IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1972
Letnik 19
4

XIX. LETNIK — ŠTEVILKA 4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, OKTOBER 1972

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno.

Izdajo revije sofinancira Kulturna skupnost Slovenije.

Naročnina: za člane 20 din, za nečlane 30 din, za dijake in študente 10 din, za ustanove in podjetja 40 din, za inozemstvo 51 din (3 $), posamezna številka 8 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska c. 19, pp. 227, telefon: 61-564/22, tek. račun št. 50101-678-48363

Člani društva naj nakazujejo na tekoči račun Komisije za tisk 20 din naročnine in 10 din članarine, skupaj 30 din.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

CONTENTS

»MODERNA« MATEMATIKA: VZGOJNA IN FILOZOFSKA ZMOTA?

RENÉ THOM*

MOS 96A99
97A99

Priznan francoski matematik polemizira o zadnjih novostih v učnem načrtu svojega področja

Po mišljenju večine naših sodobnikov ima tako imenovana moderna matematika zelo ugledno mesto, ki je nekje med kibernetiko in teorijo informacij v vreči trikov, ki jih je varljiva publiciteta povzdignila v osnove moderne tehnologije, v nujno potrebno orodje za bodoči razvoj vsega znanstvenega spoznanja. Po drugi strani pa so po modernizaciji učnega načrta postali zaskrbljeni mnogi starši, ki niso več zmožni pomagati svojemu naraščaju. Nič več ne slišijo starih znanih pojmov v besednem zakladu svojih otrok in tako se počutijo izgubljeni, ko se soočijo z novim izrazoslovjem. Nekateri, osupli, vidijo v tem še en znak za prepad med generacijami in so začeli nasprotovati novim idejam. Nasprotno pa so drugi, predvsem tisti iz pedagoškega poklica, z navdušenjem sprejeli novi učni načrt, ideje in simbole. Kaj naj sklepamo iz vsega tega?

Novosti v učnem načrtu. Na kratko navedimo spremembe v učnem načrtu:

1. *Dodano gradivo:* (a) »Elementarna« teorija množic, raba znakov ($\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$) preslikave ene množice v drugo in kvantifikatorji. Najbolj presenetljivo od vsega pa je, da se množice sedaj pojavljajo povsod od otroškega vrtca pa vseskozi do zadnjega leta srednješolske vzgoje. K tej točki se bomo vrnili kasneje. (b) Razvoj algebraičnih pojmov; zakoni kompozicije na množici; pojem grupe, kolobarja in obsega. (c) Bolj zgodnja vpeljava osnov diferencialnega in integralnega računa, odvodov, nedoločenih integralov, elementarnih funkcij, kot so logaritemska in eksponentna funkcija.

2. *Izločena snov:* Tradicionalna evklidska geometrija, posebno težji deli planimetrije.

Po naštetem bo bralec opazil, da je bil učni načrt spremenjen z obsežnim dodatkom predvsem v višjih razredih srednje šole. Težnja, poudariti algebro na rovaš geometrije, je še večja pri pouku na univerzi.

Algebra in geometrija

Izločitev tradicionalne evklidske geometrije je osnovana na dveh argumentih. Prvi je teoretičen: poglobljen študij aksiomov, ki je sledil Hilbertovim Grundlagen der Geometrie, je pokazal, da je pripisovana strogost Evklidovih Elementov v veliki meri dozdevna; saj je sklicevanje na intuicijo često. Kot posledica, pravi argument, je bolje, da se izogibamo evklidski geometriji tako, da razvijemo algebraične pojme, s katerimi je možno strogo podajanje. Drugi argument je praktičen: klasična planimetrija s svojo dovršeno

---

* Renéja Thoma imajo za vodilnega francoskega geometra. Za svoja dela iz topologije diferencialnih mnogoterosti je dobil Fieldsovo medaljo na Mednarodnem kongresu matematikov l. 1958. Ta razprava je prevod članka, ki je izšel v L'Age de la science 3: No. 3, 225—36, in je izšel z dovoljenjem Dunod Editeurs, Paris. Address: Institut des Hautes Études Scientifiques, 91 Buressur-Yvette, France.

študijo o lastnostih trikotnika je neuporabna in dlakocepska. Le kdo v svojem življenju sploh kdaj potrebuje »Simpsonovo premico« ali »devet-točkovni (Feuerbachov) krog«?

Obdelajmo najprej argument o koristnosti. Pravijo, da je algebra bolj koristna in potrebna kot geometrija. Ne moremo zanikati splošne znanstvene uporabnosti linearne algebre ali določenih pojmov multilinearne algebre. Pri splošni komutativni algebri — polinomih itd. — pa je umestna previdnost. Komu je bilo kdaj v navadnem življenju potrebno rešiti kvadratno enačbo ali rabiti eksplicitno pojem modula nad kolobarjem? Trditev o uporabnosti algebre ni tako prepričljiva, kot izgleda. Kar pa zadeva diferencialni in integralni račun — točka (c) zgoraj — sta oba nujno potrebna za kakršnokoli podajanje klasične fizike.

Na elementarni ravni uporaba algebre gotovo vodi k mnogim poenostavitvam. Reševanje »besednih« problemov »s sklepanjem«, ki smo jih imeli, ko nam je bilo dvanajst let, je zahtevalo izredno duševno spretnost, medtem ko je algebraična rešitev čisto mehanična. Tu se ne da zanikati prihranka na premišljevanju, ki ga je vpeljala algebra. V vse bolj kompleksnih situacijah pa prednost algebre postopoma izginja. Descartes je uvedel analitično geometrijo zato, da bi zreduciral geometrijo na algebro. Toda dejstvo, ki je dobro znano vsem, ki so se na hitro učili matematike, da bi bili sprejeti na univerzo, je, da prednost analitičnih metod pred geometrijskimi za rešitev kvalitativnega teoretičnega problema še zdaleč ni odločilna.

»*Modernizem*«. Za profesionalne matematike je uporaba algebre kot orodje dokaza izredno pomembna in mogoče bistvena. Sodobni matematiki, prepojeni z idejami Bourbakija (1), imajo naravno tendenco, da v srednješolske in univerzitetne tečaje vpeljejo algebraične teorije in strukture, ki so bile tako koristne v njihovem lastnem delu in ki so prevladujoče v današnjem matematičnem mišljenju. Toda upravičeno se lahko vprašamo, ali bi tisto, kar potrebujejo specialisti, in njihova najnovejša odkritja vpeljali v šolski učni načrt. Tej skušnjavi ne podležejo samo matematiki. Čital sem biološke tekste, — tako za študente prvega kot višjih letnikov — v katerih so dvojna vijačnica DNA Watsona in Cricka ter natančen mehanizem encimov za njihovo reprodukcijo predstavljeni kot končnoveljavna znanstvena resnica. Novosti ne bi smeli vpeljevati v učni načrt brez določene čakalne dobe. V Franciji bi se bili morali zanesti, da bodo šolske inspekcijske skupine zagotovile potrebno stabilnost v učnem načrtu. Toda iz strahu, da bi ljudje pristen skepticizem razlagali kot sklerozo zaradi starosti, ta ustanova ni delovala s tako učinkovitostjo, kot bi želeli. Sicer pa se teksti morajo spreminjati in uredniki morajo živeti.

Problem geometrije. Pri zadnji analizi argument o koristnosti snovi, ki jo podaja učni načrt, najbrž ni odločilen. Ne ozirajmo se na »kulturo«, — »to je na tisto, kar ostane, ko je vse drugo pozabljeno« — kot na ostanek preteklosti. Nekateri še vedno mislijo, da je v taki ali drugačni obliki eden od namenov poučevanja *selekcija*, to se pravi, določanje zmožnosti posameznih študentov in razvijanje teh zmožnosti do maksima s posebnim poudarkom na nadarjenem študentu. Trdim, da je tako nalogo nemogoče izpeljati v okviru stroke, ki ne vsebuje nobenih neutemeljenih in neuporabnih aspektov. Da bi popolnoma presodili zmožnosti študenta, ga moramo postaviti v aktivno vlogo in zahtevati od njega, da pokaže individualno pobudo in podjeten duh. Vse to je nemogoče doseči znotraj okvira »koristnega« študija, pri katerem se vsi elementi, vpeljani zaradi svoje tehnične uporabnosti, poučujejo dogmatično, in kjer učenjaška popolnost pomeni natančno in hitro pomnjenje dane snovi. Samo predmeti, ki imajo kvaliteto »igre«, imajo vzgojno vrednost in od vseh takih iger je evklidska geometrija, ki se stalno sklicuje na osnove, ki jih intuitivno razumemo, še najmanj neutemeljena in najbogatejša po pomenu.

Če tako sklepamo, je sedanje stremljenje, da bi zamenjali geometrijo z algebro, vzgojno pogubno in moralo bi biti obratno. Za to je preprost vzrok: medtem ko obstajajo geometrijski problemi, algebraičnih problemov ni. Tako imenovani algebraični problem je lahko samo preprosta vaja, ki zahteva slepo uporabo aritmetičnih pravil in vnaprej določenega postopka. Razen redkih izjem od študenta ne moremo zahtevati, naj dokaže algebraičen izrek; želeni odgovor je ali skoraj jasen in ga lahko dobimo z direktno substitucijo definicij, ali pa problem spada v kategorijo teoretične algebre in njegova rešitev presega zmožnosti celo najbolj nadarjenega študenta. Če le neznatno pretiravamo, lahko rečemo, da je vsaka naloga v algebri ali trivialna ali nerešljiva. Nasprotno pa geometrijske naloge predstavljajo širok spekter privlačnih problemov.

Geometrijski problemi zahtevajo kombinacijo časa, truda, koncentracije in zmožnosti asociacije, kar pa zmore malo študentov. Morda je evklidska geometrija tako kot prevajanje iz latinščine ena od onih imenitnih, zastarelih vaj, ki so omejene na elito in nezdružljive z masovno vzgojo. Če je stvar taka, nujno postane odprava geometrije iz učnega načrta socialno vprašanje, ki ga ne želim tu obravnavati. Vendar pa bi bila velika zmota, če bi upali, da bomo učenje matematike poenostavili s tem, da bomo geometrijo nadomestili z algebraičnimi strukturami, ki jih bomo potem brez prave motivacije na široko in prezgodaj poučevali.

Strogost. Zdaj se lotimo ugovora proti evklidski geometriji, ki kritizira aksiomatiko Elementov, češ da je nepopolna in da ji manjka strogosti. Najprej lahko pokažemo, da so geometrijske knjige že zdavnaj opustile težko, neprebavljivo Evklidovo retoriko. Nekateri so gojili upanje, da bi Elemente nadomestili s sprejemljivo verzijo Hilbertovih Grundlagen. Ni presenetljivo, da se je to upanje izjalovilo zaradi strašne zamotanosti tega dela. Ne moremo zavzeti stališča do tega problema, ne da bi se najprej lotili filozofskega vprašanja, kateri koncept matematične strogosti naj usvojimo. Možna so tri stališča: (1) formalni vidik. V formalnem sistemu S je trditev P resnična, če se da izpeljati iz aksiomov sistema S s končnim številom korakov, ki so dovoljeni znotraj sistema S. (2). Realistični ali platonski vidik. Matematične resnice obstajajo neodvisno od mišljenja, tako kot platonske misli. Trditev P je resnična, kadar izraža neki odnos, ki v resnici obstaja med idejami, t. j., kadar je ta trditev ideja višjega reda, to je ideja, ki ureja skupino podrejenih idej. (3) Empirični ali sociološki vidik. Dokaz P je sprejet kot strog, če ga odobrijo vodilni strokovnjaki dobe.

Od vseh treh vidikov dajejo danes matematiki prednost prvemu. Na prvi pogled je najbolj zapeljiv; ne vzbuja ontoloških težav kot drugi, in ni tako nedoločen in poljuben kot tretji. Bertrand Russell je rekel, da je »matematika predmet, pri katerem nikoli ne vemo, o čem govorimo, niti ali je tisto, kar govorimo, resnično«. (2). Na žalost pa je težko braniti čisto formalni vidik, paradoksno iz formalnih vzrokov. Poznamo težave, ki so zaradi Gödelovega izreka povezane s formalizacijo aritmetike. Profesor Kreisel je postavil v svojem nedavnem članku v L'Age de la science (3) formalni vidik na preizkušnjo. Kar zadeva mene, sem zadovoljen z naslednjo ilustracijo: vzemimo, da nam je uspelo za formalno teorijo S napraviti elektronski stroj M, ki lahko s strašansko hitrostjo izvršuje vse osnovne korake v S. Hočemo preskusiti pravilnost neke formule F iz teorije. Po postopku, ki znaša 10^{20} elementarnih operacij in ki je izvršen v nekaj sekundah, nam da stroj M pozitiven odgovor. Toda kateri matematik bi brez obotavljanja sprejel veljavnost takega »dokaza«, če ne more preveriti vseh korakov?

Pomen v matematiki. Vsak matematik, ki ima majčkeno umske poštenosti, bo priznal, da more v vsakem od svojih dokazov dati pomen simbolom, ki jih uporablja. Zaradi tega se njegovo delo razlikuje od dela teoretičnega fizika, ki dostikrat ne okleva in magično zaupa krepostim slepega formalizma v upanju (često varljivem), da bo luč na koncu tunela pregnala vmesno temo.

Če se odpovemo formalni definiciji strogosti, moramo nujno izbirati med drugima dvema možnostma. Če bi vse to upoštevali, bi matematiki morali hrabro priznati svoja najgloblja prepričanja in potrditi, da imajo matematične oblike res obstoj, ki je neodvisen od duha, ki jih proučuje. Ta obstoj je brez dvoma različen od konkretnega obstoja zunanjega sveta, toda še vedno je z njim v globoki zvezi, ki jo je težko opisati. Če je matematika samo poljubna igra, ki je slučajen izdelek možganske dejavnosti, kako naj potem razložimo njen nesporen uspeh pri opisovanju vesolja? Matematike ne najdemo samo v misteriozno določenem redu fizikalnih zakonov, ampak tudi v bolj skritem, čeprav ravno tako gotovem, načinu, v neskončnem zaporedju živih in neživih oblik ter v tvorbi in razpadu njihovih simetrij. Kljub videzu je zaradi tega najnaravnejša in filozofsko najbolj ekonomična hipoteza, ki pravi, da platonske ideje dajejo obliko vesolju.

Toda v kateremkoli danem trenutku imajo matematiki le nepopolno in iz delcev sestavljeno predstavo tega sveta idej. Kot posledica je vsak dokaz predvsem odkritje nove strukture, katere elementi ležijo v človekovi zaznavi ločeni, dokler jih razum ne združi. V tem smislu je vsak dokaz sokratsko izkustvo, ki zahteva od bralca novo stvaritev psiholoških procesov, ki so potrebni, da prikličemo implicitno resnico, vse elemente, katere ima, a so skriti v neformuliranem stanju. V tem smislu ne obstaja protislovje med drugim in tretjim vidikom. Svet idej se nam ne odkrije z eno potezo; v svoji zavesti ga moramo stalno in nepretrgoma na novo ustvarjati.

Prav bi bilo, če bi nasprotniki ontološkega vidika premišljevali o naslednjem: Ni takega primera v zgodovini matematike, da bi napaka enega moža usmerila vse področje na napačno pot. Matematika se je često izgubila v formalnem razvoju nepomembnih, nezanimivih teorij. To se je dogajalo v preteklosti, se dogaja danes in se bo gotovo dogajalo tudi v prihodnosti. Toda nikoli se ni pomembna napaka vrinila v sklep, ne da bi bila skoraj takoj odkrita. Kako naj bi razložili tako soglasje, če ne bi ustrezalo splošnemu mnenju, ki je rezultat duševne borbe s stalnimi, brezčasnimi in splošnimi omejitvami? S tem zaupanjem v obstoj idealnega sveta matematiku ni treba pretirano skrbeti o mejah formalnega postopka; tako lahko tudi pozabi na problem nekontradikcije, zato ker svet idej neskončno presega naše »tehnične možnosti«. Ultima ratio naše vere v resničnost izreka ima sedež ravno v intuiciji. Po sedaj pozabljeni etimologiji je teorem predvsem predmet vizije.

Vsak se mora sam odločiti. Ne obstaja stroga definicija strogosti. Zato bomo trdili, da je dokaz strog, če ga sprejmejo vsi bralci, ki so zadostno izobraženi in so ga pripravljeni razumeti. Nadalje, dejstvo, ki vodi k prepričljivosti, izvira iz zadosti jasnega razumevanja vsakega vsebovanega simbola, tako da njihova kombinacija bralca prepriča. S tega vidika je strogost (ali njeno nasprotje, nepreciznost) nujno lokalna lastnost matematičnega sklepanja. Ne potrebujemo zamotane aksiomatične strukture ali izpiljenega idejnega stroja, da presodimo veljavnost nekega zaporedja sklepov. Zadostuje edino, da razumemo pomen vsakega vsebovanega simbola in da imamo jasno predstavo o tem, kako jih kombiniramo.

Meje in potreba aksiomatizacije. Tako stališče predlaga, da nekoliko odstopimo od aksiomatike. Formalizirati neko teorijo pomeni, začeti s snovjo, katero daje teorija, ki je urejena kot intuitivna »morfologija« T, dati formalno množico simbolov in pravil, ki porajajo formalen sistem S, ki je izomorfen morfologiji T; izomorfizem $S \to T$ je pri tem natanko korespondenca, ki daje vsakemu simbolu s, ki spada v S, svoj »pomen«, t.j. intuitivno vsebino v T (svojo semantično realizacijo, bi rekli logiki). Ali smemo upravičeno upati, da simbolični izrazi množice S popolnoma obsegajo intuitivno snov teorije T? Na misel nam takoj pride primer in sicer iz naravnih jezikov. Jezikoslovci formalistične šole vztrajno poskušajo aksiomatizirati slovnico in sintakso naravnih jezikov. Pri tem so naleteli na določeno število formalnih procedur — generativne in transformacijske slovnice — katerih veljavnosti na ravni formalnega opisa stavkov, ki so vsebovani v celoti, ne moremo zanikati. Toda če te postopke sistematiziramo v vrsto pravil, katerim potem slepo sledimo do njihovega logičnega zaključka, dobljeni stavki kmalu postanejo tako dolgi in zamotani, da izgubijo ves pomen.

Ne vidim vzroka, zakaj se podoben fenomen ne bi mogel zgoditi tudi v matematiki; pri ekstrapolaciji formalnega mehanizma do skrajnosti njegovih tvornih sposobnosti ne traja dolgo, pa dobimo formule, ki so tako dolge in zamotane, da izgine vsaka možnost intuitivne interpretacije. Tako dobljeni »teoremi« bodo verjetno formalno pravilni, toda semantično nepomembni. Tako moramo pričakovati, da bomo za dano intuitivno teorijo T morali uporabiti ne ene, ampak več lokalnih aksiomatizacij; vsaka lokalna aksiomatizacija S ima kontaktno cono Z_s v morfologiji, za katero je S veljavna; toda takoj, ko napravimo formule v S, ki so predolge ali zapletene, razumljivost izgine. Na robu cone Z_s preneha semantična zveza med S in Z_s; to onemogoča nadaljevanje preko roba Z_s izomorfizma $S \rightarrow T$, ki je definiran s pomenom. Ideja, da bi teorijo T lahko generirali samo z enim formalnim sistemom S, je a priori ravno tako komaj verjetna kot ideja, da mora biti zemlja ravna, ali da neko površino lahko pokrijemo z enim samim sistemom koordinat. Zanimivo bi bilo, če bi to prenehanje semantične zveze bolje razumeli. Spodaj bomo videli presenetljiv primer, kaj se zgodi, če so pravila kombinacije nezdružljiva s semantičnimi kvalitetami simboliziranih resnic (v tem primeru je to Booleov formalizem, uporabljen v navadnem jeziku). Izgleda, da se v primeru matematike tak semantični zlom dogodi na progresiven, nejasen način (primer »transfinitnih števil« v teoriji množic, na primer).

Nesporna prednost lokalne formalizacije je često ta, da naredi ideje, ki so intuitivno razumljive, bolj precizne in, kar je najpotrebneje, da dopušča stik med matematiki. Ker vsa občila, govorjena ali pisana, uporabljajo enodimenzionalno morfologijo, je treba intuitivno morfologijo T (ki je na splošno definirana v večdimenzionalnem prostoru) preslikati v formalen sistem enodimenzionalnih znakov. V zadnjih nekaj letih je pomembnost aksiomatizacije kot sredstva sistematizacije in raziskovanja močno narasla. Kot metoda sistematiziranja je nedvomno učinkovita; kar pa zadeva raziskovanje, je pa stvar bolj dvomljiva. Značilno je, da nismo dobili nobenega novega, količkaj pomembnega izreka iz ogromnega napora pri sistematiziranju Nikolaja Bourbakija (ki sam po sebi ni prava formalizacija, ker Bourbaki uporablja neformaliziran meta-jezik). Če se matematiki sklicujejo na Bourbakija, navadno najdejo več hrane za premišljevanje v njegovih vajah — pri katerih je avtor vključil konkretno snov — kot pa v deduktivnem delu teksta. Treba je jasno povedati: aksiomatizacija je delo specialistov in zanjo ni prostora v srednješolskem ali visokošolskem poučevanju, razen za tiste profesionalce, ki se specializirajo v študiju osnov. Vse to razloži, zakaj so očitki o neskladnosti, naperjeni proti evklidski geometriji, nepomembni; ne dotikajo se vrednosti lokalnega intuitivnega sklepanja.

»Genetična« pomembnost geometrije: zveznost nastopa pred nezveznostjo. Prejšnja razglabljanja odkrivajo ključ zgodovinskega uspeha Evklidovih Elementov. Evklidska geometrija je prvi primer transkripcije dvo- ali trodimenzionalnega prostorskega postopka v enodimenzionalen jezik pisanja. Pri tem se evklidska geometrija sklicuje na strogo, precizno situacijo, postopek, ki je že navzoč v vsakodnevnem jeziku. Sicer pa je primarna funkcija navadnega jezika opisovati prostorsko-časovne procese, ki nas obdajajo in katerih topologija je očitna v sintaksi stavkov, ki jih opisujejo (4). V evklidski geometriji imamo opravka z isto funkcijo jezika, toda sedaj je grupa ekvivalenc, ki delujejo na likih, Liejeva grupa, metrična grupa, v nasprotju z grupami, ki opisujejo bolj topološke invariante oblik, ki nam dovoljujejo, da razpoznavamo predmete zunanjega sveta, kot jih opisujejo njihova imena v naravnem jeziku.

Kot taka je geometrija naraven in mogoče nenadomestljiv posrednik med navadnim jezikom in matematičnim formalizmom, kjer je vsak predmet spremenjen v simbol in kjer je grupa ekvivalenc spremenjena v identiteto pisanega simbola s samim seboj. S tega stališča more biti stopnja geometrijske misli stopnja, ki je ne moremo opustiti v normalnem razvoju človekove razumske dejavnosti. V zadnjih petdesetih letih je bil dan velik poudarek obnovi geometrijskega kontinua iz naravnih števil, uporabljajoč teorijo Dedekindovih presekov ali dopolnitev obsega naravnih števil. Pod vplivom aksiomatičnih in učbeniških tradicij je človek zaznal v nezveznosti prvo matematično Bitje: »Bog je ustvaril cela števila, vse drugo je delo človekovo«. To načelo, ki ga je izrekel algebraik Kronecker, nam odkriva več o njegovi preteklosti bankirja, ki je obogatel z denarnimi špekulacijami, kot pa o njegovem filozofskem nazoru. Skoraj ni dvoma, da je, s psihološkega in — za avtorja — ontološkega stališča, geometrijski kontinuum prvobitna resnica. Če imamo sploh kaj zavesti, potem je to zavest časa in prostora; geometrijska zveznost je na neki način neločljivo povezana z zavestno mislijo.

Toda postopoma je ta, v začetku homogeni, amorfni kontinuum prevzel strukturo, in najpomembnejše orodje za strukturiranje je metrična grupa. Samo ta nam omogoča, da vpeljemo nezveznost in diskretne operacije v homogeno prostranstvo. To pa je zelo kompliciran proces. Že v začetku smo imeli vse topološke lastnosti kontinua, toda šele v novejšem času se je matematika vrnila k svojim virom, s tem da je osnovala topologijo in se tako osvobodila prevlade metrične grupe. Taka teorija, ki ni niti metrična niti kvantitativna, je v osnovi kvalitativna in temelji samo na diskretnem simbolizmu semiformaliziranega jezika. Toda topološke invariante, ki so globlje zakoreninjene, si razum teže predstavlja kot bolj površinske metrične invariante. S tem v mislih lahko uvidimo, da se zgodi prehod od vsakodnevnega mišljenja do formaliziranega mišljenja naravno z geometričnim premišljevanjem. Tako je bilo vedno v zgodovini človekovega mišljenja in, če seveda verujemo v Haeckelov zakon ponavljanja, ki trdi, da gre posameznik v svojem razvoju skozi vse stopnje razvoja vrste, bi moralo biti tako tudi v normalnem razvoju razumskega mišljenja.

Teorija množic

Sedaj prihajam do svoje prve točke, do teorije množic. To so bistvene litanije, ki so jih intonirali zagovorniki tako imenovane moderne matematike. Nekateri zatrjujejo, da dovoljuje uporaba teorije množic popolno prenovitev poučevanja matematike in da bo zaradi te spremembe povprečni študent lahko obvladal učni načrt. Nepotrebno je reči, da je to čista iluzija. Dokler je to raba očitnih dejstev naivne teorije množic, seveda lahko vsakdo sledi. Toda to ni niti matematika niti logika. Kakor hitro pa se soočimo s pravo matematiko (t.j. z realnimi števili, z geometrijo, s funkcijami), vidimo, da ne obstaja kraljevska pot, in da je le manjšina študentov zmožna snov popolnoma razumeti.

Če vse pretehtamo, vidimo, da ima pretiran optimizem, ki je nastal z uporabo simbolov iz teorije množic, svoje korenine v filozofski zmoti. Mislili so, da je z učenjem rabe simbolov $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ možno narediti eksplicitne mehanizme, ki so osnova vsemu mišljenju in sklepanju. Človek dvajsetega stoletja je navdušeno znova odkril silogizme Darapti in Celarent, ki so jih učili srednjeveški sholastiki. Toda kakšno poslabšanje je nastalo! Ko je v devetnajstem stoletju Boole napisal slavno razpravo o algebri, ki nosi njegovo ime, ji ni okleval dati naslov »Raziskava o zakonih mišljenja«. Naivno prepričanje, da najde vsako sklepanje svoj model v manipulacijah teorije množic, so imeli celo taki moderni filozofi kot neopozitivisti. Niti Aristotel niti srednjeveški sholastiki niso imeli te iluzije. Kot nas J. Vuillemin opomni (5), ima aristotelska logika svojo osnovo v bogati in kompleksni ontologiji substance. Moderni protagonisti teorije množic bi morali spoznati, da ta teorija ni sposobna razložiti niti najelementarnejših deduktivnih korakov navadnega mišljenja. Dovolite, da dam primer tega dejstva.

Veznika ali *in* in. Klasično učijo, da je slovnični ekvivalent simbola $\cup$ (unija) *ali* in simbola $\cap$ (presek) *in*. Uporabimo to pravilo na dveh preprostih stavkih, v katerih sta osebka lastni imeni:

(1) Peter ali Janez prihaja.
(2) Peter in Janez prihajata.

Prvi stavek lahko povemo drugače: »Peter prihaja ali Janez prihaja.« Tu obstaja popolno soglasje znaka *ali* z logično unijo $\cup$, s pogojem, da se veznik ne nanaša na osebek, ampak na glagol »prihajati«.

Tudi drugi stavek moremo povedati drugače: »Peter prihaja in Janez prihaja«. Ko smo to naredili, spoznamo, da je prvotni stavek rahlo dvoumen, kajti implicitno vsebuje to, kar lingvisti imenujejo »presupozicija«. Na primer »Peter in Janez prihajata« često predpostavlja: »Peter in Janez prihajata *skupaj*«. Medtem ko sama fraza »Peter ali Janez« nima semantične razlage, si »Peter in Janez« lahko predstavljamo kot nekaj, kar je narejeno iz para posameznikov, Petra in Janeza, ki sta prostorsko skupaj. To dejstvo razloži različno slovnično obravnavo glagolov v (1) in (2): veznik *in* zahteva množino, ker predpostavlja določen prostorski stik osebkov.

Oglejmo si nekaj stavkov, v katerih so vezniki uporabljeni z lastnostmi.

(3) Peter je majhen ali inteligenten.
(4) Peter je majhen in inteligenten.
(5) Ivankini lasje so sivi ali rjavi.
(6) Ivankini lasje so sivi in rjavi.

Stavka (4) in (5) sta pomensko sprejemljiva, medtem ko sta lahko stavka (3) in (6) dvomljiva ali nesprejemljiva. To opazovanje lahko ekstrapoliramo v naslednji princip: Izključitveni princip: Če sta X in Y dve lastnosti, stavka

A je X ali Y	ne moreta biti oba
A je X in Y	pomensko sprejemljiva

Kadar lahko stoji pred »X ali Y« osebek, moremo reči, da X in Y pripadata istemu pomenskemu področju: na primer, »siv« in »rjav« v stavkih (5) in (6). V tem primeru je »X in Y« načelno brez pomena. Vendar pa obstaja pomembna izjema in to je primer, kjer *in* ne določa logičnega preseka, pač pa prostorski stik. Tako je popolnoma mogoče, da rečemo:

(7) Ta zastava je bela ali modra.
(8) Ta zastava je bela in modra.

Dejstvo, da veznik v (8) nima pomena $\cap$, razloži, zakaj »Ta zastava je bela in modra« pomeni, da je »Ta zastava je bela« napačno.

Zares, pogoji, ki so potrebni, da bi imel izraz »X ali Y« pomen, so izredno omejeni; tako je »Ivanka ima rdeče ali kostanjeve lase« seveda bolj sprejemljivo kot »Ivanka ima rdeče ali rjave lase«, ker sta si v izrazih pomenske kategorije za barve las »rdeče« in »kostanjevo« blizu, medtem ko si »rdeče« in »rjavo« nista. Veznik *ali* deluje, če govorimo geometrično, kot znižanje praga med področji privlačnosti, ki je definirana s pridevnikoma »rdeče« in »kostanjevo«. Kadar je pomenska razlika med dvema lastnostma X in Y prevelika, posebno če ti lastnosti pripadata različnim pomenskim področjem — kot je to pri fizični lastnosti in moralni lastnosti — potem izgubi izraz »X ali Y« ves pomen.

Čeprav je precej očitno, izgleda, da je to dejstvo ušlo avtorjem mnogih učnih knjig o teoriji množic. Študentom dajejo vaje iz Boolove algebre, ki razpravljajo o »kockah, ki so velike ali modre« in o »Parižanih, ki so plešasti ali bogati«. Ne samo da so te vaje tuje in brez koristi, lahko postanejo celo škodljive za otrokovo umsko ravnotežje, če z njimi pretiravamo. Eden osnovnih pogojev, ki jih nalaga natančno premišljevanje, je ravno ta, da se moramo izogibati mešanju različnih semantičnih področij. To mešanje ima ime — delirij. Ko poskuša pridati pomen vsem izrazom, ki so narejeni v navadnem jeziku po Boolovih pravilih, gre logik najprej k izmišljeni, zmedeni rekonstrukciji sveta.

Vse te točke kažejo ozko območje teorije množic v opisovanju navadne misli. Vsakodnevno presojanje zahteva globoke psihične mehanizme, kot na primer analogijo, ki je nikoli ne moremo prevesti na nivo operacij teorije množic. V takih primerih je pomemben faktor organizacijski izomorfizem med pomenskimi področji, ki so homološko povezana.

V takem primeru se ne bo nihče trudil, da bo postavil sklepanje v silogistično obliko. Lisica ve, da, če so kokoši v kokošnjaku in je kokošnjak na dvorišču, potem so kokoši na dvorišču; ne muči se s teorijo množic. Vsakdo uporablja teorijo množic od trenutka, ko začne eksistirati, ravno tako kot M. Jourdain v Molièrovem Le Bourgeois Gentilhomme uporablja prozo, ne da bi se tega zavedal. Nekateri pravijo, da jo je bolje vede uporabljati. Prednost, če je tu sploh kakšna, se nanaša na retoriko. Samo do tiste mere, ko je tehnika matematičnega dokaza še vrsta retorike, se izplača nadaljevati z lokalnimi formalizacijami — ki so v resnici lokalne »spacializacije« — in uporabljati za njih formalizem teorije množic. Prepričljiva sila logičnega sistema prihaja iz prostorskih vključitev in ne obratno. To nam kaže na stališče, ki ga mora smiselna vzgojna misel zavzeti do teorije množic. V svoji preprosti, stvarni obliki naj bi jo vpeljali v otroškem vrtcu, ki je njeno naravno bivališče. V prvih letih srednje šole naj bi se dijaki naučili uporabe znakov $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subset$; kasneje naj bi jih seznanili s kvantifikatorji in s tem naj bi se končalo.

Niti v čisti matematiki ni gotovo, da ima vsak sklep model v teoriji množic. Slabo razloženi paradoksi, ki slabijo formalno teorijo množic, opominjajo matematika na nevarnosti, ki ga čakajo z nepremišljeno rabo teh, na videz nedolžnih, znakov. Mogoče celo v matematiki obstaja kvaliteta in se upira redukciji na množice. Staro upanje Bourbakija, da bi videl naravno nastajati matematične strukture iz hierarhije množic, iz njihovih podmnožic in iz njihovih kombinacij, je brez dvoma samo iluzija. Nihče ne more premišljeno uiti vtisu, da se najpomembnejše matematične strukture (algebraične strukture, topološke strukture) pojavljajo kot osnovni podatki, ki jih je vsilil zunanji svet, in da njihova iracionalna neenakost najde svoje edino opravičilo v realnosti.

LITERATURA IN OPOMBE

1. Nicolas Bourbaki je nom-de-plume, ki si ga je v tridesetih letih 20. stoletja prisvojila skupina odličnih mladih francoskih matematikov, ki so se lotili veličastne naloge reorganizacije matematike v smislu osnovnih strukturalnih komponent. To delo se nadaljuje iz leta v leto, člani te skupine pa morajo glede na Bourbakijeva pravila odstopiti, ko so stari 50 let.

2. Bertrand Russell, citiran v A. Hooper, 1948. Makers of mathematics. N. Y.: Random House, p. 384.

3. G. Kreisel. 1970. Formalistično-pozitivistični nauk matematične natančnosti z vidika izkustva. L'Age de la science 3: 17—46.

4. R. Thom. 1970. Topologie et linguistique. V Essays on Topology and Related Topics, André Haefliger and Raghavan Narasimham, eds. (Mémoires dédiés à Georges de Rham). New York: Springer-Verlag, pp. 226—48.

5. J. Vuillemin. 1967. De la logique à la théologie. Paris: Flammarion.

Prevedla T. B.
iz American Scientist Vol 59, No 5

LASTNA MASA FOTONA*

J. STRNAD

UDK 538.3, 539.122

Članek obravnava zanesljivost, s katero potrjujejo merski podatki enačbe Maxwellove elektrodinamike, v kateri foton nima lastne mase. Navedeni so pojavi, ki bi jih morali opaziti, če bi imel foton od nič različno lastno maso. Na kratko so opisani nekateri poskusi in dobljene ocene za zgornjo mejo fotonove lastne mase, ki jih dajo merjenja.

THE PHOTON REST MASS

In this article the accuracy with which experimental data confirm the equations of Maxwell's electrodynamics with a zero photon rest mass is considered. Phenomena that would be encountered if the photon should have a non-zero rest mass are reviewed. Some experiments are discussed briefly and upper limits for the photon rest mass that can be deduced from experimental data are estimated.

V zadnjem času so podvomili fiziki v več ugotovitev, ki so se zdele poprej nedotakljive. Upoštevali so možnosti, da obstajajo v naravi delci z električnim nabojem, ki ni večkratnik osnovnega naboja, delci, ki so hitrejši od svetlobe, delci, ki imajo magnetni naboj... Dandanes je posvečen takim delcem nemajhen delež poskusov in teoretičnih razglabljanj. Obstoj nekaterih izmed teh delcev je skrajno dvomljiv, a fiziki si prizadevajo vsaj bolje razumeti zakone, ki prepovedujejo njihov obstoj. S tega stališča je smiselno postaviti vprašanje o fotonovi lastni masi.** Sicer zaupamo *Maxwellovi elektrodinamiki*, ki zahteva foton brez lastne mase, in na njej osnovani kvantni elektrodinamiki, ki je sploh najnatančnejša obstoječa fizikalna teorija. Vendar bi bilo možno, da bi imel foton zelo majhno lastno maso, če bi ta prispevala k enačbam Maxwellove in kvantne elektrodinamike zelo majhen popravek, ki ga do zdaj še ne bi bilo možno zaznati pri poskusih. Zato je vredno premisliti, kako zanesljivo potrjujejo merjenja Maxwellovo elektrodinamiko. Razglabljanje o fotonovi lastni masi lahko tudi koristi boljšemu razumevanju Maxwellove elektrodinamike.

Trditev, da foton nima lastne mase, je treba razumeti takole: foton ima samo lastno maso, ki jo mora neizogibno imeti po načelu nedoločenosti. Ena izmed oblik tega načela postavlja spodnjo mejo za produkt nedoločenosti energije δW in časa δt, ki je na razpolago za merjenje energije: $\delta W \delta t \geqq \frac{1}{2}\hbar$. Fotoni so stabilni in je treba zanje upoštevati v skrajnem primeru za čas δt starost vesolja, to je okoli 18 milijard let. Z zvezo $\delta W = c^2 \delta m$ ocenimo spodnjo mejo fotonove lastne mase z $m_s = \delta m = \delta W/c^2 = \frac{1}{2}\hbar/c^2\delta t = 10^{-69}$ kg.

Najznačilnejši pojavi, do katerih bi prišlo, če bi imel foton lastno maso (če bi bili dosledni bi morali reči »večjo lastno maso kot m_s«) so:

Hitrost elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru bi bila odvisna od frekvence.

Poleg transverzalnega elektromagnetnega valovanja bi obstajalo še longitudinalno elektromagnetno valovanje. Z drugimi besedami: poleg levo in desno krožno polariziranih fotonov bi obstajali še longitudinalno polarizirani fotoni.

V Coulombovem zakonu za točkasta naboja bi se pojavil dodaten, od razdalje nabojev odvisen faktor.

---

* Prirejeno po predavanju na tretji stopnji v okviru »Izbranih poglavij iz fizike«.

** Podobno se vprašamo o elektronskem in mionskem nevtrinu. Tudi za nevtrina prevladuje prepričanje, da nimata lastne mase. Vendar navajajo preglednice osnovnih delcev zgornji meji za lastno energijo elektronskega (60 eV) in mionskega nevtrina (1,2 MeV). Za maso fotona v preglednicah osnovnih delcev do zdaj niso navajali zgornje meje. Najnovejša preglednica pa že vsebuje to mejo.

Soroden faktor bi nastopil tudi v enačbi za gostoto v magnetnem polju statičnega magnetnega dipola.

V tem prispevku so zbrana poenostavljeno opisana merjenja, po katerih sklepamo na zgornjo mejo m_z za maso fotona.* Z gotovostjo bi lahko trdili, da foton nima lastne mase, če bi se zgornja meja m_z, ki jo dajo merjenja, približala izračunani spodnji meji m_s.

Hitrost elektromagnetnega valovanja. V specialni teoriji relativnosti so celotna energija delca W, gibalna količina p in lastna energija mc^2 povezane z enačbo

$$W^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{1}$$

(c je hitrost svetlobe v praznem prostoru v Maxwellovi elektrodinamiki in v specialni teoriji relativnosti, v veljavnost katere ne podvomimo.) Energija W in gibalna količina p sta povezani s krožno frekvenco ω in z velikostjo valovnega vektorja k: $W = \hbar\omega$, $p = \hbar k$. Z njima zapišemo jakost električnega polja in gostoto magnetnega polja v ravnem elektromagnetnem valovanju kot $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\, e^{i(kr - \omega t)}$ in $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0\, e^{i(kr - \omega t)}$. Enačbo (1) preoblikujemo z uvedbo velikosti valovnega vektorja $K = mc/\hbar$, ki ustreza fotonovi lastni masi m:

$$\omega^2/c^2 = k^2 + K^2. \tag{2}$$

Comptonova valovna dolžina fotona je $\Lambda = 2\pi/K = 2\pi\hbar/mc$ in ustrezna krožna frekvenca $\Omega = cK = mc^2/\hbar$.

Fazna hitrost elektromagnetnega valovanja je po tem

$$c_f = \omega/k = c(k^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}/k = c(1 + \lambda^2/\Lambda^2)^{\frac{1}{2}} = c\omega/(\omega^2 - K^2c^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Enačbi (2) in (3) kažeta, da ima elektromagnetno valovanje za fotone z lastno maso disperzijo v praznem prostoru. Skupinska hitrost je

$$c_g = d\omega/dk = c^2k/\omega^2 = c^2/c_f = c(\omega^2 - K^2c^2)^{\frac{1}{2}}/\omega = c(1 + \lambda^2/\Lambda^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Približno velja

$$c_g = c(1 - \tfrac{1}{2}\,\lambda^2/\Lambda^2 + \ldots) = c(1 - \tfrac{1}{2}\,K^2c^2/\omega^2 + \ldots). \tag{4'}$$

Za hitrost elektromagnetnega valovanja od zelo kratkih do metrskih valovnih dolžin so namerili c vsaj z relativno zanesljivostjo 10^{-5}. Najdaljša valovna dolžina, pri kateri so merili tako zanesljivo, je bila 1,73 m.** Če bi nezanesljivost 10^{-5} v celoti pripisali fotonovi lastni masi, bi sledilo iz enačbe $10^{-5} = (c - c_g)/c = \frac{1}{2}\lambda^2/\Lambda^2$ za spodnjo mejo Comptonove valovne dolžine fotona $\Lambda = 4 \cdot 10^2$ m in za zgornjo mejo fotonove lastne mase $m_z = 5 \cdot 10^{-45}$ kg. Ob tem uvidimo, da je m_z pravzaprav zgolj oznaka za zanesljivost, s katero uspe pri kakem merjenju potrditi rezultat Maxwellove elektrodinamike.

Po enačbi (4') je odločilno merjenje z dolgimi valovi, čeprav dosežejo pri tem slabšo zanesljivost. Z neposrednim merjenjem so ugotovili, da je relativna razlika hitrosti valov z valovnima dolžinama 300 m in 450 m manjša kot $7 \cdot 10^{-4}$. (Merili so hitrost radijskih valov nad morjem. Relativna razlika hitrosti nad zemljo je bila mnogo večja, okoli 1%, zaradi neenakomernosti tal in zraka nad njimi.) Če bi nezanesljivost $7 \cdot 10^{-4}$ v celoti pripisali fotonovi lastni masi, bi sledilo iz enačbe $7 \cdot 10^{-4} = (c_g - c'_g)/c = \frac{1}{2}(\lambda'^2 - \lambda^2)/\Lambda^2$ za spodnjo mejo Comptonove valovne dolžine fotona $\Lambda = 9$ km in za zgornjo mejo fotonove lastne mase $m_z = 2 \cdot 10^{-46}$ kg.

---

* Nekoliko podrobnejši oris merjenj in enačbe lahko najde bralec v kratkih skriptah »Ali ima foton lastno maso?«, Odsek za fiziko fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana 1972.

** Večina podatkov je povzeta po preglednem članku A. S. Goldhaberja in M. M. Nieta.[1]

Za oceno zgornje meje fotonove lastne mase bi lahko izkoristili tudi svetlobo z zvezd. Prikladna za merjenje bi bila dvojna zvezda s temnim spremljevalcem, pri kateri se vidna zvezda prikaže izza temnega spremljevalca. Meriti bi bilo treba časovni razmik Δt med trenutkom, ko zaznamo modro svetlobo ($\lambda = 4000$ Å), in poznejšim trenutkom, ko zaznamo rdečo svetlobo ($\lambda' = 8000$ Å). Velja $\Delta t = l/c'_g - l/c_g = \frac{1}{2}(l/c)(\lambda'^2 - \lambda^2)/\Lambda^2$. Vzemimo, da bi bila zvezda v razdalji $l = 10^3$ svetlobnih let od Zemlje in da bi izmerili manjši časovni razmik Δt kot 10^{-3} s! Če bi pripisali zakasnitev v celoti disperziji zaradi fotonove lastne mase in postavili v prejšnjo enačbo $\Delta t = 10^{-3}$ s, bi dobili za spodnjo mejo Comptonove valovne dolžine fotona $\Lambda = 3$ m in za zgornjo mejo fotonove lastne mase $m_z = 8 \cdot 10^{-43}$ kg.

Te ocene, ki jo je postavil de Broglie (1940), niso neposredno preverili z merjenjem. Pač pa je v novejšem času omogočil pulzar v Rakovici podobno oceno z vidno svetlobo. Z merjenji so namreč ugotovili, da je bil časovni razmik za tri različne valovne dolžine v vidnem delu spektra manjši kot perioda pulzarja $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ s. Razdalja pulzarja je znana: $6{,}5 \cdot 10^3$ svetlobnih let. Tako so dobili samo za malenkost nižjo oceno, kot jo je predvidel de Broglie. Precej zanesljivejšo oceno dajo merjenja z radijskimi valovi, ki jih oddaja Rakovičin pulzar.[2] Pri njih je treba vsekakor upoštevati disperzijo v plazmi v medzvezdnem prostoru. Velikost valovnega vektorja in krožna frekvenca sta v plazmi povezani z enačbo

$$\omega^2/c^2 = k^2 + \omega^2_p/c^2, \tag{5}$$

če ni zaznavnega magnetnega polja. Pri tem je konstantna plazemska krožna frekvenca določena z $\omega_p = (ne^2_0/\varepsilon_0 m_0)^{\frac{1}{2}}$, če je n poprečna gostota elektronov. Enačba (5) se po obliki ujema z enačbo (2), le da nastopa ω_p/c namesto K. Zato velja za skupinsko hitrost v plazmi enaka približna enačba kot (4'), le da vsebuje ω_p/c namesto K:

$$c_g = c(1 - \tfrac{1}{2}\,\omega^2_p/\omega^2 + \ldots). \tag{6}$$

Poleg disperzije v plazmi po enačbi (6) bi bilo treba upoštevati še disperzijo (4'), če bi imel foton lastno maso. V prvem približku bi se vpliv plazme in vpliv fotonove lastne mase na skupinsko hitrost kar seštela.

Merjenja zakasnitve radijskih valov z Rakovičinega pulzarja v odvisnosti od krožne frekvence so pokazala, da velja v okviru zanesljivosti pri merjenju za hitrost valov enačba (6). Pri tem je bilo treba za poprečno gostoto elektronov na zveznici pulzarja in Zemlje vstaviti $n = 2{,}8 \cdot 10^4$ m^{-3}. To se je skladalo s podatkom, ki so ga dobili pri drugačnih merjenjih. (Plazemska frekvenca je tedaj $\omega_p = 9{,}4 \cdot 10^3$ s^{-1}. Pri merjenjih z valovi s krožno frekvenco več 10^7 s^{-1} je torej zagotovo uporaben prvi približek (6).) Pripišimo izmerjeno disperzijo radijskih valov v celoti fotonovi lastni masi namesto plazmi, pa dobimo za zgornjo mejo $K = \omega_p/c = 3 \cdot 10^{-5}$ m^{-1}! Spodnja meja Comptonove valovne dolžine fotona bi bila v tem primeru $\Lambda = 2 \cdot 10^5$ m in zgornja meja fotonove lastne mase $m_z = 10^{-47}$ kg. To je najmanjša zgornja meja fotonove lastne mase, ki jo je bilo mogoče dobiti pri merjenjih hitrosti elektromagnetnega valovanja, se pravi pri merjenjih s pravimi fotoni. Druga merjenja so napravili v statičnem električnem ali magnetnem polju, ki ju opišemo z virtualnimi fotoni.

Longitudinalno elektromagnetno valovanje. V transverzalnem elektromagnetnem valovanju, ki potuje v smeri osi x, imata na primer jakost električnega polja E_y smer osi y in gostota magnetnega polja B_z smeri osi z. V longitudinalnem elektromagnetnem valovanju, ki bi potovalo v smeri osi x, pa bi imela jakost električnega polja smer osi x, a magnetnega polja sploh ne bi bilo.

Če bi imeli fotoni lastno maso in bi potovali v laboratorijskem inercialnem opazovalnem sistemu S s hitrostjo $v = c_g < c$, bi obstajal lastni inercialni opazovalni sistem S', v katerem bi fotoni mirovali. Lorentzova transformacija povezuje jakosti električnega polja in gostoti magnetnega polja v laboratorijskem in v lastnem sistemu. Število fotonov v enobarvnem valovanju bi bilo sorazmerno s kvadratom amplitude jakosti električnega polja E'_0 v lastnem sistemu. V transverzalnem valovanju je amplituda jakosti električnega polja v laboratorijskem sistemu,

$$E_{y0} = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}(E'_{y0} + vB'_{z0}) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + v/c)E'_{y0}.$$

Pri tem smo upoštevali znano zvezo $B'_{z0} = E'_{y0}/c$. V longitudinalnem valovanju pa bi bili amplitudi v obeh opazovalnih sistemih enaki: $E_{x0} = E'_{x0}$. Enobarvno longitudinalno valovanje in prav tako transverzalno valovanje naj vsebujeta enako število fotonov! Medtem ko bi veljalo v lastnem sistemu $(E'_{x0}{}^2)_{long} = (E'_{y0}{}^2)_{trans}$, bi bilo v laboratorijskem sistemu $(E^2_{x0})_{long}/(E^2_{y0})_{trans} = (1 - v^2/c^2)/(1 + v/c)^2 = (1 - v/c)/(1 + v/c) = \frac{1}{4}(Kc/\omega)^2 + \ldots = \frac{1}{4}(\lambda/\Lambda)^2 + \ldots$ Nazadnje smo uporabili enačbo (4') in obdržali samo člen z najnižjo potenco K ali λ.

S kvadratom amplitude jakosti električnega polja so sorazmerni poprečna gostota energije in gostota energijskega toka v elektromagnetnem valovanju in absorpcijski in sipalni preseki za elektromagnetno valovanje. Pri enakem številu fotonov v lastnem sistemu bi bili poprečni gostoti energij in gostoti energijskih tokov longitudinalnega in transverzalnega valovanja približno v razmerju $(\lambda/\Lambda)^2$. Približno tolikšno bi bilo tudi razmerje med sipalnima in absorpcijskima presekoma za longitudinalno in transverzalno valovanje v laboratorijskem sistemu. Za rumenozeleno svetlobo je to razmerje manjše kot 10^{-23}, če upoštevamo za spodnjo mejo Comptonove valovne dolžine fotona podatek $2 \cdot 10^2$ m. Zato bi bilo mogoče, da še niso opazili longitudinalnega elektromagnetnega valovanja, četudi bi imel foton lastno maso (manjšo kot 10^{-47} kg). (Valovanje ostane zmeraj longitudinalno ali zmeraj transverzalno pri prehodu iz opazovalnega sistema v drugega samo, če ima relativna hitrost opazovalnih sistemov smer potovanja fotonov.)

Ob tem se porodi pomislek. Naj bo lastna masa fotona namreč še tako majhna, če je različna od nič, obstaja lastni opazovalni sistem in obstajajo tri vrste polarizacije. Po tem bi na hitro sklepali, da bi se morali znatno razlikovati zakoni za sevanje črnega telesa za fotone z lastno maso od ustreznih zakonov za fotone brez lastne mase. V Planckovem in v Stefanovem zakonu naj bi za fotone z lastno maso nastopil faktor 3 namesto faktorja 2 za fotone brez lastne mase, pri katerih sta možni le dve vrsti polarizacije. Po tem bi morala biti za fotone z lastno maso delež gostote izsevanega energijskega toka na ozkem frekvenčnem intervalu $dj/d\nu$ in gostota izsevanega energijskega toka j $\frac{3}{2}$-krat tolikšna, kot ju podajata Planckov in Stefanov zakon. To razglabljanje naj bi se nanašalo na poljubno majhno, a končno fotonovo lastno maso.

Ali dejstvo, da se ujemata Planckov in Stefanov zakon z merjenji, dokončno izključuje možnost za obstoj fotonov z lastno maso? L. Bass in E. Schrödinger sta upoštevala robne pogoje za jakost električnega polja in za gostoto magnetnega polja in izpeljala zveze med amplitudami jakosti električnega polja za transverzalno in longitudinalno valovanje ob prehodih iz vakuuma v snov (Fresnelove enačbe za primer, da bi imel foton lastno maso).[3] Pokazalo se je, da bi se pri poševnem vpadu na idealni prevodnik transverzalno valovanje ne odbilo popolnoma. Delež energijskega toka z velikostno stopnjo $(\lambda/\Lambda)^2$ bi prešel v snov v obliki longitudinalnega valovanja in delež z enako velikostno stopinjo bi se odbil prav tako v obliki longitudinalnega valovanja. Nasprotno bi prešlo longitudinalno valovanje skoraj v celoti iz vakuuma v snov, le delež energijskega toka z velikostno stopnjo $(\lambda/\Lambda)^2$ bi se odbil v obliki transverzalnega valovanja.

To kaže, da longitudinalnega elektromagnetnega valovanja zaradi izredno šibkega sodelovanja s snovjo sploh ne bi bilo mogoče obdržati v votlinah, kakršne uporabljajo pri merjenjih sevanja črnega telesa.* Pri preučevanju elektromagnetnega valovanja, ki je v termodinamskem ravnovesju z okolico, se sploh ni treba ozirati na longitudinalno valovanje. To pomeni, da nastopata v Planckovem in v Stefanovem zakonu v vsakem primeru le dve vrsti polarizacije transverzalnega valovanja. Ta zakona bi torej ostala v veljavi prav taka kot ju poznamo, četudi bi imel foton lastno maso.

Zelo majhen delež energije, ki je spočetka v celoti v transverzalnem valovanju, bi ušel iz votline v obliki longitudinalnega valovanja, če bi imel foton lastno maso. Vendar tega uhajanja energije ne bi bilo mogoče zaznati. Transverzalno valovanje bi zgubilo ob vsakem odboju na steni votline približno $(\lambda/\Lambda)^2$-kratni delež energije. V votlini s premerom R potrebuje valovanje za pot od stene do stene čas R/c in se odbije c/R-krat na sekundo. Delež energije, ki bi v sekundi prešel iz transverzalnega valovanja v longitudinalno, bi imel tedaj velikostno stopnjo $(\lambda/\Lambda)^2 \cdot c/R$. Da bi se iz votline zgubil znaten delež energije, bi bilo treba počakati čas okoli $(R/c)\,(\Lambda/\lambda)^2$. Pri rumenozeleni svetlobi bi to v votlini s premerom $R = 1$ m ob spodnji meji $\Lambda = 2 \cdot 10^5$ m naneslo okoli $3 \cdot 10^{14}$ s, torej več deset milijonov let.

Coulombov zakon. Zanesljivost Coulombovega zakona preskušajo fiziki že dobri dve stoletji. H. Cavendish je delal poskuse (1773), še preden je C. A. Coulomb izoblikoval svoj zakon. Kratko je sklenil koncentrični kovinski krogli in nabil zunanjo kroglo. Nato je prekinil stik med kroglama, odstranil zunanjo kroglo in meril naboj na notranji krogli. Na njej se ne sme nabrati nič naboja, če je električna sila med točkastima nabojema obratno sorazmerna s kvadratom razdalje. V okviru zanesljivosti pri merjenju Cavendish ni zasledil na notranji krogli nikakega naboja. Te poskuse je podrobneje obdelal in objavil J. C. Maxwell, ki jih je povzel v izboljšani inačici (1873). Koncentrični kovinski krogli je kratko sklenil, nabil zunanjo kroglo in prekinil stik med kroglama. Nato je ozemljil zunanjo kroglo, odstranil majhen del zunanje krogle in skozi nastalo odprtino izmeril napetost notranje krogle proti zemlji.

Vzemimo, da sila med točkastima nabojema ne bi bila sorazmerna z $1/r^2$, ampak z $1/r^{2+q}$. Dodatni člen, $|q| < 1$, v eksponentu meri odstopanje od Coulombovega zakona. V tem primeru bi bila velikost jakosti v električnem polju točkastega naboja $E = e/4\pi\varepsilon_0 r^{2+q}$. Potencial pa bi bil $V(r) = -\int_\infty^r E dr = e/4\pi\varepsilon_0(1+q)r^{1+q}$. Daljši račun pokaže, da bi v tem primeru veljala za zgornjo mejo q pri poskusu z dvema koncentričnima kroglama v prvem približku ocena

$$|q| = U/V(r_0)f(r/r_0). \tag{7}$$

Pri tem je $V(r_0)$ začetni potencial zunanje krogle in $U = V(r_0) - V(r)$ najmanjša napetost med kroglama, ki bi jo utegnili spregledati pri merjenju. Funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^{-1}\ln[(1+x)/(1-x)] - \ln[2/(1-x^2)]$ je odvisna od razmerja $x = r/r_0$ med radijema notranje krogle r in zunanje krogle r_0. Za Cavendishova merjenja je navedel Maxwell zgornjo mejo po enačbi (7) $|q| = 0{,}03$. S svojiji merjenji pa je dosegel precej nižjo mejo $|q| = 5 \cdot 10^{-5}$.**

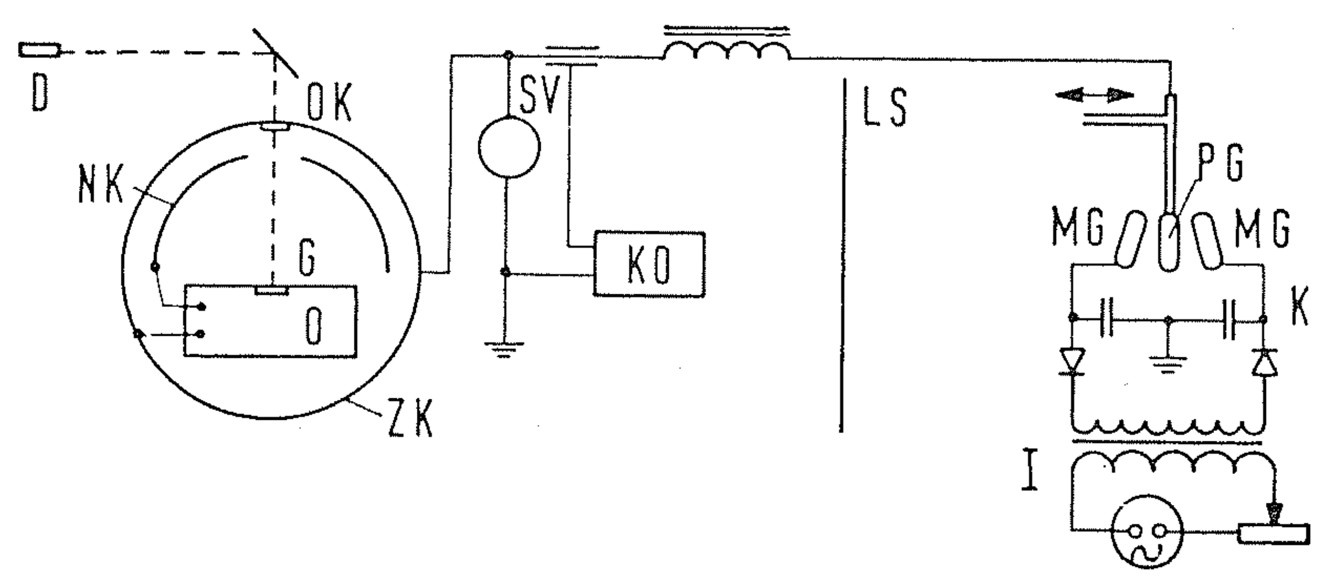
S. J. Plimpton in W. E. Lawton (1936) sta znatno znižala Maxwellovo mejo.[4] Njun poskus se po osnovni zamisli ni razlikoval od Maxwellovega. Merila sta s koncentričnima

---

* Mimogrede omenimo zanimivo zamisel M. E. Gercenstejna (1971). Možno bi bilo, da bi pri poskusih J. Webra, o katerih je Obzornik že nekajkrat poročal, ne zaznavali gravitacijskega valovanja, temveč longitudinalne fotone z veliko energijo. S tem bi se izognili težavam glede izvora energije gravitacijskega valovanja.

** A. D. Dolgov in V. I. Zaharov (1971) sta pripomnila, da dajo Cavendishova in Maxwellova merjenja v resnici nižjo zgornjo mejo za $|q|$. Upoštevati je namreč treba, da imajo vodniki na Zemlji potencial okoli 10^5 V zaradi električnega polja med Zemljo in ionosfero (ker moramo vzeti, da je potencial v veliki razdalji od Zemlje enak nič). To pa ne velja za kvazistatistična merjenja, ki jih bomo še opisali.

železnima kroglama s premeroma 1,5 m in 1,2 m. Uvedla sta dve bistveni zboljšavi. Merilnik napetosti sta namestila v notranjost manjše krogle in ga zvezala z obema kroglama. Tako sta se izognila motnjam, do katerih bi prišlo zaradi kontaktne napetosti ob dotikanju vodnika in notranje krogle. Namesto enosmerne napetosti sta uporabila izmenično napetost z amplitudo $3 \cdot 10^3$ V in frekvenco $2{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$.* Za merilnik napetosti sta uporabila ojačevalnik za napetost s frekvenco v bližini $2\ \mathrm{s}^{-1}$. Na izhod ojačevalnika je bil priključen galvanometer z lastno frekvenco okoli $2\ \mathrm{s}^{-1}$. S takim resonančnim merjenjem sta zmanjšala vpliv motečega šuma. Galvanometer sta opazovala skozi odprtini v obeh kroglah. Okence na vrhu zunanje krogle je bilo podloženo s kovinsko mrežo in napolnjeno s slano vodo. Tako sta dosegla, da je bila zunanja krogla električno popolnoma zaprta.



Sl. 1. Poenostavljena risba naprave Plimptona in Lawtona.[4] *ZK* zunanja krogla, *NK* notranja krogla, *O* ojačevalnik, *G* galvanometer, *D* daljnogled, *OK* okence, *SV* statični voltmeter, *KO* katodni oscilograf, *LS* ločilna stena, *I* induktor, *KB* kondenzatorska baterija, *MG* mirujoča glavnika, *PG* premikajoči se glavnik. Naprave v notranji krogli napajajo baterije

Med glavnim poskusom nista zasledila, da bi galvanometer zaznavno nihal, ko je bil vključen izvir napetosti. Zaradi šuma se je kazalec tresel, tako da ne bi bilo mogoče zaznati napetosti pod 1 μV. S podatki za amplitudo najmanjše napetosti, ki bi jo bilo mogoče spregledati, $U_0 = U = 10^{-6}$ V, za amplitudo potenciala zunanje krogle $V_0(r_0) = V(r_0) = 3{,}10^3$ V in z $f(r/r_0 = 0{,}8) = 0{,}17$ sledi iz enačbe (7) za zgornjo mejo $|q| = 2 \cdot 10^{-9}$.

Zgornjo mejo $|q|$ bi radi povezali še z zgornjo mejo fotonove lastne mase. (V kvazistatističnem električnem polju gre za virtualne fotone in zgornja meja za fotonovo maso je tudi v tem primeru podobno kot zgornja meja za $|q|$ samo prikladen parameter za označevanje zanesljivosti.) Iz enačbe (1) sledi za statični primer, se pravi za $\omega = 0$, da je $k^2 + K^2 = 0$ in $k = \pm\, \mathrm{i}K$. Po tem sklepamo, da preide v tem primeru faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$ v eksponentno pojemajoči faktor e^{-Kr}. Za potencial točkastega naboja privzamemo** $V(r) = (e/4\pi\varepsilon_0 r)\, \mathrm{e}^{-Kr}$. Potencial v krogli je v tem primeru $V(r) = (\mathrm{e}/4\pi\varepsilon_0 r_0)\, \mathrm{e}^{-Kr_0} (\mathrm{e}^{Kr} - \mathrm{e}^{Kr})/ /2Kr = (e/4\pi\varepsilon_0 r_0)\, \mathrm{e}^{-Kr_0} (1 + \frac{1}{6} K^2 r^2 + \ldots)$. Po tem ugotovimo, da velja za zgornjo mejo K ocena

$$K = [6\, |q|\, f(r/r_0)/(r_0{}^2 - r^2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

S to enačbo izračunamo zgornjo mejo za $K = 10^{-4}\ \mathrm{m}^{-1}$ pri Plimptonovih in Lawtonovih merjenjih. Iz tega sledi zgornja meja za fotonovo maso $m_z = 3 \cdot 10^{-47}$ kg. Z enačbo (8) lahko ocenimo še zgornji meji za fotonovo maso po Cavendishovih in Maxwellovih merjenjih. Dobimo $m_z = 3 \cdot 10^{-43}$ kg in $m_z = 3 \cdot 10^{-44}$ kg.

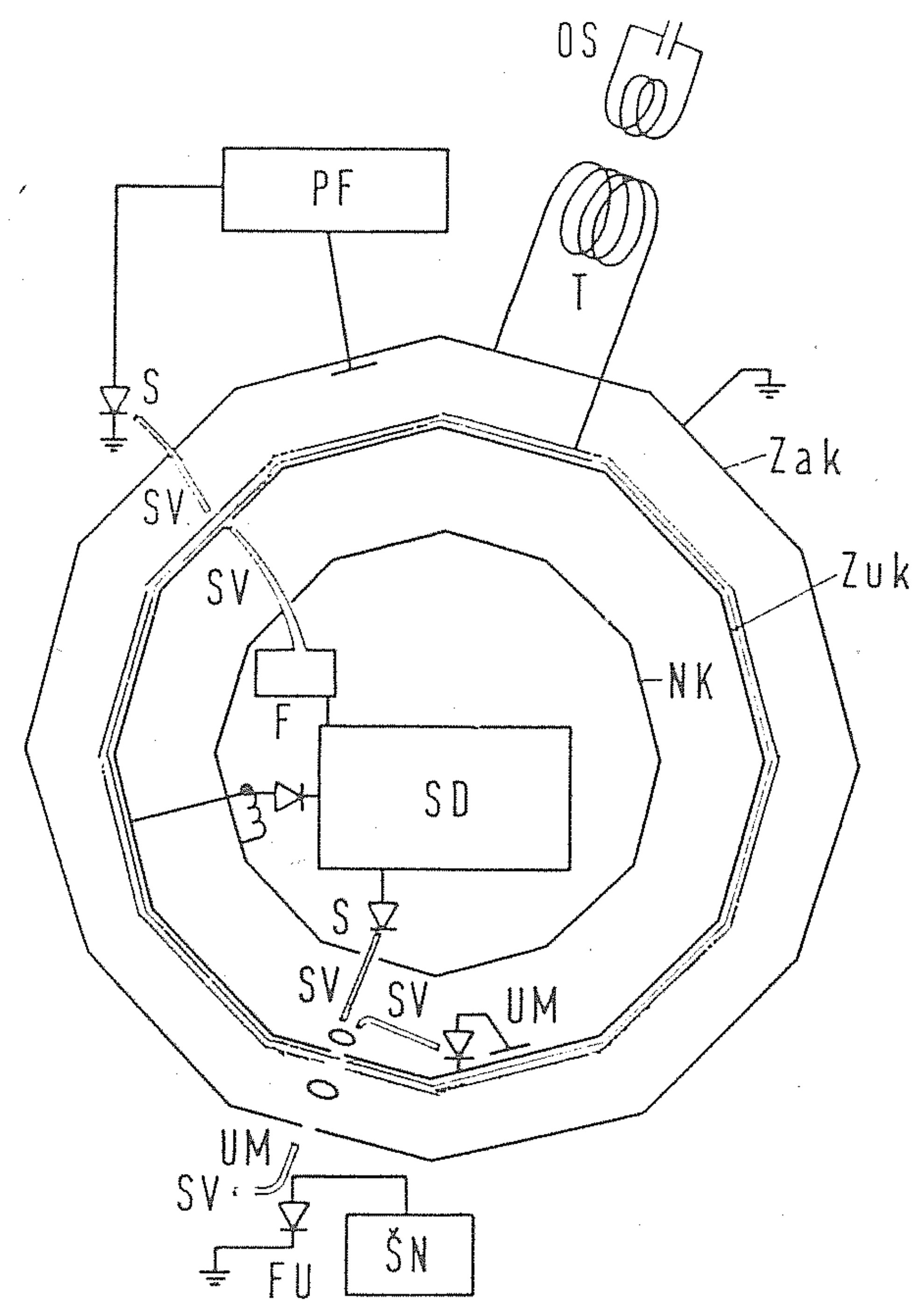
V zadnjih letih je več raziskovalcev še znatno znižalo Plimptonovo in Lawtonovo mejo. Najnovejše in najzanesljivejše merjenje so izvedli E. R. Williams, J. E. Faller in H. A. Hill

---

* V tistih časih sta morala uporabiti za izvir baterijo kondenzatorjev z veliko kapaciteto, ki ju je nabijal induktor preko usmernikov. Pola kondenzatorske baterije sta bila izdelana v obliki mirujočih glavnikov. Med njima je motor nihal tretji glavnik, ki se je približal zdaj prvemu, zdaj drugemu mirujočemu glavniku. Tretji glavnik je bil preko dušilk, ki naj bi izločile morebitne primesi visokofrekvenčnih tokov, zvezan na zunanjo kroglo.

** Jedrskim fizikom je ta korak dobro znan: del potenciala jedrske sile z dolgim dosegom ima Yukawino obliko konst. $\mathrm{e}^{-\mu r}/r$, če je $\mu = m_\pi c/\hbar$ in m_π lastna masa delca polja jedrske sile — piona.

(1971), ki so ponovili Plimptonov in Lawtonov poskus z najsodobnejšimi napravami.[5] Pri Plimptonovem in Lawtonovem poskusu je izvir izmenične napetosti nabijal kondenzator, katerega prva elektroda je bila zunanja krogla, druga pa ozemljena telesa v okolici. Williams, Faller in Hill so obdali zunanjo kroglo z večjo zaščitno kroglo. S tem so dosegli, da je nabijal izvir izmenične napetosti kondenzator, katerega prva elektroda je bila »zunanja« krogla, druga pa večja zaščitna krogla. Uporabili so izmenično napetost s precej višjo frekvenco $4 \cdot 10^6\ s^{-1}$ in z amplitudo 5000 V. Posebej je bilo treba paziti, da izmenično električno polje ni predrlo zunanje krogle. Četudi namreč natančno velja Coulombov zakon, predre izmenično polje v kovino (amplituda jakosti električnega polja v kovini eksponentno pada). Pokazalo se je, da ni bila odločilna debelina zunanje krogle, ampak nepopolnost zvarov. Zato so morali uporabiti namesto ene same zunanje krogle kar tri krogle z malo različnimi radiji. Tako so izključili možnost, da bi vplivala na izid merjenja nepopolnost zvarov. Seveda pa dodatne krogle ne morejo preprečiti vstopa električnemu polju v primeru, če ne velja Coulombov zakon. Pravzaprav Williams, Faller in Hill niso uporabili krogel, temveč posode v obliki ikozaedrov. Te je bilo laže zvariti iz delov pločevine. Vendar zaradi preprostosti še naprej govorimo o kroglah in tudi računamo za krogle, saj površje ikozaedra ne odstopa znatno od površja krogle. Zaščitna krogla je imela premer 1,5 m in je bila iz aluminija. Zunanja krogla je bila sestavljena iz aluminijaste s premerom 1,2 m in iz dveh bakrenih s samo malo večjima premeroma. Notranja krogla s premerom 0,8 m je bila zopet aluminijasta.



Sl. 2. Poenostavljena risba naprave Williamsa, Fallerja in Hilla.[5] *ZaK* zaščitna aluminijasta krogla, *ZuK* zunanja krogla, ki jo sestavljata dve bakreni in aluminijasta, *NK* notranja aluminijasta krogla, *T* z vodo hlajena tuljava, *OS* oscilator, *S* svetilo, *SV* svetlobni vodnik, *F* fotocelica, *FU* fotoupornik, *SD* sinhronski detektor, ki ga sestavljajo ojačevalniki, mešalnik, filtri in na izhodu pretvornik napetosti v frekvenco, *PF* osciloskop in premikalnik faze, ki poveča fazno razliko med primerjalno napetostjo in napetostjo na tuljavi *T* vsake pol ure za en nihaj, *ŠN* števna naprava preševa nihaje po petdeset sekund in je priključena na analizator, ki izloči sinusno sestavino s periodo pol ure, *UM* del naprave za umerjanje: ko želijo napravo umeriti, posvetijo s šibkim svetilom z nihajočim svetlobnim tokom od zunaj v svetlobni vodnik. Naprave v notranji krogli napajajo baterije

Kondenzator, ki sta ga sestavljali zaščitna in bakrena zunanja krogla, je napajal oscilator. Napetost med aluminijasto zunanjo kroglo in notranjo kroglo so merili s sinhronskim detektorjem (angl. lock — in amplifier). Primerjalno napetost za sinhronski detektor so speljali iz zunanjosti v notranjo kroglo in napetost na izhodu detektorja iz notranje krogle v zunanjost s svetlobnima curkoma iz svetil z nihajočim svetlobnim tokom. Curka so vodili svetlobni vodniki skozi drobne odprtine v kroglah. Odprtine so bile za električno polje s frekvenco $4 \cdot 10^6\ s^{-1}$ popolnoma neprepustne. Med glavnim merjenjem, ki je trajalo tri dni, so neprestano preverjali delovanje detektorja in poskrbeli, da je deloval ves čas enako. Med merjenjem so se prepričali, da je bila amplituda napetosti, ki bi jo utegnili spregledati, kvečjemu $3{,}2 \cdot 10^{-13}$ V. Vstavimo v enačbo (7) $U = U_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-13}$ V, $V(r_0) = V_0(r_0) = 5000$ V in $f(r/r_0 = 0{,}67) = 0{,}22$, pa dobimo zgornjo mejo $|q| = 3 \cdot 10^{-16}$. Iz enačbe (8) sledi s temi podatki in z $r_0 = 0{,}6$ m za zgornjo mejo $K = 3 \cdot 10^{-8}\ m^{-1}$ in naposled za zgornjo mejo fotonove lastne mase $m_z = 1{,}6 \cdot 10^{-50}$ kg.

Polje magnetnega dipola. Dodatni faktor e^{-Kr}, ki smo ga srečali pri potencialu točkastega električnega naboja, nastopi tudi pri računanju gostote polja magnetnega dipola, če ima foton lastno maso. Za magnetni dipol v izhodišču z dipolnim momentom p_m v smeri negativne osi z bi bila gostota magnetnega polja

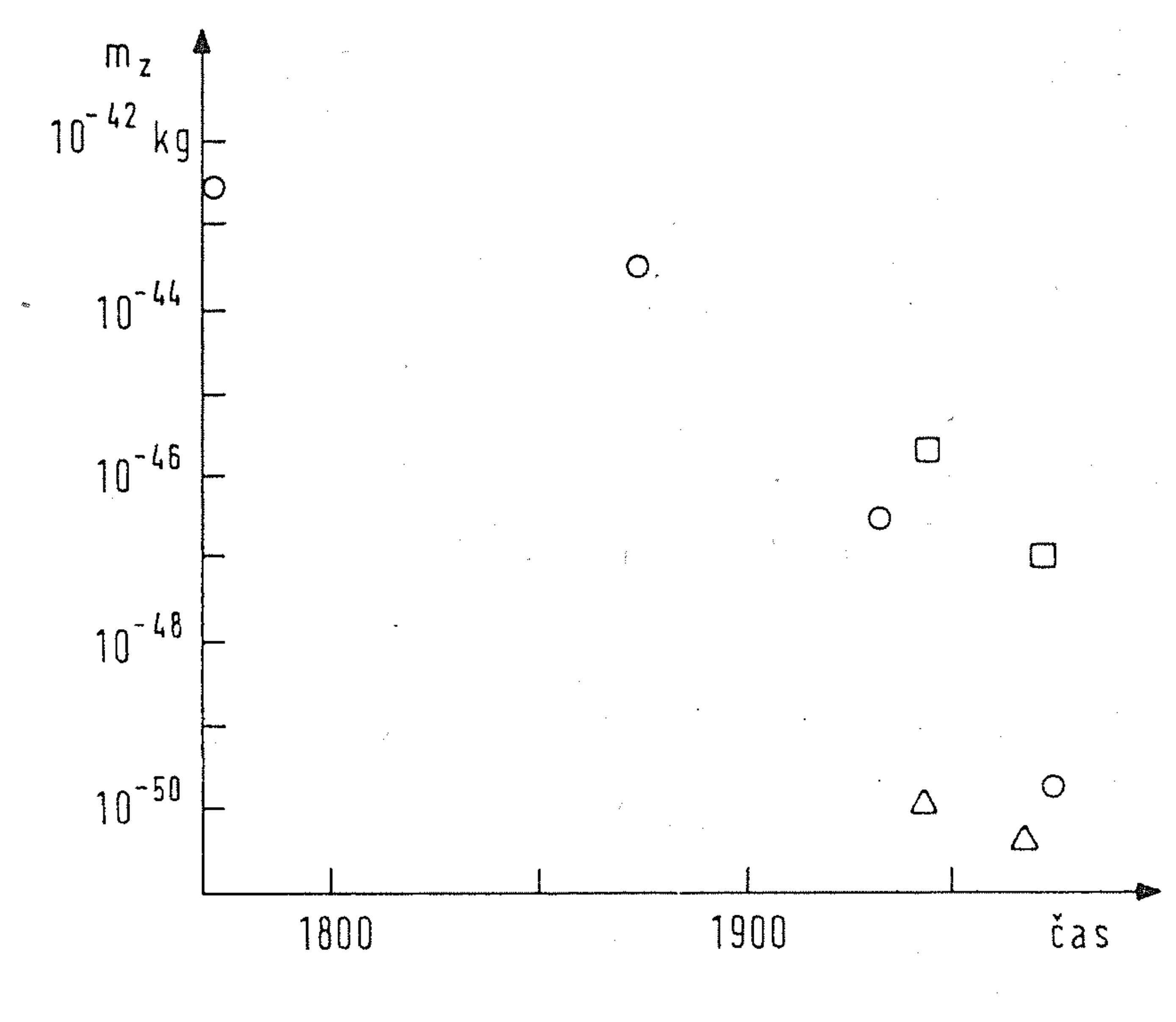
$$B = \mu_0 p_m \, e^{-Kr} r^{-3} (1 + Kr + \tfrac{1}{3} K^2 r^2) \cdot$$
$$\cdot [(3xz/r^2, -3yz/r^2, 1 - 3z^2/r^2) + (0, 0, \tfrac{2}{3} K^2 r^2)/(1 + Kr + \tfrac{1}{3} K^2 r^2)], \qquad (9)$$

če bi imel foton lastno maso. Gostota magnetnega polja magnetnega dipola v Maxwellovi elektrodinamiki pa je

$$B = \mu_0 p_m \, r^{-3} (-3xz/r^2, -3yz/r^2, 1 - 3z^2/r^2). \qquad (9')$$

Iz tega razberemo, da je vpliv fotonove lastne mase na polje magnetnega dipola dvojen. Najprej se navidezno pomanjša velikost dipolnega momenta, opazovana iz razdalje r, od p_m na $p_m(r) = p_m \, e^{-Kr}(1 + Kr + \frac{1}{3} Kr^2) = p_m (1 - \frac{1}{6} K^2 r^2 + \ldots)$. Poleg tega nastopi dodatno polje z gostoto $B_{dod} = [\mu_0 p_m(r)/r^3] \cdot \frac{2}{3} K^2 r^2/(1 + Kr + \frac{1}{3} K^2 r^2)$ v smeri osi z, to je nasprotno vzporedno z dipolnim momentom.

Po mnogoštevilnih podatkih o smeri in velikosti gostote zemeljskega magnetnega polja na površju Zemlje z radijem r_z so določili velikost dipolnega momenta Zemlje. Na osnovi enačbe (9') so dobili velikost dipolnega momenta p_m. V primeru, da bi imel foton lastno maso, bi tako določena vrednost igrala vlogo $p_m(r_z)$. Pri tem bi popolnoma spregledali dodatno polje z gostoto B_{dod}. Najbolje je navesti podatke za magnetni ekvator ($z = 0$). Tam je gostota magnetnega polja, ki ima samo komponento v smeri osi z, po enačbi (9'), a z novo vrednostjo dipolnega momenta $B_0 = \mu_0 p_m(r_z)/r^3_z$. Za dodatno polje pa bi veljalo $B_{dod}/B_0 = \frac{2}{3} K^2 r^2_z/(1 + Kr_z + \frac{1}{3} K^2 r^2_z)$. Do ocene za zgornjo mejo K pridemo, če pripišemo razliko med izmerjeno in izračunano gostoto magnetnega polja B_0 na magnetnem ekvatorju v celoti dodatnem polju. Gostota magnetnega polja na ekvatorju je $3{,}1 \cdot 10^4 \gamma$ ($1\gamma = 10^{-5}$ gauss $= 10^{-9}$ T). Razliko med to vrednostjo in izmerjenimi vrednostmi v raznih točkah pa cenijo na $5{,}4 \cdot 10^2 \gamma$. Iz zveze $5{,}4 \cdot 10^2 \gamma / 3{,}1 \cdot 10^4 \gamma = B_{dod}/B_0 \approx \frac{2}{3} K^2 r^2_z$ sledi z $r_z = 6{,}4 \cdot 10^6$ m za zgornjo mejo $K = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ m^{-1} in za zgornjo mejo fotonove lastne mase $m_z = 10^{-50}$ kg. To oceno je prvi napravil E. Schrödinger (1943). Izboljšala sta jo A. S. Goldhaber in M. M. Nieto na osnovi novejših podatkov (1968).[6] Po teh je razlika med izmerjeno in izračunano gostoto zemeljskega magnetnega polja na ekvatorju okoli -20γ. Treba je upoštevati še negotovost zaradi prispevkov, ki ne izvirajo od zemeljskega



Sl. 3. Zgornja meja za fotonovo lastno maso v odvisnosti od časa. Krogi ustrezajo preverjanju Coulombovega zakona, kvadrati neposrednemu merjenju hitrosti elektromagnetnega valovanja in trikotniki merjenju zemeljskega magnetnega polja

dipolnega momenta, ampak od tokov nabitih delcev v višjih plasteh ozračja in više. Ti prispevki dosežejo po oceni skupaj okoli 40γ. Z lastno maso fotona bi bilo tedaj treba pojasniti v celoti razliko $-20\gamma + 40\gamma = 20\gamma$. Vendar se podatki spreminjajo s časom in so precej negotovi, tako da niso izključene sistematske napake celo do 100γ. Zato sta Goldhaber in Nieto vzela $B_{\text{dod}} = 120\gamma$ in $B_{\text{dod}}/B_0 = 120\gamma/3{,}1 \cdot 10^4\gamma$, da ne bi cenila prenizko. Če pripišemo to vplivu fotonove lastne mase, dobimo zgornjo mejo $K = 10^{-8}\ \text{m}^{-1}$ in zgornjo mejo fotonove lastne mase $m_z = 4 \cdot 10^{-51}$ kg. Temu ustreza lastna energija $3 \cdot 10^{-15}$ eV.* To je do zdaj najnižja zgornja meja za fotonovo lastno maso. Ne kaže, da bi jo uspelo kmalu izdatno znižati niti z upoštevanjem podatkov o zemeljskem magnetnem polju z umetnih satelitov niti kako drugače.

Nihajni čas nihajnih krogov. Omenimo še neuspel poskus, da bi znižali zgornjo mejo fotonove lastne mase. P. A. Franken in G. W. Ampulski sta sklepala, da je lastna frekvenca votlinskih resonatorjev odvisna od fazne hitrosti (3).[7] Vzemimo, da je lastna krožna frekvenca izbranega resonatorja $\omega_0 = ck$, če foton nima lastne mase! Velikost valovnega vektorja $k = 2\pi/\lambda$ je določena z razsežnostjo resonatorja. Isti resonator naj bi imel tedaj lastno krožno frekvenco $\tilde{\omega}_0 = c_f k$, če bi imel foton lastno maso. Iz zveze $\tilde{\omega}_0/\omega_0 = c_f/c = \tilde{\omega}_0/(\tilde{\omega}^2 - K^2c^2)^{\frac{1}{2}}$, bi torej sledila enačba

$$\tilde{\omega}^2{}_0 = \omega^2{}_0 + \Omega^2. \tag{10}$$

Pri tem smo vstavili fazno hitrost (3) pri resonančni krožni frekvenci $\tilde{\omega}_0$ in $\Omega = Kc$.

Po enačbi (10) naj bi bila najmanjša lastna krožna frekvenca katerega koli resonatorja enaka Ω, ne glede na obliko in velikost. Ob zgornji meji $K = 10^8\ \text{m}^{-1}$ je zgornja meja za krožno frekvenco Ω 3 s^{-1}, čemur ustreza nihajni čas 2,1 s. Električno nihanje s tolikšno ali s še manjšo krožno frekvenco bi lahko opazili le, če bi ne bila lastna krožna frekvenca ω_0 mnogo večja od Ω. Votlinski resonator, ki bi ustrezal tej zahtevi, bi moral imeti linearne razsežnosti z velikostno stopnjo $\pi/K = \frac{1}{2}\Lambda = 3 \cdot 10^8$ m. Zato ni upanja, da bi mogli pri merjenjih z votlinskimi resonatorji z enačbo (10) znižati veljavno zgornjo mejo za Ω.

Franken in Ampulski sta menila, da se da raztegniti veljavnost enačbe (10) morda tudi na nihajne kroge s praznim kondenzatorjem in s prazno tuljavo in morda celo na nihajne kroge s kondenzatorjem, v katerem je dielektrik, in s tuljavo, v kateri je feromagnetna snov. Zato sta preverila znano enačbo za lastno krožno frekvenco nihajnega kroga $\omega_0 = (1/LC - R^2/4L^2)^{\frac{1}{2}}$. Nihajne kroge sta sestavila iz dveh velikih kondenzatorjev s kapaciteto po 530 μF in iz orjaške dušilke z induktivnostjo 3060 H, ki sta jo hladila s tekočim dušikom. Kapaciteto kondenzatorjev in induktivnost tuljave sta poprej posebej izmerila. Potem sta izmerila lastno krožno frekvenco za nihajna kroga s po enim kondenzatorjem (0,782 s^{-1}) in za nihajni krog z vzporedno vezanima kondenzatorjema (0,556 s^{-1}). Izmerjene lastne krožne frekvence so se ujemale z izračunanimi v okviru nezanesljivosti pri merjenju, ki je bila okoli 1%.

Če pripišemo možno nezanesljivost v celoti fotonovi lastni masi, sledi za zgornjo mejo Ω ocena $(0{,}01\omega^2{}_0)^{\frac{1}{2}} = 0{,}1\ \omega_0$, kar je okoli 0,1 s^{-1}. To da za zgornjo mejo fotonove lastne mase $m_z = 10^{-52}$ kg.

Franken in Ampulski sta izoblikovala svoj sklep dokaj previdno. Dopustila sta možnost, da enačba (10) ne velja za nihajni krog s kondenzatorjem z dielektrikom in s tuljavo s feromagnetno snovjo. Toda več avtorjev se je oglasilo s trditvijo, da enačba (10) ne velja splošno niti za votlinske resonatorje, v kar Franken in Ampulski nista podvomila.[8] Dokazali so, da ima v splošnem relativna razlika kake količine, določene za foton z lastno maso, in ustrezne količine v Maxwellovi elektrodinamiki kvečjemu velikostno stopnjo $(Kd)^2$. Pri

* Najmanjša doslej izmerjena razlika lastnih energij je razlika lastnih energij stanj K_L in K_S nevtralnega kaona: $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ eV.

tem je d karakteristična linearna razsežnost območja, v katerem so vodniki s tokovi, prevodniki z nabojem in merilne naprave. Iz tega sledi, da ima $(\tilde{\omega}_0 - \omega_0)/\omega_0$ velikostno stopnjo $(Kd)^2$ in ne $(\Omega/\omega_0)^2 = (Kc/\omega_0)^2$, kakor sta trdila Franken in Ampulski. Zgornja meja fotonove lastne mase, ki jo da njun poskus, je torej v resnici vsaj $(c/\omega_0 d)^2 = 10^{17}$-krat večja od navedene (postavimo kar $d = 1$ m). Pokazalo se je celo, da potuje elektromagnetno valovanje po koaksialnem vodniku vselej s hitrostjo c, ne glede na lastno maso fotona. Potujočega valovanja po takem vodniku si namreč ne smemo predstavljati kot del pravega fotona z dano gibalno količino v smeri osi vodnika. V takem valovanju moramo videti množico virtualnih fotonov, ki izvirajo iz nabojev in tokov v steni in v žili vodnika in ki imajo znatne komponente gibalne količine v prečni smeri. Lastna masa fotona zato ne bi prizadela hitrosti potujočega valovanja po koaksialnem vodniku. Povzročila bi le, da bi se za malenkost spremenila jakost električnega polja v prečni smeri.

Zdaj razumemo, zakaj da opazovanje zemeljskega magnetnega polja najmanjšo zgornjo mejo za fotonovo lastno maso. Merjenje ni posebno zanesljivo, toda nastopajoča razdalja, to je radij Zemlje, je zelo velika.

Na koncu omenimo posledice, ki bi jih imela fotonova lastna masa za specialno teorijo relativnosti. V tej teoriji igra elektromagnetno valovanje osrednjo vlogo pri prenašanju sporočil. Enačbe specialne teorije relativnosti bi obveljale nespremenjene tudi v primeru, da bi imel foton lastno maso. Le predpostavkam, na katerih temelji ta teorija, bi bilo treba v tem primeru dodati novo. Ta zahteva, da moramo pri prenašanju sporočil uporabiti elektromagnetno valovanje z dovolj veliko frekvenco. Pri dovolj veliki frekvenci ν_0 valovanja v izbranem inercialnem opazovalnem sistemu se fazna (3) in skupinska hitrost (4) poljubno približata hitrost c. Trditev velja za katerikoli inercialni opazovalni sistem; meja, ki jo mora preseči frekvenca valovanja v izbranem opazovalnem sistemu, pa je odvisna od hitrosti drugega sistema v izbranem sistemu. Formalno sledijo znane enačbe specialne teorije relativnosti pri prehodu $\nu_0 \to \infty$, ko se izenačita fazna in skupinska hitrost valovanja s hitrostjo c v vseh inercialnih sistemih. Pravzaprav vsebuje novo predpostavko že ena izmed oblik Einsteinovega načela o hitrosti svetlobe: za signale, energijo in delce obstaja zgornja meja hitrosti c. To mejo doseže elektromagnetno valovanje v praznem prostoru, če foton nima lastne mase, medtem ko bi se hitrost elektromagnetnega valovanja tem bolj približala meji c, čim večja bi bila frekvenca, če bi imel foton lastno maso.

LITERATURA

[1] A. S. Goldhaber, M. M. Nieto: Terrestrial and Extraterrestrial Limits on The Photon Mass, Rev. Mod. Phys. **43,** 277 (1971).

[2] G. Feinberg: Pulsar Test of a Variation of the Speed of Light with Frequency, Science **166,** 879 (1969).

[3] L. Bass, E. Schrödinger: Must the Photon Mass Be Zero? Proc. Roy. Soc. **A232,** 1 (1955).

[4] S. J. Plimpton, W. E. Lawton: A Very Accurate Test of Coulomb's Law of Force Between Charges, Phys. Rev. **50,** 1066 (1936).

[5] E. R. Williams, J. E. Faller, H. A. Hill: New Experimental Test of Coulomb's Law: A Laboratory Upper Limit on the Photon Rest Mass, Phys. Rev. Letters **26,** 721 (1971).

[6] A. S. Goldhaber, M. M. Nieto: New Geomagnetic Limit on the Mass of the Photon, Phys. Rev. Letters, **21,** 567 (1968).

[7] P. A. Franken, G. W. Ampulski: Photon Rest Mass, Phys. Rev. Letters **26,** 115 (1971).

[8] A. S. Goldhaber, M. M. Nieto: How to Catch a Photon and Measure its Mass, Phys. Rev. Letters **26,** 1390 (1971); D. Park, E. R. Williams: Comments on a Proposal for Determining the Photon Mass, Phys. Rev. Letters **26,** 1393 (1971); N M. Kroll: Theoretical Interpretation of a Recent Experimental Investigation of the Photon Rest Mass, Phys. Rev. Letters **26,** 1395 (1971).

O MODERNIZACIJI NASTAVE MATEMATIKE

(Prema predavanju održanom 1. veljaće 1972 u Društvu matematičara, fizičara i astronoma SR Slovenije u Ljubljani)

Svaka škola priprema svoje učenike za budući život. Da bi ta priprema bila djelotvorna, škola mora prenositi na učenike najnovije tekovine znanosti i to na način koji obećava što lakše primanje i svladavanje budućih tekovina. Međutim, kad se nova naučna tekovina (sadržaj, metoda itd.) pojavi, potrebno ju je pripremiti za prihvat onih koji če je prvi put susresti, te pripremiti pedagoške i didaktičke mjere za njezino uvođenje u školske programe. Da bi se taj složeni i delikatni posao uspješno obavio, potrebno je dugo vrijeme. Nužno dakle nastava zaostaje za razvojem znanosti.

Dok se vrše pripreme za uvođenje novih tekovina, nauka ide naprijed, i zaostatak u fazi između napretka nastave i napretka znanosti ima tendenciju rasta. Nasuprot tome, životne potrebe gone na smanjenje te razlike. Stoga je školi inherentna permanentna konfliktna situacija. Ta je situacija to teža što je razvoj nauka brži i što je životna dinamika intenzivnija.

Nagomilavanje razlika između razvoja nauke i razvoja nastave može postati ozbiljna kočnica općem napretku. Tako dolazi do kriznih situacija koje traže hitnu reformu ili čak revoluciju u nastavi. Da bi se takve situacije izbjegle ili bar ublažile, javlja se potreba za permanentnom reformom ili trajnim osuvremenjivanjem nastave. Na žalost, to je nemoguče praktički postići iz razloga koji su već navedeni, s tim više što ni razvitak znanosti niti unapređivanje nastave nisu jednakomjerni pa ne mogu ići u korak. Stoga će uvijek dolaziti do kriznih situacija, i vršit će se trajni pritisak na nastavu da se osuvremenjuje, reformira i revolucionira.

U povijesti nastave matematike bilo je više kriznih situacija. Na primjer, pri prodiranju u nastavu matematičke analize, skupova i matematičkih struktura. Danas proživljavamo najtežu krizu u nastavi matematike. Da bi se ta kriza prebrodila, u svjetskim se razmjerima zbiva autentična revolucija u nastavi matematike. Ona se skromno naziva negdje reformom negdje modernizacijom, ali je to vjerovatno jedna od največih ne samo u nastavi matematike nego u nastavi uopće, i ona će nužno ostaviti duboke tragove u razvoju ne samo matematike i njezinih primjena nego uopće ljudske misli i aktivnosti u budućnosti.

Pečat suvremenoj revoluciji u nastavi matematike dali su s jedne strane razvitak same matematike i s druge strane opći trend demokratizacije obrazovanja. U tom svjetlu promotrimo najvažnije karakteristike te revolucije.

Uvođenje skupova i struktura u matematiku ne znači toliko proširenje područja matematičkih interesa koliko rekonstituiranje i rekonstrukciju matematike u bazi i po tom u cjeloj vertikali. Stoga se suvremena reforma nastave matematike ne može iscrpsti uvođenjem modernih sadržaja u nastavne programe, nego se ona sastoji u sasvim novim koncepcijskim zahvatima. Naprimjer, nema smisla mehanički ubacivati u nastavne programe teoriju skupova, matematičku logiku, teoriju grupa, vektorske prostore i sl. kao discipline. Mnogo je važnije fundamentalne pojmove uvoditi što ranije u nastavu, bez obzira kada se matematička nauka počela njim baviti. Stoga se u mnogim zemljama skupovi, relacije i strukture uvode najranijim fazama nastave — negdje već u dječjim vrtićima — kao osnovni material i sredstvo izgradnje matematike kao školskog predmeta. Pokazalo se, da nakalamljivanje modernih sadržaja na staru konstrukciju školske matematike ne znači uopće napredak u razvoju nastave matematike, jer tako dobivan bastard nema životne snage.

U revolucioniranju nastave matematike mora se voditi računa o psihičkom i mentalnom razvoju djeteta i mladog čovjeka. Moderna je psihologija pokazala da se u tom razvoju razabiru u grubome tri faze: do šest godina starosti, od šest do šesnaest godina i poslije šesnaest godina. Psihološka istraživanja razvoja malenog djeteta i mladog čovjeka pokazala su da u mišljenju djece do šest godina relacije imaju značajno mjesto, da im je abstraktna misao kao oruđe struktuiranja promatranih situacija na bazi relacija u svrhu prodiranja u konkretno bliska i prirodna i da lako prihvaćajo simbole. Stoga se u mnogim dječjim vrtićima uvodi matematika na bazi relacija uz pomoč grafova. Takva je matematika naime pristupačna djeci i prije opismenjivanja. Dosadašnja su iskustva pokazala da djeca takvu matematiku rado i lako primaju.

Krivulja razvoja inteligencije pokazuje visok uspon do šesnaeste godine kada se brzina njezina rasta počinje smanjivati. Stoga je u modernoj revoluciji nastave matematike nazočna težnja da se najvažniji osnovni pojmovi matematike (skup, relacija, preslikavanje, funkcija, algebarske strukture, skup realnih brojeva, vektorski prostori, metrika, osnovni topološki pojmovi) temeljito svladaju prije šesnaeste godine.

Značajno je geslo koje je lansirao jedan od prvoboraca modernizacije nastave matematike, francuski matematičar, profesor sveučilišta u Parizu André Revuz: *Tôt et progressivement,* što znači: dati prilike učenicima da se *što ranije* susretnu sa svim osnovnim matematičkim pojmovima i da ih *postupno* svladavaju, tako da bi u šesnaestoj godini života bili sposobni da se uz pomoć stručne literature mogu uspješno kretati u bilo kojem području matematike i njezinih primjena.

Pri izboru gradiva uzima se u obzir sve što učenici donose sa sobom i na tom se dalje prirodno gradi. To znači:

Ne ignorira se ono čime učenici vladaju i ne vrača ih se natrag.

Ne uzima se ono za što učenici nemaju podlage.

Pri tom se ima u vidu da matematika ima

a) općeobrazovnu,

b) odgojnu,

c) praktičnu,

d) kulturnu

vrijednost.

Da bi se taj izbor izvršio zaista stručno, obavljena su mnogobrojna istraživanja. Navodimo neke od važnijih rezultata do kojih se došlo.

U stvarnim primjenama matematike u suvremenim uvjetima znanstveno-tehnološke revolucije najveću ulogu imajo upravo oni pojmovi i ona područja koja su najinteresantnija i sa stanovišta teorijske matematike. To su u prvom redu: skupovi, relacije, funkcije i matematičke strukture. Tako se teorija grafova javlja u gotovo svim područjima matematičkih primjena, vektorski prostori u ekonomskoj matematici, Booleova algebra u informatici, informatika u gotovo svim područjima ljudske djelatnosti.

Važno je naglasiti da za nastavu postaju sve interesantnija područja primjena matematike u društvenim naukama. Dovoljno je kao primjer navesti statističke metode.

Sklad u razvoju matematičkih teorija i primjena u suvremenoj praksi bez sumnja olakšava modernizaciju nastave matematike jer pridonosi jačanju općeobrazovne i općekulturne vrijednosti matematike.

U posljednje se vreme sve jasnije ispoljavaju veze između matematike i umjetnosti pa mnogi suvremeni reformatori nastave matematike ističu značaj moderne matematike za estetski odgoj djece i mladih ljudi.

Ovako koncipirana modernizacija nastave matematike ima na raspolaganju dovoljno jako i efikasno sredstvo realizacije. To je pedagogija (problemskih) situacija koja se sastoji u sljedećem:

Učenici proučavaju situacije koje su im bliske, u kojima se snalaze, ali u kojima susreću nove probleme. Novo gradivo susreću u obliku problema koji se javljaju u situacijama koje su več susreli i proučavali. Svaki problem učenici proučavaju što samostalnije, uz što manje vođenja sa strane nastavnika, u otvorenoj diskusiji i suradnji s njima i s ostalim učenicima uz obilnu pomoč udžbenika i ostale stručne i pomoćne literature te drugih sredstava informiranja (TV, film itd.).

U nastavi matematike pedagogija situacija ostvaruje se tako da se proučavane situacije progresivno matematiziraju i matematičke situacije generaliziraju. Na taj način učenici samostalno i aktivno otkrivaju i izgrađuju svoju matematiku koja se sve više identificira s postignutim stupnjem razvoja moderne matematičke nauke i njezinih primjena.

Kad govorimo o reformi nastave matematike u suvremenim uvjetima, ne smjemo mimoići činjenicu da su i društveni uvjeti za nju bitno drugačiji od uvjeta u prošlosti. Naime, nekad se pretpostavljalo da je matematika nepristupačna jednom dijelu djece i ljudi pa je ona kao školski predmet bila jedan od najjačjih faktora selekcije »elite« od »mase«. Danas, ne samo humanizacija društva — osobito u socijalističkim zemljama — nego i potreba da se praktički cjelokupni stručni kadar u svim područjima ljudske djelatnosti služi matematičkim metodama i sredstvima, postavljaju pred školu zadatak da svoj djeci i svim ljudima omogući svladanje matematike.

Predavanja ex cathedra i pedagogija drila nužno onemogućuju pristup matematici velikom broju djece i ljudi. Pedagogija problemskih situacija i pristupnih matematizacija omogućuje svakom učeniku da stvarno dođe do vlastitih rezultata. Mogu oni biti i najskromniji, uvijek su dovoljni da se učenik oslobodi i postane svijestan svojih mogućnosti. To ga potiče da u daljnem radu bude što inicijativniji, samostalniji i aktivniji. Sva dosadašnja iskustva — u raznim zemljama i uvjetima — pokazala su da među učenicima koji metodama pedagogije problemskih situacija svladavaju modernu matematiku nema takvih koji ne bi napredovali u tom predmetu. Uspjeh je to veči što se ranije počne.

Kako to izgleda u praksi, pokažimo na jednom primjeru. Uzmimo primjer Belgije.

Modernizacija nastave matematike u toj zemlji vrši se na dva kolosjeka. Jedna državna komisija modernizira nastavne programe i brine se za njihovu realizaciju. No glavno se zbiva u Belgijskom centru za pedagogiju matematike (Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, skračeno: CBPM). Taj se centar sastoji od ekipe entuzijasta — uglavnom mladih ljudi — na čijem čelu se nalaze Georges i Frédérique Papy. Glavne su karakteristike rada te ekipe:

Konzekventna primjena pedagogije situacija.

Poluprogramirana nastava.

Služenje geometrijskom intuicijom.

Njegovanje estetske komponente u nastavi matematike.

Aktivno sudjelovanje učenika u stvaranju pedagoških postupaka tj. proučavanje učeničkih reakcija da bi se došlo do saznanja kako organizirati nastavu i učenje matematike da bi učenici bili stvarno aktivni.

Postavljanje cjelokupne školske matematike na bazu matematičkih struktura.

Konzekventna primjena grafova na svim uzrastima i u svim tipovima škola.

Konzekventna primjena neverbalnih jezika, u prvom redu boja.

Istovremena reedifikacija školske matematike na čitavoj vertikali, počevši od dječjih vrtića.

Napuštanje svakog oblika izpravljanja učeničkih radova, ocenjivanja i ispita. Ako učenik pogrješi, dobiva novi problem na kojem otkriva svoju pogrešku i sam je ispravlja. Testovi služe jedino kao povratna informacija u svrhu efikasnog organiziranja nastave. Rezultati snimanja ne smiju se ni u kojem vidu ocjenjivati ni sankcionirati. Ne smije se vršiti apsolutno nikakvo psihološko opterećenje učenika.

Ovakvom su pedagogijom postigli da njihovi učenici (od kojih su neki već njihovi asistenti u Centru i na fakultetu) veoma vole matematiku, uporno je i temeljito svladavaju i vrlo brzo u njoj napreduju tako da potpuno neuspješnih učenika praktički nema.

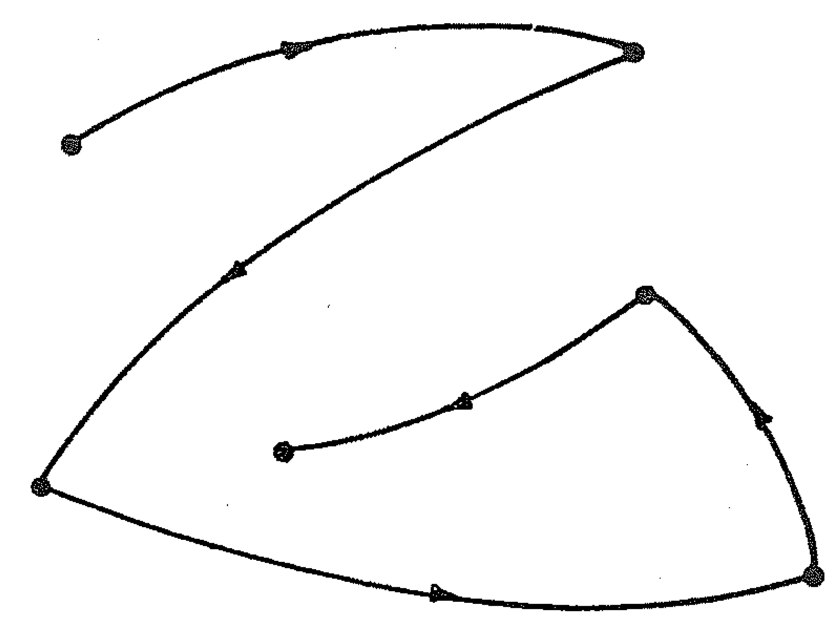
Krajem mjeseca ožujka 1971 godine proveo sam deset dana u CBPM. Primjera radi navodim neka od svojih zapažanja.

Dječji vrtić. Uzrast 4 godine.

Djeca dobacuju loptu jedno drugome, s time da pamte tko je kome dobacao loptu. Zatim se postavlja problem: Kako bi se ispričala priča o njihovoj igri nekom tko joj nije prisustvovao? (Djeca još ne znaju čitati ni pisati.).

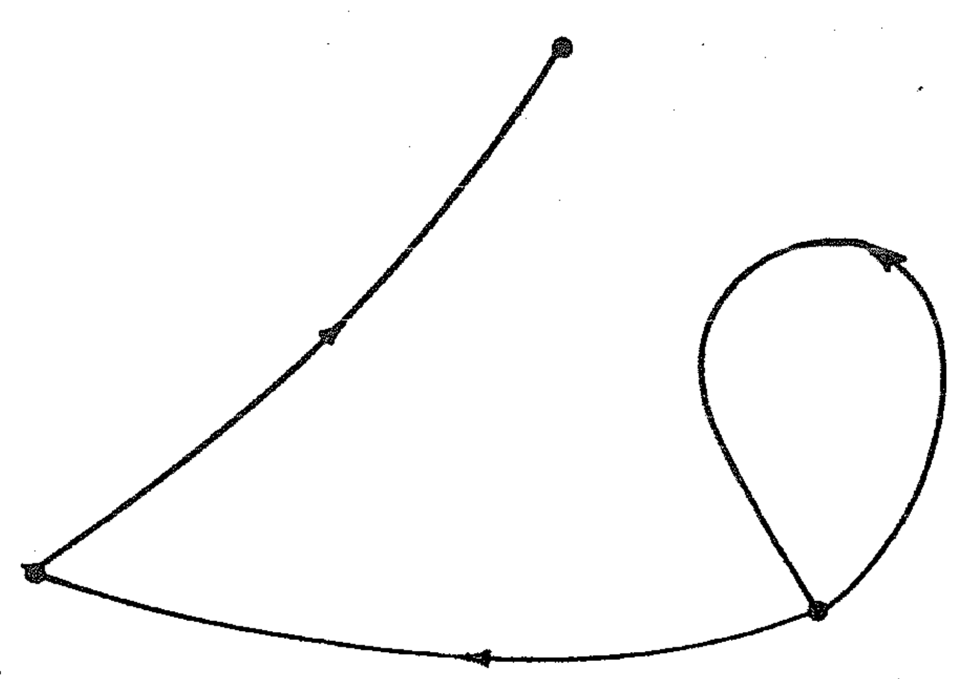
Djeca predlažu da se igra nacrta tako da se svako dijete prikaže jednom velikom točkom i da se strelicama prikaže tko je kome dobacio loptu.

Prema kazivanju djece nastavnica crta na ploči graf koji se postupno razvija u ljepu sliku:



Ovaj graf priča priču o igri djece loptom, igri koja je u ovom skupu djece definirala jednu binarnu relaciju. (Termin »binarna relacija« nije dakako bio izrečen.)

Zatim nastavnica kaže: »A evo kakva se igra igrala u nekom drugom skupu djece« i crta na ploči graf:



Zatim nastavlja: »Ispričajmo riječima tu priču!« Djeca brzo otkrivaju da je jedno dijete samo sebi dobacilo loptu. To je tipičan primjer primjene pedagogije situacija:

Problemska situacija je prikazana grafom što nije ništa novo za djecu. Takve su situacije ona već sretala. Dakle, situacija je bliska. No, u ovom slučaju ta situacija sadrži nešto novo, što još ni na jednom grafu nisu srela. To je petlja. Treba dakle da na temelju onog što več znaju i na temelju svojih iskustava sama otkriju što znači petlja, što ona ovdje »priča«. Petlja ovdje predstavlja problem sadržan u inače poznatoj situaciji, problem koji djeca moraju samostalno (ili bar što samostalnije) riješiti.

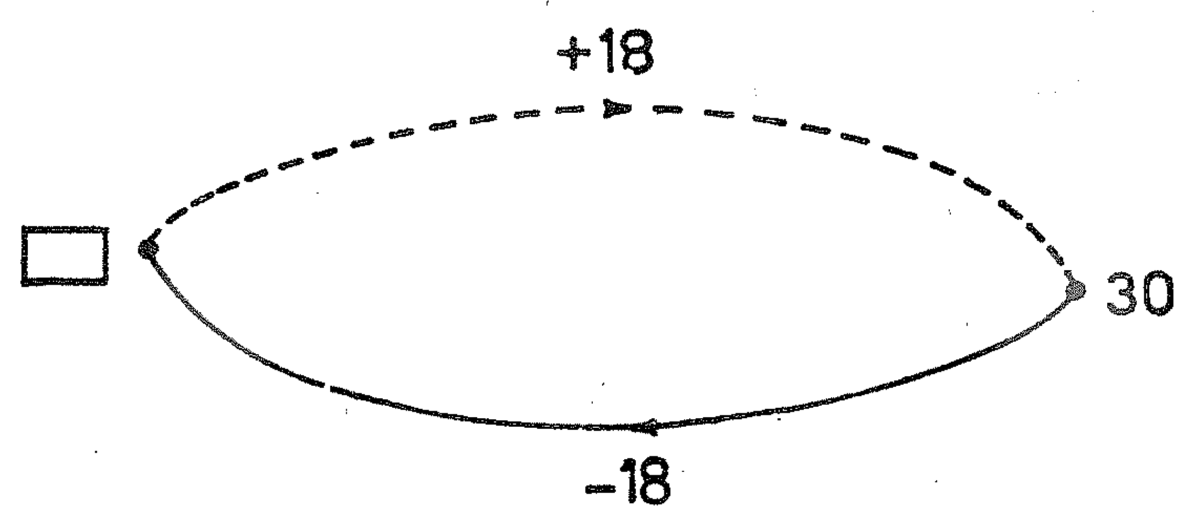
Djeca su na ovom satu proučavala binarne relacije ozbiljno i s velikim interesom. Bila su veoma raspoložena i aktivna i na kraju sata nisu pokazivala nikakav umor.

Prisustvujem savjetovanju o modernizaciji nastave matematike u osnovnoj školi u kojem sudjeluju direktori i inspektori osnovnih škola. Radi se u razredu, a zatim se taj rad analizira i diskutira. U prvom dijelu direktori (iako nisu nastavnici matematike) sami vode modernu matematiku u razredu. Za vrijeme rada konzultiraju se s redovitim nastavnikom u tom razredu. Djeca to ni ne primjećuju nego veoma koncentrirano i marljivo rade.

U 1. razredu (uzrast 6 godina) rješava se problem koji se prezentira u obliku priče, a zatim se na ploči zapisuje ovako:

$$\square + 18 = 30$$

Djeca rade najprije samostalno u svojim bilježnicama, zatim uspoređuju načine rješavanja problema i dobivene rezultate. Konačno se slože da se problem rješavanja ovako:*

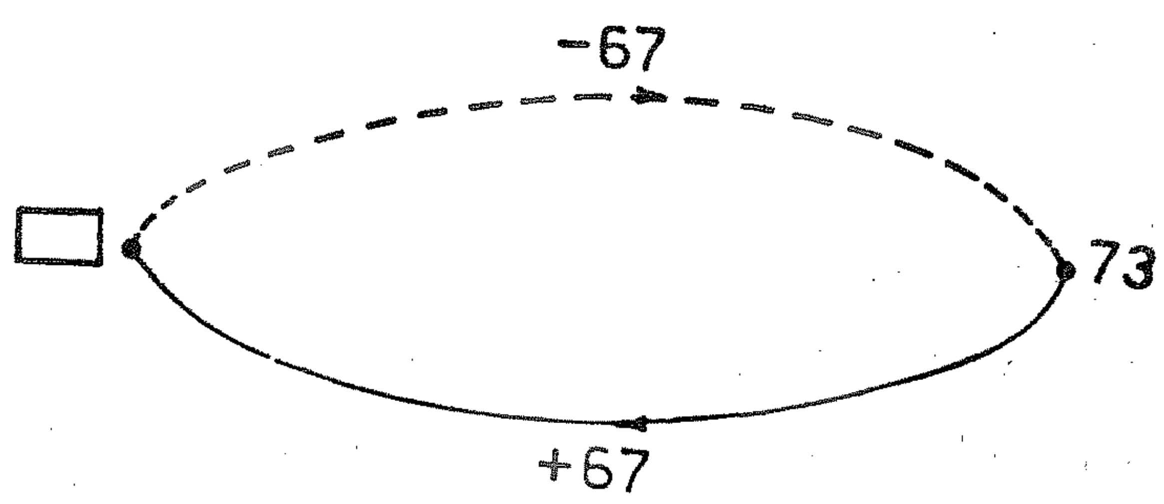


i da je rješenje broj 12, jer je 30 — 18 = 12, pa se taj broj upisuje u prazno polje.

Zatim se rješava problem:

$$\square - 67 = 73$$

Djeca predlažu metodu:

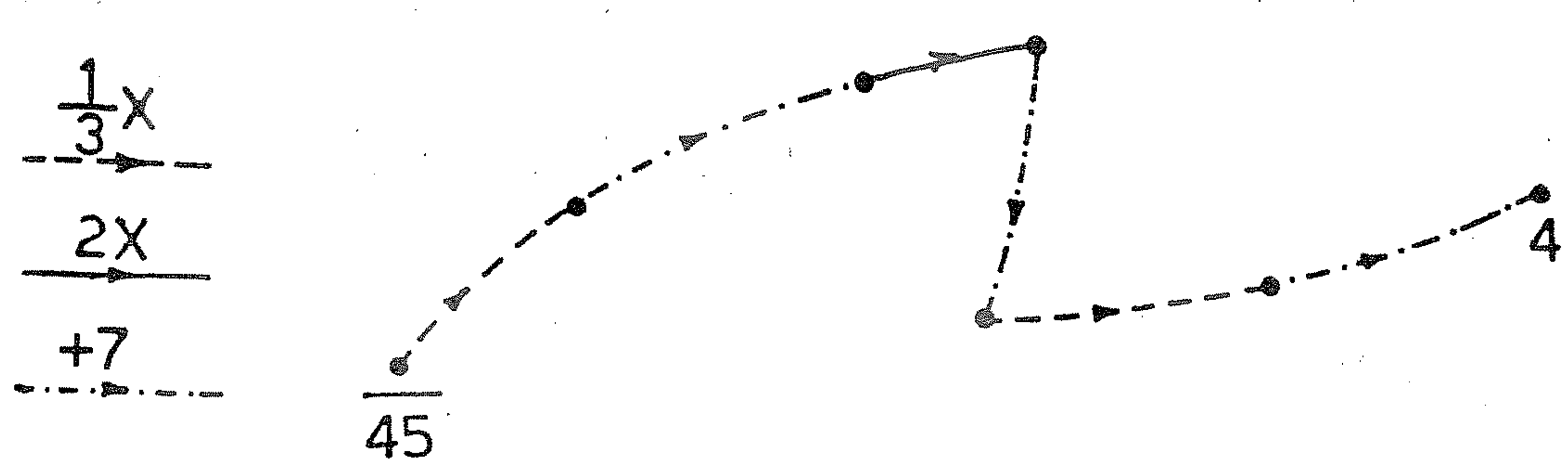


Pronalaze da je rješenje 140 jer je 73 + 67 = 140. Broj 140 upisuje se u prazno polje.

Kao što se iz ovih primjera vidi, djeca se ne ograničuju najprije na skup prirodnih brojeva do 20, zatim do 100 itd. Pokazalo se naime da djeca sa šest godina znaju što znači npr. temperatura od —5°, da imaju pojam polovine, trećine, ..., da znaju što znači cijena 6,25 franaka, da račun u trgovini može biti veoma velik i sl. Stoga se već od početka s tim brojevima računa.

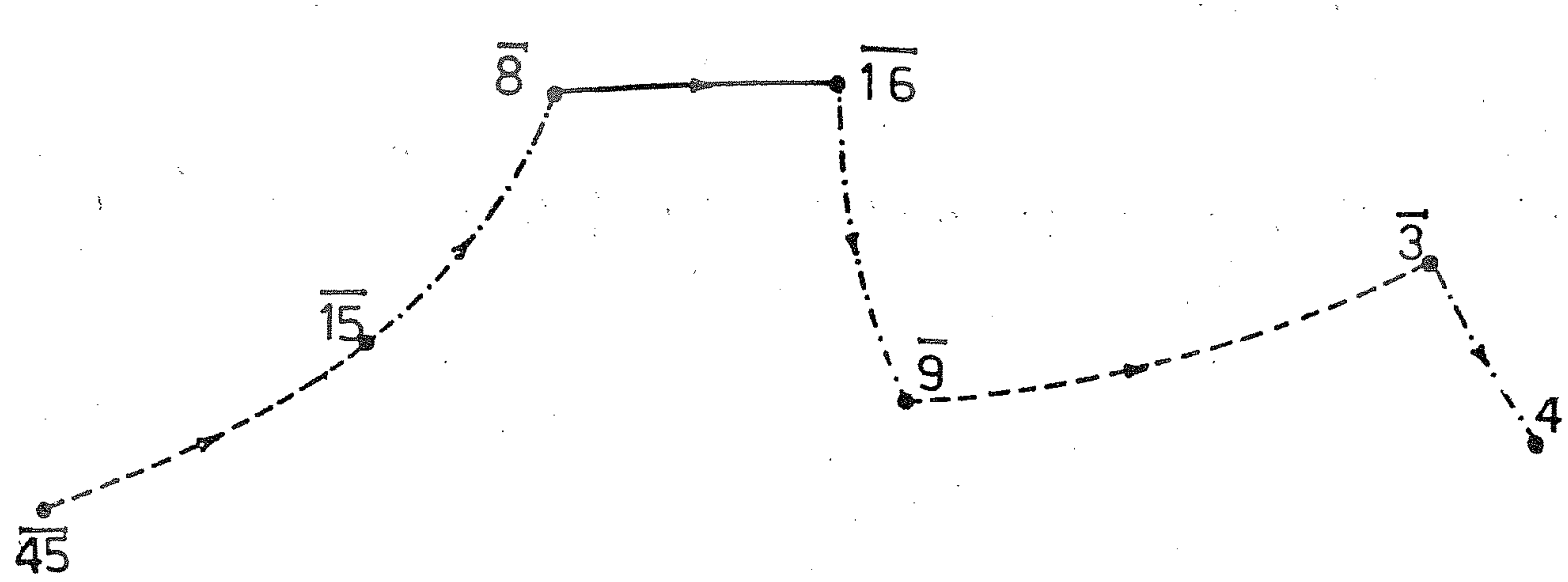
2. razred (7 godina)

Problemska se situacija crta na ploči:



Uz svaku točku treba napisati odgovarajući broj i provjeriti rješenje.

Rješenje glasi:



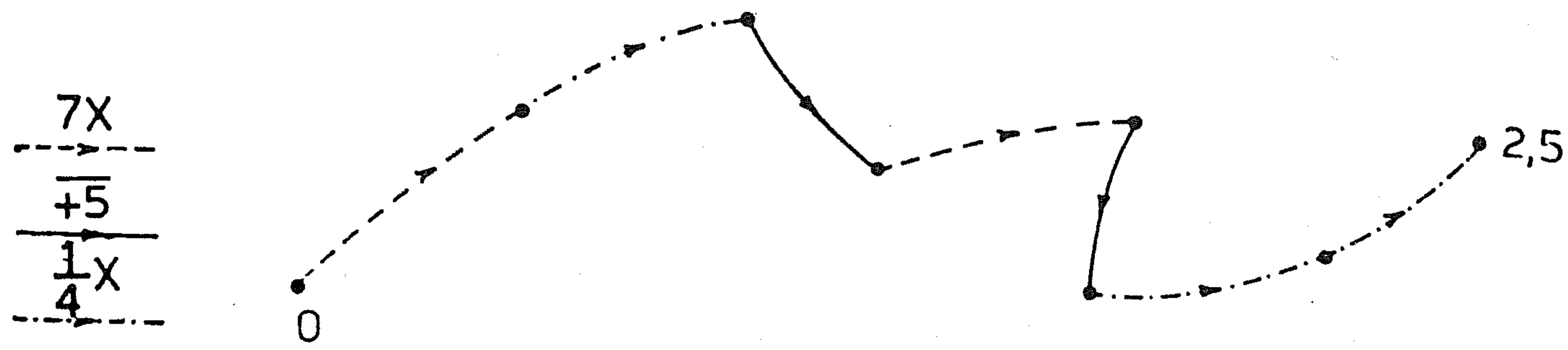
* Grafi so narisani v barvah: črtkana črta pomeni rdečo barvo, nepretrgana modro in črtkano-pikčasta zeleno barvo.

Napomene: $\frac{1}{3}$ x uz strelicu znači: funkcija $\frac{1}{3}$ x, tj. pomnožiti s $\frac{1}{3}$, odnosno podijeliti sa 3

$+7$ uz strelicu znači: funkcija $+7$, tj. pribrojiti 7

$\overline{45}$ znači da je to negativan broj, tj. $\overline{45} = -45$

Zatim se na ploči crta novi zadatak:



Učenici pronalaze da se negdje krije greška. Da bi se greška uklonila, bilo je više prijedloga. Zapazio sam ove prijedloge:

da se 2,5 zamijeni sa $\overline{2,5}$
da se 0 zamijeni nekim drugim brojem
da se funkcije zamijene drugim funkcijama
da se neka od funkcija zamijeni odgovarajućom funkcijom.

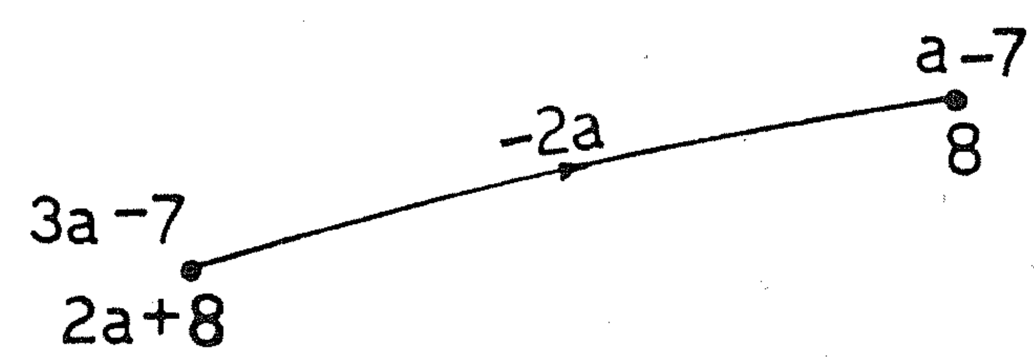
Diskusija je pokazala da su svi prijedlozi dobri.

3. razred (8 godina)

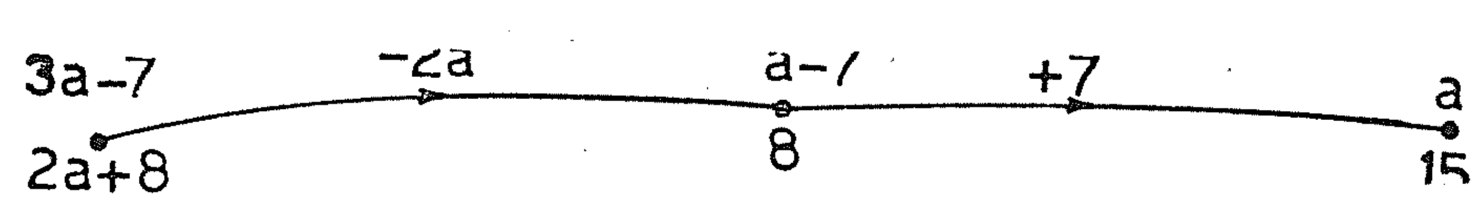
Učenici rješavaju jednadžbu $3a - 7 = 2a + 8$. Evo kako to oni rade.
a je nepoznati broj. Prema tome $3a - 7$ i $2a + 8$ su brojevi. Budući da su ti brojevi jednaki, na grafu ih predočujemo istom točkom. Imamo dakle:

$$\begin{gathered} 3a - 7 \\ \bullet \\ 2a + 8 \end{gathered}$$

Ako na jednake brojeve primjenimo istu funkciju, dobit ćemo jednake brojeve:



Ako isti postupak primjenimo na jednake brojeve $a - 7$ i 8, dobit ćemo opet jednake brojeve:



Dakle: $a = 15$
Učenici moraju znati da prethodni graf daje istu informaciju kao i shema:

$$\begin{gathered} 3a - 7 = 2a + 8 \\ \Updownarrow \\ a - 7 = 8 \\ \Updownarrow \\ a = 15 \end{gathered}$$

Samo, oni tu shemu ne moraju pisati u svakom zadatku.

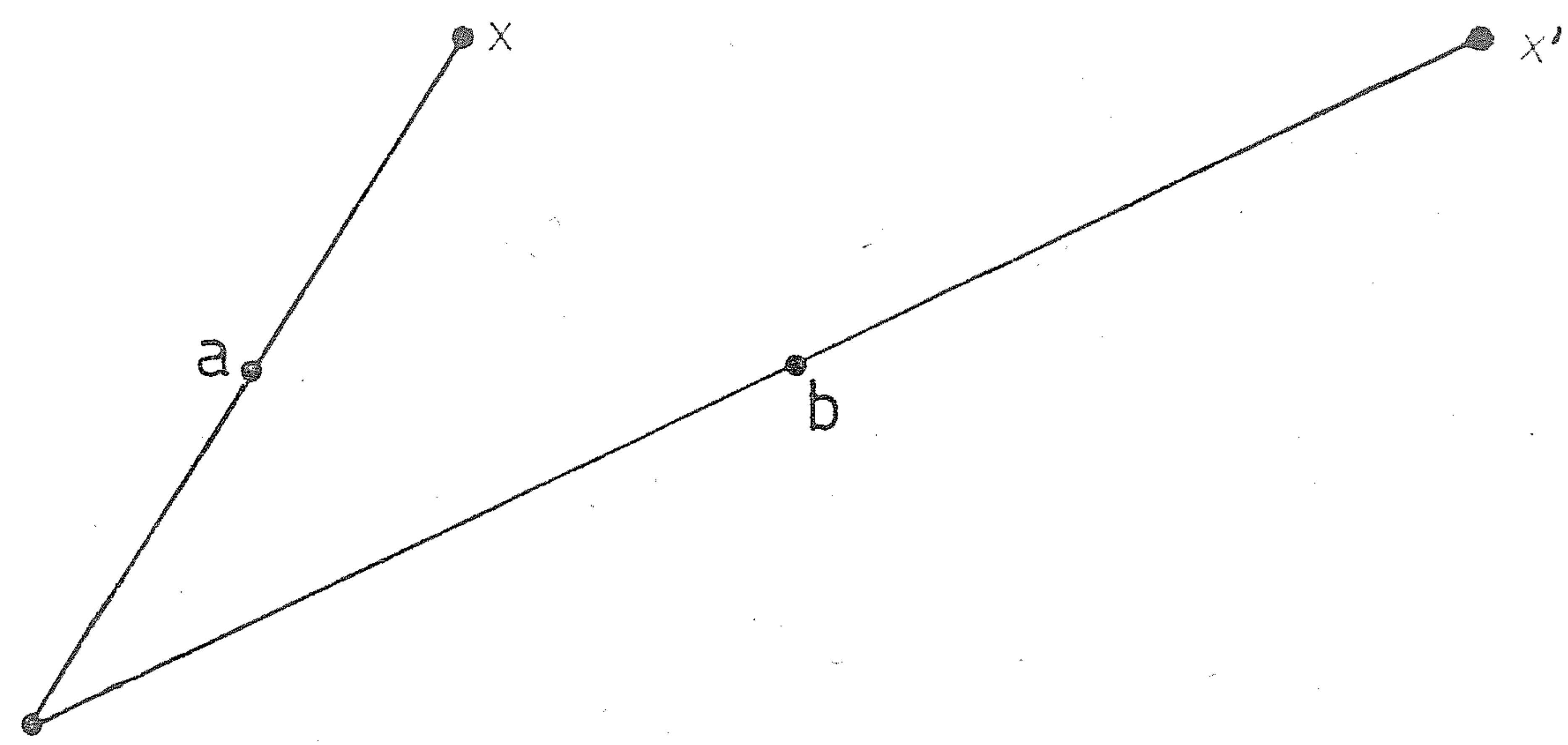
4. razred (9 godina)

Učenici su ranije učili centralnu simetriju. Novo gradivo najavljuje se problemskom situacijom u obliku naslova na ploči:

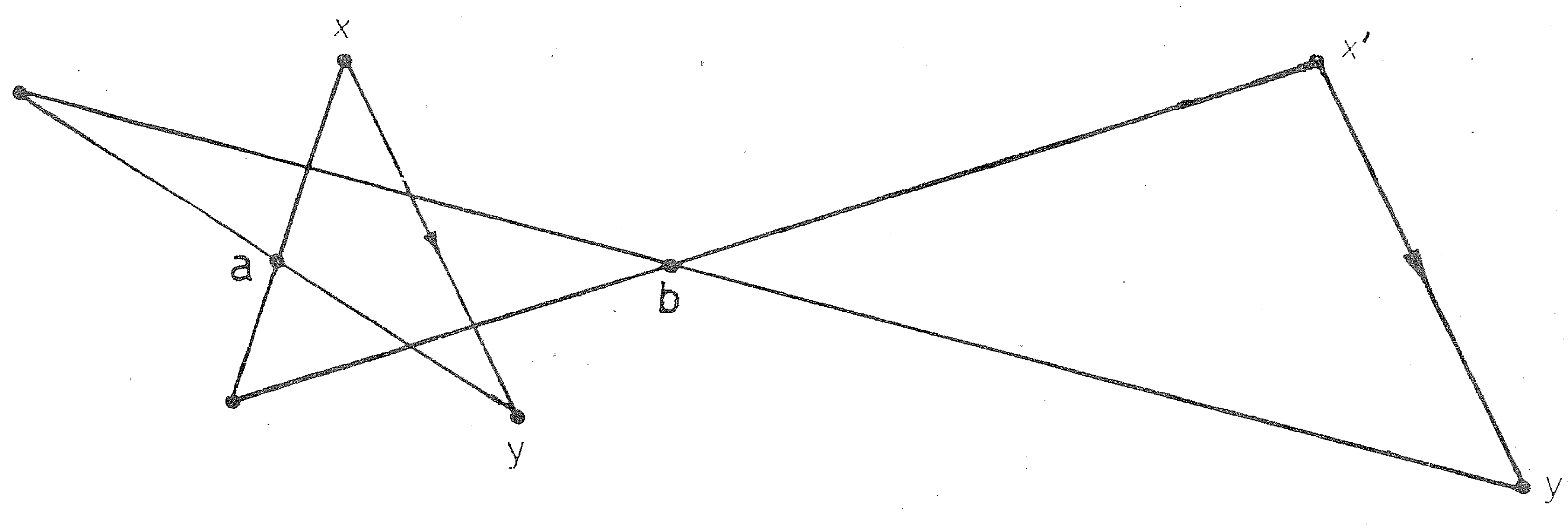
$$s_b \circ s_a$$

Ne očekujući nikakve nadaljne upute, učenici se zadube u svoje bilježnice. Savršeni mir koji je iza toga zavladao, prekine glas jednog učenika: »Ja mislim da je to translacija«.

Nastaje diskusija u kojoj učenik objašnjava kako je došao do svog otkrića. On zna da s_a znači simetriju s obzirom na točku a, a s_b simetriju s obzirom na točku b. Također zna da $s_b \circ s_a$ znači kompoziciju tih dviju simetrija. Očito je dakle da je $s_b \circ s_a$ neko preslikavanje ravnine u samu sebe. Stoga si je zadao dvije točke a i b, zatim uzeo proizvoljnu točku x i tražio njezinu sliku x'. Dobio je crtež:



Na temelju te slike nije mogao ništa zaključiti. Stoga je uzeo u pomoć još jednu točku, y. Dobio je crtež:

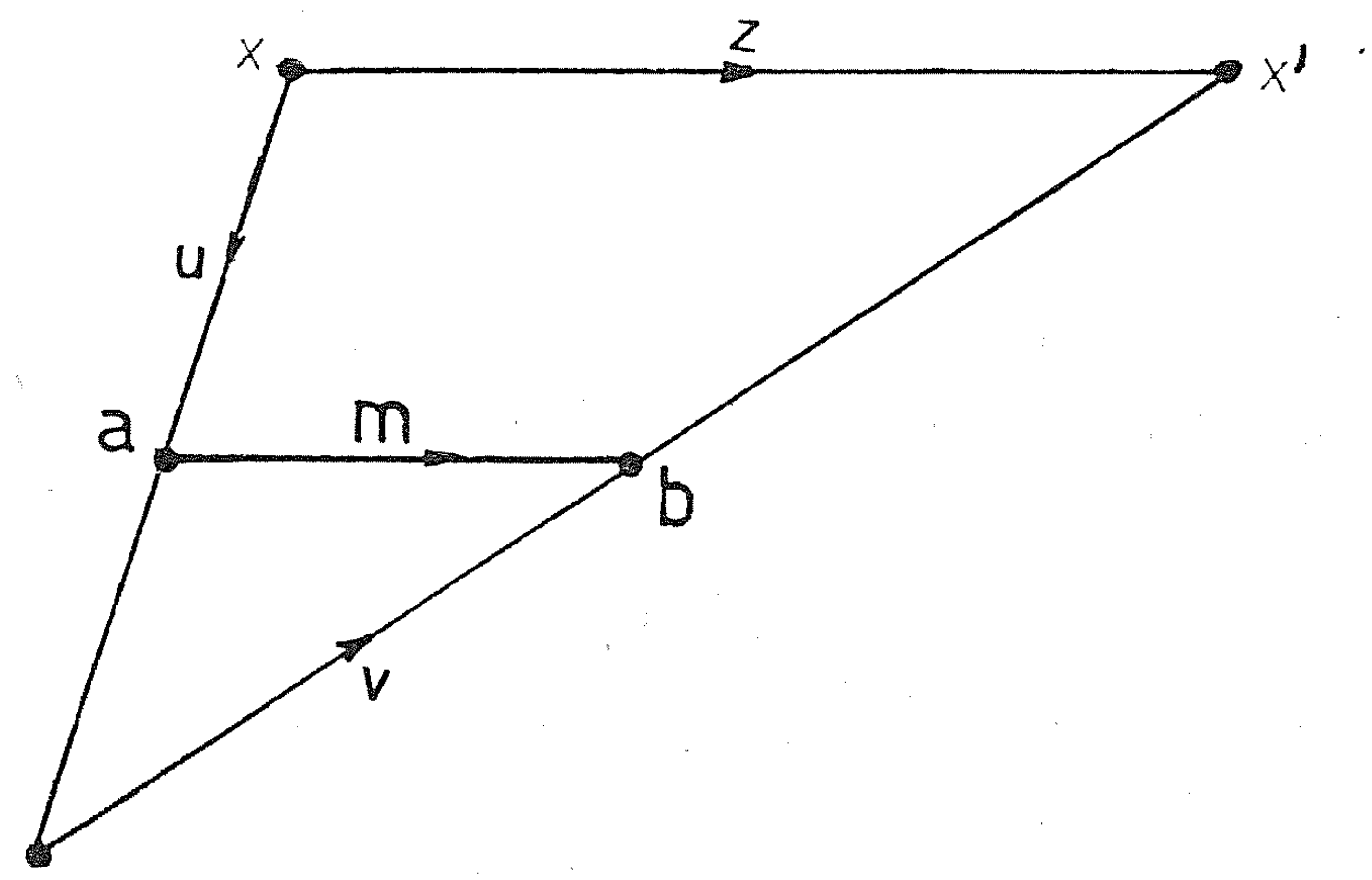


Uspoređujući uređene parove točaka (x, y) i (x', y') došao je na ideju da bi mogli biti ekvivalentni, tj. pripadati istom vektoru. Ako je tako, onda je preslikavanje $s_b \circ s_a$ translacija.

Ostali učenici bili su impresionirani njegovim izlaganjem, ali nisu bili sasvim uvjereni da se radi o translaciji. Nastavnica je upitala što predlažu da se radi u takvoj situaciji. Predložili su da stvar provjere translatorom. (To je sprava kojom učenici crtaju paralelograme, prenose dužine itd.). Brzo iza toga postane bučno u razredu. Neki su zaključili da se zaista radi o translaciji, drugi su se kolebali, a treći su rekli da parovi (x, y) i (x', y') na njihovim crtežima nisu ekvivalentni. Na kraju se razred podvojio. Jedni su bili sigurni da se radi o translaciji, a drugi su tvrdili da se negdje krije greška, ali nisu bili sigurni jeli se radi o lošim crtežima ili je zaključak da je $s_b \circ s_a$ translacija pogrešan.

Osjećala se potreba za matematičkim dokazom. Međutim oni još nisu čuli za matematički dokaz u pravom smislu riječi. (Uzrast 9 godina!). Ali su ranije učili kako se računa s vektorima. Predložili su da se računa!

Evo kako su izveli taj račun. Vratili su se prvoj slici (kao jednostavnijoj!) i dopunili je ovako:



Zatim su računali

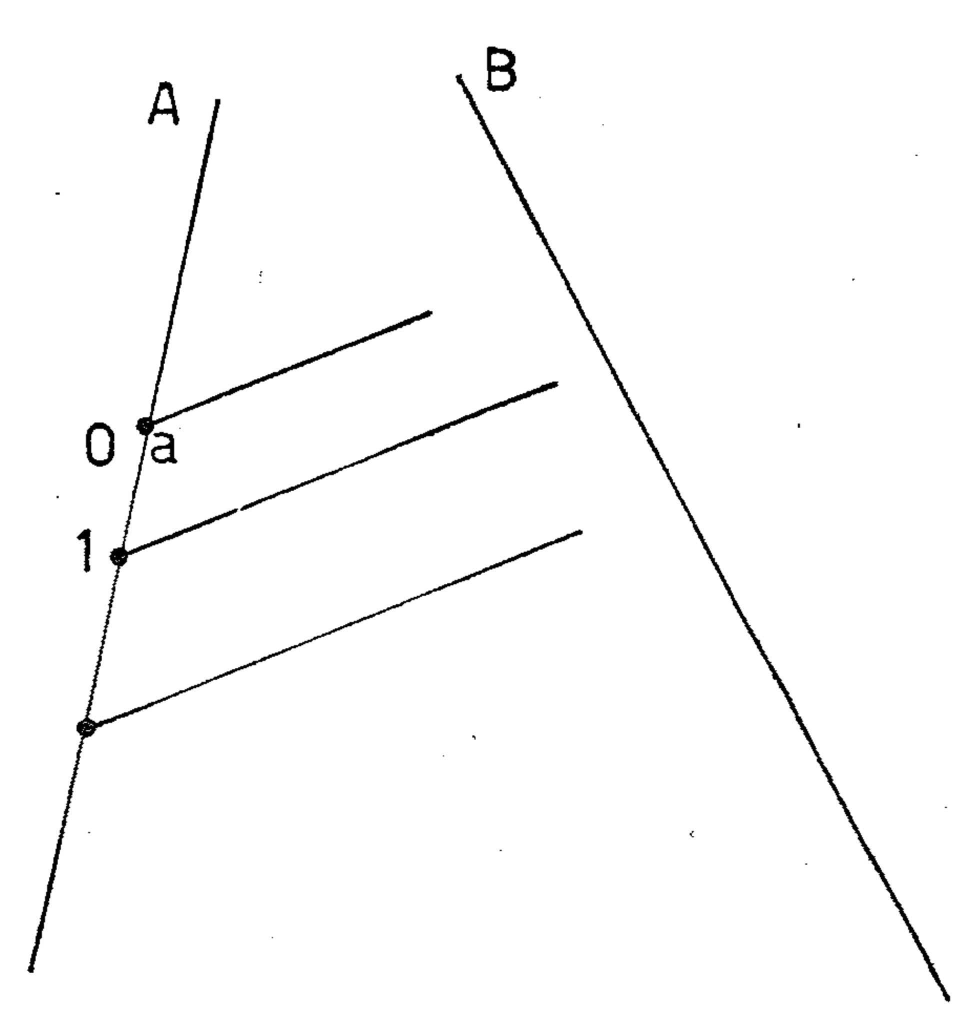
$$\begin{aligned}\vec{z} &= 2\vec{u} + 2\vec{v}\\ &= 2(\vec{u} + \vec{v})\\ &= 2\vec{m}\end{aligned}$$

Konačno su zaključili: Za svaku točku x ravnine preslikavanjem $s_b \circ s_a$ $\vec{z}$ je jednak $2\vec{m}$, a $\vec{m}$ je zadan točkama a i b koje su fiksne. Dakle svakoj točki x pridružen je isti vektor $2\vec{m}$, pa je $s_b \circ s_a$ zaista translacija ravnine za vektor $2\vec{m}$.

Zanimljivo je kako se uvode u nastavu skupovi brojeva. Kao što smo već spomenuli, učenici računaju sa svim brojevima koje sa sobom donose u školi. No u školi počinju opažati da se različiti brojevi mogu različito odnositi prema operacijama koje s njima vršimo. Počinju razlikovati algebarske strukture, i tada se javlja potreba da se razlikuju prirodni, cijeli i razlomljeni brojevi. F. Papy je izvršila istraživanja koja su pokazala da djeca od 9—10 godina mogu svladati egzaktno pojam realnog broja. Stoga se sada na tom uzrastu uzima polje realnih brojeva, a djeca još nisu ni čula za rječi »racionalan« i »iracionalan«. Tek kad se sigurno kreću u polju R, uvodi se pojam racionalnog i iracionalnog broja i proučava polje Q racionalnih brojeva.

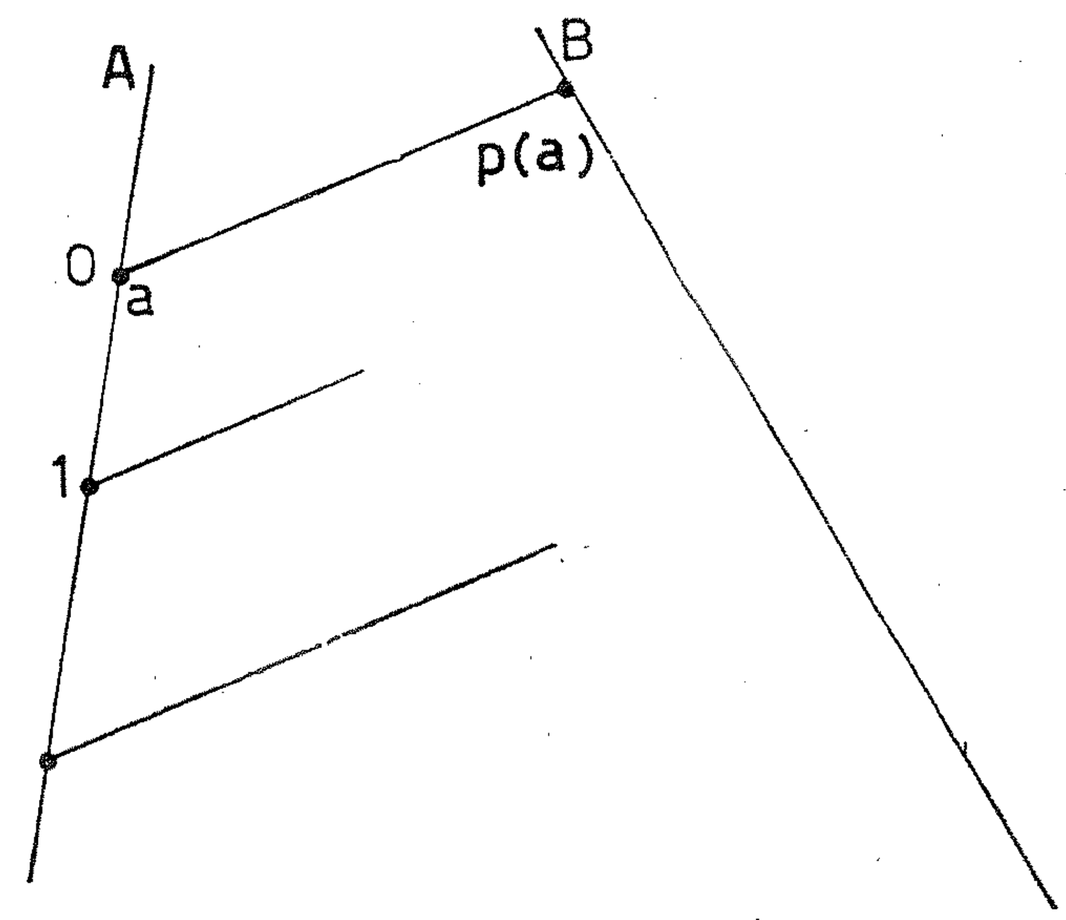
5. razred gimnazije (13 godina). Talesov teorem.

Učenici poznaju polje realnih brojeva i bijekciju između R i skupa točaka pravca, tj. koordinatnu os realnih brojeva. Učenici su učili i paralelnu projekciju. Postavlja se problem: Što se dešava, ako koordinatnu os realnih brojeva paralelno projiciramo na proizvoljni pravac. Problemska situacija prezentira se u obliku ovog crteža na ploči:

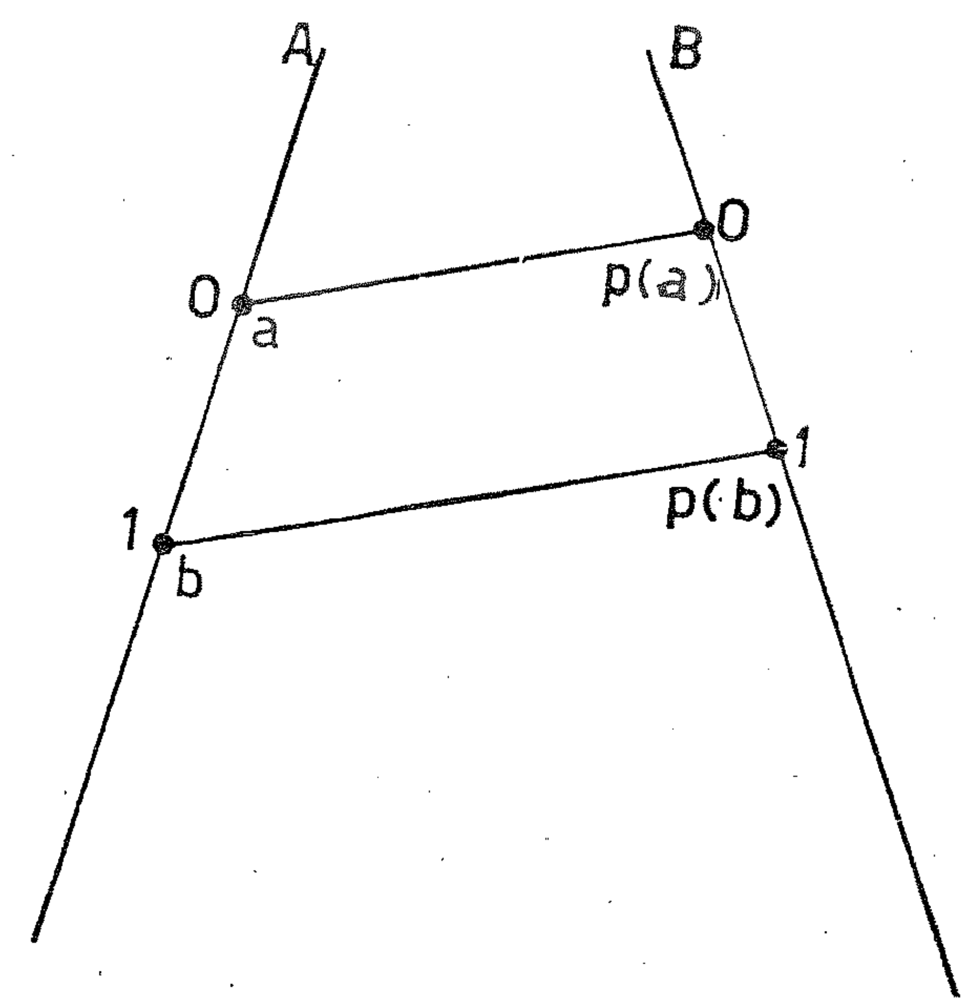


Jedan učenik: Budući da postoji bijekcija između R i skupa točaka bilo kojeg pravca, pravac B može biti koordinatna os.

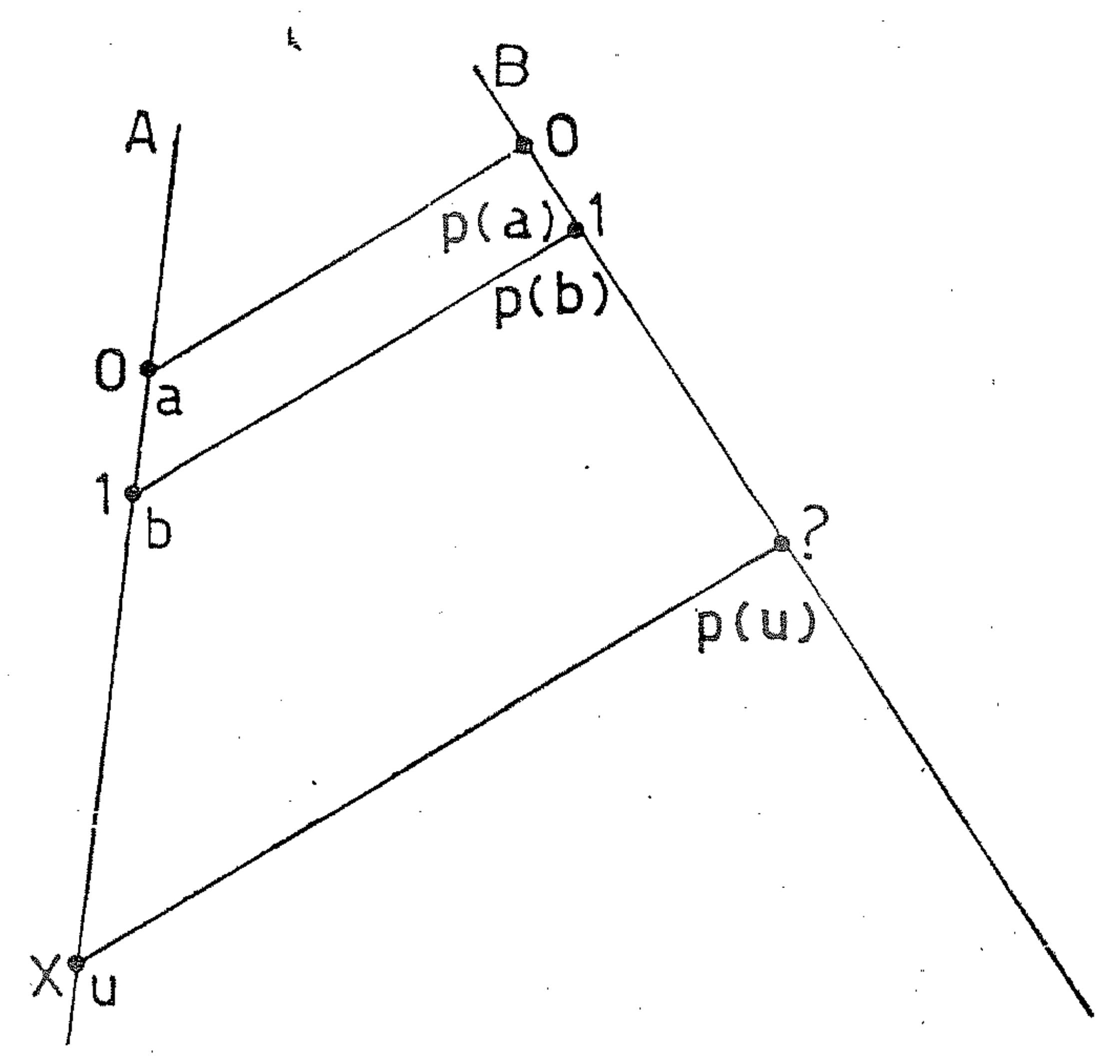
Drugi učenik: Budući da na pravcu B bilo koja točka može biti izhodište, uzmimo točku $p(a)$ za izhodište. Crta:



Treći učenik crta uz potrebna objašnjenja:



Postavlja se problem: Što će biti s projekcijama točke proizvoljne apscise x? Hoče li apscisa točke $p(x)$ biti x u koordinatnom sistemu kojemu je $p(a)$ izhodište, a $p(b)$ jedinična točka? Situacija se prikaže crtežom:



Primjenom teorema koje su ranije učili, dokazuju da je za svaku $x \in R$ apscisa točke $p(u)$ jednaka x. Time je Talesov teorem dokazan, i oni ga izriču u formi: Paralelna projekcija čuva apscisu.

Zanimljiva je ova elegantna formulacija Talesova teorema, no još je važnije da je teorem dokazan odmah u najopćenitijoj formi i da čini suvišnim uvođenje pojma sumjerljivih i nesumjerljivih veličina koji inače zamućuje bit Talesova teorema.

1. razred gimnazije jednog od literarnih smjerova (17 godina). Tema je Jordanov luk. Sat počinje uvodnom diskusijom kojoj je svrha da se motivira uvođenje pojma Jordanov

luk. Zatim, nastavnica daje definiciju Jordanova luka i traži da učenici sami pronalaze primjere. Prvi primjer koji su pronašli učenici: Svaki zatvoreni segment od R. Zatim slijede drugi primjeri, dok jedna učenica ne izjavi: Svaka kontinuirana funkcija $f\colon [a, b] \to R$ je Jordanov luk. Sada to zajednički dokazuju.

Eto to su neki od najzanimljivijih primjera na koje sam naišao obilazeći škole u Bruxellesu.

Htio bih još napomenuti da se čitav rad u CBPM vrši ekipno. Nove ideje se diskutiraju, pokušavaju realizirati u razredu, proučavaju se reakcije učenika, ponovno se provjerava u razredu, pripremaju se nastavnici na seminarima, štampaju priručnici i udžbenici i tek se tada nova materija uvodi u redovitu nastavu.

Uzeo sam belgijski primjer da bih poznatim mi konkretnim primjerima potvrdio izložene ideje. No radi se mnogo i u drugim sredinama na primjer u Francuskoj, Istočnoj Njemačkoj i drugdje, pa i u nas. Samo, mi smo — globalno uzevši — u nedopustivom zaostatku za vremenom, što bi moglo imati dalekosežnih posljedica.

Ignacije Smolec

TEKMOVANJA

TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV IN FIZIKOV V LETOŠNJEM LETU

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je tudi v letu 1972 organiziralo tekmovanja iz matematike in fizike za srednješolce in osnovnošolce. Komisija za popularizacijo je napravila načrt za posamezne akcije v zvezi s tekmovanji še pred občnim zborom Društva, kar je omogočilo dosledno izvajanje posameznih nalog. Republiški tekmovanji iz matematike in fizike ter zvezno iz fizike so bila izvedena po točno določenem planu, medtem ko je bilo zvezno tekmovanje iz matematike, ki je bilo v organizaciji DMFA SR Srbije, prestavljeno na 14. maj, zaradi epidemije črnih koz.

Vsa tekmovanja za srednješolce so potekala po pravilnikih, ki so jih pripravile posebne komisije in ki so bili sprejeti pred tekmovanji. Republiški tekmovanji iz matematike in fizike za srednješolce sta bili letos prvič izven Ljubljane, kar nikakor ni slabo vplivalo na udeležbo in počutje tekmovalcev.

1. Republiško tekmovanje iz matematike

Komisija za tekmovanje srednješolcev iz matematike je pod predsedstvom prof. dr. Ivana Vidava 8. aprila v Mariboru izvedla tekmovanje v prostorih Višje tehniške šole. Podružnica društva v Mariboru je opravila vse potrebno, da je tekmovanje nemoteno potekalo in da je bilo zaključeno v poldrugem dnevu. Tekmovanje je finančno podprla TIS Maribor.

Na tekmovanje je prišlo 194 dijakinj in dijakov, ki so tekmovali v skupinah za prvi razred (65 dijakov), drugi razred (46), tretji razred (41) in četrti razred (42). Tekmovalci so dopoldne reševali po pet nalog za vsak razred. Tekmovalna komisija pa je ob pomoči dodatnih korektorjev po končanem tekmovanju pregledala in točkovala izdelke ter končno določila nagrade: 2 prvi, 3 druge in 8 tretjih. Predsednik komisije je še isti dan podelil priznanja najboljšim.

Nagrade so prejeli:

Prva nagrada: Lavrič Boris, 3. r., gimn. Kranj in Kralj Miran, 2. r., I. gimn. Ljubljana.

Druga nagrada: Hodoščk Milan, 4. r., II. gimn. Ljubljana; Koderman Ivan, 3. r., I. gimn. Ljubljana in Tomšič Marjan, 2. r., I. gimn. Ljubljana.

Tretja nagrada: Zgonik Marko, 4. r., gimn. Nova Gorica; Marušič Dragan, 4. r., gimn. Koper; Hostnik Boštjan, 3. r., I. gimn. Ljubljana, Petkovšek Marko, 3. r., II. gimn. Ljubljana; Razdrtič Andrej, 2. r., I. gimn. Ljubljana; Mikoš Uroš, 2. r., I. gimn. Ljubljana; Duplančič Zvonko, 2. r., gimn. Kranj in Šega Marko, 1. r., I. gimn. Ljubljana.

Pohvaljenih je bilo 36 dijakov. V ekipo za zvezno tekmovanje je bilo določenih 12 najboljših tekmovalcev iz 2., 3. in 4. razreda. Sekretarka tekmovalne komisije prof. Marija Munda je ob pomoči kolegov iz podružnice društva Maribor pripravila vse potrebno, da je bilo tekmovanje izvrstno organizirano in zasluži vse priznanje.

2. Republiško tekmovanje iz fizike

Kot smo že omenili, je bilo tudi tekmovanje iz fizike izven našega glavnega mesta. V Novi Gorici je bilo 6. maja 1972 X. republiško tekmovanje mladih fizikov. Izvedla ga je komisija za tekmovanje pod predsedstvom prof. dr. Antona Moljka. Udeležilo se ga je 198 dijakinj in dijakov iz gimnazij in dveh tehniških šol. Dijaki so tekmovali v skupinah za 2. razred (75 dijakov), 3. razred (65) in 4. razred (58). Tekmovalna komisija je pregledala in ocenila izdelke in isti dan proti večeru podelila nagrade in pohvale. Nagrade so dobili:

Prva nagrada: Zgonik Marko, 4. r., gimn. Nova Gorica; Magajna Bojan, 3. r., gimn. Postojna; Trčelj Dušan, 2. r., I. gimn. Ljubljana in Javornik Rajko, 2. r., gimn. Nova Gorica.

Druga nagrada: Djukanović Božo, 3. r., gimn. Nova Gorica; Kralj Miran, 2. r., I. gimn. Ljubljana; Matek Roman, 2. r., gimn. Celje in Černe Jadran, 2. r., gimn. Ajdovščina.

Tretja nagrada: Kulnik Dragan, 4. r., gimn. Nova Gorica; Adrinek Rafael, 4. r., gimn. Poljane Ljubljana; Šmit Žiga, 3. r., II. gimn. Ljubljana; Petek Branko, 3. r., gimn. »M. Zidanška« Maribor; Cenčič Boris, 3. r., gimn. Nova Gorica; Mikoš Uroš, 2. r., I. gimn. Ljubljana; Peternel Igor, 2. r., gimn. »M. Zidanška« Maribor; Tomažič Sašo, 2. r., I. gimn. Ljubljana; Sabó Rajko, 2. r., I. gimn. Ljubljana; Gorenjec Ivan, 2. r., gimn. Celje in Gabrijelčič Branko, 2. r., gimn. Koper.

Prvo in drugo nagrado so zaslužili po 4 dijaki, tretjo 11 in pohvalo 12 dijakov. Komisija je obenem izbrala večje število kandidatov za zvezno tekmovanje, tako da je bilo po pripravah mogoče izmed njih določiti 12-člansko ekipo Slovenije.

Ker je bilo tekmovanje v Novi Gorici, je tamkajšnja podružnica prevzela vso skrb za njegovo organizacijo. Sekretar tekmovalne komisije prof. Franc Perne je s sodelavci poskrbel za izvrstno izvedbo tekmovanja. Za požrtvovalno delo pri tem zasluži prav tako vse priznanje in pohvalo. Med čakanjem na rezultate tekmovanja so se dijaki pomerili o znanju fizike še na kvizu, ki ga je omogočila tovarna pohištva »Meblo« iz Nove Gorice. Prireditev, ki je imela predvsem zabaven značaj, je povsem uspela.

3. Zvezno tekmovanje iz matematike

Iz Slovenije se je XIII. zveznega tekmovanja, ki je bilo v Beogradu, udeležilo 12 tekmovalcev, od katerih je Lavrič Boris, dijak 3. r. gimn. Kranj prejel prvo nagrado. Malnič Aleksander iz 3. r. gimn. Nova Gorica in Marušič Dragan iz 4. r. gimn. Koper pa sta zaslužila tretjo nagrado, medtem ko je bil Zgonik Marko, dijak 4. r. gimn. Nova Gorica pohvaljen.

Na tekmovanju je bilo 79 dijakov iz SR Bosne in Hercegovine, Hrvatske, Makedonije, Slovenije in Srbije. V osemčlansko ekipo za XIV. mednarodno olimpiado je bil določen Lavrič Boris.

4. Zvezno tekmovanje iz fizike

Tekmovanje je že drugič organiziralo naše društvo. Izvedeno je bilo 21. maja tudi v Novi Gorici pod predsedstvom prof. dr. Antona Moljka. Glavno breme organizacije je nosila tamkajšnja podružnica društva.

Tekmovalo je 46 srednješolcev iz SR Bosne in Hercegovine, Hrvatske, Slovenije in Srbije v treh skupinah A (mehanika in kalorika), B (elektrika in magnetizem) in C (optika in atomika). Slovenija je po izboru na pripravah poslala v Novo Gorico 12 tekmovalcev, ki so se zelo dobro odrezali, saj so prejeli eno prvo, po dve drugi in tretji nagradi in eno pohvalo. Edino prvo nagrado med vsemi je osvojil Miklavčič Miran, dijak 3. r. TSŠ KMRLP Ljubljana. Drugo nagrado sta dobila Javornik Rajko in Zgonik Marko, oba dijaka 4. r. gimn. Nova Gorica, tretjo pa Magajna Bojan iz 3. r. gimn. Postojna in Šmit Žiga iz 3. r. II. gimn. Ljubljana. Pohvaljen je bil še Polanc Ljubomir iz 4. r. gimn. Nova Gorica.

Organizator tekmovanja podružnica društva Nova Gorica pod vodstvom prof. Franceta Perneta zasluži posebno priznanje.

5. Republiško tekmovanje osnovnošolcev

Za zlato Vegovo priznanje je v petih mestih Celju, Kopru, Ljubljani, Mariboru in Novi Gorici 27. maja tekmovalo 211 učencev osmega razreda osnovne šole, ki so bili predhodno izbrani na občinskih tekmovanjih. Tekmovalna komisija je na osnovi rezultatov, ki so jih tekmovalci dosegli, podelila 94 učencem zlato Vegovo priznanje. Največ točk so dosegli Košir Sonja iz Nove Gorice, Lenarčič Milan z Vrhnike, Zavrl Alenka iz osn. š. »P. Voranc« Ljubljana, Čefrin Tamar iz osn. š. Grm, Novo mesto, Vehovar Vasja iz osn. š. »D. Bajc«, Vipava in Oblak Marko iz osn. š. »P. Voranc«, Ljublana.

Sekretar tekmovalne komisije Pavle Zajc zasluži vse priznanje za požrtvovalno delo, ki ga je s sodelavci opravil.

Podali smo le kratek zapis o letošnjih tekmovanjih. Čestitamo vsem, ki so na tekmovanjih uspeli in dosegli nagrade in pohvale. Njihovi uspehi naj bodo spodbuda tudi drugim, da bi v prihodnje dosegli čim boljše rezultate.

Sekretar komisije za popularizacijo
Branko Roblek

DOMAČE VESTI

23. OBČNI ZBOR DMFA SRS

V 2. številki Obzornika za matematiko in fiziko 1972 je pri objavi poročil iz občnega zbora pomotoma izpadlo poročilo bibliografske sekcije, pri objavi novega upravnega odbora pa vodja bibliografske sekcije. prof. Jože Povšič.

POROČILO vodje bibliografske sekcije Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS na občnem zboru dne 25. marca 1972:

V preteklem obdobju društvenega dela sem nadaljeval z zbiranjem bibliografskega in biografskega gradiva o Juriju Vegi. To delo sem opravljal z obiski knjižnic in arhivov, z dopisovanjem preko društva z inozemskimi knjižnicami, z arhivi, s centralnimi katalogi in z založniškimi knjigarnami.

Delo sem nameraval zaključiti in ga predložiti za tisk že leta 1971, a sem moral zaključek odložiti. Večina gradiva je namreč tako težko dostopna in raztresena v tujini, delo tako težavno, zamudno in zahteva dolgotrajno iskanje, da sem moral dobo sestavljanja bibliografije podaljšati. Upam, da bo delo v naslednjem obdobju končano.

Pri tem pa se je nabralo toliko novega knjižnega in slikovnega gradiva (ali pa je znano hranišče tega), da bi z njim lahko dokončno izpopolnili stalno razstavo v Vegovem rojstnem domu v Zagorici. Z inž. arhitektom Suhadolcem, ki je že sodeloval pri pripravah, ko je Društvo sobo prvič opremljalo, sva pripravljena to narediti in sva že izdala načrt.

Prav bi bilo, če bi člani Društva in vodstva šol bolj pogosto kakor do sedaj učence šol vodili in usmerjali na izlete na Vegov dom; saj je sedaj Zagorica dostopna tudi z motornimi vozili. — Jože Povšič.

Ivan Pavliha

NOVE KNJIGE

Ivan Vidav: Algebra. Mladinska knjiga, Ljubljana 1972. 343 str. 8°. (**MOS 12-01**). Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij — MATEMATIKA — 4. Izdaja inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko univerze v Ljubljani. Cena: broš. 64.- din, pl. 88.- din.

Knjiga obsega poglavja: Osnovni pojmi iz teorije množic — Grupe — Kolobarji in obsegi — Matrike in determinante — Osnove teorije števil — Kolobarji polinomov — Moduli in vektorski prostori — Mreže — Osnovni pojmi iz teorije obsegov — Cela algebraična števila.

Že ta pregled vsebine pove, da je knjiga posvečena tistim sodobnim poglavjem algebre in teorije števil, ki vsebujejo tudi najlepša in napomembnejša odkritja klasične algebre. V njej so zbrana in izredno lepo podana osnovna algebrska znanja, ki jih mora dandanes pridobiti študent na vsaki univerzi. Obravnava je nevsiljivo in brez pretiravanj naslonjena na temelje teorije kategorij. Knjiga obsega vso snov istoimenskega predmeta in še posamezne dele »Višje algebre«. Tako bo povsem zadovoljila študente matematike, pomagala pa bo tudi tistim tehnikom, ki se v svojem delu srečujejo z jezikom in z metodami algebre.

Knjiga je napisana jasno, strokovno neoporečno, jezikovno lepo.

Del iz področja algebre, posebej še linearne, je v srbohrvaščini že kar veliko, pa tudi v slovenščini nismo brez njih. Vendar je knjiga profesorja Vidava prva v Jugoslaviji, ki je napisana tako sodobno, ne za včerajšnji, ampak za današnji in jutrišnji dan. Pa naj gre za izbor in ureditev snovi ali za raven podajanja.

F. Križanič

Henrici P.: Elements of Numerical Analysis, New York — London, John Wiley and Sons, 1964. 328 str. 8°. (MOS 65-01)

Vsebina:

Uvod (Kaj je numerična analiza? Kompleksna števila in polinomi, Diferenčne enačbe). Reševanje enačb (Iteracija, Iteracija za sisteme enačb, Linearne diferenčne enačbe, Bernoullijeva metoda, QD algoritem). Interpolacija in aproksimacija (Interpolacijski polinom, Konstrukcija interpolacijskega polinoma: metode z ordinatami, Konstrukcija interpolacijskega polinoma: metode z diferencami, Numerično odvajanje, Numerično integriranje, Numerično reševanje diferencialnih enačb). Računanje (Številski sistemi, Širjenje zaokrožitvene napake).

Knjiga predstavlja poskus prikazati, da je numerična analiza panoga matematike in ne samo posebne vrste umetnosti. To se pravi, da skuša avtor prikazati skupne osnovne principe pri raznih metodah, ne pa posebne prijeme, s katerimi je možno rešiti ta ali oni problem.

V knjigi je poleg določene standardne vsebine tudi nekaj novejših metod, na primer Mullerjeva metoda, QD algoritem, Rombergova integracija, ekstrapolacija k limiti in računanje logaritmov z odvajanjem. Druga posebnost knjige je obravnavanje diferenčnih enačb z isto strogostjo, kot navadno obravnavamo diferencialne enačbe. Uporaba diferenčnih enačb se prepleta skozi vso vsebino knjige. Knjiga vsebuje okrog 300 poučnih nalog in tudi nekaj raziskovalnih problemov.

Do kompletnega učbenika numerične analize manjka v tej knjigi nekaj poglavij, predvsem poglavje o numerični linearni algebri, ki pa je po avtorjevem mnenju bolj primerno za samostojno obravnavo.

Knjiga je napisana zelo pregledno in razumljivo in čuti se, da je avtor velik mojster.

Ames W. F.: Numerical Methods for Partial Differential Equations. London, Thomas Nelson and Sons LTD, 1969, 291 str. 8°. (MOS 65 M/N)

Vsebina:

Osnove. Parabolične enačbe. Eliptične enačbe. Hiperbolične enačbe. Posebna poglavja.

Knjiga je namenjena vsem, ki si želijo poglobiti površno znanje, ki so ga dobili pri numerični analizi o reševanju parcialnih diferencialnih enačb.

Najprej so razložene teoretične osnove, ki so potrebne za formulacijo numeričnih metod. Nato sledi razlaga konceptov asimptotike, konvergence, stabilnosti, dimenzijske analize, analize napak in določevanja mrežnih razmakov. Reševanje problemov je razdeljeno na tri dele: začetni problemi (parabolični in hiperbolični tip), robni problemi (eliptični tip) in problemi lastnih vrednosti (eliptični tip). Vsak razdelek se začne z elementarno obravnavo, sledijo pa diskusije in primeri. Avtor daje pri vsakem poglavju tudi pregled današnjega stanja teorije in vrsto napotkov na specialno literaturo. Obdelanih je vrsta fizikalnih in inžinerskih problemov, med njimi so tudi nelinearni, ki ponazarjajo uporabo obravnavane snovi pri reševanju netrivialnih problemov. Citatov iz literature je preko 300. Vsak razdelek spremljajo naloge različnih težavnostnih stopenj.

Z. B.

PREJELI SMO V OCENO

Daniel T. Finkbeiner II: Elements of linear algebra. W. H. Freeman and Company Limited, Reading 1972. XI + 268 str., 37 slik. Cena: platno £ 4.32, karton £ 2.20.

Vsebina: *Pregled linearne algebre*, *Vektorski prostori*, *Linearne preslikave in matrike*, *Sistemi linearnih enačb*, *Diagonalizacija*, na koncu pa so še: *Grška abeceda*, *Navodila in rešitve k nalogam*, *Stvarno kazalo*.

V spremni besedi se avtor ozre na usodo linearne algebre v zadnjih desetletjih, kako je od postdiplomskih tečajev potovala vedno niže, dokler se ni zasidrala prav na začetku matematičnega študija. Takemu začetnemu tečaju je namenjen tudi obravnavani učbenik. V prvem poglavju pregleda tisto znanje linearne algebre, ki si ga je dijak pridobil ob vektorskem računu v trorazsežnem prostoru in pri reševanju sistemov linearnih enačb. Druga poglavja pa sistematično in natančno obdelajo osnovne pojme linearne algebre in nekaj računskih algoritmov. Kaj je v katerem, pove naslov.

Delo je pisano preprosto, lepo je opremljeno z zgledi in s slikami. Priporočimo ga lahko vsem študentom prvih letnikov na vseh tehniških smereh, tam, kjer je linearna algebra že v programu in tam, kjer še ni.

F. K.

NOVE KNJIGE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

)snovna šola

S. Uršič: Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev 8-ih razredov osnovnih šol Sloveniji. DMFA SRS, Ljubljana 1972. 56 str. 8°. Skripta.

M. I. Moro, M. A. Bantova: Matematika. Učbenik dlja vtorogo klassa Izd. 3. Prosveščenie, Ioskva 1971. 240 str. 8° (cir.)

Matematika. Učbenik. 4. klass. Pod red. A. I. Markuševiča. Izd. 4. Prosveščenie, Moskva 1971. 88 str. 8° (cir.)

Matematika. 5. klass. Učebnoe posobie. Pod red. A. I. Markuševiča. Izd. 2. perer. Prosveščenie, Ioskva 1971. 240 str. 8° (cir.)

S. Prvanović: Metodika savremenog matematičkog obrazovanja u osnovnoj školi. Zavod za izdaanje udžbenika, Beograd 1970. 752 str. 8°.

S. Berman et R. Bezard: Mathematiques pour maman. 4. ed. Ed. Chiron, Paris 1969. 240 str. 8°.

,birka vaj za srednjo šolo

B. Vene: Zbirka rešenih zadataka iz algebre za II. razred gimnazije. Savremena administracija, eograd 1971. 215 str. 8°.

Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita fakultetima. 2. izmj. izd. Napisali M. Bertolino in dr. Zavod a izdavanje učbenika. Beograd 1970. 8°.

Najzanimljivi zadaci sa školskih, kvalifikacionih i republičkih matematičkih natjecanja učenika kola II. stupnja u SR Hrvatskoj. Zadaci, upute, rješenja. Pripremili J. Brkić i dr. Školska knjiga, Zagreb 969. 148 str. 8°.

V. M. Milošević i M. Živović: Zbirka rešenih zadataka iz matematike za III. razred gimnazije rirodno-matematičkog smera. (Sa zadacima za takmičenja i prijemne ispite na fakultetima.) Prosveta, eograd 1970. 355 str. 8°.

S. V. Kuščenko: Zbirka zadataka (sa rešenjima) sa prijemnih ispita, velikih matura i matemačkih olimpiada. Naučna knjiga, Beograd 1970. 535 str. 8°.

Zbirka zadataka iz elementarne matematike. Napisali M. P. Antonov i dr. Zavod za izdavanje džbenika, Sarajevo 1972. 456 str. 8°.

Sedmancty ročnik matematicke olympiady. SNP, Praha 1696. 159 str. 8°.

Osmancty ročnik matematicke olympiady. SPN, Praha 1970. 181 str. 8°.

M. I. Bašmakov: Uravnenija i neravenstva. Nauka, Moskva 1971. 96 str. 8° (cir.)

Matematičeskie zadači. Izd. 3. Sestavili E. B. Dynjin i dr. Nauka, Moskva 1971. 80 str. 8° (cir.)

A. K. Kutepov i A. T. Rubanov: Zadačnik po geometrii. Vyssšaja škola. Moskva 1970. 176 str. 8° (cir.)

V. G. Boltjanskij i dr.: Lekcii i zadači po elementarnoj matematike. Nauka, Moskva 1971. 592 str. ° (cir.)

Sbornik zadač po elementarnoj matematike. Posobie dlja samoobrazovanija. Izd. 15. Nauka, Moskva 972. 480 str. 8° (cir.)

I. H. Sivašinskij: Theoremy i zadači po algebre i elementarnym funkcijam. Nauka, Moskva 1971. 68 str. 8° (cir.)

Jčbeniki za srednjo šolo

D. S. Mitrinović: Matematička indukcija. Binomna formula. Kombinatorika. 2. izm. i dop. izd. avod za izdavanje udžbenika, Beograd 1970. 103 str. 8°.

Savremena nastava matematike. Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1971. 164 str. 8°.

L. A. Kalužnin: Što je matematička logika. Školska knjiga, Zagreb 1971. 143 str. 8°.

M. E. Podtjagin: Elementarnaja matematika. T. 2. Geometrija i trigonometrija. Posobie k priemnim kzamenam po matematike v vuzy. Vyssšaja škola, Moskva 1971. 352 str. 8° (cir.)

S. M. Kulikov: Vvedenie v načertatel'nuju geometriju mnogomernyh prostranstv. Mašinostroenie, Ioskva 1970. 84 str. 8° (cir.)

A. T. Rogov: Algebra. Programirovanoe učebnoe posobie dlja tehnikumov. Vyssšaja škola, Moskva 972. 432 str. 8° (cir.)

I. L. Nikol'skaja i Z. P. Tarakanova: Analitičeskaja geometrija. Programirovanoe posobie. 800 tr. 8° (cir.)

E. Bovio: Sodobna aritmetika za srednjo šolo. S. Lattes & C., Turin 1968. 430 str. 8°.

E. Bovio: Diagrami in osnove algebre za srednjo šolo. S. Lattes & C., Turin 1968. 232 str. 8°.

E. Bovio: Eksperimentalna geometrija za srednjo šolo. S. Lattes & C., Turin 1968. 8°.

K. S. Snell and J. B. Morgan: New mathematics. A unified cours for secondary schools. 2. ed. Vol. 1. t the university press, Cambridge 1970. 325 str. 8°.

P. G. Hoel: Elementary statistics. 3. ed. John Wiley, New York 1971. 309 str. 8°.

Razne zanimive in dostopne knjige

Naravoslovni krožki. Napotki za delo v osnovnih in srednjih šolah. Prirodoslovno društvo Slovenije, Ljubljana 1971. 120 str. 8°.

N. Ja. Vilenkin: Priče o skupovima. Školska knjiga, Zagreb 1971. 155 str.

P. Dembowski: Kombinatorik. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970. 190 str. 8°.

C. Lanczos: Numbers without end. Oliver & Boyd, Edinburg 1968. 164 str. 8°.

P. P. Korovkin: Limits and continuity. Gordon and Breach, New York b. l. 125 str. 8°.

Ja. I. Perel'man: Zanimatel'naja algebra: Izd. 19. Nauka, Moskva 1970. 200 str. 8° (cir.)

A. V. Šubnikov i V. A. Kopcik: Simmetrija v nauke i iskusstve. Izd. 2., perer. i dop. Nauka, Moskva 1972. 340 str. 8° (cir.)

S. M. Dowdy: Mathematics: Art and science. John Wiley, New York 1971. 282 str. 8°.

M. Rueff and M. Jeger: Sets and boolean algebra. George Allen and Unwin LTD, London 1970. 192 str. 8°.

M. D. Davis: Game theory. A nontechnical introduction. Basic Books, New York 1970. 208 str. 8°.

D. D. Spencer: Game playing with computers. Spartan Books, New York 1968. 441 str. 8°.

J. M. Dubbey: Development of modern mathematics. Butterworths, London 1970. 145 str. 8°.

Predviđanje budućnosti. Zbornik treće međunarodne konferencije »Nauka i društvo«. Herceg-Novi, 28. jun — 4. jul 1969. Red.: A. Moljk i dr. Naučno delo, Beograd 1971. 351 str. 88°.

New trends in mathematics teaching. Vol. 2. UNESCO, Paris 1970. 476 str. 4°.

Univerzitetni učbeniki

E. Mendelson: Theory and problems of Boolean algebra and switching circuits. Schaum, New York 1970. 213 str. 4°.

S. Lipschutz: Theory and problems of probability. Schaum, New York 1968. 153. str. 4°.

F. Scheid: Theory and problems of introduction to computer science. Schaum, New York 1970. 281. str. 4°.

P. Kreis: COBOL. Programski jezik za komercialne potrebe. Udžbenik za samostalni rad. 3. izd. Centar za obrazovanje, organizaciju i razvoj, Zagreb 1971. 360 str. 4°.

D. V. A. Avramov: Kurs rešenih zadataka 1. Viša matematika. Tehnička knjiga, Zagreb 1972. 139 str. 8°.

V. P. Minorski: Zbirka zadataka više matematike. Tehnička knjiga, Zagreb 1971. 320 str. 8°.

R. Dacić: Viša matematika. Naučna knjiga, Beograd 1972. 394 str. 8°.

D. S. Mitrinović: Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima. 1. d. 3. izm. i proš. izd. Građevinska knjiga, Beograd 1971. 297 str. 8°.

D. Rašković: Osnovi matričnog računanja sa primenom na tehničke probleme. Naučna knjiga, Beograd 1971. 344 str. 8° (cir.)

K. Strubecker: Nacrtna geometrija. Tehnička knjiga, Zagreb 1971. 300 str. 8°.

B. Rašajski: Teorija običnih diferencialnih jednačina. Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 1971. 259 str. 8°

D. S. Mitrinović: Uvod u specijalne funkcije. Građevinska knjiga, Beograd 1972. 188 str. 8°.

I. Vidav: Algebra. MK, Ljubljana 1972. 343 str. 8°. Matematika — 4.

R. Jamnik: Verjetnostni račun. MK, Ljubljana 1971. 416 str. 8°. Matematika — 3.

S. Vukadinović: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće. Privredni pregled, Beograd 1972. 299 str. 8°.

I. Kuščer: Matematične naloge iz fizike. 1. d. Univerza v Ljubljani 1972. 205 str. 8°.

R. Kladnik in H. Šolinc: Zbirka fizikalnih problemov z rešitvami. 1. d. Mehanika, toplota, akustika. Univerza v Ljubljani 1972. 319 str. 8°.

Ciril Velkovrh