem področju, so bili v stikih predvsem med seboj in večina njihovega dela je bila za druge matematike le delno zanimiva. Danes pa uporabljajo mnogi strokovnjaki v kompleksni analizi orodje iz topologije, geometrije in algebre, po drugi strani pa njihovo delo zanima vedno večji krog matematikov. To posebno velja za delo v teoriji funkcij več kompleksnih spremenljivk, ki se je posebno razvilo v zadnjih dveh desetletjih.

Harmonična analiza. Harmonično analizo lahko opišemo kot del analize, ki je nastala pri študiju nihanja strun. V 18. stoletju je Bernoulli poskušal predstaviti gibanje nihajoče strune kot superpozicijo tako imenovanih preprostih harmoničnih gibanj, to je gibanj, opisanih s trigonometričnimi funkcijami. Isto idejo je uporabil Fourier pri študiju prevajanja toplote in kot rezultat je dobil superpozicije, ki so postale znane kot Fourierjeve vrste. Kot lahko zvok, povzročen z glasbenim instrumentom, razčlenimo v superpozicijo čistih tonov, tako lahko fiziki opišejo mnoge kompliciranе procese in stanja kot superpozicijo lastnih funkcij — rešitev diferencialnih enačb — ki na neki način ustrezajo čistim tonom. Matematika takšnih reprezentacij daje eno od osnovnih orodij za reševanje diferencialnih enačb matematične fizike in je bila za generacije raziskovalcev v čisti matematiki izvor zanimivih in težkih problemov. To delo in njegove posplošitve tvorijo področje harmonične analize.

Druga smer raziskovanja, ki izhaja iz problema, ki ga je postavil Bernoulli, je obstajala bolj v poglobitvi kot v posplošitvi. Bernoulli je v bistvu trdil, da lahko vsako funkcijo predstavimo s Fourierjevo vrsto. Ta izjava je povzročila mnogo polemik in je predvsem vodila k razjasnitvi pojma funkcije, k prvi strogi definiciji osnovnega pojma integrala, ki jo je podal Riemann, in pol stoletja kasneje k razširitvi tega pojma po Lebesgueu. Zelo specialno vprašanje v teoriji Fourierjevih vrst je vodilo Georga Cantorja k osnovanju teorije množic. Najnovejšo posplošitev pojma funkcije, Schwartzovo teorijo distribucij (glej spodaj), je vsaj delno motivirala teorija Fourierjevih vrst.

Kljub vsej tej mnogostranski aktivnosti pa je najpreprostejša in najnaivnejša formulacija Bernoullijevega vprašanja ostala odprta do leta 1965. Precizna formulacija je nujno strokovna: Ali Fourierjeva vrsta vsake funkcije skoraj povsod konvergira? Ruski matematik Kolmogorov je pred mnogimi leti dokazal, da je odgovor nikalen, če dopuščamo vse funkcije, za katere lahko tvorimo Fourierjevo vrsto po klasičnih pravilih. Toda šele pred kratkim je Carleson dokazal, da je odgovor trdilen, če je funkcija zvezna, in celo pri nekaterih šibkejših predpostavkah. To je eden izmed mnogih primerov starih in znanih problemov, ki so bili pred kratkim rešeni.

Funkcionalna analiza. V tem stoletju se je razvila nova oblika analize, pri kateri so funkcije klasične analize točke v funkcijskem prostoru in je v navadi geometrijski jezik. Najbolj znan je primer Hilbertovega prostora, ki si ga lahko zamišljamo kot prostor funkcij, lahko pa ga opišemo tudi kot prostor z neskončno mnogo koordinatami, kjer je razdalja podana s formulo, ki je analogna tisti, ki jo uporabljamo v analitični geometriji.

Glavni primeri študija so tako imenovani operatorji, ki so preslikave enega funkcijskega prostora v drug funkcijski prostor. Problemi v funkcionalni analizi često nastanejo pri integralnih enačbah, diferencialnih enačbah in pri drugih delih tako imenovane klasične analize.

Pomembna uporaba funkcionalne analize, ali natančneje, Hilbertovega prostora, se pojavi v moderni fiziki. Kvantna mehanika je dejansko popolnoma osnovana na pojmu Hilbertovega prostora. To so najprej spoznali na samem začetku teorije. V tistem času sta Schrödinger in Heisenberg predlagala dva navidezno različna matematična opisa eksperimentalnih opažanj. Izkazalo se je, da sta njuna dva opisa zgolj dva modela ekvivalentnih operatorjev v abstraktnem Hilbertovem prostoru. Če primerjamo množico kompleksnih, jedrnatih in natančnih trditev kvantne mehanike, ki se izredno ujemajo z eksperimentalnimi opažanji, z visoko abstraktnimi matematičnimi pojmi, ki smo jih prvotno vpeljali in razvili samo zaradi njihove matematične privlačnosti, kasneje pa uporabili kot jezik fizike, se ne nehamo čuditi nad močjo in tehtnostjo matematičnih abstrakcij.

Funkcionalna analiza je zelo aktivno področje raziskovanja. Primeri zadnjih dosežkov vsebujejo teorijo reprezentacij, problem aproksimacij in rabo topoloških metod.

Diferencialne enačbe. Ta del analize, ki med drugim prodira v precejšnje dele matematične fizike in klasične uporabne matematike, doživlja v zadnjih desetletjih proces skoraj eksplozivnega razvoja. Nobeno poročilo, ki ne presega okvira priročnika, ne more pravilno oceniti vseh dosežkov; tu omenjamo samo nekaj najzanimivejših stvari, nakažemo pa tudi nekatere od mnogih uporab diferencialnih enačb na uporabnih področjih.

Diferencialne enačbe delimo v navadne in parcialne. Pri navadni diferencialni enačbi je neznana funkcija, ali sistem funkcij ene same neodvisne spremenljivke. V večini uporabnih primerov je ta spremenljivka čas. Pri parcialni diferencialni enačbi je neznana funkcija, ali neznane funkcije, odvisna od več spremenljivk. V uporabi so te spremenljivke navadno koordinate točke v prostoru, čeprav je ena od njih lahko čas. V geometrijskem jeziku pomeni rešiti navadno diferencialno enačbo poiskati krivuljo, ki zadošča določenim pogojem; rešiti parcialno diferencialno enačbo pomeni poiskati ploskev ali večdimenzionalno mnogoterost, ki zadošča določenim pogojem.

Moderna teorija navadnih diferencialnih enačb vsebuje teorijo vodenja, ki je v tesni zvezi z uporabo v tehniki. Osnovni problem je voditi neki sistem, kot na primer satelit, s pomočjo določenih kontrolnih mehanizmov. Često želimo spraviti sistem v neko določeno stanje (na primer voditi izstrelek k tarči) z minimalno količino neke snovi (kot na primer, goriva). To je problem v »Optimalni teoriji vodenja«. Čeprav se je teorija vodenja razvila v glavnem v zadnjih desetih letih, privlači mnogo raziskovalcev v matematiki in tehniki; na tem področju je nastalo več kot 400 publikacij, vštevši številne knjige. To je področje, h kateremu so veliko prispevali Rusi pod vodstvom Pontrjagina, ki je bil prvotno topolog.

Eden od bolj klasičnih dosežkov pri navadnih diferencialnih enačbah je teorija stabilnosti, za katero sta pred mnogo leti Poincaré in Birkhoff opravila veliko pionirskega dela. Mnogo problemov, ki sta jih postavila, so pred kratkim rešili matematiki v Rusiji (Kolmogorov, Arnold) in v Združenih Državah Amerike (Moser). Čeprav problem izvira iz astronomije (stabilnost planetarnih tirov), so metode, ki so jih razvili za njegovo rešitev, uporabne pri projektiranju visokoenergetskega pospeševalnika in pri študiju nabitih delcev v magnetnih poljih, takih, kot je zemljino. Tipičen problem je za dolgo zagotoviti nabitost delcev v ozkih, cevastih vakuumskih komorah pospeševalnika tako, da se ne bi zadeli ob steno. Nekatere od teh rezultatov so uporabili v teoriji tirov umetnih satelitov blizu sploščene zemlje.

Od vseh področij navadnih diferencialnih enačb je teorija strukturne stabilnosti vektorskih polj (sistemov diferencialnih enačb) na mnogoterostih (to je, ploskvah in njihovih posplošitvah v višjih dimenzijah) morda zanimiva za največje število matematikov z drugih področij. Pravimo, da je vektorsko polje strukturno stabilno, če ostane splošna oblika krivulj rešitve nespremenjena, če vektorsko polje rahlo zmotimo. Leta 1959 so razvrstili strukturno stabilne sisteme na navadnih ploskvah in dokazali, da lahko vsako vektorsko polje na taki mnogoterosti poljubno dobro aproksimiramo s strukturno stabilnim. Toda Smale je pokazal, da ta aproksimacijski izrek ne velja na mnogoterostih, katerih dimenzija je večja kot tri. Če velja na mnogoterostih dimenzije tri, danes še ne vemo. Upamo, da nas bo vztrajno delo pripeljalo do splošne teorije o klasifikaciji vektorskih polj.

Najnovejša teorija o linearnih parcialnih diferencialnih enačbah je pridobila z ustvaritvijo novega jezika, jezika »distribucij« ali posplošenih funkcij, ki ga je vpeljal L. Schwartz. Primer distribucije je znana Diracova delta funkcija, $\delta(x)$.

Nova generacija matematikov se je naučila gledati na parcialne diferencialne enačbe z vidika distribucij in je ustvarila novo vejo te stare panoge, ki ima obilo lepih in tehtnih rezultatov. Oglejmo si primer! Vsaka linearna parcialna diferencialna enačba s *konstantnimi* koeficienti oblike $Lu = f$, kjer je f katerakoli funkcija ali posplošena funkcija, ima rešitve (Ehrenpreis — Malgrange). Tega izreka ne moremo še naprej posplošiti. Če enačba nima konstantnih koeficientov, potem ni nujno, da rešitev eksistira. Dejansko so bili pred nekaj leti strokovnjaki presenečeni, ko je Hans Lewy odkril preprosto linearno parcialno diferencialno enačbo, ki sploh nima rešitve.

Toda narava ni vedno linearna. Pretakanje stisljivih tekočin, viskozno pretakanje, magnetohidrodinamika in fizika plazme, splošna relativnost in druge panoge vzpodbujajo matematike, da rešujejo nelinearne probleme. Teorija nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb je trenutno zelo aktivna panoga. Dosegli so važne korake naprej, toda še vedno ostane ogromno dela. Kaže, da je veliko modernega dela pri parcialnih diferencialnih enačbah namenjenega samo določenemu krogu ljudi, in še pred nekaj leti bi menili, da tako delo ne bo zanimivo za uporabo, kjer hočemo rešitev, izraženo v izvedljivi obliki, recimo z zadosti preprosto formulo. Z nastopom modernih računalnikov se je to spremenilo. Če problem, ki vsebuje diferencialno enačbo, teoretično zadosti razumemo, potem, vsaj načelno, lahko dobimo numerično rešitev s strojem. Če pa matematičnega problema ne ra-

zumemo, potem se lahko zgodi, da ne dobimo rešitve niti z največjim strojem in z neomejenim številom strojnih ur.

Drug primer iz teorije parcialnih diferencialnih enačb je izrek o indeksu. Recimo, da hočemo rešiti linearno enačbo

$$Lu = f$$

kjer je L kompliciran operator, ki lahko vsebuje odvajanja, integracije itd., u je neznanka, ki je lahko množica števil, funkcija ali množica funkcij, in f sestoji iz danih podatkov. Na splošno bomo dobili rešitev le, če f zadošča določenemu številu pogojev. Recimo, da je to število končno in ga imenujemo A. Toda tudi če je problem splošno rešljiv, lahko da rešitev ni edina; recimo, da je rešitev odvisna od B parametrov. Število $A - B$ imenujemo indeks problema.

Najpreprostejši primer je sistem n linearnih algebraičnih enačb z m neznankami. Z lahkoto pokažemo, da je v tem primeru indeks $A - B$ enak $n - m$. Problem indeksa ima pomen tudi, kadar so enačbe diferencialne enačbe, toda do prav pred kratkim so ga mogli rešiti le v relativno preprostih primerih. Ta težki problem sta pred tremi leti posplošila, začela obdelovati in ga rešila Atiyah in Singer. Formula, ki sta jo dobila, izraža razliko $A - B$ z določenimi topološkimi invariantami področja in ustreznih enačb. V delu nista uporabljala samo najpopolnejšega in najnovejšega orodja analize, ampak tudi rezultate in metode iz diferencialne geometrije in topologije. Izkazalo se je tudi, da je ta indeksna formula vsebovala kot posebne primere več pomembnih rezultatov na drugih področjih matematike in njihove posplošitve. Popolnoma nemogoče je pripisati ta lepi dosežek eni matematični panogi.Prav toliko pripada analizi kot geometriji in topologiji in ima močne zveze z algebro.

Verjetnostni račun. Verjetnostni račun, ki je nastal v šestnajstem in sedemnajstem stoletju iz precej neresnih vprašanj računanja verjetnosti pri igrah za denar, se je v zadnjih desetletjih eksplozivno razvil. Po eni strani so to teorijo, ki obravnava »matematiko naključja«, postavili na trdno osnovo, zaradi česar jo imamo za znanost, ki je tako deduktivna in tako stroga kot geometrija in algebra. Po drugi strani je njen obseg uporabnosti brezmejno zrasel.

Pred kakimi štiridesetimi leti je verjetnostni račun nujno obstajal iz kupa ločenih problemov. Pod Gaussovim vplivom so pripisovali preveč pomembnosti tako imenovani teoriji napak, predmetu, ki je sedaj skoraj pozabljen. Namesto tega se je verjetnost premaknila v nove smeri, tako da je razvila teorijo stohastičnih procesov in moderno fluktuacijsko teorijo. Nepričakovani rezultati teh teorij so vpeljali čisto nove vidike in odnose, odprle pa so tudi nove poti raziskovanja. Verjetnostni račun igra pomembno vlogo pri presenetljivo mnogih matematičnih panogah. Primeri takih panog so: teorija mere, funkcijski prostori, klasična teorija potenciala, Hilbertovi prostori, teorija informacij in parcialne diferencialne enačbe. Ta seznam lahko razširimo, toda naj zadostuje, če pripomnimo, da uporabljamo verjetnostne metode za dokaze v logiki. Nekateri zadnji dosežki obetajo osnovanje nadaljnjih novih zvez med logiko in verjetnostjo.

Enak, močan in ploden pretok idej lahko opazimo med matematično verjetnostjo in različnimi uporabami. Tehnološki problemi (teorija informacij in napovedi, teorija šuma) so stimulirali pomembne dele verjetnostnega računa in moderna verjetnost igra pomembno vlogo v industriji in v kontroli kvalitete in v tehniki zanesljivosti, kakor tudi v naravoslovnih in družbenih znanostih. Nadalje tvori verjetnost osnovo moderne teorije statistične inference.

Geometrija. Trije preokreti v zgodovini geometrije so določili tok matematike in vplivali prek mej matematike in celo znanosti na splošno. Prvi preokret se je zgodil v Grčiji, ko so spremenili v deduktivno znanost zbirko geometrijskih dejstev in pravil, zbranih

pri starih civilizacijah vzhoda. Ta dogodek je pomenil rojstvo deduktivnega sklepanja. Drugi preokret je bilo Fermatovo in Descartesovo odkritje analitične geometrije; pokazala sta, kako lahko točke predstavimo s pari ali trojicami števil in geometrijske like z algebraičnimi enačbami. To odkritje je premostilo prepad med geometrijskimi in aritmetičnimi pojmi, ki so prevladovali v grški matematiki, in pripravilo tla za odkritje infinitezimalnega računa. Tretji preokret predstavlja odkritje neevklidske geometrije Gaussa, Bolyaia in Lobačevskega (in Riemanna v nekoliko drugačni zvezi). To kaže, da Evklidovi aksiomi niso samo ob sebi razumljive resnice, kot so stoletja domnevali, in da so možne konsistentne geometrije, zgrajene na drugih aksiomih. Rezultati tega odkritja so bili velikanski za človekovo mišljenje. Nas pa zanimajo samo posledice tega odkritja za matematiko. Ena od teh je aksiomatična metoda, ki napolnjuje vso moderno matematiko. Isto velja za matematično logiko in rabo formalnih jezikov. In končno velja isto za vso množico različnih geometrij, pri katerih začnemo tako, da predpostavljamo samo *nekatere* znane lastnosti prostora vsakodnevnega izkustva, potem pa nadaljujemo z razvijanjem logičnih posledic.

Na kratko si bomo ogledali nekaj pododdelkov moderne geometrije.

Algebraična geometrija. Danes se večina dijakov v srednji šoli seznani s to panogo, ko študirajo stožernice (elipse, parabole in hiperbole).

Algebraična geometrija obravnava rešitve sistemov algebraičnih enačb, uporabljajoč geometrijski jezik. Osnovni namen je doseči popolno razumevanje celote rešitev. Da bi to dosegli, je potrebno razširiti okvir tistih delov algebre in geometrije, ki tu nastopata. Moderna algebraična geometrija proučuje enačbe, katerih koeficienti niso navadna realna ali kompleksna števila, ampak tudi elementi bolj splošnih obsegov ali kolobarjev. Obravnava geometrijske konfiguracije, ki niso definirane s takimi enačbami samo v ravnini ali navadnem tridimenzionalnem prostoru, ampak tudi v večdimenzionalnih prostorih.

Ena od privlačnosti algebraične geometrije je njena tesna zveza s teorijo števil; včasih uporabljamo zamotane algebraične in geometrijske konstrukcije, da bi dobili številsko-teoretične rezultate.* Algebraična geometrija sedaj uspeva in privlači nekatere najbolj nadarjene mlade ljudi, ki so se začeli ukvarjati z matematiko. Omenjamo dva nova dosežka.

Zelo znan problem je bil, ali je možno, če je danih $k - n$ neodvisnih algebraičnih enačb s k neznankami, predstaviti vse rešitve tega sistema z gladkim geometrijskim objektom. (Natančneje, ali lahko transformiramo množico, določeno s tem sistemom, v gladek objekt, s tem da uporabimo tako imenovane biracionalne transformacije?). Pritrdilni odgovor za $n = 1$ so našli v devetnajstem stoletju. Za $n = 2$ je dal Zariski približno pred 30 leti prvi čisto algebraični dokaz za sisteme s koeficienti, ki so kompleksna števila. Deset let pozneje je rešil primer $n = 3$. Pred kratkim je Hironaka pritrdilno rešil splošni primer (poljuben n).

Drug dosežek čisto drugačne narave je sistematična obnovitev osnov algebraične geometrije, ki jo sedaj vodi Grothendieck v Franciji. Njegovo delo, ki pelje tudi k rešitvam pomembnih konkretnih problemov, je vplivalo na mnoge mlade matematike, vključno s tistimi, ki delajo na drugih področjih.

(Nadaljevanje sledi)

---

* Na primer, »Fermatov zadnji izrek« (trditev, narejena v sedemnajstem stoletju in do sedaj dokazana samo v dolčenih posebnih primerih) lahko takole razložimo: naj bo n celo število, večje od 2 in mislimo si algebraično ploskev $x^n + y^n = z^n$ v prostoru x, y, z; ali so na tej ploskvi kake druge točke s celoštevilčnimi koordinatami kot točke (0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)? Fermat je trdil, da jih ni.

TEORIJA DIVIZORJEV IN ENOLIČNA FAKTORIZACIJA V KOLOBARJIH

JOŽE GRASSELLI

AMS Subj. Clas. (1970) 12 A45—12 B10

Opisana je teorija divizorjev in njen pomen za enolično faktorizacijo v kolobarjih.

THE THEORY OF DIVISORS AND UNIQUE FACTORIZATION IN RINGS

An exposition of the theory of divisors and its meaning for the unique factorization in rings is given.

1

Vsako celo racionalno število, ki ni 0, 1, —1, je do vrstnega reda množiteljev enolično izrazljivo z zmnožkom praštevil. Pomembnosti tega dejstva ni treba posebej poudarjati, saj na njem sloni vsa elementarna teorija števil. Ali imajo takšno izražavo tudi elementi splošnejših kolobarjev, kot je Z? Ob tem problemu imata začetek teorija idealov in teorija divizorjev. Ogledali si bomo, kako se rešuje problem z divizorji. Najprej je treba zbrati nekaj pojmov v zvezi s kolobarji in polgrupami.

2

Imejmo komutativen kolobar $\mathcal{K}$ z identiteto in brez deliteljev niča. Identiteto bomo zapisovali z 1, element nič z 0, splošno pa elemente z malimi latinskimi črkami. Nobenih težav ni, opredeliti v $\mathcal{K}$ nekatere pojme, ki jih srečamo pri celih racionalnih številih.

Pravimo, da je element $a \in \mathcal{K}$ *deljiv* z elementom $b \in \mathcal{K}$, če je v $\mathcal{K}$ takšen element c, da je $a = bc$. To zapišemo v znakih $b \mid a$ in beremo b deli a. Elementa b, c sta *delitelja* elementa a. Ker je zmeraj $a = 1 \cdot a$, je identiteta delitelj za vsak element $a \in \mathcal{K}$. Iz te enačbe se tudi vidi, da delitelji identitete delijo vsak element kolobarja. Delitelji identitete so *enote* kolobarja in jih označujemo z u, u_1, u_2 itd. Posebej je identiteta 1 enota. Prav lahko se ugotovi, da je produkt enot enota. Elementa, ki se razločujeta samo za enoto kot faktor, sta *asociirana*. Element p, ki je različen od 0 in od enot in nima drugih deliteljev kakor enote in s p asociirane elemente, je *nerazcepen*. Če se vsak element, ki ni 0 ali enota, izraža s produktom nerazcepnih elementov, je $\mathcal{K}$ kolobar s *faktorizacijo*. Faktorizacija je *enolična*, če iz produktov

$$a = p_1 \dots p_r \quad \text{in} \quad a = q_1 \dots q_s$$

kjer so $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$ nerazcepni elementi, sledi, da je njihovo število obakrat isto $r = s$ in da je vsak element v prvem produktu asociiran nekemu elementu drugega produkta. Zaradi komutativnosti se sme vzeti, da sta kar vsaka nerazcepna elementa p_i, q_i z istima indeksoma asociirana.

Če je torej kolobar $\mathcal{K}$ z enolično faktorizacijo, se vsak element $a \in \mathcal{K}$, ki ni 0 ali enota, izraža

$$a = up_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} \tag{1}$$

Tu je u enota, $p_1, \dots, p_r$ paroma neasociirani nerazcepni elementi, $n_1, \dots, n_r$ naravna števila. Elementi na desni strani v (1) so do asociiranosti natančno določeni.

Problem, ki smo ga omenili v razdelku 1, se lahko šele zdaj natančno opiše: *Pri kakšnih pogojih ima kolobar $\mathcal{K}$ enolično faktorizacijo?*

Ponazorimo vpeljane pojme na dveh preprostih zgledih!

Naj bo $\mathcal{K} = Z$. Enoti sta tukaj števili 1, —1. Celemu številu n asociirani element je $-n$. Nerazcepni elementi so praštevila, faktorizacija v Z je seveda enolična.

Kot drugi zgled vzemimo množico $Q[x]$, tj. kolobar vseh polinomov v x, ki imajo za koeficiente racionalna števila! Enote so vsa od 0 različna racionalna števila. Polinom $a \in Q[x]$ ima zato neskončno asociiranih elementov. Nerazcepen element je vsak nad obsegom Q nerazcepen polinom. Iz osnov algebre je znano, da ima kolobar $Q[x]$ enolično faktorizacijo.

Povrnimo se k splošnemu kolobarju $\mathcal{K}$. Navedli smo definicijo nerazcepnega elementa in enolične faktorizacije. V splošnem seveda ni treba, da kolobar nerazcepne elemente ima. Če pa jih ima, še ni rečeno, da je faktorizacija enolična. Zgledov, ki to potrjujejo, ne bi navajali.

V kolobarju se na običajen način definira največja skupna mera elementov. Če $c \mid a$ in $c \mid b$, je c skupni delitelj za a in b. Element g je *največja skupna mera elementov* a, b, če vsak njun skupni delitelj deli g. Enak sklep kot v Z pokaže, da v kolobarju z enolično faktorizacijo za vsaka dva ali več elementov največja skupna mera obstaja. Za poljuben kolobar to ni več res.

Naslanjajoč se na deljivost, se v $\mathcal{K}$ uvede kongruentnost elementov. Vse velja prav enako kot za kongruence v Z, zato le nekaj opazk. Naj bo c od 0 in enot različen element v $\mathcal{K}$. Kongruenca

$$a \equiv b \pmod{c}$$

pomeni, da je element $a - b$ deljiv s c. Po modulu c razpadejo elementi kolobarja $\mathcal{K}$ na razrede ostankov. V istem razredu so elementi, ki so med sabo kongruentni. Naj bo $\bar{a}$ razred, ki vsebuje element a. Razred $\bar{0}$ sestavljajo npr. vsi elementi, ki so deljivi s c. Če je a kak element iz razreda $\bar{a}$, d element iz razreda $\bar{d}$, je razred, ki vsebuje $a + d$ vsota $\bar{a} + \bar{d}$ in razred, v katerem leži ad, je produkt $\bar{a}\bar{d}$. Za tako seštevanje in množenje sestavljajo razredi ostankov kolobar.

Zdaj pa še opredelitev proste polgrupe. Naj bo **G** za množenje komutativna polgrupa z identiteto. Kar je bilo zgoraj povedano o deljivosti elementov v kolobarju, velja brez sprememb tudi za elemente polgrupe **G**. Zato je možno govoriti o nerazcepnih elementih in o enolični faktorizaciji v **G**. Če je polgrupa **G** z enolično faktorizacijo in razen identitete nima drugih enot, pravimo, da je *prosta* polgrupa. Od identitete različni elementi proste polgrupe se torej dobe kot končni produkti vseh možnih potenc nerazcepnih elementov, pri čemer so potenčni eksponenti naravna števila.

3

Množica $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} - 0$ od 0 različnih elementov kolobarja $\mathcal{K}$ je za množenje komutativna polgrupa z identiteto 1. Če ima $\mathcal{K}$ enolično faktorizacijo in pomeni $\mathcal{P}$ množico vseh paroma neasociiranih nerazcepnih elementov iz $\mathcal{K}$, je množica $\mathcal{G}$, ki vsebuje 1, elemente iz $\mathcal{P}$ in vse končne produkte elementov iz $\mathcal{P}$, za množenje prosta polgrupa.

Priredimo vsaki enoti u iz $\mathcal{K}^*$ v $\mathcal{G}$ element 1, vsakemu nerazcepnemu elementu iz $\mathcal{K}^*$ pa sociirani nerazcepni element iz $\mathcal{P}$! Po (1) pripade potem vsakemu elementu a iz $\mathcal{K}^*$ natančno določen element v $\mathcal{G}$. Dobljena upodobitev $\mathcal{K}^*$ na $\mathcal{G}$ je homomorfizem. Kajti produktu ab elementov a, b iz $\mathcal{K}^*$ je zaradi enolične faktorizacije prirejen v $\mathcal{G}$ kot slika element, ki je kar produkt slike elementa a s sliko elementa b. Če torej $a \mid b$ v $\mathcal{K}^*$, slika elementa a deli sliko elementa b v $\mathcal{G}$. Prav tako pa iz deljivosti nekega elementa iz $\mathcal{G}$ z dru-

gim elementom iz $\mathcal{G}$ sledi deljivost ustreznih originalov v $\mathcal{K}^*$. Najdeni homomorfizem se odlikuje torej po tem, da sta sliki deljivi natančno tedaj, če sta originala deljiva.

Opisani homomorfizem je poseben primer teorije divizorjev. Tako se namreč imenuje vsak homomorfizem polgrupe $\mathcal{K}^*$ v prosto polgrupo, če ohranja deljivost v omenjenem smislu. Obrnimo se k definiciji!

Imejmo prosto polgrupo **G** za množenje, elemente zaznamujemo z **a**, **b**, **c** itd., identiteta naj bo **e**. Za element $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$, je potem

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1^{n_1} \dots \mathbf{p}_r^{n_r} \tag{2}$$

Tu so $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r$ različni nerazcepni elementi v **G**, $n_1, \dots, n_r$ naravna števila. Kot vemo, je zapis (2) enoličen do vrstnega reda faktorjev.

Imejmo še homomorfizem h: $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$ polgrupe $\mathcal{K}^*$ v **G**! Elementu $a \in \mathcal{K}^*$ po homomorfizmu h prirejeni element $h(a)$ v **G** zaznamujmo z (a)! V **G** so lahko poleg elementov, ki so slike elementov iz $\mathcal{K}^*$, še drugi elementi. Ni torej nujno, da je vsak element iz **G** slika kakega elementa iz $\mathcal{K}^*$.

Teorija divizorjev $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$ za kolobar $\mathcal{K}$ je homomorfizem $a \to (a)$ polgrupe $\mathcal{K}^*$ v prosto polgrupo **G**, *ki izpolnjuje zahtevo:*

1°. *Element a iz $\mathcal{K}^*$ je v kolobarju $\mathcal{K}$ deljiv z elementom b iz $\mathcal{K}^*$ natančno tedaj, če je element (a) deljiv v polgrupi* **G** *z elementom (b).*

Da iz $a \mid b$ v $\mathcal{K}$ sledi $(a) \mid (b)$ v **G**, pove že definicija homomorfizma. Bistvo zahteve je torej v tem, da iz $(a) \mid (b)$ v **G** vedno lahko sklepamo na deljivost $a \mid b$ v $\mathcal{K}$.

Elementi proste polgrupe **G**, ki nastopa v teoriji divizorjev, se imenujejo *divizorji* kolobarja $\mathcal{K}$. Divizorji, ki so slike elementov iz $\mathcal{K}^*$, so *glavni divizorji*. Nerazcepne elemente v **G** imenujemo *pradivizorje*. Homomorfizem $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$ na elementu 0 ni definiran. Po dogovoru se vzame, da vsak divizor iz **G** deli 0.

Primer iz začetka tega razdelka kaže, da za kolobarje z enolično faktorizacijo teorija divizorjev vedno obstoji. Polgrupa **G** je tamkaj opisana polgrupa $\mathcal{G}$.

Kako globoko povezuje teorija divizorjev glede deljivosti polgrupi $\mathcal{K}^*$ in **G**, se vidi iz naslednjih dveh lastnosti.

2°. *Če sta elementa a, b iz $\mathcal{K}$ deljiva z elementom* **a** *iz* **G**, *sta tudi vsota $a + b$ in razlika $a - b$ deljivi z* **a**.

Deljivost elementa a iz $\mathcal{K}^*$ z elementom **a** iz **G** pomeni, da je (a) deljiv z **a**. Gre torej za ugotovitev, da iz $\mathbf{a} \mid (a)$ in $\mathbf{a} \mid (b)$ sledi $\mathbf{a} \mid (a + b)$ oziroma $\mathbf{a} \mid a - b$).

3°. *Če se množica elementov v $\mathcal{K}$, ki so deljivi z $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$, ujema z množico elementov v $\mathcal{K}$, ki so deljivi z $b \in \mathbf{G}$, je* $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Različna divizorja iz **G** se torej ne moreta ujemati v vseh elementih, ki jih v $\mathcal{K}$ delita. Ako je torej $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, je v $\mathcal{K}$ tak element a, da divizor (a) ni deljiv z enim od obeh elementov **a**, **b**.

Dokaz lastnosti 2° in 3° je precej obsežen in ga bomo izpustili. Naj bo samo omenjeno, da je prvotno pri Boreviču in Šafareviču teorija divizorjev definirana tako, da sta poleg 1° tudi 2° in 3° vzeta med aksinome, ki jim mora homomorfizem $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$ ustrezati. Leta 1970 je Skula pokazal, da sledi 2° iz 1° in 3°. Da je mogoče 2° in 3° izpeljati iz 1°, je pred kratkim ugotovil Gundlach.

Če ima kolobar $\mathcal{K}$ teoriji divizorjev $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$ in $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}_1$, se da na podlagi 2° in 3° dokazati, da sta polgrupi **G** in $\mathbf{G}_1$ izomorfni. Ker izomorfne polgrupe ne štejemo za različne, je torej teorija divizorjev, kadar obstoji, ena sama. Za kolobar z enolično faktorizacijo tedaj ona, ki je določena s polgrupo $\mathcal{G}$.

Pomen teorije divizorjev se vidi iz izreka:

Komutativen kolobar z identiteto in brez deliteljev niča ima enolično faktorizacijo natančno tedaj, kadar premore teorijo divizorjev, v kateri so vsi divizorji glavni.

Da kolobar z enolično faktorizacijo teorijo divizorjev premore, je bilo ugotovljeno že v začetku tega razdelka.

V obratni smeri privzemimo, da je za kolobar $\mathcal{K}$ teorija divizorjev podana z neko prosto polgrupo **G**, katere vsi elementi so glavni divizorji! Ker so v **G** vsi divizorji glavni, ima vsak element iz **G** po homomorfizmu $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$ original v $\mathcal{K}^*$. Ugotoviti se da, da se vse enote iz $\mathcal{K}$ upodobe v identiteto polgrupe **G**. Očitno se 1 preslika v **e**. Če je u enota v $\mathcal{K}$, velja $u \mid 1$ in po 1° od tod $(u) \mid \mathbf{e}$ ali $(u) = \mathbf{e}$. Kajti edini delitelj za **e** v **G** je **e**. Nerazcepni elementi iz $\mathcal{K}$ in samo ti pa se preslikajo v pradivizorje polgrupe **G**. Naj bo namreč pradivizor $\mathbf{p} \in \mathbf{G}$ po homomorfizmu slika nekega elementa $p \in \mathcal{K}^*$, $(p) = \mathbf{p}$. Obstoj takega elementa p sledi iz privzetka, da so vsi divizorji glavni. Če element $c \in \mathcal{K}^*$ deli p, iz $c \mid p$ po 1° sledi $(c) \mid \mathbf{p}$. Ker je **p** nerazcepen element, je $(c) = \mathbf{e}$ ali pa $(c) = \mathbf{p}$. Ako velja prva enačba, je c enota v $\mathcal{K}$; ako velja druga enačba $(c) = \mathbf{p}$, je zaradi $(p) = \mathbf{p}$ torej $(c) = (p)$ in element c je asociiran s p. Iz deljivosti $c \mid p$ sledi torej, da je c enota ali pa elementu p asociiran element. Ker je bil c poljuben delitelj za p, pomeni to, da p nima drugih deliteljev kakor enote in s p asociirane elemente. Zato je p nerazcepen element v $\mathcal{K}$.

Element a iz $\mathcal{K}^*$ ima v **G** sliko (a). Zaradi enolične faktorizacije v **G** je $(a) = \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_s$, pradivizorji na desni ni treba, da so različni. Pravkar smo videli, da so pradivizorji $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s$ slike praelementov $p_1, \dots, p_s$ iz $\mathcal{K}$, ki so do asociiranosti natančno določeni. Iz $(a) = \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_s = (p_1) \dots (p_s) = (p_1 \dots p_s)$ sledi $a = up_1 \dots p_s$, pri čemer je u enota v $\mathcal{K}$. Dobili smo faktorizacijo elementa a v $\mathcal{K}$. Če združimo morebitne enake elemente, je že tu oblika (1). Ker je teorija divizorjev ena sama, kakšne druge razcepitve biti ne more.

Izrek, ki smo si ga ogledali, premika vprašanje o enolični faktorizaciji kolobarja na vprašanje obstoja teorije divizorjev za ta kolobar, ki mora biti takšna, da so v njej vsi divizorji glavni. Pravo vlogo izreka odkrije seveda šele ugotovitev, da je za mnoge kolobarje teorijo divizorjev res mogoče sestaviti.

Če kolobar $\mathcal{K}$ premore teorijo divizorjev $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$, vsi divizorji v **G** pa niso glavni, $\mathcal{K}$ nima enolične faktorizacije. Toda vsakemu od 0 in enot različnemu elementu $a \in \mathcal{K}$ prirejeni element (a) v **G** ima enolično faktorizacijo. Če faktorizacijo elementov a nadomestimo s faktorizacijo njihovih slik (a), imamo v takem razširjenem smislu spet doseženo enoličnost faktorizacije. Seveda gre tu za faktorizacijo v **G**. Pradivizorji, ki nastopajo v razcepitvi (a), sploh ni treba, da so slike elementov iz $\mathcal{K}$.

4

Obstoj teorije divizorjev za kolobar $\mathcal{K}$ se navadno ne dokazuje neposredno, temveč s pomočjo eksponentov. Uvedbo tega pojma narekuje tale razmislek:

Vzemimo, da ima kolobar $\mathcal{K}$ teorijo divizorjev $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$! Za elementu $a \in \mathcal{K}^*$ prirejeni glavni divizor (a) v **G** velja tedaj enoličen razcep (2). Če se postavi $\mathbf{a}^\circ = \mathbf{e}$ za vsak divizor **a** iz **G**, se more (2) zapisati s produktom po vseh pradivizorjih **p** v **G**

$$(a) = \prod \mathbf{p}^{\nu_{\mathbf{p}}(a)} \tag{3}$$

V (3) je $\nu_{\mathbf{p}}(a) = 0$ za pradivizorje **p**, ki jih v razcepitvi (a) ni; če pa se pradivizor **p** v razcepitvi (a) pojavi, je $\nu_{\mathbf{p}}(a)$ naravno število. Zaradi (2) je za vsak $a \in \mathcal{K}^*$ le končno mnogo števil $\nu_{\mathbf{p}}(a)$ od 0 različnih. Če je tudi $b \in \mathcal{K}^*$, je

$$(b) = \prod \mathbf{p}^{\nu_{\mathbf{p}}(b)} \tag{4}$$

in podobno

$$(ab) = \prod \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(ab)} \tag{5}$$

Zaradi homomorfizma $ab \to (ab) = (a)\,(b)$ sledi iz (3), (4) in (5)

$$\prod \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(ab)} = \prod \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a)+v_{\mathfrak{p}}(b)}$$

Od tod se vidi, da je za vsak pradivizor $\mathfrak{p}$ in $a, b \in \mathcal{K}^*$

$$v_{\mathfrak{p}}(ab) = v_{\mathfrak{p}}(a) + v_{\mathfrak{p}}(b) \tag{6}$$

Za $b = 1$ sledi posebej $v_{\mathfrak{p}}(1) = 0$.

Po (3) element $\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a)}$ deli (a), po (4) je $\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(b)}$ delitelj (b). Če je $v = \min (v_{\mathfrak{p}}(a), v_{\mathfrak{p}}(b))$, sta a in b deljiva s $\mathfrak{p}^v$. Iz lastnosti 2° sklepamo, da $\mathfrak{p}^v$ deli tudi $a + b$. V razcepitvi $(a + b)$ je torej $\mathfrak{p}$ vsebovan s stopnjo $\geqq v$. Zato je

$$v_{\mathfrak{p}}(a + b) \geqq \min (v_{\mathfrak{p}}(a),\ \ v_{\mathfrak{p}}(b)) \tag{7}$$

Ker je 0 deljiv z vsakim divizorjem in torej tudi z vsako potenco divizorja $\mathfrak{p}$, se postavi

$$v_{\mathfrak{p}}(0) = \infty \tag{8}$$

Divizorja $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{p}^2$ sta različna. Zaradi 3° je v $\mathcal{K}^*$ takšen element c, da $\mathfrak{p} \mid c$, $\mathfrak{p}^2$ pa ne deli c. Zato je $v_{\mathfrak{p}}(c) = 1$. Pri naravnem številu n je $c^n \in \mathcal{K}^*$ in po (6) torej $v_{\mathfrak{p}}(c^n) = n$. Potemtakem zavzame $v_{\mathfrak{p}}(a)$ vsa nenegativna cela števila, ko gre a po vsem $\mathcal{K}^*$.

Kvocientni obseg $\mathcal{O}$ kolobarja $\mathcal{K}$ sestavljajo ulomki a/b, $a, b \in \mathcal{K}$, $b \neq 0$, z običajnimi računskimi pravili. Funkcijo $v_{\mathfrak{p}}$ razširimo na $\mathcal{O}$ s predpisom

$$v_{\mathfrak{p}}(a/b) = v_{\mathfrak{p}}(a) - v_{\mathfrak{p}}(b) \tag{9}$$

Brez težave se je možno prepričati, da ohrani $v_{\mathfrak{p}}$ tudi na $\mathcal{O}$ lastnosti (6) in (7). Zaloga vrednosti pa je zdaj Z. Iz (9) se to takoj vidi. Za element c iz prejšnjega odstavka je namreč $v_{\mathfrak{p}}(1/c) = -1$ in zato $v_{\mathfrak{p}}(1/c^n) = -n$ za vsak naraven n.

Imejmo zdaj poljuben obseg $\mathcal{O}$! Vsaka funkcija, ki uporablja obseg $\mathcal{O}$ na množico celih racionalnih števil tako, da so izpolnjeni pogoji (6), (7), (8), se imenuje *eksponent* obsega $\mathcal{O}$.

Pravkar smo videli, da teorija divizorjev $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$ vsakemu pradivizorju prireja eksponent obsega kolobarja $\mathcal{K}$.

Obratno je možno iz znanih eksponentov kvocientnega obsega kolobarja sklepati na obstoj teorije divizorjev. Kakšni pogoji morajo biti za to izpolnjeni, ne bomo opisovali. Pač pa si hočemo ogledati, kakšne lastnosti ima obseg $\mathcal{O}$, če je na njem definiran eksponent v.

Obravnavajmo najprej množico $\mathcal{K}_v$, ki jo sestavljajo elementi $a \in \mathcal{O}$, za katere je $v(a) \geqq 0$! Pri $a, b \in \mathcal{K}_v$ je $v(a) \geqq 0$, $v(b) \geqq 0$ in zato po (6), (7)

$$v(ab) = v(a) + v(b) \geqq 0$$

$$v(a \pm b) \geqq \min (v(a), v(b)) \geqq 0$$

V drugi neenačbi smo upoštevali, da je $v(-b) = v(b)$. Iz $0 = v(1) = v[(-1)^2] = 2v(-1)$ sledi namreč $v(-1) = 0$ in zato $v(-b) = v(-1) + v(b) = v(b)$. Obenem z a, b vsebuje torej $\mathcal{K}_v$ tudi vsoto, razliko in produkt teh elementov. Torej je $\mathcal{K}_v$ kolobar. Zaradi $v(1) = 0$, vsebuje $\mathcal{K}_v$ identiteto. Kolobar $\mathcal{K}_v$ je tudi brez deliteljev niča. Njegovi elementi so namreč iz obsega $\mathcal{O}$, kjer takih deliteljev ni. Kolobar $\mathcal{K}_v$ se imenuje eksponentu v *prirejeni* kolobar obsega $\mathcal{O}$.

Ugotovimo zdaj, da ima kolobar $\mathcal{K}_v$ enolično faktorizacijo! Vzemimo polgrupo, katere vsi elementi so potence enega samega praelementa $\mathfrak{p}$ in pridajmo še enoto $\mathbf{e}$! Dobljena

množica **G** je prosta grupa. Priredimo vsakemu elementu $a \in \mathcal{K}_v$, $a \neq 0$, v **G** element $\mathbf{p}^{v(a)}$! Pri tem naj pomeni $\mathbf{p}^0 = \mathbf{e}$. Upodobitev $a \to \mathbf{p}^{v(a)} = (a)$ je zaradi (6) homomorfizem $\mathcal{K}_v^* \to \mathbf{G}$. Izpolnjena je tudi zahteva 1°. Če namreč $a \mid b$, $a, b \in \mathcal{K}_v$, je $b = ac$, kjer je $c \in \mathcal{K}_v$. Iz te enačbe po (6) sledi $v(b) = v(a) + v(c)$. Sumanda na desni sta nenegativna, zato je $v(b) \geqq v(a)$. Potem pa seveda $\mathbf{p}^{v(a)} \mid \mathbf{p}^{v(b)}$. Iz $a \mid b$ sledi torej $(a) \mid (b)$. Enako se prepričamo, da iz $\mathbf{p}^l \mid \mathbf{p}^m$, n, m nenegativni celi števili, sledi $a \mid b$, če je $(a) = \mathbf{p}^n$, $(b) = \mathbf{p}^m$. S tem je ugotovljeno, da je homomorfizem $\mathcal{K}_v^* \to \mathbf{G}$ teorija divizorjev. Ker zavzame eksponent $v(a)$ vsa nenegativna cela števila, ko teče a po $\mathcal{K}_v^*$, je vsak element iz **G** slika elementa iz $\mathcal{K}_v^*$. Vsi divizorji v **G** so potemtakem glavni.

Po izreku 3 je $\mathcal{K}_v$ kolobar z enolično faktorizacijo. V **G** je en sam pradivizor, namreč **p**. Če za $p \in \mathcal{K}_v$ velja $v(p) = 1$, je p nerazcepen element v $\mathcal{K}_v$. Nerazcepni elementi v $\mathcal{K}_v$ so še s p asociirani elementi, drugih nerazcepnih elementov pa v $\mathcal{K}_v$ ni. Ker je $\mathcal{K}_v$ z enolično faktorizacijo, ima vsak od 0 in enot različen element $a \in \mathcal{K}_v$ enoličen razcep

$$a = up^n \tag{10}$$

u enota, n naravno število.

Elementi kolobarja $\mathcal{K}_v$ se po modulu p porazdele na kongruenčne razrede, njih množica O_v je spet kolobar. Razred $\bar{0}$ sestavljajo elementi $a \equiv 0 \pmod{p}$, tj. elementi oblike (10).

Vzemimo v $\mathcal{K}_v$ enačbo $b\xi = 1$ in naj bo $b \not\equiv 0 \pmod{p}$! Tedaj je $v(b) = 0$ in $v(1/b) = -v(b) = 0$. Zato je tudi $1/b$ v $\mathcal{K}_v$ in enačba ima rešitev $\xi = 1/b$ v $\mathcal{K}_v$. Vsak element v $\mathcal{K}_v$, ki ni v razredu $\bar{0}$ kolobarja O_v, ima torej obratni element. Zato ima tudi vsak od $\bar{0}$ različen razred v O_v obratni element. To pa pomeni, da je množica O_v obseg.

5

Mnogi obsegi so končne razširitve drugih, preprostejših obsegov. Ali se da iz eksponentov teh obsegov dobiti eksponente razširjenih obsegov?

Naj bo obseg $\mathcal{U}$ končna razširitev obsega O. Vsak element iz $\mathcal{U}$ ustreza tedaj enačbi, ki ima koeficiente iz O, njena stopnja pa ni večja od fiksnega naravnega števila n.

Če je v eksponent v $\mathcal{U}$, je vsakemu elementu $a \in \mathcal{U}$ prirejeno celo racionalno število $v(a)$. Ker je vsak element iz O vsebovan v $\mathcal{U}$, ustvarja v tudi neko preslikavo obsega O v množico Z. Čeprav so izpolnjeni pogoji (6), (7), (8), v za obseg O v splošnem ni eksponent. Zaloga vrednosti $v(a)$, ko preteče a obseg O, namreč ni nujno ves Z. Ugotovimo pa lahko, da so v tej zalogi vrednosti poleg 0 še druga števila. Denimo namreč, da bi za vsak $a \in O$, $a \neq 0$, veljalo $v(a) = 0$. Vsak element $a \in \mathcal{U}$, ki ni v O, ustreza enačbi

$$a^m + a_1 a^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \tag{11}$$

stopnje $2 \leqq m \leqq n$, ki ima koeficiente $a_1, \ldots, a_m$ iz O in $a_m \neq 0$. Če v (11) prenesemo vse člene razen prvega na desno stran, upoštevamo lastnosti (6), (7) in še privzetek, da je $v(a_1) = 0, \ldots, v(a_m) = 0$, dobimo

$$mv(a) \geqq \min\left((m-1)\,v(a), \ldots, 0\right) \tag{12}$$

Neenačba (12) je možna le pri $v(a) \geqq 0$. To je v nasprotju z dejstvom, da eksponent v obsega $\mathcal{U}$ zavzame vsa cela racionalna števila. V O so torej elementi a, za katere $v(a) \neq 0$. Če $v(a) \neq 0$, je eno od števil $v(a)$, $v(1/a)$ pozitivno. Ker so $v(a)$ cela števila, je v O tak element a_0, za katerega je $v(a_0) = e$ najmanjša pozitivna vrednost, kar jih v na O zavzame. Za poljuben $a \in O$ lahko pišemo $v(a) = qe + r$, $0 \leqq r < e$, kjer sta q, r celi števili. Za element $aa_0^{-q} \in O$ sledi $v(aa_0^{-q}) = v(a) + v(a_0^{-q}) = qe + r - qe = r$. Zaradi $0 \leqq r < e$ je $r = 0$. V nasprotnem primeru namreč e ne bi bila najmanjša pozitivna vrednost za v na O. Vidimo, da je število $v(a)$ za vsak $a \in O$ deljivo z e.

Definirajmo zdaj na O funkcijo

$$v_0(a) = \frac{v(a)}{e}, \quad a \in O \tag{13}$$

Očitno zavzame $v_0(a)$ vsa cela racionalna števila, ko preteče a obseg O, ima pa tudi lastnosti (6), (7), (8). Po (13) iz eksponenta v obsega $\mathcal{U}$ dobljeni eksponent v_0 obsega O imenujemo *inducirani* eksponent, eksponent v pa *nadaljevanje* eksponenta v_0 iz obsega O na obseg $\mathcal{U}$. Naravno število e v (14) je *razvejitveni indeks* eksponenta v glede na eksponent v_0.

Množica Z, ki jo daje $v(a)$, ko a preteče vse od 0 različne elemente obsega $\mathcal{U}$, je grupa za seštevanje. Tudi množica števil $v(a)$, a po vseh od 0 različnih elementih obsega O, je grupa za seštevanje. To sledi neposredno iz (13). Ker ne sestoji samo iz 0, je prava podgrupa v Z. Razvejitveni indeks je ravno indeks te podgrupe v grupi Z.

Povzemimo gornje izsledke: če je obseg $\mathcal{U}$ končna razširitev obsega O, inducira vsak eksponent v obsega $\mathcal{U}$ eksponent v_0 v O.

Veliko pomembnejše pa je, da je vsak eksponent v O mogoče dobiti kot inducirani eksponent nekega eksponenta v $\mathcal{U}$. More se namreč dokazati, da ima vsak eksponent v O nadaljevanje v $\mathcal{U}$. Ako je n stopnja razširitve obsega $\mathcal{U}$ nad O, je možno ugotoviti, da ima vsak eksponent v_0 v O kvečjemu n nadaljevanj na $\mathcal{U}$. Naj bodo $v_1, \ldots, v_m$ vsa njegova nadaljevanja, $e_1, \ldots, e_m$ pa pripadajoči razvejitveni indeksi. Eksponent v_1 opredeljuje v $\mathcal{U}$ kolobar $\mathcal{K}_{v_1}$; sestavljajo ga elementi $a \in \mathcal{U}$, za katere je $v_1(a) \geqq 0$. Že zgoraj smo videli, da je tak kolobar z enolično faktorizacijo in da se v njem do asociiranosti natančno nahaja en sam praelement π_1. Videli smo tudi, da kongruenčni razredi elementov v $\mathcal{K}_{v_1}$ po modulu π_1 sestavljajo obseg $\mathcal{U}_{v_1}$. Ker je $v_1 = e_1 v_0$, se za element $a \in O_{v_0}$ dobi $v_1(a) = e_1 v_0(a)$. Zaradi $v_0(a) \geqq 0$, $e_1 \geqq 0$, je $v_1(a) \geqq 0$. To pomeni, da je $O_{v_0} \subset \mathcal{U}_{v_1}$. Ker je tudi $\mathcal{U}_{v_1} \subset \mathcal{U}$, je obseg $\mathcal{U}_{v_1}$ končna razširitev obsega O_{v_0}. Stopnja razširitve $[\mathcal{U}_{v_1} : O_{v_1}] = f_1$ se imenuje *vztrajnostna stopnja.*

Podobno kot za v_1 se dobe pri ostalih nadaljevanjih $v_2, \ldots, v_m$ eksponenta v_0 obsegi $\mathcal{U}_{v_2}, \ldots, \mathcal{U}_{v_m}$ ter vztrajnostne stopnje $f_2, \ldots, f_m$. Razvejitveni indeksi in vztrajnostne stopnje vseh nadaljevanj eksponenta v_0 iz obsega O na obseg $\mathcal{U}$ so s stopnjo n razširitve $\mathcal{U}$ nad O povezani po neenačbi

$$e_1 f_1 + \ldots + e_m f_m \leqq n$$

Če je razširitev separabilna, velja v tej oceni enačaj. Dokaz teh trditev bi nas vedel predaleč.

Dejstvo, da je vsak eksponent obsega $\mathcal{U}$, ki je končna razširitev obsega O, mogoče dobiti kot nadaljevanje kakega eksponenta iz O, ima za teorijo divizorjev daljnosežne posledice.

Povrnimo se h kolobarju $\mathcal{K}$ in naj bo O njegov kvocientni obseg! Kolobar $\mathcal{K}$ naj ima teorijo divizorjev $\mathcal{K}^* \to \mathbf{G}$, ki naj bo določena z množico $\mathcal{N}$ eksponentov na O. Nadalje naj bo $\mathcal{U}$ končna razširitev obsega O.

Množica $\mathcal{L}$ elementov $a \in \mathcal{U}$, ki ustrezajo kakšni enačbi

$$a^r + a_1 a^{r-1} + \ldots + a_r = 0$$

katere koeficienti $a_1, \ldots, a_r$ so elementi iz $\mathcal{K}$, čelni koeficient pa 1, je *celostno zaprtje* kolobarja $\mathcal{K}$ v $\mathcal{U}$. Celostno zaprtje je komutativen kolobar z identiteto in brez deliteljev niča. Če se vsak eksponent iz $\mathcal{N}$ nadaljuje na vse možne načine na $\mathcal{U}$, se dobi množica $\mathcal{M}$ eksponentov na $\mathcal{U}$. Kakor je prej množica $\mathcal{N}$ določala teorijo divizorjev na $\mathcal{K}$, tako določa $\mathcal{M}$ teorijo divizorjev na $\mathcal{L}$. Množica $\mathcal{L}$ vsebuje vse nad $\mathcal{K}$ cele elemente iz $\mathcal{U}$.

Če je torej podana teorija divizorjev za kolobar $\mathcal{K}$ in je $\mathcal{U}$ končna razširitev kvocientnega obsega O kolobarja $\mathcal{K}$, za kolobar $\mathcal{L}$ celih elementov iz $\mathcal{U}$ nad $\mathcal{K}$ teorija divizorjev obstaja.

6

Uporabimo dobljene izsledke na kolobar celih racionalnih števil Z oziroma na obseg racionalnih števil Q. Poiščimo najprej vse eksponente obsega Q!

Naj bo p fiksno praštevilo. Vsako racionalno število a, ki ni 0, se enolično zapiše

$$a = p^n \cdot \frac{c}{d} \tag{14}$$

Tu je n celo število, c, d celi proti p tuji števili. Z zapisom (14) je opredeljena funkcija $v_p(a) = n$, ki vsakemu $a \in Q^*$ prireja celo racionalno število. Brez težav se preveri, da ustreza $v_p(a)$ pogojema (6), (7) in ima zalogo vrednosti Z. Če se še postavi $v_p(0) = \infty$, je očitno, da je $v_p(a)$ eksponent na Q. Vsakemu praštevilu je tako določen eksponent $v_p(a)$ na Q. S tem so pa tudi izčrpani vsi eksponenti obsega Q. Naj bo namreč v kakšen eksponent obsega Q. Po večkratni uporabi (8) je

$$v(n) = v(1 + \ldots + 1) \geqq \min(v(1), \ldots, v(1)) = 0$$

Torej je $v(n) \geqq 0$ za vsako naravno število n. Če bi bilo $v(p) = 0$ za vsako praštevilo p, bi iz enolične faktorizacije in lastnosti (6) sledilo $v(a) = 0$ za vsak $a \in Q^*$. To pa je protislovje, saj eksponent $v(a)$ zavzame vsa cela števila, ko preteče a obseg Q. Mora torej za neko praštevilo p biti $v(p) = r$, kjer je r naravno število. Za vsako od p različno praštevilo q je enačba $px + qy = 1$ rešljiva v celih številih x, y. Če bi bilo $v(q) > 0$, bi sledila nemogoča ocena

$$0 = v(px + qy) \geqq \min(v(px), v(qy)) \geqq \min(v(p), v(q)) > 0$$

Za vsa od p različna praštevila q je torej $v(q) = 0$. Posebej je za racionalno število a, ki v razcepitvi praštevila p ne vsebuje, $v(a) = 0$. Iz oblike (14) racionalnega števila a se sedaj dobi $v(a) = nr$. Tu je n celo število. Da bo zaloga vrednosti množica vseh celih števil, ko a preteče Q, mora biti $r = 1$. Potem pa je $v(a) = v_p(a)$. V Q ni drugih eksponentov mimo teh, ki se dobe iz (14) za vsa praštevila p.

V razdelku 3 je bilo ugotovljeno, da ima kolobar z enolično faktorizacijo vedno teorijo divizorjev. Teorija divizorjev kolobarja Z je določena z množico vseh eksponentov $v_p(a)$ obsega Q. Naj bo $\mathcal{U}$ algebrajska razširitev obsega Q. Po razdelku 5 opredeljuje množica eksponentov, ki jih dobimo z nadaljevanjem vseh eksponentov v_p na $\mathcal{U}$, teorijo divizorjev za kolobar vseh nad Q celih algebrajskih števil iz $\mathcal{U}$. Za vsak tak kolobar $\mathfrak{L}$ torej teorija divizorjev $\mathfrak{L}^* \to \mathbf{G}$ obstaja. V $\mathbf{G}$ je faktorizacija enolična. Elementu $a \in \mathfrak{L}^*$ prirejeni glavni divizor $(a) \in \mathbf{G}$ se enolično zapiše kot produkt pradivizorjev v $\mathbf{G}$. Če so v $\mathbf{G}$ vsi divizorji glavni, ima tudi $\mathfrak{L}$ enolično faktorizacijo. Dostikrat so ta dejstva podana v nekoliko drugačni obliki.

Divizorja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ iz $\mathbf{G}$ sta *ekvivalentna*, če obstajata takšna glavna divizorja (α), (β), da je $(\alpha)\mathbf{a} = (\beta)\mathbf{b}$. Za ekvivalentna divizorja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ pišemo $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$. Posebej sta vsaka dva glavna divizorja (γ), (δ) ekvivalentna, saj je npr. $(\delta)(\gamma) = (\gamma)(\delta)$. Divizorji iz $\mathbf{G}$ razpadejo po vpeljani ekvivalenci na ekvivalenčne razrede. Množica E, ki jo sestavljajo vsi glavni divizorji, je že razred, saj so glavni divizorji vsi med sabo ekvivalentni. Če vsebuje $\mathbf{G}$ le glavne divizorje, je to tudi edini ekvivalenčni razred. Kadar $\mathbf{G}$ nima le glavnih divizorjev, so poleg E še drugi ekvivalenčni razredi.

Produkt AB razredov A, B je razred, v katerem leži produkt $\mathbf{ab}$ poljubnega divizorja $\mathbf{a}$ iz A s poljubnim divizorjem $\mathbf{b}$ iz B. Na ta način je produkt AB enolično določen. Naj bosta namreč $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ kakšna druga divizorja iz A oz. B. Ker je $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b} \sim \mathbf{b}_1$, obstajajo takšni glavni divizorji (α), (β), (γ), (δ), da je $(\alpha)\mathbf{a} = (\beta)\mathbf{a}_1$, $(\gamma)\mathbf{b} = (\delta)\mathbf{b}_1$. Od tod sledi $(\alpha\gamma)\mathbf{ab} = (\beta\delta)\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$. Zato je $\mathbf{ab} \sim \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$, kar pomeni, da ležita divizorja $\mathbf{ab}$, $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ v istem razredu.

Množica **H** ekvivalenčnih razredov je za takšno množenje komutativna grupa, njena identiteta je E. Ker podeduje **H** komutativnost in asociativnost množenja od **G**, je treba preveriti le še obstoj obratnega razreda vsakemu razredu v **H**.

Očitno je razred E sebi obraten. Razredu $A \neq E$ obratni razred se najde takole: Naj bo **a** divizor iz A. Seveda je $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$. Dokazati hočemo, da je v $\mathcal{U}$ element α, različen od 0, ki je deljiv z **a**. Če bi bilo $\mathbf{a} | \alpha$ le za $\alpha = 0$, bi veljalo tudi $\mathbf{a}^2 | \alpha$ le za $\alpha = 0$. Po 3° bi to pomenilo $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}$. To pa ni mogoče, ker je $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$. V $\mathcal{U}$ je torej od 0 različen element α, da $\mathbf{a} | (\alpha)$. Potem je pa $(\alpha) = \mathbf{ab}$. Če je **b** v razredu B, lahko zadnjo enačbo v **H** pišemo $E = AB$. Torej je razred B obraten razredu A.

Grupa **H** se imenuje *grupa divizorskih razredov*, njena moč pa *razredno število*. Znano je, da je za vsak obseg algebrajskih števil, ki je končna razširitev obsega Q, razredno število končno. Če je razredno število 1, vsebuje **H** samo razred E in so vsi divizorji glavni. V tem primeru ima kolobar $\mathfrak{L}$ enolično faktorizacijo. Ne ve se še, ali je obsegov algebrajskih števil, ki jim pripada razredno število 1, neskončno. Kadar je razredno število večje od 1, kolobar $\mathfrak{L}$ ni z enolično faktorizacijo.

LITERATURA

Z. I. Borevič — I. R. Šafarevič, Teorija čisel. 1964.

K. B. Gundlach, Einführung in die Zahlentheorie. 1972.

L. Skula, Divisorentheorie einer Halbgruppe. Math. Z. 114, 1970.

ČRNE LUKNJE

BOJAN GOLLI, odsek za fiziko FNT

UDK 530.12

Povzetek: V prvem delu je prikazan nastanek črne luknje in možnosti njene detekcije. V drugem delu obravnavamo opazovalca, opazujočega črno luknjo z velike razdalje ter opazovalca prosto padajočega vanjo.

Abstract: The first part of the article deals with the origin of the black hole and with some posibilities of its detection. In the second part two observers are discussed, one observing the black hole from a great distance and the other freely falling into it.

I. Črne luknje v vesolju

1. Uvod

Črna luknja je telo, katerega gravitacijsko polje je tako močno, da se nobeno telo ne more odtrgati z njegovega površja. Privlačna sila je močnejša od katerekoli sile, ki bi se ji upirala. Celó svetloba ne more od tu uiti, zato je tako telo črno; od tod ime črna luknja. Čeprav so se astrofiziki šele v zadnjih letih, opogumljeni po odkritju nevtronskih zvezd, lotili iskanja črnih lukenj, je ideja o črnih luknjah že precej stara. Prvo misel o zvezdah s takó močnim gravitacijskim poljem, da niti svetloba ne more zapustiti njenega površja, je izrekel že Laplace leta 1798. Einsteinova splošna teorija relativnosti (1915) je postala močno orožje za matematičen pristop k problemu. Prve teoretične napovedi črnih lukenj sta dala Oppenheimer in Snyder leta 1939. Te napovedi so se pojavile v zvezi s proučevanjem življenja zvezd, potem ko so potrošile že vse jedrsko gorivo. Ugotovila sta, da zvezde, večje od določene mase, ne morejo doseči ravnovesja z lastnim gravitacijskim privlakom; taka zvezda se sesuje sama vase, na njenem mestu pa ostane črna luknja.

Predno bi podrobneje govoril o nastanku črnih lukenj, si oglejmo zvezo med radijem r_g in maso m črne luknje. Točno zvezo nam lahko da le splošna teorija relativnosti, vendar izračunajmo to zvezo, kot jo je izračunal Laplace leta 1798. Po njegovi ideji mora biti ubežna hitrost na površju take zvezde enaka svetlobni:

$$c = \sqrt{\frac{2\kappa m}{r_g}}$$

Od tod dobimo iskano zvezo:

$$r_g = \frac{2\kappa m}{c^2}$$

Čeprav sem zagrešil nekaj nedopustnih napak, je zveza po srečnem naključju enaka, kot nam jo da splošna teorija. Količino r_g bomo imenovali gravitacijski radij telesa. Izračunajmo radije za nekaj značilnih mas ter gostoto za primer, če bi materija enakomerno izpolnjevala prostor znotraj r_g:

Sonce:	$r_g = 3$ km	$\rho = 2 \cdot 10^{19}$ kg/m^3
Zemlja:	$r_g = 1$ cm	$\rho = 1{,}5 \cdot 10^{30}$ kg/m^3
10^8 sončnih mas:	$r_g = 3 \cdot 10^3$ km	$\rho = 2 \cdot 10^3$ kg/m^3

2. Nastanek črne luknje

a) *Ravnovesje zvezde. Bele pritlikavke in nevtronske zvezde.*

Življenje zvezde je neprestan boj med gravitacijskimi silami, ki zvezdo stiskajo, ter silami, ki temu nasprotujejo. Dokler ima zvezda dovolj jedrskega goriva, vzdržuje ravnotežje velik termični tlak, ki je posledica visoke temperature (nekaj 10^6 K). Ko proces zlivanja lažjih elementov v težje ni več mogoč — bodisi ker zvezda ne more doseči zadostne temperature za nadaljevanje reakcije, bodisi da se je že vsa zvezdna snov spremenila v železo Fe^{56}, poslednji element v verigi zlivanja — se zvezda začne krčiti. Zvezda, katere masa ne presega približno 1,2 sončne mase, postane bela pritlikavka. Snov te zvezde je sestavljena iz jeder ter prosto gibajočih se elektronov. Slednji se vedejo kot Fermijev plin in vzdržujejo tlak, ki se upira gravitacijski sili. Gostota snovi v beli pritlikavki je med 10^8 in 10^{11} kg/m^3. Če je masa zvezde večja od omenjene meje, doseže njena snov gostoto, večjo od 10^{11} kg/m^3. V tem primeru energija elektronov preseže prag za reakcijo:

$$62\,Fe_{26}^{56} + 44e^- \rightarrow 56\,Ni_{28}^{62}$$

Število elektronov, ki vzdržujejo tlak, se manjša, njihov tlak pada in zvezda se krči dalje. Pri večjih gostotah nastopijo podobne reakcije, kateri produkti vsebujejo vse več nevtronov. Na koncu v snovi prevladujejo le nevtroni, ki se vedejo kot Fermijev plin in vzdržujejo tlak. Dobimo nevtronsko zvezdo. Gostote pri katerih je nevtronska zvezda stabilna, so približno med 10^{16} in 10^{19} kg/m^3 (velikostni red gostote v atomskih jedrih). Samo krčenje pri nastajanju nevtronske zvezde spremljajo močne eksplozije, ki jih poznamo kot supernove. Zvezda pri taki eksploziji izvrže velik del svoje mase in sveti nekaj dni kot cela galaksija. Nevtronska zvezda, ki na koncu ostane, ima maksimalno maso okrog 4 sončne mase ter radij med 6 km in 100 km.

b) *Gravitacijski kolaps.* Za nevtronske zvezde, katerih masa presega omenjeno mejo, ne eksistira ravnovesno stanje, krčijo se naprej, njihov radij se zmanjša pod gravitacijski radij in nastane črna luknja. Ta proces imenujemo gravitacijski kolaps.

Od take zvezde se ohrani le njena masa, naboj in vrtilna količina. Vse druge lastnosti materije izginejo. Načelno ne bi mogli razlikovati med seboj črnih lukenj z enako maso, nabojem in vrtilno količino, pa čeprav bi bile sestavljene iz najrazličnejših vrst materije, npr.: iz samih nevtronov, antimaterije, ali samih lahkih delcev.

3. Možnosti detekcije črnih lukenj

Od vseh nebesnih objektov je črno luknjo najteže detektirati. Odkrijemo jo lahko samo preko efektov, ki jih povzroča na okolico njeno močno gravitacijsko polje. Ti so gravitacijsko sevanje ter efekti pri dvojnih zvezdah.

a) *Gravitacijsko sevanje.* Materija, ki pada v črno luknjo, se v njenem gravitacijskem polju močno pospešuje ter seva gravitacijsko valovanje. Tudi telesa, ki krožijo na nizkih orbitah okoli črne luknje, sevajo znatno gravitacijsko valovanje. Vendar je zaradi težavne detekcije tega sevanja možno opazovanje le, če ima črna luknja zelo veliko maso. Weber, ki je prvi detektiral gravitacijsko sevanje, domneva, da prihaja iz središča galaksije, kjer naj bi bila črna luknja z maso več 10^6 sončnih mas.

b) *Dvojne zvezde.* V vesolju obstajajo sistemi dveh zvezd, od katerih je ena nevidna. Če je iz gibanja svetle zvezde izračunana masa temne spremljevalke večja od 4 sončnih mas, je velika verjetnost, da je to črna luknja. V takem sistemu lahko črna luknja »požre« del mase svoje svetle spremljevalke. Ta del mase kroži okoli črne luknje. Ustvarja močno magnetno polje, v katerem hitri delci sevajo relativistično zavorno sevanje (sinhrotronsko sevanje), ki ga lahko detektiramo.

Opazili so že več takih sistemov, za katere domnevajo, da je nevidna zvezda črna luknja.

II. Črne luknje v splošni teoriji relativnosti

1. Prostor in čas v splošni teoriji

V tem delu bom skušal na kratko predstaviti nekaj osnovnih idej splošne teorije relativnosti, potrebnih za matematičen opis nekaterih pojavov v zvezi s črnimi luknjami.

Najprej ponovimo nekaj dejstev iz posebne teorije relativnosti. Prostor v tej teoriji je 4-dimenzionalen. Četrta koordinata (ki jo bom pisal na prvem mestu) je čas pomnožen s svetlobno hitrostjo. Dogodek v tem prostoru predstavlja vektor četverec (ct, x, y, z). Kvadrat razdalje (intervala) med dogodkoma je:

$$\Delta s^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

in je invarianten pri prehodu iz enega opazovalnega sistema v drugega. Interval je krajevnega tipa, če dogodka razlikujeta le po krajevnih koordinatah, tedaj je $\Delta s^2 > 0$; interval je časovnega tipa, če se dogodka razlikujeta le po času, tedaj je $\Delta s^2 < 0$. Za širjenje svetlobe velja $\Delta s^2 = 0$.

Štiridimenzionalen prostor je v splošni teoriji relativnosti ukrivljen. Koordinate označimo z (x^0, x^1, x^2, x^3). Ustrezni smerni vektorji naj bodo $\tilde{e}_0$, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$. Razdaljo med dogodkoma infinitizimalno blizu zapišemo:

$$d\tilde{s} = \tilde{e}_0 dx^0 + \tilde{e}_1 dx^1 + \tilde{e}_2 dx^2 + \tilde{e}_3 dx^3$$

kvadrat razdalje, ki je invarianta pa:

$$ds^2 = \tilde{e}_0\tilde{e}_0 dx^{0^2} + \tilde{e}_0\tilde{e}_1 dx^0 dx^1 + \ldots = \sum_{i,j=0}^{3} \tilde{e}_i\tilde{e}_j dx^i dx^j$$

V specialni teoriji je prostor raven in vedno si lahko izberemo tak koordinatni sistem, da so smerni vektorji med seboj pravokotni in so $\tilde{e}_i\tilde{e}_j = 0$ ($i \neq j$). Zaradi ukrivljenosti prostora v splošni teoriji to ni več mogoče. Ortogonalna baza ne obstaja, zato so v splošnem produkti $\tilde{e}_i\tilde{e}_j \neq 0$ in tvorijo komponente metričnega tenzorja g_{ij}. Metrični tenzor popolnoma določa lastnosti prostora (določa njegovo metriko). V ravnem prostoru (koordinate ct, x, y, z) ima metrični tenzor obliko:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Telesa se gibljejo po geodezikah. Za geodeziko velja, da je razdalja med dogodkoma najkrajša:

$$\int_{\text{po geodeziki}} ds = \text{minimum}$$

Določimo še lastni čas τ, čas, ki ga kaže opazovalčeva ura! Opazujmo dogodka, ki se v našem sistemu dogodita na istem kraju in v različnih časih (τ, $\tau + d\tau$)! V tem primeru nam razdalja po geodeziki (v 4-dimenzionalnem prostoru) med dogodkoma (ds) pove, koliko časa je minilo med dogodkoma. Ker je časovni interval realna količina, vzamemo:

$$c\,d\tau = \sqrt{-ds^2} \qquad (1.1.)$$

Od tod dobimo zvezo med intervalom lastnega časa in intervalom koordinatnega časa za dogodka, ki se v našem sistemu dogodita na istem kraju ($dx^i = 0$, $i = 1, 2, 3$):

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\, dx^0 \tag{1.2.}$$

2. Metrični tenzor v primeru centralno simetričnega gravitacijskega polja

Izberimo si koordinate: $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$! ds^2 v ravnem prostoru zapišimo:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2 \qquad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$$

Če imamo v prostoru telo z maso m, bo prostor okoli telesa ukrivljen. Zvezo med ukrivljenostjo prostora, njegovim metričnim tenzorjem ter maso m dajo Einsteinove enačbe polja. Robni pogoj dobimo iz zahteve, da v limiti, ko gre r proti neskončno, velja Newtonov gravitacijski zakon. Zaradi krogelne simetrije našega primera so izvendiagonalni elementi metričnega tenzorja enaki 0. Za diagonalne elemente pa dobimo:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\kappa m}{rc^2}\right) \qquad g_{22} = r^2$$

$$g_{11} = \left(1 - \frac{2\kappa m}{rc^2}\right)^{-1} \qquad g_{33} = r^2 \sin^2\vartheta$$

Količino $\frac{2\kappa m}{c^2}$ bomo imenovali r_g (kot v prvem poglavju). Kvadrat razdalje zapišemo:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}dr^2 + r^2d\Omega^2 \tag{2.1.}$$

Takšna geometrija prostora se imenuje Schwarzschildova. S to geometrijo opisujemo prostor v okolici črne luknje.

Vrnimo se zopet h gravitacijskemu kolapsu! V vsem nadaljnjem izpeljevanju bom predpostavil $d\vartheta = 0$ in $d\varphi = 0$ — obravnavali bomo le radialno gibanje. Oglejmo si, kaj nam pove izraz za ds^2 o zvezdi, katere radij se je zmanjšal pod r_g! V trenutku, ko je njen radij dosegel r_g, postane $g_{00} = 0$, g_{11} pa neskončno. Pri nadaljnjem krčenju postane g_{00} pozitiven, g_{11} pa negativen. V področju $r < r_g$ postane r časovna koordinata, saj je sedaj interval časovnega tipa za $dt = 0$ ($ds^2 < 0$), t pa krajevna koordinata, saj je $ds^2 > 0$ za $dr = 0$. r in t zamenjata vlogi. V našem prostoru ($r > r_g$) časa ne moremo ustaviti ali pognati nazaj. V področju $r < r_g$ velja isto za koordinato r; r se manjša, nič tega ne more ustaviti; vsako telo, ki prečka r_g, neusmiljeno pade v središče črne luknje.

Usoda zvezde, katere radij pade pod r_g, je torej na moč tragična. Zato se upravičeno pojavi dvom: Mogoče pa telo sploh ne more doseči singularnosti pri r_g v končnem času in je torej področje $r < r_g$ zanj sploh nedosegljivo. Odgovor na to vprašanje ni enoličen. Odvisno je namreč, od kje gravitacijski kolaps opazujemo. Da odgovorimo na vprašanje, si bomo ogledali, kako ta dogodek opišeta dva opazovalca: eden, ki miruje daleč od črne luknje, in drugi, ki v njo prosto pada.

3. Gravitacijski kolaps za opazovalca, daleč od črne luknje

Postavimo našega opazovalca dovolj daleč od črne luknje, kjer je ukrivljenost prostora zanemarljiva ter naj miruje glede na črno luknjo! Poglejmo si, kako opiše ta opazovalec gibanje fotona v črno luknjo! Vzeli smo foton, ker zanj najhitreje dobimo gibalno enačbo. Za širjenje svetlobe namreč velja $ds^2 = 0$. Iz enačbe (2.1.) dobimo ($d\vartheta = 0$, $d\varphi = 0$):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2$$

$$c dt = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \tag{3.1.}$$

Enačbo integrirajmo:

$$ct = \int \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Integral na desni divergira kot $r_g \ln(r - r_g)$ za $r \to r_g$. Od tod dobimo:

$$r - r_g \propto e^{-\frac{ct}{r_g}} \qquad \text{za } r \to r_g \tag{3.2.}$$

Enačba pove, da foton za našega opazovalca daleč od črne luknje nikoli ne doseže njene površine, temveč se ji približuje eksponencialno s karakterističnim časom:

$$\tau = \frac{r_g}{c} = \frac{2\kappa m}{c^3} = 10^{-5}\, s \frac{m}{M_0}$$

M_0 je masa Sonca, m pa masa črne luknje. Tudi za vsako drugo telo, ki se ne giblje s svetlobno hitrostjo, velja enaka relacija (3.2.) ter enak karakteristični čas.

4. Opazovalec, padajoč v črno luknjo

Spremljajmo sedaj opazovalca, ki pada radialno v črno luknjo! Za gibanje telesa v prostoru, ki ga opisuje Schwarzschildova geometrija, velja enačba:

$$\frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{\left[\frac{E}{mc^2}\right]^2} \tag{4.1.}$$

E je energija telesa pri neskončnem r, mc^2 pa njegova mirovna energija. Pot do te enačbe je zelo zahtevna, zadovoljimo se le s pripombo, da dobimo enačbo za gibanje fotona (3.1.), če postavimo za mirovno energijo fotona 0. Tedaj je namreč desna stran enačbe (4.1.) enaka 1. Pri nadaljnji izpeljavi bomo zaradi enostavnosti vzeli primer, ko naš opazovalec v neskončnosti miruje: $E = mc^2$. Enačba (4.1.) se poenostavi:

$$\frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{r_g}{r} \tag{4.2.}$$

Toda za našega opazovalca koordinatni čas nima pomena, on meri svoj lastni čas τ. Zvezo med lastnim časom našega opazovalca τ ter koordinatnim časom t dobimo iz relacije (1.1.). Za ds^2 ustavimo izraz (2.1.) pri $d\vartheta = 0$ in $d\varphi = 0$:

$$d\tau = \frac{1}{c}\left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}\,dr^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}\frac{dr^2}{c^2 dt^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Za $\left[\frac{dr}{dt}\right]$ vstavimo (4.2.) in dobimo:

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{r_g}{r}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

Za gibalno enačbo dobimo končno:

$$\left[\frac{dr}{d\tau}\right]^2 = \left[\frac{dr}{dt}\right]^2\left[\frac{dt}{d\tau}\right]^2 = c^2\frac{r_g}{r}, \qquad \frac{dr}{d\tau} = c\sqrt{\frac{r_g}{r}}$$

Enačbo integriramo:

$$\tau = -\frac{2}{3c}\sqrt{\frac{r^3}{r_g}} + \text{const}$$

Dobili smo pomembno zvezo. Pove nam, da doseže naš opazovalec gravitacijski radij v končnem času. Singularnost pri r_g zanj ni pomembna. Ko prečka r_g, nadaljuje svojo pot do središča črne luknje. Izračunajmo, koliko časa porabi za to pot (od $r = r_g$ do $r = 0$):

$$\tau = \frac{2r_g}{3c} = 0{,}66 \cdot 10^{-5}\ \text{s}\ \frac{\text{m}}{\text{M}_0} \tag{4.3.}$$

M_0 je masa Sonca, m pa črne luknje.

Naš opazovalec torej lahko prodre v črno luknjo, toda to plača z življenjem, saj ko prečka r_g, zanj povratka več ni.

Zanima nas še razmerje med intervalom lastnega časa $d\tau$ opazovalca, ki se nahaja blizu r_g in tam miruje, ter intervalom lastnega časa opazovalca daleč proč. Ura slednjega meri koordinatni čas t.

Zvezo dobimo iz (1.2.): $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\,dx^0 = \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}\,dt$. Če na primer opazovalec blizu r_g oddaja svetlobne signale vsako sekundo ($d\tau = 1\text{s}$), sprejema oddaljeni opazovalec te signale v časovnih intervalih, večjih za faktor $1/\sqrt{1 - r_g/r}$. Dolžina teh intervalov gre proti neskončno, ko se r bliža r_g. Na ploskvi $r = r_g$ se čas za oddaljenega opazovalca ustavi in s tem tudi vse dogajanje. Seveda pa je ta opis idealizacija, saj bi bila frekvenca fotonov, ki bi prišli z r_g, enaka 0 (foton bi vso svojo energijo $h\nu$ »potrošil« za premagovanje gravitacijskega potenciala) in naš opazovalec ne bi pravzaprav nič videl.

5. Plimske sile

Oglejmo si usodo opazovalca, padajočega v črno luknjo še malo nadrobneje. Zanima nas, kakšne sile čuti, ko pada v črno luknjo.

Opazovalec, ki prosto pada v gravitacijskem polju, ne čuti nobene sile, če je gravitacijska sila konstantna. Če pa se sila spreminja s krajem, opazovalec čuti neko silo, ki jo imenujemo plimska sila. Gravitacijska sila je obratno sorazmerna z radijem. Na opazovalca, ki stoji na površju Zemlje, deluje pri nogah večja privlačna sila kot pri glavi. Rezultanta je plimska sila, ki hoče opazovalca raztegniti v vzdolžni smeri ter skrčiti v prečni. Seveda je ta sila na površju Zemlje silno majhna. Ta sila je odgovorna za plimo in oseko. Gravitacijska sila Lune namreč močneje deluje na vodo, ki je Luni bližja, kot pa na ono, ki je bolj oddaljena.

Plimske sile so odločilne pri uničenju opazovalca, padajočega v črno luknjo. Že pri gravitacijskem radiju so te sile tako velike, da raztrgajo opazovalca. Vendar to velja le za črne luknje, katerih masa ne presega mnogo sončne mase. Opazovalec pa, ki bi padal v črno luknjo z maso 10^8 sončnih mas, pri r_g teh sil sploh ne bi čutil. Črna luknja s tako maso ima gravitacijski radij $3 \cdot 10^8$ km in gostoto snovi reda velikosti gostote vode. Plimske sile na njenem površju so približno enake velikosti kot na površju Zemlje. Opazovalec bi lahko mirno padal še nekaj časa, ne da bi se mu sploh kaj pripetilo. Iz zveze (4.3.) dobimo za čas padanja od r_g do središča $\tau = 0{,}66 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8 \text{s} = 660$ s, povsem dovolj časa, da bi se lahko v miru razgledal po notranjosti črne luknje. (Črne luknje s tako veliko maso pričakujemo v centrih galaksij.)

Zgornji primer nam pove, da je singularnost pri r_g, ki jo zazna oddaljeni opazovalec, le navidezna ter gre na račun neustrezne izbire koordinat r in t. Z izbiro primernejših koordinat se lahko tej singularnosti izognemo. Singularnost pri $r = 0$ pa je prava singularnost. Plimske sile naraščajo preko vsake meje, ko gre r proti 0. Našega opazovalca bi tam neskončno raztegnilo v vzdolžni smeri in stisnilo v prečni.

LITERATURA

C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: Gravitation Volume II (skripta).

Landau, Lifšic: Teorija polja, Moskva 1970.

R. Penrose: Black Holes, Scientific American 226/5, maj 1972.

R. Ruffini, J. A. Wheeler: Introducing the Black Hole, Physics Today 24/1, januar 1971.

A. H. Batten, R. P. Olowin: Black Holes and Binary Stars, Nature 234, december 1971.

Prirejeno po referatu iz literature z dne 21. 11. 1972.

NOVICA

KVARKI V ASTROFIZIKI

Čeprav mineva skoraj desetletje od rojstva *teorije kvarkov*, še vedno zasledimo v revijah mnogo prispevkov o *kvarkih*. To so hipotetični delci, iz katerih naj bi bili zgrajeni mezoni in barioni. Pripisati jim moramo neobičajna kvantna števila. Za nas je zanimiv le naboj, ki naj bi bil pri prvem kvarku $\frac{2}{3}$, pri drugih dveh pa $-\frac{1}{3}$ osnovnega naboja.

V zvezi s kvarki so pogoste zelo tvegane domneve. Med drugim so z njimi poizkusili pojasniti nekatere pojave v vesolju. Pogledali si bomo dve domnevi v tej smeri: *izvor energije pri kvazarjih* in *rdeči premik spektralnih črt kvazarjev*.

Kvazarji se kažejo kot močni izvori elektromagnetnega valovanja vseh vrst, od radijskega do rentgenskega. Energijski tok, ki prihaja do nas, je tolikšen, da ga z običajnimi energijskimi izvori ni mogoče pojasniti. Trenutno dopuščajo dve možnosti za sproščanje tolikšnih energij: anihilacijo materije in antimaterije ter sproščanje energije pri reakcijah med osnovnimi delci. Ti naj bi bili zgrajeni iz kvarkov, zato poizkušajo uporabiti model kvarkov kot enega izmed možnih modelov, po katerih so osnovni delci vezana stanja bolj osnovnih gradnikov.

Kvazarji naj bi bile kvarkovske zvezde. V razvoju zvezde se gravitacijskemu tlaku upirajo različne sile. Najprej termični tlak zaradi velike temperature pri jedrskih reakcijah, nato tlak, ki je posledica Paulijevega izključitvenega principa: degeneriran Fermijev elektronski plin (bele pritlikavke), degeneriran Fermijev nevtronski plin (nevtronske zvezde) in degeneriran Fermijev barionski plin (barionske zvezde). V takem vrstnem redu naraščata tudi tlak in gostota snovi v zvezdi.

Pri nadaljnjem povečevanju tlaka naj bi barioni razpadli v kvarke

$$B \rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad (1)$$

Račun pokaže, da je proces možen, če naraste gostota barionov nad $10^{45}\ \mathrm{cm}^{-3}$. Domnevajo, da dosežejo gostote v notranjosti barionskih zvezd tolikšno vrednost.

Ker predela zvezda pri reakciji (1) nekaj kinetične energije barionov v lastno energijo kvarkov, se zmanjša tlak. To pripelje do skrčenja zvezde. Lokalne fluktuacije tlaka pa so lahko tolikšne, da na kakem kraju v zvezdi razpad barionov ni več mogoč. Tedaj se uveljavi obratni pojav: kvarki se zlivajo v barione ob sproščanju ogromne energije. To znova privede do zmanjšanja tlaka. Taka reakcija se lahko konča z eksplozijo.

Sproščena energija po prehodu vseh kvarkov nazaj v barione je po oceni mnogo večja kot $\kappa M^2/R_g$. Pri tem je κ gravitacijska konstanta, M masa zvezde po prehodu vseh kvarkov v barione in $R_g = 2\kappa M/c^2$ gravitacijski radij zvezde. Ni izključeno, da dajejo prav pojavi take vrste energijo za nekatere objekte v vesolju.

Druga uganka pri kvazarjih je rdeči premik spektralnih črt v izsevani svetlobi. Za rdeči premik navajajo dva možna vzroka. Premik gre lahko na račun izredno močnega gravitacijskega polja na kvazarjih. To možnost so hitro ovrgli. Premik pa je lahko tudi posledica oddaljevanja kvazarjev. V tem primeru dobimo za hitrosti oddaljevanja vrednosti, ki so blizu hitrosti svetlobe.

Pojavila pa se je še tretja razlaga. Če se sprošča energija zaradi nastajanja barionov iz kvarkov, so na površju kvazarjev atomi, ki imajo v jedru protone delno nadomeščene s kvarki.

Če zamenjamo v vodikovem atomu proton s kvarkom z nabojem $\frac{2}{3}\,e_0$, dobimo za lastne energije

$$E_n = (\tfrac{2}{3}\, e_0/e_0)^2 E'_n = \tfrac{4}{9} E'_n,$$

če je E'_n ustrezna lastna energija vodikovega atoma. Masa kvarka ne igra nobene vloge, saj vzamemo, da kvark enako kot proton miruje. Zato so valovne dolžine izsevanih fotonov povečane v razmerju $\frac{4}{9}$.

Premik seveda ni enak za različne atome, pa še za vsak atom imamo več možnosti: kvark s pozitivnim nabojem $\frac{2}{3}\,e_0$ namesto protona ali dva kvarka, oba pozitivna, namesto dveh protonov in podobno. Prvi primer ustreza nemotenemu atomu z dodatnim kvarkom z nabojem $-\frac{1}{3}\,e_0$, drugi pa, če imamo en proton nadomeščen z dvema kvarkoma, enim pozitivno nabitim $\frac{2}{3}\,e_0$ in enim negativnim $-\frac{1}{3}\,e_0$.

Ni težko izračunati faktorjev, s katerimi moramo pomnožiti izmerjene valovne dolžine svetlobe, ki naj bi izvirala iz kvarkovskih atomov, da dobimo valovne dolžine svetlobe, ki jo sevajo normalni atomi (Tabela I).

Element	a_1	a_2
H	0,444	0,111
Ne	0,934	0,871
Ar	0,963	0,927
P	0,956	0,913

Tabela I: Popravljalni faktorji a za valovne dolžine nekaterih elementov pri nadomeščanju protonov z enim (a_1) ali dvema (a_2) kvarkoma.

S tako zamislijo so se spravili nad nekaj kvazarskih spektrov. V podatkih, ki so jih objavili, so za vse črte ujamanja odlična, posebej če upoštevamo, da so popravljalni faktorji pridelani iz zelo preproste Balmerjeve formule (Tabela II).

$\lambda = 3666$ Å		$\lambda = 4668$ Å	
λ'	λ_0	λ'	λ_0
Ne 3426 Å	Ne V 3426 Å	K 4505 Å	K IV 4511 Å
Ar 3399	Ar I 3392 3393	Ar 4329	Ar I 4333 4335
P 3505	P II 3507	P 4463	P II 4452 4475

Tabela II: Nekaj podatkov za kvazar 309. Pri tem je λ izmerjena valovna dolžina, λ_0 valovna dolžina črte, ki jo dobimo iz spektralnih tabel in λ' valovna dolžina kvarkovske črte ($\lambda = a\lambda'$, a je popravljalni faktor). Navedenih je več možnosti, ki bi pojasnile dve izmerjeni valovni dolžini. Po ustaljeni navadi pomeni I. da gre za prehodne v nevtralnem atomu, II., da gre za prehode v enkrat ioniziranem atomu itd.

Teorija bi močno pridobila na veljavi, če bi našli v spektrih s kvazarjev poleg črt, ki jih pripišemo kvarkovskim atomom, tudi nekaj nepremaknjenih emisijskih črt navadnih atomov. Če se to ne bo zgodilo, se avtorji zamisli še vedno lahko izmikajo, češ da navadnih atomov na kvazarjih sploh ni.

Andrej Pediček

LITERATURA

D. Boccaletti: The Red- or Violet-Shift of Quasars without any Source Motion, Nuovo Cimento **A 33**, 513 (1966).

D. Ivanenko, D. Kurdgelaidze: Gipoteza kvarkovih zvezd, Astrofizika **1**, 479 (1965).

J. Huang, T. Edwards: Quasars and Quarks, Phys. Rev. **171**, 1331 (1968).

F. Pacini: High-Energy Astrophysics and a Possible sub-nuclear Energy Source, Nature **209**, 389 (1966).

ŠOLA

O MINIMALNEM UČNEM NAČRTU MATEMATIKE

Marca preteklega leta je bila osnovana Komisija za sestavo učnega načrta za matematiko v gimnaziji. Na prvi seji te komisije je bil med drugim sprejet sklep, naj člani komisije dajo predloge, mnenja in ugotovitve o sedanjem učnem nčrtu. Osnova za razpravo naj bodo sedaj veljavni učbeniki.

Učitelji matematike na VII. gimnaziji Ljubljana-Vič smo prav zato znova pretehtali svoje delo in smo do reformnih prizadevanj na področju matematike zavzeli stališče, ki sem ga kot član komisije le-tej posredoval in ga tu navajam:

»Minimalni učni načrt matematike za gimnazije je na VII. gimnaziji Ljubljana-Vič, kot tudi na drugih gimnazijah, ki pri vpisu ne morejo izbirati le najboljših dijakov, bistveno vprašanje. Težko ga je namreč v izvedbi kakorkoli širiti, zgodi pa se, da je treba včasih celo minimalni učni načrt okrniti (obseg učne snovi, čeprav minimalen, bi moral biti predpisan precizneje in ne le z okvirnimi naslovi poglavij). Na podlagi večletnih izkušenj se je pri nas izoblikoval program, ki ustreza sedanjemu učnemu načrtu in ki poskuša v čim večji meri slediti učbenikom dr. Križaniča ter prof. Puclja in prof. Štalca. Treba je poudariti, da je obseg teh učbenikov realnim programom nedosegljiv, vsaj v oddelkih, ki niso intenzivno matematični. Dijaki zato učbenikov ne morejo popolnoma izkoristiti. Menimo, da to ni pomanjkljivost izvajanih programov, pač pa, da so učbeniki pri sedanjem predmetniku za gimnazije preobširni. Že z manjšimi korekturami v obsegu gradiva pa bi učbeniki bili dijakom najbrž dostopnejši. Obenem bi tudi pouk matematike na slovenskih gimnazijah postal bolj enovit. Zaradi tega seveda profesorjem v posebnih okoliščinah ne bi bilo onemogočeno razširjati učnega načrta. Ker naj bi sedanji učbeniki služili za izhodišče pri morebitnem reformnem preoblikovanju učnega načrta matematike za gimnazije, se zdi neogibno potrebna natančnejša analiza izvajanih programov vseh slovenskih gimnazij in uskladitev učbenikov z bodočim predmetnikom in učnim načrtom.«

Komisiji smo v prilogi posredovali še seznam poglavij gimnazijskih učbenikov, ki jih navadno krčimo ali povsem opuščamo, in naše učne programe za vse razrede.

Gornjemu bi radi dodali še tole. Pod minimalnim učnim načrtom razumemo program, ki bi bil enoten in obvezen za vse slovenske gimnazije. Izkušnje kažejo, da so razhajanja prevelika — vsebinsko in časovno. Učitelj je žal dostikrat ujet med tisto, kar bi rad naredil, in tisto, kar more narediti v odmerjenem času.

Ko govorimo o učnem načrtu, imamo v mislih program, zajet v učbenikih dr. Križaniča, prof. Štalca in prof. Puclja, ki je sedaj veljavnega, kaj šele starega, nedvomno kvalitetno prerasel. Učiteljeva praksa je obogatena. Ali pa je obogatena do meje, ko s te plati ni mogoče narediti več? Naj bo tudi praksi dovoljena beseda! Saj si vendar vsi po svojih močeh prizadevamo za iste cilje.

Aleksander Cokan

STIKALNA PLOŠČA ZA DEMONSTRACIJO POSKUSOV IZ ELEKTRIKE

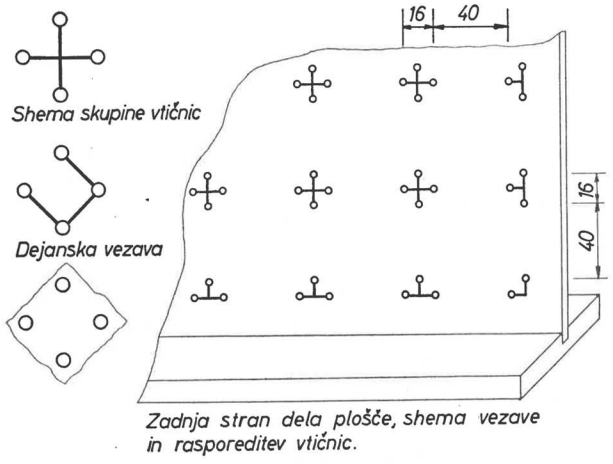
Pri pouku osnov elektrike, zlasti elektronike, je zelo uporabna navpična demonstracijska plošča — stikalna plošča — za pregledno kazanje električnih krogov. Takih učil je mnogo na izbiro (izdelujejo jih npr. družbe Phywe, Philips in Braun), a žal so nam večinoma nedostopna zaradi visoke cene v devizah. Navzlic poudarjanju pomembnosti izobraževanja nimamo pri nas normalne, strokovne in stalne ponudbe kvalitetnih učil. Tako si pač moramo po-

magati z improvizacijo in najbrž nam ne bo nihče zameril, če prevzemamo kako idejo od znanih proizvajalcev učil. Učilo si napravimo sami, če imamo za to le možnost in dovolj volje. Taka privatna proizvodnja učil ni smotrna in je le rešitev v sili. Toda zdi se, da je iskanje izhoda v sili postala v našem šolstvu že kar običajna oblika dela.

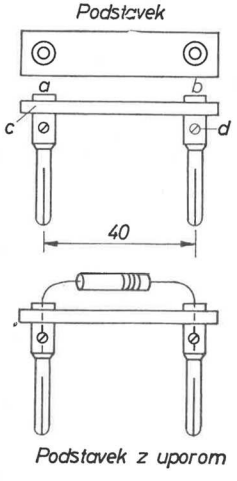
Stikalna plošča, o kateri bo govor, ima tri dele:

ploščo,
podstavke z elementi električnega tokovnega kroga in
pokrivne papirje z narisanimi vezji električnih tokovnih krogov.

Plošča naj bo iz dovolj trdnega materiala (npr. pertinaks 4 mm ali vezana plošča 8 mm). Navpično jo postavimo s stativom, lahko jo pritrdimo v vodoravno nosilno deščico* ali pritrdimo na steno v razredu. V zadnjem primeru naj bi bila plošča vrtljiva, tako da je mogoče uporabiti tudi zadnjo stran. V ploščo izvrtamo luknje in vanje privijemo enopolne vtičnice v skupinah po štiri, tri in dve (sl.1). Število skupin določimo po dimenzijah plošče.



Slika 1



Slika 2

Slika prikazuje stikalno ploščo velikosti 50 × 40 cm, vodoravne in navpične razdalje med vtičnicami v skupini so 16 mm, vodoravne in navpične razdalje med skupinami so 40 mm, v tem primeru imamo 24 skupin po štiri vtičnice, 20 po tri in 4 po dve, tako je na plošči 164 vtičnic). Vtičnice v isti skupini povežemo zadaj za ploščo z žico ali pa jih privijemo na skupno bakreno ploščo. Odžagamo jim zadnji, zaprti del, tako je mogoč priključek z obeh strani plošče.

Med vtičnice vstavljamo različne **elemente na podstavkih**, ki jih lahko naredimo iz ozke, tanjše ploščice izolatorja, v katero privijemo dva enopolna vtiča (sl. 2). Uporabimo lahko tudi kovinske dele bananskih vtičev, ki naj imajo navoj (**c**) in vijak (**d**) za pritrditev žičnih priključkov v vtič.

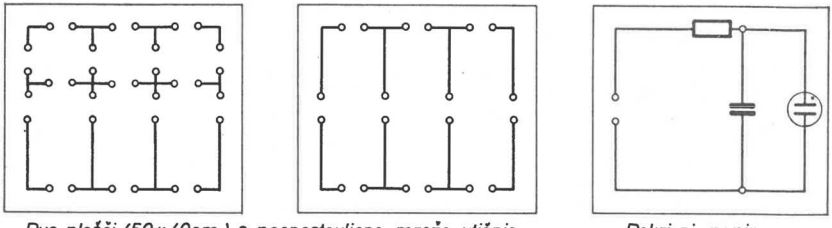
Pri poskusih z elektriko moramo predvsem pri nizkih napetostih paziti na dober stik, tako med vtičnicami v skupini, kakor tudi med vtičnico in podstavkom. Najboljši so vtiči z vzmetmi, navadne prežagane vtiče po potrebi malce razklenemo z izvijačem.

* Glej A. Moljk: Table za poskuse iz elektrike, Obz. mat., fiz. **1**, 150 (1951).

Podstavkov rabimo precej, na večino privijemo kar debelo žico. Te podstavke rabimo za vezi med vtičnicami. Na preostale pritrdimo upornike, kondenzatorje, tuljave, okove za žarnice, baterije, tlivke itd.

Tretji sestavni del naprave so **papirji z narisanimi vezji električnih tokovnih krogov.** S papirjem prekrijemo ploščo in na krajih, kjer so narisani simboli za upornik, kondenzator itd., vtaknemo podstavke s temi elementi, ostale vrzeli pa premostimo s podstavki, na katerih je žica. Seveda morajo biti razdalje na shemi prilagojene mreži vtičnic na plošči (sl. 3). Del elementov, ki so morda nujni za poskus, niso pa bistveni za razlago, lahko priključimo na zadnjo stran plošče. Zadaj lahko skupine vtičnic vežemo po potrebi kar z daljšo žico in si tako prihranimo nekaj podstavkov. Seveda je treba dijakom prvič pojasniti, kako deluje naprava, da ne bodo ugibali, kje teče tok. Večje elemente (npr. merilne instrumente, drsni upornik itd.) priključimo na označeno mesto s prikladnima dolgima žicama.

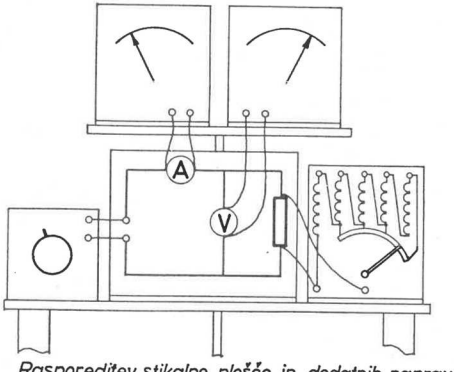
Pri manjših ploščah pokriva papir celo ploščo, pri večjih pa to ni nujno, če rabimo le del plošče. Vse simbole in črte na papirju narišemo dovolj debelo s črnim tušem (črte naj bodo



Dve plošči (50 x 40cm) s poenostavljeno mrežo vtičnic, prva ima 34 vtičnic druga pa le 20 vtičnic.

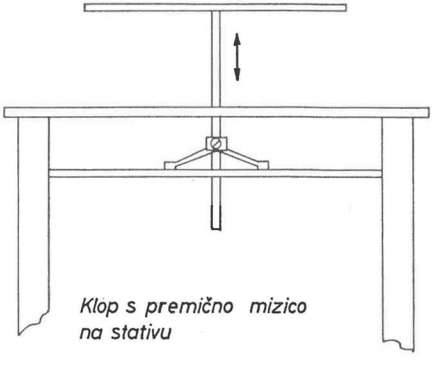
Pokrivni papir z narisano shemo

Slika 3



Razporeditev stikalne plošče in dodatnih naprav

Slika 4



Klop s premično mizico na stativu

Slika 5

tako debele, kot so široki podstavki, 8 do 10 mm), da bodo razločno vidni tudi iz zadnje klopi v razredu.

Če smo bolj skromni, lahko uporabimo poenostavljeno, cenejšo mrežo vtičnic, ki zadošča za večino poskusov (sl. 3). Če imamo dve taki manjši plošči, lahko že pred uro pripravimo dva poskusa, da se ni treba muditi z zamenjavanjem elementov. Z dvema plošča-

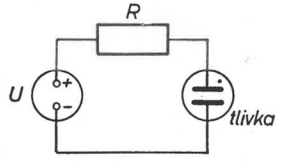
ma lahko pokažemo tudi sestavljene naprave. Na prvi npr. sestavimo enostavni oscilator in ga priključimo na zvočnik. Ta daje le slab zvok. Šele ko vključimo vmes ojačevalnik, ki smo ga sestavili na drugi plošči, bo zvok močnejši.

Pri poskusih uporabljamo poleg stikalne plošče še dodatne naprave: akumulator, usmernik, transformator, za katere je najugodneje, če jih razvrstimo levo in desno od plošče. Za merilne instrumente je najboljše mesto nad ploščo. Zanje rabimo torej še dodatno mizico (sl. 4), lahko kar lesen zabojček. Najboljša pa je mizica na stativu in če zvrtamo v klop luknje, jo po potrebi tudi spuščamo in dvigamo (sl. 5). Če delamo na stenski polici ali če imamo ploščo pritrjeno na steno, pritrdimo malo višje polico za instrumente. Vse te elemente priključimo na označena mesta na shemi z žicami. Imeti moramo dovolj žic raznih dolžin, tako da uporabimo vedno najkrajšo, da ne bi ustvarili nepregledne zmešnjave z žicami, ko smo se že toliko trudili, da bi bili poskusi čimbolj pregledni in nazorni.

Nekaj poskusov s tlivko

Poskusi s tlivko ponavadi ugajajo dijakom. Tlivka je primerna predvsem za demonstracijske poskuse, ker moramo delati z višjimi napetostmi. Na začetku moramo pojasniti, kako deluje tlivka. Pri tem lahko dijake upozorimo na indikatorske tlivke, ki so v gospodinjskih strojih. Za poskuse je prikladna le cevkasta tlivka. Ker tli plin le ob negativni elektrodi, lahko z njo ugotavljamo polariteto priključkov ali smer električnega toka.

1. poskus: Enosmerna napetost, ugotavljanje polaritete (sl. 6)



Slika 6

Tlivko priključimo preko primernega upornika (20 k Ω) na enosmerno napetost (okoli 100 V). Ugotovimo tlenje plina ob »spodnji« (negativni) elektrodi. Ko zamenjamo polariteto priključene napetosti, tli »zgornja« (seveda spet negativna) elektroda.

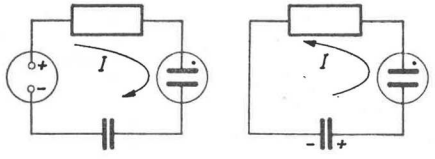
2. poskus: Napetost pri trenju glede na ozemljeno okolico

S trenjem naelektrimo kovinsko izolirano telo in ga razelektrimo preko tlivke. Tako lahko ocenimo napetost, nastalo pri trenju, polariteto, velikost naboja itd.

3. poskus: Izmenična napetost

Tlivko priključimo na izmenično napetost, seveda svetita obe elektrodi! Če pa tlivko pritrdimo na palico in jo z žicama priključimo na izmenično napetost, potem pa zamahnemo, se lepo vidi zaporedno vžiganje zdaj ob eni, zdaj ob drugi elektrodi.

4. poskus: Polnjenje in praznjenje kondenzatorja (sl. 7)



Slika 7

a) Tlivko in kondenzator priključimo na izvir enosmerne napetosti, kondenzator se polni, tok v električnem krogu teče od + k —. V tlivki žari »spodnja« elektroda.

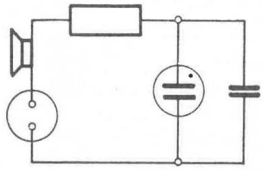
b) Ko se nabit kondenzator prazni, teče tok v nasprotni smeri, sedaj žari »zgornja« elektroda.

c) S tlivko lahko ugotavljamo čas polnjenja ali praznjenja kondenzatorja in odvisnost od C in R tako, da vstavljamo različne elemente.

5. poskus: Kapacitivnost

Merimo čas polnjenja in praznjenja vzporedno in zaporedno vezanih enakih kondenzatorjev (npr. po 1μF), od tod lahko sklepamo o kapacitivnosti kondenzatorja ali pa kvalitativno potrdimo enačbi za nadomestno kapacitivnost vzporedno in zaporedno sestavljenih kondenzatorjev.

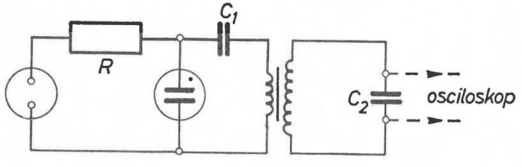
6. poskus: Prevesnik žagaste napetosti (sl. 8)



Slika 8

Ugotavljamo odvisnost frekvence vžiganja od C in R. Pri uporabljeni tlivki je bila (pri $R =$ $= 0{,}5\,\mathrm{M}\Omega$ in C večji od 0,25μF) frekvenca še dovolj majhna, da se je dalo vžiganje videti. Pri večjih frekvencah uporabimo zopet trik s palico in mahanjem. Če priključimo še osciloskop, bo seveda lepo pokazal krivuljo žagaste napetosti. Priključimo lahko tudi zvočnik in pri dovolj visokih frekvencah bomo slišali šibek ton, ki ga lahko z ojačevalcem ojačimo.

7. poskus: Dušeno nihanje (sl. 9)



Slika 9

Če bi radi na osciloskopu pokazali krivuljo dušenega nihanja, lahko za dajanje impulzov nihajnemu krogu uporabimo prevesnik. Za induktivni sklop lahko uporabimo kar transformator, na strani nihajnega kroga naj bo večje število navojev.

Peter Prelog

ANKETA ŠTUDENTOV NA ODSEKU ZA FIZIKO

V šolskem letu 1971/72 smo začeli študenti na odseku za fiziko na lastno pobudo z izvenštudijsko dejavnostjo. Izdajamo interno študentsko glasilo *List*. Prizadevamo si, da bi se izboljšali učni programi in študijski režim in bi postali odnosi med študenti in učitelji boljši. Da bi bolje spoznali mnenje študentov, smo pripravili anketo, ki so jo izpolnjevali študenti ob vpisu za šolsko leto 1972/73. Želeli smo dobiti predvsem odgovore na vprašanja o tem, kakšno vrsto študija si želijo študenti, kako študirajo, kako ocenjujejo lansko dejavnost študentov in v kolikšni meri so letos pripravljeni sodelovati v tej dejavnosti. Anketo so izpolnjevali študenti vseh letnikov, le da se je anketa za višje letnike nekoliko razlikovala od ankete za novince. Anketo je izpolnila približno polovica študentov višjih letnikov in skoraj vsi novinci. Rezultati ankete so verjetno zanimivi za člane Društva matematikov, fizikov in astronomov. Zato jih podajamo v nekoliko krajšani obliki.

Rezultat ankete za višje letnike tehnične fizike

1. Kaj si pričakoval od študija fizike ob vpisu na fakulteto?
   a) predvsem teoretično znanje ... 7%.
   b) tako teoretično kot eksperimentalno znanje za znanstveno in raziskovalno delo v inštitutih ... 51%.
   c) predvsem praktično znanje, za reševanje konkretnih (inženirskih) nalog v proizvodnji ... 30%.

   Preostali so pričakovali, da si bodo pridobili dovolj pedagoškega znanja za delo v prosveti. Nekateri na vprašanje ne vedo odgovora.
2. Danes pričakuje od diplome na fiziki isto kot ob vpisu 68% študentov.
3. Kaj nameravaš storiti po končanem študiju?
   a) delal bom v raziskovalnem inštitutu ... 25%
   b) delal bom v tovarni ... 30%
   c) nadaljeval bom študij na III. stopnji fizike ... 15%
   d) nadaljeval bom študij na nekem drugem področju ... 10%
   20% študentov se želi zaposliti izven ožje stroke, v prosveti, želijo oditi v tujino ali se še ni odločilo.
4. Strokovno literaturo, ki ni najtesneje povezana s predavanji, bere 62%, s fizikalnimi problemi, ki niso v neposredni zvezi s predavano snovjo, se ukvarja 40% študentov.
5. Večina študentov redno obiskuje predavanja in vaje. Sproti jih študira dobra polovica.
6. Kaj ti je pri študiju za izpite najpomembnejša opora?
   a) lastni zapiski ... 43%
   b) tuji zapiski ... 7%
   c) skripta 30%
   d) knjige ... 20%.
7. Večina študentov je samo delno zadovoljna s konceptom snovi, ki se predava. Večina (85%) jih je zadovoljna z odnosom med učitelji in študenti in ugodno ocenjuje vzdušje na odseku za fiziko.
8. 47% študentov meni, da ima poleg študija dovolj prostega časa.
9. Bereš leposlovne knjige?
   a) berem jih redno ... 40%
   b) poredkoma ... 42%
   c) zelo redko .... 18%.
10. Večina študentov ima štipendijo (59%), dva sta zaposlena: eden redno, eden honorarno.
11. Večina študentov je pripravljena sodelovati v dejavnosti študentov in pozitivno ocenjuje dejavnost v preteklem šolskem letu.

Anketo so izpolnili tudi maloštevilni študenti pedagoške smeri fizike. Njihovi odgovori so tipični, saj so se vsi ti študenti že ob vpisu odločili za delo v prosveti.

Rezultat ankete za novince

1. Na anketo je odgovorilo 26 tehniških in 4 pedagoški fiziki.
2. 26 jih je prišlo z gimnazij (1 Ajdovščina, 1 Celje, 2 Jesenice, 1 Kamnik, 2 Maribor, 1 Novo mesto, 1 Postojna, 8 Ljubljana), 4 so prišli s srednjih tehničnih (1 strojna, 3 elektro), drugi niso navedli srednje šole.
3. Ocena iz fizike: 5 — 47%, 4 — 23%, 3 — 23%, 2 — 7%. Poprečna ocena: 4,1.
4. Ocena iz matematike: 5 — 30%, 4 — 30%, 3 — 27%, 2 — 13%. Poprečna ocena: 3,8.
5. Zakaj si se odločil za študij fizike?
   a) veselje do znanstveno-raziskovalnega dela ... 61%
   b) veselje do pedagoškega dela ... 8%
   c) dobre možnosti za zaposlitev in dobra plača ... 3%
   d) dobre možnosti za zaposlitev v inozemstvu ... 3%
   e) navdušil me je učitelj ... 14%
   f) želja staršev ... 3%
   g) lepi uspehi na fizikalnih tekmovanjih ... 8%.

6. Kdaj si se odločil za študij fizike?
   a) pred več leti ... 51%
   b) v zadnjem šolskem letu ... 36%
   c) po maturi ... 13%.
7. Več kot polovica študentov je ob vpisu omahovala še med drugimi področji študija (25% strojništvo, 25% medicina, 20% elektrotehnika, 10% biologija, po 5% pa še literatura, matematika, arhitektura, astronomija).
8. Kaj pričakuješ od študija fizike?
   a) predvsem teoretično znanje ... 11%
   b) teoretično — eksperimentalno znanje ... 61%
   c) praktično znanje ... 17%
   d) pedagoško znanje ... 8%
   e) ne vedo ... 3%.
9. Kaj nameravaš storiti po diplomi?
   a) v raziskovalnem inštitutu se jih želi zaposliti 54%
   b) v tovarni ... 21%
   c) v prosveti ... 8%
   d) študij na III. stopnji fizike ... 8%.
   Preostalih 9% namerava nadaljevati študij na nekem drugem področju, oditi v tujino ali se še niso odločili.
10. Financirajo jih v glavnem starši (78%).
11. Študirati nameravajo:
   a) redno obiskovanje predavanj in študiranje sproti ... 63%
   b) neredno obiskovanje predavanj in študij po literaturi ... 7%
   c) v glavnem ne bodo obiskovali predavanj ... 6%
   d) odločili se bodo glede na predmet ... 12%
   e) o tem še niso razmišljali ... 12%.
12. Sedem študentov se je udeležilo srednješolskih tekmovanj iz fizike. Štirje so dobili pohvalo ali nagrado.
13. Večina študentov je pripravljena sodelovati v dejavnosti študentov.

Na zadnja tri vprašanja obeh anket so morali študenti odgovoriti nekoliko obširneje. Eno je vpraševalo študente po njihovih predlogih za dejavnosti študentov na našem oddelku. Večina študentov je v zvezi s tem predlagala oživitev športne in drugih rekreativnih dejavnosti. To bi bolj povezalo študente iz različnih letnikov. S fakultete ne bi prihajali *računalniki*, marveč ljudje, ki imajo posluh za sočloveka (študent II. letnika).

Precejšnje število študentov si želi tudi samostojnega dela v okviru učnega načrta. Nekdo iz I. letnika je na tem mestu omenil boj proti onesnaženju človekovega okolja. Zanimiv je predlog absolventa, ki predlaga »da se na začetku leta organizira nekakšen teach-in, na katerem naj bi se razvila spontana baza za nadaljnji razvoj, ki je zdaj ne moremo predpisovati«. Anketni list tega absolventa s poprečno oceno 8, 7 je tako zanimiv, da se splača še pomuditi se ob njem. Ne obiskuje predavanj in vaj redno in študira le pred izpitom. Zapisal je: »Univerza me je razočarala. Zdi se mi nesposobna vzgajati samostojne ljudi, temveč pretežno le privzgaja«. Moti ga samozadovoljnost, občutek, da smo fiziki nekaj več. Mogoče so te besede malce preveč kritične, a vseeno ne bi bilo odveč glede tega izprašati si vesti.

Ocena večine glede dejavnosti v preteklem šolskem letu je najbolje izrazil kolega, ki je napisal: »Pikniki so imenitno uspeli, predlogi za spremembo študija pa še vedno plavajo po Savi«. V glavnem se anketiranci strinjajo v ugotovitvi, da je napredek glede na prejšnja leta precejšen, da pa je še vedno preveč besedičenja v prazno ter zaletavosti. Nekateri se pritožujejo zaradi neobveščenosti.

Na koncu si zamislimo tipičnega študenta tehnične fizike. Le-ta ima veselje do znanstveno raziskovalnega dela. Za študij fizike se je odločil že več let pred vpisom. Redno obiskuje predavanja in vaje ter študira sproti. Ima poprečno oceno 8. Glede zaposlitve po diplomi omahuje med tovarno in inštitutom. Ali ga vzdržujejo starši ali pa ima štipendijo. Ni preveč zadovoljen s konceptom snovi, ki se predava. Primanjkuje mu prostega časa. V študentskih organizacijah ne sodeluje.

Cene Filipič, Bojan Golli, Boris Vedlin, Marko Vuk

TEKMOVANJA

III. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV, UČENCEV 7. IN 8. RAZREDOV OSNOVNIH ŠOL

Tekmovanje je bilo dopoldne v nedeljo 18. junija 1972 v predavalnici Prirodoslovno matematičkog fakulteta v Beogradu, pod okriljem »Matematičkog lista«. Tekmovalo je 45 učencev, od teh 31 iz snovi za osme razrede in 14 iz snovi za sedme razrede. Tekmovali so učenci iz vseh republik, razen iz SR Makedonije. Iz naše republike se je udeležilo tekmovanja 6 osmošolcev, ki so bili najboljši na tekmovanjih za Vegova priznanja.

Na otvoritvi zveznega tekmovanja so se zbrali učenci, mnogo njihovih učiteljev in staršev ter zastopniki tiska in televizije. Prisotne je v imenu zvezne komisije za tekmovanje mladih matematikov pozdravil njen predsednik as. Vladimir Micić. Delovni program pa je otvoıil dolgoletni vodja matematičnih tekmovanj prof. Bogoljub Marinković, ki je razložil tekmovalcem pogoje tekmovanja in jim zaželel mnogo uspeha pri reševanju nalog.

Naloge, ki so jih reševali mladi matematiki, je že prejšnji dan izbrala komisija za tekmovanje. Učenci so reševali 5 nalog, ki so bile iz različnih področij osnovnošolske matematike. Za reševanje so imeli 120 minut časa. Po tekmovanju se je komisija ponovno sestala in ocenila izdelke. Vseh nalog ni rešil nihče popolnoma pravilno. Popoldne so se tekmovalci in njihovi spremljevalci ob 17. uri zbrali na slovesni proglasitvi rezultatov in podelitvi nagrad in pohval.

Prvo nagrado in največje število točk 23,5 od 25 je dosegel Tamar Čeferin iz osnovne šole Grm pri Novem mestu.

Druge nagrade so dobili trije učenci, ki so dosegli 22 do 20 točk.

Tretjo nagrado je prejelo pet tekmovalcev, ki so dosegli 19 do 17,5 točk, med njimi sta bili dve učenki iz Slovenije, Sonja Košir iz osnovne šole Milojke Štrukel v Novi Gorici in Nevenka Zavrl iz osnovne šole Prežihov Voranc v Ljubljani.

Med **pohvaljenimi** je bil tudi Marko Oblak iz osnovne šole Prežihov Voranc v Ljubljani.

Vsak udeleženec je prejel v spomin na tekmovanje dve knjižici s posvetilom. Nagrajeni so dobili ure, fotografske aparate in knjige. Tokrat so prvič dobili knjižne nagrade tudi učitelji nagrajencev, ki so prav gotovo doprinesli svoj delež k uspehu učenca.

Bogomila Kolenko

KOLEDAR TEKMOVANJ IZ MATEMATIKE V ŠOLSKEM LETU 1972/73

Komisija za delo z učenci pri DMFA SRS je določila naslednji koledar tekmovanj iz matematike za šolsko leto 1972/73:

do 20. maja 1973 šolska tekmovanja

26. maja 1973 občinska tekmovanja

2. junija 1973 republiško tekmovanje

10. junija 1973 zvezno tekmovanje.

NOVE KNJIGE

Prijatelj N.: Matematične strukture III. Okolice. Knjižnica Sigma — 23. DZS, Ljubljana 1972. 260 str. 8° (MOS 54—01). Cena 40.— din.

V tretjem in zadnjem delu trilogije Matematične strukture obravnava avtor osnovne pojme splošne topologije. Knjiga je razdeljena na šest poglavij in sicer: I. Urejeni obseg in realna števila, II. Topološki prostor, III. Zveznost in limita, IV. Separacija in kardinalnost, V. Kompaktnost in povezanost in VI. Metrični prostor. Poleg pojmov navedenih v naslovih poglavij se bo bralec seznanil še z relativno topologijo, s topološkim produktom prostorov, s filtri in ultrafiltri, z limito filtrov itd.

Osnove splošne topologije so temelj ne samo za druga področja topologije temveč tudi za vso matematično analizo in celo algebro. Zato je prav, da smo dobili v našem jeziku delo iz področja, ki ga mora danes poznati vsak, ki se ukvarja z matematiko ali pa matematiko uporablja pri svojem delu. Pričujoča knjiga bo poleg tega tudi učbenik za predmet Množice in strukture, ki se predava v prvem letniku za slušatelje matematike.

Kakor druge svoje knjige je tudi to delo avtor napisal jasno in preprosto, vendar matematično izredno strogo. Za razumevanje mora bralec vsekakor vsaj deloma poznati vsebino prvih dveh delov. Drugo znanje matematike (niti srednješolske ne) pa ni nujno potrebno.

Ivan Vidav

Alojzij Vadnal: Elementarni uvod v verjetnostni račun. Druga, predelana izdaja. Knjižnica Sigma. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1972. 248 str. 8° (MOS 60—01). Cena 40.— din.

Delo obsega štiri poglavja in dodatek. Prvo poglavje obravnava osnovne pojme verjetnostnega računa, zveze med dogodki in definicije verjetnosti. Drugo poglavje prinaša formuli za verjetnost vsote in produkta, Bayesovo in Bernoullijevo formulo in Poissonov limitni izrek. Tretje poglavje je namenjeno predvsem poprečni vrednosti in disperziji pri diskretnih porazdelitvah, v njem je tudi dokaz Bernoullijevega limitnega izreka. V četrtem poglavju je opisanih nekaj diskretnih porazdelitev, obravnava pa tudi zvezne porazdelitve in njihove momente. Največ prostora je namenjenega normalni porazdelitvi. V zvezi z njo je dokazan tudi Laplaceov lokalni limitni izrek. V dodatku so navedene osnovne reči iz kombinatorike, izračunan je Poissonov integral in opisana je verjetnostna mreža.

Delo s tem naslovom je izšlo v Sigmi že pred trinajstimi leti, vendar ima s to izdajo skupnega le malo drugega kot naslov in predmet obravnave. Lahko rečem, da je korenita sprememba novi izdaji samo v prid. Snov je izbrana posrečeno (pogrešam le Laplaceov integralski limitni izrek — čeprav brez dokaza) in podana sodobno. Raven obravnave je taka, da bo knjiga prijeten vir informacije za vse, ki se zanimajo za verjetnostni račun, pa jim iz njega ni potrebno zelo temeljito znanje.

Rajko Jamnik

PREJELI SMO V OCENO

R. B. Cain, Elementary Statistical Concepts, Saunders, Philadelphia-London-Toronto 1972, str. 268.

Knjiga obravnava nekaj elementov verjetnostnega računa (pojem slučaja in neodvisnosti, enakomerno, binomsko, Poissonovo in normalno porazdelitev), njen poglavitni del pa je namenjen opisu osnovnih statističnih prijemov. Predvsem gre za najpreprostejše preskuse značilnosti (test z znaki, Mann-Whitneyev, Wald-Wolfovitzov in medianski test ter test hi kvadrat) in za kratek oris statističnega ocenjevanja in odločanja.

Delo je prikrojeno za bralca z izobrazbo končane osemletke. V skladu s tem je izbira snovi (samo neparametrični testi) in njena obravnava (vsak problem je opisan samo verbalno in dan je recept za rešitev). Za zahtevnejše bralce je knjiga brez pomena, tistim, ki jim je namenjena, pa bo prav koristna, saj je napisana v metodičnem pogledu zelo prizadevno.

R. Jamnik

Zvezni strokovni odbor za obravnavanje podatkov — ZSOOP vabi na

8. SIMPOZIJ O OBRAVNAVANJU PODATKOV
INFORMATICA 73
na Bledu, 1.—5. oktobra 1973

na srečanje jugoslovanskih in tujih strokovnjakov s področja računalništva.

Teme posvetovanja bodo:

računalniški software — računalniški hardware — sistemi za upravljanje in administracijo — tehnološke aplikacije — numerična analiza — teorija obdelave podatkov — humanistične vede — računalniška vzgoja.

Simpozij INFORMATICA 73 je novo ime za tradicionalno posvetovanje, ki ga prireja Zvezni odbor za obravnavanje podatkov. Zaradi vse večjih potreb po ustreznih strokovnjakih bodo udeleženci simpozija razpravljali tudi o računalniški vzgoji in to tako o vzgoji kadra za računske centre podjetij kot o uvajanju pouka računalništva v osnovne in srednje šole ter na univerzo.

Prijavnina za udeležence, ki se bodo prijavili do 1. septembra 1973, znaša 1.000.— din, po tem roku prijavljeni pa plačajo 1.200.—. Avtorji plačajo enako kotizacijo kot drugi udeleženci simpozija. Vsak pravočasno prijavljen udeleženec bo prejel na simpoziju zbornik referatov.

Rok za prijavo referata je 10. april 1973. Avtorje prosimo, da pošljejo obenem s prijavo tudi povzetek referata. Avtorje prosimo, da pošljejo prijavljene referate do 15. avgusta 1973.

Referati so lahko originalno delo teoretičnega ali praktičnega značaja, pregledni referati, kritične analize ali opisi izkušenj, pridobljenih pri projektiranju. Referat je lahko tudi opis programa oziroma programskega paketa, bodisi lastnega bodisi tujega, ki pa je zanimiv v organizacijskem pogledu ali glede na uporabljeno metodo reševanja problema.

Angleščina je uradni jezik simpozija. Avtorje vabimo, da predložijo in predstavijo svoja dela v angleščini, seveda pa bodo v program uvrščena tudi dela, napisana v kateremkoli jugoslovanskem jeziku. O uvrstitvi referata v program simpozija bo sklepal mednarodni programski odbor na predlog recenzentov za posamezna tehnična področja.

Pri prijavi referata naj avtorji navedejo ime, priimek in svoj strokovni naziv, naslov svoje delovne organizacije, naslov referata ter navedejo področje, v katerega uvrščajo svoj referat.

Nadaljnje informacije in prijave:

IZTOK LAJOVIC, dipl. ing., ZSOOP, Institut »Jožef Stefan«, 61000 Ljubljana, Jamova 39, tel. 63-261