

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1973

Letnik 20

1

XX. LETNIK — ŠTEVILKA 1
OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 1973

Uredniški odbor: Franc Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT univerze v Ljubljani; Franc Kvaternik, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Jože Pahor, inštitut »J. Štefan«; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad, FNT; Anton Suhadolc, FNT; Ivan Vidav, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno.

Izdajo revije sofinancira Kulturna skupnost Slovenije.

Naročnina: za člane 20 din, za nečlane 30 din, za dijake in študente 10 din, za ustanove in podjetja 40 din, za inozemstvo 51 din (3 \$), posamezna številka 8 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, pp. 227, telefon: 61-564/22, tek. račun št. 50101-678-48363

Člani društva naj nakazujejo na tekoči račun Komisije za tisk 20 din naročnine in 10 din članarine, skupaj 30 din.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

	Stran
Naš minimum (F. Križanič)	1
Članka	
Stanje matematičnih znanosti	2
Difrakcija nevtronov (V. Dimic)	9
Šola	
Upodobitve z lečami (P. Gosar)	20
Tekmovanje	
Eksperimentalna naloga na V. mednarodni olimpiadi iz fizike (T. Skulj)	29
Utrinek	8

CONTENTS

	Page
Articles	
The mathematical Sciences	2
Neutron Diffraction (V. Dimic)	9
School	20
Competition	29
Spark	8

NAŠ MINIMUM

Glas gre med matematičnim ljudstvom in zahteva: »Dajte nam minimum!«. Zanj gori, ali ga ne pozna in kliče poznavalce in razlagalce, da ga razodenejo, da ga bomo sprejeli, premleli in razdali, mlademu rodu kot brašno na pot.

Pojde pa mladina z gimnazije na univerzo in glas bi rad, da ji bo korak lahak, brez sape in spotik. Povejte nam, nas roti, kaj naj jih najmanj naučimo, da bodo na univerzi najboljše uspevali.

O, da bi bilo, pravi, takole: Sešli so se učenci in prvi je rekel: »Niso znali poiskati središča kroga!« In drugi je rekel: »Niso vedeli za kosinus dvojnega kota.« In tretji je rekel: »Seštevanje ulomkov jim ni šlo od rok.« In četrti je rekel: »O množenju celih števil niso imeli pojma.« In peti je dodal sklepni račun. In bil je minimalni program.

Vsak učitelj je razpet med minimum in maksimum. Minimum je nič, maksimum, kar ve, kar zna, kar zmore, kar razume. Več bo vedel, več bo zmogel, bolje znal in bolj razumel — boljše bo povezal dijaku popotnico.

To je vse, kar sem hotel zapisati o minimumu.

Pa lep pozdrav!

France Križanič

STANJE MATEMATIČNIH ZNANOSTI*

MOS 01A65

Uvod

To poročilo obsega pregled matematičnih znanosti. Napisano je v obliki, za katero upamo, da bo razumljiva nematematikom. Da bi to dosegli, in da bi obdržali poročilo v primernem obsegu, smo morali žrtvovati vse poskuse, da bi bilo delo popolno. Potrebno se je bilo tudi izogniti podrobnostim in rabi simbolizma, brez katerega je nemogoče temeljito razpravljati o matematičnih predmetih.

Matematična skupnost

Zgodovinske perspektive

Začenši s prvim izrazom razumske misli je matematično mišljenje vplivalo na razvoj naše kulture na splošno in je bilo odločilno pri nastajanju znanosti in tehnologije. Odkritju in razvoju infinitezimalnega računa je sledila doba prosvetljenstva v osemnajstem stoletju; te matematične ideje in metode so omogočile začetek industrijske dobe. Mnogi matematiki, ki so se ukvarjali z razvojem analize, so razširili področje same matematike in preskrbeli orodje za reševanje tako mnogovrstnih problemov, kot so problemi gibanj dinamičnih sistemov, pretakanja tekočin in plinov, problemi, ki obsegajo trdnost materialov in, pozno v devetnajstem stoletju, teorijo električnih in magnetnih pojavov. Dokončna Maxwellova formulacija tega zadnjega področja je zahtevala še bolj zahtevno matematiko. Ob tem razvoju v analizi so splošne matematične ideje v algebri in geometriji našle pomembno vlogo v osnovah fizikalnih teorij. Neeuklidične geometrije in bolj abstraktni prostori so postali matematični predhodniki novih fizikalnih teorij — na primer teorije relativnosti. Določene abstraktne matematične konstrukcije predstavljajo uvod k formulacijam kvantne teorije. Na koncu devetnajstega stoletja in v začetku dvajsetega stoletja so uporabljali ogromen matematični aparat ne samo za probleme v astronomiji in fiziki in v mnogih vejah tehnike, ampak tudi v znanostih, kot je kemija, ki so zgrajene na teorijah v fiziki in vsebujejo naraščajočo uporabo matematike — na vseh stopnjah elementarne do najbolj abstraktne.

Zaradi dolge, globoke in bistvene zveze med rastjo matematike in rastjo fizike, matematiko često uvrščajo med fizikalne znanosti; do pred kratkim je bil njen vpliv na civilizacijo skoraj izključno z njeno uporabo v astronomiji, fiziki, kemiji in tehniki. Toda matematika ima značilnosti, po katerih se razlikuje od vseh eksperimentalnih znanosti — in mogoče od vseh drugih znanosti.

Ena so globoke korenine, ki jih ima matematika v preteklosti. Nekatere probleme, s katerimi se ukvarjajo matematiki danes, zasledimo več tisoč let nazaj. Veliko sodobne matematike je nadaljevanje dela, ki so ga začeli stari Grki. Bolj osnovna razlika med matematiko in eksperimentalnimi znanostmi, vštevši celo najbolj teoretične veje, je v obsegu matematičnih raziskovanj, ki nastajajo v okviru matematike same. Fiziki, kemiki, biologi in psihologi se več ali manj ukvarjajo s pojavi, ki se dajo opazovati. Matematiki često dobijo seme za

* Ta sestavek je prvi del skrajšanega prevoda članka: The Mathematical Sciences: A Report. Section II. The State of the Mathematical Sciences, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 2, 345—390 (1971). Zahvaljujemo se National Academy of Sciences, Washington D. C., U. S. A., da je dovolila prevod.

svoje probleme iz zunanjega sveta, včasih od drugih znanosti, toda ko je matematičen problem enkrat formuliran, dobi, v nekem smislu, lastno življenje. Na poenostavljen način sestoji matematika iz posplošitev resničnih situacij, iz posplošitev takih posplošitev resničnih situacij itd. Presenetljivo, toda resnično je, da se često izkaže, da te posplošitve posplošitev povečujejo naše znanje in nadzor nad svetom, v katerem živimo.

Matematika je bila seveda vedno tradicionalen del vzgoje inženirja. Toda sedaj postaja bistven del vzgoje biologov, psihologov, ekonomistov in mnogih drugih. Zato je prva dolžnost, ki jo ima matematična skupnost do družbe, področje vzgoje.

Druga sprememba je povečano število ljudi, ki se ukvarjajo z matematičnim raziskovanjem. Matematične znanosti, kakor tudi vse druge znanosti, doživljajo skoraj eksploziven porast v številu raziskovalcev. Na primer v *Mathematical Reviews*, mednarodnem referativnem časopisu, je leta 1940 izšlo približno 2000 recenzij člankov in približno 15000 v letu 1966. Ravno tako je naraslo število matematičnih revij, ki so izšle na vsem svetu.

Narava matematike

Bistvene poteze matematičnega raziskovanja in odkrivanja so stoletja ostale iste. Isti so ostali tudi njeni glavni viri inspiracije: zunanji svet in lastna notranja zgradba.

Matematiko, ki je sama sebi namen, običajno imenujemo »čista matematika«, matematična raziskovanja, katerih namen je povečati naše razumevanje sveta, pa imenujemo »uporabna matematika«. Toda tako razdelitev matematike v čisto in uporabno je težko zagovarjati; izvor mnogih pomembnih matematičnih idej se da zaslediti v uporabi, po drugi strani pa se često izkaže, da je matematika, ki je ustvarjena samo zaradi sebe, pomembna za uporabo.

Primeri kažejo, da je brez pomena, če poskušamo potegniti mejo med čisto in uporabno matematiko. Obe matematiki se ne razlikujeta toliko po vsebini, kot po prvobitni motivaciji.

Zato raje ne uporabljamo izraza »čista matematika«, ampak ga zamenjamo z bolj opisnim izrazom »jedro matematike« (core mathematics, op. p.) Jedro vsebuje tiste visoko razvite pododdelke matematike, ki so jih raziskovali in jih raziskujejo predvsem zaradi njih samih. Izraz »jedro matematike« nas tudi spomni na osrednji položaj tako imenovane »čiste matematike« glede na vse matematične znanosti.

Razumska radovednost in razumsko vznburjenje sta glavni gonilni sili pri raziskovanju v vseh matematičnih znanostih, tako kot v vseh znanostih na splošno. Razburjenje, ko prepoznamo model v navidezno kaotičnem položaju in zreduciramo veliko število pojavov, ki očitno niso v zvezi, na eno samo preprosto načelo, je spet značilno za vse znanosti; toda v matematičnih znanostih, in posebno v jedru matematike, je vloga, ki jo igrajo taka premišljevanja, tako prevladujoča, da imajo nekateri matematiki matematiko tako za umetnost kot za znanost.

Po pravilu se z matematiko raje ukvarjajo posamezniki kot skupine; toda matematika je vseeno kolektivno delo. To vidimo, na primer, po dejstvu, da često pridejo do važnih odkritij različni ljudje, ki neodvisno delajo na različnih delih sveta. Osebn stik med matematiki na istem področju je često bistven pogoj za uspešno delo. Toda dejansko delo skoraj vedno opravi en človek, ki premišljuje o nekem problemu. Malo je matematičnih člankov, ki so jih napisali trije avtorji, in skoraj nobenega ni, ki bi ga napisalo več avtorjev. Ker je matematika ena od tistih umskih dejavnosti, pri katerih lahko en človek — brez pomoči, brez nadzorstva in brez napotkov — naredi pomembne prispevke, še vedno privlačuje nekatere najsposobnejše mlade ljudi.

Ena od presenetljivih potez matematičnega raziskovanja v preteklem desetletju je stekanje raznih matematičnih disciplin. V letih okoli druge svetovne vojne je postala pomembna tendenca po specializaciji. Bali so se, da se bodo meje med različnimi področji

jedra matematike utrdile tako hitro, da se matematiki različnih strok ne bodo mogli več pogovarjati med seboj. Sedaj vidimo, da je bila ta bojazen neutemeljena.

Mnogi matematiki so prepričani, da je sedaj zlata doba matematike. Kot dokaz navajajo, da so v tej dobi rešeni mnogi znani problemi, ki so spravljali v težavo matematike v preteklosti, da matematiko uporabljajo v vedno večjem številu drugih strok in da mladi ljudje, ki začnejo z raziskovanjem, brez težav prepoznajo zanimive probleme.

Jedro matematike

Svoje opombe bomo združili okoli tradicionalnih razdelkov jedra matematike. Toda ne smemo pozabiti, da so sedaj meje med temi področji mnogo manj ostre, kot so bile prej, in da se največ važnih odkritij zgodi natančno na mejah med različnimi področji ali na področjih, ki jih ne moremo uvrstiti v obstoječo razporeditev. Dejansko sta stekanje matematičnih idej in prodiranje različnih področij drugo v drugo najbolj karakteristični in najplodnejši potezi sodobnega jedra matematike. Bežna predstava, izražena v nestrokovnem jeziku, lahko izrazi samo bled odsev navdušenja, ki ga čutijo udeleženci tega razvoja.

Matematična logika

Logika je ena od najstarejših matematičnih znanosti, kajti stara je najmanj toliko kot aristotelska filozofija in evklidska geometrija. Toda matematična logika, imenovana tudi simbolična logika, se je v resnici razvila v drugi polovici devetnajstega stoletja, ko so opazili, da lahko znane logične operacije izrazijo z algebrainimi formulami, in ko se je izkazalo, da se dajo definirati taki osnovni matematični pojmi kot so naravna števila $0, 1, 2, 3, \dots$ s čisto logičnimi pojmi.

Glavni vzrok za razcvet matematične logike leži v sočasnem razvoju teorije neskončnih množic, ki jo je osnoval Georg Cantor. Ta teorija je vplivala na vso matematiko. Vodila je tudi k odkritju paradoksov, nesmiselnih zaključkov, ki so jih dosegli z navidezno pravilnim dokazovanjem. Nekateri od teh novih paradoksov* so podobni onim, na katere so naleteli stari grški filozofi** in ki jih je Aristotel ovrgel z argumenti, ki se nam danes zdijo nezadostni.

Ker je prosto sklepanje vodilo k paradoksom, so matematiki spoznali, da je treba urediti procese logične misli. Tako naj bi bilo možno zreducirati vsak zakonit kos matematičnega sklepanja na manipulacijo s simboli, uporabljajoč samo določene aksiome in določena pravila sklepanja. Pravimo, da je tako zreducirano dokazovanje »formalizirano«. Seveda sama formalizacija ne daje jamstva, da ne bo prišlo do paradoksov (kot se zares lahko zgodi, če aksiome in pravila slabo izberemo). Toda brez formalizacije se ne moremo strogo lotiti problema, kako naj primerno spravimo matematiko v sistem pravil in zakonov.

Mnogo let so matematiki upali, da se da vse matematično dokazovanje formalizirati v enem logičnem sistemu. Toda to upanje je razblinilo leta 1931 pomembno Gödelovo odkritje, ki je imelo daljnosežne posledice med filozofi. Gödel je ugotovil »nepopolnost« za določene posamezne formalne sisteme. (»Principia Mathematica« Whiteheada in Russella in sorodni sistemi). Toda kmalu so spoznali, da je nepopolen vsak formalni sistem, ki je pravilen (samo resnične trditve so dokazljive) in dovolj bogat, da vsebuje navadno aritmetiko. V vsakem takem sistemu so trditve, celo o celih številih, ki so resnične, a se ne dajo dokazati znotraj sistema.

* Tu je primer. Izraz »najmanjše naravno število, ki se ne da izraziti z manj kot devetindvajsetimi zlogi« navaja z osemindvajsetimi zlogi naravno število, ki se po svoji definiciji ne da izraziti z manj kot devetindvajsetimi zlogi. (G. G. Berry, 1906).

** X pravi: »Lažem.« Ali X govori resnico? (Eubulides, 4. st. p. n. št.)

Ta posplošena oblika Gödelovega izreka temelji na tem, da sprejmemo natančno analizo tega, kaj je »algoritem« ali »naprej predpisani računski postopek« v splošnem. Tako analizo, ki jo je sprejela večina logikov, je leta 1936 podal Church in neodvisno od njega (v ekvivalentni obliki) Turing. Prej so se matematiki ukvarjali samo z mnogimi posameznimi primeri algoritmov, od katerih je nekatere odkril že Evklid, ali pa drugi pred njim.

Oba, Church in Turing, sta uporabila svojo analizo za to, da sta našla neskončen razred vprašanj z lastnostjo, da se z nobenim algoritmom ne da odgovoriti pravilno na vsa vprašanja razreda. Ne glede na to, kako dolgo in trdo bi delali matematiki, da bi odkrili metode, s katerimi bi odgovarjali na vprašanja razreda, še vedno bo ostalo nekaj vprašanj, na katera bomo lahko odgovorili samo z vpeljavo novih metod. Čisto pred kratkim (po letu 1948) se je pokazalo, da taki razredi vprašanj (včasih imenovani »nerešljivi problemi«) nastanejo v drugih delih matematike.

Eden od prvih Cantorjevih dosežkov je bil dokaz, da je na premici »več« točk, kot je naravnih števil; nemogoče je združiti v pare točke na premici in naravna števila $0, 1, 2, 3, \dots$. Cantor je izrazil domnevo, da se da vsaka množica točk na premici ali preurediti v preprosto zaporedje ali pa vsebuje »toliko« točk, kolikor jih je na celi premici. To domnevo, ki so jo imenovali hipoteza kontinua, so imeli za enega glavnih nerešenih problemov v matematiki. Leta 1939 je Gödel dokazal, da se hipoteza kontinua ne da ovreči z metodami, ki jih uporablja sodobna matematika in ki so formalizirane v obstoječih sistemih teorije množic. Približno četrto stoletja kasneje je P. Cohen pokazal, da se hipoteza kontinua ne da niti dokazati s takimi metodami.

Kar smo povedali do sedaj, lahko daje vtis, da je matematična logika zelo abstrakten predmet, soroden filozofiji in veliko preveč ezoteričen celo za okus večine matematikov. In tako je v resnici. Toda ta stroka, ki je najstrožja izmed vseh matematičnih strok, je dala prispevek tisti ameriški industriji, ki se najhitreje razvija. Z redukcijo matematičnega dokazovanja in dejansko vsega deduktivnega dokazovanja v čisto mehanično manipulacijo znakov v skladu z določenimi pravili je matematična logika pripravila tla za razvoj digitalnih računalnikov. V resnici je matematična teorija popolnoma formalizirana, če lahko katerikoli dokaz v njej načelno preveri računalnik. Ni naključje, da sta dva matematika (Von Neumann in Turing), ki sta globoko prodrli v matematično logiko, sodelovala pri razvoju modernih računalnikov. Von Neumann je spoznal, da iz Turingovega dela sledi, da je možen univerzalen računalnik, in to spoznanje je prihranilo leta in milijone dolarjev pri razvoju.

Medigra med matematično logiko in računalništvom se nadaljuje. Vzgoja v matematični logiki je često pot k ustvarjalnemu delu v računalniških znanostih, in problemi, s katerimi se ukvarjajo računalniški znanstveniki in logiki, imajo včasih skupne določene poteze. Logike na primer zanima, če se dajo določeni problemi rešiti z algoritmi. Računalniški znanstveniki se vprašajo isto, le da bi radi vedeli, če se dajo določeni problemi rešiti z algoritmi v doglednem času na obstoječih ali projektiranih strojih, in če se dajo, kako se to naredi na najbolj ekonomičen način.

Težave v osnovah matematike, ki so vodile k razvoju matematične logike, še niso v celoti odpravljene. Obstoje različne šole in vidiki. Na primer, pri formuliranju eksistenčnih dokazov priznava ena šola, konstruktivisti, za veljavne samo dokaze z algoritmi, medtem ko priznava druga šola, formalisti, dokaz s protislovjem.

Teorija števil

Teorija števil je mogoče najstarejša matematična panoga. Zdi se, da so iznašli pozitivna cela števila obenem z jezikom, in najstarejše civilizacije, ki so zapustile pisane spomenike, so bile prevzete od lastnosti celih števil. V teoriji števil lahko probleme često podamo na

presenetljivo preprost način, razumljiv vsakemu šolarčku. Mnogi med njimi obravnavajo praštevila, to so tista cela števila, večja kot 1, ki so deljiva samo sama s seboj in z 1 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...). Tu je znamenit problem: Ali je vsako pozitivno sodo celo število vsota dveh praštevil? Rezultati poskusov to potrjujejo, kar je prvi opazil Goldbach v začetku osemnajstega stoletja. Toda Goldbachov problem je nerešen. Dokazali so samo, da je vsako celo število vsota največ 19 praštevil, in da obstaja tako veliko število, da je vsako liho celo število, ki ga presega, vsota treh praštevil.

Privlačnost, ki jo ima teorija števil za matematiko, je dvojna. Prvič, obstoji globoko, dasi redko z besedami izraženo, prepričanje, da, ko študiramo naravna števila, raziskujemo nekaj neminljivega in večnega. Nikjer v vesolju si ne moremo predstavljati inteligentnega mišljenja, ki ne bi prišlo do naravnih števil, kot jih mi poznamo.

Drugi vzrok za privlačnost teorije števil pa je, da njeni problemi, čeprav so videti preprosti, često zahtevajo za svojo rešitev najbolj zamotane in izumetničene metode, ki so dostopne matematiki. Značilen pojav zadnjih desetletij je uporaba verjetnostnega računa in prav v zadnjem času uporaba matematične logike v teoriji števil.

Moderna teorija števil ne obravnava samo celih števil, ampak tudi tako imenovana algebrainska cela števila, to je števila, ki so lahko koreni algebrainskih enačb, pri katerih so koeficienti cela števila, vodilni koeficient pa je 1.* Pri študiju algebrainskih celih števil često uporabljamo geometrijski jezik, ki se komaj loči od jezika algebrainske geometrije (glej spodaj).

Teorija števil je vedno imela eksperimentalen vidik. Zanimive lastnosti števil lahko odkrijemo s poskušanjem, čeprav se resničnosti trditve o neskončno mnogo številih ne da nikoli ugotoviti s tem, da preizkusimo posamezne primere, čeprav je le-teh lahko poljubno mnogo. Znameniti izrek o praštevilih, na primer, pravi, da je število praštevil med 2 in velikim številom x približno enako

$$x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} \right)$$

To je opazil Gauss, ki je izračunal dolge tabele praštevil. Dokaz je sledil mnogo pozneje in je v originalni obliki zahteval pripomočke iz teorije funkcij kompleksnih spremenljivk.

Eksperimentalni vidik je eden izmed vzrokov, zakaj je teorija števil med tistimi panogami čiste matematike, ki čutijo vpliv računalniške revolucije. Računalnik je dal nove možnosti za numerično eksperimentiranje. Številčni teoretiki ne uporabljajo računalnikov samo za ugibanje izrekov, ampak tudi za ugotavljanje rezultatov. Številne verjetne domneve so ovrgli z delom računalnikov in D. H. Lehmer je uporabljal računalnike, da je dokazal izreke, ki zahtevajo preveliko razvejitev na posamezne primere, da bi se dali dokazati s konvencionalnimi metodami.

Kombinatorna analiza

Kombinatorna analiza se ukvarja z množico »kombinatornih« problemov, od katerih mnogi pomenijo: »Na koliko načinov se da opraviti določena naloga?« Problemi so taki, da jih je lahko formulirati, a včasih zelo težko rešiti. Često imajo pomembne posledice za fizikalno teorijo. Navajamo primer:

Vzemimo šahovnico z n kvadrati na vsaki strani, kjer je n sodo število. Iščemo N_n različnih načinov, na katere se da šahovnica pokriti z dominami, pri čemer ena domina pokriva

* Na primer, $1 - \sqrt{2}$ in $1 + \sqrt{2}$ sta algebrainski celi števili, ker sta obe števili korena enačbe $x^2 - 2x - 1 = 0$.

dva kvadrata. Popolna rešitev tega problema za zdaj še ni znana; toda pred kratkim so ugotovili, da je za velik n število N_n enako $(1.338515\dots)^{(n^2)}$. Ta rezultat ima pomembne posledice v statistični mehaniki.

Eden najbolj znanih nerešenih problemov v matematiki, problem štirih barv, je kombinatoren. Ta domneva pravi, da se da vsak ravninski zemljevid pobarvati s štirimi barvami tako, da sta katerikoli dve mejni državi različno pobarvani. Kljub velikim naporom mnogih talentiranih matematikov ta domneva še ni potrjena; relativno lahek dokaz pokaže, da zadostuje pet barv.

Mnogo dosežkov moderne znanosti in tehnologije spodbuja obnovljeno zanimanje za kombinatorno analizo. Problemi nastajajo v genetiki, biokemiji, statistiki, pri kodiranju informacije, ki se prenaša h krožečim satelitom in nazaj, pri naporih za izdelavo učinkovitih vezij za elektronske računalnike in pri razvoju programerskih jezikov.

Algebra

Ko ljudje slišijo besedo »algebra«, se večina od njih spomni predmeta, ki so se ga učili v gimnaziji, in misli na probleme, ki obsegajo rešitev linearnih in kvadratnih enačb. Tisti deli algebre so dejansko stari 4000 let. Moderna algebra je v glavnem rezultat razvoja zadnjih 40 let. Toda njene korenine segajo precej nazaj.

Moderna algebra se ukvarja s študijem tako imenovanih »algebraičnih struktur«. Večino teh imamo lahko za posplošitve osnovnih struktur elementarne matematike: sistema celih števil, sistema realnih števil, sistema kompleksnih števil in sistema vektorjev (usmerjenih daljic) v prostoru.

Prednost pri obravnavanju sistemov, o katerih ne predpostavljamo ničesar razen zakonov seštevanja in množenja, je v tem, da velja vsaka trditev, ki je za njih dokazana, takoj za veliko množico področij v različnih vejah matematike. Isto velja za druge algebraične strukture. Osrednji problem v vsakem primeru je opisati strukturo splošnega sistema s strukturami posameznih primerov sistema.

Na kratko bomo pregledali nekaj pododdelkov moderne algebre.

Teorija obsegov. Moderna teorija obsegov se ukvarja z lastnostmi obsega K , ki ga naredimo iz obsega F , s tem da privzamemo korene polinomskih enačb s koeficienti v F . Ta teorija, ki je moderno nadaljevanje Galoisovega originalnega dela, je ena od najbolj razvitih in najbolj plodnih delov algebre.

Teorija kolobarjev. Kolobar je množica elementov, v kateri sta definirani dve operaciji, seštevanje in množenje, in ti operaciji zadoščata istim pogojem kot v obsegu, z dvema pomembnima izjemama: ne zahtevamo, da je vedno možno deljenje z elementom, ki je različen od 0, in dopuščamo, da je produkt dveh elementov odvisen od vrstnega reda, v katerem ju množimo. (Zadnje pomeni, da sta v kolobarju ab in ba lahko različna).

Kolobarji se ponavljajo naravno na mnogih področjih matematike. V analizi (glej spodaj) tvorijo kolobarje mnoge navadne množice funkcij in rezultati teorije kolobarjev prispevajo koristne izreke v analizi.

Linearna algebra. V devetnajstem stoletju je iz teorije sistemov linearnih algebraičnih enačb zrasla tako imenovana linearna algebra. Ta del algebre se verjetno bolj kot katerikoli drug uporablja v drugih panogah, med katerimi so tudi tehnika, fizika, statistika, numerična analiza in družbene znanosti. Prikladno je, da oblečemo linearno algebro v geometrijski jezik. Osnovni pojem je vektorski prostor nad obsegom. Standardni primer vektorskega prostora je množica navadnih geometrijskih vektorjev, kot jih uporabljajo v fiziki.

Vektorski prostor nad obsegom F je množica elementov, ki se imenujejo vektorji, za katere sta definirani dve operaciji: seštevanje dveh vektorjev in množenje vektorja z elementom iz F .

Linearna algebra je študij končno dimenzionalnih vektorskih prostorov. Predvsem se ukvarja z linearnimi transformacijami, s tistimi preslikavami vektorskega prostora vase, ki ohranjajo seštevanje in množenje. Vsako linearno transformacijo lahko predstavimo z matriko (kvadratno shemo števil ali elementov iz F), tako da algebro matrik lahko uporabimo za študij teorije linearnih transformacij. Rezultati linearne algebre, ki niso odvisni od končne dimenzije vektorskega prostora, imajo široko uporabo v funkcionalni analizi (glej spodaj).

Algebra. Asociativna algebra je končno razsežni vektorski prostor, ki je tudi kolobar. Študij takih algeber se je začel s Hamiltonovimi kvaternioni (1843). Prvi zaključeni rezultati so bili osnovni strukturni izreki, ki jih je dokazal leta 1907 Wedderburn. Zadnja leta so bili ti rezultati vključeni v rezultate o strukturi kolobarjev. Asociativna algebra se imenuje algebra z deljenjem, če je deljenje z elementi, različnimi od 0, vedno možno. Algebre z deljenjem so sestavni deli v teoriji algeber. Njihovo strukturo so na široko študirali, toda še sedaj ne obstoji popolna teorija strukture.

Neasociativna algebra je struktura, ki se pokorava istim pravilom kot algebra, razen tega, da je produkt treh elementov lahko odvisen od tega, katera dva najprej množimo. Dva razreda takih algeber sta posebno pomembna. Prvi razred so Liejeve algebre, pri katerih katerikoli trije x, y, z zadoščajo identiteti $xy + yx = x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$. Take algebre so osnovne za študij zveznih grup in v zadnjih letih igrajo pomembno vlogo v teoretični fiziki. Drugi razred algeber pa so Jordanove algebre, ki so prvotno nastale v kvantni fiziki. Te so karakterizirane z identiteto $xy - yx = x(yx^2) - (xy)x^2 = 0$.

(Nadaljevanje sledi)

UTRINEK

TOTALITARISTIČNO NAČELO

V zadnjem času večkrat slišimo o *totalitarističnem načelu*, po katerem je obvezno vse, kar ni izrecno prepovedano. Kaže, da je to zelo splošno načelo v fiziki prvi uporabil M. Gell-Mann pred kakimi dobrimi desetimi leti, ko je trdil, da obstajajo v naravi vsi pojavi in delci, ki niso izrecno prepovedani. Zdaj se je v šegavi pravdi o tem, kdo je načelo odkril, pokazalo (Phys. Today **23** (10), 79 (1970)), da ga je poznal vsaj že pisatelj T. H. White. V njegovi pravljici »Meč v kamnu« (1939) o mladeniču, ki je postal legendarni kralj Artur, je teklo po tem načelu življenje v mravljišču.

DIFRAKCIJA NEVTRONOV

V. DIMIC

Institut »Jožef Stefan«, Ljubljana

UDK 1923

V članku je na kratko podana teorija sipanja žarkov X in nevtronov. Z namenom, da pokažemo pomembnost uklanjanja nevtronov pri raziskavah lastnosti snovi, smo opisali nekaj opravljenih poskusov. Podobne poskuse delamo tudi ob reaktorju TRIGA v Ljubljani, zato je bolj podrobno opisana eksperimentalna tehnika.

Neutron Diffraction

Short description of X-rays and neutron scattering theory is given. To illustrate neutron diffraction as an important tool in the study of the properties of matter, some examples of investigations are described. At the reactor TRIGA in Ljubljana neutron diffraction studies are already in progress therefore the experimental technique is discussed more in detail.

1. Uvod

V letu 1912 je Laue prvič napravil poskus z žarki X, ki ga poznamo pod imenom difrakcija žarkov X. S tem se je odprlo novo raziskovalno področje, ki je dalo neštete podatke o strukturi snovi.

Za strukturne raziskave potrebujemo valovanje z valovno dolžino okoli $\lambda = 1\text{\AA}$, ki je istega reda, kot so med-atomske razdalje v kristalih. Najprimernejše valovanje so zato žarki X ter valovanje, ki ga pripišemo gibajočim nevtronom in elektronom.

Za elektromagnetno valovanje velja naslednja zveza med energijo fotona in njegovo valovno dolžino: $E = h\nu = hc/\lambda$, kjer je h Planckova konstanta. Od tod dobimo:

$$\lambda(\text{\AA}) = 12 \cdot 4/E(\text{keV}) \quad (1)$$

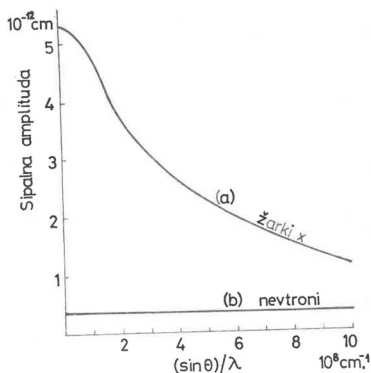
Ko pade elektromagnetno valovanje na kristal, se gibanje elektronov v atomih pospeši. To dodatno energijo elektroni oddajo v obliki sevanja. Če je frekvenca tega sevanja reda velikosti 10^{15} Hz (optične frekvence), bomo pri interakciji valovanja z atomi kristala dobili le navadni optični lom. Pri večjih frekvencah (10^{15} Hz) pa pride še do uklanjanja vpadnega valovanja v primeru, ko je izpolnjen Braggov pogoj:

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (2)$$

kjer je d razdalja med vzporednimi atomskimi ravninami, 2θ je kot med vpadnim in sipanim žarkom in λ valovna dolžina vpadnega valovanja. Ko je izpolnjen Braggov pogoj, dobimo pri določenih kotih θ ojačitev valovanja, ker so delna valovanja posameznih atomov koherentna in interferirajo.

V primeru žarkov X so sipalni centri *elektroni*, ki zaradi svojega naboja vplivajo na vpadno sevanje. Compton in Allison¹ sta ugotovila, da je sipalna amplituda sorazmerna vrstnemu številu Z , če so uklonski koti majhni. V tem primeru so fazne razlike med žarki, ki se sipljejo na različnih točkah elektronskega oblaka, zelo majhne. Ko narašča kot θ med vpadno in sipano smerjo elektromagnetnega valovanja, se sipalna amplituda naglo zmanjšuje, kar pomeni, da se zmanjšuje intenziteta sipanega valovanja. Pojavijo se namreč fazne razlike med žarki, ki se sipljejo na različnih točkah elektronskega oblaka. Za določeni

atom je odvisno to padanje od izraza $\sin \theta/\lambda$, popiše pa ga atomski sipalni faktor. Elektronski oblak, ki siplje žarke X, ima namreč razsežnosti, ki so istega reda velikosti, kot je valovna dolžina vpadnega sevanja. Krivulja (a) na sliki 1 kaže odvisnost sipalne amplitude žarkov X, ki se sipljejo na kaliju, od izraza $\sin \theta/\lambda$.



Sl. 1: Sipalni amplitudi za žarke X in nevtrone za atom kalija v odvisnosti od sipalnega kota

2. Sipanje termičnih nevtronov

Difrakcija nevtronov je v mnogočem podobna difrakciji žarkov X. Vendar so med obema metodama določene razlike, katere si bomo ogledali v tem poglavju. Pri tem bomo tudi odgovorili na vprašanje: »Kakšne prednosti nam nudijo raziskave z nevtroni v primerjavi z žarki X?«.

Najprimernejši izvori nevtronov so jedrski reaktorji. Iz kanalov reaktorja izhajajo termični nevtroni, katerih energijska porazdelitev je maxwellska z vrhom pri valovni dolžini okrog 1 Å. Nevtronom namreč pripišemo valovne lastnosti, valovna dolžina λ teh delcev je podana za De Broglijevo relacijo:

$$\lambda = h/mv = h/p \quad (3)$$

kjer je h Planckova konstanta, m in v sta masa in hitrost nevtronov, p pa gibalna količina. Ker je energija nevtrona enaka:

$$E = p^2/2m \quad (4)$$

dobimo naslednjo zvezo med energijo nevtrona in njegovo valovno dolžino:

$$\lambda = h/\sqrt{2mE} \quad (5)$$

$$\text{ali } \lambda(\text{\AA}) = 0,28/\sqrt{E(\text{eV})} \quad (6)$$

2.1. Sipalna amplituda za nevtrone

Ko nevtroni padejo na neko snov, se sipljejo na *jedrih*. Tako smo spoznali zelo pomembno razliko med nevtroni in žarki X: le-ti se namreč sipljejo na elektronih. Obstajajo seveda še druge razlike med obema vrstama sevanja. Te razlike bomo najlažje spoznali, če bomo nekoliko bolj podrobno opisali sipalno amplitudo, obenem nam bodo pa postale bolj jasne nekatere zakonitosti, ki veljajo za sipanje nevtronov.

Naj pade ravni val nevtronov na jedro. Ta val popišemo z valovno funkcijo:

$$\psi = e^{ikz} \quad (7)$$

Sipani val je krogelno simetričen in ima obliko:

$$\psi = -(b/r)e^{ikr} \quad (8)$$

kjer je r razdalja od jedra do točke, kjer merimo sipani val, $k = 2\pi/\lambda$ pa valovno število za nevtrone z valovno dolžino λ . Količina b ima dimenzijo dolžine, zato se imenuje »sipalna dolžina« ali »sipalna amplituda« jedra. Skoraj pri vseh jedrih je amplituda realno število (izjema so jedra z zelo veliko absorpcijo za nevtrone, kot npr. kadmij in bor), ki ima lahko pozitiven ali negativen predznak. Večini jeder pripada sipalna amplituda s pozitivnim predznakom, kar pomeni (glej en. 8), da se pri sipanju spremeni faza za 180° med vpadnim in sipanim žarkom. Negativni predznak pa pomeni, da se faza ne spremeni.

S pomočjo sipalne amplitude določimo sipalni presek σ , ki je definiran z razmerjem med tokom sipanih nevtronov in vpadnim nevtronskim fluksom:

$$\sigma = 4\pi r^2 v \frac{|(b/r)e^{ikr}|^2}{v |e^{ikz}|^2} = 4\pi b^2 \quad (9)$$

kjer je v hitrost nevtronov. Tako smo spoznali zelo važno povezavo med presekom in sipalno amplitudo.

Pri izpeljavi izraza za presek smo predpostavili, da je sipalno jedro vezano. V tem primeru se v trdni snovi ob trku nevtronom ne spremeni energija (elastično sipanje). Drugače je seveda, če se jedra prosto gibljejo (v plinih). Prav lahko se dokaže, da velja naslednje razmerje:

$$\sigma_n = \left(\frac{A}{A + 1} \right)^2 \cdot \sigma_v \quad (10)$$

kjer je σ_n sipalni presek za nevezano jedro, σ_v presek za vezano jedro in A masno število.

Še nekaj ne smemo zamolčati: jedra imajo spin I , enačba (9) pa velja le v primeru, ko ima jedro spin $I = 0$ in ni prisotnih različnih izotopov. Ako ima sipalno jedro spin I , potem tvori z nevtronom s spinom $1/2$ sestavljeni jedri s spinom $I + 1/2$ ali $I - 1/2$. Zato pripada jedru sipalna amplituda b_1 (spina nevtrona in jedra sta paralelna) ali b_2 (neparalelna spina), opravka imamo torej z dvema vrstama sipanja, s spinsko nekoherenco. Skupni presek za jedro je tako vsota dveh členov:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{koh} + \sigma_{nekoh} \quad (11)$$

kjer je σ_{koh} presek za koherentno sipanje (sipanje, pri katerem nastopijo interferenčni efekti), σ_{nekoh} pa presek za nekoherentno sipanje.

Vpeljimo še uteži za posamezni jedrski stanji:

$$w_1 = (I + 1)/(2I + 1) \quad (12)$$

$$w_2 = I/(2I + 1) \quad (13)$$

Za preseke dobimo tako naslednje izraze:

$$\sigma_{koh} = 4\pi(w_1 b_1 + w_2 b_2)^2 \quad (14)$$

$$\sigma_{nekoh} = 4\pi w_1 w_2 (b_2 - b_1)^2 \quad (15)$$

$$\sigma_{tot} = 4\pi(w_1 b_1^2 + w_2 b_2^2) \quad (16)$$

Iz enačbe (14) vidimo, da se nevtroni sploh ne sipljejo koherentno, če sta oba člena enaka in imata nasproten predznak. Podoben primer nastopi pri vodiku, kar bomo videli v poglavju 2.2.1.

Tako smo izpeljali izraze za sipalne preseke, ki veljajo v primeru, ko ima jedro spin, nič pa nismo omenili vpliva izotopov. Mnoga jedra namreč sestojijo iz enega ali več izotopov. Vsak izotop ima svojo značilno vrednost za sipalno amplitudo b oziroma b_1 in b_2 , če pripada izotopu spin I . Zato je koherentna sipalna amplituda za element enaka $\bar{b}_r$: to je povprečna vrednost za sipalno amplitudo za element, povprečje je vzeto čez vse možne izotope, od katerih ima izotop r sipalno amplitudo $\bar{b}_r$. Koherentni presek je potem enak: $\sigma_{koh} = 4\pi(\bar{b}_r)^2$ in določa intenziteto uklonjenih nevtronov na kristalu (Braggov odboj).

Zaradi neurejene porazdelitve izotopov se del nevtronov siplje neurejeno. Presek za to sipanje (izotopsko nekoherentno) je enak:

$$\sigma_{neko} = 4\pi |\bar{b}_r^2 - (\bar{b}_r)^2| \quad (17)$$

Sedaj moramo narediti še korak naprej: upoštevati je treba, da se sipljejo nevtroni na več atomih, ki sestavljajo osnovno celico, in ne na enem jedru, kot smo predpostavljali na začetku tega poglavja. Sešteti moramo torej sipane nevtronske valove na raznih atomih osnovne celice:

$$\psi = - \sum_{\rho} (b_{\rho}/r) e^{ikr} (e^{i\vec{\rho} \cdot \vec{k}_0 - \vec{k}}) \quad (18)$$

kjer je ρ vektor od začetka koordinatnega sistema do jedra, $\vec{k}_0$ in $\vec{k}$ sta valovna vektorja, ki pripadata nevtronom pred in po sipanju, b_{ρ} pa sipalna amplituda za posamezno jedro. Izraz $\exp(i\vec{\rho} \cdot \vec{k}_0 - \vec{k})$ upošteva fazne razlike med komponentami sipalnega valovanja na posameznih atomih osnovne celice in je enak: $\exp/2\pi i(hx/a_0 + ky/b_0 + lz/c_0)$, kjer so x, y, z koordinate jedra, a_0, b_0, c_0 so dimenzije osnovne celice in h, k, l Millerjevi indeksi, ki pripadajo določeni smeri ($\vec{k}_0 - \vec{k}$). V kristalu, ki je sestavljen iz mnogih osnovnih celic, bomo tako dobili sipane nevtrone le v primeru, če se delna valovanja, ki se odbijejo na posameznih osnovnih celicah, med seboj ojačijo.

Ako nas zanima amplituda sipanega nevtronskega vala v enotni razdalji od jedra, enačbo (18) zapišemo:

$$\psi = - \sum_{\rho} b_{\rho} \exp 2\pi i(hx/a_0 + ky/b_0 + lz/c_0) \quad (19)$$

Od tod pa sledi izraz za presek, ki velja za sipanje nevtronov na jedru v enoto prostorskega kota Ω (diferencialni presek):

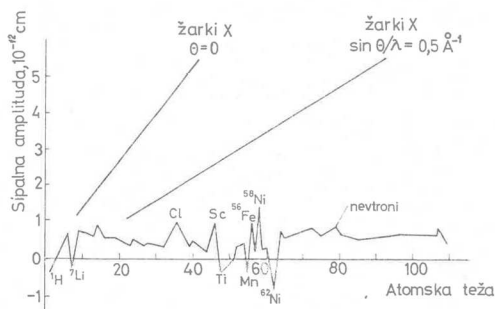
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{hkl} = \frac{1}{N_0} \left| \sum_{\rho} b_{\rho} \exp 2\pi i(hx/a_0 + ky/b_0 + lz/c_0) \right|^2 \quad (20)$$

kjer je N_0 celotno število jeder v kristalu.

Izraz $\sum_{\rho} b_{\rho} \exp 2\pi i(hx/a_0 + ky/b_0 + lz/c_0)$ ima svoje ime: to je strukturni faktor F za osnovno celico kristala. Če se sedaj vprašamo, koliko nevtronov se ukloni na ravnini ($h k l$) v časovni enoti v kot θ , bomo že znali povedati odgovor: to število nam pove kvadrat strukturnega faktorja F_{hkl}^2 . F_{hkl} je amplituda uklonjenega nevtronskega žarka na ravni ($h k l$).

Vrednosti za sipalno amplitudo nevtronov b ne moremo teoretično izračunati, kot sta to napravila za žarke X Compton in Allison,¹ ker ne poznamo v zadostni meri jedrske strukture. S pomočjo raznih poskusov so bile vrednosti sipalnih amplitud za elemente izmerjene, rezultate vidimo na sl. 2. Sipalna amplituda se spreminja od elementa do elementa brez reda. Iz podanih vrednosti za b na sliki 2 pridemo do naslednjih zaključkov:

a) Amplituda za vodik je $0.38 \cdot 10^{-12}$ cm, za uran pa $0.85 \cdot 10^{-12}$ cm, kar je v primeru z vrednostmi, ki veljajo za žarke X, majhna razlika, čeprav se oba elementa zelo razlikujeta v masi. Ali drug primer: sipalna amplituda za svinec je le za 50% večja kot za ogljik. V primeru žarkov X je razmerje 20 : 1. Le z nevtroni torej lahko opazimo lahke elemente v prisotnosti težjih.



Sl. 2: Nevtronska sipalna amplituda v odvisnosti od atomske teže. Za primerjavo je prikazano povečevanje sipalne amplitude za žarke X

b) Sosednja elementa v periodni razvrstitvi, npr. nikelj in kobalt, imata zelo različne vrednosti za sipalno amplitudo. Z žarki X seveda sosednjih elementov ne moremo ločiti.

c) Omenili smo že, da imajo celo različni izotopi elementa (npr. Ni^{58} , Ni^{62}) mnogokrat različne vrednosti za sipalno amplitudo.

Nevtronska sipalna amplituda torej ne narašča z vrstnim številom in ne zavisi od sipalnega kota (slika 1, krivulja b), kot je to primer za žarke X, ker so razsežnosti jeder majhne v primerjavi z valovno dolžino nevtronov.

Po tem uvodu si oglejmo nekaj primerov opravljenih strukturnih raziskav s termičnimi nevtroni! Ob različnih primerih bomo najlažje pokazali, kakšne možnosti nam nudijo nevtroni.

2.2.1. Določevanje položaja vodika

Omenili smo že, da so nevtroni nepogrešljivi pri strukturnih raziskavah spojin, ki vsebujejo lahke elemente, saj žarke X v največji meri uklanjajo le težka jedra. Poleg tega ni gostota naboja pri lahkih jedrih porazdeljena krogelno simetrično zaradi vpliva vezi med atomi. Zato se razporeditev atomov, določena z žarki X, nekoliko razlikuje od resničnih razporeditev jeder.

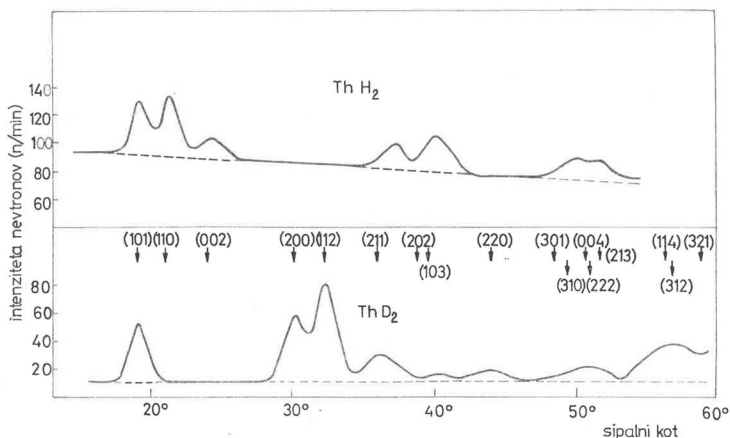
Z nevtroni nimamo teh težav, zato so v zadnjih dveh desetletjih določili z nevtronsko difrakcijo strukturo več kot stotim spojinam, ki so vsebovale lahke elemente (v pretežni večini vodik).

Hidridi alkalijskih kovin so bile prve spojine, raziskane z uklanjanjem nevtronov.³ Izkazalo se je, da imajo strukturo NaCl tipa. S temi raziskavami so prvič določili položaj vodikovih atomov in znak ter vrednosti za koherentni sipalni amplitudi za vodik in devterij.

Meritve difrakcije nevtronov na prahu ThH_2 in ThD_2 ⁴ nam lepo ilustrirajo uporabnost te metode. Sliko elastično sipanih nevtronov na obeh spojinah kaže sl. 3, kjer opazimo, da se uklonski sliki med seboj razlikujeta. Vodik ima namreč negativno sipalno amplitudo ($-0,38 \cdot 10^{-12}$ cm), devterij pa pozitivno ($0,65 \cdot 10^{-12}$ cm). S primerjavo obeh slik določimo fazne kote za strukturne faktorje.

Na sliki 3 vidimo, da je ozadje pri ThH_2 dosti večje kot pri ThD_2 . Za vse snovi, ki vsebujejo vodik, je namreč značilno precejšnje difuzno sipanje, ki se pojavi zaradi velike spinske

nekoherence vodika. Jedro vodikovega atoma ima namreč od nič različen spin: $I = 1/2$, zato pripadata protonu dve sipalni amplitudi: $b_1 = 1,07 \cdot 10^{-12}$ cm (ko sta spina protona in nevtrona paralelna) in $b_2 = -4,75 \cdot 10^{-12}$ cm (za antiparalelna spina). Ako vstavimo te vrednosti v enačbe (14), (15), (16), dobimo za preseke naslednje vrednosti: $\sigma_{tot} = 81,5$ barn, $\sigma_{necoh} = 80$ barn in $\sigma_{koh} = 1,79$ barn ter $b_{koh} = -0,38 \cdot 10^{-12}$ cm. Vodik ima torej zelo velik nekoherentni in majhen koherentni presek. Zato so meritve na vzorcih, ki vsebujejo vodik, precej zahtevne, devterirani vzorci pa so mnogo bolj primerni.



Sl. 3: Nevtronska difrakcija na polikristalu ThH_2 in ThD_2 .

Monokristal KHF_2 je bila prva spojina z vodikom, ki je bila raziskana z nevtroni.⁵ Obenem je bila prvič narejena Fourierjeva sinteza s pomočjo nevtronskih difrakcijskih podatkov. Te Fourierjeve projekcije predstavljajo »jedrsko gostoto« osnovne celice, podobno kot lahko dobimo s Fourierjevo projekcijo elektronsko gostoto iz difrakcijskih podatkov, izmerjenih z žarki X.

V kristalih so atomi razporejeni v prostorsko urejeni kristalni mreži. Ta razporeditev je periodična, saj se ponovi v vsaki osnovni celici, zato lahko kristal popišemo s trodimenzionalno Fourierjevo vrsto za elektronsko gostoto. Lahko namreč rečemo, da kristal sestoji iz zvezno porazdeljene elektronske gostote, ki ima maksimum v središču atoma, vrednost nič pa v prostoru med atomi. Fourierjeve komponente te porazdelitve so kar strukturni faktorji, ki pripadajo različnim odbojem, saj velja enačba:

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l F_{(hkl)} \exp \left\{ -2\pi i \left(\frac{hx}{a_0} + \frac{ky}{b_0} + \frac{lz}{c_0} \right) \right\} \quad (21)$$

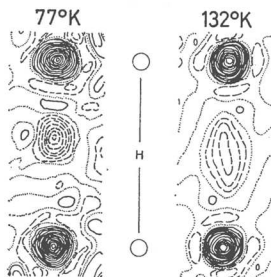
Ako želimo izračunati vsoto v en. (21), moramo opraviti zelo veliko računskega dela. Že računanje koeficientov iz izmerjenih intenzitet je zelo zamudno, ker moramo upoštevati vse odboje. V veliki meri pa lahko zmanjšamo računsko delo, če projiciramo strukturo kristala na ravnino. V tem primeru dobimo naslednji izraz za gostoto:

$$\rho(x, y) = \int_0^c \rho(x, y, z) dz = \frac{1}{A_c} \sum_h \sum_k F_{(hko)} \exp \left\{ -2\pi i \left(\frac{hk}{a_0} + \frac{ky}{b_0} \right) \right\} \quad (22)$$

kjer je A_c površina projekcije enotne celice. Namesto $F_{(hkl)}$ moramo pri projekcijah elektronske oziroma jedrske gostote poznati torej le $F_{(kho)}$.

Z opisano metodo so določili položaj vodikovih atomov za celo vrsto vodikovih spojin.

Za primer vzemimo raziskavo ferroelektrične strukture KH_2PO_4 z difrakcijo nevtronov.⁶ Pri tej snovi, ki ima Curiejevo temperaturo pri $T_c = 123^\circ \text{K}$, tvorijo vodikovi atomi vez s kisikovimi atomi skupine PO_4 . Ferroelektričnost v KH_2PO_4 je posledica spremembe položaja vodikovega atoma pri T_c , kar ustvari električni dipolni moment v osnovni celici.



Sl. 4: Fourierjeva projekcija nevtronske sipalne gostote za KH_2PO_4 nad in pod T_c . Vodikov atom je predstavljen s prekinjenimi črtami, kisikov pa z neprekinjenimi

Na sliki 4 vidimo Fourierjevo projekcijo nevtronske sipalne gostote nad in pod T_c . Lepo se vidi položaj vodikovega atoma v obeh fazah. Na sliki je vodikov atom predstavljen s prekinjenimi črtami, kisikovi atomi pa z neprekinjenimi. Rezultati meritev pri višji temperaturi (nad T_c) kažejo, da je H atom v časovnem povprečju v središču vezi, pri nižji temperaturi (feroelektrična faza) pa je položaj H atoma premaknjen proti enemu od obeh kisikovih ionov.

2.3. Raziskave magnetnih lastnosti

Nevtroni imajo magnetni moment in ko se gibljejo skozi snov, ki vsebuje atome z magnetnimi momenti različnimi od nič (npr. Fe, Co, Ni itd.), pride do interakcije med magnetnim momentom nevtrona in atoma: dobimo magnetno sipanje nevtronov. Difrakcija nevtronov je torej nova in zelo pomembna metoda za raziskovanje lastnosti magnetnih snovi v svetu atomov.

Ako poznamo spinsko stanje atoma, lahko izračunamo njegovo magnetno sipalno amplitudo p iz enačbe:

$$p = \frac{e^2 \mu}{mc^2} S \cdot f \quad (23)$$

kjer je S spinsko kvantno število, μ je magnetni moment nevtrona in f je atomski sipalni faktor za elektrone z nekompenziranim spinom (magnetni elektroni). Izkaže se, da ima p vrednost, ki je enakega velikostnega reda, kot je jedrska sipalna amplituda b (10^{-12} cm). Velikost magnetne sipalne amplitude je odvisna od položaja, orientacije in velikosti magnetnih momentov atomov.

3. Termično difuzno sipanje (TDS)

Pri dosedanjem obravnavanju elastičnega sipanja nevtronov smo predpostavili, da je trdna snov sestavljena iz množice atomov, ki mirujejo v določenih legah, ravno tako se ne spreminjajo smeri magnetnih momentov. Ko nevtroni zadevajo v te mirujoče atome, ne izgubijo niti ne pridobijo na energiji. To seveda ni pravilna predstava o trdni snovi,

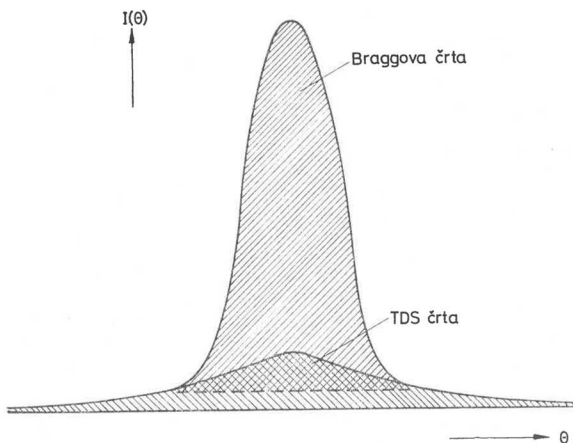
saj atomi v snovi ne mirujejo, ampak nihajo okoli ravnovesnih leg. Nihanje je tem izrazitejše, čim višja je temperatura: to je »termično gibanje«. Ko se nevtroni sipljejo na atomih, pridobijo ali izgubijo na energiji zaradi interakcije z vibracijami. Pravimo, da se atomi sipljejo neelastično in mnoge koristne informacije lahko dobimo iz meritev spektrov neelastično sipanih nevtronov⁷.

Že leta 1914 je Debye⁸ pojasnil vpliv termičnega gibanja atomov na elastično sipanje žarkov X. Računi so pokazali, da se zaradi neurejenega termičnega gibanja atomov zmanjša intenziteta Braggovega odboja za faktor e^{-2W} , kjer je:

$$W = 8\pi^2 \bar{u}^2 \sin^2 \theta / \lambda^2 \quad (24)$$

V enačbi (24) je $\bar{u}^2$ povprečni kvadrat odmika atomov vzdolž normalne na odbojno ravnino.

Poleg tega je Debye ugotovil, da se za toliko poveča splošno difuzno ozadje, za kolikor se zmanjša intenziteta Braggove črte. To ozadje ni porazdeljeno enakomerno čez recipročni prostor, temveč se pojavi v širokih maksimih s središčem v recipročni mrežni točki (sl. 5).



Sl. 5: Črta sipanih nevtronov, ki je sestavljena iz elastično in neelastično sipanih nevtronov (Braggova in TDS črta)

S podrobnim študiranjem difuznega ozadja pri žarkih X dobimo podatke o vibracijskih frekvenčnih spektrih in disperzijskih krivuljah za razširjanje elastičnih valov vzdolž glavnih kristalografskih osi.

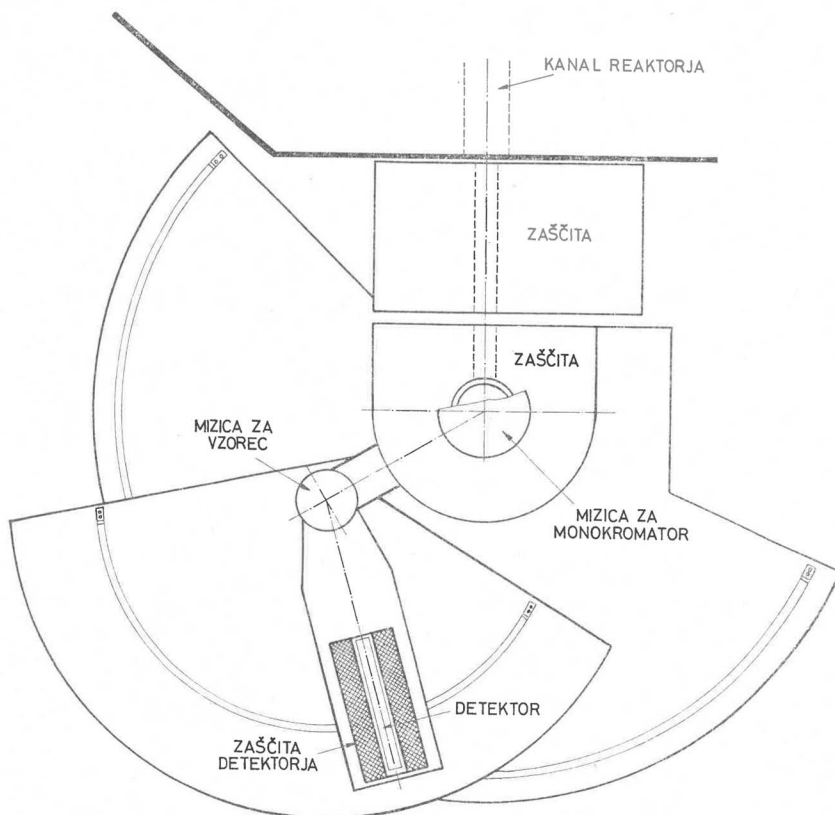
Leta 1944 je Weinstock⁹ pokazal, da se tudi nevtronska sipalna amplituda zmanjša za faktor e^{-W} . Ta redukcijski faktor je natančno takšen, kot velja za žarke X. Efektivna koherentna sipalna amplituda je torej be^{-W} . Pri uklanjanju nevtronov se zmanjša intenziteta le-teh zaradi termičnega gibanja za del $(1 - e^{-2W})/4\pi$. Ta del se siplje neelastično. Za primer vzemimo sipanje nevtronov z $\lambda = 1\text{Å}$ na svincu, za katerega je nekoherentni presek zanemarljivo majhen.¹⁰ Braggovo koherentno sipanje se zmanjšuje z večanjem sipalnega kota θ (odvisno od Debye-Wallerjevega faktorja e^{-2W}), neelastična komponenta pa je sorazmerna $(1 - e^{-2W})$.

K ozadju difrakcijskih črt prispevajo torej naslednji prispevki: termično difuzno sipanje, spinsko nekoherentno sipanje in izotopsko nekoherentno sipanje (poglavje 2.1.). Ob tej priliki naj še omenimo, da se tudi žarki X sipljejo nekoherentno, in to zaradi Comptonovega efekta in fotoefekta, ker se pri tem spremeni valovna dolžina sipanega sevanja.

4. Eksperimentalna tehnika

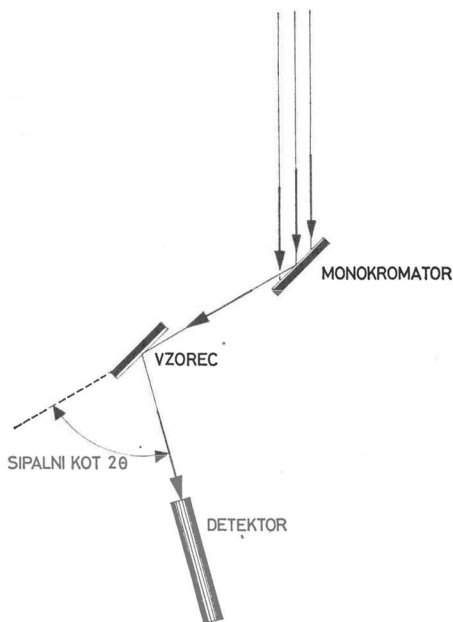
Leta 1936 je bil prvič napravljen poskus, ki je pokazal, da se tudi nevtroni uklanjajo. Pri tem so uporabili nevtrone iz radij-berilijevega izvora, zaprtega v parafinskem modulatorju. Število termičnih nevtronov je bilo seveda zelo majhno in s temi izvori ni bilo mogoče opraviti resnejših raziskav. V prvih povojnih letih so postali reaktorji zelo močni izviri termičnih nevtronov in že leta 1945 je bil postavljen prvi nevtronski difraktometer.¹¹

Tako se je razvila tehnika nevtronske difrakcije, ki je precej podobna difrakciji žarkov X, se pa seveda obe metodi v mnogočem razlikujeta, kot smo videli v prejšnjih poglavjih. Velika razlika je npr. že v načinu, kako dobimo monokromatski žarek: pri žarkih X je to kar karakteristično sevanje iz elementa tarče, ker se to sevanje pojavlja v obliki ostrih črt (za baker je ta črta pri $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$). Čisto drugačne razmere imamo pri nevtronih. Le-ti izhajajo iz reaktorja s hitrostmi, ki so porazdeljene po zvezni Maxwellovi porazdelitvi, kar pomeni, da je potrebno izbrati iz žarka nevtrone z željeno hitrostjo oziroma valovno dolžino. To naredimo s pomočjo monokromatorja. V ta namen se najpogosteje uporabljajo monokristali svinca, bakra, aluminija ter v zadnjem času pirolitski grafit. Ako postavimo monokristal svinca, ki je rezan tako, da je površina vzporedna z (111) kristalografsko ravnino, v položaj z npr. $\theta = 11^\circ$, dobimo v odbitem curku nevtrone z $\lambda = 1,09 \text{ \AA}$, kar lahko izračunamo iz en. (2).



Sl. 6: Eksperimentalna naprava za difrakcijo nevtronov

Za difrakcijo nevtronov uporabljamo napravo, ki se imenuje »dvoosni kristalni spektrometer« ali »nevtronski difraktometer«. Na sl. 6 vidimo ta instrument. Ko priletijo nevtroni skozi kolimator, ki je postavljen v kanalu reaktorja, padejo na monokromator, na katerem se odbijejo v določeni kot le nevtroni z določeno valovno dolžino (sl. 7). Okoli tega kristala



Sl. 7: Shematski prikaz eksperimenta

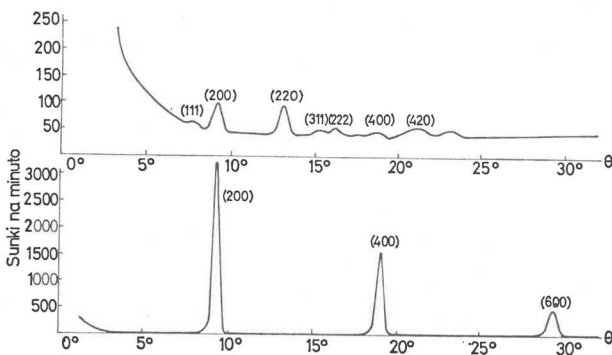
je postavljena debela zaščita iz parafina, ki prepreči uhajanje nevtronov v okolico. Ti monokromatski nevtroni letijo skozi drugi kolimator, ki je dolg okoli 50 cm in ima kolimacijski kot 20—30 minut. Na vzorcu se nevtroni sipljejo v določene kote odvisno od medatomskih razdalj (en. 2). Z nevtronskim detektorjem (BF_3 števec) v parafinski zaščiti izmerimo kotno porazdelitev sipanih nevtronov, saj se ta detektor počasi vrti okoli vzorca. Ločljivost nevtronskega difraktometra $\Delta\lambda/\lambda$ je odvisna od kolimacijskega kota β in sipalnega kota. Velja namreč enačba:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \beta \operatorname{ctg} \theta \quad (25)$$

Pri meritvah lahko uporabljamo vzorce v obliki prahu ali monokristale. Na prahu se monokromatski vpadni žarek odbije tako, da pri tem ustvari vrsto Debye-Scherrerjevih stožcev, katerih odprtina je odvisna od razdalje ravnin, na katerih se nevtroni odbijajo in valovne dolžine. Pri tem preštejemo le okoli 1% vseh v stožec odbitih nevtronov. Pri raziskavah potrebujemo 1—2 cm³ prahu v primeru, če je nevtronski fluks reaktorja okoli 10¹³ nevtronov/cm² sek. Zaradi boljše kotne ločljivosti (večkrat se pojavijo črte zelo skupaj) števec ne sme biti preblizu vzorca, zato je to eden od vzrokov, da so nevtronski difraktometri veliko večjih dimenzij kot rentgenske aparature. Raziskave na prahu pridejo seveda v poštev takrat, ko ne moremo dobiti primerno velikih monokristalov, saj je razmerje med ozadjem in sipanim žarkom pri prahu zelo veliko. K ozadju namreč prispevajo vsi atomi,

k Braggovemu refleksu pa le tiste ravnine, ki so pravilno orientirane. Pri monokristalih pa prispeva k uklonski črti celoten volumen kristala in to v primeru, ko je le-ta v takšnem položaju, da je izpolnjen Braggov pogoj.

Pri meritvah na monokristalih potrebujemo kristale velikosti najmanj 20 mm^3 . Pri tem je števec postavljen zraven vzorca, saj ne potrebujemo dobre kotne ločljivosti. Števec se namreč giblje okoli vzorca s kotno hitrostjo, ki je še enkrat večja, kot je kotna hitrost vrtenja kristala in pri tem registrira le odboje zaporednih redov iz ene ravnine, npr. (310), (620), (930) itd. Ako hočemo izmeriti ostale odboje, moramo postaviti merjeni kristal v drugo lego.



Sl. 8: Primerjava difrakcije nevtronov na prahu in monokristalu natrijevega bromida

Slika 8 lepo ilustrira razlike v uklonskih slikah, posnetih na prahu in monokristalu natrijevega bromida.

5. Zaključek

Na koncu še enkrat pogledjmo bistvene razlike med uklanjanjem žarkov X in nevtronov.

Žarki X imajo veliko prednost pred nevtroni v pogledu intenzitete. V prvem primeru pade na vzorec pri običajnem poskusu najmanj 10^{10} kvantov/ cm^2 sek, v drugem pa le 10^6 do 10^5 nevtronov/ cm^2 sek. Stroški za aparature so neprimerno večji v primeru nevtronov kot v primeru žarkov X. Zato pridejo raziskave z nevtroni v poštev le takrat, ko nam žarki X ne morejo v zadostni meri posredovati podatkov. Med obema metodama je namreč bistvena razlika v načinu, kako pride do sipanja: nevtroni se izotropno sipljejo na jedrih, žarki X pa na elektronih (zato sipalna amplituda pada s sipalnim kotom), poleg tega imajo nevtroni še magnetni moment, kar izkoriščamo pri magnetnih meritvah.

Dostikrat se pokažejo nevtroni bolj uporabni kot žarki X zaradi naslednjih dveh lastnosti: območje valovnih dolžin za žarke X je omejeno od 2 Å do $0,5 \text{ Å}$, pri nevtronih pa od 10 Å do $0,5 \text{ Å}$, velika razlika je tudi v absorpcijskem koeficientu, ki znaša za žarke X od 10 do 10^2 za nevtrone pa 10^{-1} . Pri uklanjanju nevtronov pa je potrebna večja korektura za sekundarno ekstinkcijo, ravno tako je ozadje med uklonskimi maksimi večje pri nevtronskem sipanju.

Iz povedanega lahko zaključimo, da v primeru, ko združimo obe metodi, dobimo neprimerno več podatkov kot le z eno samo metodo. Ker je rentgenska metoda pri nas precej razvita, smo se zato odločili, da ob reaktorju TRIGA v Ljubljani postavimo nevtronski difraktometer, s katerim smo prve meritve že opravili.

LITERATURA

- ¹ A. Compton, S. Allison, X Rays and Theory and Experiment, New York, Van Nostrand, 1935.
² J. Cassels, Progress in Nuclear Physics, I, Butterworth-Springer, 1950.
³ G. Shull, E. Wollan, G. Morton, Phys. Rev. 73, 830, 1948.
⁴ R. Rundle, C. Shull, E. Wollan, Acta Cryst. 5, 22, 1952.
⁵ S. Peterson, H. Levy, Journal of Chem. Phys. 11, 704, 1958.
⁶ G. Bacon, R. Pease, Proc. Roy. Soc. A 230, 359, 1955.
⁷ V. Dimic, Obz. mat. fiz. 15, 1, 37, 1968.
⁸ P. Debye Ann. d. Physik, 43, 49, 221, 1914.
⁹ R. Weinstock, Phys. Rev. 65, 1, 1944.
¹⁰ P. Mitchell, N. Powers, Phys. Rev. 50, 486, 1936.
¹¹ W. Zinn, Phys. Rev. 71, 752, 1947.

DODATNA LITERATURA

- ¹² G. Bacon, Neutron Diffraction, Clarendon Press, Oxford, 1962.
¹³ G. Shull, E. Wollan »Application of Neutron Diffraction to Solid State Problems«, Solid State Physic, Vol. 2, Academic Press, N. Y. 1965.
¹⁴ G. Ringo, »Neutron Diffraction and Interference«, Handbuch der Physik, Band XXXII, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

ŠOLA

UPODOBITVE Z LEČAMI

Leče so običajen pripomoček pri eksperimentalnem pouku fizike. Pomembne so kot bistveni del raznih optičnih naprav, kot na primer fotografskih aparatov, projektorjev, daljnogledov, mikroskopov itd. Dijaki se seznanjajo z delovanjem leč tako v osnovni in srednji šoli kot tudi na višjih in visokih šolah. Razlaga upodobitev z lečami je na vseh nivojih precej podobna, le da uporabljamo pri zahtevnejšem študiju nekaj več matematičnih pripomočkov in praktičnega računanja. Pri pouku eksperimentalnega tečaja fizike na univerzi za prvi letnik fizike in nekaterih drugih strok se pogosto zdi, da je obravnavanje leč nekaj, kar je pravzaprav preveč elementarno za visokošolski nivo. Pri tem seveda ne mislim na bolj zahtevna poglavja o lečah, kot so na primer poglavja o napakah ali o kompliciranih sestavih leč. Glavni vzrok za gornje mišljenje je v tem, da se na vseh stopnjah uporablja isti metodični pristop. Ta je osnovan na neposredni izpeljavi enačbe za upodobitev z zasledovanjem loma posameznega žarka na krogelnih ploskvah leče. Zdi se mi, da bi drugačen pristop, ki ga bom v članku opisal, prinesel nekaj svežega zraka v sicer že kar zatohlo poglavje o lečah in ovrgele navedene pomisleke. To, kar sledi, seveda ni nič novega in lahko večji del najdemo v zahtevnejših učbenikih^{1,2}. Gre bolj za primeren izbor snovi in način podajanja, ki naj naredi obravnavanje leč bolj zanimivo in sistematično. Matematika, ki jo bomo uporabljali, je preprosta in z lahkoto dostopna tudi srednješolskim dijakom. Prišli pa bomo do nekaterih spoznanj, ki verjetno presegajo običajno zakladnico znanja diplomiranega fizika. Morda bi bil del te snovi primeren tudi za fizikalne krožke na gimnazijah.

Matematična teorija upodobitev

Izhodišče za razmišljanje o lečah bo matematična teorija upodobitev s projektivnimi transformacijami. V naslednjem jo podajamo v elementarni obliki.

Pri upodabljanju govorimo običajno o dveh tridimenzionalnih prostorih: o *predmetnem prostoru* P in *slikovnem prostoru* S . Žarki, ki izvirajo iz predmeta v prostoru P , se po prehodu

skozi lečo ali lečje združijo v sliko v prostoru S. Upodobitev ni nikoli idealna. (Izjema je le upodobitev z ravnim zrcalom.) To se pravi, da se žarki, ki izvirajo iz neke točke predmeta, v resnici ne združijo popolnoma v ustrezni točki slike in tudi sicer je slika le do neke mere geometrijsko podobna predmetu. Pač pa obstaja matematična transformacija, ki priredi enolično vsaki točki prostora P točko v prostoru S na tak način, da so slike geometrijsko podobne predmetom. Tako upodobitev generira *projektivna transformacija*.

Naj bodo (x, y, z) kartezijske koordinate točke T v prostoru P in (x', y', z') ustrezne koordinate slike T' v prostoru S. Projektivna zveza med (x', y', z') in (x, y, z) se matematično zapiše kot

$$x' = F_1/F_0, \quad y' = F_2/F_0, \quad z' = F_3/F_0 \quad (1)$$

kjer je

$$F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i; \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2)$$

Tu so a_i, b_i, c_i in d_i parametri transformacije. Pri projektivni transformaciji se premica upodobi v premico in ravnina v ravnino. O tem se je lahko prepričati, če v analitični enačbi poljubne premice ali ravnine v prostoru S zamenjamo spremenljivke z izrazi (1). Dobimo ponovno enačbo premice oziroma ravnine, sedaj seveda v prostoru P. Upodabljanje premic v premice in ravnin v ravnine je brez dvoma eden izmed osnovnih pogojev za geometrijsko podobnost predmeta in slike. Če iz enačb (1) izračunamo (x, y, z) , dobimo izraze, ki imajo isto obliko, namreč

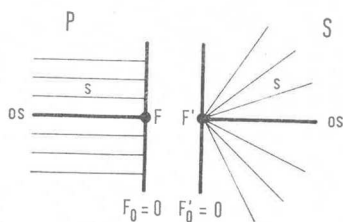
$$x = F'_1/F'_0, \quad y = F'_2/F'_0, \quad z = F'_3/F'_0 \quad (3)$$

kjer je F'_i zopet linearni izraz

$$F'_i = a'_i x' + b'_i y' + c'_i z' + d'_i; \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (4)$$

Konstante a'_i, b'_i, c'_i in d'_i so parametri inverzne transformacije.

Oglejmo si nekaj lastnosti projektivne transformacije. Najprej opazimo, da imata ravnini $F_0 = 0$ in $F'_0 = 0$ poseben pomen. Ravnini $F_0 = 0$ v prostoru P pravimo *goriščna ravnina predmetnega prostora*. Kot je razvidno iz (1), se ta ravnina upodobi v neskončnost v prostoru S. Podobno je $F'_0 = 0$ *goriščna ravnina slikovnega prostora* in je slika neskončno oddaljene ravnine v predmetnem prostoru. Naslednje, kar nas zanima, je upodobitev premic s , ki so pravokotne na goriščno ravnino $F_0 = 0$. (Glej sl. 1!) Ker te premice izvirajo



Slika 1

iz neskončno oddaljene točke, se morajo po upodobitvi stekati v neki točki F' goriščne ravnine prostora S. Tej točki pravimo *gorišče slikovnega prostora*. Med premicami s' , ki so slika premic s v prostoru P, je ena pravokotna na goriščno ravnino $F'_0 = 0$. Imenuje se *glavna os*, pri optičnih napravah pa *optična os slikovnega prostora*. Ustrezna premica v prostoru P pa je *glavna ali optična os predmetnega prostora*. Njeno presečišče F z goriščno ravnino je *gorišče predmetnega prostora*. Gorišče F lahko določimo tudi tako, da poiščemo inverzno upodobitev premic v prostoru S, ki so pravokotne na $F'_0 = 0$. Te premice se po inverzni upodobitvi stekajo v F .

V optiki so posebno pogosti sistemi, ki se odlikujejo z osno ali rotacijsko simetrijo. Pri teh ležita optični osi prostorov P in S na isti premici, ki je rotacijska os naprave. Kot primer navedimo krogelne leče, lečja s skupno optično osjo, mikroskop in daljnogled! Osnova ali rotacijska simetrija izredno poenostavi izraze za projektivno transformacijo. Tu se lahko omejimo le na upodobitve točk na eni poljubno izbrani ravnini, ki gre skozi optično os. Z vrtenjem te ravnine okoli osi lahko pokrijemo ves prostor. Pri tem se tudi slika samo toga vrti. Nadalje se ravnine, ki so vzporedne z goriščno ravnino $F_0 = 0$, upodobijo kot ravnine, vzporedne z goriščno ravnino $F'_0 = 0$. To dokažemo takole: Če ravnino, ki je vzporedna z goriščno ravnino predmetnega prostora, vrtimo okoli optične osi, ostane nespremenjena. Isto mora veljati tudi za sliko, kar je možno le, če je slika vzporedna z goriščno ravnino slikovnega prostora. S tem je gornja trditev dokazana.

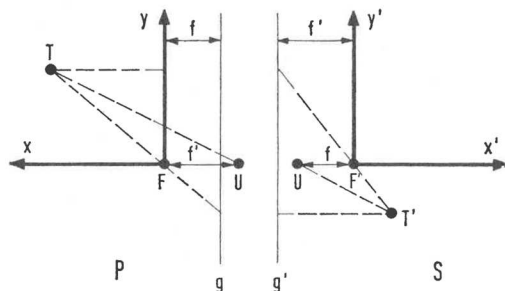
Izberimo si koordinatni sistem v P in S tako, kot je pokazano na sl. 2! Osi x, x' ležita na optični osi, osi y, y' pa na ustreznih goriščnih ravninah. Pri tem je smer y' izbrana tako, da je ravnina $x'y'$ slika ravnine xy . Zaradi udobnosti pri poznejši uporabi formul smo izbrali v predmetnem prostoru levi koordinatni sistem. Tu sta enačbi goriščnih ravnin izredno enostavni, namreč $x = 0$ in $x' = 0$. Nadalje se ravnine $x = \text{konst.}$ upodobijo v ravnine $x' = \text{konst.}$ Zato je x' neodvisen od y in je le funkcija x . Ker se mora točka ($x = \infty, y = 0$) na osi upodobiti v gorišče ($x' = 0, y' = 0$), je tudi očitno, da je parameter a_1 v izrazu (2) enak 0. Tako lahko zapišemo

$$x' = ff'/x \quad (5)$$

kjer sorazmernostno konstanto transformacije pišemo v obliki produkta dveh novih parametrov f in f' . Njun pomen bomo v nadaljnjem podrobneje opredelili. Točke na osi x preidejo pri upodobitvi v točke na osi x' . To je možno le, če sta a_2 in d_2 v F_2 enaka 0. Zato lahko zapišemo

$$y' = -fy/x \quad (6)$$

Transformacija (5), (6) je odvisna le od dveh parametrov, f in f' . Tako zapisane enačbe upodobitve se pri lečah imenujejo *Newtonove enačbe*.³ f je goriščna razdalja predmetnega prostora, f' pa goriščna razdalja slikovnega prostora. Pri običajnih optičnih lečah in lečjih, kakor imenujemo za razliko od drugih naprav (na primer elektronskih, ionskih) leče in lečja, ki jih uporabljamo pri upodabljanju s svetlobo, je $f' = f$.



Slika 2

Pri določanju lege slike so priljubljene geometrijske konstrukcije. Za ta namen je ugodno vpeljati še pojem glavnih ravnin in vozliščnih točk upodobitve. *Glavna ravnina g predmetnega prostora* je ravnina, ki je vzporedna z goriščno ravnino in ima lastnost, da se poljuben ploskovni lik na njej upodobi v enako velik in enako obrnjen lik na ustrezni *glavni ravnini*

g' slikovnega prostora. Lego glavnih ravnin dobimo iz (6) in (5), če postavimo $y' = y$. Tedaj je lega glavne ravnine g v prostoru P podana z

$$x = -f \quad (7)$$

in lega glavne ravnine g' v prostoru S' z

$$x' = -f' \quad (8)$$

Na sl. 2 sta narisani glavni ravnini za primer $f < 0, f' < 0$. Presečišči glavnih ravnin z optično osjo imenujemo *glavni točki optičnega sistema*.

Poljubna premica v prostoru P in njena slika v prostoru S v splošnem nimata enakega nagiba glede na optično os. Izjema so premice, ki gredo skozi vozliščno točko U v predmetnem prostoru. Splošna enačba premice v prostoru P je

$$y = ax + b \quad (9)$$

Z uporabo transformacije (5), (6) dobimo sliko premice v prostoru S :

$$y' = -(b/f')x' - af' \quad (10)$$

Pogoj o enakem nagibu zahteva, da je

$$a = -b/f' \quad (11)$$

Pri tem smo upoštevali, da je koordinatni sistem prostora P levi, prostora S pa desni. Pogoj (11) je izpolnjen, če premica (9) preseče optično os v točki s koordinato

$$x = -f' \quad (12)$$

To je *vozliščna točka* U . Njena slika U' na optični osi prostora S , s koordinato

$$x' = -f \quad (13)$$

je *vozliščna točka slikovnega prostora*. Vozliščni točki sta narisani na sl. 2 za primer $f' > f$. Razdalja med vozliščno in glavno točko je $f' - f$. Ta je nič pri običajni optični leči.

Primer konstrukcije slike s pomočjo glavnih ravnin in vozliščnih točk je tudi pokazan na sl. 2.

Enostaven vpogled v pomen predznakov goriščnih razdalj dobimo, če si na primer ogledamo, kako se upodobi premica $y = \text{konst.}$, ki je vzporedna z optično osjo. Iz Newtonovih enačb sledi

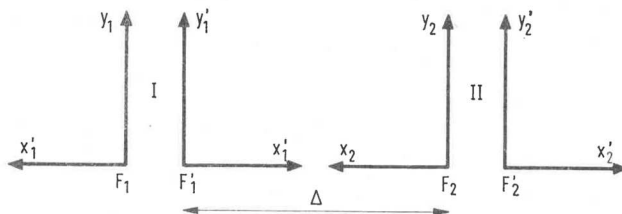
$$y' = -(y/f')x' \quad (14)$$

Če je $f' > 0$, je nagib premice (14) tak kot pri ustreznem žarku po prehodu skozi zbiralno lečo. Pravimo, da je upodobitev v slikovnem prostoru zbiralna. Podobno je upodobitev v slikovnem prostoru razpršilna, če je $f' < 0$. Tudi v predmetnem prostoru razlikujemo dve možnosti, to je zbiralno, $f < 0$, in razpršilno, $f > 0$, inverzno upodobitev. To se sedaj nanaša na način inverznega upodabljanja premic $y' = \text{konst.}$

Pri vsem dosedanjem razglabljanju sta bili goriščni razdalji f in f' poljubni tako po velikosti kot tudi po predznaku. Pri optičnih lečah in lečjih pa imata goriščni razdalji vedno isti predznak in sta poleg tega tudi enaki, če sta predmetni in slikovni prostor v snovi z istim lomnim količnikom. O tej zanimivi posebnosti bomo v naslednjih poglavjih še razpravljali.

Za zaključek poglavja o matematični teoriji upodobitev si še oglejmo, kaj nastane, če naredimo več zaporednih upodobitev oziroma projektivnih transformacij tako, da prva upodobitev naredi iz predmeta sliko, ki jo nato naslednja upodobitev pretvori v novo sliko in tako dalje, dokler ne dobimo z zadnjo upodobitvijo končne slike predmeta! Tak

primer imamo že pri navadni leči, kjer upodabljata obe lečini površini. Koordinatne sisteme za dve zaporedni upodobitvi s skupno optično osjo kaže sl. 3. Medsebojna razdalja gorišč F'_1 in F_2 upodobitev I in II je označena z Δ . Goriščne razdalje naj bodo f_1, f_1' , oziroma f_2, f_2' . Z dvakratno uporabo Newtonovih enačb (5), (6), upoštevajoč, da se Δ koordinate



Slika 3

(x'_1, y'_1) vmesne slike zapišejo v koordinatnem sistemu predmetnega prostora druge upodobitve kot $(\Delta - x'_1, y'_1)$, dobimo

$$x_2' - f_2 f_2' / \Delta = (f_1 f_2 / \Delta) (f_1' f_2' / \Delta) / (x_1 - f_1 f_1' / \Delta) \quad (15)$$

$$y_2' = (f_1 f_2 / \Delta) y / (x_1 - f_1 f_1' / \Delta)$$

Primerjava teh izrazov s (5), (6) kaže, da je rezultirajoča transformacija ponovno projekтивna transformacija iste vrste. Novi goriščni razdalji sta

$$f = -f_1 f_2 / \Delta \quad (16)$$

$$f' = -f_1' f_2' / \Delta$$

Lega ustreznih goriščnih ravnin pa je podana z

$$x_1 = f_1 f_1' / \Delta \quad (17)$$

$$x_2' = f_2 f_2' / \Delta$$

Iz povedanega sklepamo, da sestavljajo projekтивne transformacije z osno simetrijo *grupo*. Zaporedje dveh transformacij generira transformacijo iste vrste. Možni sta tudi inverzna in identična transformacija. To je zadosten pogoj, da sestavljajo te transformacije grupo. Prav lahko se da pokazati, da gornja trditev velja v resnici za poljubne projekтивne transformacije.

Iz enačb (16) sledi

$$f' / f = (f_1' / f_1) (f_2' / f_2) \quad (18)$$

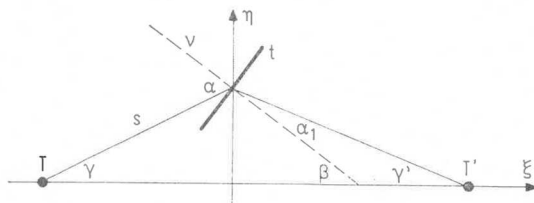
To formulo lahko splošimo. Pri n zaporednih transformacijah dobimo

$$f' / f = \prod_{i=1}^n f_i' / f_i \quad (19)$$

Optične leče

Pri optičnih lečah realiziramo upodobitve z lomom žarkov na stičnih ploskvah snovi z različnimi lomnimi količniki. Stične ploskve so po navadi osno simetrično ukrivljene. Dokaj dobra upodobitev je možna le, če se omejimo na žarke, ki oklepajo majhen kot

z optično osjo. Kakšna naj bo stična ploskev, bomo ugotovili iz naslednjega razmišljanja. Na sl. 4 je ploskev, ki loči predmetni prostor z lomnim količnikom n od slikovnega prostora z lomnim količnikom n' , v bližini ravnine $\zeta = 0$ koordinatnega sistema. Os ζ je rotacijska os mejne ploskve in s tem tudi optična os upodobitve. Žarki s , ki izvirajo iz predmeta T na optični osi in potujejo v njeni bližini (kota γ in γ' sta majhna), se po lomu na stični ploskvi zberejo v sliki T' . Odklon ali deviacija $\delta = \gamma + \gamma'$ posameznega žarka s mora biti sorazmerna

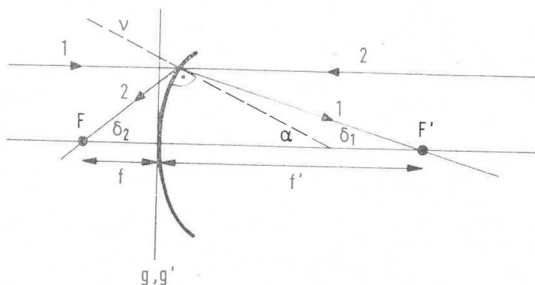


Slika 4

ordinati η mesta, pri katerem žarek zadene stično ploskev. Le tedaj se žarki iz T ponovno združijo v T' . Na sl. 4 je narisana tudi tangencialna ravnina t na stično ploskev, kjer se žarek lomi, in njena normala v . Označeni so tudi vpadni kot a , lomni kot a' ter nagib β normale glede na optično os. Iz Snellovega lomnega zakona dobimo

$$\delta = a(n' - n)/n' \quad (20)$$

Ker je $a = \gamma + \beta$, sledi iz zahteve, da je δ sorazmeren z η , tudi zahteva, da je β sorazmeren z η . To lastnost imajo le krogli podobne ploskve. Pri tem se seveda moramo omejiti na žarke v bližini optične osi. Mejne ploskve osno simetričnih leč so torej krogelne ploskve. Včasih sicer naletimo tudi na drugače oblikovane leče, namreč na leče, katerih površje je sestavljeno iz krožnih pasov s središčem na lečini osi. Posamezen pas je del stožca z osjo na optični osi. Nagib normalne stožčeve ploskve glede na os raste z radijem pasu.



Slika 5

Običajno površino leče kaže sl. 5. Pri upodobitvi, ki jo generira krogelna ploskev leče, je očitno, da se glavni ravnini g, g' ujemata s tangencialno ravnino, ki se dotika krogelne ploskve na optični osi. Vozliščni točki U, U' pa ležita v središču krogle. Iz (7) in (12) sledi

$$f' - f = r \quad (21)$$

kjer je r krivinski radij krogelne ploskve. Pri računu goriščnih razdalj potrebujemo še eno enačbo. Zelo lahko je določiti razmerje goriščnih razdalj. Za ta namen izračunamo deviaciji δ_1 in δ_2 žarkov 1 in 2 na sl. 5. Žarek 1 je v prostoru P vzporeden z optično osjo in gre

po lomu skozi gorišče F' . Žarek 2 pa izhaja iz gorišča F in je po lomu v prostoru S vzporeden z optično osjo. Deviacija δ_1 je podana s formulo (20), deviacijo δ_2 pa izpeljemo na enak način,

$$\delta_2 = a(n' - n)/n \quad (22)$$

Kot je razvidno s sl. 5, je $f':f = \delta_2 : \delta_1$. Tako dobimo

$$f'/f = n'/n \quad (23)$$

Razrešitev enačb (21) in (23) da

$$\begin{aligned} f &= nr/(n' - n) \\ f' &= n'r/(n' - n) \end{aligned} \quad (24)$$

Enačba (23) je izredno pomembna, ker velja tudi pri več zaporednih upodobitvah te vrste in zato tudi pri sestavljenih lečjih. Pokažimo to na primeru dveh upodobitev z lomom na krogelnih ploskvah! Tak sestavljen sistem predstavlja že navadna leča, kjer se žarki lomijo na obeh krogelnih ploskvah leče. Stični ploskvi razdelita prostor na tri dele z lomnimi količniki n_1 , n_2 in n_3 . Običajno je $n_3 = n_1$, ni pa nujno. Razmerje goriščnih razdalj za prvo upodobitev je $f'_1/f_1 = n_2/n_1$, za drugo pa $f'_2/f_2 = n_3/n_2$. Če to vstavimo v formulo (18), dobimo $f'/f = n_3/n_1$, kar ustreza izrazu (23). Z uporabo formule (19) moremo rezultat posplošiti tako, da velja za poljubno število zaporednih upodobitev. Razmerje goriščnih razdalj je torej odvisno le od razmerja lomnih količnikov predmetnega in slikovnega prostora, nič pa od tega, kako in iz česa je leče narejeno. Od tod tudi sledi, da imata goriščni razdalji pri optičnih lečah vedno isti predznak. V primeru enakih lomnih količnikov v prostorih P in S pa sta celo enaki. To je zanimiv in poučen rezultat. Namreč, če je $f' = f$, je obrat projektivne transformacije (5), (6), oziroma inverzna transformacija, identičen s prvotno transformacijo. Če tako lečo ali leče obrnemo za 180° , lego prostorov P in S pa obdržimo nespremenjeno, se tudi upodabljanje ne spremeni. Vendar je pogosto primerna le ena orientacija, ker se moramo pri praktični uporabi ozirati tudi na relativno lego glavnih ravnin glede na leče in na napake leč, ki so različne za obe orientaciji. Ker je tu $f' = f$, se legi glavne in vozliščne točke ujemata v obeh prostorih.

Zanimivo uporabo enačbe (23) kaže naslednji primer. Predmete, ki so potopljene v vodi, vidimo bliže ravnemu površju vode, kot so v resnici. Primer lahko obravnavamo podobno kot pri leči, le da je tu $r = \infty$. Naj bo na sl. 5 na levi strani ravnine g , g' voda z lomnim količnikom n , na desni pa zrak z $n' = 1$. Za razmišljanje je bolj pripravno, če je mejna ploskev konkavna, $r < 0$, ker so tedaj goriščne razdalje pozitivne. Predmet postavimo v vodo na optično os v razdalji h od glavne ravnine. Slika nastane na isti strani v razdalji h' . Tedaj sta koordinati x in x' podani z $x = h - f$ in $x' = -h' - f'$. To vstavimo v enačbo (5) in z majhnim preurejanjem členov dobimo

$$h'/h = f'/f + h'/f \quad (25)$$

Ker je f zelo velik, lahko zadnji člen na desni strani zanemarimo. Z upoštevanjem enačbe (23) dobimo končni rezultat

$$h'/h = 1/n \quad (26)$$

Ta izpeljava je zanimiva in poučna, ni pa enostavnejša od klasične, ki jo najdemo v vseh učbenikih.

Formuli (24) in izraza (16), (17) za goriščni razdalji in legi goriščnih ravnin dveh zaporednih upodobitev nam sedaj omogočajo račun upodobitve s poljubno lečo ali lečjem. Podrobnejše obravnavanje takih primerov presega okvir tega članka. Omejili se bomo le na primer tanke bikonveksne leče in primer dielektrične krogle.

Pri tanki leči so vse štiri glavne ravnine obeh upodobitev zelo blizu srednje ravnine leče. Od tod sledi, da je razdalja Δ gorišč F'_1 in F_2 (sl. 3)

$$\Delta = -f'_1 - f_2 \quad (27)$$

S substitucijo (27) v (16) dobimo

$$1/f = 1/f_1 + (f'_1/f_1)1/f_2 = 1/f_1 + (n'/n)1/f_2 \quad (28)$$

Tu smo pri izpeljavi zadnjega izraza upoštevali enačbo (23). Če je pri bikonveksni leči absolutna vrednost radija prve krogelne ploskve r_1 in druge r_2 , dobimo z uporabo (24) rezultat

$$1/f = (n'/n - 1) (1/r_1 + 1/r_2) \quad (29)$$

To je znana formula za goriščno razdaljo tanke bikonveksne leče. Pri izpeljavi izraza (29) smo radij druge krogelne ploskve šteli negativno zaradi drugačnega predznaka ukrivljenosti te ploskve glede na predmetni prostor. Formula (29) velja za poljubno tanko lečo, če le pravilno upoštevamo predznake krivinskih radijev. Tudi enačba (28) ima širšo uporabnost. Pri $n' = n$ predstavlja enačbo za goriščno razdaljo sestava dveh tankih leč, ki se dotikata.

Oglejmo si še dielektrično kroglo kot poseben primer debele leče! Vozliščni točki te leče ležita očitno v središču krogle. Zato gresta tudi glavni ravнинi skozi središče, ker je $f' = f$. Sestavljanje dveh upodobitev postane v tem primeru izredno enostavno. Upodobitvi I in II se popišeta z istima parametroma, namreč $f_2 = f'_1$ in $f'_2 = f_1$. Oddaljenost gorišča F_1 prve upodobitve od središča krogle je f'_1 , ker je središče tudi vozliščna točka za prvo upodobitev. Podobno je oddaljenost gorišča F sestavljene upodobitve od središča krogle f in od gorišča prve upodobitve tudi f , ker je lega gorišča v koordinatnem sistemu I podana z $x_1 = -f$, kot sledi iz (16) in (17). Tako je $2f = f'$. Z uporabo (24) dobimo končno formulo za goriščno razdaljo krogle

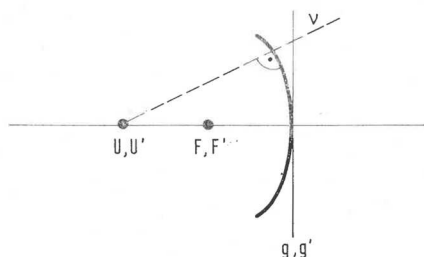
$$f = \frac{1}{2} (n'/n) r / [(n'/n) - 1] \quad (30)$$

kjer je r radij krogle. Zanimiv je primer relativnega lomnega količnika $n'/n = 2$. Tedaj je $f = r$ in gorišče je na površini krogle. Če pošljemo na tako kroglo vzporeden snop žarkov, se ti zberejo na nasprotni površini krogle. Če je krogla na tej strani posrebrena, pride do odboja. Žarki dajo po ponovnem prehodu skozi kroglo zopet vzporeden snop, ki potuje natančno v obratni smeri kot snop vpadnih žarkov. Naprava predstavlja zelo dobro mačje oko. Na tem principu so narejeni nekateri svetlobni reflektorji za cestno signalizacijo (Scotchlite reflector⁴). Pri njih je odbojna plast sestavljena iz množice drobnih steklenih kroglic, ki so vtisnjene v podlago, ki dobro odbija svetlobo. V praksi se lahko le približamo želji $n'/n = 2$, ker primernih stekel s tako velikim lomnim količnikom ni.

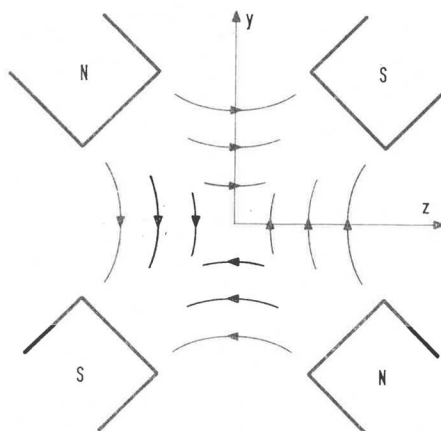
Krogelno zrcalo in kvadrupolna magnetna leča

Pri optičnih lečah smo prišli do ugotovitve, da z njimi ne moremo realizirati upodobitev z različnim predznakom goriščnih razdalj. To pa je mogoče doseči s krogelnimi zrcali in v elektronski in ionski optiki s kvadrupolnimi magnetnimi lečami. Na sl. 6 je narisano konkavno zrcalo. Glavni ravнинi g, g' sovpadata s tangentno ravnino, ki se dotika zrcala na optični osi. Vozliščni točki U, U' sta v središču zrcalne krogelne ploskve z radijem r , ker se žarek, ki gre skozi središče, po odboju vrne po isti poti. Glavne in vozliščne točke se torej ne ujemajo. Zato sta goriščni razdalji f, f' različni. Velja torej, da je $f - f' = r$. Iz simetrijskih razlogov sklepamo, da se pokrivata gorišči F in F' . To je možno le, če je $f' = -f$. Tako dobimo znani rezultat $f = r/2$. Pri zrcalu se upodobitev spremeni, če ga zasukamo za 180° .

Danes se dosti uporablja upodabljanje s curki elektronov in drugih nabitih delcev. Za ta namen so posebno primerne magnetne leče, v katerih se nabiti delci odklanjajo v magnetnem polju. Ogledali si bomo *kvadrupolno lečo*. Potek magnetnega polja v okolici optične



Slika 6

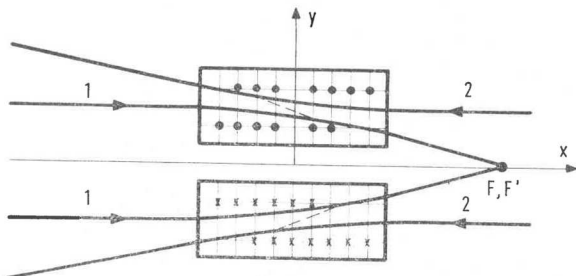


Slika 7

osi x kvadrupolne leče je pokazan na sl. 7. Os x je pravokotna na ravnino slike. Magnetno polje ustvarja kvadrupolni magnet, katerega poli so razporejeni tako, kot kaže slika. V bližini optične osi ima kvadrupolno polje B obliko

$$B_x = 0, \quad B_y = bz, \quad B_z = by, \quad b > 0 \quad (31)$$

Prerez leče vzdolž ravnine xy vidimo na sl. 8. Področje magnetnega polja je uokvirjeno. Pike in križi naznačujejo njegovo smer proti gledalcu oziroma proč od njega.



Slika 8

Oglejmo si na primer poti 1 pozitivno nabitih delcev, ki potujejo skozi lečo vzporedno z optično osjo od leve proti desni. Zaradi sile $\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, v kateri je e naboj in v hitrost delca, se nabiti delci odklonijo tako, da se po prehodu skozi lečo združijo v gorišču F' . Če pošljemo snop delcev v obratni smeri (poti 2), pa dobimo zaradi drugačnega predznaka hitrosti v razpršilno delovanje leče. Goriščni razdalji f in f' torej nimata istega predznaka. Opozoriti je treba še na to, da kvadrupolna leča zbira pri prehodu pozitivnih delcev od leve proti desni le v ravnini xy , v ravnini xz pa razpršuje. Obratno velja za delce, ki pridejo v lečo z desne.

Osnovni razlog za drugačne lastnosti optične in kvadrupolne leče glede predznakov goriščnih razdalj je v tem, da je pri optičnih lečah pot žarka obrnljiva, pri magnetnih pa ne. Lom svetlobnega žarka na meji dveh snovi poteka enako v obe smeri. Če pošljemo žarek iz snovi 1 v snov 2, je pot ista, kot če pošljemo žarek iz snovi 2 v snov 1. Tega ni mogoče doseči pri magnetnih poljih, kjer je sila na nabit delec odvisna od predznaka hitrosti.

P. Gosar

LITERATURA

¹ F. Nachtikal, Technická fysika, Nákladem Jednoty Českoslov. Matematiků a Fysiků, Praha 1937.

² M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, London 1959.

³ F. W. Sears and M. W. Zemansky, University Physics, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1970.

⁴ F. S. Crawford, Jr., Waves, Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill Co., New York 1968.

TEKMOVANJE

EKSPERIMENTALNA NALOGA NA V. MEDNARODNI OLIMPIADI IZ FIZIKE

Na olimpiadah iz fizike dobijo tekmovalci tudi eksperimentalno nalogo. Da bi naši mladi bralci spoznali težavnost nalog na olimpiadi in da bi se pri tem kaj naučili, sem izvedel nalogo, kakršna je bila dana na peti mednarodni olimpiadi iz fizike julija 1971 v Sofiji*

Pred seboj imaš generator, izvir električne napetosti, ampermeter, voltmeter, drsni upornik in vezne žice. S primerno vezavo danih elementov in po ustreznih meritvah nariši graf odvisnosti koristne moči P od jakosti električnega toka I !

Z uporabo podatkov iz zgornjega grafa reši še tole:

(a) Izračunaj notranji upor generatorja R_n !

(b) Izračunaj gonilno napetost generatorja U_g !

(c) Nariši graf odvisnosti koristne moči P od zunanega upora R !

(d) Nariši graf odvisnosti navidezne moči P_1 od zunanega upora R !

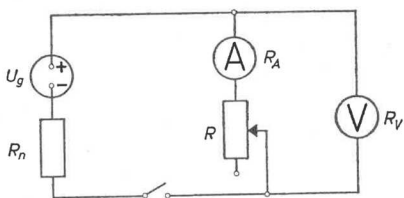
(e) Nariši graf odvisnosti izkoristka generatorja η od zunanega upora R !

Osnovni graf odvisnosti koristne moči od jakosti električnega toka nariši vsaj s 30 do 35 točkami!

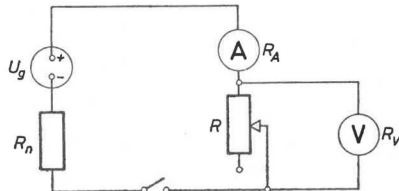
Tekmovalci so imeli v celoti za rešitev naloge pet in pol ure časa. Sam sem seveda potreboval mnogo več časa, da sem izbral ustrezne elemente, opravil meritve, izračunal in pripravil prispevek v obliki, kot je pred vami. Priznati moram, da je naloga zahtevna in da bi se moral zelo podvizati, če bi jo hotel rešiti v predpisanem času.

* T. Skulj: Peta mednarodna olimpiada iz fizike, Obz. mat. fiz., **19**, 33 (1972)

Najprej narišimo vezje! Preden se lotimo merjenja, rešimo nalogo računsko!



(a)



(b)

Sl. 1. Vezji za merjenje koristne moči upornika.

Gonilna napetost generatorja U_g poganja tok I skozi notranji upor generatorja R_n in zunanji upor R' :

$$U_g = IR_n + IR' \quad (1)$$

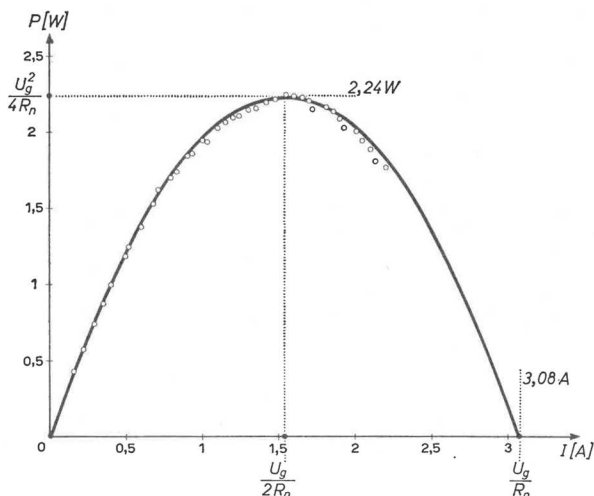
Zunanji upor R' sestavljajo upor spremenljivega upornika R in notranja upora obeh instrumentov. Če sta instrumenta dobra, se pravi, da je upor ampermetra zelo majhen in upor voltmetra zelo velik, dobimo v obeh primerih $R' = R$ (sl. 1 a in b). Pomnožimo enačbo (1) z I , tako da dobimo:

$$U_g I = I^2 R_n + I^2 R \quad \text{ali} \quad P_1 = P_n + P$$

$P_1 = U_g I$ je navidezna moč, $P_n = I^2 R_n$ je moč na notranjem uporu generatorja in $P = I^2 R$ je koristna moč. Koristna moč je kvadratična funkcija toka:

$$P = U_g I - R_n I^2 \quad (2)$$

Njen graf je parabola s temenom v točki $(U_g^2/4R_n, I_o/2)$ in ničlami $I = 0$ in $I = I_o$. Tu je I_o kratkostični tok, ki teče po krogu, ko generator kratko sklenemo: $I_o = U_g/R_n$.



Sl. 2. Graf $P = f(I)$ po enačbi (2) z vrisanimi točkami iz preglednice.

Notranji upor generatorja izračunamo iz enačb za temensko, to je maksimalno moč P_o , ko je tok enak $I_o/2$:

$$U_g^2/4R_n = P_o \quad (3)$$

$$U_g/2R_n = I_o/2 \quad (4)$$

Iz enačb (3) in (4) dobimo za notranji upor generatorja (vprašanje a):

$$R_n = P_o/(I_o/2)^2 \quad (5)$$

in za gonilno napetost (b):

$$U_g = R_n I_o \text{ ali pa } U_g = 2\sqrt{P_o R_n} \quad (6)$$

V enačbo za koristno moč $P = I^2 R$ vstavimo I iz enačbe (1) in dobimo odvisnost koristne moči od zunanjega upora (c):

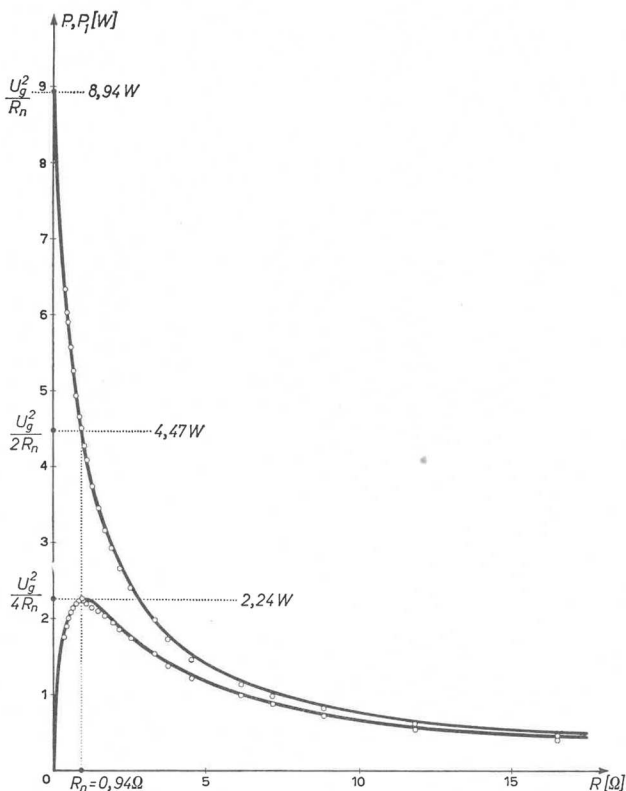
$$P = U_g^2 R / (R_n + R)^2 \quad (7)$$

Podobno izrazimo navidezno moč (d):

$$P_1 = I^2 R + I^2 R_n = U_g^2 / (R_n + R) \quad (8)$$

Izkoristek je kvocient koristne moči in navidezne moči (e):

$$\eta = P/P_1 = R/(R_n + R) \quad (9)$$



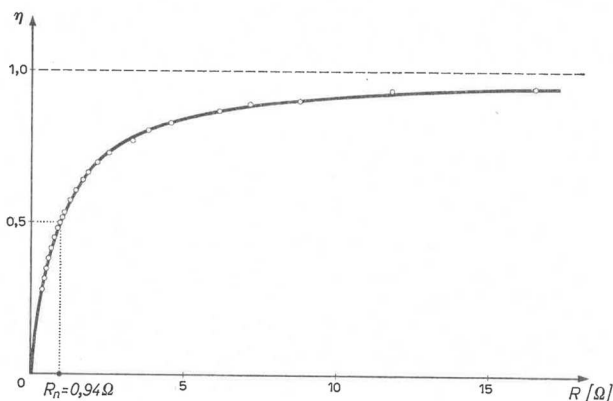
Sl. 3. Graf $P = f(R)$ in graf $P_1 = f(R)$ po enačbah (7) in (8) z vrisanimi točkami iz preglednice.

Pri meritvi uporabimo baterijski izvir enosmerne napetosti (baterija 3 V, Zmaj), voltmeter in ampermeter (Unimer 1 /US 4C/, Iskra), drsni upornik (PRN 117, 22 Ω , 3 A, Iskra), vezne žice in stikalo. V začetku vključimo v krog ves upornik, nato premikamo drsni tako, da pojema napetost na uporniku v korakih po 0,05 V. Nazadnje merimo, ko je drsni v drugi skrajni legi, v električnem krogu ni upornika. Meritve izvajamo hitro, da baterija ne opeša med meritvijo!

Rezultate meritev uredimo v preglednico. Že za prvi graf sl. 2 moramo izračunati koristno moč pri posameznih meritvah. Iz tega grafa razberemo P_o in I_o ter nato izračunamo R_n po enačbi (5) in U_g po enačbi (6). Za grafe na slikah 3 in 4 moramo izračunati R , P_1 in η . Tako si lahko sestavimo preglednico:

1	2	3	4	5	6	7	8
štev. meritve	U	I	$P = UI$	$R = U/I$	$I^2 R_n$	P_1	η
	[V]	[A]	[W]	[Ω]	[W]	[W]	

R v 5. stolpcu izračunamo po Ohmovem zakonu. P_1 izračunamo po enačbi (8), od P v 4. stolpcu odštejemo $I^2 R_n$ v 6. stolpcu in η izračunamo po enačbi (9), P v četrtem stolpcu delimo s P_1 v 7. stolpcu. Naloga je končana, ko izračunamo z uporabo podatkov iz grafa $P = f(I)$ notranji upor generatorja $R_n = 0,94 \Omega$ in gonilno napetost generatorja $U_g = 2,9 \text{ V}$. Na koncu narišemo grafa (c), (d) in (e) po preglednici.



Sl. 4. Graf $\eta = f(R)$ po enačbi (9) z vrisanimi točkami po preglednici.

Da bi približno ocenili zanesljivost meritve, podamo rezultate drugače, kot jih zahteva naloga. Najprej narišemo grafe tako, da upoštevamo v enačbah (2), (7), (8) in (9) za koeficienta $R_n = 0,94 \Omega$ in $U_g = 2,9 \text{ V}$. Nato vnesemo v slike točke, ki jih dobimo po meritvah in računih. Vseh meritev je 38, vendar je upoštevanih v grafih zaradi preglednosti samo 24 točk. Opazimo, da bi se krivulje, ki bi jih potegnili skozi točke, dobro ujemale z izračunanimi krivuljami.

Tomaž Skulj

NOVE KNJIGE

Fox L., and D. F. Mayers: Computing Methods for Scientists and Engineers. Oxford, Clarendon Press, 1968, 255 str. 8°. (MOS 65-01)

Formulacija problemov in izbira metode. Analiza napak in aritmetika s premično vejico. Računanje z rekurzivnimi relacijami. Računanje s polinomi. Računanje z matrikami. Aproksimacija s polinomi. Čebyševska aproksimacija. Interpolacija in odvajanje. Končne difference in Lagrangeve metode. Numerično integriranje. Navadne diferencialne enačbe.

Večina problemov ima lahko »notranjo nestabilnost«, ki jo moremo ceniti po vplivu nenatančnosti podatkov na rezultate. Nekatere numerične metode pa imajo lahko »lastno nestabilnost«, ki onemogoča izračun rezultatov s predpisano natančnostjo. Informacija o teh nestabilnostih je zelo pomembna tako pri formulaciji problemov kot tudi pri izboru konkretne numerične metode za reševanje. Ta knjiga se odlikuje od drugih učbenikov numerične matematike prav po poudarku na študij stabilnosti. Z zelo preprostimi sredstvi avtorja omogočita bralcu globok vpogled v posamezne numerične metode. Vse trditve so ilustrirane z vrsto poučnih primerov. Teoretične rezultate avtorja navajata brez dokazov in večino metod omenjata brez izpeljav. Zato ta knjiga ni primerna kot samostojni učbenik numeričnih metod za začetnika, ampak je čudovito praktično dopolnilo k bolj teoretičnim učbenikom. Napisana je zelo jasno, razumljivo in živahno. Čutiti je, da imata avtorja bogate praktične izkušnje. Vsako poglavje spremlja veliko število poučnih nalog.

Brown A.L. and A. Page: Elements of Functional Analysis. (MOS 46-01), London, Van Nostrand Reinhold Company, 1970, 394 str. 8°.

Uvod. Metrični prostori. Normirani linearni prostori. Kompaktni metrični prostori. Omejeni linearni funkcionali. Omejeni linearni operatorji. Frechetov diferencialni račun. Bairov izrek in njegova uporaba. Spektralna teorija v Hilbertovem prostoru.

Knjiga obravnava v glavnem tri teme. Najprej avtorja bralca sistematično vpeljeta v teorijo normiranih linearnih prostorov in omejenih linearnih operatorjev. Teorija gre tako daleč, da so vključeni Hahn-Banachov izrek (5. poglavje), princip enakomerne omejenosti in izrek o odprtih preslikavah (8. poglavje). Osmo poglavje vsebuje tudi uvod v teorijo perturbacij Fredholmovih operatorjev. Druga tema je spektralna teorija omejenih operatorjev. V 6. poglavju je v popolnosti obdelana Riesz-Schauderjeva teorija in v 9. poglavju spektralni izrek za omejene sebiadjungirane operatorje. Tretja tema je uvod v Frechetov diferencialni račun (7. poglavje). Izreki o implicitnih in inverznih funkcijah so zelo podrobno obdelani.

Obravnavanje omenjene snovi spremlja vrsta primerov iz klasične analize. Picardov in Peanov izrek o eksistenci rešitve diferencialne enačbe sta dokazana s sredstvi teorije metričnih prostorov. Kot primer uporabe Rieszovega izreka o izražavi zveznih funkcionalov v Hilbertovem prostoru avtorja dokazata Herglotzov izrek o integralski reprezentaciji nekaterih analitičnih funkcij. Fredholmova alternativa za linearne integralske enačbe je razložena v poglavju o spektralnih lastnostih kompaktnih operatorjev. Bairov izrek in princip enakomerne omejenosti sta uporabljena pri dokazu eksistence nekaterih patoloških zveznih funkcij.

Na koncu vsakega razdelka je veliko število poučnih nalog. Vse so rešljive s sredstvi, ki so razvita v knjigi. Zaradi zaključenosti vsebine je seveda nastalo nekaj težav. Banachovi prostori L_p sploh niso omenjeni, niti ni omenjena nobena vrste šibka topologija.

Knjiga je lepo napisana. Bralec spozna poleg osnovnih pojmov funkcionalne analize še precej neelementarnih izrekov klasične analize. Avtorja sta vsekakor uspela pri posredovanju duha in moči metod funkcionalne analize.

Z. B.

7. SEMINAR IZ FIZIKE: ATOMI

6. do 9. febr. 1973

24. OBČNI ZBOR DMFA SRS

10. febr. 1973

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko ljubljanske univerze, odsek za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Inštitut Jožef Stefan in Zavod za šolstvo SRS prirejajo v dneh od 6. do 9. febr. 1973 v Ljubljani v prostorih odseka za fiziko štiridnevni seminar za srednješolske učitelje fizike in matematike z naslovom ATOMI.

V dopoldanskem delu seminarja, ki se prične 6. febr. 1973 ob 9.00, bodo naslednja predavanja: dr. R. Kladnik: Elektron, dr. J. Strnad: Zgradba atoma, dr. M. Kregar: Magnetne lastnosti atoma, dr. D. Jamnik: Sevanje in vzbujena stanja, dr. I. Grabec: Ionizacija, dr. A. Moljk: Rentgenski spektri, dr. R. Blinc: Molekule.

Med odmori bodo predvajani filmi: Millikanov poskus, Uklon elektronov, Rutherfordov model atoma, Franck-Hertzov poskus in Fotoni in fotoefekt.

V popoldnevih si bodo udeleženci ogledali delo v raziskovalnih laboratorijih (elektronska mikroskopija, rentgenski fluorescenčni analizator, infrardeča spektroskopija) in delali praktične vaje v praktikumu, kjer si bodo izbrali po štiri izmed naslednjih vaj: spektralna občutljivost detektorjev, Franck-Hertzov poskus, rentgenski žarki, osnove vakuumске tehnike, fotoefekt, povratno sipanje protonov na monokristalih, elektron v magnetnem polju, resonančna absorpcija, plazma, razelektrenje v plinih, rentgenski spektri, optični spektri, uklon elektronov.

Daljši odmori med predavanji so namenjeni razgovorom o aktualnih problemih pouka. V petek, 9. febr. bo družabni večer.

V soboto, 10. febr. ob 9.00 bo občni zbor društva.

Vse, ki se zanimajo za seminar, prosimo, da se prijavijo z dopisnico na naslov DMFA SRS, Fizikalni seminar, Ljubljana, Jadranska 19, do 20. jan. 1973. Navedejo naj priimek in ime, šolo ali ustanovo, kjer delajo, prijavijo udeležbo pri vajah in ogledih, udeležbo na družabnem večeru in na občnem zboru. Za vsa morebitna dodatna pojasnila pa naj se obrnejo do sekretarja tečaja J. Pahorja na istem naslovu.

Vsak udeleženec bo dobil ob prihodu na seminar skripta s predavanji, ki bodo v dokončni obliki objavljena tudi v Obzorniku.

Jože Pahor

OBVESTILO NAROČNIKOM

Z novim letom postaja Obzornik za matematiko in fiziko dvomesečnik. Ob vedno večji dejavnosti našega društva se je namreč pokazala nujna potreba, razširiti smotre našega časopisa tako, da ne bo več samo strokovni informator, ampak pravo društveno glasilo, v katerem se bo zrcalilo vse življenje našega društva. Obzornik bo poslej izhajal na dva meseca, in sicer 1. januarja, 1. marca, 1. maja itd.

Na občnem zboru se bomo dogovorili o novih cenah, ki jih bomo objavili v naslednji številki. Prosimo, da dotlej počakate s plačilom naročnine.

KOMISIJA ZA TISK DMFA SRS