

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1971

Letnik 18

3

XVIII. LETNIK — ŠTEVILKA 3
OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 1971

Uredniški odbor: Avsec Franc, gimnazija Kranj; Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani; Kvaternik Franc, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Moljk Anton FNT; Pahor Jože, institut »J. Štefan«; Rosina Mitja, FNT; Skulj Tomaž, gimnazija Moste, Ljubljana; Strnad Janez, FNT; Suhadolc Anton, FNT; Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije; Vidav Ivan, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujete na čekovni račun Komisije za tisk DMFA SRS. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina: za nečlane 15 din, za dijake 5 din, za ustanove in podjetja 20 din, za inozemstvo 30 din (2 \$), posamezna številka 5 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska 19, pp 227, telefon 61-564/22, žiro račun št. 501-8-240/1.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

	Stran
Uvodnik	97
Članki	
Aritmetične lastnosti v glavnih kolobarjih (N. Prijatelj)	98
Nerešena vprašanja fizike (P. Jordan)	104
Novica	
Elementaren izračun vsote $\sum 1/k^2$ (B. Jurčič)	109
Šola	
Thomasova precesija (J. Strnad)	112
Nov štiriletni univerzitetni učni načrt za učitelje fizike in kemije (J. B. Cross)	118
Domače vesti	
Nov list za mlade matematike	122
Tekmovanja	
Koledar letošnjih tekmovanj (T. Skulj)	124
Republiško tekmovanje mladih matematikov (B. Roblek)	124
XIII. zvezno tekmovanje mladih matematikov (B. Roblek)	128
Republiško tekmovanje mladih fizikov (T. Skulj)	132
Letos je bilo zvezno tekmovanje mladih fizikov v Ljubljani (T. Skulj)	134
Poročilo o tekmovanjih iz matematike za Vegova priznanja	139
Pisma uredništvu	142

CONTENTS

Articles	Page
Arithmetical Properties in Principal Ideal Domains (N. Prijatelj)	98
Unsolved Problems of the Physics (P. Jordan)	104
News	109
School	112
Home News	122
Competitions	124

OB TEKMOVANJIH . . .

V aprilu in maju je bilo v Ljubljani več tekmovanj iz matematike in fizike. Bilo je republiško tekmovanje iz matematike, republiško tekmovanje iz fizike in še zvezno tekmovanje iz fizike. Zvezno tekmovanje iz matematike pa je bilo v Beogradu. Teh prireditev društva smo lahko vsi veseli. Saj se na njih zberejo mladi, ki imajo posebno veselje za matematiko ali fiziko, da se pomerijo v znanju, predvsem v reševanju ustreznih nalog. Ob uspehih si utrdijo zaupanje vase in okrepe pogum in postajajo obetajoči podmladek v naših strokah.

Ob tekmovanjih gledamo tiste, ki dosežejo prva mesta in dobe nagrade in pohvale. Na vse druge, ki jih je več, pa pozabimo. Vendar je vredno poskusiti tudi z njimi čutiti in razmišljati, zakaj ti niso uspeli in kako bi lahko tudi njihovo znanje, strokovno spretnost in domiselnost razvili na zmagovalno raven.

Na republiško tekmovanje je prišlo komaj dober procent vseh dijakov. Od teh jih pa več kot polovica ni dosegla niti polovice možnih točk. Čas tekmovanja je bil vedno dovolj dolg, tako da časovne stiske ni mogoče šteti za vzrok za neuspeh. Na račun razburjenosti gre lahko nekaj neuspeha kot pri vsakem izpitu. V glavnem pa le večina ne uspe zaradi pomanjkanja določenega znanja in računske spretnosti in prevečkrat zaradi pomanjkanja razumevanja, jasnega predstavljanja, sposobnosti razmišljanja in sklepanja ter domiselnosti. Ker predstavljajo ti, ki pridejo na tekmovanje, le majhen že izbrani del, so verjetno te pomanjkljivosti pri ostalih še bolj izrazite in so ustrezne sposobnosti in spretnosti še manj razvite.

Morda pa ob velikanskem toku novic in vesti o vseh mogočih dogodkih in dejstvih, ki smo jim danes izpostavljeni na vseh koncih in krajih v časopisju, radiu, televiziji začenja že tudi mladim primanjkovati časa in miru za globlje razmišljanje. Postajamo površni in zadovoljni s tem, da vemo za stvari. Vse manj pa nas neznano draži z raznimi zakaji in vse manj se trudimo, da bi znali nanje odgovoriti in da bi stvari dobro razumeli. Zato je treba mlade še bolj spodbujati k razmišljanju, postavljanju vprašanj, sklepanju in samostojnemu snovanju.

Šola ima pri tem svojo veliko vlogo in mora skušati na vse načine, nove in stare, pritegniti vse dijake k aktivnejšemu sodelovanju pri pouku. Rezultati tekmovanj zgovorno kažejo, da je učitelj s svojo osebnostjo nenadomestljiv in lahko najbolj neposredno budi zanimanje in znanstveno zvedavost in spodbujak delu ter k samostojnemu razmišljanju ob obravnavanih problemih. Pri matematiki in fiziki je posebno veliko prilike, da učimo dijake misliti. Seveda so potrebna za pouk tudi dobra učila in knjige. Izkoristiti je poleg tekmovanj tudi vse druge možnosti, kot so namenski list, seminarji in letne šole za mlade. Ogromno pa bi lahko dosegli s posebno šolsko televizijo, ki bi lahko prinesla najboljše možni pouk v vsako hišo.

Ob zadovoljstvu z znanjem najboljših ne smemo pozabiti na odgovornost za večjo raven povprečnega znanja. Poskusimo za ta namen bolj izkoristiti čudovite sodobne možnosti.

ARITMETIČNE LASTNOSTI V GLAVNIH KOLOBARJIH

NIKO PRIJATELJ

MOS 13 F

Expository article on arithmetical properties in principal ideal domains.

Informativni članek o aritmetičnih lastnostih v glavnih kolobarjih.

(Predavanje v Šmarjeških toplicah ob priliki občnega zbora Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1971.)

Aritmetične lastnosti izhajajo iz pojma *deljivosti*. Klasična in elementarna modela, v katerih te lastnosti vsi dobro poznamo, sta *kolobar celih števil* Z in *kolobar polinomov ene spremenljivke z realnimi koeficienti* $R[X]$. Na osnovi deljivosti so v obeh teh kolobarjih na povsem analogen način definirani pojmi: največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh ali več elementov, tuji elementi, praštevilo oziroma nerazcepni polinom, razcepitev števila v produkt praštevil oziroma polinoma v produkt nerazcepnih polinomov, itd. In v obeh primerih veljajo podobne lastnosti in relacije med temi pojmi. Zaradi te analogije upravičeno domnevamo, da imamo opraviti le z dvema posebnima primerkoma neke splošnejše *strukture kolobarja*, v kateri je mogoče smiselno definirati aritmetične lastnosti. Pokažimo, da je ta domneva pravilna!

V ta namen obrnimo torej svojo pozornost na poljuben kolobar K , ki pa naj ustreza še naslednjim dodatnim pogojem:

(A) K je komutativen kolobar z enoto 1.

(B) K je celostno področje, se pravi, da je za poljubna njegova elementa x, y dovoljen sklep

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ali} \quad y = 0$$

Tretji pogoj pa zadeva *ideale* kolobarja K . Neprazno podmnožico I komutativnega kolobarja z enoto imenujemo ideal, če velja: za poljubna elementa $x, y \in I$ in poljubna elementa $u, v \in K$ je tudi $ux + vy \in I$. Očitno je ves kolobar K že ideal in brez težav lahko sprevidimo, da je tudi presek poljubno mnogih idealov spet ideal. Zato eksistira k vsaki podmnožici X kolobarja K neki najmanjši ideal I_X , ki vsebuje podmnožico X . Ta ideal I_X , za katerega pravimo, da je generiran iz podmnožice X , dobimo preprosto tako, da napravimo presek vseh idealov kolobarja, ki vsebujejo podmnožico X . Ideal, ki je generiran iz enega samega elementa $x \in K$, imenujemo *glavni ideal* in ga označimo s simbolom (x) . Ker ima kolobar enoto, je očitno za vsak $x \in K$

$$(x) = \{ux; u \in K\}$$

in takoj tudi vidimo, da je

$$(1) = K$$

Postavimo sedaj naslednji pogoj:

(C) K vsakemu idealu I kolobarja K naj eksistira tak element $x \in K$, da je $I = (x)$. Drugače povedano, vsak ideal kolobarja K naj bo glavni ideal.

Kolobar, ki ustreza pogojem (A), (B), (C), imenujemo *glavni kolobar*.

Z elementarnim postopkom je mogoče preveriti, da sta na začetku omenjena kolobarja Z in $R[X]$ glavna kolobarja. In zdaj se prepričajmo, da je prav struktura glavnega kolobarja tisti abstraktni kalup, ki omogoča opredelitev aritmetičnih lastnosti!

Svoje nadaljnje razmišljanje uperimo torej na poljuben glavni kolobar K .

(1) *Deljivost*. Relacijo deljivosti » b deli a «, ali simbolično » $b \mid a$ «, opredelimo na običajen način

$$(\forall a \in K) (\forall b \in K) (b \mid a \Leftrightarrow (\exists q \in K) (a = bq))$$

Očitno je deljivost refleksivna in tranzitivna relacija, saj je za vsak $a \in K$ seveda $a = a \cdot 1$ in iz $a = bq$ in $b = cq'$ sledi $a = c(q'q)$.

Rahlo težavo v zvezi z deljivostjo povzročajo inverzibilni elementi kolobarja zaradi svojega banalnega obnašanja. Velja namreč:

Vsak element $a \in K$ je deljiv z vsakim inverzibilnim elementom.

Če je namreč u poljuben inverzibilen element, potem je za vsak $a \in K$

$$a = 1 \cdot a = (u \cdot u^{-1}) \cdot a = u \cdot (u^{-1} \cdot a)$$

Res pa je tudi:

Vsak delitelj inverzibilnega elementa je inverzibilen.

Če je namreč v delitelj inverzibilnega elementa u , torej $u = v \cdot q$, dobimo takoj $u \cdot u^{-1} = v \cdot (q \cdot u^{-1}) = 1$, se pravi, da je $q \cdot u^{-1} = v^{-1}$.

Da obidemo to težavo, vpeljimo relacijo »pridruženosti«:

Element $x' \in K$ je pridružen elementu $x \in K$ natanko tedaj, kadar je $x = x'u$ in je u kak inverzibilen element kolobarja K .

Relacija »pridruženosti« je očitno ekvivalenčna relacija, saj je $x = x \cdot 1$, iz $x = x'u$ sledi $x' = xu^{-1}$ in iz $x = x'u$ in $x' = x''v$ dobimo $x = x''(vu)$, kjer je element vu seveda inverzibilen, ker vemo, da je $(vu)^{-1} = u^{-1}v^{-1}$.

Takoj tudi spoznamo:

Od 0 različna elementa x, x' kolobarja K sta pridružena tedaj in le tedaj, kadar je $x \mid x'$ in $x' \mid x$.

Potrebnost pogoja je neposredna posledica definicije relacije »pridruženosti«. Njegova zadostnost pa je razvidna takole: iz $x' = xq$ in $x = x'q'$ sledi $x = x(qq')$, torej $x(1 - qq') = 0$. Ker je $x \neq 0$, mora biti zaradi (B) $1 - qq' = 0$, se pravi $qq' = 1$ in zato je q inverzibilen element kolobarja K , pri čemer je $q^{-1} = q'$.

Odtod razvidimo, da je potemtakem vsak delitelj x kakega elementa $a \in K$ določen le do »pridruženosti« natanko. Seveda ima vsak element $a \in K$ trivialne delitelje, namreč vse inverzibilne elemente in pa vse elemente, ki so pridruženi k a . Če eksistira kak delitelj x elementa a , ki ni inverzibilen, niti pridružen k a , ga imenujemo *pravi* delitelj elementa a . In vsak od 0 različen element $p \in K$, ki ni inverzibilen pa tudi ne premore pravih deliteljev, imenujemo *nerazcepni* ali *ekstremalni* element kolobarja K .

(2) *Največji skupni delitelj*. Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ poljubni elementi kolobarja K in $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tisti ideal, ki je generiran s temi elementi. Zaradi (C) eksistira tak element $d \in K$, da je

$$(1) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = (d)$$

Očitno je element d določen le do »pridruženosti« natanko, saj enakost $(d) = (d')$ ne pomeni nič drugega, kot da je $d \mid d'$ in $d' \mid d$. Tako določeni element d imenujmo največji skupni delitelj elementov $x_1, x_2, \dots, x_n$. To ime mu po pravici pripada, saj velja:

a) d je delitelj vsakega elementa $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Iz (1) namreč sledi, da je vsak x_i element glavnega ideala (d), torej $x_i = u_i d$ za primeren $u_i \in K$, se pravi, da je $d \mid x_i$.

b) Vsak skupni delitelj elementov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je tudi delitelj elementa d .

Najprej vidimo spet iz (1), da je d element ideala $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Zato ga lahko zapišemo v obliki

$$(2) \quad d = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n$$

če le primerno izberemo elemente $u_1, u_2, \dots, u_n$ kolobarja K . To je znani Bezoutov izrek, ki ga vsi dobro poznamo iz klasične teorije števil. Vzemimo zdaj, da je element m skupni delitelj elementov $x_1, x_2, \dots, x_n$. Potem je seveda $x_1 = m q_1, x_2 = m q_2, \dots, x_n = m q_n$ za določene $q_1, q_2, \dots, q_n$ iz kolobarja K . Če vstavimo to v (2), dobimo

$$d = m(u_1 q_1 + u_2 q_2 + \dots + u_n q_n)$$

in to nam pove, da je res $m \mid d$.

(3) *Tuji elementi.* Recimo, podobno kakor v teoriji števil, da so elementi $x_1, x_2, \dots, x_n$ kolobarja K tuji med seboj, kadar je njihov največji skupni delitelj enota 1 kolobarja! To pomeni, da je potemtakem

$$(1') \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = (1) = K$$

V tem primeru lahko torej najdemo take elemente $u_1, u_2, \dots, u_n$ v K , da je

$$(2') \quad 1 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n$$

Odtod pa spet sledi, da je *vsak* element z kolobarja K izrazljiv v obliki

$$(3) \quad z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n$$

kjer so $v_1, v_2, \dots, v_n$ ustrezno izbrani elementi iz K . Ker je $z = z \cdot 1$, sledi iz (2'), da lahko vzamemo kar $v_i = z u_i$.

Očitno pa smemo tudi obratno iz (3) sklepati na (1'), saj nam (3) pove, da je ideal $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ enak vsemu kolobarju K , torej tudi glavnemu idealu (1). Lastnosti (1'), (2') in (3) so torej logično enakovredne.

Brž lahko pokažemo, da velja v našem kolobarju tudi temeljni izrek teorije števil:

Ako sta x, y od 0 različna elementa kolobarja K in element d deli njun produkt $x \cdot y$, pa je d tuj z x , potem deli y .

Po hipotezi eksistirajo taki elementi $q, u, v \in K$, da je $x \cdot y = d \cdot q$ in $ud + vx = 1$. Torej je $udy + vxy = (uy + vq)d = y$ in zato res $d \mid y$.

(4) *Najmanjši skupni večkratnik.* Če so $x_1, x_2, \dots, x_n$ poljubni od 0 različni elementi kolobarja K , potem prirejeni glavni ideali $(x_1), (x_2), \dots, (x_n)$ očitno niso nič drugega kot prav množice večkratnikov teh elementov. Zato so torej skupni večkratniki elementov $x_1, x_2, \dots, x_n$ natanko elementi preseka $(x_1) \cap (x_2) \cap \dots \cap (x_n)$ teh idealov, ki je, kakor vemo, spet neki ideal kolobarja K . Po (C) eksistira tedaj tak element $m \in K$, da je

$$(4) \quad (x_1) \cap (x_2) \cap \dots \cap (x_n) = (m)$$

kjer je seveda m spet določen le do pridruženosti natanko. Ta element m imenujemo najmanjši skupni večkratnik elementov $x_1, x_2, \dots, x_n$, saj je iz (4) neposredno razvidno, da ima naslednji lastnosti:

(a) m je skupni večkratnik elementov $x_1, x_2, \dots, x_n$.

(b) Vsak skupni večkratnik elementov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je tudi večkratnik elementa m .

In zopet lahko ugotovimo odnose, ki jih poznamo iz teorije števil. Na primer:

Ako sta si elementa x, y kolobarja K tuja med seboj, je njun najmanjši skupni večkratnik produkt $x \cdot y$ teh elementov.

Produkt $x \cdot y$ je gotovo skupni večkratnik elementov x in y . Pokažimo še, da velja (b). Pa naj bo v kak skupen večkratnik elementov x, y . Ker je v večkratnik elementa x , eksistira tak $z \in K$, da je $v = x \cdot z$. In ker je torej $x \cdot z$ deljiv z y pa je x tuj z y , že vemo, da mora biti z deljiv z y , se pravi, da je $z = y \cdot d$ za neki $d \in K$. Potemtakem je res $v = x \cdot z = (x \cdot y) \cdot d$.

Velja pa tudi:

Če sta x, y od 0 različna elementa kolobarja K in sta d in m njun največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik, potem je $x \cdot y = d \cdot m$.

Ker sta d in m določena le do pridruženosti natanko, velja enakost $x \cdot y = d \cdot m$ seveda le za primerno izbrane pare (d, m) .

Da dokažemo to enakost, ravnajmo takole:

Naj bosta x' in y' taka elementa kolobarja K , da je

$$(5) \quad x = dx' \quad \text{in} \quad y = dy'$$

torej

$$(6) \quad x \cdot y = d^2 x' y'$$

Ker je d največji skupni delitelj elementov x, y , takoj spoznamo, da sta si elementa x' in y' tuja med seboj. Po (2) lahko namreč najdemo taka elementa $u, v \in K$, da je

$$d = ux + vy = d(ux' + vy')$$

se pravi

$$d(1 - ux' - vy') = 0$$

Ker je seveda $d \neq 0$, dobimo zaradi (B)

$$1 = ux' + vy'$$

in to dokazuje po (2') tujost elementov x', y' . Potemtakem je produkt $x'y'$ najmanjši skupni večkratnik elementov x' in y' . Iz (5) vidimo, da je

$$(7) \quad m = dx'y'$$

skupni večkratnik elementov x, y . Pa vzemimo poljuben večkratnik v teh dveh elementov! Potem ga spet zaradi (5) očitno lahko zapišemo v obliki $v = dv'$, kjer je v' skupni večkratnik elementov x' in y' (saj je $v = d(x'q) = d(y'q')$ in odtod zaradi (B), $x'q = y'q' = v'$). Odtod sledi, da je v' večkratnik produkta $x'y'$ in zato je v večkratnik elementa $m = dx'y'$. Potemtakem je m najmanjši skupni večkratnik elementov x, y in iz (6) in (7) dobimo res

$$x \cdot y = d \cdot m$$

(5) *Ekstremalni elementi*. Ekstremalne elemente smo imenovali take od 0 različne elemente kolobarja K , ki niso inverzibilni pa tudi ne premorejo pravih deliteljev. V kolobarju celih števil $\mathbb{Z}$ so to seveda praštevila, v kolobarju polinomov $R[X]$ pa nerazcepni polinomi. Njihovo eksistenco v poljubnem glavnem kolobarju K bomo pokazali s tem, da bomo dokazali naslednji izrek:

Vsak od 0 različen element glavnega kolobarja K , ki ni inverzibilen, je bodisi ekstremalen ali pa je enak produktu samih ekstremalnih elementov.

Dokaz tega izreka bomo naslonili na tale pomožni izrek:

Vsaka neprazna družina idealov glavnega kolobarja K ima vsaj en element, ki ni vsebovan v nobenem drugem elementu te družine.

Pa vzemimo, da bi za neko neprazno družino X idealov to ne bilo res! Potem bi lahko izbrali poljuben ideal $I_1 \in X$ in z njim konstruirali neko neskončno zaporedje samih različnih idealov te družine $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$, tako, da bi veljalo

$$(8) \quad I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

Zaradi (8) se ni težko prepričati, da je tudi unija tega zaporedja $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ neki ideal I kolobarja K . Po (C) eksistira torej tak element $x \in K$, da je $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (x)$. Odtod pa seveda sledi, da je $x \in I$ in zato tudi v vsaj enem členu I_r zaporedja. Toda iz $x \in I_r$ pa spet lahko sklepamo, da je $(x) \subseteq I_r$, se pravi, $I \subseteq I_r$. Če upoštevamo še (8), je potemtakem za vsak indeks $n \geq r$ res: $I_r \subseteq I_n \subseteq I \subseteq I_r$. To pa je seveda mogoče le, če je $I_n = I_r$ za vsak $n \geq r$. Tako smo prišli v protislovje s hipotezo, da so v zaporedju sami različni ideali in s tem je pomožni izrek dokazan.

Zdaj pa dokažimo še izrek! Naj bo X družina vseh tistih glavnih idealov (x) , ki so generirani z natanko tistimi od 0 različnimi in neinverzibilnimi elementi x kolobarja K , ki niso ekstremalni in se tudi ne dajo izraziti kot produkt samih ekstremalnih elementov. Očitno je naša naloga pokazati, da je družina X prazna. Pa recimo, da ni! Potem bi po pomožnem izreku imela družina X vsaj en element (a) , ki bi ne bil vsebovan v nobenem drugem elementu družine. Po definiciji družine X je element a različen od 0, ni inverzibilen, niti ekstremalen. To pomeni, da gotovo eksistirata od 0 različna neinverzibilna elementa $b, c \in K$ tako, da je $a = b \cdot c$. Odtod pa sledi, da je $(a) \subseteq (b)$ in $(a) \subseteq (c)$. Mimo tega sta ideala (b) in (c) različna od ideala (a) , saj elementa b, c gotovo tudi nista pridružena k elementu a . Ker pa ideal (a) ni vsebovan v nobenem drugem idealu družine X , to pomeni, da ideala (b) in (c) ne spadata v družino X . Po definiciji družine X pa se to pravi, da sta elementa b, c bodisi ekstremalna ali pa izrazljiva kot produkt samih ekstremalnih elementov. Toda potem pa je tudi element $a = b \cdot c$ izrazljiv kot produkt samih ekstremalnih elementov. To pa je seveda v nasprotju s hipotezo, da je ideal (a) element družine X . Družina X je potemtakem prazna in s tem je izrek dokazan.

Ideal I imenujemo *maksimalen*, če je različen od vsega kolobarja K in če je za poljuben ideal J dovoljen sklep:

$$I \subseteq J \Rightarrow J = I \quad \text{ali} \quad J = K$$

Brž lahko ugotovimo:

Element p kolobarja K je ekstremalen natanko tedaj, kadar je glavni ideal (p) maksimalen.

Naj bo J kak ideal kolobarja, za katerega velja $(p) \subseteq J$. Po (C) eksistira tak element $x \in K$, da je $J = (x)$, torej $(p) \subseteq (x)$. To pa seveda ne pomeni nič drugega, kot da je x delitelj elementa p . Potemtakem je p ekstremalen element natanko tedaj, kadar ni inverzibilen in je x bodisi pridružen k p ali pa je inverzibilen element kolobarja K . Toda v prvem primeru je seveda $(x) = (p)$, saj določajo pridruženi elementi isti glavni ideal. In ker p ni inverzibilen, je gotovo $(p) \neq (1) = K$. V drugem primeru pa je tudi $x \cdot x^{-1} = 1 \in (x)$, se pravi, da je $(x) = (1) = K$. Tako je izrek dokazan.

Ekstremalni elementi pa imajo tudi tole karakteristično lastnost:

Od 0 različen in neinverzibilen element p je ekstremalen tedaj in le tedaj, kadar velja: če p deli produkt $x_1 x_2 \dots x_n$ kakih elementov kolobarja, potem deli vsaj en faktor x_i tega produkta.

Vzemimo najprej, da je element p ekstremalen. Zaradi asociativnosti produkta je povsem dovolj, če se omejimo le na produkt dveh faktorjev. Naj torej p deli produkt $x \cdot y$. Če je $x \neq 0$ in tuj s p , potem že vemo, da p deli y . Potemtakem nam je treba le pokazati, da bodisi p deli x ali pa je tuj z x . V ta namen si oglejmo ideal, ki je generiran z elementoma

p in x , torej ideal (p, x) . Ker je seveda $(p) \subseteq (p, x)$ in je p ekstremalen, imamo po prejšnjem izreku le dve možnosti: $(p) = (p, x)$ ali pa $(p, x) = K = (1)$. V prvem primeru je torej tudi $x \in (p)$ in to nam pove, da p deli x . V drugem primeru pa je največji skupni delitelj elementov p in x enota 1 kolobarja, se pravi, da sta p in x tuja.

Zdaj pa naj bo obratno p tak od 0 različen in neinverzibilen element kolobarja, ki ima v izreku opisano lastnost. Kakor že vemo, lahko zapišemo p kot produkt $p_1 p_2 \dots p_n$ samih ekstremalnih elementov. Po hipotezi deli torej p tudi vsaj en faktor p_i tega produkta. Ker pa je p_i ekstremalen, p pa neinverzibilen, mora biti torej p pridružen k p_i . Odtod pa sledi, da je tudi p ekstremalen element.

Zdaj bi lahko tudi pokazali, da je mogoče vsak od 0 različen in neinverzibilen element x glavnega kolobarja K , ki ni ekstremalen, zapisati na *en sam* način kot produkt samih ekstremalnih elementov. Pri tem se seveda ne menimo za vrstni red faktorjev, ki so sicer določeni tudi le do pridruženosti natanko, vendar tako, da je njihov produkt enak prav elementu x . Dokaz se do nadrobnosti ujema z znanim dokazom o enolični razcepitvi celega števila v produkt praštevil in ga zato prepuščamo bravcu.

Viri: (1) R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann, Paris, 1966

(2) P. Dubreil — M. L. Dubreil-Jacotin, Leçons d'algèbre moderne, Dunod, Paris, 1964

NEREŠENA VPRAŠANJA FIZIKE*

P. JORDAN

UDK 530.1

Pisanju o prihodnosti fizike so nekatere okoliščine naklonjene, druge pa ne. Ugodno je, da imajo zaradi jasnosti fizike tudi nerešena vprašanja jasno vsebino. S tem pa je povezana težava, da ne moremo jasno izreči kake domneve o odprtih teoretičnih vprašanjih, dokler nimamo vsaj zasilne nove teorije, ki delno že namiguje na odgovor. Druga težava je v širokem obsegu perečih vprašanj v fiziki. Tej se ne da izogniti drugače, kot da se omejimo samo na vprašanja, ki zadevajo zakone teoretične fizike, in se ne menimo za tehnično uporabo.

Heisenberg je že pred tremi desetletji pripomnil, da so jedrske reakcije hitro prešle iz območja fizike v območje tehnike. S tehničnimi vprašanji so tesno povezana tudi druga območja sodobne fizike, na primer fizika trdne snovi. Prihodnost raziskovanja našega osončja bo odvisna od napredka raketne tehnike in tehnike vesoljskih poletov in od izboljšav v elektroniki in njene uporabe v tehniki radarja in računalnikov. Eno izmed zelo perečih vprašanj jedrske fizike, to je kontrolirano zlivanje jeder vodika in helija, je bolj tehnično kot fizikalno. Tu utegnejo izdatno pomagati najnovejši dosežki pri tehnični uporabi supraprevodnosti.

Omejimo se torej na vprašanja, ki zadevajo razumevanje najglobljih in najsplošnejših zakonov fizike! V svetu atomov smo dosegli že pred štirimi desetletji dokončno rešitev. Zanesljiva teorija elektronov in njihovega vedenja v atomih je kvantna mehanika, bodi v valovnomehanski bodi v matrični obliki. Na osnovi sorodnih predstav je uspelo pojasniti velik del vprašanj v zvezi z jedrskimi dogajanjem. Novo veliko območje so odprli poskusi s pospeševalniki, pri katerih uporabljajo čudovite dosežke sodobne tehnike. Ugotovili so, da obstaja mnogo različnih osnovnih delcev, o katerih se nam pred nekaj desetletji ni niti sanjalo. Ta raziskovanja so nakopičila veliko eksperimentalnih izkušenj in postavila teoriji nove uganke.

Nas, fizike starejše generacije, spominja ta položaj na onega v kvantni fiziki v prvi četrtini našega stoletja. Tedaj so bili spektroskopski zakoni osrednji predmet kvantnofizikalnih raziskovanj. Z merjenji so zbrali zelo obsežne podatke. Ti so pričali, da obstaja velika skupina naravnih pojavov, ki jih ni bilo mogoče razumeti s staro fiziko. Novi pojavi so kazali kvantne značilnosti. N. Bohr in drugi fiziki tedanjih dni so ugotovili, da se da za silo razumeti vedenje elektronov v atomih na osnovi Rutherfordovega modela atoma. Bohr je uvidel prej kot drugi, da je teorija, v kateri se prepletajo klasični in kvantni prijemi in ki jo težijo notranja neskladja, lahko le začasna. Nadaljeval je z iskanjem in pripravil tla poznejši natančni formulaciji. Znamenito korespondenčno načelo je izražalo njegovo prepričanje, da uspehi klasičnih prijemov ne pomenijo potrditve Rutherfordovega modela, pač pa kažejo na podobnost med kvantnimi in klasičnimi zakoni. Zaradi te podobnosti

* Članek je izšel pod naslovom Über die Zukunft der Physik v reviji Physikalische Blätter 26, 481 (1970). Posnet je bil po predavanju na simpoziju »Človek in njegova prihodnost«, ki je potekal poleti 1970 blizu Barcelone. P. Jordan, ki je danes profesor na univerzi v Hamburgu, je bil z M. Bornom in W. Heisenbergom utemeljitelj kvantne mehanike in z W. Paulijem, O. Kleinom in E. P. Wignerjem začetnik kvantne elektrodinamike. Profesorju Jordanu in uredniku revije Physikalische Blätter profesorju E. Brücheju se zahvaljujemo, da sta ljubeznivo dovolila objavo prevoda. Članek je prevedel v nekoliko skrajšani obliki J. Strnad.

smo lahko prišli v nekaterih primerih s klasično mehaniko do pravih rezultatov, čeprav bi morali uporabiti kvantno mehaniko, ki pa na začetku še ni bila zgrajena v celoti. Po Bohrovem navodilu smo se navadili prevajati rezultate klasičnih računov v pravilne rezultate tedaj še neznanih pravih kvantnih zakonov.

Podobno ravnajo danes v teoriji osnovnih delcev. Uporabljajo teorijo, za katero vedo, da je pomanjkljiva. Njenim rezultatom ne moremo popolnoma zaupati, toda z dodatnimi pravili za renormiranje jih prevedemo v zanesljive. Most med zanesljivo kvantno teorijo atomov in sedanjo začasno teorijo osnovnih delcev je kvantna elektrodinamika. Ta izhaja od ugotovitve, da naj bi bili zanesljivi zakoni za elektromagnetne kvante posledica novih kvantnomehanskih zakonov. Na začetku je dala kvantna mehanika le zakone za drobne mehanske sisteme. Vendar se je pokazalo, da je mogoče pojme, ki nastopajo v zvezi s točkastimi telesi (osnovnimi delci), prenesti tudi na polja, posebej na Maxwelllovo polje. Po tej poti smo prišli do polnega razumevanja elektromagnetnih kvantov. Njihove lastnosti so posledica kvantizacije elektromagnetnega polja. Precej fizikov, ne samo Einstein, ki je odklanjal vso kvantno mehaniko, je izražalo dvom, ko sem 1925 začel zastopati to stališče. Danes so dvomi že zdavnaj pozabljeni. Kvantno teorijo polj so priznali kot nujen in neizogiben korak naprej. Ta korak je privedel do razumevanja elektromagnetnih kvantov in vodil dalje h kvantni elektrodinamiki. Omenimo samo, da so mlajši fiziki, med njimi predvsem Feynman in Schwinger, razvili kvantno elektrodinamiko do visoke stopnje popolnosti.

Navzlic temu so ostale resne težave. V določenem smislu je kvantna elektrodinamika še vedno začasna teorija. V današnji obliki sta potrebna dva koraka. Začasne rezultate, ki jih dobimo za kak izbran zgled v prvem koraku, moramo v drugem koraku prevesti ali renormirati, da pridemo do pravih napovedi.

Odkritje številnih neobstoječih osnovnih delcev je ponudilo priložnost za razširitev teh pojmov. Kvantna teorija polj je postala zelo obsežno območje sodobne teoretične fizike. Omenjene težave so pri tem premagali le delno in diskusija novih zamisli je še v teku.

Zelo tvegan poskus je napravil Heisenberg, ki je zgradil teorijo na svoji svetovni enačbi. V tej teoriji naj bi bilo mogoče iz osnovnega zakona narave izpeljati, katere vrste osnovnih delcev obstajajo (verjetno je njihova raznolikost neizčrpna) in kakšne so njihove lastnosti. Zares je zaradi zelo velikega števila različnih osnovnih delcev (morda jih je neskončno) privlačna zamisel, da osnovni zakon matematično določa, kakšni delci obstajajo. Heisenberg si je prizadeval, da bi zapisal ta zakon v obliki svetovne enačbe. V krogu maloštevilnih poklicanih specialistov je sprožil ta poskus živahne razprave. Mnenja niso enotna. Dvomljivci so prepričani, da tako težavnega vprašanja ni mogoče rešiti s čelnim napadom. Zares kaže, da je zelo težko prignati vprašanje tako daleč, da bi bilo mogoče primerjati teorijo in izkušnje. Matematična obdelava Heisenbergove enačbe je težja kot pri drugih fizikalnih teorijah in za zdaj ni mogoče predvideti, kako bo potekal razvoj.

Nekateri raziskovalci, ki so se na tem območju lotili omejenih delnih problemov, so dosegli nedvomno pomembne uspehe. Ta pot tudi v prihodnosti še mnogo obeta.

V kratkem pregledu o stanju v raziskovanju ne moremo mimo nekaterih domnev, o katerih še razpravljajo in katerih potrditev ali zavrnitev pričakujemo z napetostjo. Ena izmed njih je domneva o obstoju kvarkov, hipotetičnih delcev z nabojem, ki je mnogokratnik tretjine osnovnega naboja. Obstoj takih delcev je smiselna teoretična možnost. O upravičenosti te domneve bo mogoče sklepati šele po eksperimentalnih rezultatih. Tudi stara Diracova domneva, da obstajajo poleg električnih še magnetni naboji (monopoli), je še vedno zgolj domneva.

Omeniti velja še nekaj razmišljanj, ki utegnejo koristiti v nadaljnjem razvoju teorije. Ta razmišljanja je sprožil pred daljšim časom J. v. Neumann s prispevkom, v katerem mu

je šlo za globlje razumevanje kvantne mehanike v sedanji obliki. Spomnimo se, kako je nastala kvantna mehanika! Po izkušnjah v spektroskopiji in ob upoštevanju disperzije in Ramanovega pojava in po preučevanju trkov med atomi so definirali verjetnosti za prehode kot merljive količine. Vpeljali so tudi kompleksna števila s faznimi povezavami med njimi tako, da so dali kvadrati njihovih absolutnih vrednosti verjetnosti za prehode. To so bile amplitude za prehode, ki so ustrezale po Bohrovem korespondenčnem načelu Fourierovim koeficientom v klasičnem računu z elektronskimi tiri. Heisenberg se je odločil, da je treba klasično mehaniko gibajočih se delcev prevesti že v osnovi v kvantno teorijo, ki se odpoveduje opisu elektronov v atomu s tiri. Dopustil je samo zveze med merljivimi količinami, a te zveze so po obliki ustrezale klasičnim. Tako je izoblikoval enačbe med verjetnostmi za prehode in energijami in frekvencami, ki so tudi merljive. Bornovo statistično tolmačenje Schrödingerjevih valovnih funkcij je omogočilo pozneje znatno razširitev osnovne Heisenbergove zamisli.

Pri vodikovem atomu si na primer ne smemo predstavljati, da kvadrat valovne funkcije gostoto naboja, kot si je spočetka predstavljal Schrödinger. Kar naj bi bila gostota naboja, je treba tolmačiti kot verjetnostno gostoto. Po Heisenbergovi poznejši ugotovitvi si smemo misliti, da lahko ugotovimo lego elektrona, na primer z namišljenim mikroskopom na žarke γ .

Heisenbergov načrt je uresničil na eni strani Dirac, na drugi pa smo ga uresničili Born, Heisenberg in jaz. Pri tem se je naravno in prepričljivo pokazalo, da je množenje matrik glavno matematično pomagalo pri oblikovanju kvantnih zakonov. Pozneje je matematik J. v. Neumann postavil kvantno teorijo na aksiomatično osnovo, ki je prinesla bistveno nove poglede. Pred tem sva Dirac in jaz posplošila nastavke Heisenberga in Schrödingerja v tako imenovano statistično transformacijsko teorijo. Ta teorija stoji na stališču, da ne moremo govoriti o elektronskih tirih v smislu klasične kinematike, da pa lahko izvedemo na elektronih prav toliko bistveno različnih merjenj kot v klasični mehaniki. Pozneje sta pokazala Heisenberg in Bohr, da je posebnost, ki loči kvantno mehaniko od klasične v tem, da nekaterih merljivih količin ne moremo izmeriti hkrati.

J. v. Neumann je izdelal duhovito matematično analizo te razširjene predstave. Uvedel je statistični kolektiv enakih kvantnih sistemov (na primer vodikovih atomov), na katerem merimo opazljivke in matematično izrazimo verjetnosti za posamezne možne prehode. Spočetka Neumann ni imel namena, da bi predrugačil kvantno teorijo. Želel ji je dati le logično in matematično preglednejšo obliko. Izhajajoč od zamisli o statističnem kolektivu kvantnih sistemov, naj bi vso njeno vsebino izražalo majhno število preprostih aksiomov. Toda pozneje je Neumannova pot omogočila teoretične poskuse, ki vodijo ob zmanjševanju zahtevnosti aksiomov do razširjene ali posplošene teorije.

To je privedlo do čisto matematičnih vprašanj. Razprava, ki smo jo objavili 1934 J. v. Neumann, E. Wigner in jaz, je vzpodbudila raziskovanje nastalih vprašanj. Zunanje okoliščine so prekinile naše sodelovanje. Šele po koncu vojne sem izvedel, da so ameriški matematiki objavili več kot tisoč razprav o matematičnih strukturah, ki so jih poimenovali Jordanove algebre. V tej zvezi so postale predmet živahnega raziskovanja še druge abstraktne algebre, ki so se razvile v obsežno območje sodobne matematike.

Že 1924 so se fiziki privadili na računanje z matrikami ali operatorji, ki jih priredimo kvantnomehanskim opazljivkam. Takrat so vstopile v fiziko abstraktne algebre. Vsak fizik se je že zdavnaj sprijaznil s tem, da za količine v algebri matrik ali operatorjev ne velja vedno zakon komutativnosti pri množenju. Abstraktne algebre, ki so jih raziskali po 1934, so še bolj nenavadne: zanje ne velja niti zakon asociativnosti.

Ne bi želel biti preoptimističen, a nisem izgubil vsega upanja, da bi utegnil omenjeni razvoj odpreti možnosti za nove oblike mikroskopskih fizikalnih teorij. Iz novih možnosti, ki jih vsebujejo te matematične strukture, bi lahko izšli tudi bistveni fizikalni dosežki.

Nikakor pa ne gre zamolčati možnosti, da skriva matematika še neodkrite strukture, ki bi jih mogli uporabiti za razrešitev nerešenih vprašanj fizike.

Posvetimo se še povsem drugemu območju vprašanj, to je vprašanjem gravitacije! Po vojni so živahno obravnavali splošno teorijo relativnosti. Posebno Einsteinova teorija gravitacije v prvotni obliki je sprožila mnogo raziskovanj v astrofiziki in kozmologiji. Odkritje pulzarjev, v katerih so spoznali nevtronske zvezde, je obnovilo zanimanje za znano Schwarzschildovo rešitev Einsteinovih enačb gravitacijskega polja. Mnogo pomembnih uspehov so dosegli pri preiskovanju rešitev Einsteinovih enačb, ki opisujejo gravitacijsko valovanje. Kot je znano, je uspelo J. Webbru zaznati signale v obliki gravitacijskih valov, ki prihajajo verjetno iz središča Galaksije. Napravili so tudi nekaj novih poskusov, ki so podprli Einsteinovo teorijo, posebno z odbojem radarskih valov na planetih.

V tej zvezi mnogo razpravljajo, ali je prvotna Einsteinova teorija gravitacije, ki jo imenujejo tenzorsko teorijo, ker igra v njej osrednjo vlogo metrični tenzor, že dokončna. Morda je bliže resnici tako imenovana tenzorsko-skalarna teorija. Več strokovnjakov se ogreva za drugo možnost.

Že 1939 je postavil Dirac domnevo, da je gravitacijska konstanta spremenljiva. Obstajalo naj bi torej skalarno polje, ki naj bi se v kozmološkem merilu zelo počasi spreminjalo s časom in bi bilo odvisno tudi od kraja. To misel sem poleg Y. Thiryja povzel tudi sam in jo matematično raziskal. Drugačna razmišljanja so privedla do enake domneve tudi R. Dickeja.

Ta teorija gravitacije se nekoliko razlikuje od prvotne Einsteinove in daje nekoliko drugačne napovedi. Razlike med obema teorijama so na skrajni meji dosegljive natančnosti pri merjenju. Kot je znano, so že odločilne pojave, ki jih je napovedala prvotna Einsteinova teorija za razliko od Newtonove, premerili le s težavo. Zaradi tega bi se lahko zdelo, da se po rezultatih poskusov ne bo mogoče odločiti med Einsteinovo in novo teorijo.

Navzlic temu smemo upati, da bomo našli dejstva, ki bodo novo teorijo potrdila ali ovrgla. Potrditev ali zavrnitev bi pomenila velik napredek naših spoznanj. Nova teorija zahteva, da pojema gravitacijska konstanta s staranjem vsemirja. Strokovnjaki, ki z Diracom verjamejo v ta pojav, niso enotni glede hitrosti pojemanja. R. Dicke domneva, da je relativna hitrost pojemanja gravitacijske konstante manjša kot 10^{-10} na leto. Meni se zdi, da je sprememba dvakrat tolikšna. Iz tega sledi, da efemeridno merjenje, ki je osnovano na gibanju planetov, ne da enakega časa kot merjenje z atomsko uro. Zares namigujejo nekatera opazovanja na razliko obeh časov. Velikostna stopnja razlike se ujema s teoretično oceno, a žal danes ne moremo zanesljivo ugotoviti niti znaka te razlike. Morda, čeprav je to še negotovo, je mogoče imeti počasno razpenjanje Galaksije, ki ga je odkril Kerr, za potrdilo Diracove domneve.

Če je domneva pravilna, ni brez pomena pri raznih vprašanjih geofizike in geologije. Ker ne morem sodelovati pri fizikalnih poskusih, sem iskal dokaze za Diracovo domnevo ali proti njej v geofizikalni literaturi. Sklepe, ki sem jih zbral v posebni knjigi, bi strnil v dva:

- 1) nobenega zanesljivega dejstva ni, ki bi ne bilo združljivo z Diracovo domnevo;
- 2) mnogo dejstev se da tolmačiti tako, da nasprotujejo tej domnevi. Toda tolmačenja, ki jih sicer nekateri strokovnjaki močno zagovarjajo, sploh niso dokončna, ampak so še predmet mnogih razprav in razlik v mnenjih med specialisti.

Razprave ni mogoče na kratko povzeti. Zato naj se omejim samo na eno podrobnost. Znani geofizik A. Wegener je 1915 predložil teorijo o premikanju kontinentov. Specialisti so jo skoraj enoglasno odklonili. Wegenerjeve zamisli, ki so poleg pravilnih utemeljitev vsebovale tudi zgrešene, so odklanjali štiri desetletja. Šele pred kratkim se je položaj spremenil. Danes smo prepričani, da je Wegenerjeva osnovna zamisel pravilna. Afrika in Južna Amerika sta na primer ležali skupaj. Njune meje se skladajo tako dobro, da je izključeno

vsako naključje. Za mejo pa ne smemo vzeti obalne črte, ampak s sodobnimi oceanografskimi preiskavami ugotovljeno ločnico med globokim morjem in celinskima trupoma. K temu štejemo poleg kopnega še območja plitvih morij.

Sodobna raziskovanja so pokazala, da ima Zemlja mnogo prelomov. Večinoma ležijo na dnu oceanov, ponekod pa se nadaljujejo tudi na celinah. Znana preloma sta Rdeče morje in njegovo nadaljevanje v dolini Jordana in v Mrtvem morju in ogromni prelom, ki se vleče od srede Atlantika proti severu in preseka Island. Atlantski prelom leži še danes tam, kjer je v davnih časih ležal prelomni jarek, podoben onemu v Vzhodni Afriki, in nakazoval začetek ločitve Afrike in Južne Amerike.

Dosežki iz zadnjih let nedvoumno potrjujejo, da je s prelomi v globokem morju in njihovimi nadaljevanji na celinah — prelomnimi jarki — povezano razširjanje oceanov ali začetek ločenja celin. Za hitrost razširjanja prelomov v globokem morju so namerili nekaj centimetrov na leto. Kako naj pojasnimo to dokazano dejstvo? Po novi teoriji gravitacije, ki vključuje Diracovo domnevo, se Zemlja počasi razpenja. S tem lahko prvič razložimo, zakaj imamo na Zemlji dve tako različni območji: globoko morje in celine. Presenetljivo je tudi, da so celinski trupi enakomerno debeli. To namiguje na večkrat izrečeno možnost, da se je pred nastankom zemeljske skorje nabrala na površju enakomerno debela tekoča plast najlažjih snovi. Ta plast pozneje po strditvi ni mogla slediti razpenjanju Zemlje in se je strgala.

Nova misel je naletela prav tako kot prej Wegenerjeva teorija na izrazit dvom. Toda razširjanje oceanov po globokomorskih prelomih je nesporno dejstvo. Sklepu o naraščanju zemeljskega površja pa se lahko izognemo samo, če uvedemo nasprotne pojave, ki naj bi izravnali povečanje morij. Razpravljajo tudi o takih pojavih, a pri tem je treba poseči po izumetničenih in neverjetnih domnevah.

Sodim, da daje razpenjanje Zemlje najpreprostejšo možno razlago za dejstva, ki so jih spravila na dan raziskovanja v zadnjih letih. Zdi se, da se znatno število eksperimentalnih spoznanj bolje sklada z novo teorijo gravitacije kot s staro.

ELEMENTAREN IZRAČUN VSOTE $\sum 1/k^2$

Vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ je že dolgo znana. Izračunati jo moremo na razne načine, npr. z razvojem v Fourierovo vrsto funkcije, ki je odsekoma enaka primerni kvadratični paraboli. V naslednjem sestavku si bomo ogledali popolnoma elementarno izpeljavo vsote $\sum 1/k^2$. Opisana metoda je bila objavljena v članku, ki ga navajamo na koncu sestavka.

Pri izpeljavi bomo potrebovali tole formulo

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} = n(2n-1)/3 \quad (1)$$

Dokažimo jo! Znana Moivrejeva formula pravi

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Levo stran razvijemo po binomskem obrazcu:

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i \sin n\varphi &= \binom{n}{0} \cos^n \varphi + \binom{n}{1} i \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \\ &+ \binom{n}{2} i^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \dots + \binom{n}{n} i^n \sin^n \varphi \end{aligned}$$

Primerjava imaginarnih delov na obeh straneh identitete da

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \sin \varphi \cos^{n-1} \varphi - \binom{n}{3} \sin^3 \varphi \cos^{n-3} \varphi + \dots$$

Primerjava realnih delov nam da obrazec za $\cos n\varphi$, ki ga pa tu ne potrebujemo. Zamenjajmo zgoraj n z $2n+1$!

$$\begin{aligned} \sin (2n+1)\varphi &= \binom{2n+1}{1} \sin \varphi \cos^{2n} \varphi - \binom{2n+1}{3} \sin^3 \varphi \cos^{2n-2} \varphi + \dots \\ &\dots + \binom{2n+1}{2n+1} \sin^{2n+1} \varphi \end{aligned}$$

Sedaj izpostavimo $\sin^{2n+1} \varphi$ in dobimo

$$\sin (2n+1)\varphi = \sin^{2n+1} \varphi \left[\binom{2n+1}{1} (\operatorname{ctg}^2 \varphi)^n - \binom{2n+1}{3} (\operatorname{ctg}^2 \varphi)^{n-1} + \dots \pm 1 \right] \quad (2)$$

V izraz v oglatem oklepaju vstavimo $x = \operatorname{ctg}^2 \varphi$. Oglejmo si dobljeni polinom

$$P(x) = \binom{2n+1}{1} x^n - \binom{2n+1}{3} x^{n-1} + \dots \pm 1 \quad (3)$$

Zanimajo nas koreni pripadajoče algebraične enačbe $P(x) = 0$. Vsak koren te enačbe zadošča seveda tudi enačbi (2):

$$\sin (2n+1)\varphi = \sin^{2n+1} \varphi P(x) = 0 \quad (4)$$

Leva stran ima ničle $\varphi_k : (2n + 1)\varphi_k = k\pi$. Vzemimo le te rešitve

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ker velja $\sin \varphi_k \neq 0$ za $k = 1, 2, \dots, n$, sledi iz enačbe (4), da mora biti $P(x_k) = 0$ za $x_k = \operatorname{ctg}^2 \varphi_k$. Prav lahko se prepričamo, da so števila $x_1, x_2, \dots, x_n$ med seboj različna. Ker jih je ravno n in vsa zadoščajo enačbi $P(x) = 0$, so $x_1, x_2, \dots, x_n$ ravno vsi koreni enačbe $P(x) = 0$.

Spomnimo se še Vietovega pravila! To pove: v enačbi

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

je a_1/a_0 nasprotno predznačena vsota vseh korenov zgornje enačbe, t.j. $a_1/a_0 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Uporabimo to za našo enačbo (3), pa dobimo

$$-\binom{2n+1}{3} / \binom{2n+1}{1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Če še upoštevamo $\binom{2n+1}{1} = 2n+1$, $\binom{2n+1}{3} = (2n+1)2n(2n-1)/6$, in pa $x_k = \operatorname{ctg}^2 \varphi_k$, $\varphi_k = k\pi/(2n+1)$, dobimo

$$n(2n-1)/3 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

Dokaz pomožne formule (1) je tako končan.

Preidimo k glavnemu delu naše naloge! Za kot φ , $0 < \varphi < \pi/2$, velja dobro znana neenačba

$$\sin \varphi < \varphi < \operatorname{tg} \varphi$$

Vzemimo v enačbi recipročne vrednosti, kar smemo storiti, saj so vse količine pozitivne. Neenačaji se seveda obrnejo:

$$\frac{1}{\sin \varphi} > \frac{1}{\varphi} > \operatorname{ctg} \varphi$$

To neenačbo še kvadrirajmo

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi < 1/\varphi^2 < 1/\sin^2 \varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi$$

Neenačbo zapišemo za $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ in dobljeno seštejemo:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}^2 \varphi_k < \sum_{k=1}^n 1/\varphi_k^2 < n + \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}^2 \varphi_k$$

Tu upoštevamo formulo (1) in pa $\varphi_k = k\pi/(2n+1)$, pa dobimo

$$n(2n-1)/3 < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n 1/k^2 < n(2n+1)/3 + n = 2n(n+1)/3$$

Neenačbo delimo z $(2n+1)^2/\pi^2$:

$$\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} \frac{\pi^2}{6} < \sum_{k=1}^n 1/k^2 < \frac{2n(2n+1)}{(2n+1)^2} \frac{\pi^2}{6}$$

oddelka za matematiko in fiziko FNT Univerze v Ljubljani. Tekmovalna komisija, ki so jo poleg predsednika sestavljali še profesorji Ivan Štalec, Sonja Križanič, Ivan Pucelj, Milan Ziegler, Marjan Vagaja in Branko Roblek ter inženir Andrej Kmet in Vladimir Batagelj, je pripravila predloge za tekmovalne naloge. Na svoji prvi seji je pregledala prijave tekmovalcev, ki so jih šole poslale društvu, in izmed zbranih predlogov izbrala po štiri naloge za vsak razred. Tekmovanje je trajalo dve uri in pol. Člani komisije so izdelke pregledali, jih točkovali in pripravili predloge za nagraditev najboljših. Komisija je na osnovi omenjenih predlogov na zadnji seji dokončno določila vrstni red tekmovalcev po uspehu, ki so ga dosegli. Uspeh mladih matematikov na republiškem tekmovanju je bil naslednji:

Prvi razred:

I. nagrada: Sabó Rajko 1. gimnazija Ljubljana, Duplančič Zvonko, gimn. Kranj.

III. nagrada: Zupančič Bermana, gimn. Poljane Ljubljana, Kontler Saša, gimn. Milana Zidanška Maribor, Šifrer Darko, 1. gimn. Ljubljana, Jelen Tatjana, gimn. Celje.

Pohvale: Javornik Rajko, gimn. Nova Gorica, Ajlec Bojan, 2. gimn. Ljubljana, Tomšič Marjan, Trčelj Dušan, Mikoš Uroš, Razdrtič Andrej vsi 1. gimn. Ljubljana, Durjava Matjaž, 1. gimn. Maribor, Gorenjec Ivan, gimn. Celje, Bizjak Ivo, Križnar Branko, oba gimn. Kranj, Kobal Andrijana, gimn. Nova Gorica.

Drugi razred:

I. nagrada: Lavrič Boris, gimn. Kranj, Magajna Zlatan, gimn. Koper.

II. nagrada: Šmit Žiga, 2. gimn. Ljubljana, Petkovšek Marko, 2. gimn. Ljubljana,

III. nagrada: Martinčič Boris, 1. gimn. Ljubljana.

Pohvale: Magajna Bojan, gimn. Postojna, Robnik Marko, gimn. Milana Zidanška Maribor, Koderman Ivan, Mrdjenović Radomir, Hostnik Boštjan, Štrukelj Marjeta, Erjavec Janez vsi 1. gimn. Ljubljana, Malnič Aleksander, gimn. Nova Gorica, Jagrič Anton, gimn. Celje, Gradišek Anton gimn. Poljane Ljubljana, Vozlič Andrej, 2. gimn. Ljubljana.

Tretji razred

3. nagrada: Cerar Janez, 1. gimn. Ljubljana, Steiner Darko, 1. gimn. Ljubljana.

Pohvale: Klep Mihael, Koprivec Martin, Bratož Špela vsi 1. gimn. Ljubljana, Polanc Ljubomir, gimn. Nova Gorica, Rovtar Marija, gimn. Škofja Loka, Škofič Zvone, gimn. Poljane Ljubljana.

Četrty razred:

I. nagrada: Markelj Karel, gimn. Miloša Zidanška Maribor,

III. nagrada: Hadži Saša, 1. gimn. Ljubljana, Klepej Tanja, 1. gimn. Ljubljana.

Pohvale: Vodopivec Milan, Brvar Andrej oba 1. gimn. Ljubljana, Mestek Lojze, gimn. Jesenice, Prijatelj Matjaž, gimn. Nova Gorica, Štajner Vlasta, gimn. Velenje, Zorman Darko, gimn. Jesenice.

Komisija je za zvezno tekmovanje mladih matematikov določila po štiri najboljše iz drugega, tretjega in četrtega razreda. Na zvezno tekmovanje so šli Lavrič Boris, Magajna Zlatan, Šmit Žiga in Petkovšek Marko iz drugega razreda, Cerar Janez, Steiner Darko, Klep Mihael in Koprivec Martin iz tretjega ter Markelj Karel, Hadži Saša, Klepej Tanja in Vodopivec Milan iz četrtega razreda.

Razveseljiva je ugotovitev, da zanimanje za republiško tekmovanje mladih matematikov narašča, saj se je letos tekmovanja udeležilo kar 223 srednješolcev in sicer 69 iz prvega razreda, 63 iz drugega, 39 iz tretjega in 52 iz četrtega razreda.

Delo pri organizaciji tekmovanja so nam v marsičem olajšale predhodne prijave tekmovalcev, ki so jih šole poslale na enotnem formularju. Navajamo pregled prijav po šolah in razredih.

Šola	I. raz.	II. raz.	III. raz.	IV. raz.	Skup.
1. Ajdovščina			2		2
2. Brežice	2	—	3	—	5
3. Celje	3	1	—	—	4
4. Črnomelj	2	2	—	4	8
5. Jesenice	6	—	2	6	14
6. Kamnik	—	3	—	—	3
7. Koper	5	4	2	1	12
8. Kranj	4	1	—	1	6
9. Ljubljana 1. gimnazija	15	12	8	6	41
10. Ljubljana 2. gimnazija	2	6	6	—	14
11. Ljubljana 6. gimnazija	3	4	1	2	10
12. Ljubljana Poljane	8	5	3	11	27
13. Ljubljana Šentvid	4	4	3	4	15
14. Maribor 1. gimnazija	2	1	4	—	7
15. Maribor gimn. M. Zidanška	1	4	1	2	8
16. Nova Gorica	5	5	2	4	16
17. Novo mesto	2	—	—	2	4
18. Piran	3	—	1	—	4
19. Postojna	—	1	2	—	3
20. Ptuj	—	—	—	1	1
21. Škofja Loka	1	1	2	1	5
22. Velenje	6	—	3	3	12
Skupaj gimnazije	74	54	45	48	221
1. Celje tehniška š.	—	—	—	2	2
2. Jesenice tehniška š.	1	—	2	—	3
Skupaj tehniške šole	1	—	2	2	5
Skupaj vse šole	75	54	47	50	226
Tekmovalo skupaj	69	63	39	52	223

Iz tabele je razvidno, da je prijave poslalo 22 gimnazij in dve tehniški šoli. Zadnji podatek nam pove, da še vedno 14 gimnazij ne sodeluje v tekmovanju in da bo treba poživiti zanimanje za matematiko na tehniških šolah.

Svečana podelitev nagrad je bila 16. junija 1971 v zbornični dvorani Univerze v Ljubljani.

Na koncu poročila navajamo še besedilo nalog, ki so bile na republiškem tekmovanju mladih matematikov v letu 1971:

I. RAZRED

1. Izračunaj vrednost ulomka $(a + b)/(a - b)$, če je

$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = 5 \cdot ab \quad \text{in} \quad \text{če je } a > b > 0!$$

2. Med ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 izberemo poljubno tri različne. Poiščemo vsa tromestna števila, ki jih moremo zapisati z izbranimi ciframi. Dokaži, da je vsota vseh tako dobljenih števil deljiva s 37 in 6!

3. V katerih točkah se sečeta grafa funkcij

$$y = |x + 1| \quad \text{in} \quad y = -|x| + 1?$$

4. V ravnini je narisana krožnica $\mathcal{K}$ z danim središčem S , skozi katerega je potegnjena premica p . Konstruiraj samo s pomočjo ravnila pravokotnico na premico p iz poljubne točke T na ravnini krožnice, pri čemer točka T ne leži na premici p ali na krožnici $\mathcal{K}$. Obravnavaj različne možne primere!

II. RAZRED

1. Dokaži identiteto

$$\frac{\log_a X}{\log_c X} = \frac{\log_a X - \log_b X}{\log_b X - \log_c X},$$

če je $X > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ in $X \neq 1$ ter $b^2 = ac$!

2. Poišči kompleksno število a , ki ustreza pogoju

$$2 \cdot |a| - 3a = 9i - 2!$$

3. Premica p seče stranici AB in AD paralelograma $ABCD$ v točkah E in F , diagonalo AC pa v točki G . Dokaži relacijo

$$AB/AE + AD/AF = AC/AG!$$

4. Če med stranicami trikotnika velja odnos

$$a^2 + b^2 = 5 \cdot c^2,$$

je $t_a \perp t_b$. Trditev dokaži!

III. RAZRED

1. Razcepi trinom $x^4 - 10x^2 + 1$ v produkt dveh trinomov z realnimi koeficienti, nato določi vse ničle danega trinoma v obliki $\pm \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, kjer sta a in b dve celi pozitivni števili! Ali more biti kaka ničla racionalna? Ali morejo biti pri razcepitvi vsi koeficienti racionalni?

2. Izračunaj vrednost sinusa tri desetine polnega kota brez uporabe tabel (natančno na tri decimalke)!

3. Za katere realne vrednosti p ima enačba

$$\sin^4 x - p \cdot \sin^2 x - p = 1$$

rešitev in kako se takrat glasi ta rešitev?

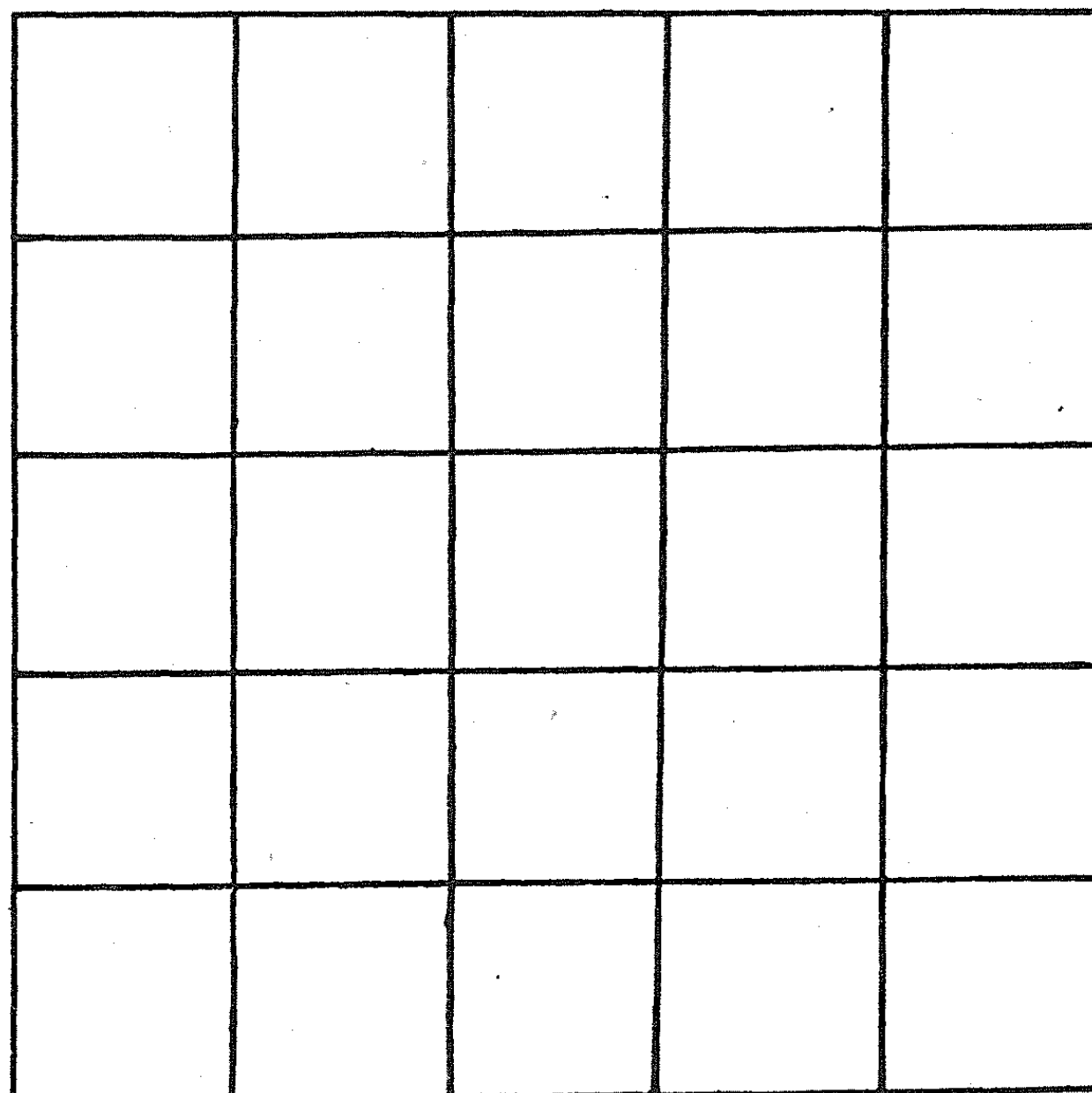
4. Površina pokončnega stožca je n -krat toliko kakor površina njemu včrtane krogle. Določi kot 2φ ob vrhu osnega preseka stožca! Za katere realne vrednosti n ima naloga rešitev in kako se glase rešitve?

IV. RAZRED

1. seštej $a + a^2(1 + a) + a^3(1 + a + a^2) + a^4(1 + a + a^2 + a^3) + \dots + a^n(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$!

2. Trije kraji A, B in C leže tako, da je kot $\angle ABC = 60^\circ$. Iz kraja A odpelje kolesar proti B z enakomerno hitrostjo v_1 , istočasno pa iz B proti C drugi kolesar z enakomerno hitrostjo v_2 . Čez koliko časa bo razdalja med kolesarjema najmanjša, če je razdalja $AB = a$ km?

B(0,n)



A(0,0)

C(n,0)

3. Napiši enačbo tangente na krivuljo $y = \frac{\sin x}{x}$! $x = 0$.

4. Imamo kvadratno mrežo poti. Iz točke A krene 2^n potnikov, polovica na desno polovica navzgor. V vsakem križišču se vsaka skupina razdeli: polovica na desno, polovica navzgor. V katerih točkah bodo popotniki po n križiščih in koliko jih bo v vsaki končni točki?

Sekretar komisije za tekmovanje
mladih matematikov:
Branko Roblek

XIII. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije je za 16. maj 1971 razpisala zvezno tekmovanje mladih matematikov Jugoslavije, organizator tekmovanja pa je bilo DMFA Srbije.

Tekmovanje je izvedla zvezna komisija za tekmovanje mladih matematikov, ki so jo sestavljali po en član iz vsake republike. Delegat iz Črne gore ni prišel, medtem ko sta delegata iz Makedonije in Bosne in Hercegovine prišla tik pred začetkom tekmovanja, tako da nista mogla sodelovati v pripravi in izbiri nalog za tekmovanje.

Dan pred tekmovanjem je komisija imela prvo sejo, na kateri je izdelala program dela in iz številnih predlogov izbrala po štiri naloge za tri skupine tekmovalcev:

- I. skupina 2. razred,
- II. skupina 3. razred,
- III. skupina 4. razred

Za svojega predsednika je določila delegata iz Slovenije. Besedilo nalog je bilo napisano v srbohrvatskem in slovenskem jeziku. Ker delegat iz Makedonije ni prišel pravočasno, naloge niso bile prevedene v makedonski jezik, tako da so makedonski tekmovalci dobili naloge napisane v srbohrvatskem jeziku. Delegat iz Makedonije se je s tem strinjal.

Tekmovanja se je udeležilo 65 tekmovalcev iz petih republik:

- Srbije 26 dijakov
- Hrvatske 16 dijakov

Slovenije	12 dijakov
Makedonije	6 dijakov
Bosne in Hercegovine	5 dijakov.

Tekmovanje je bilo v prostorih Prirodno-matematične fakultete v Beogradu v nedeljo 16. maja ob 9. uri in je trajalo štiri ure.

I. SKUPINA — 2. razred

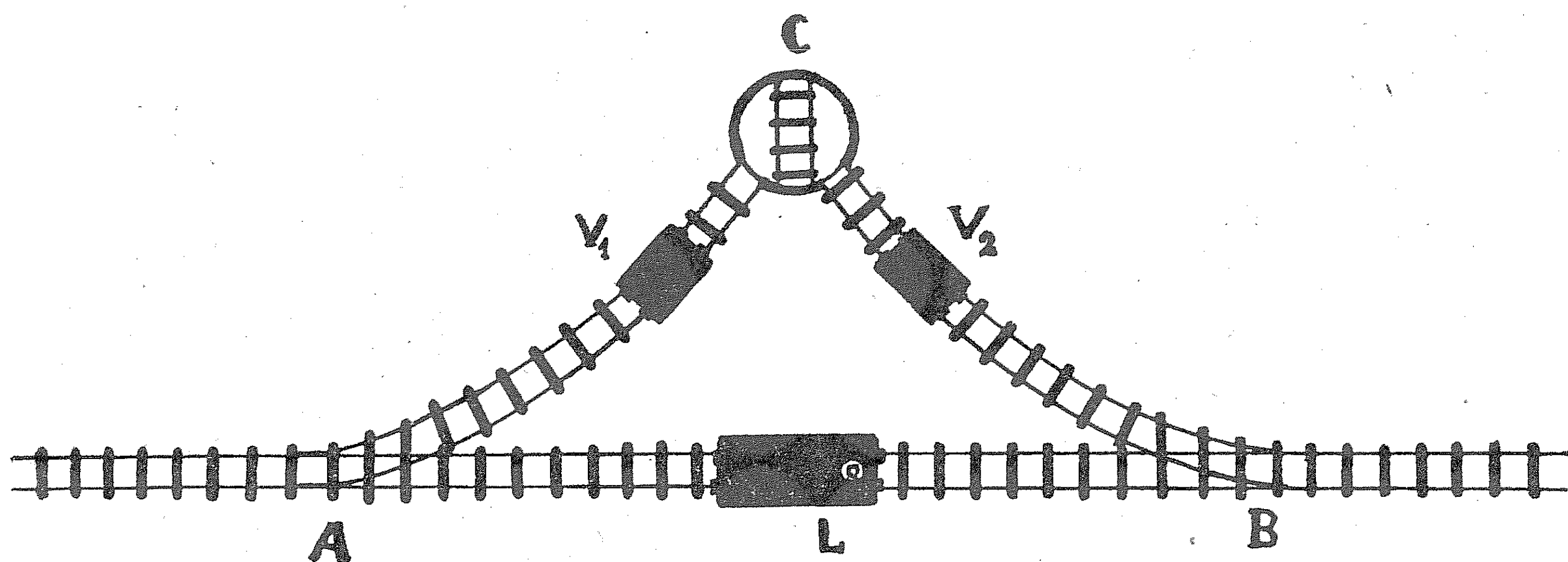
1. V trikotniku ABC so težišnice AD, BE in CF in težišče T. Če so $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ in ρ_6 polmeri včrtanih in r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 in r_6 polmeri očrtanih krogov trikotnikov po vrsti AFT, FBT, BDT, DCT, CET in EAT, dokaži, da velja

$$\text{a) } 1/\rho_1 + 1/\rho_3 + 1/\rho_5 = 1/\rho_2 + 1/\rho_4 + 1/\rho_6$$

in $\text{b) } r_1 r_3 r_5 = r_2 r_4 r_6!$

2. Nad stranicami paralelograma $A_1A_2A_3A_4$ načrtamo z zunanje strani kvadrate $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$ in $A_4B_4C_4A_1$. Dokaži, da središča teh kvadratov O_1, O_2, O_3 in O_4 zopet tvorijo kvadrat, katerega ploščina je za ploščino danega paralelograma večja od četrtnine vsote ploščin načrtanih kvadratov!

3. Določi naravna števila p in q , tako da bodo ničle trinomov $x^2 - px + q$ in $x^2 - qx + p$ zopet naravna števila!



4. Skretnice A, B in C so povezane med seboj s tiri AC, BC in AB. Na tiru AB sta na obe strani dovolj velika podaljška. Na tiru AC je vagon V_1 , na tiru BC vagon V_2 in na tiru AB lokomotiva L. Na vrtljiv tir C gresta lahko samo vagona posamič, ne pa lokomotiva L. Z uporabo C in lokomotive L zamenjaj vagona V_1 in V_2 , tako da bo na koncu lokomotiva na prvotnem mestu med A in B! Opiši potek!

II. SKUPINA — 3. razred

1. Dana so naravna števila a, b, p, q, r in s , tako da je $rq - ps = 1$ in $p/q < a/b < r/s$. Dokaži relacijo $b \geq q + s$!

2. Dan je trikotnik ABC in realno število k , tako da so vektorji $\vec{BR} = k \cdot \vec{BC}$, $\vec{CP} = k \cdot \vec{CA}$ in $\vec{AQ} = k \cdot \vec{AB}$. Dokaži, da velja

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = g \cdot (QR^2 + RP^2 + PQ^2),$$

kjer je $g = g(k)$! Določi funkcijo $g(k)$ in jo obravnavaj v odvisnosti od k !

3. Nad stranicami paralelograma $A_1A_2A_3A_4$ načrtamo z notranje strani kvadrate $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$ in $A_4B_4C_4A_1$. Dokaži, da tudi središča teh kvadratov O_1, O_2, O_3 in O_4 tvorijo kvadrat, katerega ploščina je za ploščino danega paralelograma manjša od četrtnine vsote ploščin načrtanih kvadratov!

4. Skala termometra, ki visi navpično na steni, ima dolžino $2r$, njeno razpolovišče pa je na višini h ($h > r$) nad horizontalno ravnino, ki gre skozi oko opazovalca. Kako daleč od stene mora biti opazovalec, da skalo najbolje vidi, t.j., da je njegov zorni kot največji?

III. SKUPINA — 4. razred

1. Dana so realna števila $a_1, a_2, \dots, a_n$, ki so večja od 1, in poljubno naravno število m . Dokaži, da velja

$$\sum_{j=1}^n \left(\log_{a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_{j+1} \dots a_n} a_j \right)^m \geq n(n-1)^m!$$

2. Koliko realnih korenov ima enačba $x/\sin x = N\pi/2$, kjer je N naravno število?

3. Dano je n točk $A_1, A_2, \dots, A_n$ v ravnini, tako da tri niso kolinearne. Premico p_{ij} določata točki A_i in A_j . Koliko je največje možno število presečišč $p_{ij} \cap p_{kl}$, kjer so i, j, k in l različna števila iz množice $\{1, 2, 3, \dots, n\}$?

4. Dano je zaporedje funkcij

$$f_n(x) = (1 - \cos x \cdot \cos 2x \dots \cos nx)/x^2.$$

a) Dokaži, da obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = f_n$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$!

b) Poišči zvezo med f_n in f_{n-1} !

c) Izračunaj limito zaporedja f_n !

Po končanem tekmovanju je komisija pregledala izdelke, jih ocenila in jih razporedila po doseženem številu točk. Preden jih je dešifrirala, je najboljšim določila nagrade in pohvale. Nagrade je prejelo 13 tekmovalcev, pohvaljenih pa je bilo 27. I. nagrado sta dobila dva dijaka, II. štirje in III. sedem. Skupaj je priznanja prejelo 30 mladih tekmovalcev.

Svečana podelitev nagrad je bila v ponedeljek, 17. maja ob 12. uri v istem prostoru kot je bilo tekmovanje. Prvo nagrajena tekmovalca Lavrič Borisa iz Kranja in Šilin Lazarja iz Beograda je sprejel tudi predsednik zveznega sveta za kulturo in prosveto Jugoslavije.

Naslednja tabela prikazuje število priznanj, ki so jih tekmovalci dobili, po republikah.

Republika	I. nagrada	II. nagrada	III. nagrada	Pohvale	Skup.
BiH	—	—	—	2	2
Hrvatska	—	2	—	5	7
Makedonija	—	—	—	—	—
Slovenija	1	1	1	2	5
Srbija	1	1	6	8	16
Skupaj	2	4	7	17	30

Od srbskih tekmovalcev jih je kar 13 dijakov, ki so prejeli priznanja, iz matematične gimnazije v Beogradu, medtem ko so od hrvatskih trije iz matematične gimnazije v Zagrebu.

Ekipo 12 tekmovalcev iz vsake skupine po štiri je iz Slovenije na zvezno tekmovanje pripeljal inž. Edvard Kramar, asistent na oddelku za matematiko FNT Univerze v Ljubljani.

Kot je razvidno iz razpredelnice, je pet slovenskih tekmovalcev dobilo priznanja na zveznem tekmovanju:

I. nagrada: Lavrič Boris, 2. razred, gimn. Kranj,

II. nagrada: Cerar Janez, 3. razred, 1. gimn. Ljubljana,

III. nagrada: Petkovšek Marko, 2. razred, 2. gimn. Ljubljana,

Pohvali: Magajna Zlatan, 2. razred, gimn. Koper, Markelj Karel, gimn. M. Zidanška Maribor.

Po razglasitvi rezultatov tekmovanja in svečani podelitvi nagrad, je bilo še izbirno tekmovanje za kvalifikacijo v ekipo, ki naj bi se udeležila XIII. evropske matematične olimpijade v Pragi. Pravico udeležbe na tem tekmovanju so imeli vsi, ki so dobili priznanja v II. in III. skupini. Na tem tekmovanju so dijaki reševali štiri naloge v treh urah. Medtem ko je komisija pri sestavljanju nalog na zveznem tekmovanju za posamezne skupine upoštevala program gimnazij pri pouku matematike v drugem, tretjem in četrtem razredu in vsebino nalog prilagodila vsebini pouka, se pri izbiri nalog za izbor olimpijske ekipe na pouk v srednjih šolah ni ozirala. Na olimpijado naj bi šli le dijaki, ki so sposobni reševati tudi naloge, ki ne spadajo strogo v program gimnazije pri nas.

Naloge za kvalifikacijsko tekmovanje za izbiro olimpijske ekipe

1. Poišči vsa naravna števila, ki so enaka kvadratu svojih številskih vsot! Na primer: $81 = (8+1)^2$
2. Dan je polinom šeste stopnje, ki ima šest realnih ničel in ki ima vse koeficiente realne. Dokaži, da ima vsaj štiri koeficiente različne od nič, če so ničle med seboj različne in ne enake nič! Ali se trditev kaj spremeni, če je ena ničla enaka nič?
3. V ravnini sta dana dva direktno kongruentna enakostranična trikotnika ABC in $A'B'C'$, tako da je točka C znotraj trikotnika $A'B'C'$. Poišči zaporedje največ treh zavrtitev takih, da bo trikotnik ABC z zavrtitvijo okrog enega svojih vrhov prešel v trikotnik $A_1B_1C_1$, ta pa z zavrtitvijo prav tako okrog enega svojih vrhov v trikotnik $A_2B_2C_2$, ki z zavrtitvijo okrog enega svojih vrhov končno preide v $A'B'C'$!
4. V petih odprtih škatlicah so po tri kroglice. Igralec I začne igro tako, da iz dveh od petih škatlic vzame, kolikor hoče krogel, toda iz vsake vsaj eno. Igralec II, ki je potem na potezi, igra po istem pravilu. Zmaga tisti igralec, ki zadnji pobere kroglice (Po njegovi potezi so vse škatlice prazne). Če kdaj ostanejo kroglice le v eni škatlici, zmaga tisti igralec, ki je na potezi. Dokaži, da igralec I lahko izbere tak način igre, ki ga zanesljivo vodi do zmage!

Komisija je tudi te izdelke pregledala in jih točkovala ter ob upoštevanju rezultatov zveznega tekmovanja izbrala 9 kandidatov za olimpijsko ekipo. Olimpijade naj bi se udeležilo 6 ali 8 tekmovalcev.

Na izbirnem tekmovanju sta si Markelj Karel in Cerar Janez, ki sta edina iz Slovenije imela pravico udeležbe, delila osmo in deveto mesto.

Od slovenskih predlogov so bili izbrani za tekmovalne naloge trije. Največ nalog je predložil delegat iz Hrvatske.

Naša ekipa, ki se je udeležila zveznega tekmovanja, je imela v Ljubljani trodnevne skupne priprave, ki so jih vodili asistentje oddelka za matematiko FNT in študentje matematike. V ta namen so pripravili nekaj nalog, ki smo jih obenem z vabilom na priprave poslali tekmovalcem.

Med samim tekmovanjem je zasedala tudi komisija za delo z mladimi matematiki. Komisija je sprejela pravilnik zveznega tekmovanja mladih matematikov in pripravila osnutek načrta za posredovanje matematičnega znanja mladini. Poslušali smo tudi poročila iz republiških društev o prizadevanjih, ki naj bi kar najbolj navdušila mlade za učenje matematike. Seje sva se udeležila dva Slovenca.

Letošnje izkušnje z republiškega in zveznega tekmovanja kažejo, da bo treba delo z mladino v prihodnjem šolskem letu poglobiti z metodami, ki bi resnično zainteresirale dijake za matematiko. Če hočemo na koncu leta žeti uspeh, je treba začeti v začetku prihodnjega šolskega leta s sistematičnim delom na vseh srednjih šolah, pa tudi na osnovni.

Sekretar komisije za tekmovanje
mladih matematikov:

Branko Roblek

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

V soboto, 9. maja je bilo v veliki fizikalni predavalnici oddelka za matematiko in fiziko v Ljubljani deveto republiško tekmovanje srednješolcev iz fizike. Tekmovalo je 150 dijakinj in dijakov iz 18 srednjih šol, od tega 64 drugošolcev, 55 tretješolcev in 31 četrtošolcev. Največ dijakov je bilo spet iz ljubljanskih gimnazij: gimnazija Poljane 35, I. gimnazija 30, VI. gimnazija 16, gimnazija pedagoške smeri 11 in gimnazija Šentvid 5 dijakov. Iz ostalih krajev Slovenije: gimnazija Nova Gorica 14, gimnazija Koper 10, I. gimnazija Maribor 9, gimnazija »Miloša Zidanška« Maribor 9 dijakov itd. Poudariti moramo, da je bilo letos tudi 7 dijakov iz tehniških šol.

Navedimo še razpredelnico iz katere so razvidne prijave in udeležba tekmovalcev:

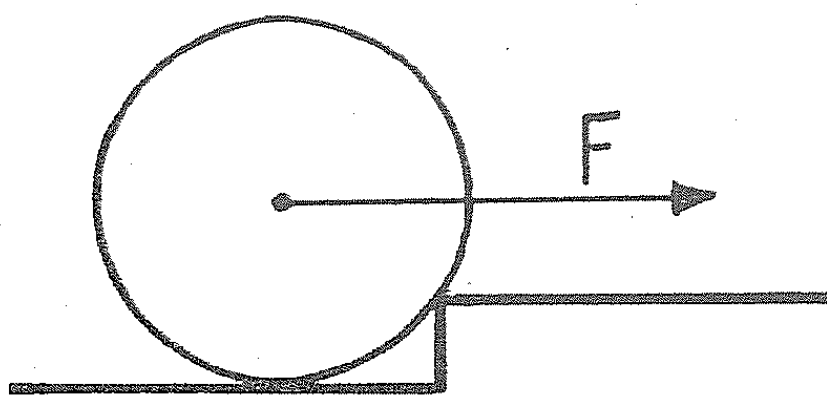
Šola	2. r.	3. r.	4. r.	skupaj
1. Veno Pilon Ajdovščina	—	2	—	2
2. Brežice	2	—	—	2
3. Jurija Vege Idrija	—	—	1	1
4. Jesenice	—	5	—	5
5. Koper	7	3	—	10
6. Kranj	3	—	1	4
7. I. gimn. Ljubljana	7	12	7	26
8. Poljane Ljubljana	13	16	6	35
9. Šentvid Ljubljana	3	1	1	5
10. VI. gimn. Ljubljana	6	4	6	16
11. Gimn. pedagoške smeri Ljubljana	—	11	—	11
12. I. gimn. Maribor	4	2	3	9
13. Miloša Zidanška Maribor	3	3	3	9
14. Nova Gorica	5	4	5	14
15. Novo mesto	1	2	2	5
16. Postojna	1	—	—	1
17. Dušana Kvedra Ptuj	—	—	1	1
18. Škofja Loka	1	2	1	4
Gimnazije skupaj	56	67	37	160
1. Tehn. šola Jesenice	6	—	—	6
2. Tehn. šola KMRLP Ljubljana	—	1	—	1
Tehniške šole skupaj	6	1	—	7
Prijavljenih skupaj	62	68	37	167
Tekmovalo skupaj	64	55	31	150

Tekmovalna komisija, ki so jo sestavljali univerzitetni in srednješolski učitelji in asistenti A. Moljk, F. Kvaternik, Z. Trontelj, F. Plevnik, T. Fortuna, M. Hribar in T. Skulj, je sestavila za vsak razred 4 naloge.

2. razred

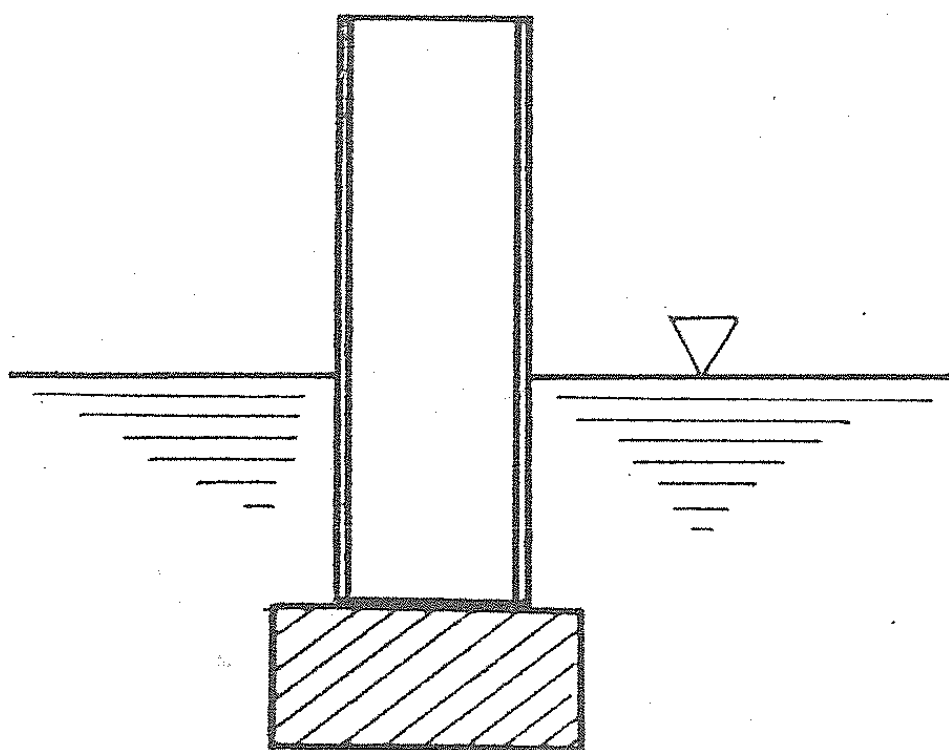
1. Na kamionu, ki vozi s hitrostjo 40 km/h, vržemo navpično navzgor kamen, ki prileti do višine 8 m nad kamionom. Kolikšno pot prevozi kamion, preden pade kamen nazaj? Kakšen se zdi tir kamna opazovalcu, ki miruje ob robu ceste?

2. Valj s polmerom 20 cm in maso 1 kg leži na vodoravni ravnini pred 10 cm vsoko stopnico. S kolikšno najmanjšo silo, ki deluje vodoravno v osi valja, moramo potegniti valj, da se bo povzpel na stopnico? Trenje zanemari!



3. Vagon z maso 10 ton se s hitrostjo 0,8 m/s zaleti v mirujoči vagon z maso 16 ton. Za koliko cm se pri trku stisnejo vzmeti v odbijačih, če ima vsaka koeficient 800 kp/cm?

4. Na spodnji rob gladko brušene cevi s presekom 50 cm^2 tesno pritisnemo gladko železno ploščo s presekom 100 cm^2 in z debelino 3 cm. Cev potisnemo v vodo v navpični legi in zadržimo ploščo, da voda ne vdre v cev. Kako globoko pod vodo moramo potisniti cev, da plošča ne bo odpadla, ko jo spustimo? Gostota železa je $7,9 \text{ g/cm}^3$, gostota vode pa 1 g/cm^3 .



3. razred

1. Izoliran valj je napolnjen s plinom pri temperaturi 27°C . Gibljiv bat s površino 15 cm^2 ga deli na dva enaka dela s prostornino 100 cm^3 . Temperaturo v enem delu povišamo za 100°C , v drugem pa jo držimo konstantno. Koliko se premakne bat med spremembo temperature, če skozi bat ni izmenjave toplote?

2. Vodoravno žico na enem koncu pritrdimo, na drugem koncu pa preko lahkega škripca obesimo nanjo utež. Osnovna lastna frekvenca te žice je 390 Hz. Če utež popolnoma potopimo v vodo, pade frekvenca na 340 Hz. Kakšna je gostota uteži?

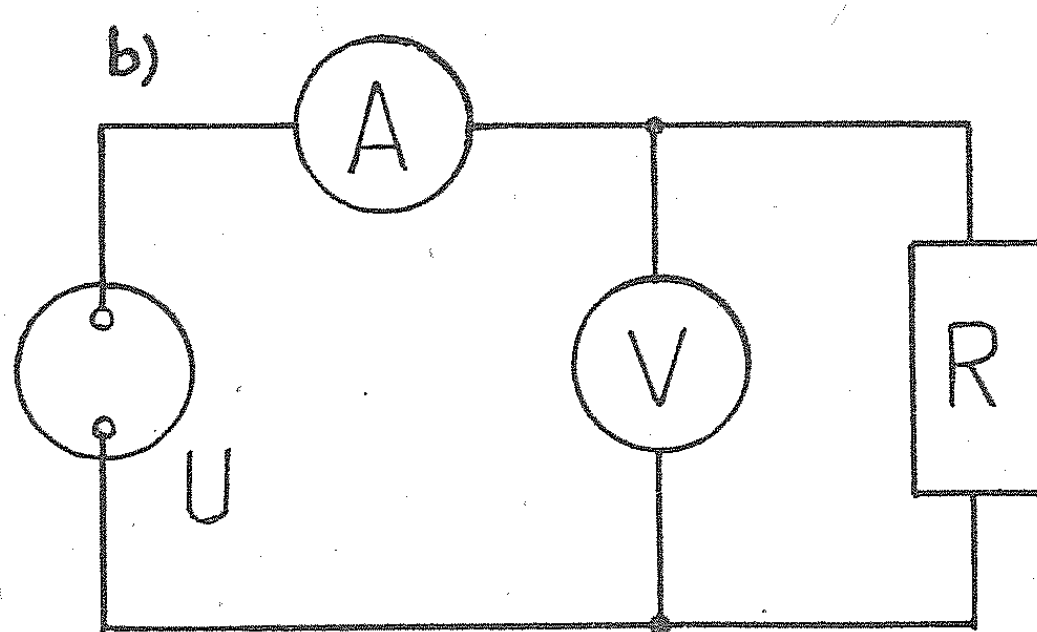
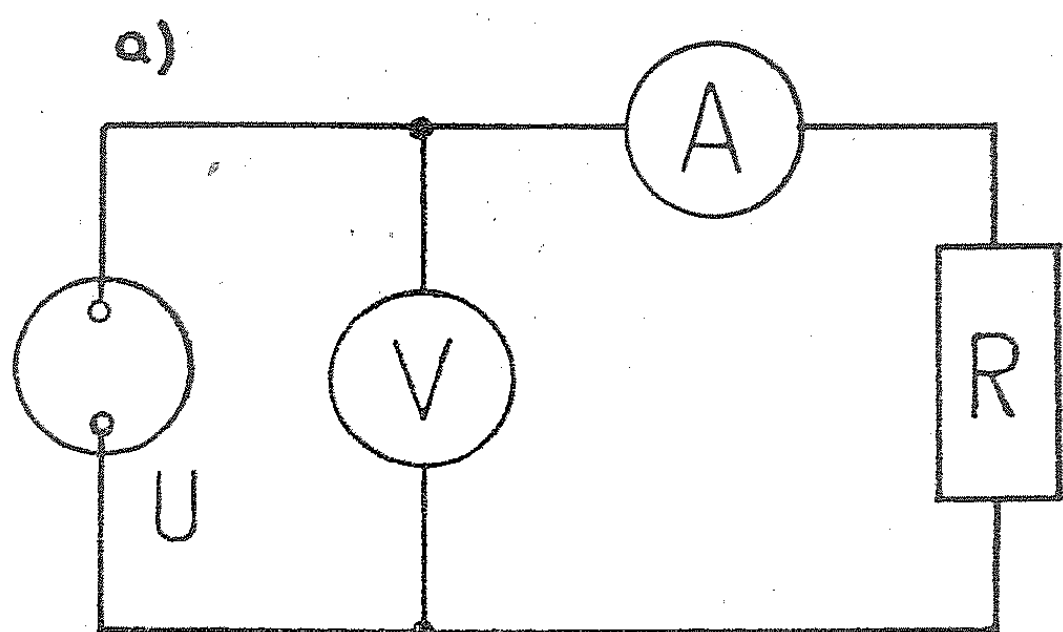
3. Dva delfina si plavata nasproti z enakima hitrostma 15 m/s. Eden oddaja zvok s frekvenco 1 kHz. Kolikšno frekvenco sliši drugi delfin? Hitrost širjenja zvoka v vodi je 1450 m/s.

4. Krivinski radij konkavnega zrcala je 40 cm. Na optični osi 30 cm od njegovega temena je točkasto svetilo. V kateri razdalji od temena moramo postaviti ravno zrcalo, da bo slika svetila nastala v isti točki kot je svetilo? Nariši!

4. razred

1. Na izvor napetosti je priključen porabnik R kot kaže slika (a). Voltmeter z uporom 1000Ω in ampermeter z uporom $0,2 \Omega$ sta priključena zato, da stalno kontroliramo porabo moči. Kolikšno moč troši porabnik tedaj, ko kaže voltmeter 12 V in ampermeter 5 A? Za koliko pa se spremeni rezultat, če sta voltmeter in ampermeter zvezana, kot kaže slika (b)?

2. Razdalja med dvema enakima kroglicama je 2 cm. Polmera sta zanemarljivo majhna. Če sta kroglici naelektreni z nasprotnima nabojema, se privlačita s silo $4 \cdot 10^{-4} \text{ N}$, ko pa ju nato zvežemo z vodnikom in spustimo, se odbijata s silo $2,25 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. Koliko sta bila prvotna naboja kroglic?



3. Katodni oscilograf, v katerem pospešimo elektrone z napetostjo 500 V, ima za električno odklanjanje občutljivost 2 V/mm. Kolikšno napetost moramo priključiti na oba pravokotno ležeča para odklonskih plošč, da bomo dobili krog s premerom 5 cm?

4. Prazno dolgo tuljavo s premerom 14 cm, dolžino 80 cm in 200 ovoji oklepa kratka tuljava s 1000 ovoji. Kolikšna napetost se inducira med koncema kratke tuljave, če naraste tok skozi dolgo tuljavo enakomerno v eni desetinki sekunde od 0 A do 5 A?

Po končanem tekmovanju je komisija pregledala in ocenila pismene izdelke dijakov in sklenila, da dobe nagrade in pohvale naslednje dijakinje in dijaki:

2. razred:

Druga nagrada: Martinčič Boris, I. gimn. Ljubljana

Tretja nagrada: Božič Samo, gimn. Poljane, Ljubljana; Magajna Zlatan, gimn. Koper;

Pohvale: Vodnik Srečo, gimn. Šentvid; Demšar Silvo, t. š. Jesenice; Muševič Igor, gimn. Poljane, Ljubljana; Robnik Marko, gimn. »M. Zidanška«, Maribor; Gams Matjaž, I. gimn. Ljubljana; Magajna Bojan, gimn. Postojna; Hostnik Boštjan, I. gimn. Ljubljana

3. razred:

Prva nagrada: Polanc Ljubomir, gimn. Nova Gorica; Zgonik Marko, gimn. Nova Gorica; Košiček Franc, gimn. Nova Gorica; Kugonič Oto, gimn. Velenje; Škofič Zvone, III. gimn. Ljubljana; Klep Mihael, I. gimn. Ljubljana

Tretja nagrada: Miklavčič Milan, t. š. KMRLN; Gorjop Dušan, gimn. Nova Gorica; Cerar Janez, I. gimn. Ljubljana

Pohvale: Urbančič Jelko, III. gimn. Ljubljana; Lešnjak Gorazd, I. gimn. Maribor; Pahor Branko, VI. gimn. Ljubljana; Mihelič Matjaž, III. gimn. Ljubljana; Založnik Aleš, I. gimn. Maribor

4. razred

Prva nagrada: Kusterle Dušan, gimn. Kranj

Tretja nagrada: Prijatelj Matjaž, gimn. Nova Gorica; Hadži Aleksander, I. gimn. Ljubljana

Pohvale: Žiberna Gorazd, gimn. M. Zidanška, Maribor; Rijavec Cvetana, gimn. Nova Gorica; Markelj Karel, gimn. M. Zidanška Maribor; Vodopivec Milan, I. gimn. Ljubljana

Najuspešnejši so bili letos tretješolci, pet jih je izdelalo naloge brez napake. Največ nagrad in pohval so dobili dijaki gimnazije v Novi Gorici. Komisija je izbrala 25 kandidatov iz 9 gimnazij in 2 tehniških šol za slovensko ekipo za zvezno tekmovanje mladih fizikov.

Sekretar komisije za tekmovanje
mladih fizikov:

Tomaž Skulj

LETOS JE BILO ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV V LJUBLJANI

Predstavniki našega društva so na kongresu matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije na Ohridu predlagali, da bi bila zvezna tekmovanja mladih matematikov in fizikov vsako leto v različnih krajih Jugoslavije. Predlog je bil sprejet in tako je letos bilo zvezno tekmovanje iz matematike v Beogradu, iz fizike pa v Ljubljani. Letos je bilo torej zvezno tekmovanje mladih fizikov prvič v Ljubljani.

Republiška komisija za tekmovanje mladih fizikov je izbrala 25 kandidatov za 13 član-sko slovensko ekipo tekmovalcev zveznega tekmovanja. Pred zveznim tekmovanjem so

imeli dijaki v Ljubljani priprave, ki so trajale dva dni, 20. in 21. maja. Priprave so vodili T. Fortuna, M. Gros, A. Kodre in N. Mankoč — Borštnik. Vsi dijaki kandidati za slovensko ekipo so dobili teden pred začetkom priprav knjižico iz zbirke Sigma, Marjan Hribar: »Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj«. Tako so že lahko doma reševali naloge iz preteklih tekmovanj in s tem osvežili in poglobili znanje. Zadnji dan priprav v petek popoldne je bila po rezultatih republiškega tekmovanja in preizkusnih nalogah sestavljena slovenska ekipa za VII. zvezno tekmovanje mladih fizikov. Letos smo imeli tekmovalce v vseh treh skupinah:

Skupina A (mehanika in toplota)

Samo Božič, 2. razred, gimn. Poljane, Ljubljana
Dušan Gorjup, 3. razred, gimn. Nova Gorica
Boris Martinčič, 2. razred, I. gimn., Ljubljana
Milan Miklavčič, 3. razred, tehniška šola KMRLP, Ljubljana
Ljubomir Polanc, 3. razred, gimn. Nova Gorica
Marko Zgonik, 3. razred, gimn. Nova Gorica

Skupina B (elektrika in magnetizem)

Leopold Gorjup, 4. razred, gimn. Nova Gorica
Karel Markelj, 4. razred, gimn. »Miloša Zidanška«, Maribor
Matjaž Prijatelj, 4. razred, gimn. Nova Gorica
Cvetana Rijavec, 4. razred, gimn. Nova Gorica

Skupina C (optika in atomika)

Aleksander Hadži, 4. razred, I. gimn., Ljubljana
Dušan Kustrle, 4. razred, gimn. Kranj
Milan Vodopivec, 4. razred, I. gimn., Ljubljana

Republiške ekipe za zvezno tekmovanje mladih fizikov so začele prihajati v Ljubljano že v soboto 22. maja zjutraj. Popoldne so se tekmovalci namestili v hotelu na Vrhniki in si ogledali Vrhniko in Ljubljano. Zvečer je za udeležence tekmovanja priredil član Izvršnega sveta skupščine SR Slovenije dr. Ernest Petrič sprejem ob VII. zveznem tekmovanju mladih fizikov.

V nedeljo 23. maja se je ob 8.30 začelo zvezno tekmovanje v veliki fizikalni predavalnici. Zastave vseh republik pred predavalnico in geslo zveznega tekmovanja nad vrati: »S fiziko do novih spoznanj in tehničnih možnosti« so dali tekmovanju praznično obeležje. Tekmovalo je 50 dijakinj in dijakov iz petih republik. (SR Bosna in Hercegovina 4, SR Hrvaška 11, SR Makedonija 2, SR Slovenija 13 in SR Srbija z avtonomnima pokrajinama 20 tekmovalcev). Število tekmovalcev po skupinah:

V skupini A (mehanika in toplota) je tekmovalo 16 dijakov,
v skupini B (elektrika in magnetizem) je tekmovalo 15 dijakov in
v skupini C (optika in atomika) je tekmovalo 19 dijakov.

Komisija za zvezno tekmovanje mladih fizikov (B. Milić — predsednik, A. Moljk, B. Mikuličić, Z. Stojan in T. Skulj) se je sestala v soboto 22. maja. Zjutraj je komisija pregledala in sprejela z nekaterimi dopolnitvami »Dogovor o organizaciji in finansiranju zveznega tekmovanja mladih fizikov«, katerega je pripravilo naše društvo. Popoldne je komisija za zvezno tekmovanje po obširni razpravi pripravila za vsako skupino po 5 nalog.

Skupina A
(mehanika in toplota)

1. V tekočini z gostoto $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$ imamo strmino s kotom $\alpha = 30^\circ$, po kateri se giblje zaradi svoje teže telo z maso $m = 2,0 \text{ kg}$ in prostornino $V = 250 \text{ cm}^3$. Koeficient trenja med telesom in strmino znaša $f = 0,18$. Telo v začetku miruje. Pri gibanju deluje nanj upor tekočine, ki je sorazmeren hitrosti s koeficientom sorazmernosti $k = 15 \text{ N s/m}$. Izračunajte največjo hitrost, ki jo telo lahko doseže $v_{\max}$. Nalogo rešite najprej splošno!

2. Reaktivno letalo z maso $m = 3 \cdot 10^4 \text{ kg}$ leti nad ekvatorjem od zapada proti vzhodu s hitrostjo 1800 km/h . Za koliko se spremeni dinamični vzgon letala, če leti z enako hitrostjo od vzhoda na zapad.

3. Na koncih vozička dolžine L in mase M stojita moža z maso m_1 in m_2 vsak na eni strani. Za koliko se pomakne voziček, ki se giblje brez trenja po podlogi, glede na zemljo, ako moža zamenjata svoji mesti? Masa m_1 je večja od m_2 .

4. V cev oblike U, ki je na enem koncu zaprta, vlijemo vodo. Zaradi zraka v zaprtem kraku cevi se vzpostavi razlika gladin h , ko je drugi krak do vrha napolnjen z vodo. Za koliko se mora spremeniti temperatura zraka v cevi, da bi se razlika vodnih gladin zmanjšala na polovico? Zunanji zračni tlak je p_0 , medtem ko tlak vodne pare zanemarimo.

5. Na vrhu strmine z višino h in dolžino d sta drug poleg drugega valj in krogla izdelana iz iste homogene snovi. Os valja je vodoravna. Valj in krogla se kotalita po strmini brez drsenja.

a) Katero telo pride prej do podnožja strmine?

b) Koliko prej bi morali spustiti počasnejše telo, da bi prišla oba hkrati do podnožja?

Nalogo rešite splošno!

Skupina B
(elektrika in magnetizem)

1. Imamo ploščni kondenzator z razdaljo d med ploščama. V kondenzator postavimo ploščo iz dielektrika z relativno dielektrično konstanto večjo od 1. Debelina plošče x predstavlja $p \%$ razdalje med ploščama, med katerima je sicer zrak. Električno polje med ploščama je homogeno.

a) Določite razmerje jakosti električnega polja v zraku in v dielektriku, kadar je kondenzator nabit.

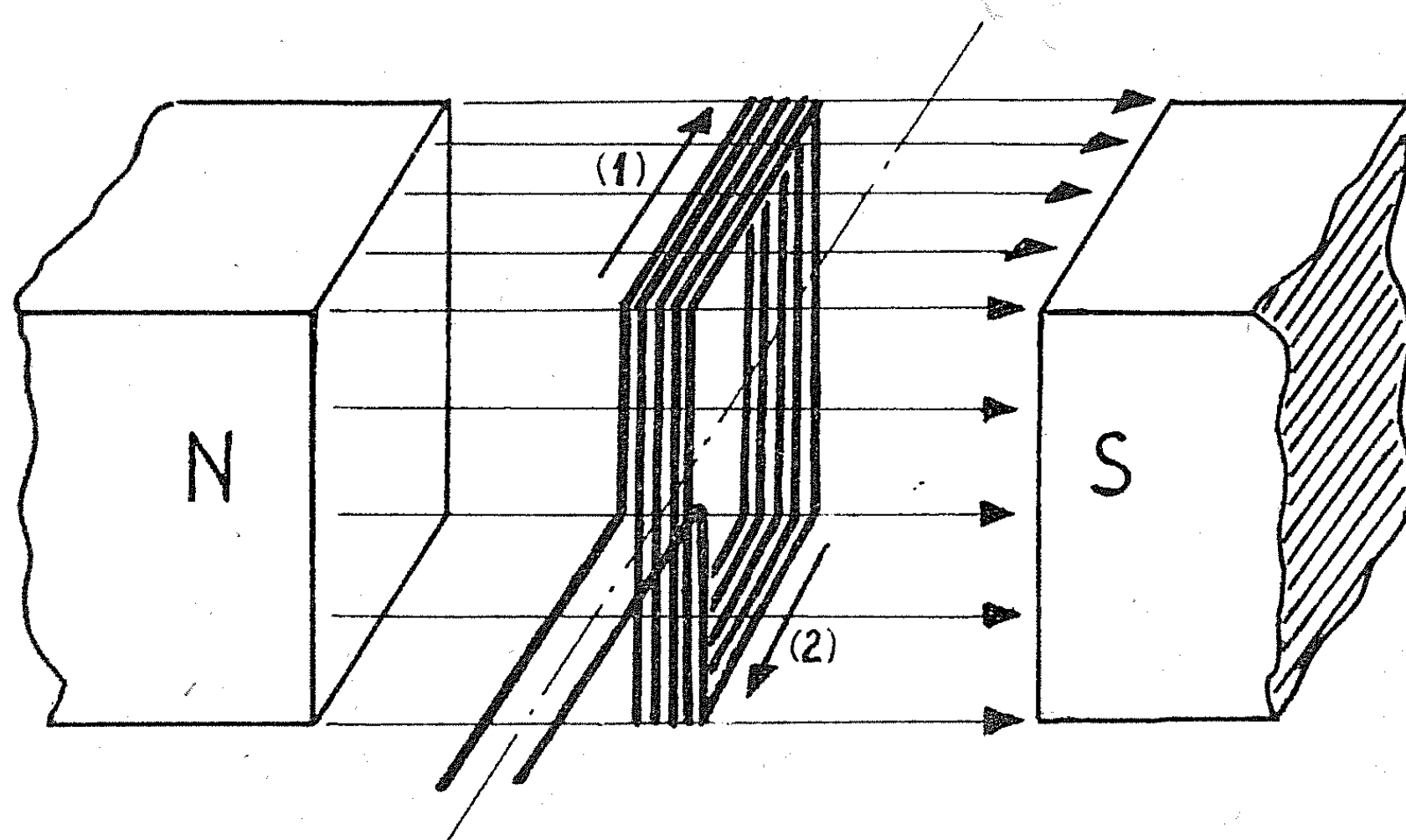
b) Koliko procentov P največje možne kapacitete (ko je $p = 100\%$) znaša ta kapaciteta?

c) Narišite krivuljo odvisnost $P(p)$ pri $\epsilon_r = 5$ in $\epsilon_r = 50$!

2. Kolikokrat moramo povečati napetost izvora, da bi se izgube moči (v dovodnih žicah do porabnika) zmanjšale 100-krat pri stalni moči generatorja?

3. Žarnica priključena na napetost U_1 ima moč P_1 . Upor hladne žarnice znaša R_0 . Kolikšna bo moč žarnice P_2 , če jo priključimo na napetost U_2 ? Upor je linearna funkcija toka skozi žarnico.

4. V homogenem vodoravnem magnetnem polju jakosti $B = 4 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ je okvir z obliko grške črke Π sestavljen iz bakrenih palic in postavljen v navpični ravnini pravokotno na polje. Po okviru drsi brez trenja tanka bakrena palica (specifična upornost $\rho_e = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$, gostota $\rho = 8,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). Kolikšno največjo hitrost doseže ta prečka pri drsenju navzdol? Električno upornost okvira zanemarimo!



5. V homogenem magnetnem polju gostote $B = 1 \text{ T}$ imamo okvir pravokotne oblike s stranica $a = 0,1 \text{ m}$, $b = 0,15 \text{ m}$ z $N = 100$ navoji žice. Okvir je vrtljiv okoli (slika) horizontalne osi, ki je pravokotna na magnetne silnice. Po navojih teče tok 10 A in sicer na stranici 1 v ravnino slike, v stranici 2 iz te ravnine.

a) Kolikšen je navor, s katerim magnetno polje deluje na okvir v poljubni legi in v kateri smeri se bo okvir vrtel?

b) Kolikšen je pretok magnetnega polja skozi okvir v položaju, ko je navor največji (najmanjši)?

Skupina C

(Optika in atomika)

1. Nekdo vidi brez očal razločno predmete na razdalji med d_1 in d_2 pred seboj. ($d_1 < d_2$)

a) Kakšna očala potrebuje, da bi videl razločno tudi zelo oddaljene predmete?

b) Kakšna očala potrebuje, da bi razločno videl predmete v razdalji d , ki je manjša od d_1 ?

c) Določite, od katere do katere razdalje razločno vidi predmete, kadar nosi prva in kadar nosi druga očala?

Rešite najprej splošno, nato pa še za primer da je $d_1 = 50 \text{ cm}$, $d_2 = 3 \text{ m}$, $d = 25 \text{ cm}$.

2. Rentgenska svetloba iz rentgenske cevi z anodno napetostjo $U = 7,5 \text{ kV}$ pada pod kotom 54° na normalo na ploščico kristala, ki ima med mrežnimi ravninami razdaljo $d = 4,9 \text{ Å}$. Po odboji pada svetloba na kovinsko površino in izbija elektrone. Kakšna je največja hitrost izstopajočih elektronov, če je največja valovna dolžina, s katero lahko še izbijamo fotoelektrone iz te kovine, 4500 Å ?

3. Kolikšna je prostornina radona Rn , ki je v radioaktivnem ravnotežju z 1 mg radija Ra , če je radon pod tlakom 2 at pri temperaturi 27°C .

$$1. {}_{47}\text{Ag}^{112} m_1' = 111,94245$$

$$2. {}_{52}\text{Te}^{122} m_1'' = 121,94156$$

$${}_{48}\text{Cd}^{112} m_2' = 111,93823$$

$${}_{53}\text{I}^{122} m_2'' = 121,94601$$

Vsi podatki so v atomskih masnih enotah.

a) Določite, katero jedro je stabilnejše pri vsakem paru!

b) Ali more manj stabilno jedro preiti spontano v stabilnejše z razpadom beta plus ali beta minus?

c) Če lahko, kolikšna je največja energija oddanih elektronov odnosno pozitronov?

Masa protona znaša $m_p = 1,007596$, masa nevtrona $m_n = 1,008986$, masa elektrona $m_e = 0,000549$ atomskih masnih enot.

4. Elektroni iz velikega pospeševalnika gredo skozi homogeno magnetno polje, ki je pravokotno na smer curka, nato pa udarijo na volframovo ploščico. Kolikšna je najmanjša valovna dolžina dobljene rentgenske svetlobe, če se elektroni gibljejo po krožnici polmera $R = 10 \text{ cm}$ skozi magnetno polje gostote $B = 0,2 \text{ T}$?

Tekmovanje mladih fizikov Jugoslavije, ki se je začelo v nedeljo 23. maja ob 8.30, je bilo zaključeno ob 12.30. Udeleženci tekmovanja so imeli pripravljeno skupno kosilo v gostišču v Podgorici. Popoldne so si tekmovalci in njihovi spremljevalci ogledali v dveh skupinah reaktorski center v Podgorici in nekatere laboratorije na inštitutu Jožef Stefan.

Komisija za pregled izdelkov je pod vodstvom M. Rosine pričela z delom takoj po tekmovanju. Pregledala in ocenila je izdelke tekmovalcev. Prav tako je popoldne začela z delom komisija za zvezno tekmovanje, ki je najprej pregledala izdelke in potrdila ocene tekmovalcem. Nato je komisija za zvezno tekmovanje odprla ovojnice s šiframi in sestavila vrstni red nagrajenih in pohvaljenih tekmovalcev.

Tabela nagrad in pohval po republikah:

	število tekmovalcev	nagrade			pohvale
		I	II	III	
SR Bosna in Hercegovina	4	—	—	1	—
SR Hrvaška	11	2	—	1	2
SR Makedonija	2	—	—	—	—
SR Slovenija	13	1	—	3	2
SR Srbija	20	—	1	1	6

Letos so se naši dijaki v medrepubliški konkurenci bolje odrezali kot pretekla leta:

I. nagrado v skupini A (mehanika in toplota) je dobil Milan Miklavčič, dijak tehniške šole KMRLP, Ljubljana

III. nagrado v skupini B (elektrika in magnetizem) je dobil Karel Markelj, dijak gimnazije »Miloša Zidanška«, Maribor

III. nagradi v skupini C (optika in atomika) sta dobila Dušan Kustrle, dijak gimnazije Kranj in Saša Hadži, dijak I. gimnazije — Bežigrad, Ljubljana

Pohvali sta dobila Marko Zgonik v skupini A in Matjaž Prijatelj v skupini B, oba dijaka gimnazije v Novi Gorici.

Vse kaže, da so prizadevanja društva za popularizacijo matematike, fizike in astronomije obrodila sadove. Vrsta akcij, ki smo jih začeli v zadnjih letih: obiski univerzitetnih učiteljev in asistentov po srednjih šolah, predavanja študentov in absolventov matematike po srednjih šolah in obiski dijakov in njihovih učiteljev na oddelku za matematiko in fiziko vzpodbujajo zanimanje dijakov za matematiko, fiziko in astronomijo. Vsakoletne nekajdnevne priprave dijakov na zvezni tekmovanji mladih matematikov in fizikov so se izkazale zelo koristne in kazalo bi z njimi nadaljevati, morda še v kakšni novi obliki, nekoliko daljše in bolj izpopolnjene. Naši dijaki so letos pokazali na zveznih tekmovanjih iz matematike in fizike dobro znanje. Če ni bil ta uspeh dijakov le tekmovalna sreča, smo lahko veseli, da se posveča več pozornosti za matematiko in fiziko nadarjenim dijakom po srednjih šolah in da se sedanje stanje obrača na bolje.

Slovesna podelitev nagrad in pohval je bila v nedeljo 23. maja ob 18.00 v veliki fizikalni predavalnici. S tem je bilo VII. zvezno tekmovanje mladih fizikov v Ljubljani zaključeno. Zvečer so se tekmovalci in njihovi spremljevalci vračali domov, polni novih utisov in lepih spominov na Slovenijo.

Sedaj, ko je zvezno tekmovanje za nami, lahko ugotovimo, da je bilo opravljeno veliko dela. VII. zvezno tekmovanje mladih fizikov v Ljubljani je bila dobro pripravljena prireditelj, ki je povsem uspela in ki bo vsem sodelujočim ostala še dolgo v spominu.

Da je zvezno tekmovanje tako uspelo in da je organizacija potekala brez zastojev, gre zasluga predvsem predsedniku dr. A. Moljku in članom organizacijskega odbora zveznega tekmovanja mladih fizikov. Pri tem pa so imeli veliko zaslug tudi: dr. Ernest Petrič, član izvršnega sveta SR Slovenije, ki je priredil udeležencem zveznega tekmovanja sprejem in s tem izkazal naklonjenost tej prireditvi, Izobraževalna skupnost SR Slovenije, ki je finančno podprla tekmovanje, Inštitut Jožef Stefan, ki je za dva dni odstopil svoj avtobus za prevoz udeležencev tekmovanja in pripravil ogled reaktorskega centra v Podgorici ter laboratorijev inštituta, Oddelek za matematiko in fiziko, ki je dal na razpolago veliko predavalnico za tekmovanje in prostore za delo zveznih komisij.

Vsem, ki so pomagali in sodelovali pri organizaciji zveznega tekmovanja, še enkrat najlepša hvala.

Sekretar komisije za tekmovanje
mladih fizikov:

Tomaž Skulj

POROČILO

O TEKMOVANJIH IZ MATEMATIKE ZA VEGOVA PRIZNANJA V Š. L. 1970/71

Tekmovanje učencev iz matematike ima v naši republiki že nekajletno tradicijo. Pred dvema letoma je vzniknila ideja, da tekmovanje dobi ime po Juriju Vegi in da ga organiziramo še na širši osnovi. Cilji tekmovanja so: vzbujati najbolj nadarjene učence — mlade matematike širom po Sloveniji k ljubezni do predmeta, jih nagrajevati in spremljati pri nadaljnjem študiju ter jih uvajati v matematične oddelke na gimnazijah. Po novi zamisli je tekmovanje razdeljeno na šolska, občinska in republiško ter zvezno tekmovanje.

Šolska tekmovanja

Na osnovi šolskih poročil, ki pa so žal večkrat pomanjkljiva in nepopolna (od tolminske in novogoriške občine nismo prejeli ne občinskih ne šolskih poročil), so rezultati tile:

število tekmovalcev	6475
število podeljenih bronastih priznanj	3044
število rednih krožkov	98
število rednih krožkarjev	1622
število občasnih krožkov	108
število občasnih krožkarjev	1943
število naročnikov na Matematički list	1426

Število naročnikov na Matematički list je presenetljivo majhno. Ta podatek nas sili k temu, da začnemo hitro reševati matematično periodiko in tako pomagati učencu in mentorju.

V občinskih in šolskih komisijah je sodelovalo okoli 750 učiteljev, ki so pomagali pri sestavljanju nalog, korekturah in organizaciji tekmovanj.

Skoraj vse komisije poročajo, da so učence-nagrajence obdarili s praktičnimi darili. Diplome so podeljevali na šolskih svečanostih. Ponekod uvajajo vsakoletno pregledno tekmovanje za vse učence od 1. do 8. razreda. Tak način pomaga, da učitelji matematike hitreje spoznavajo za matematiko sposobnejše šolarje in jih spodbujajo k intenzivnejšemu delu.

Občinska tekmovanja

V vseh slovenskih občinah so 29. maja tekmovali učenci, ki so se na šolskem tekmovanju najboljše odrezali. Naloge so bile enotne za vseh 60 slovenskih občin.

VI. razred

1.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

Dopolni »magični kvadrat« tako, da bodo vsote števil v vseh vodoravnih, vseh navpičnih in obeh diagonalnih smereh enake!

(Ulomke okrajšaj, kolikor moreš!)

2. Po redu plovbe izpluje ladja A iz pristanišča vsak četrti dan, ladja B vsak osmi dan in ladja C vsak deseti dan. Danes, 29. maja, so izplule vse tri istočasno.

Katerega dne bodo naslednjič vse tri ladje hkrati zapustile pristanišče?

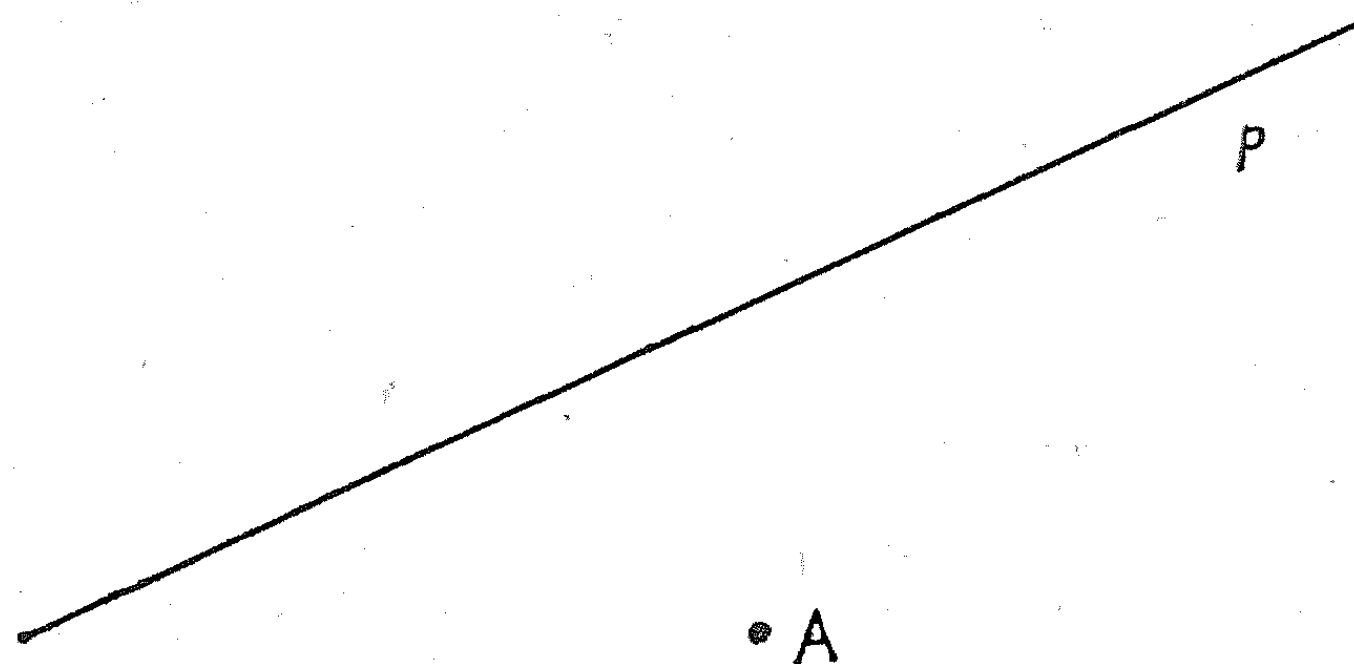
3. Pravokotno šolsko igrišče, ki je bilo 80 m dolgo in 48 m široko, so povečali tako, da so zvečali dolžino za 15%, širino pa za četrtno.

Za koliko % je sedaj ploščina igrišča večja?

4. Premica p naj bo simetrala enakokrakega trikotnika, točka A pa eno izmed njegovih oglišč.

Načrtaj trikotnik, če je njegova višina enaka osnovnici!

Opiši postopek!



5. Iz kock z robom 1 cm je sestavljena večja kocka z robom 3 cm. Površje te kocke je rdeče popleskano.

a) Koliko malih kock je potrebnih za večjo kocko?

b) Koliko malih kock ni popleskanih?

c) Koliko malih kock ima popleskano le 1 ploskev?

d) Koliko malih kock ima popleskani 2 ploskvi?

e) Koliko malih kock ima popleskane 3 ploskve?

f) Koliko malih kock ima popleskane 4 ploskve?

VII. razred

1. Za koliko se razlikujeta vrednosti izrazov

$$\frac{1}{1-x+x^2-x^3} \quad \text{in} \quad \frac{1}{1+x+x^2+x^3}, \quad \text{če je } x = -\frac{1}{2}?$$

2. Pri deblih izražamo delež skorje v odstotkih ploščine presečnega lika. Pri hrastu je ta delež 18%.

Kako debela je skorja, če je premer debla $\frac{1}{2}$ m? (Na mm natančno!)

3. Dani so kvadrati s stranicami $a_1 = 2$ cm, $a_2 = 3$ cm, $a_3 = 4$ cm. Načrtaj jih in konstruiraj kvadrat, katerega ploščina je enaka vsoti ploščin vseh treh kvadratov!

4. Izračunaj ploščino četrkotnika ABCD s podatki:

$$AB = 30 \text{ m}, BC = 10 \text{ m}, \sphericalangle ABC = 60^\circ, \\ \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 120^\circ!$$

5. Enaka kot za VI. razred.

VIII. razred

1. S postaje A odpelje proti postaji B , ki je oddaljena 54 km, ob 18. uri 36 min motorni vlak in prispe tja ob 19. uri 21 min. S postaje B odpelje ob 18. uri 55 min. potniški vlak proti postaji A in prispe ob 20. uri 7 min.

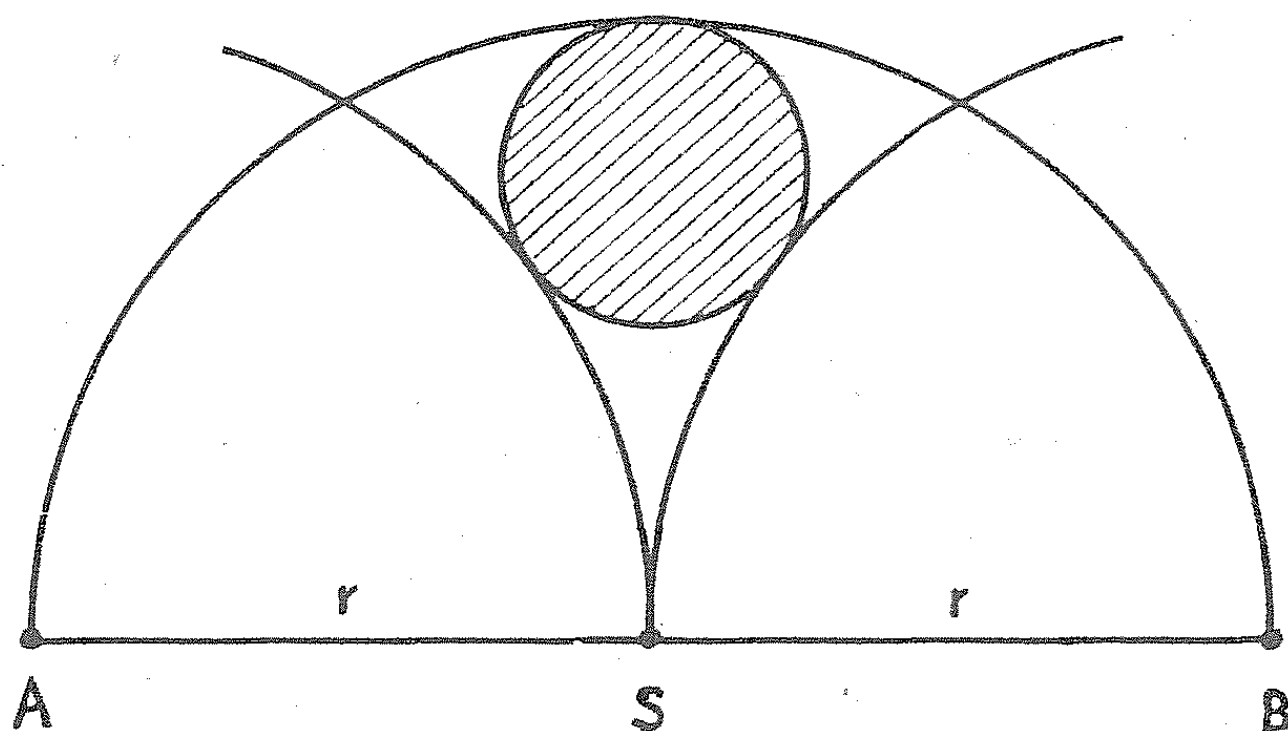
Ob kateri uri se vlaka srečata? Koliko sta takrat oddaljena od postaje A ?

2. Dan je trapez ABCD. Na njegovi krajši osnovnici ležita točki M in N . Načrtaj skozi ti točki premico tako, da razdelita trapez na 3 ploščinsko enake dele!

Opiši postopek!

3. Iz krajišč polkrogevega premera A in B sta načrtana loka s polmerom r ; mali osenčeni krog se dotika obeh lokov in polkrogevega loka.

Izračunaj, koliki del polkrožne ploskve je osenčena krožna ploskev!



4. Osnovna ploskev pokončne piramide je romb ($a = 2 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$), krajši stranski rob meri 2 cm .

Izračunaj površino in prostornino piramide!

5. Enaka kot za VI. razred.

Veliko je bilo razmišljanja, ali naj bodo naloge enotne — ali naj jih vsaka občinska komisija sestavi po lastni presoji. Obveljalo je mnenje, da naj bodo naloge enotne, čeprav se zavedamo, da s tem nekoliko prizadenemo predvsem tista področja Slovenije, ki imajo zlasti z učnim kadrom velike težave. V nekaterih predelih so se učenci slabo odrezali. Nekateri učitelji so bili mnenja, da so bile naloge precej težke. Morda res! Naloge so bile večinoma skrbno izbrane in originalne, zlasti še za 6. razred. Težje so bile naloge za 7. in 8. razred. Nekoliko je bilo pomanjkljivo besedilo druge naloge za 8. razred. Veliko učencev je nalogo reševalo kot poseben primer. Izkušnje tekmovanj nas učijo, da morajo biti besedila nalog kristalno čista, nedvoumna in kratka. Najmanj osmošolcev je rešilo tretjo nalogo — problem. Učenci, ki niso rešili skupne naloge za vse razrede, imajo zelo slabo prostorsko predstavo. Nekateri zatrjujejo, da so bile naloge preveč odmaknjene od običajno zahtevnejših nalog.

Preberimo rezultate občinskih tekmovanj:

število občin	58
število tekmovalcev	2852
število podeljenih srebrnih	
Vegovih priznanj	850

Občinske komisije so opravile veliko delo. Skoraj vse občinske komisije so obdarile nagrajence s praktičnimi darili, priredili zakuske ali izlete (Vegova rojstna hiša). Pri tem so jim pomagala različna podjetja, TIS in pa društva prijateljev mladine. Uprave šol so poskrbele za svečano podelitev diplom.

Republiško tekmovanje

Najboljši učenci osmih razredov so se v soboto, 5. junija pomerili na republiškem tekmovanju za najvišje, zlato Vegovo priznanje. Vsi učenci, bilo jih je 136, so reševali naloge, ki jih je sestavila republiška tekmovalna komisija pod predsedstvom profesorja Franca Galiča. Komisija je pripravila tele naloge:

1. Mimo telegrafskega droga vozi vlak 12 sekund, 1500 m dolg predor pa prevozi v 1 minuti in 12 sekund. Kako dolg je vlak in kolikšna je njegova hitrost?

2. Za $a = 3$ ima izraz $\frac{5a - 3}{b - 3}$ vrednost 6. Pri kateri vrednosti števila a je ta izraz enak 1?

3. Načrtaj trikotnik z oglišči A $(-2, 4)$, B $(-2, -4)$, C $(6, 0)$ ter mu očrtaj krog! Polmer tega kroga tudi izračunaj!

4. Enakokrak trapez s ploščino $12\sqrt{3}\text{ cm}^2$ je sestavljen iz treh enakostraničnih trikotnikov. Izračunaj diagonalo in obseg tega trapeza!

5. Pravokotni trikotnik s katetama 3 cm in 4 cm zavrtimo prvič okrog ene katete, drugič okrog druge katete in tretjič okrog hipotenuze. Izračunaj razmerje površin in razmerje prostornin nastalih teles!

Prva naloga je bila prelahka, saj jo je večina učencev prekvalificirala v težjo. Tudi druga naloga sodi med lažje. Veliko preglavic je delal izračun polmera pri tretji nalogi. Veliko učencev je nalogo rešilo tako, da so na osnovi konstrukcije polmer kar odčitali. Nekateri učenci so nalogo rešili zelo elegantno s pomočjo sorazmerja. Peta naloga je bila verjetno računsko-tehnično preobsežna. Veliko učencev ni povsem poenostavilo zahtevanega razmerja. Morda je manjkala težja naloga.

Za zaključek naj navedemo še deseterico najboljših osmošolcev na republiškem tekmovanju.

Viktor Avbelj, osn. š. (Prežihov Voranc), Ljubljana	25 točk
Jerko Novak, osn. š. (Majda Vrhovnik), Ljubljana	25 "
Martin Simonič, osn. š. (Prežihov Voranc), Ljubljana	25 "
Oman Matej, osn. š. (Boris Kidrič), Maribor	25 "
Branko Černigoj, osn. š. (Boris Kidrič), Ajdovščina	25 "
Vladimir Cindro, osn. š. (Majda Vrhovnik), Ljubljana	24 "
Andrej Hrup, osn. š. (Marjan Nemec), Radeče	24 "
Rajko Jeram, osn. š. (Dr. Fran Močnik), Cerklje	24 "
Marko Mikoš, osn. š. (Prežihov Voranc), Maribor	23 "
Boris Kompare, osn. š. (Milojka Štrukelj), Nova Gorica	23 "

Vsi navedeni učenci so prejeli na skupni proslavi s srednješolci lepe knjižne nagrade. Skupaj je bilo podeljenih 82 zlatih Vegovih priznanj.

Objektivno lahko trdimo, da so vsa tekmovanja lepo uspela. Smo na pravi poti!

Sekretar komisije
za delo z učenci:

Pavel Zajc

PISMA UREDNIŠTVU

Pismo iz Afrike

Spoštovani urednik!

Prav te dni sem dobila prvo številko 18. letnika Obzornika. Prisrčna hvala! Imela sem ravno počitnice in sem ga preštudirala od začetka do konca. Zelo zanimivo — povrnila sem se v mislih med ljubljanske kolege.

Tudi tu se ukvarjamo s problemi nove matematike in imamo vsako leto enkrat konferenco, kjer se zberejo matematiki iz vse države. Kako zanimiva in pisana je ta družba: Indijci (ki prevladujejo), Američani, Kanadčani, Angleži, Holandci, Danci in nekaj je tudi že domačinov. Najbolj zanimiv del srečanja je predavanje posameznikov, kjer obrazložijo kako težje poglavje na izviren in uspešen način.

Se priporočam za nadaljnje številke in lepo pozdravljam

*Kristina Mlakar,
Lusaka*

Hvala za prijetno in vzpodbudno pismo. Oglasite se še kaj!

Matematični časopis za učence osnovnih šol...

Na pismo Pavla Zajca v 1. št. Obzornika je prejelo uredništvo od Matematičnega lista iz Beograda dopis, katerega vsebina je v kratkem tale:

Pripombe v pismu tov. Zajca ne ustrezajo resnici. Uredništvo Matematičnega lista se je vedno navduševalo za to, da bi časopis izhajal tudi v slovenskem, makedonskem, alban-skem in madžarskem jeziku. V ta namen se je uredništvo obračalo na razne forume s proš-njo za dotacijo, pri čemer pa ni našlo razumevanja.

Tudi v Slovenijo so poslali svojega uslužbenca na pogovor, v katerem je slovenska stran predlagala, da bi bila cena listu večja, kar pa so oni zavrnil in zahtevali, da se za-gotovi neko minimalno število naročnikov. Odgovora na to niso prejeli.

Naknadno so še enkrat pretresli vsa ta vprašanja in prišli do naslednjih sklepov:

1. Pri sedanjih pogojih se Matematički list lahko izdaja vzporedno v drugih jezikih le, če je zagotovljeno vsaj 25.000 naročnikov med učenci od 5. do 8. razreda osnovne šole.
2. Matematički list v slovenščini bi bil dobesedni prevod srbohrvaške verzije v isti obliki in opremi, izhajal pa bi okrog 20 dni pozneje kot srbskohrvaški original.
3. V uredniški odbor bi moral priti predstavnik vsake republike (kar bi moralo biti tudi doslej, toda Slovenija do danes še ni poslala svojega delegata, kljub dvakratni zahtevi).
4. Slovenija bi morala preskrbeti kvalitetnega prevajalca, vse drugo (izdajanje, raz-pečavanje itd.) pa je stvar uredništva ML.

Če bi bili ti pogoji sprejeti, bi lahko že v tem šolskem letu začel izhajati ML tudi v slo-venščini.

Na skupni seji upravnega odbora DMFA SRS v ožji sestavi, komisije za popularizacijo, komisije za tisk in iniciativnega uredniškega odbora lista za mlade matematike, fizike in astronome smo precej temeljito analizirali sedanje razmere objavljanja tekstov za mlade matematike, fizike in astronome v SR Sloveniji. Po daljši razpravi se je izkristaliziralo mnenje, da je treba dati iniciativnemu uredniškemu odboru vsestransko podporo pri iskanju ustreznih oblik posredovanja tekstov mladim matematikom, fizikom in astronomom. Takoj je treba začeti z zbiranjem ustreznih materialov od čimširšega kroga sodelavcev in v perspektivi je treba misliti na izdajanje samostojnega lista.

Glede dopisa redakcije Matematičnog lista, da bi ta list pod določenimi pogoji izdajali tudi v slovenskem prevodu, je bila večina mnenja, da trenutno ni mogoče izpolniti njihovih pogojev. Vsekakor pa se DMFA SRS zavzema za obojestransko sodelovanje, predvsem za izmenjavo tekstov. Iniciativni uredniški odbor za posredovanje matematičnega, fizikalnega in astronomskega gradiva mladim bo izmed svojih članov čimprej delegiral enega predstavnika Slovenije v uredniški odbor Matematičnog lista.

Tajnik društva:
Ivan Pavliha

Beseda o našem osnovnem šolstvu...

Spoštovani!

Pred kratkim je preko naše domovine zapihal nenavaden veter. V naše učilnice je treba vnesti novega duha, ki bo pometel z onim zlom, ki mu je ime »osip«. Študirali smo ga in ugotovili, skozi katera vrata se vtihotaplja ta zločesti duh. Največ skozi matematična vendar! Matematika je torej tisti grešni kozel, ki se ga vsi tako zelo boje, zaradi nje »leže po polju v bojih pokončani trum srčni vojvodi...« Zato moramo s povzročitelji osipa čim-prej obračunati.

V Nemčiji in po drugih državah zahodne Evrope pa je baje zavel nov duh, ki je pometel z vsem starim in v matematiki utrl nova pota. Tega duha je treba uvesti tudi pri nas. Na lastne oči so se prepričali, kako dobro se to obnese v Nemčiji, in ukrenili vse potrebno, da se ta duh, ta novi način poučevanja matematike čimprej presadi na naša tla. Rahli dvomi, če bo to pri nas uspelo, so bili kmalu razpršeni, pač menda zato, ker tisti, ki bi naj bili neposredni posredovalci tega novega duha, tj. učitelji elementarci, do zadnjega nismo vedeli, za kaj pravzaprav gre pri tej novi matematiki, razen da se bo delo odvijalo ob spoznavanju raznih vrst množic in prvošolčke navadilo misliti. Vzlic nejasnim pojasnilom, kaj in kako bo vse teklo, smo vedeli učitelji zagotovo le to, da se bo nova matematika obvezno uvedla v 1. razred osnovne šole že z novim šolskim letom. Vse drugo pa bomo zvedeli pravočasno na seminarjih, ki bodo izvedeni za učiteljstvo spomladi. V tem pogledu smo bili pač izravnani s prvošolčki, ki naj bi bili samo poslušen činitelj pri vzgoji, ne pa enako-praven element.

Pričeli so se seminarji, zavesa se je odgrinjala. Učitelji, počaščeni, da se jim zaupa tako velevažna nova naloga, pa so le pričeli razmišljati. »Kdaj pa se bo učenec učil tudi kaj računati? Saj bo to potreboval vsak dan kot žlico!« Razmišljati sem pričel tudi jaz... Mi bomo po tem novem načinu morda res naučili otroka malo bolj misliti, uporabnega matematičnega znanja za življenje (in tega bo rabilo najmanj 95% učencev), pa si po novem načinu ne bodo pridobili več kot dobro polovico v primeri z dosedanjim znanjem. Vprašanje nastane: ali smemo zanemariti znanje 90% učencev na račun nekaj odstotkov vrhunskih matematikov, ki bi jim ta način morda koristil, ki pa so se znali do vrhov povzpeti tudi po dosedanjem starem načinu, kot dokazujejo primeri vseh naših matematičnih strokovnjakov.

Po novem učbeniku naj bi bodoči prvošolci poleg osnovnih pojmov o množicah obvladali samo števila do 20. Računati pa bi znali samo do 10 in nekaj tudi v 2. desetici, v nobenem primeru pa ne s prehodom čez desetico, kar je v 1. razredu najtežje in vsi moji učenci po starem načinu tudi obvladajo. Še več: dobili so tudi osnovne pojme o množenju (z 2) ter pojem deljenja in ulomka ($1/2$) ter so znali to tudi smiselno uporabljati.

Nauk o množicah (namenjen 1. razredu) spada na konec 4. razreda, ko so učenci že duševno dorasli takšnemu načinu dela. V ostalem pa raje izboljšujemo dosedanja pouk s sodobnimi učili, ki bodo učencem olajšali pridobivanje matematičnih zakonitosti in s tem približali matematiko otrokom v razumljivi, privlačni luči in bomo tako odpravili *osip*... Vsa leta sem ugotavljal vedno eno in isto. Če je gradivo podano učencem dovolj konkretno in nazorno, matematika ni težak in nerazumljiv ali nepriljubljen predmet tistemu, ki pozorno posluša in se vsaj malo potruди. Žal se vse še ne da ponazoriti, če nimamo na voljo primernih učil in zato sem se trudil nekatera tudi sam napraviti...

V času, ko se bije bitka, ali je pametno ali ne uvesti pri nas obvezno na vseh osnovnih šolah pouk nove matematike, ki pri nas ni bila preizkušena, se mi zdi potrebno seznaniti čim širši krog ljudi — pri tem mislim tudi na brave Obzornika — z vsemi v poštev prihajajočimi elementi, ki bi lahko dosednji način pouka (podčrtal pisec) izboljšali in olajšali.

Spoštljive tov. pozdrave!

Ivan Rutar

Ta dopis nam je poslal tov. Ivan Rutar, učitelj v Kompolah pri Celju. Na koncu dopisa tov. Rutar na drobno opisuje svoja tri pomagala, ki jih je Svet za šolstvo SRS že potrdil kot učila, potem pa govori o 4. učilu za pouk ulomkov, za katerega potrditev je tudi že zaprosil, pa mu ga je Republiški sekretariat za prosveto in kulturo po neugodnih ocenah recenzentov odklonil.

NOVE KNJIGE:

Lebedinec F. in A. Vadal: *Funkcije II*. Ljubljana, Mladinska knjiga 1970. 144 str. 8°. Knjižnica »SIGMA« — 19. Cena 26.— din (Za člane DMFA SRS 21.—)

Rokopis vsebuje neko nadaljevanje dela VADNAL: FUNKCIJE I in vsebuje navodila za risanje diagramov funkcij z eno neodvisno spremenljivko sestavljenějšíh tipov, kot so oni, ki jih najdemo v »Funkcijah I«. Poleg primerov načrtovanja določenih transcendentnih in ene algebrske funkcije, pri katerih nastopajo mesta nezveznosti, srečamo v knjigi še načrtovanje diagramov posredno danih funkcij, grafično integriranje, načrtovanje s Taylorjevo vrsto danih funkcij, načrtovanje harmoničnih funkcij z uporabo vektorskih diagramov, načrtovanje nekaterih znanih spiral in krožne evolvente, diagrame nekaterih rhodonej in Cassinijevih ovalov z Bernoullijevo lemniskato vred, končno pa še diagrame različnih kotalnic: cikloide, hipo- in epicikloid.

Obravnavanje v knjigi zastavljene naloge je preprosto in neposredno. Glede na namen knjige, dati srednješolcem, pa tudi študentom na fakultetah primere grafičnega predočanja nekaterih znanih in značilnih funkcij z eno neodvisno spremenljivko, se avtorja ne spuščata v podrobnejše obravnavanje lastnosti dobljenih krivulj, temveč se zadovoljujeta s preprosto ugotovitvijo dejanskega stanja v zvezi z obliko dani funkciji prirejene slike.

Krivulje, prirejene analitičnim funkcijam, delimo običajno na algebrske in transcendentne. Avtorja take delitve nimata, pač pa navajata krivulji recimo posamič in samo z naslovi ali pa nekatere skupine krivulj brez njihovega skupnega ozadja. Morda bi bilo le na mestu v eventualni novi izdaji knjige, po kateri segajo študentje v izjemni meri, spopolniti pregled tudi v tej smeri in tako prispevati k širšemu spoznanju navajanih krivulj.

O. Sajovic

Vandal A.: *Rešeni problemi linearnega programiranja*. Ljubljana, Mladinska knjiga 1970. 211 str. 8°. Knjižnica »SIGMA« — 22. Cena 32.— din (Za člane 18.—).

Delo dr. A. Vadal »Rešeni problemi linearnega programiranja«, ima osem poglavij. Prvo podaja kratek pregled tistih reči iz linearne algebre, ki so potrebne pri linearnem programiranju. Povečini se omejuje na definicije in na navajanje izrekov, le nekateri izreki so tudi dokazani. Drugo poglavje uvaja osnovne pojme o konveksnih množicah v n -razsežnem prostoru, predvsem o konveksnih poliedrih. Osrednjo vlogo ima tretje poglavje. V njem so navedene različne formulacije osnovne naloge v linearnem programiranju. Nadalje avtor dokaže, da gre pri linearnem programiranju za iskanje ekstrema linearne forme na konveksni množici s končnim številom ekstremnih točk in da se ta ekstrem doseže v eni ali več ekstremnih točkah te konveksne množice. Nato je podrobno utemeljena simpleksna metoda, se pravi način, kako se da prehajati iz ene ekstremne točke v drugo tako, da se pri tem vrednost linearne forme dosledno izboljšuje. V začetku četrtega poglavja je popisano, kako se je lotiti računanja po simpleksni metodi, nato pa je ta metoda ilustrirana z dvema primeroma (dietni in proizvodni problem). Peto poglavje je posvečeno tako imenovani degeneraciji, se pravi situaciji, ko naletimo pri simpleksni metodi na ekstremno točko s »premalo« pozitivnimi koordinatami. Avtor razloži, kako je degeneracijo mogoče obiti s perturbacijsko metodo. V šestem poglavju se obravnava dualnost, in sicer nesimetrični dualni problem, najprej na splošno, nato pa še na primerih (pri dietni in proizvodni nalogi). Sedmo poglavje opisuje grafične metode v linearnem programiranju, osmo pa je namenjeno transportni nalogi, predvsem načinom reševanja, ki so v tem posebnem primeru ugodnejši od splošne simpleksne metode.

Delo je napisano gladko in zelo lahkoumljivo, tako da bo dostopno širokemu krogu interesentov. Strogost je v glavnem na ravni, na kakršni je večina zvezkov Sige. Snov je izbrana smotrno, pogrešam edino obravnavo parametričnih nalog, in poglavje o grafič-

DOSTOPNEJŠE NOVE KNJIGE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

Apsen B.: Riješeni zadaci iz elementarne matematike. Uz repetitorij elementarne matematike. Zagreb, Tehnička knjiga 1970. 248 str. 8°.

Parno I. K.: Integraly v X. klasse srednej školy. Moskva, Izdatel'stvo »Prosveščenie« 1970. 104 str. 8°. (cir.).

Davis M.: Lectures on modern mathematics. New York, Gordon and Breach 1967. IX + 186 str. 8°.

Izbrana poglavja iz matematike. III. U redakciji R. R. Janića. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije 1970. 160 str. 8°.

Dubbej J. M.: Development of modern mathematics. London, Butterworths 1970. VII + 145 str.

Mathematics in the modern world. Readings from Scientific American. San Francisco, Freeman and comp. 1968. X + 409 str. 4°.

Avramov D. A.: Matematička logika i skupovi. Prvi razred. Zagreb, Tehnička knjiga 1970. (III) + 181 str. 8°.

Avramov D. A.: Zbirka rešenih zadataka iz matematičke logike. (Za početnike) Zagreb, Tehnička knjiga 1970. 79 str. 8°. (cir.).

Holl M.: Kombinatorika. Moskva, Izd-vo Mir 1970. 424 str. 8°. (cir.).

Dembowski P.: Kombinatorik. Mannheim, Bibliographisches Institut 1970. 190 str. 8°.

Vorob'ev N. N.: Teorija rjadov. Moskva, Izd-vo Nauka 1970. 204 str. 8°. (cir.).

Kudrevator G. A.: Sbornik zadač po teorii čisel. Moskva, Izd-vo »Prosveščenie« 1970. 128 str. 8°. (cir.).

Ogilvy C. S. und J. T. Anderson: Zahlentheorie. München, Wilhelm Goldmann Verlag 1970. 136 str. 8°.

Auslander L.: What are numbers? Glenview, Scott, Foresman and comp. 1969. VII + 128 str. 8°.

Kalnin R. A.: Algebra i elementarnye funkcii. Izd. 5., perer. Moskva, Izd-vo Nauka 1969. 464 str. 8°. (cir.).

Lipschutz S.: Linear algebra. New York, McGraw-hill book comp. 1968. VI + 334 str. 4°. Schaum's series.

Ayres F.: Matrices. New York, McGraw-hill book comp. 1962. VII + 219 str. 4°. Schaum's series.

Dieudonne J.: Algebre lineaire et geometrie elementaire. Paris, Hermann 1968. 240 str. 8°.

Weiner L. M.: Introduction to modern algebra. New York, Harcourt, Brace and World 1970. XV + 333 str. 8°.

Crouch R. B. (and) D. N. Beckman: The structure of abstract algebra. Glenview, Scott, Foresman and company 1970. VIII + 424 str. 8°.

Clapham C. R. J.: Introduction to abstract algebra. London, Routledge and Kegan Paul 1969. IX + 83 str. 8°.

Baumslag B. and B. Chandler: Group theory. New York, McGraw-Hill book copm. 1968. VII + 279 str. 4°. Schaum's series.

Šilov G. E.: Matematičeskij analiz v oblasti racional'nyh funkcij. Moskva, Izd-vo Nauka 1970. 48 str. 8°, (cir.). Populjarnye lekcii po matematike. Vyp. 49.

Ayres G.: Differential and integral calculus. New York, McGraw-Hill book comp. 1964. VI + 345 str. 4°. Schaum's series.

Pucelj I. in I. Štalec: Geometrija za II. razred gimnazije. Maribor, Založba Obzorja 1970. 176 str. 8°.

Škljarskij D. O., N. N. Čencov i I. M. Jaglom: Geometričeskie neravenstva i zadači na maksimum i minimum. Moskva, Izd-vo Nauka 1970. 335 str. 8°. (cir.)

Kac M.: FORTRAN IV. in monitoski sistemi za elektronski računalnik IBM 1130. Dopolnjeni in razširjeni ponatis. Maribor, Višja tehniška šola 1970. (III) + 170 str. 4°. (skripta)

Computer science: A first course. New York, John Wiley 1969. IX + 593 str. 8°.

Kladnik R.: Osnove fizike za tehnike. II. del. Ljubljana, Državna založba Slovenije 1969—1971. 633 str. 8°.

Poglavje iz fizikalne optike. Seminar za srednješolske profesorje fizike in matematike. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1971. 152 str. 4°.

Uiler Dž. A.: Predvidenie Ejnštejna. Moskva, Izd-vo Mir 1970. 112 str. ; 8°. (cir.)

Hoyle F.: Astronomija. Prev. L. Čermelj. Ljubljana, MK 1971. 320 str. 4°.

Pirnat V.: Zanimivosti nočnega neba. Ljubljana, DZS 1970. 144 str + 9 pril. 8°.

Avsec F. in M. Prosen: Astronomija za 4. razred gimnazije. Ljubljana, DZS 1971. 176 str. 8°.