

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1971
Letnik 18
2

XVIII. LETNIK — ŠTEVILKA 2
OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JUNIJ 1971

Uredniški odbor: Avsec Franc, gimnazija Kranj; Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani; Kvaternik Franc, tehnični in odgovorni urednik, gimnazija Poljane, Ljubljana; Moljk Anton FNT; Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan«; Rosina Mitja, FNT; Skulj Tomaž, gimnazija Moste, Ljubljana; Strnad Janez, FNT; Suhadolc Anton, FNT; Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije; Vidav Ivan, FNT.

Izdaja: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujete na čekovni račun Komisije za tisk DMFA SRS. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina: za nečlane 15 din, za dijake 5 din, za ustanove in podjetja 20 din, za inozemstvo 25 din (2 S), posamezna številka 5 din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, Ljubljana, Jadranska 19, pp 227, telefon 61-564/22, žiro račun št. 501-8-240/1.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

VSEBINA

	Stran
Sklepi 22. občnega zbora	49
Članki	
Posplošitev nekaterih idej v geometriji povezave (J. Rakovec)	50
Zlepki in interpolacije (J. Kozak)	59
Tekoči kristali (M. Jamšek-Vilfan)	65
Šola	
Nova matematika v osnovni šoli (S. Uršič)	81
Nova matematika in šolska reforma (F. Kvaternik)	82
O programu matematike v srednji šoli	84
Iz naših aktivov	87
Pisma uredništvu	88
Odgovor uredništva	88
40 let elektrotehniškega vestnika	89
Jože Ulčar — in memoriam (D. S. Mitrinović in B. S. Popov)	90
Nove knjige	93

CONTENTS

Articles	Page
A Generalization of Some Ideas in Geometry of Incidence (J. Rakovec)	50
Spline Functions and Interpolation (J. Kozak)	59
Liquid Crystals (M. Jamšek-Vilfan)	65
School	81
From our Actives	88

SKLEPI 22. OBČNEGA ZBORA DMFA SRS V ŠMARJEŠKIH TOPLICAH
27. MARCA 1971

1. Društvo meni, da je treba v šolskem letu 1971/72 obnoviti predavanja iz matematike, fizike in astronomije za srednješolce. Predavanja iz fizike naj bodo opremljena z demonstracijskimi eksperimenti in izbrana tako, da jih bo mogoče organizirati tudi v večjih centrih izven Ljubljane.

2. Društvo podpira namen odseka za fiziko FNT, da bo organiziral študij tretje stopnje za pedagoško smer fizike (magisterij oziroma specializacija). V okviru svojih možnosti bo društvo pomagalo svojim članom, da bodo lahko izkoristili predlagano možnost za strokovno izpopolnjevanje (s predlogi za študijski dopust, za štipendije oziroma za razbremenitev učne obveznosti).

3. Društvo je začudeno ob informaciji, da namerava zavod za šolstvo SRS ob reviziji predmetnikov in učnih načrtov za osnovno šolo skrčiti število ur matematike. Smatra, da bi bila taka odločitev vseskozi nesmotrna in nesprejemljiva, ker je dovolj znano, da ima pouk matematike čedalje večji pomen. Občni zbor je v zvezi s tem problemom sprejel resolucijo, ki jo bo društvo poslalo zavodu za šolstvo SRS.

4. Društvo potrjuje stališče, ki ga je sprejelo na svojem 21. občnem zboru, da je treba z uvedbo strokovnih nazivov (mentor, pedagoški vodja, pedagoški svetnik) doseči večjo materialno in moralno stimulacijo in s tem izboljšati delo učiteljev matematike in fizike na osnovnih in srednjih šolah. V obširni razpravi so se o tem vprašanju pokazali različni pogledi zlasti glede izvedljivosti te zamisli v praksi. Zato društvo naroča upravnemu odboru, da celotno problematiko temeljito prouči z vsebinskega in organizacijskega vidika. V ta namen naj imenuje posebno strokovno komisijo.

5. Društvo meni, da bi bilo koristno pred naslednjim zveznim kongresom organizirati v Sloveniji simpozij o pouku matematike in fizike v jugoslovanskem ali celo v mednarodnem obsegu.

6. Na občnem zboru so bili omenjeni primeri, da nekatere šole ne razpisujejo nestrokovno zasadenih delovnih mest za matematiko in fiziko. Pristojni organi naj bi ponovno opozorili šole na upoštevanje zakonitosti predpisov in na smotrno kadrovske politiko pri obeh deficitarnih predmetih.

7. V zvezi z namenom, da se bo v prihodnosti izdajal list za mlade matematike, fizike in astronome, naj komisija za popularizacijo matematike in fizike prouči, ali so realne možnosti za samostojno publikacijo, ali naj se pridružimo eni od obstoječih mladinskih periodik.

8. Društvo podpira predvideno reformo pouka matematike na osnovni šoli. Vendar v tej zvezi menimo, da organizatorji reforme niso dali društvu dovolj možnosti da se vsestransko proučijo vsi problemi v zvezi z izdajo novih učbenikov, priročnikov za učitelje, temeljitega strokovnega izpopolnjevanja učiteljev in nekaterih splošnejših vprašanj, ki zadevajo tako pomembno reformo. Člani društva menijo, da je izvedba reforme, ki se bo pričela že v naslednjem šolskem letu, prenačljena in da bi bilo potrebno za pripravo osnovnošolskih učiteljev več časa. Društvo je pripravljeno, da se sestane s predstavniki zavoda za šolstvo SRS, da skupno proučimo odprta vprašanja reforme in se dogovorimo o sodelovanju pri njeni realizaciji.

9. Članarina društva se poveča od dosedanjih 10.— na 20 N din. Dodatnih 10 din naj bi omogočilo razširitev dejavnosti na področja, za katera društvo ne prejema namenskih sredstev.

Predsednik komisije za sklepe občnega zbora:
prof. Franc Galič l. r.

POSPLOŠITEV NEKATERIH IDEJ V GEOMETRIJI POVEZAVE

JANEZ RAKOVEC

MOS 50 A 99

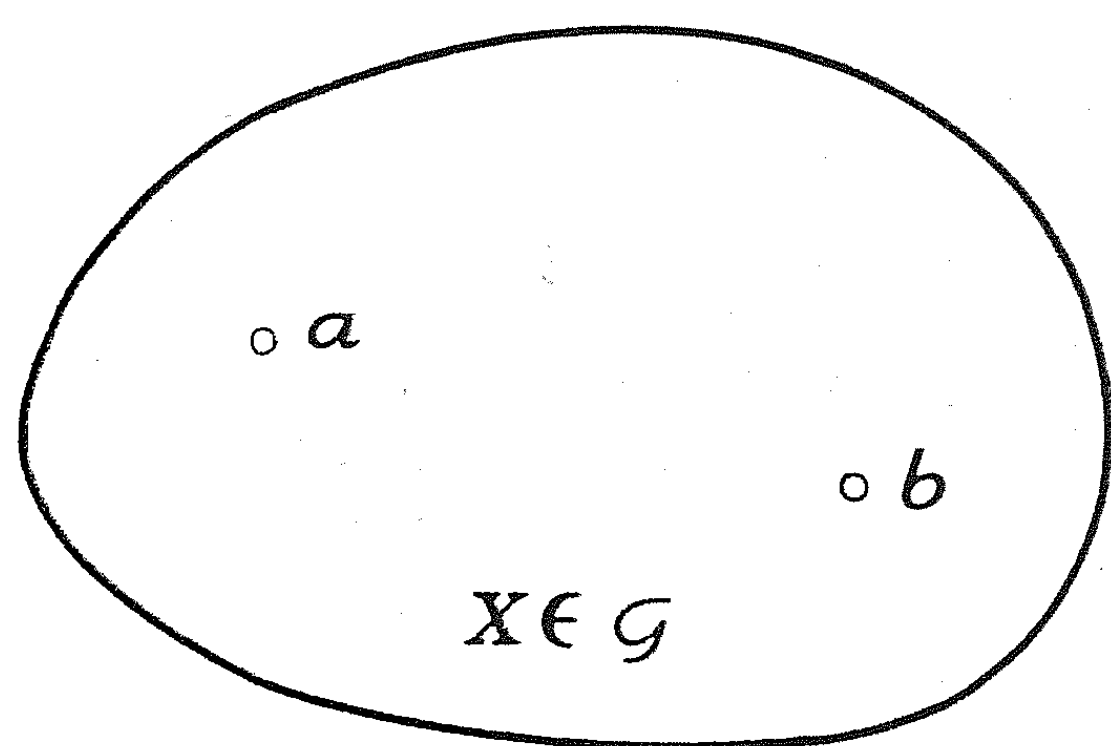
Posplošiti želim aksiome povezave v evklidski geometriji. Kot univerzum nastopa poljubna množica E z elementi (točkami) $a, b, c \dots$. Vpeljemo družino podmnožic iz $E : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P} E$. $\mathcal{G}$ imenujemo geometrijo nad E , njene elemente, npr. $A \in \mathcal{G}$, pa geometrijske množice. $\mathcal{G}$ ustreza aksiomom A 1 do A 6 (Glej spodaj!). Iz aksiomov sledijo izreki I 1 do I 13.

A GENERALIZATION OF SOME IDEAS IN GEOMETRY OF INCIDENCE

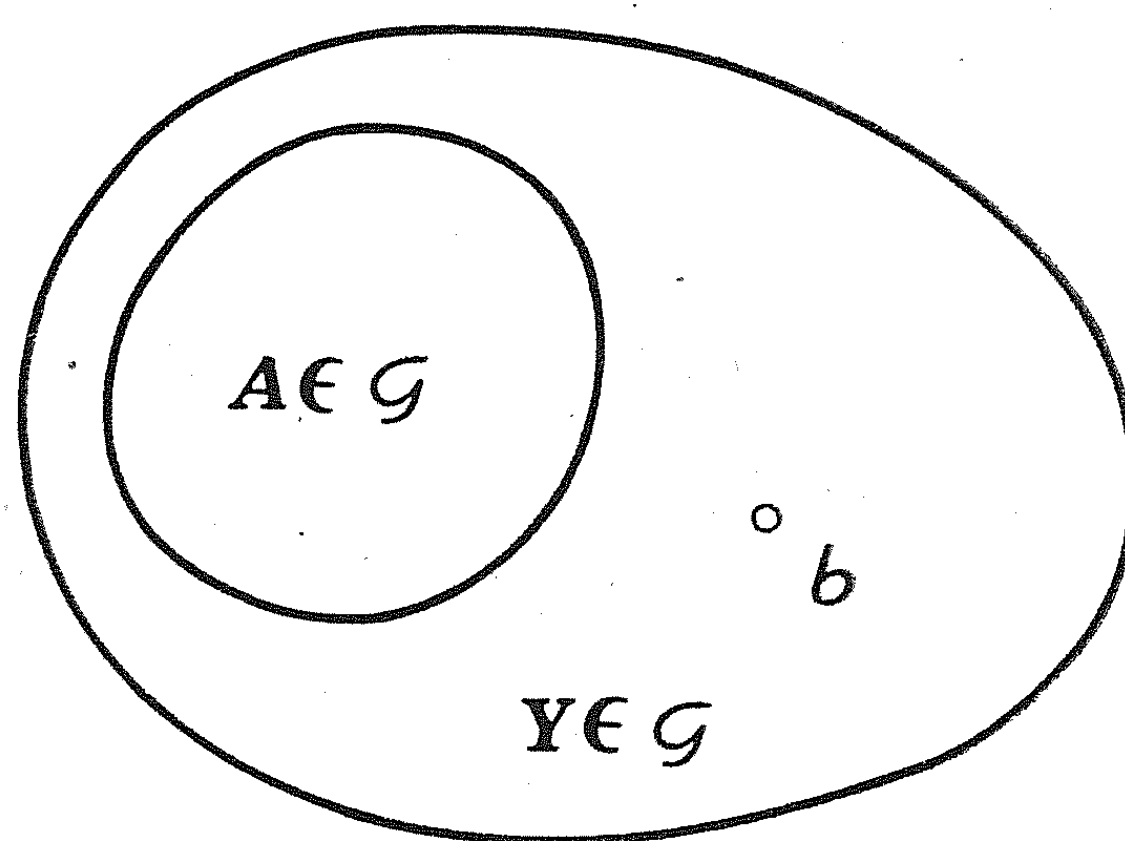
I wish to generalize the axioms of incidence in Euclidean geometry. As universe there appears any set E with elements (points) $a, b, c \dots$. We introduce a class of subsets of $E : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P} E$. $\mathcal{G}$ is called geometry on E , its elements, e.g. $A \in \mathcal{G}$ geometrical sets. $\mathcal{G}$ satisfies the axioms A 1 to A 6 (see below). From the axioms we obtain theorems such as I 1 to I 13.

Posplošitev bo imela predvsem te lastnosti: 1. Veljala bo za poljubno število razsežnosti, 2. Geometrijske tvorbe, kot so premice, ravnine, prostori..., bomo obravnavali s skupnim pojmom »geometrijske množice«, 3. Te geometrijske množice ne bodo več kot premice in ravnine enolično določene z dvema oziroma s tremi točkami — podobne bodo bolj krivuljam in ukrivljenim ploskvam.

Najprej vpeljemo v običajni geometriji premice, ravnine in prostore kot množice točk. Odnos sovpadanja (incidence) opišemo z odnosom pripadnosti oziroma vsebovanja: $\in$, $\subseteq$. Primer: $a \in A$ (točka a leži na premici A), $A \subset B$ (premica A je prava podmnožica ravnine B , to je, leži na njej). Če ne bi posebej povedali, ne bi mogli vedeti, da A pomeni premico in B ravnino. Odslej nas to niti ne zanima, saj bomo geometrijske tvorbe obravnavali enotno, s skupnim pojmom — kot geometrijske množice.



Sl. 1



Sl. 2

Izberemo si poljubno množico E za univerzum. Zanimali se bomo le za točke (elemente) množice E , npr. $a \in E$. Izmed množic obravnavamo tudi le podmnožice iz E , npr. $A \subseteq E$ ali $A \in \mathcal{P} E$. Končno izberemo posebno družino teh množic: $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P} E$, ki jo imenujemo geometrijo nad E . $(E, \mathcal{G})$ je geometrijski prostor, elementi iz $\mathcal{G}$ pa geometrijske množice, npr. $A \in \mathcal{G}$. Za geometrijo $\mathcal{G}$ veljajo naslednji

Aksiomi

A 1

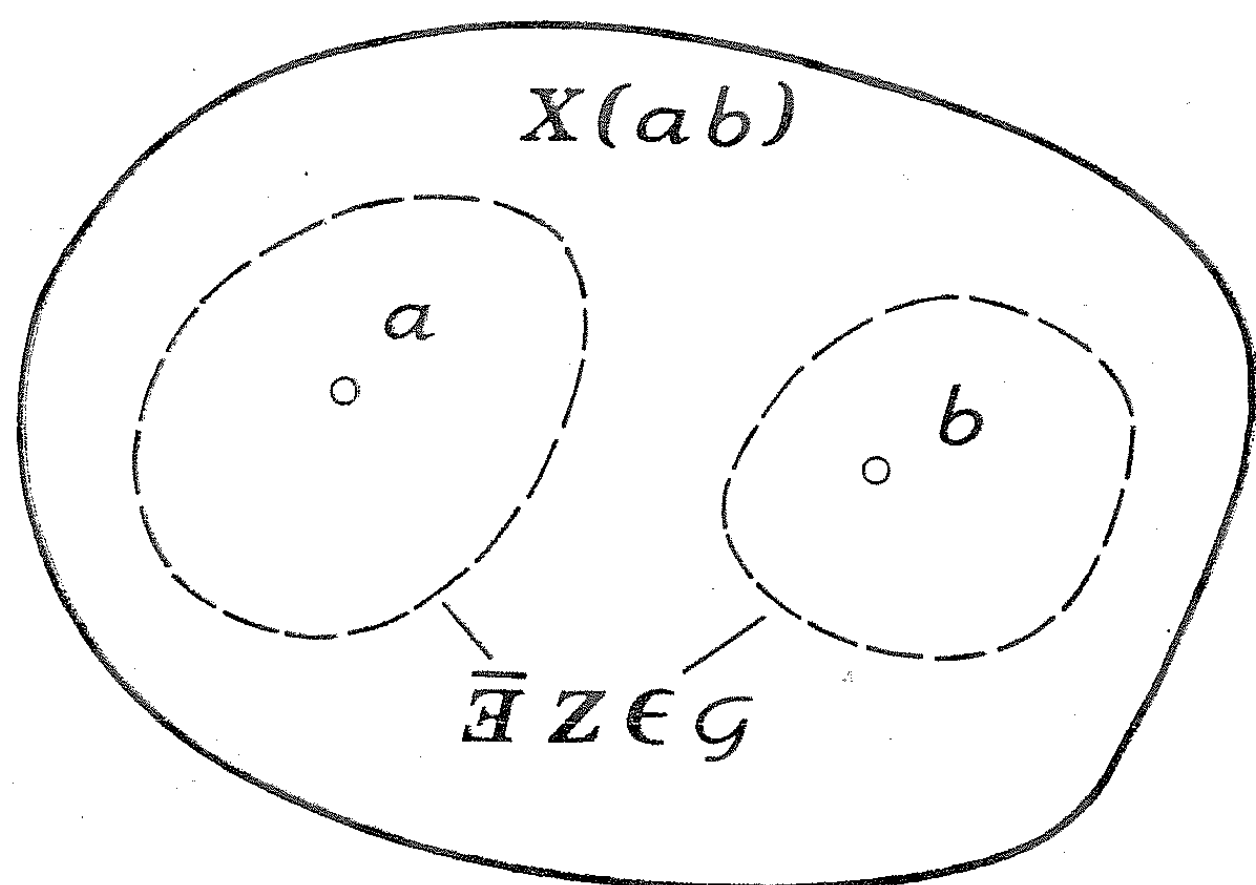
$$(\forall a) (\forall b) (a \neq b \Rightarrow (\exists X \in \mathcal{G}) (a \in X \& b \in X)) \quad (\text{Sl. 1})$$

A 2

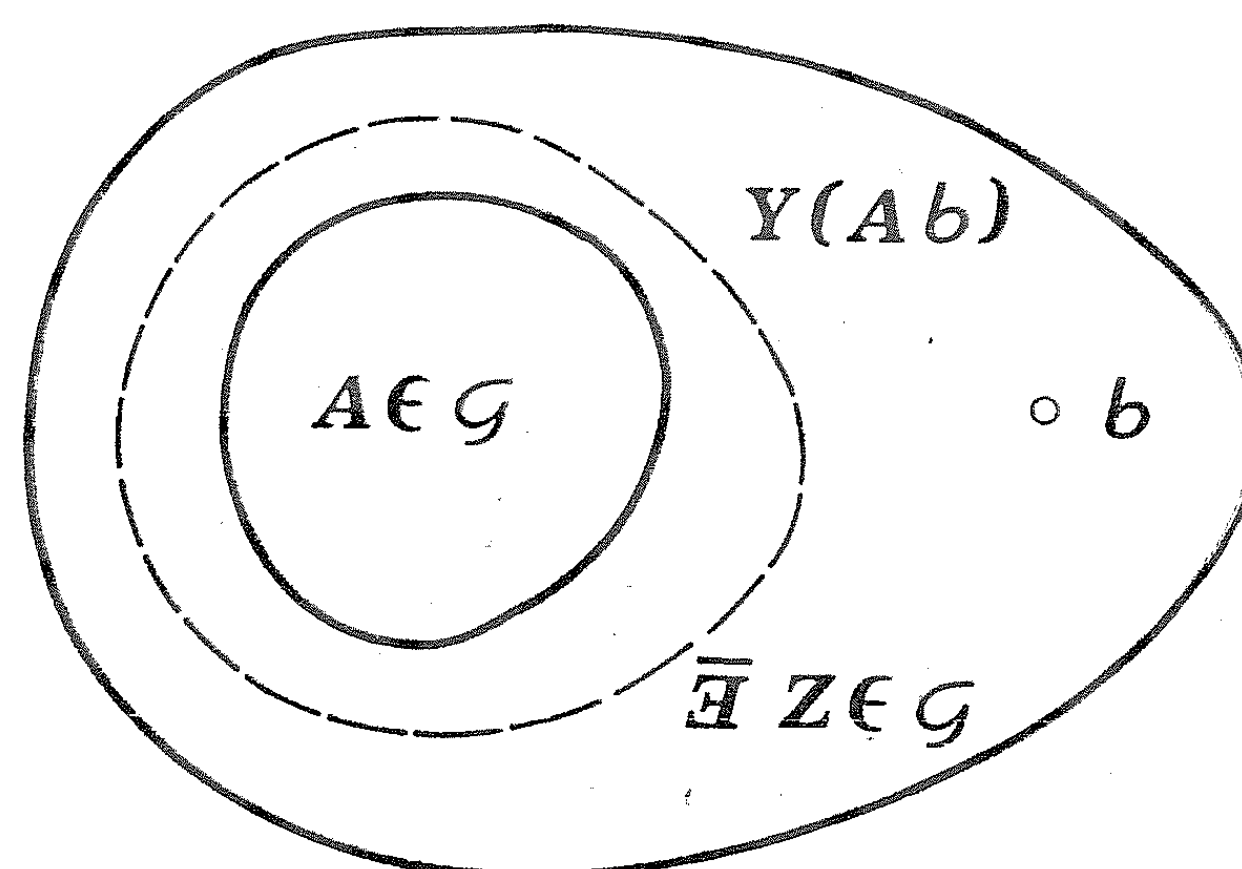
$$(\forall A \in \mathcal{G}) (\forall b) (b \notin A \Rightarrow (\exists Y \in \mathcal{G}) (A \subset Y \& b \in Y)) \quad (\text{Sl. 2})$$

Za dve različni točki (seveda iz E) obstaja taka g(eometrijska) množica, da ju vsebuje.
— Za g. množico in točko izven nje obstaja taka g. množica, da ju vsebuje obedve.

Seveda ni rečeno, da tvorijo množice, narisane kot krivočrtni liki, res geometrijo. Tako so narisane zaradi nazornosti, čeprav geometrijskim množicam bolj ustrezajo krivulje in ploskve. — Če je ves prostor E geometrijska množica (kar ni nujno), sta aksioma A 1 in A 2 takoj izpolnjena.



Sl. 3



Sl. 4

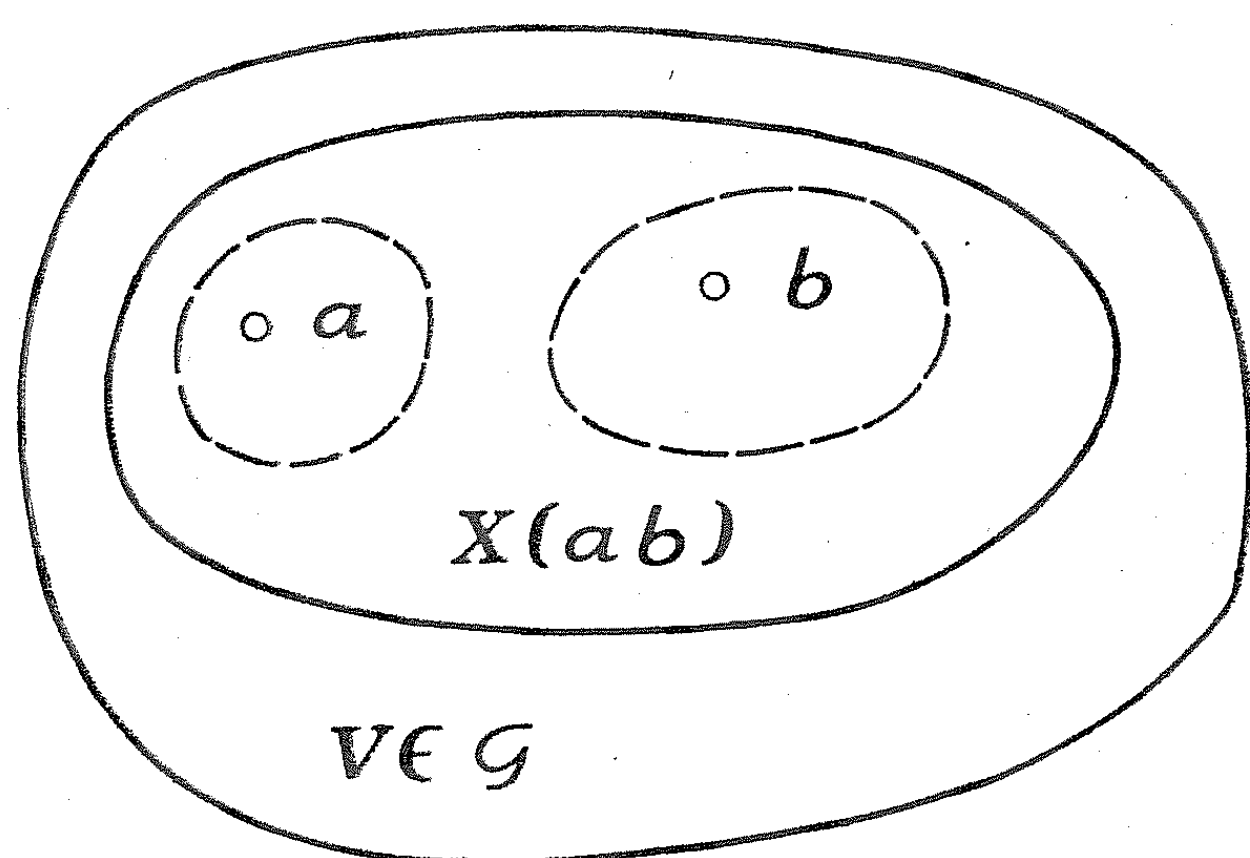
Definiramo še osnovno povezavo dveh različnih točk a, b : $X(ab)$ in osnovno povezavo g. množice A in točke b izven nje: $X(Ab)$.

D 1

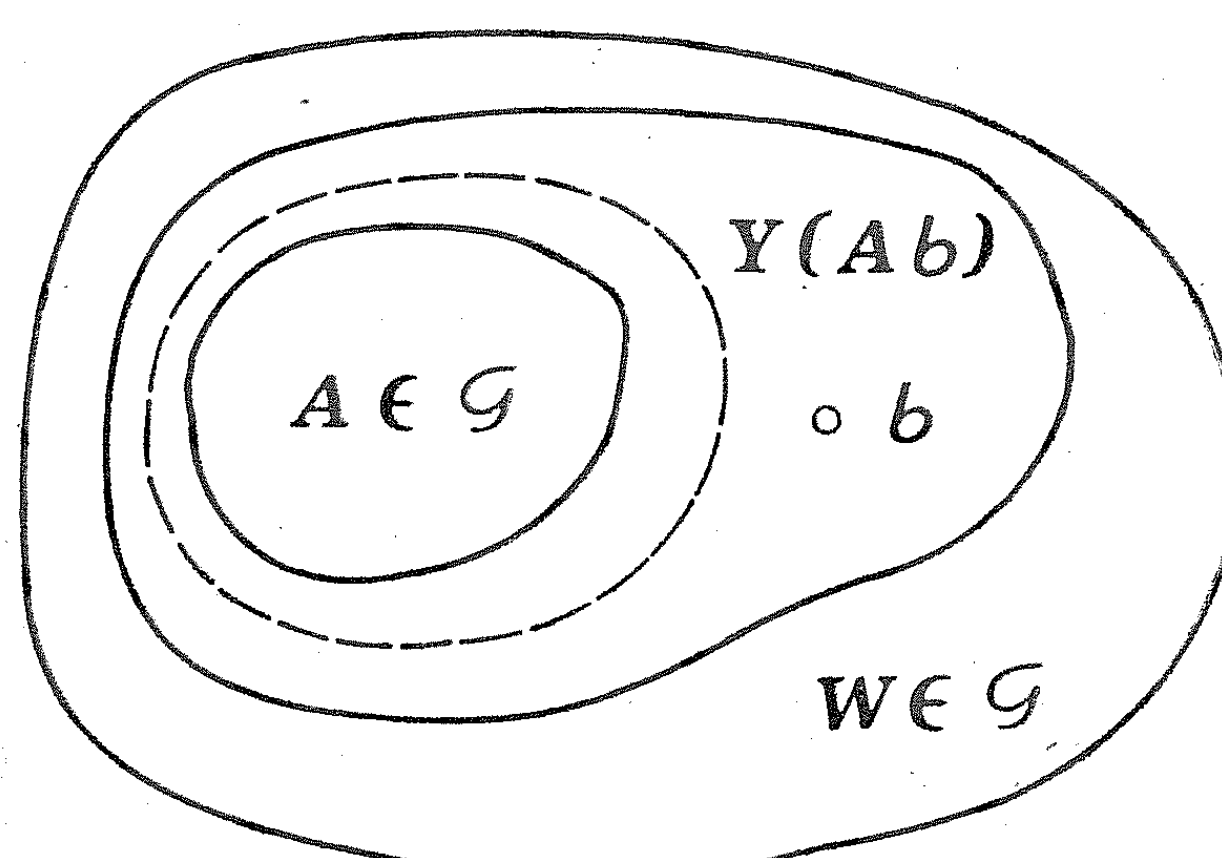
$$X = X(ab) \Leftrightarrow X \in \mathcal{G} \& a \neq b \& a \in X \& b \in X \& (\bar{\exists} Z \in \mathcal{G}) (Z \subset X \& (a \in Z \vee b \in Z)) \quad (\text{Sl. 3})$$

D 2

$$X = X(Ab) \Leftrightarrow X \in \mathcal{G} \& A \in \mathcal{G} \& b \notin A \& A \subset X \& b \in X \& (\bar{\exists} Z \in \mathcal{G}) (Z \subset X \& A \subset Z) \quad (\text{Sl. 4})$$



Sl. 5



Sl. 6

$X(ab)$ je g. množica, ki vsebuje točki a in b , nima pa nobene prave g. podmnožice, ki bi vsebovala a , niti take, ki bi vsebovala b . (Črtkano smo na sliki označili take g. množice, ki ne eksistirajo.) — $X(Ab)$ je g. množica, ki vsebuje g. množico A in točko b , nima pa nobene prave g. podmnožice, ki bi vsebovala A kot pravo podmnožico.

A 3

$$(\forall a)(\forall b)(\forall V \in \mathcal{G})(a \neq b \& a \in V \& b \in V \Rightarrow (\exists X \in \mathcal{G})(X \subseteq V \& X = X(ab)))$$

(Sl. 5)

A 4

$$(\forall A \in \mathcal{G})(\forall b)(\forall W \in \mathcal{G})(b \notin A \& A \subset W \& b \in W \Rightarrow (\exists Y \in \mathcal{G})(Y \subseteq W \& Y = Y(Ab)))$$

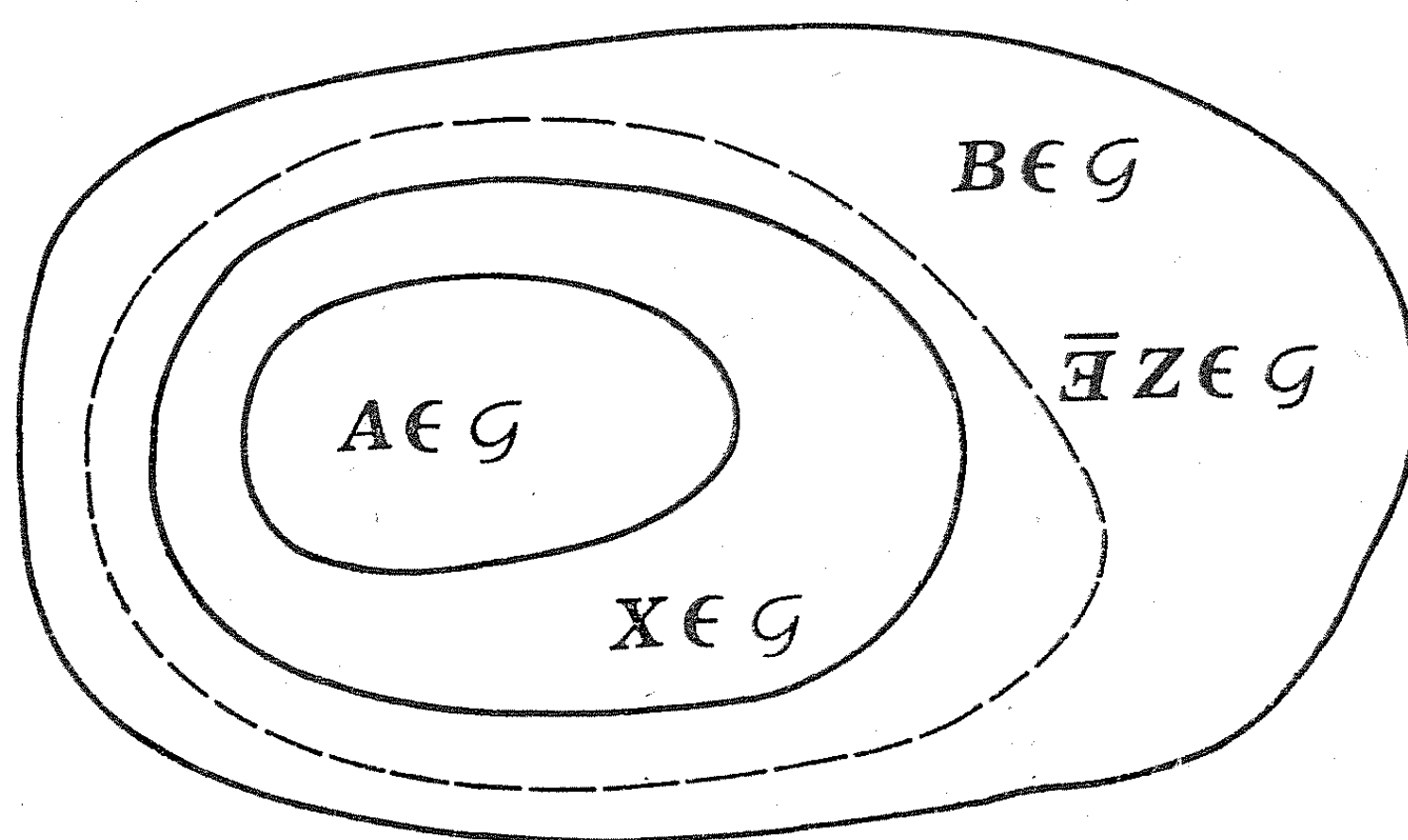
(Sl. 6)

Če g. množica V vsebuje dve različni točki, obstaja taka osnovna povezava obeh točk, da je podmnožica množice V . — Če g. množica W vsebuje g. množico A in točko b izven nje, pa obstaja taka osnovna povezava A in b , da je podmnožica množice W . — Če upoštevamo še aksioma A 1 in A 2, smo obstoj osnovnih povezav zagotovili.

A 5

$$(\forall A \in \mathcal{G})(\forall B \in \mathcal{G})(A \subset B \Rightarrow (\exists X \in \mathcal{G})(A \subseteq X \& X \subset B \& (\exists Z \in \mathcal{G})(X \subset Z \& Z \subset B)))$$

(Sl. 7)



Sl. 7

Naj bo A prava g. podmnožica g. množice B ! Potem obstaja taka g. množica X , ki vsebuje A in je hkrati maksimalna prava g. podmnožica B .

A 6

$$(\forall X \in \mathcal{G})(X \neq \emptyset)$$

Vse g. množice so neprazne.

Ti aksiomi veljajo za poljubno število razsežnosti, saj lahko vsaki g. množici, ki ni enaka vsemu prostoru, očrtamo g. množico, ki jo vsebuje. — Osnovne povezave kot $X(ab)$ in $Y(Ab)$ niso enolično določene z a in b oziroma A in B . Če upoštevamo še naš novi skupni pojem geometrijske množice, smo zadostili vsem trem zahtevam, omenjenim v začetku. — S posplošitvijo smo še poudarili nekatere ideje v geometriji povezave. Kot v običajni geometriji premice in ravnine imajo tu g. množice vlogo povezovanja. Vedno lahko najdemo najboljšo — osnovno povezavo, in to v okviru vsake g. množice, ki že povezuje točki oziroma g. množico in točko. Iz A 5 bomo še izpeljali, da je vsaka g. množica osnovna povezava dveh različnih točk ali g. množice in točke izven nje.

Modeli geometrije

Najbolj znan model naše posplošene geometrije je struktura, podana z aksiomi sovpadanja v evklidski geometriji. Premice, ravnine in prostor so res neprazne množice. Premica je osnovna povezava dveh točk, ravnina pa osnovna povezava premice in točke izven nje. Premica je maksimalna g. podmnožica ravnine, ravnina prav tako maksimalna g. podmnožica prostora. Še bliže naši posplošitvi pridemo, če namesto premic vzamemo krivulje, namesto ravnin pa ploskve: povezave zdaj niso več enolične.

Še preprosti primeri geometrije: Če je prostor E prazen ali ima le eno točko, vzamemo $\mathcal{G} = \emptyset$; če ima E vsaj dve točki, pa se obneseta geometriji $\mathcal{G} = \{E\}$ in $\mathcal{G} = \{X; X \in \mathcal{P} E \& (\exists x) (\exists y) (x \neq y \& x \in X \& y \in X)\}$. — Kadar E nima niti dveh točk, ni treba nobenih povezav, zato je $\mathcal{G}$ prazna. Če ima E vsaj dve točki, je lahko E sam edina g. množica, saj je tedaj E osnovna povezava za vsaki dve svoji točki. Lahko pa so g. množice vse take podmnožice E , ki imajo vsaj dve različni točki. Tedaj je na primer: $X(ab) = \{a\} \cup \{b\}$, $Y(Ab) = A \cup \{b\}$.

Preprosti izreki

Odslej se omejimo na prostore z vsaj dvema različnima točkama. Tedaj za vsako točko obstaja g. množica, ki jo vsebuje in je minimalna izmed vseh g. množic, ki jo vsebujejo (to je kar osnovna povezava te točke z neko drugo točko). Zanimivejši pa so tile izreki:

I 1

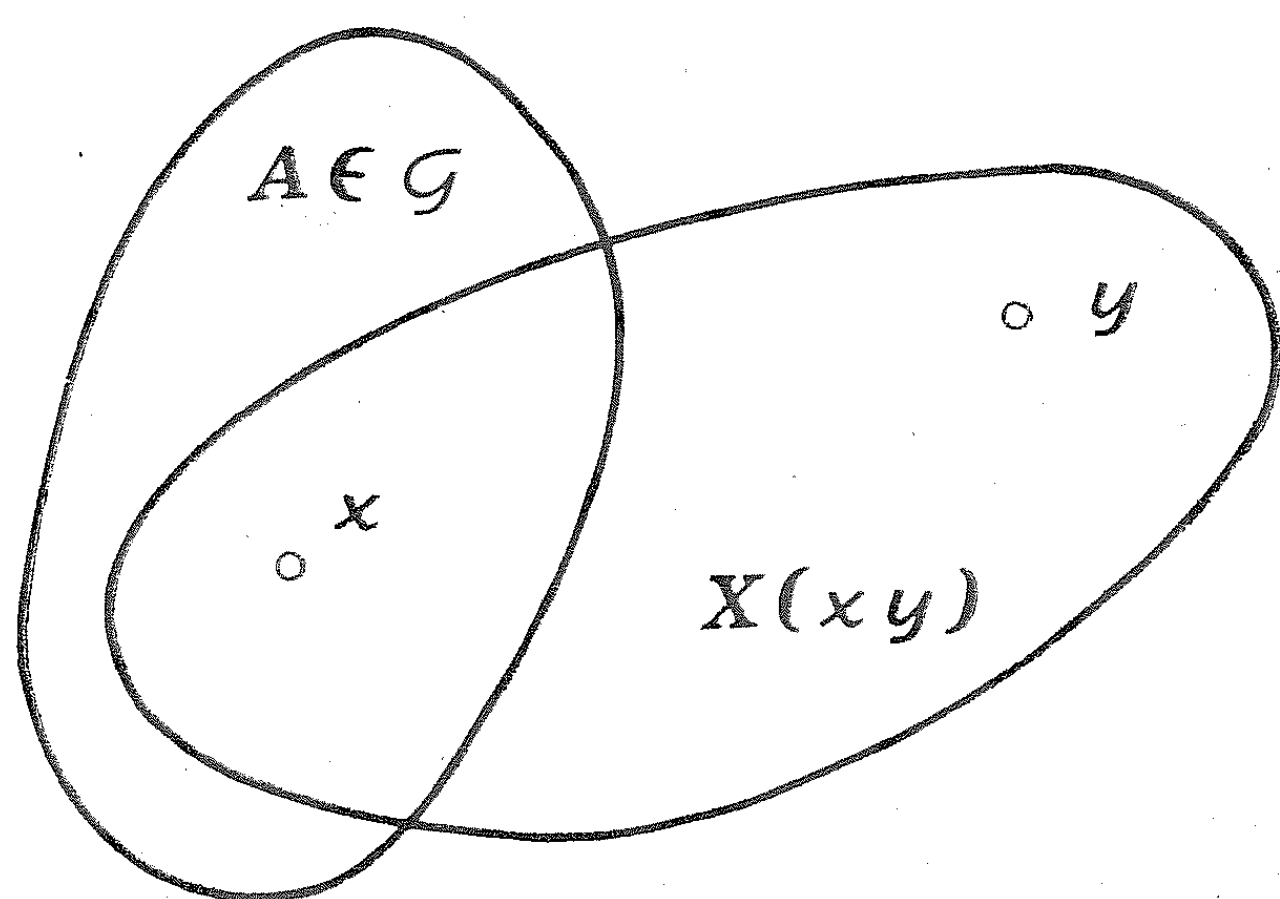
$$(\forall X \in \mathcal{G}) (\exists a) (\exists b) (a \neq b \& a \in X \& b \in X) \quad (\text{po A 1, A 3})$$

Vsaka g. množica ima vsaj dve različni točki. — Če bi veljalo za neko točko $x: \{x\} \in \mathcal{G}$, bi moralo biti: $\{x\} \subset X(xy)$, kjer $x \neq y$. To pa ni mogoče, ker je $X(xy)$ osnovna povezava dveh točk.

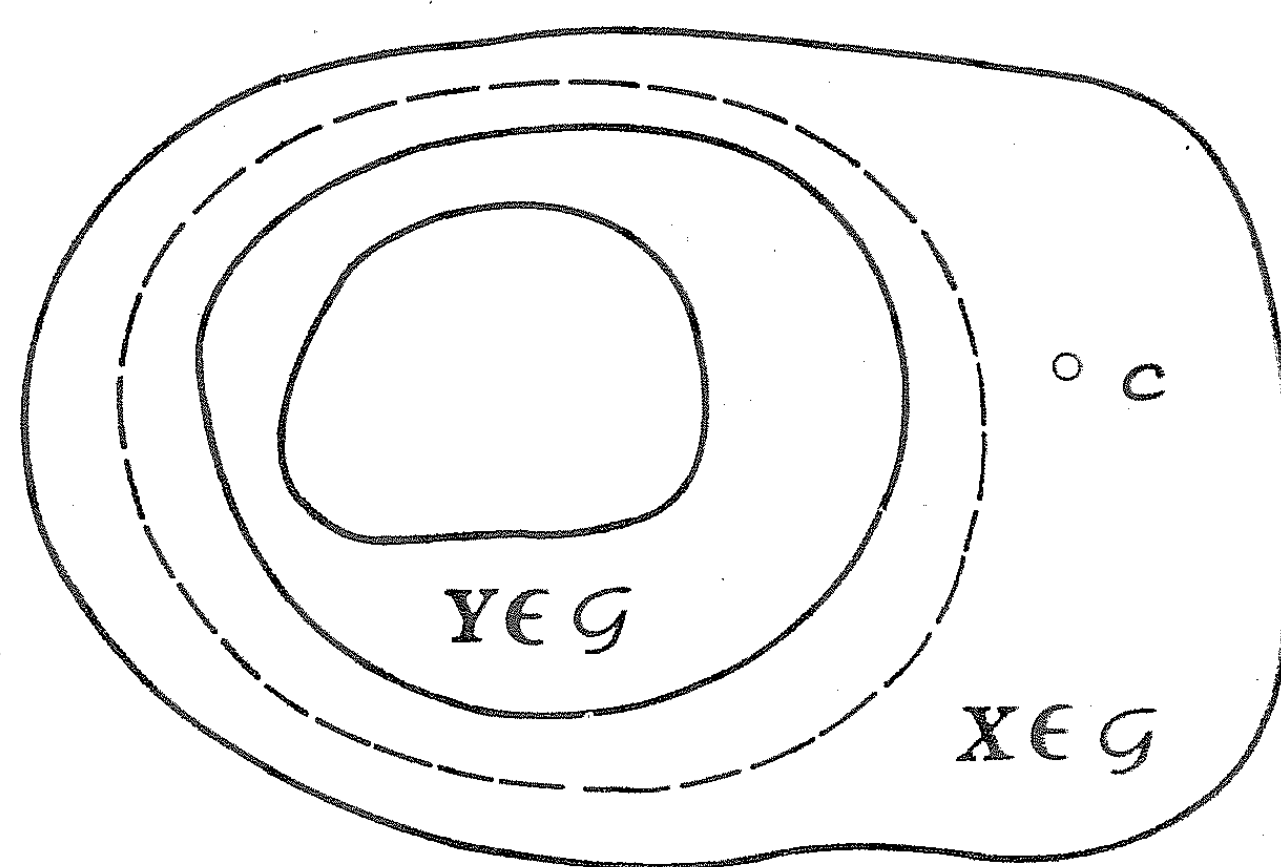
I 2

$$(\forall A \in \mathcal{G}) (\overline{(\forall X \in \mathcal{G}) (X \neq A \Rightarrow A \subset X)}) \quad (\text{po A 1, A 3}) \quad (\text{Sl. 8})$$

Nobena g. množica ni prava podmnožica vseh ostalih g. množic. — Če je g. množica A enaka vsemu prostoru, izrek očitno velja. Sicer pa lahko izberemo točki $x \in A$ in $y \notin A$; $X(xy)$ je že taka g. množica, ki ne vsebuje A , saj je $X(xy)$ osnovna povezava dveh točk.



Sl. 8



Sl. 9

I 3

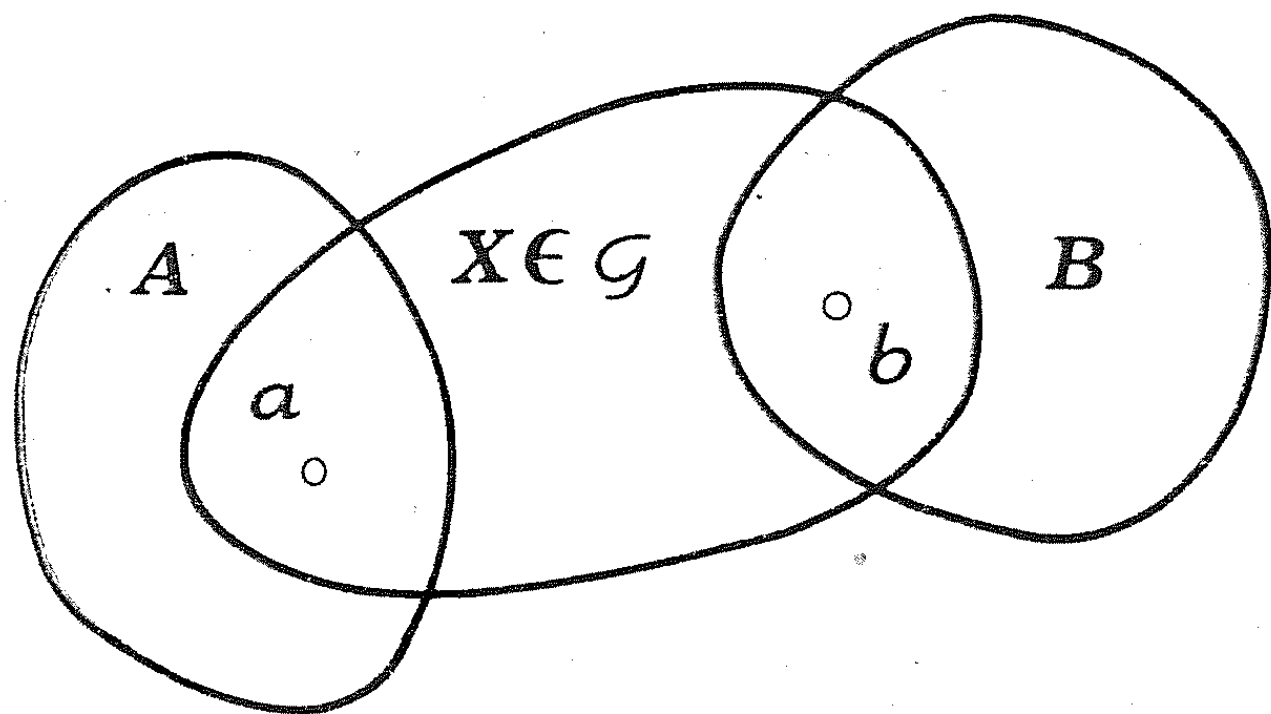
$$(\forall X \in \mathcal{G}) ((\forall a) (\forall b) (a \neq b \& a \in X \& b \in X \Rightarrow X = X(ab))) \vee ((\exists Y \in \mathcal{G}) (\exists c) (c \notin Y \& X = X(Yc))) \quad (\text{po A 5}) \quad (\text{Sl. 9})$$

Poljubna g. množica je bodisi osnovna povezava vsakih dveh svojih točk, bodisi neke g. množice in točke izven le-te. — Če namreč prva možnost ni izpolnjena, ima X vsaj eno pravo g. podmnožico. Tej očrtamo Y , maksimalno g. podmnožico X ; izberemo točko c , da je $c \in X - Y$. Tedaj je X osnovna povezava za Y in c .

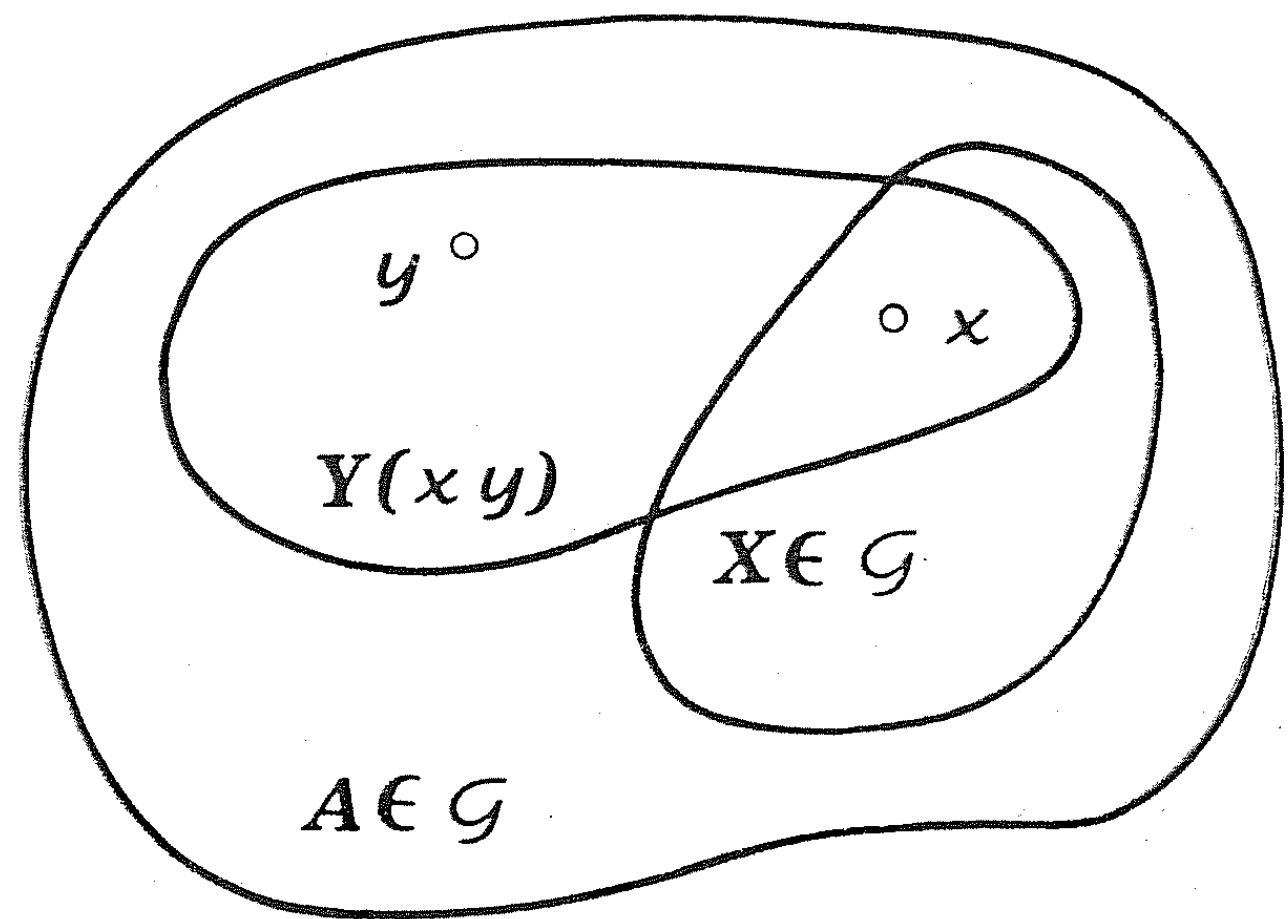
I 4

$$(\forall A \in \mathcal{P} E) (\forall B \in \mathcal{P} E) (\exists X \in \mathcal{G}) (A \cap X \neq \emptyset \& B \cap X \neq \emptyset) \quad (\text{po A 1}) \quad (\text{Sl. 10})$$

Za poljubni podmnožici prostora lahko najdemo tako g. množico, da ju seka. — V množicah A in B izberemo točki $a \in A$ in $b \in B$; najdemo pa lahko g. množico, ki vsebuje a in b in s tem seka A in B .



Sl. 10



Sl. 11

I 5

$$(\forall A \in \mathcal{G}) ((\exists X \in \mathcal{G}) (X \subset A) \Rightarrow (\exists Y \in \mathcal{G}) (X \neq Y \& Y \subset A)) \quad (\text{po A 1, A 3}) \quad (\text{Sl. 11})$$

Če ima g. množica pravo g. podmnožico, ima vsaj še eno, od te različno, pravo g. podmnožico.

Če je X prava g. podmnožica A , izberemo točki $x \in X$ in $y \in A - X$. Osnovna povezava $Y(xy) \subset A$ je prava podmnožica A in različna od X .

I 6

$$(\forall X \in \mathcal{G}) (\forall K \in \mathcal{P} E) (K \text{ končna} \Rightarrow (\exists Y \in \mathcal{G}) (X \cup K \subseteq Y)) \quad (\text{po A 2})$$

Unija g. množice X in poljubne množice K je obsežena v neki g. množici. — Naj bo $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ dana končna množica. Najprej poiščemo g. množico Y_1 , da bo $X \cup \{k_1\} \subseteq Y_1$, nato g. množico Y_2 , da bo $Y_1 \cup \{k_2\} \subseteq Y_2$ in s tem $X \cup \{k_1\} \cup \{k_2\} \subseteq Y_2$ itd.

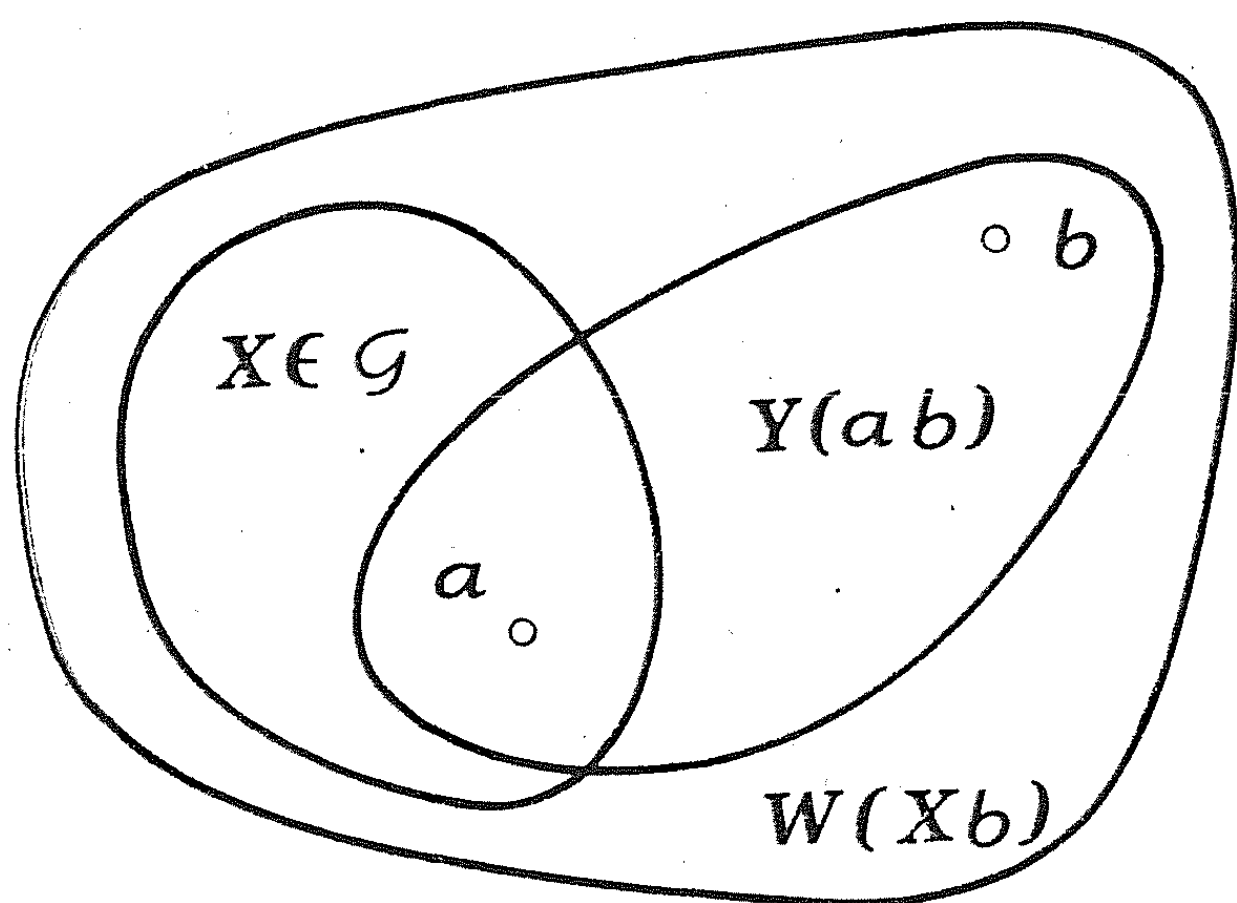
Unije in preseki

Nekaj izrekov o unijah in presekih g. množic:

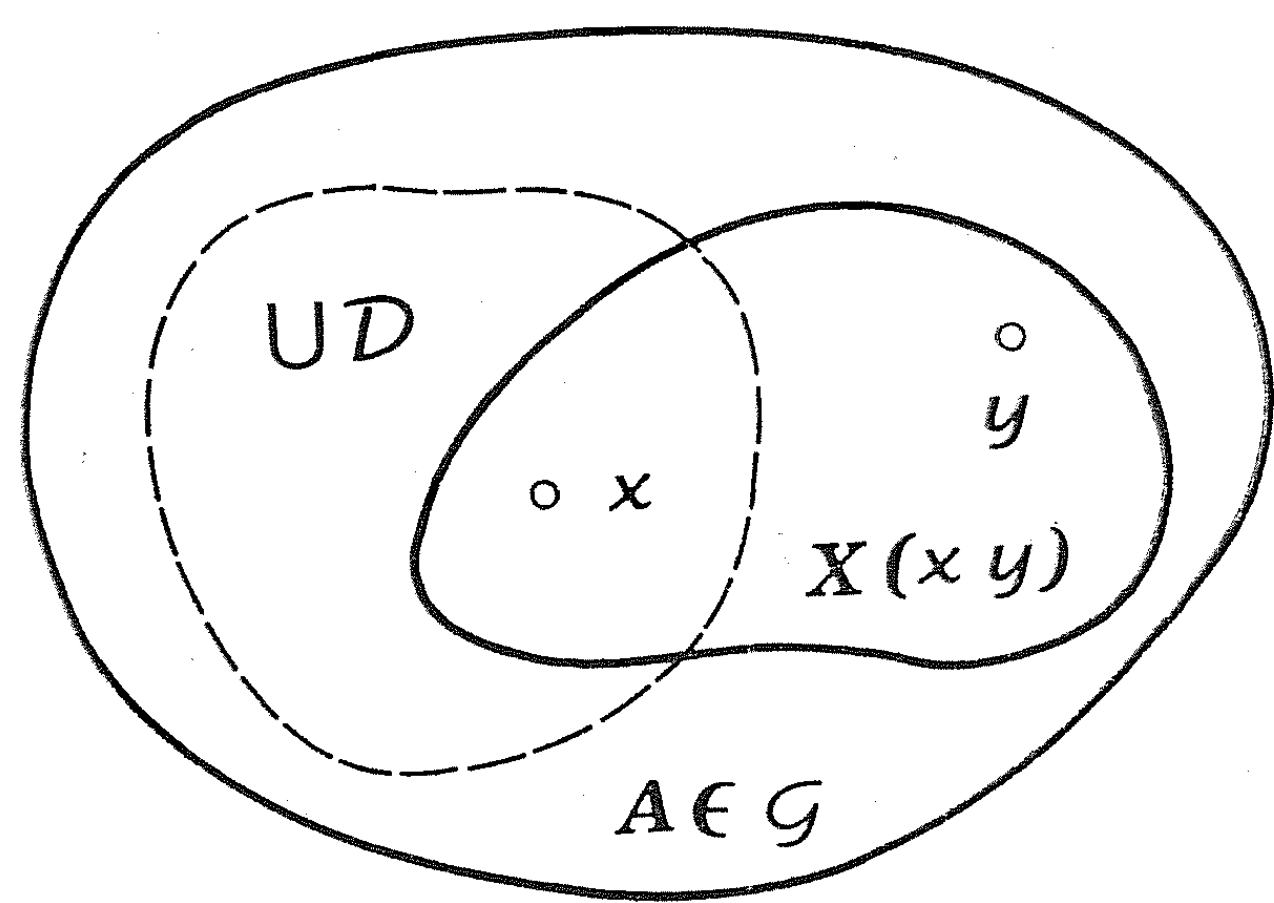
I 7

$$(\forall X \in \mathcal{G}) (\exists Y \in \mathcal{G}) (\exists W \in \mathcal{G}) (X \cup Y \subseteq W \& (\exists Z \in \mathcal{G}) (X \cup Y \subset Z \& Z \subset W)) \\ (\text{po A 1 do A 4}) \quad (\text{Sl. 12})$$

Vsaki g. množici X lahko priredimo g. množici Y in W , da bo $X \cup Y \subseteq W$ in bo W minimalna izmed vseh g. množic, ki vsebujejo $X \cup Y$. — Če je dana $X \in \mathcal{G}$, lahko izberemo



Sl. 12



Sl. 13

točki $a \in X$ in $b \notin X$. Tvorimo osnovni povezavi $W(Xb)$ in $Y(ab) \subset W(Xb)$. W res obsega $X \cup Y$ in to minimalno, saj je W že minimalna izmed vseh tistih g. množic, ki vsebujejo X .

I 8

$$(\forall A \in \mathcal{G}) (\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{G}; X \subset A\} \& \mathcal{D} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup \mathcal{D} = A) \quad (\text{po A 1, A 3}) \quad (\text{Sl. 13})$$

Unija vseh pravih g. podmnožic neke g. množice A je kar enaka A (če seveda ima A sploh kakšno pravo g. podmnožico). — $\bigcup \mathcal{D}$ — unija vseh pravih g. podmnožic A — je seveda vsebovana v A . Pa recimo, da $\bigcup \mathcal{D} \neq A$, to je $\bigcup \mathcal{D} \subset A$ (prava podmnožica A)! Izberemo lahko točki $x \in \bigcup \mathcal{D}$ in $y \in A - \bigcup \mathcal{D}$. Obstaja osnovna povezava $X(xy) \subset A$, pri čemer je tudi: $X(xy) \not\subseteq \bigcup \mathcal{D}$, saj $y \notin \bigcup \mathcal{D}$. S tem pa $\bigcup \mathcal{D}$ ne bi bila unija vseh pravih g. podmnožic A — Dobili smo protislovje.

I 9

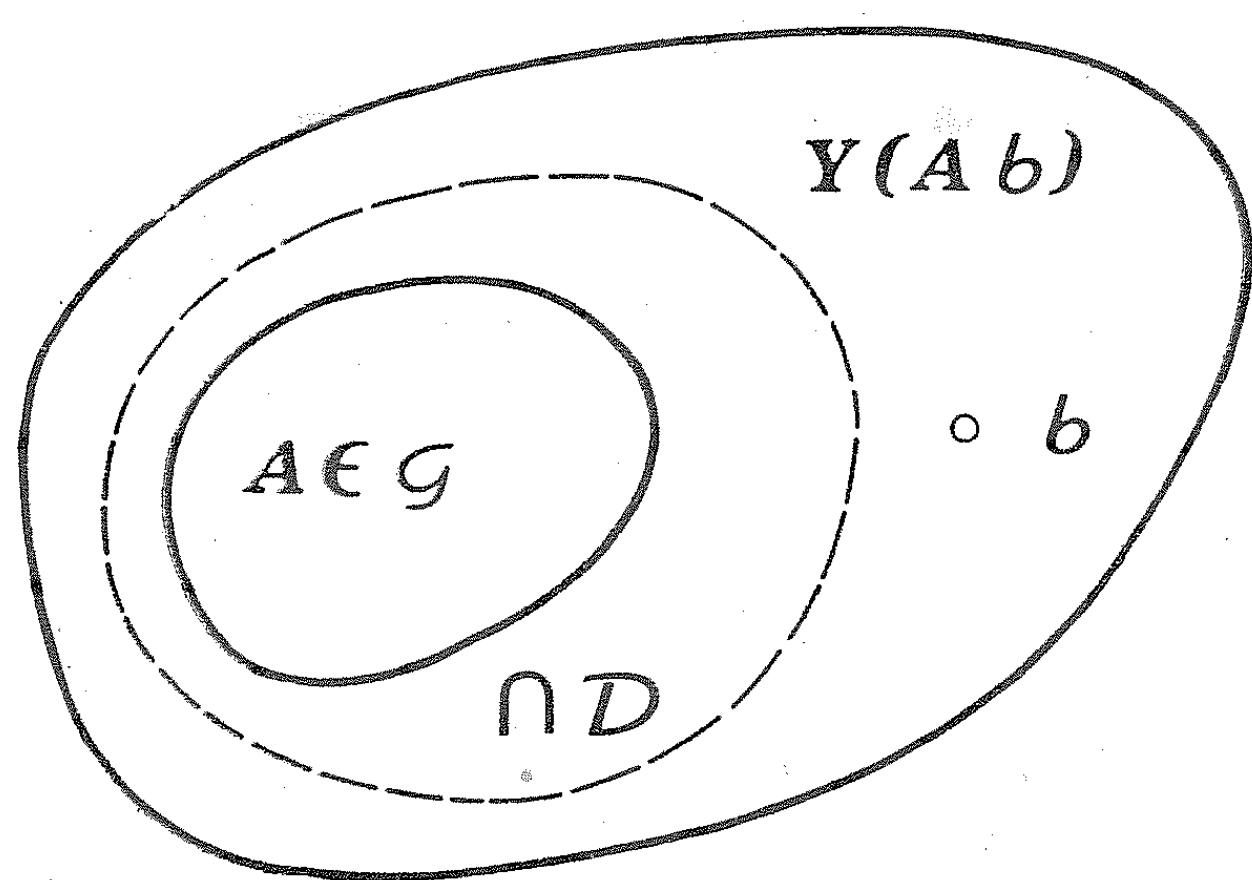
$$(\forall a) (\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{G}; a \in X\} \& \mathcal{D} \neq \{E\} \Rightarrow \bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{G}) \quad (\text{po A 1, A 3})$$

Presek vseh takih g. množic, ki vsebujejo dano točko a , ni g. množica (če le ni $\mathcal{D} = \{E\}$). — Presek $\bigcap \mathcal{D}$ vsebuje a : $a \in \bigcap \mathcal{D}$. Naj bo $\bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{G}$! Če vzamemo poljubno točko $b \notin \bigcap \mathcal{D}$ in $X(ab)$, velja: $\bigcap \mathcal{D} \subset X(ab)$, saj je tudi $X(ab) \in \mathcal{D}$. Vendar ni mogoče, da bi veljalo: $a \in \bigcap \mathcal{D} \subset X(ab)$, ker je $X(ab)$ osnovna povezava dveh točk — Dobili smo protislovje.

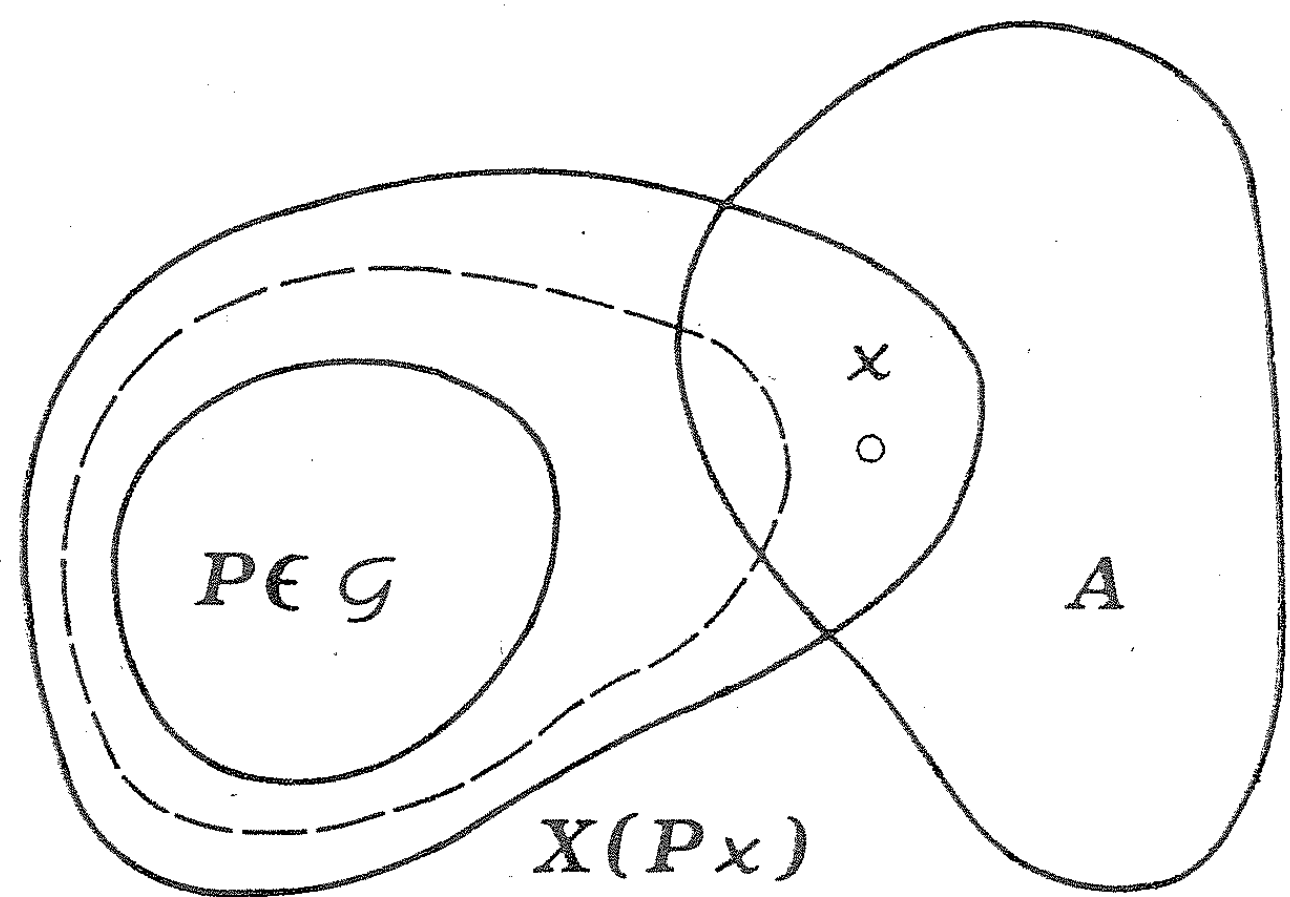
I 10

$$(\forall A \in \mathcal{G}) (\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{G}; A \subset X\} \& A \neq E \& \mathcal{D} \neq \{E\} \& \bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{G} \Rightarrow \bigcap \mathcal{D} = A) \\ (\text{po A 2, A 4}) \quad (\text{Sl. 14}).$$

Če je presek vseh g. množic, ki strogo vsebujejo dano g. množico A , tudi sam g. množica, je kar enak A (razen v dveh primerih: če je $A = E$ ali $\mathcal{D} = \{E\}$). — Velja: $A \subseteq \bigcap \mathcal{D}$. Recimo, da $\bigcap \mathcal{D}$ ni enak A : $A \subset \bigcap \mathcal{D}$. Izberimo točko $b \notin \bigcap \mathcal{D}$ in poiščimo $Y(Ab)$! Seveda je $\bigcap \mathcal{D} \subset Y(Ab)$, ker je tudi $Y(Ab) \in \mathcal{D}$. Ker je $Y(Ab)$ osnovna povezava, pa ni mogoče, da bi veljalo: $A \subset \bigcap \mathcal{D} \subset Y(Ab)$ — Dobili smo protislovje.



Sl. 14



Sl. 15

I 11

$$(\forall P \in \mathcal{G}) (\forall A \in \mathcal{P} E) (\exists X \in \mathcal{G}) (P \subseteq X \& X \cap A \neq \emptyset \& (\exists Z \in \mathcal{G}) \\ (Z \subset X \& Z \cap A \neq \emptyset \& P \subset Z)) \quad (\text{po A 2, A 4}) \quad (\text{Sl. 15}).$$

Za g. množico P in poljubno množico A obstaja taka g. množica, ki vsebuje P in seka A in je minimalna izmed vseh g. množic, ki vsebujejo P in sekajo A . — Vzeti je treba poljubno točko $x \in A$ in nato osnovno povezavo $X(Px)$, ki vsebuje P in seka A . $X(Px)$ je minimalna že izmed vseh tistih g. množic, ki vsebujejo P ; zato je minimalna tudi izmed tistih, ki vsebujejo P in še sekajo A .

Kot smo pravkar videli, lahko tvorimo osnovne povezave neke g. množice P z vsemi točkami poljubne množice A . Vpeljemo *družino presekov* za množico A glede na g. množico P :

D 3

$$\mathcal{D}(A/P) = \{D; D = A \cap X \& X \in \mathcal{G} \& (\exists a \in A) (X = X(Pa))\}$$

$\mathcal{D}(A/P)$ je družina presekov A -ja z vsemi možnimi osnovnimi povezavami $X(Pa)$, kjer je P dana g. množica, točka a pa preteče ves A (Primerjaj izrek I 11 in Sl. 15!). $\mathcal{D}(A/P)$ obstaja vedno, saj nam A 2 in A 4 zagotavljata obstoj osnovnih povezav $X(Pa)$. Če $A \neq \emptyset$, sledi: $\mathcal{D}(A/P) \neq \emptyset$. — Zanimiva sta dva izreka o družini presekov za A pri poljubnem P :

I 12

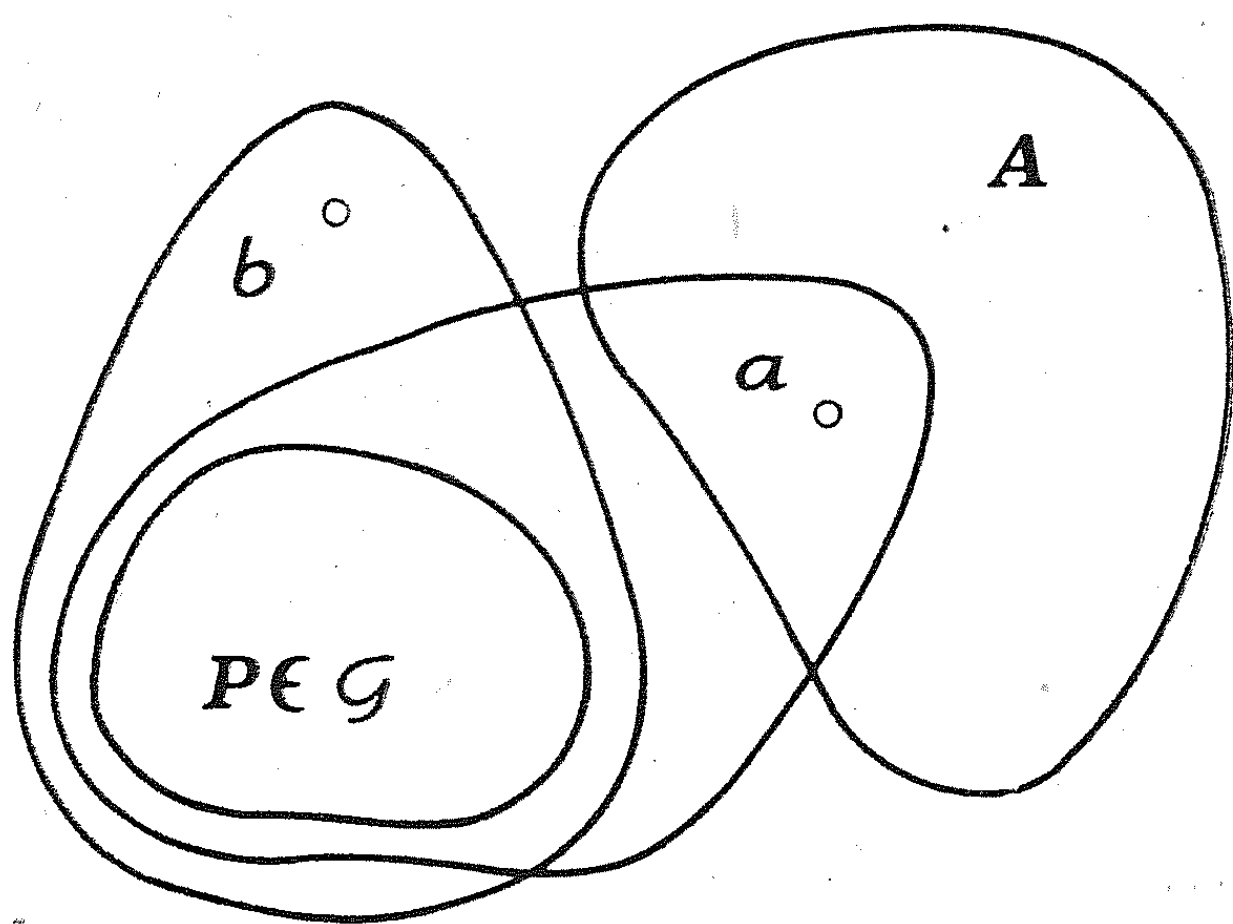
$$(\forall A \in \mathcal{P} E) (\forall P \in \mathcal{G}) (\cup \mathcal{D}(A/P) = A) \quad (\text{po A 2, A 4})$$

Unija družine presekov za množico A je kar A . — Preseki so podmnožice A , zato $\cup \mathcal{D} \subseteq A$; ker pa z njimi obidemo vse točke A , je tudi $\cup \mathcal{D} \supseteq A$ in zato $\cup \mathcal{D}(A/P) = A$.

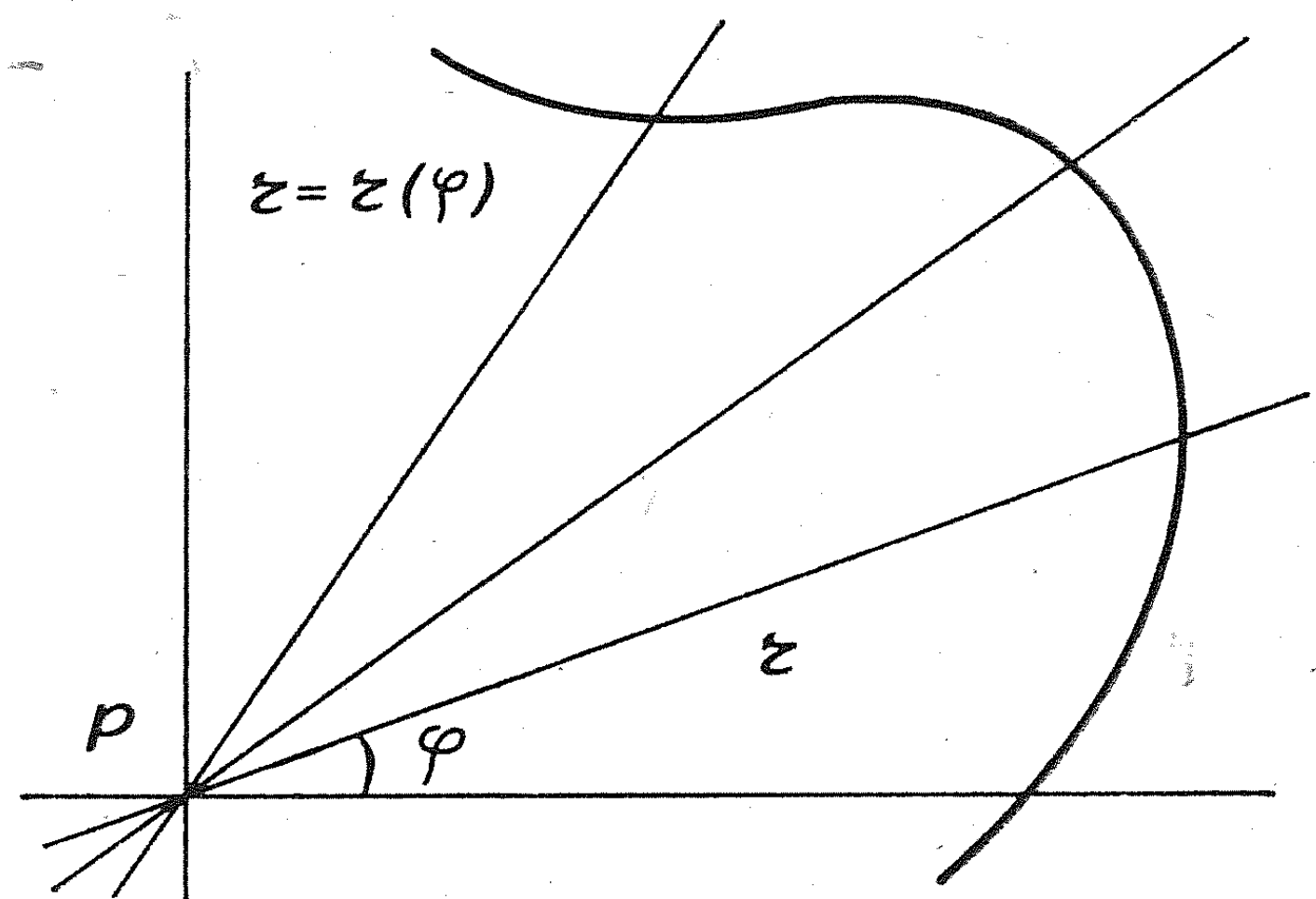
I 13

$$(\forall A \in \mathcal{P} E) (\forall B \in \mathcal{P} E) (\forall P \in \mathcal{G}) (\mathcal{D}(A/P) = \mathcal{D}(B/P) \Rightarrow A = B) \\ (\text{po A 2, A 4}) (\text{Sl. 16}).$$

Množica je s svojo družino presekov enolično določena. — Če je $B \neq A$, obstaja, na primer, vsaj ena točka $b \in B$, da je hkrati $b \notin A$. Presek osnovne povezave $X(Pb)$ z množico B vsebuje točko b ; takega preseka pa v $\mathcal{D}(A/P)$ ni, zato $B \neq A \Rightarrow \mathcal{D}(B/P) \neq \mathcal{D}(A/P)$.



Sl. 16



Sl. 17

Podobno lahko tvorimo osnovne povezave dane točke p z vsemi točkami neke množice A . Družina presekov je tedaj takale:

D 4

$$\mathcal{D}(A/p) = \{D; D = A \cap X \& X \in \mathcal{G} \& (\exists a \in A) (X = X(ap))\}$$

$\mathcal{D}$ obsega preseke A -ja z vsemi možnimi osnovnimi povezavami $X(pa)$, kjer je p dana točka, a pa preteče ves A . Dobimo analogne izreke kot za $\mathcal{D}(A/P)$. — Tudi pri krivuljah v polarnem koordinatnem sistemu z enačbo $r = r(\varphi)$ so v bistvu dani preseki premic skozi izhodišče (pol p) s krivuljo (Sl. 17). Premice skozi pol so osnovne povezave pola s točkami krivulje; ker pa lahko seka taka premica krivuljo večkrat (na obeh straneh pola), uporabljamo rajši poltrake skozi pol.

Razne podmnožice $\mathcal{G}$

Zanimive so družine, ki vsebujejo le nekaj g. množic: to so podmnožice geometrije $\mathcal{G}$:
 $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}$

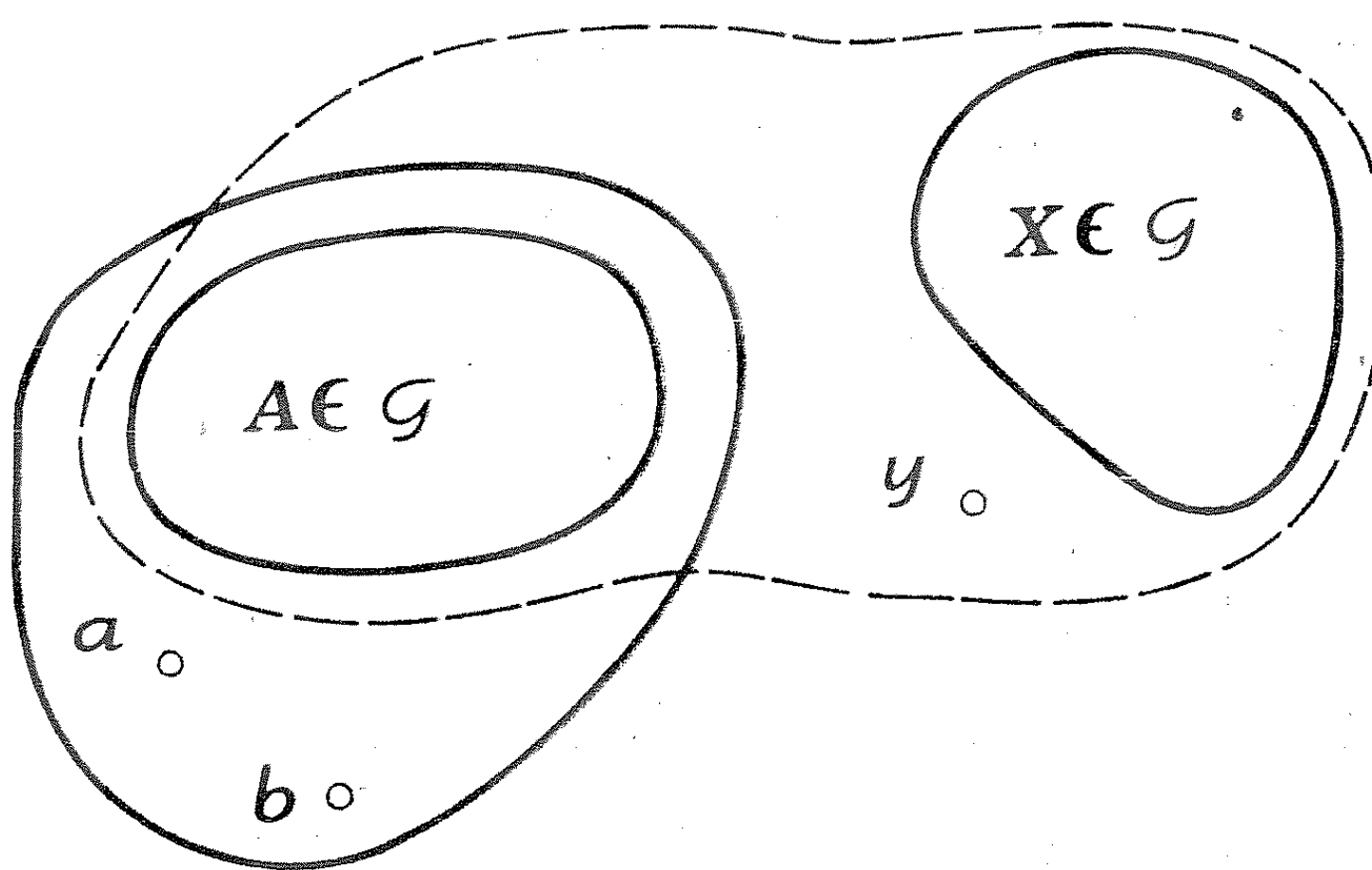
1)

Vzemimo družino $\mathcal{G}(a) \subseteq \mathcal{G}$: $\mathcal{G}(a) = \{X; X \in \mathcal{G} \text{ \& } a \in X\}$.

$\mathcal{G}(a)$ obsega vse tiste g. množice, ki vsebujejo dano točko a . Naj ne bo $\mathcal{G}(a) = \{E\}$! Tedaj po I 9 presek $\bigcap \mathcal{G}(a)$ ne more biti g. množica. $\mathcal{G}(a)$ kot družina g. množic v celotnem prostoru ustreza aksiomom A 1, A 2 (Primerjaj I 6!), A 5, A 6. V običajni geometriji je primer za $\mathcal{G}(a)$ snop premic.

2)

Podobno vpeljemo družino $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}$: $\mathcal{G}(A) = \{X; X \in \mathcal{G} \text{ \& } A \subset X \text{ \& } A \in \mathcal{G}\}$ (Sl. 18).

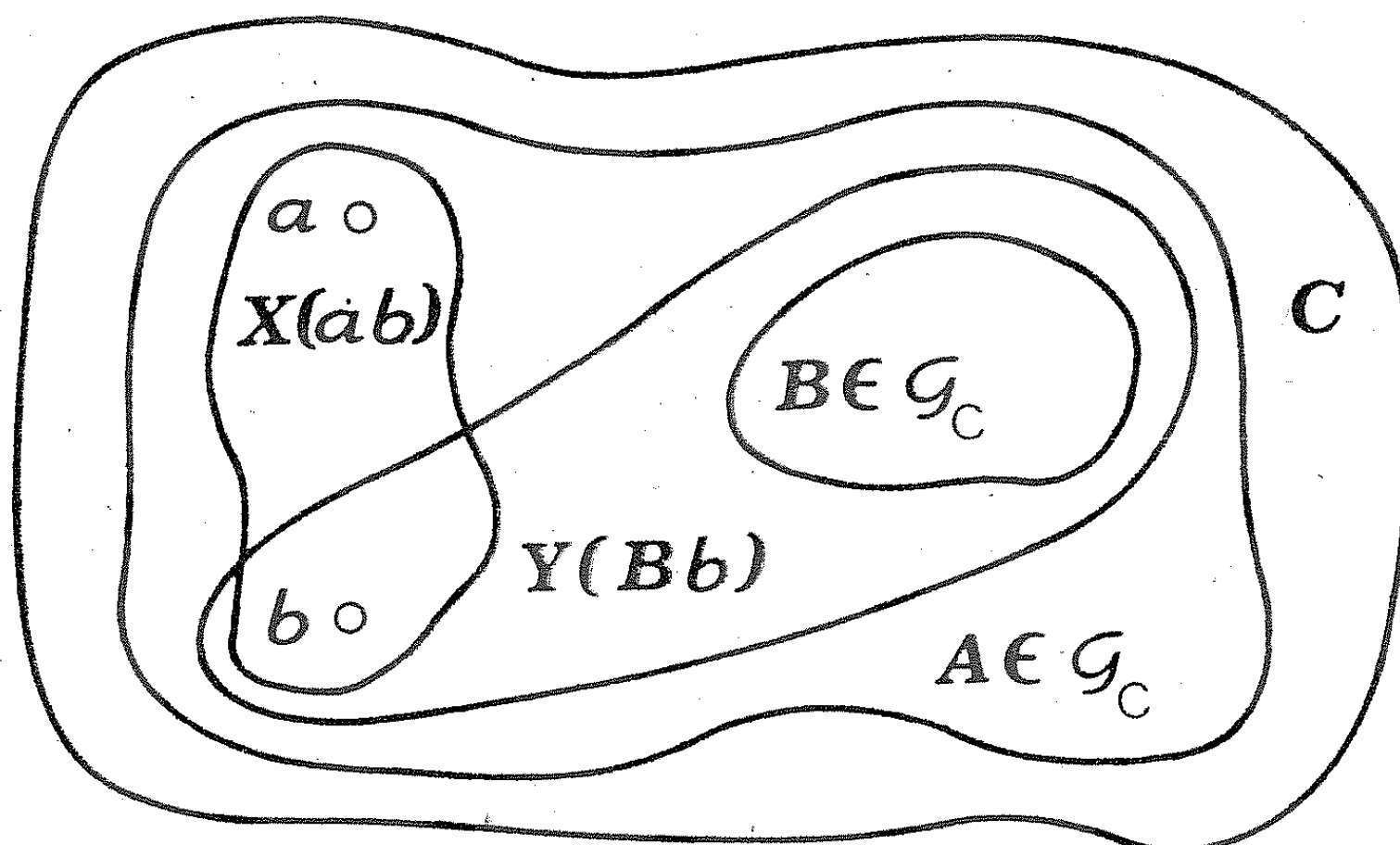


Sl. 18

Gre za vse g. množice, ki strogo vsebujejo dano g. množico A . Če je $\bigcap \mathcal{G}(A)$ g. množica, je kar enak A po I 10 (razen v primerih, če je $A = E$ ali $\mathcal{G}(A) = \{E\}$). — Če ni $A = E$, $\mathcal{G}(A)$ glede na ves prostor ustreza aksiomom A 1, A 5, A 6 (Primerjaj z $\mathcal{G}(a)$!). A 2 ni izpolnjen, ker bi morala neko g. množico X in točko $y \notin X$ obsežati taka g. množica, ki bi vsebovala A . Ni pa rečeno, da je unija dveh g. množic vselej obsežena v neki tretji g. množici. Primer za $\mathcal{G}(A)$: osno ravninje.

3)

Družina vseh g. množic, ki so podmnožice poljubne neprazne množice C : $\mathcal{G}_C = \{X; X \in \mathcal{G} \text{ \& } X \subseteq C \text{ \& } C \neq \emptyset \text{ \& } C \in \mathcal{P} E\}$. (Sl. 19). Spet je: $\mathcal{G}_C \subseteq \mathcal{G}$. Če je $\mathcal{G}_C$ neprazna, ustreza glede na ves prostor aksiomom A 3, A 4, A 5, A 6. K neki g. množici iz $\mathcal{G}_C$ namreč spadajo



Sl. 19

tudi vse njene g. podmnožice v $\mathcal{G}_C$ (po tranzitivnosti); zato je npr. zagotovljen obstoj osnovne povezave dveh točk v okviru vsake g. množice, ki že povezuje obe točki. Če pa dve točki nista elementa množice C , ni nobene g. množice iz $\mathcal{G}_C$, ki bi ju vsebovala. Zato A 1 ni izpolnjen. Podobno ne moremo zadostiti A 2.

Podprostor

Vzemimo družino g. množic, ki so vsebovane v neki množici A : $\mathcal{G}_A$! Le A naj bo zdaj g. množica!

$\mathcal{G}_A = \{X; X \in \mathcal{G} \text{ \& } X \subseteq A \text{ \& } A \in \mathcal{G}\}$. — Omejimo se zdaj na A kot univerzum in opazujmo v njem družino $\mathcal{G}_A$! Ta ustreza aksiomom od A 3 do A 6, kot smo videli že prej. Ker prostor A tudi spada v $\mathcal{G}_A$, sta izpolnjena še A 1 in A 2. Družina $\mathcal{G}_A$ je torej geometrija nad A , $(A, \mathcal{G}_A)$ je geometrijski prostor, in sicer *podprostor* E -ja. — Na podoben način dobimo iz običajne prostorske geometrije ravninsko geometrijo.

Med nerešenimi vprašanji iz pričujoče snovi je na primer zveza med posplošeno geometrijo in topologijo, opazovanje presekov g. množic s poljubno dano množico in seveda presekov g. množic med seboj. V geometrijski prostor bi mogli uvesti tudi aksiome separacije, po katerih bi se lahko g. množica izognila danim točkam...

ZLEPKI IN INTERPOLACIJA

JERNEJ KOZAK

MOS 41 A 15

Zlepki se vse česče uporabljajo pri interpolaciji in aproksimaciji funkcij. V tem članku so definirani naravni zleпки in ilustrirani z numeričnim zgledom.

SPLINE FUNCTIONS AND INTERPOLATION

Spline functions are getting more and more widely used in problems of interpolation and approximation of functions. In this article the natural spline functions are defined and a numerical example given.

1. Uvod

V zadnjem času vse pogosteje zasledimo članke, ki govore o zlepkih. Ker jih uporabljamo na mnogih področjih uporabne matematike, je prav, da si jih vsaj bežno ogledamo.

Najprej povejmo, da bomo imenovali zlepek funkcijo, ki ji v tujini pravijo spline! Beseda spline je angleška in pomeni plastični krivuljnik. Ker je dobeseden prevod imena preokoren, bomo po nasvetu prof. dr. Križaniča uporabljali ime zlepek, ki tako kot spline opiše naravo naših funkcij.

Predstavljajmo si tehnika, ki mora skozi dane točke potegniti čimlepšo krivuljo! Vzame plastični krivuljnik ter ga lepo od točke do točke čimlepše upogne in začrta krivuljo. Ko konstruiramo zlepek, naredimo pravzaprav isto kot tehnik. Vzamemo polinome nizkih stopenj ter z njimi od točke do točke aproksimiramo dano krivuljo. V vozlih zlepimo polinome tako, da se dobljena krivulja čim manj lomi, torej da je v stičnih točkah, zveznih poleg funkcije, še čimveč odvodov. Zlepkov ne uporabljamo le za interpolacijo. Zelo pogosto jih uporabimo tudi pri aproksimaciji funkcij, funkcionalov, itd. Rojstno leto zlepkov je 1946, ko je I. J. Shoenberg predlagal, kako smiselno uporabimo polinome tretje stopnje za aproksimacijo funkcij. Vendar pa so zleпки postali privlačnejši šele po letu 1957, ko je J. C. Holladay odkril pomembno lastnost-minimalni princip. Od tedaj se je proučevanje zlepkov zelo razmahnilo, iz prvotnih se je razvilo več vrst zlepkov. Iz te množice si bomo ogledali le preproste interpolacijske zlepike, ki jih uporabljamo pri aproksimaciji funkcij ter njihovih odvodov.

2. Interpolacijski zleпки

Kdaj govorimo o interpolaciji? Vzemimo končen interval

$$I = [a, b] \in R$$

ter poljubno funkcijo

$$S: I \longrightarrow R,$$

katere vrednosti v točkah

$$x_i \in I, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

poznamo. Če sedaj poiščemo funkcijo

$$\sigma: I \longrightarrow R,$$

ki zavzame v točkah x_i vrednosti $f(x_i)$, torej

$$\sigma(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

in nadomestimo vrednost $f(x)$, $x \neq x_i$, s $\sigma(x)$, pravimo, da smo s funkcijo σ interpolirali vrednost funkcije f . Tako interpolacijsko funkcijo potem vzamemo kot aproksimacijo funkcije f . Običajno so interpolacijske funkcije polinomi, saj je z njimi najpreprosteje računati. Z direktno konstrukcijo se da pokazati, da eksistira natanko en interpolacijski polinom stopnje n , ki na sistemu $n + 1$ različnih točk — vozlov interpolacije — zavzame poljubne vnaprej predpisane vrednosti. Obstaja več numeričnih metod, kako tak polinom konstruirajmo. Posebno obširna je teorija o interpolaciji na ekvidistantnem sistemu točk, ki jo je začel razvijati že Newton. Ko določimo interpolacijski polinom, nastane vprašanje, kako dobro z njim lahko aproksimiramo našo funkcijo f in ali bi dobili boljšo aproksimacijo, če bi povečali število točk. V splošnem ni res, da se z rastočim številom točk interpolacijski polinom vedno bolje prilega funkciji. Znani so primeri, ko ta proces divergira, čeprav postanejo točke goste na intervalu I . Točke x_i res lahko izbiramo tako, da dovolj pohlevno funkcijo poljubno natančno aproksimiramo z ustreznim interpolacijskim polinomom, a vendar najdemo v knjigah o interpolaciji svarila pred uporabo polinomov visokih stopenj. Še bolj dvomljiva je uporaba polinomov visokih stopenj pri aproksimaciji funkcij. Poglavitni razlog, zakaj je uporaba polinomov visokih stopenj numerično zgrešena, je v tem, da pri računanju s končnim številom decimalk postanejo rastoče potence spremenljivke x kaj kmalu praktično linearno odvisne. Poglejmo si v dveh različnih funkcijskih prostorih, kako pada razdalja n -te normirane potence do linearnega podprostora, ki ga tvori prvih $n - 1$ potenc!

Če vzamemo v prostoru $L^2[0, 1]$ zaporedje normiranih potenc

$$x_n = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dobimo:

$$\rho(L(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) = \frac{[n!]^2}{(2n)!} \doteq \sqrt{\pi n} \cdot 2^{-2n}.$$

V prostoru $C[0,1]$ pa za zaporedje

$$x_n = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dobimo razdaljo

$$\rho(L(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) = \frac{1}{2} 2^{-2n}.$$

V obeh primerih vidimo, da se n -ta normirana potenca hitro spušča v podprostor, ki ga tvorijo prejšnje potence. Ker pa računalnik računa s končnim številom decimalk, postane razdalja za večje n tako majhna, da jo identificira z nič. V praksi se pokaže, da je pravzaprav odločilna količina ρ^2 , ne pa ρ in tako so na računalniku IBM 1130, ki računa z 31 binarnimi mesti, potence večje od 7 praktično neuporabne.

Slabosti polinomov so privedle do odkritja zlepkov. Preprosti zleпки so odsekoma polinomi, seveda nizkih stopenj, ki so med seboj čimbolj gladko zlepljeni. Z uporabo zlepkov se znebimo polinomov visokih stopenj, a vseeno ohranimo preprostost algebraičnih operacij, ki je značilna za potence. Oglejmo si definicijo zlepka!

Definicija

Vzemimo naravno število m ter n -torico realnih števil

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \in R!$$

Pri dani n -torici števil in danem številu m je zlepek s_m zvezna funkcija

$$s_m: R \longrightarrow R$$

z lastnostmi:

i) Na vsakem intervalu

$$(-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2), \dots, (x_n, \infty)$$

je s_m polinom stopnje največ m .

ii) V točkah x_i je s_m $m - 1$ krat zvezno odvedljiva funkcija.

Iz definicije vidimo, da so zlepki zelo sorodni polinomom, saj se od njih ločijo kvečjemu v vozlih x_i . Tako je vsak polinom stopnje največ m tudi primer trivialnega zlepka. Kot primer netrivialnega zlepka si oglejmo odrezano potenco, definirano z

$$(x_i - x)_+^m : x \longrightarrow \begin{cases} (x_i - x)^m & x < x_i \\ 0 & x \geq x_i \end{cases}$$

Ker je poljubna linearna kombinacija zlepkov spet zlepek, tvorijo zlepki linearni prostor nad R . Iz definicije uganemo splošno obliko zlepka; $(m + 1)$ -ti odvod mora biti povsod, razen morda v točkah x_i , identično enak nič, tako da je odrezana potenca najmanj gladka funkcija, ki je še lahko zlepek. Zapišimo sedaj splošni zlepek:

$$s_m(x) = p_m(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x)_+^m$$

Pri določanju zlepka stopnje m imamo na izbiro $n + m + 1$ parametrov. Uporabimo zlepek kot interpolacijsko funkcijo! Pogoji

$$s_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

nam puščajo še svobodno izbiro $m + 1$ parametrov. Te parametre bomo izbrali tako, da bo zlepek čim gladkejši. Poleg zveznosti nižjih odvodov bomo zahtevali še, da zlepek v nekem smislu čim manj oscilira. Poglejmo si izrek, ki nam tako izbiro utemelji! Za kubične zlepke ($m = 3$) je izrek dokazal Holladay (1957), za splošni m pa de Boor (1961).

Izrek (2.1) (minimalni princip)

Naj bo $I = [a, b] \subset R$ interval na realni osi ter $H^m[a, b]$ prostor vseh $m - 1$ krat zvezno odvedljivih funkcij

$$f: I \rightarrow R, \quad f \in C^{m-1}[a, b]$$

z lastnostjo, da je

$$f^{(m)} \in L^2[a, b].$$

Vzemimo dve naravni števili, m in n , $m \leq n$, poljubno n -torico realnih števil

$$y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ter med seboj različne točke intervala I

$$x_i \in I, \quad x_i \neq x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Funkcija $f \in H^m[a, b]$, ki zadošča pogojem

$$f(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

in reši enačbo

$$\|f^{(m)}\|_{L^2[a, b]} = \inf_{g \neq 0} \|g\|_{L^2[a, b]}, \quad g \in H^m[a, b]$$

eksistira ter je enolično določeni zlepek stopnje $2m - 1$.

Minimalni princip nam pove, da je prav zlepek tista funkcija, ki ima med vsemi $m - 1$ krat zvezno odvedljivimi interpolacijskimi funkcijami po normi najmanjši s kvadratom integrabilni m -ti odvod. Iz dokaza izreka povzamemo, da je zlepek, ki zadošča pogojem izreka, zlepek posebne oblike:

$$s_{2m-1}(x) = P_{m-1}(x) + \sum_{j=1}^{m-n} \lambda_j (x_j - x)_+^{2m-1}.$$

Parametre λ_j ter koeficiente polinoma določajo enačbe

$$s_{2m-1}(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Direktno numerično reševanje tega sistema ni priporočljivo, ker praktično odpove že za $m > 3$ ali $n \geq 30$. Obstaja več numeričnih metod, kako konstruirati interpolacijski zlepek. Običajno najprej določimo parametre λ_j , nato pa še koeficiente polinoma. Sistem enačb, ki definirajo zlepek, napademo z m -to deljeno diferenco, ki nam polinom preslika v nič, tako da nam preostane sistem $n - m$ enačb za neznanke λ_j . Matrika sistema je simetrična, pasovna ter običajno dobro pogojena, npr. za $m = 2$ ima število pogojenosti omejeno s sedem, neodvisno od števila vozlov. Ko določimo vrednosti parametrov λ_j , lahko določimo še polinom, če je le m dovolj majhen.

Pri konstrukciji zlepka se pokaže, da je polinom pravzaprav groba aproksimacijska funkcija za f , odrezane potence pa to funkcijo tako napihnejo, da gre skozi predpisane točke.

Kako izbiramo m in n ? Pokaže se, da numerične napake niso zelo odvisne od števila točk, čeprav seveda ni smiselno intervala preveč drobiti, da nam zaokrožitvene napake ne narastejo preveč. Pri izbiranju parametra m pa moramo biti zelo pazljivi. Najpogosteje vzamemo za m kar 2, saj je s kubičnimi zlepci najpreprosteje računati. Boljše rezultate dobimo včasih z $m = 3$ ali celo $m = 4$. Izogibajmo pa se višjih m , saj postane stopnja interpolacijskega zlepka, ki je na vsakem izmed intervalov

$$(x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

polinom stopnje $2m - 1$, previsoka! Izbira parametra m pa zavisi tudi od narave funkcije, ki jo želimo aproksimirati. Na koncu sestavka si bomo ogledali numeričen zgled, pri katerem se izkaže, da ne dobimo vedno boljše aproksimacije, če izberemo večji m . Spomnimo se, da smo interpolacijski zlepek stopnje m določili tudi iz pogoja:

$$\|s^{(m)}\|_{L^2} = \inf_{g \neq 0} \|g \in H^m[a, b]\| \|g^{(m)}\|_{L^2}.$$

Minimalnost m -tega odvoda pa zagotavlja, da je $(m - 1)$ -ti odvod pohleven in ne oscilira preveč. Ta lastnost se vedno šibkeje prenaša na nižje odvode in funkcijo. Čim manjši m torej izberemo, tem močnejše zahtevamo, da interpolacijski zlepek ne oscilira.

3. Konvergenca interpolacijskih zlepkov

Pri interpolaciji se večkrat vprašamo, kako se obnaša interpolacijska funkcija, ko število točk gostimo. Vzemimo funkcijo

$$f : [a, b] \rightarrow R$$

ter interpolacijsko funkcijo

$$\sigma : [a, b] \rightarrow R,$$

ki zadošča enačbam

$$\sigma(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zanima nas funkcija

$$\eta = \sigma - f : [a, b] \rightarrow R,$$

oziroma obnašanje norme

$$\|\eta\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |\eta(x)|,$$

ko število točk večamo. Želeli bi, da postane norma poljubno majhna, vendar v splošnem to ni res. Če izberemo za interpolacijsko krivuljo polinom, so znani primeri, ko norma $\|\eta\|_{\infty}$ narašča preko vseh meja, ko gostimo interpolacijske vozle. Še več, za poljubno zaporedje naborov $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ lahko najdemo zvezno funkcijo, za katero interpolacijski polinomi, konstruirani na danem zaporedju naborov interpolacijskih vozlov, ne konvergirajo enakomerno.

Poglejmo si, kako je s konvergenco pri zlepkih! Omejimo se kar na kubične, saj so za splošne zlepke konvergenčni izreki podobni. Izberimo si interval $I = [a, b] \in R$ ter konstruirajmo zaporedje naborov točk

$$\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \Delta_n : a \leq x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq b!$$

Točke $x_i^{(n)}$ izberemo tako, da količina

$$\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n-1} |x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}|$$

konvergira proti nič z rastočim n -jem. Vzemimo poljubno funkcijo

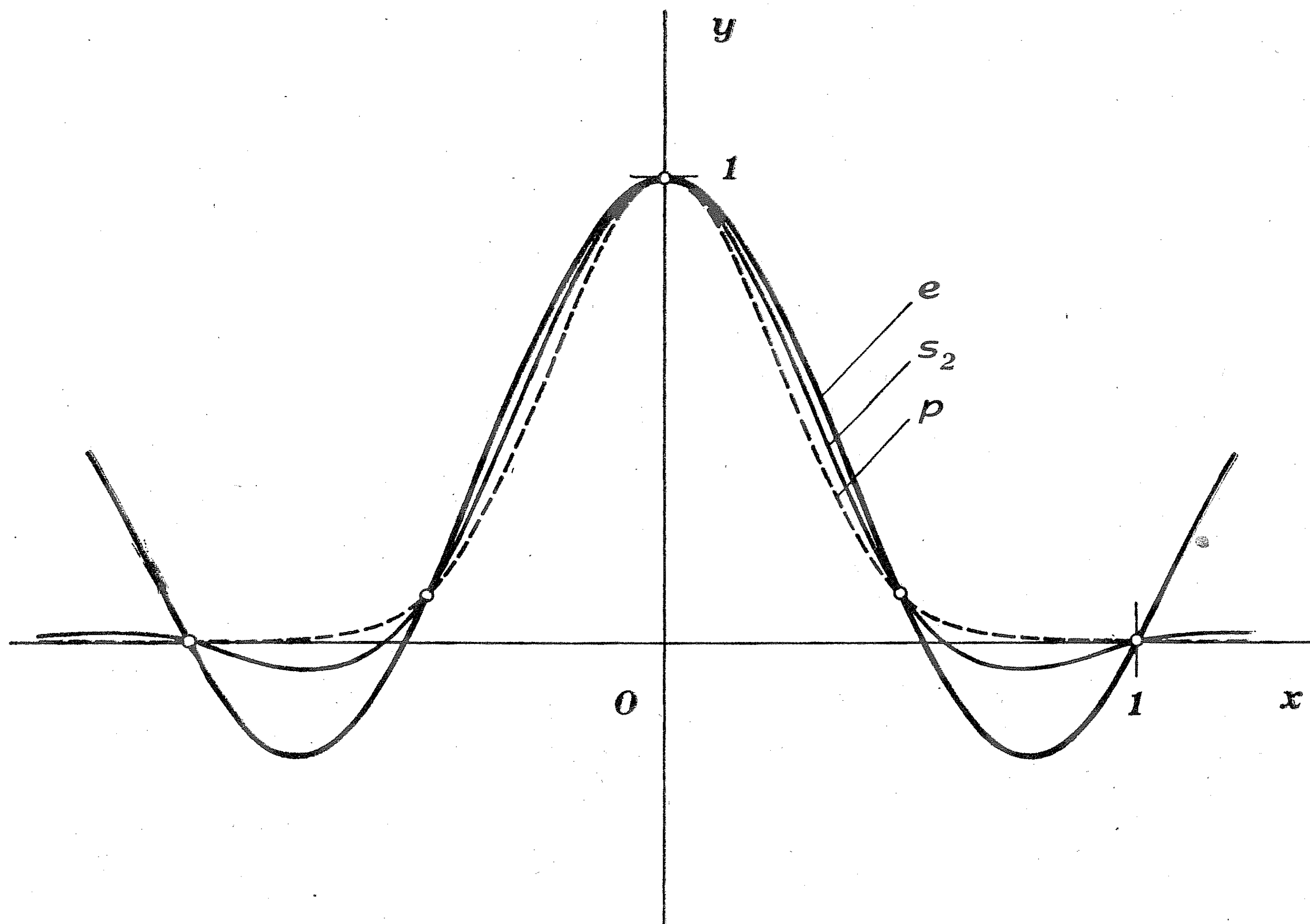
$$f \in C^p[a, b], \quad 0 \leq p \leq 4$$

ter konstruirajmo zaporedje kubičnih zlepkov:

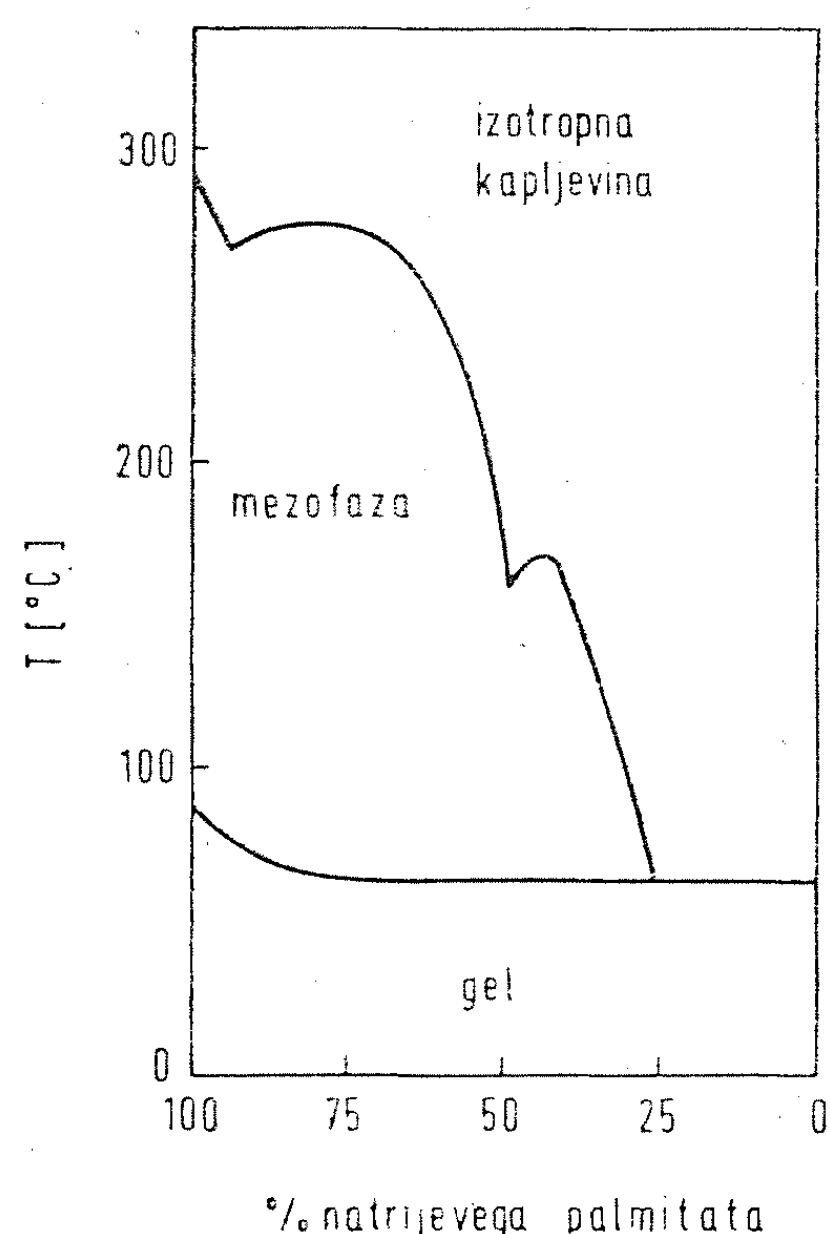
$$\{s_3^{(n)}\}_{n=3}^{\infty}, \quad s_3^{(n)}(x) = p_2^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n-3} \lambda_j^{(n)} (x_i^{(n)} - x)_+^3, \quad x \in [a, b],$$

določenih iz pogojev

$$s_3^{(n)}(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Omenim naj še, da kažejo tekoče kristalne lastnosti tudi nekateri živi sistemi. Živčno tkivo je v bistvu kompliciran tekoči kristalni sistem. Tudi holesterinske spojine v krvi so delno v tekočem kristalnem stanju.² Vodne raztopine nekaterih virusov, npr. tobačnega mozaičnega virusa, so močno dvolomne.



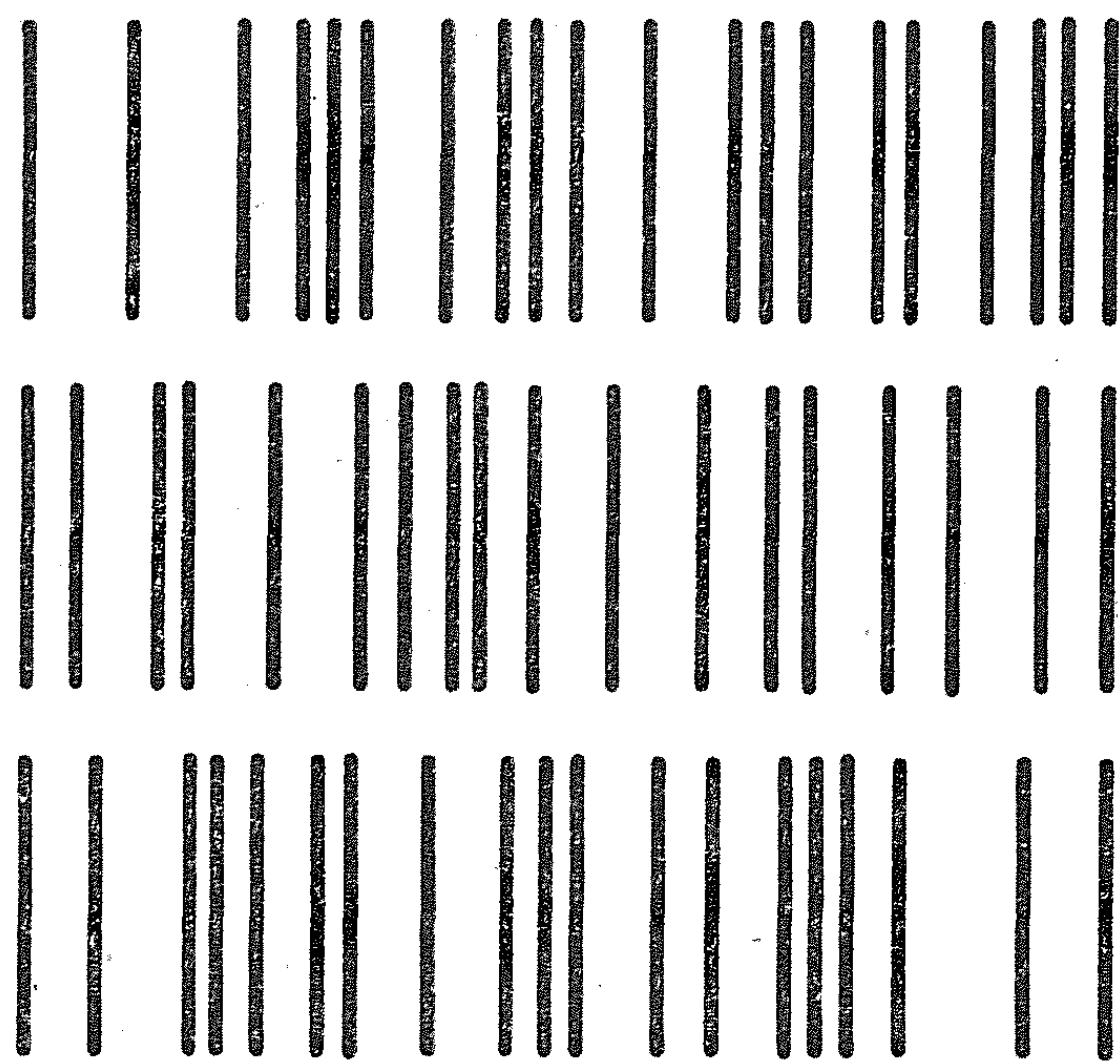
Sl. 2. Fazni diagram sistema natrijev palmitat-voda.

2. Razdelitev, zgradba in lastnosti tekočih kristalov

Anizotropne lastnosti tekočih kristalov kažejo na urejeno razvrstitev molekul. Glede na zgradbo delimo tekoče kristale na tri osnovne tipe: smektične, nematične in holesterinske. Ta razdelitev velja tako za termotropne kot za liotropne tekoče kristale.

Ni nujno, da bi imela neka snov samo ene vrste mezofazo. Nekatere spojine so smektični tekoči kristali v določenem temperaturnem območju, nematični ali holesterinski v višjem temperaturnem intervalu in preidejo šele nato v izotropno kapljevino.

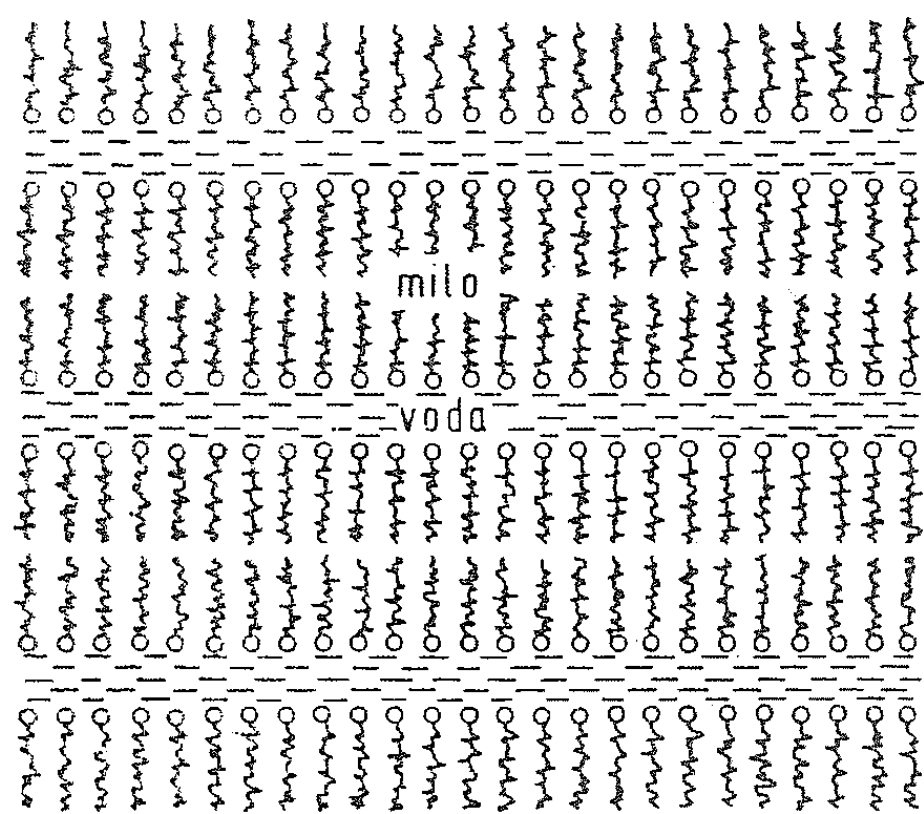
Smektična mezofaza je med vsemi najbolj podobna kristalnemu stanju, ker je najbolj urejena. Molekule spojin, ki tvorijo smektično mezofazo, so podolgovate, paličaste oblike. Razvrščene so druga poleg druge tako, da so njihove vzdolžne osi med seboj vzporedne, konci molekul pa leže v ravnini (sl. 3). Tako plast si lahko ponazorimo z žitnim poljem. V posamezni plasti so težišča molekul slučajnostno porazdeljena. V smeri vzdolžnih osi molekul poteka ∞ -števna simetrijska os. Taka je ureditev molekul v »klasičnih« smektičnih tekočih kristalih (tip A).



Sl. 3. Smektična mezofaza.

Obstoji pa vrsta variant na to osnovno smektično ureditev. Pri nekaterih snoveh vzdolžne osi molekul ne leže pravokotno na ravnino plasti, temveč oklepajo z njo od 90° različen kot. Opazili so tudi primer, da leže molekule znotraj posamezne plasti v vrstah, s čemer se zmanjša števnost simetrijske osi. Pri polarnih molekulah so lahko plasti debele tudi dve molekulski dolžini (sl. 4).

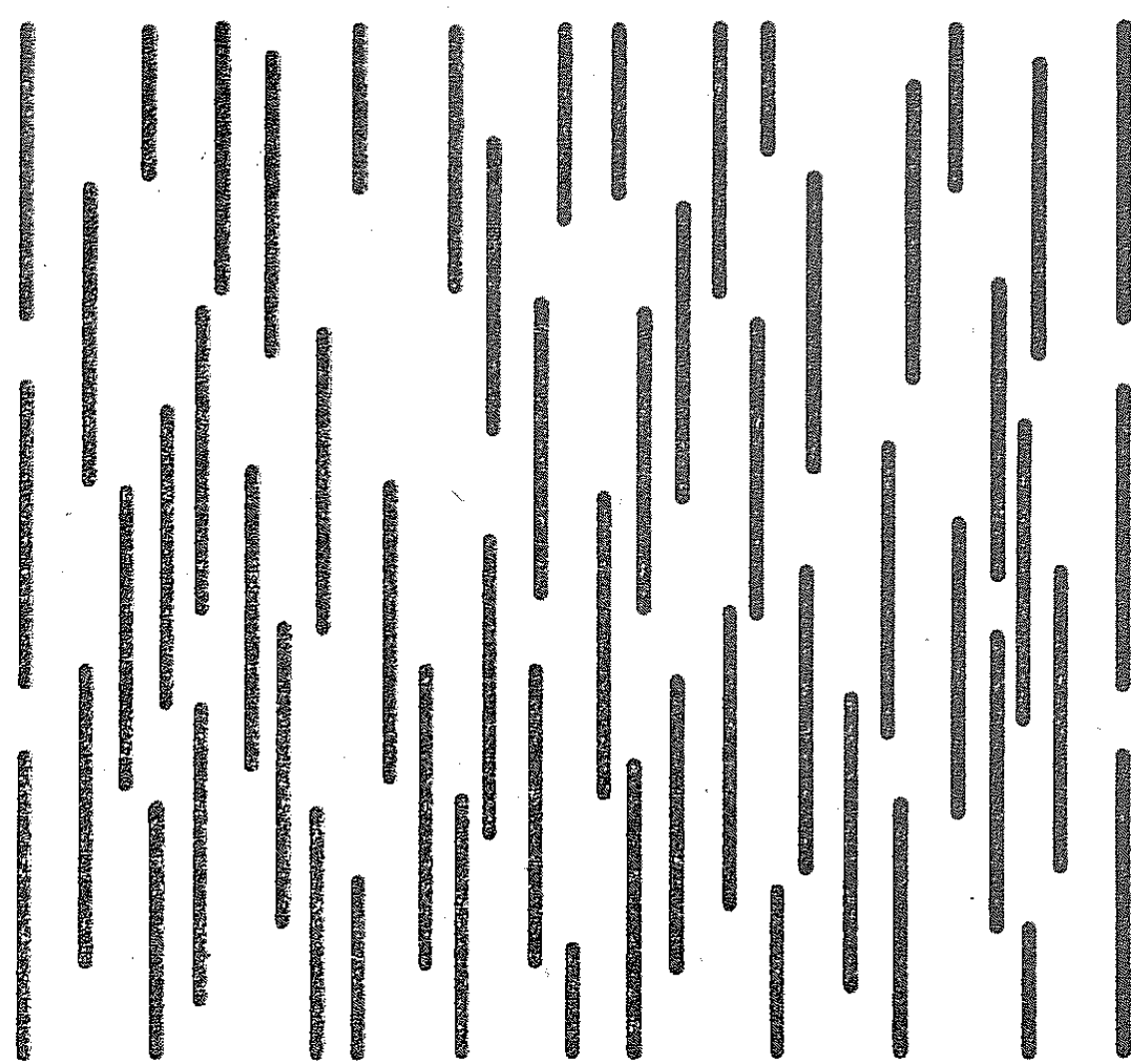
Pravkar opisane urejenosti obstoje le, če ima vzorec obliko tanke plasti na skrbno pripravljeni podlagi ali če je pod vplivom močnega magnetnega polja. Sicer urejenost ni tako pravilna. Zdi se, da ima običajen, tridimenzionalen vzorec »domensko« strukturo. Znotraj posamezne »domene« so plasti med seboj približno vzporednih molekul ukrivljene, na meji med »domenami« pa se nezvezno spremeni smer vzdolžnih osi molekul.



Sl. 4. Razporeditev molekul v tekočem kristalnem sistemu iz 70% natrijevega palmitata in 30% vode.

Kot primer smektične mezofaze tipa A naj navedem termotropno mezofazo dietil 4,4'-azooksidibenzoata, ki je obstojna med 114°C in 120°C . Smektični tekoči kristali so tudi raztopine različnih mil v vodi (sl. 4).

Nematična mezofaza je manj urejena kot smektična. Molekule leže sicer še vedno tako, da so njihove vzdolžne osi usmerjene v isto smer, niso pa več ločene po plasteh (sl. 5).



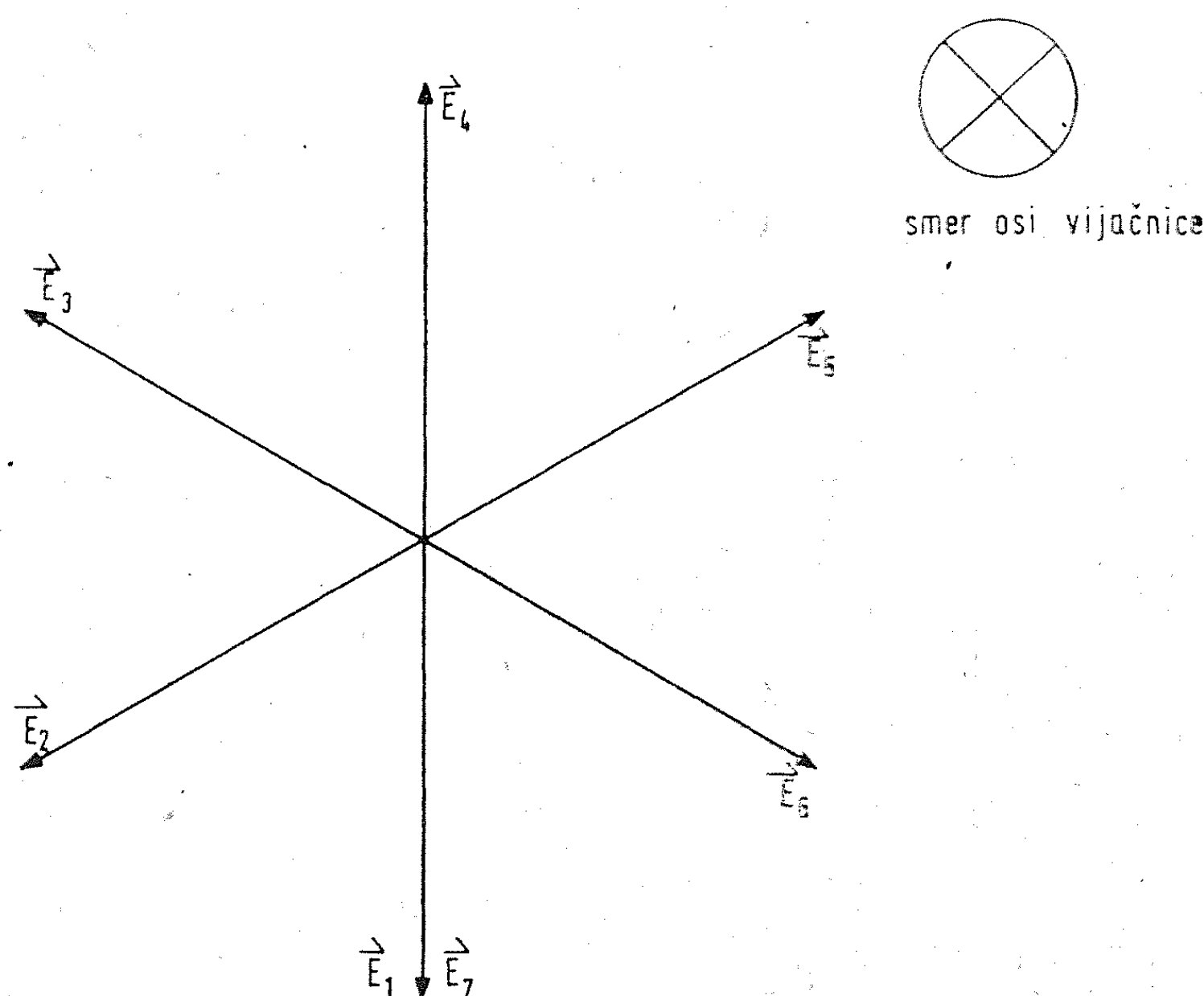
Sl. 5. Nematična mezofaza.

Možno je translacijsko gibanje molekul v katerokoli smer. Zaradi tega je nematična mezofaza bolj tekoča kot smektična. Viskoznost nematičnih tekočih kristalov je istega reda velikosti kot viskoznost običajnih kapljev, recimo vode. Večina nematičnih tekočih kristalov je enoosna z optično osjo v smeri vzdolžnih osi molekul. Poročajo pa tudi o obstoju dvoosnih nematičnih tekočih kristalov.

Že od leta 1930 naprej je sporno vprašanje, ali so pri nematičnih tekočih kristalih molekule vzporedne na večjih področjih ali ne. Del fizikov, na čelu s Kastom in Ornsteinom,

zasučeta tudi glavni dielektrični osi v ravnini plasti in žarek naleti na spremenjen lomni količnik pri prehodu iz enega v drug sloj molekul.

Z uporabo enačb za elektromagnetno polje za primer pravokotnega vpada linearno polariziranega žarka je de Vries pokazal, da oklepata na površini mezofaze polarizacijski ravnini žarkov odbitih na dveh zaporednih mejah kot 2φ . Če bi znašal kot $\varphi = 30^\circ$, bi nihali na površini tekoče kristalne plasti vektorji električne poljske jakosti v smereh, ki jih vidimo na sliki 9. Pri tem je $\vec{E}_i$ vektor električne poljske jakosti žarka odbitega na i -ti mejni ploskvi. Razlika optičnih poti žarkov odbitih na i -ti in $(i + 1)$ -vi mejni ploskvi je $2 \cdot \bar{n} \cdot b$,



Sl. 9. Smeri električnih poljskih jakosti $\vec{E}_i$ za $\varphi = 30^\circ$.

če pomeni b debelino enega sloja. Iz slike 9 vidimo, da je interferenca konstruktivna, če je razlika optičnih poti žarkov odbitih na 1. in 7. sloju ($6 \cdot 2\bar{n}b$) ali na 2. in 8. sloju ($6 \cdot 2\bar{n}b$) enaka valovni dolžini. Za poljuben kot φ zapišemo ta pogoj

$$\frac{2\pi}{2\varphi} 2\bar{n}b = \lambda.$$

Ker je razdalja $2\pi b/\varphi$ ravno enaka hodu vijačnice, lahko napišemo pogoj za maksimalni odboj svetlobe v obliki:

$$\lambda = p \cdot \bar{n}.$$

Zanimivo je, da valovna dolžina svetlobe, ki se najbolj odbije, ni odvisna od debeline posameznega sloja b , temveč le od celotnega hoda vijačnice p .

Barva odbite svetlobe je odvisna od vpadnega kota, poleg tega pa tudi od temperature in vrste holesterinske spojine. Zadnja dva faktorja namreč vplivata na dolžino hoda vijačnice. Z mešanjem primernih derivatov holesterina so uspeli dobiti tekoče kristalne mešanice, ki odbijajo vidno svetlobo pri temperaturah človeškega telesa. Take mešanice nam omogočajo istočasno merjenje temperature na večji površini kože. Kot primer naj navedem mešanico oleilkarbonata, nonanoata in benzoata holesterina z vodo v določenem razmerju⁴, ki je

rdeča	v intervalu $33,9^\circ\text{C} - 34,8^\circ\text{C}$
rumena	$34,8^\circ\text{C} - 35,0^\circ\text{C}$
zelena	$35,0^\circ\text{C} - 36,0^\circ\text{C}$
modra	$36,0^\circ\text{C} - 37,9^\circ\text{C}$.

3. Elastične lastnosti tekočih kristalov

V tem poglavju si bomo ogledali osnove Frankove kontinuumske teorije⁵, ki fenomenološko obravnava elastične lastnosti treh osnovnih tipov tekočih kristalov (smektičnih A, enoosnih nematičnih in holesterinskih). Glavni rezultat te teorije je izračun proste energije tekočih kristalov v odvisnosti od deformacije.

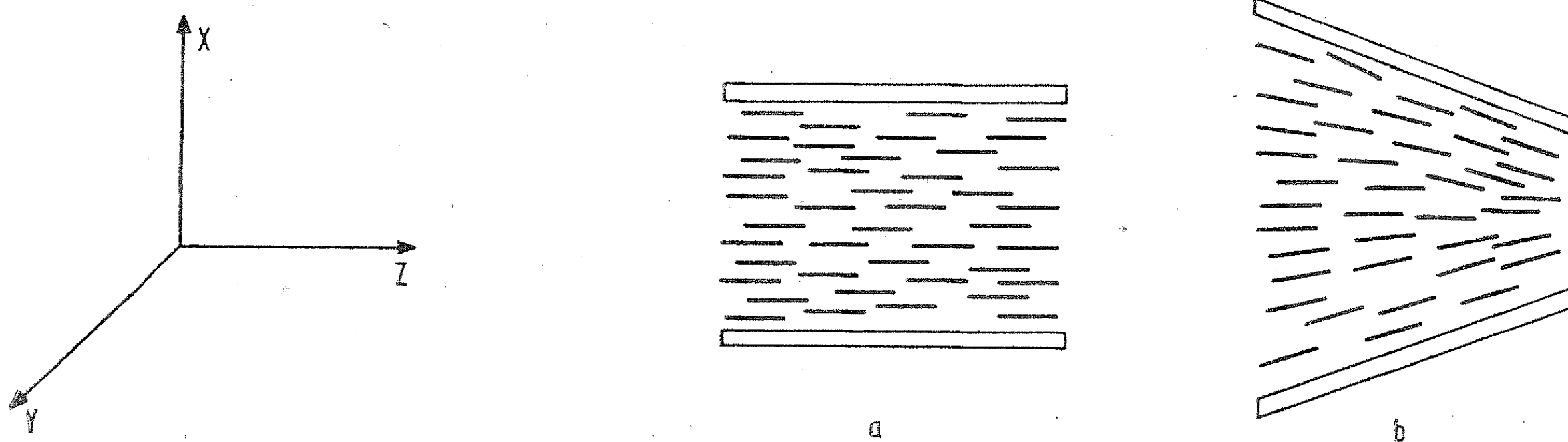
Kadar govorimo o deformacijah tekočih kristalov, pomeni, da se v vzorcu smer orientacije molekul spreminja s krajem. Za popis deformacij uporabi Frank enotni vektor $\mathbf{L}(\mathbf{r})$, ki ima v vsaki točki vzorca smer orientacije molekul v tisti točki. Na poljubno mesto postavimo pravokotni koordinatni sistem (osi x, y, z) tako, da kaže vektor $\mathbf{L}$ v izhodišču koordinatnega sistema v smer osi z , $\mathbf{L}(0) = (0,0,1)$. Ker se po kontinuumski teoriji smer vektorja $\mathbf{L}$ zvezno spreminja s krajem, zapišemo komponente (L_x, L_y, L_z) na mestu $\mathbf{r}$ v bližini koordinatnega izhodišča kot:

$$\begin{aligned} L_x &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + 0(r^2) \\ L_y &= a_4 x + a_5 y + a_6 z + 0(r^2) \\ L_z &= 1 + 0(r^2). \end{aligned}$$

Pri tem karakterizirajo koeficienti

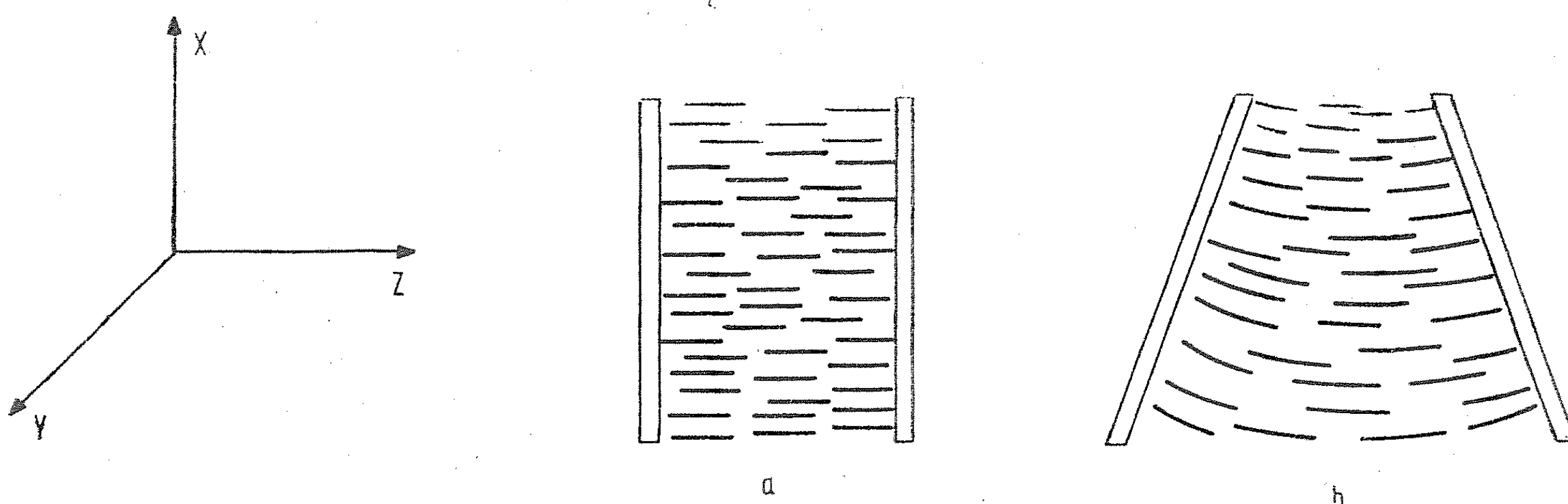
$$a_1 = \frac{\partial L_x}{\partial x}, a_2 = \frac{\partial L_x}{\partial y}, a_3 = \frac{\partial L_x}{\partial z}, a_4 = \frac{\partial L_y}{\partial x}, a_5 = \frac{\partial L_y}{\partial y}, a_6 = \frac{\partial L_y}{\partial z}$$

ukrivljenost v koordinatnem izhodišču.



Sl. 10. a. Nedeformirana plast; b. »Prečni upogib«.

Da si bomo lažje predstavljali, kakšnim deformacijam ustrezajo posamezni a_i , si to oglejmo za tri koeficiente na primeru tanke plasti nematičnega tekočega kristala. Na sliki 10a vidimo nedeformirano plast med dvema steklenima ploščicama in sicer presek po ravnini (x, z) . Molekule ležijo vzporedno s steklenima ploščicama in z ravnino (x, z) . Če plošči razmaknemo tako, kot kaže slika 10b, pri čemer ostanejo vse molekule še vedno vzporedne



Sl. 11. a. Nedeformirana plast; b. »Vzdolžni upogib«.

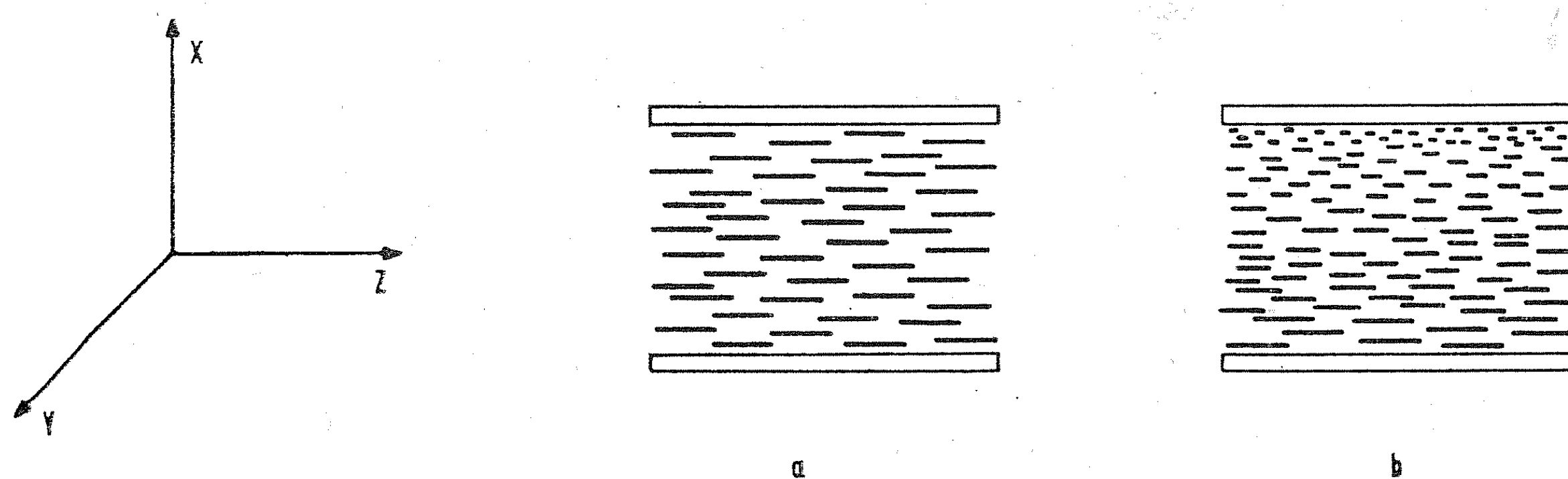
z ravnino (x, z) , pride do »prečnega upogiba« (Frank: splay, Saupe⁶: Querbiegung), pri katerem se močno spreminja L_x v smeri osi x in zavzema koeficient $a_1 = \partial L_x / \partial x$ veliko vrednost v primeri z ostalimi. Na sliki 11b vidimo deformacijo »vzdolžnega upogiba« (Frank: bend, Saupe: Längsbiegung), ki jo označuje koeficient $a_3 = \partial L_x / \partial z$. »Zasuk« nematičnega tekočega kristala (Frank: twist, Saupe: Verdrillung) vidimo na sliki 12b. Molekule leže ves čas vzporedno z ravninama steklenih ploščic. Krajše črtice na sliki 12b pomenijo krajšo projekcijo molekulske dolžine na ravnino (x, z) . Pri tej deformaciji zavzema od nič različno vrednost le koeficient $a_4 = \partial L_y / \partial x$.

Pri kakršnikoli deformaciji se spremeni vrednost proste energije vzorca. Označimo z f razliko med gostoto proste energije nedeformiranega in deformiranega tekočega kristala. Frank razvije f v vrsto po a_i in upošteva člene do drugega reda:

$$f = \sum_i k_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} a_i a_j \quad (1)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, 6), k_{ij} = k_{ji}.$$

Pri tem so k_i in k_{ij} Frankove elastične konstante.



Sl. 12. a. Nedeformirana plast; b. »Zasuk«.

Vrednosti nekaterih elastičnih konstant in nekaj zvez med ostalimi elastičnimi konstantami lahko dobimo, če upoštevamo simetrijske lastnosti tekočih kristalov. Os z prej vpeljanega koordinatnega sistema je ∞ -števna simetrijska os. Zato lahko zavrtimo koordinatni sistem za poljuben kot okoli osi z , pri čemer mora ostati f prav taka funkcija novih koeficientov a'_i v zavrnem koordinatnem sistemu, kot je bila v prvotnem (en. 1).

$$f = \sum_i k_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} a_i a_j = \sum_i k_i a'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} a'_i a'_j$$

Predstavljajmo si, da pri deformaciji »prečnega upogiba« (sl. 10) zavrtimo koordinatni sistem okoli osi z za 90° , tako da velja $x' = -y$, $y' = x$, $z' = z$. Vidimo, da odgovarja koeficientu $a_1 = \partial L_x / \partial x$ v zavrnem koordinatnem sistemu koeficient $a'_5 = \partial L_{y'} / \partial y'$. Zato morata biti enaki tudi elastični konstanti, ki sta z njima v zvezi, namreč $k_1 = k_5$. S podrobno obravnavo rotacije koordinatnega sistema za 90° , potem pa še za 45° , je Frank pokazal, da sta od šestih hipotetičnih elastičnih konstant k_i dve enaki nič in le dve med seboj neodvisni:

$$k_i = [k_1, k_2, 0, -k_2, k_1, 0].$$

Prav tako je od 36 konstant k_{ij} 18 enakih 0 in samo 5 neodvisnih:

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & -k_{12} & (k_{11} - k_{22} - k_{24}) & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{12} & k_{24} & 0 & k_{22} & -k_{12} & 0 \\ (k_{11} - k_{22} - k_{24}) & k_{12} & 0 & -k_{12} & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Izraz za f (en. 1) lahko potem napišemo v sledeči obliki:

$$f = k_1(a_1 + a_5) + k_2(a_2 - a_4) + \frac{1}{2} k_{11}(a_1 + a_5)^2 + \frac{1}{2} k_{22}(a_2 - a_4)^2 + \frac{1}{2} k_{33}(a_3^2 + a_6^2) + k_{12}(a_1 + a_5)(a_2 - a_4) - (k_{22} + k_{24})(a_1 a_5 - a_2 a_4). \quad (2)$$

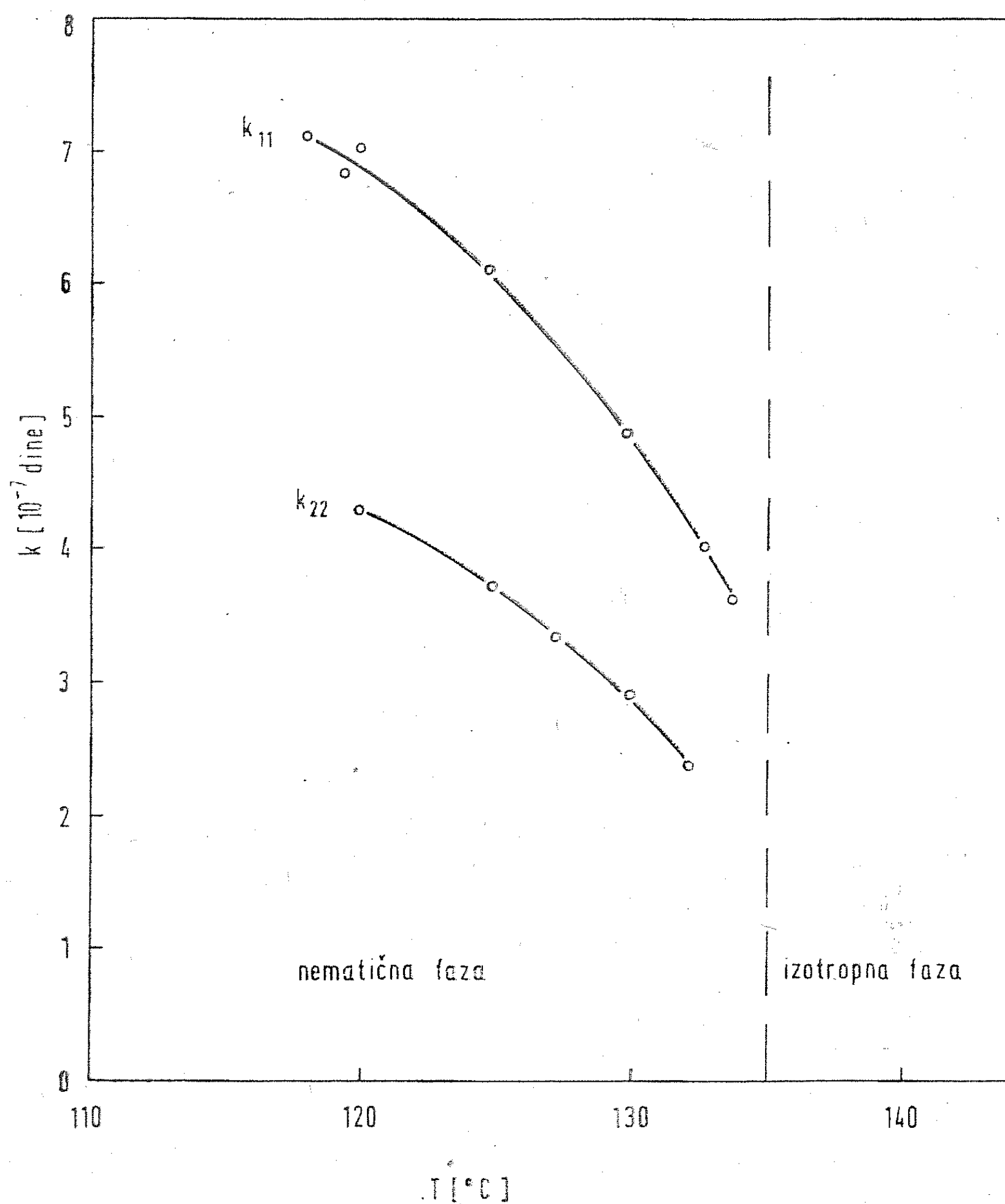
Ta izraz je popolnoma splošen, velja za vse tri osnovne tipe tekočih kristalov.

Če se omejimo na molekule, ki niso polarne v smeri vzdolžnih osi, ali pa so polarne in porazdeljene z enako verjetnostjo v smeri vektorja L in v nasprotni smeri, je možna tudi transformacija koordinatnega sistema $x' = x$, $y' = -y$, $z' = -z$, ne da bi se pri tem spremenil izraz za prosto energijo. S pomočjo te transformacije dobimo še dve nadaljnji omejitvi za elastične konstante, namreč $k_1 = 0$ in $k_{12} = 0$.

Podobno nam da omejitev na molekule, ki ne kažejo niti po svoji zgradbi niti po ureditvi enanciomorfizma (lastnosti, da se pojavljajo v desni in levi obliki, kot npr. desna in leva roka), dodatni podatek $k_2 = 0$ in $k_{12} = 0$.

Po zgornjih dveh omejitvah ostanejo različne od 0 le še konstante k_{11} , k_{22} , k_{33} in k_{24} . k_{24} ne nastopa pri »ravninskih« deformacijah, pri katerih ostanejo molekule ves čas vzporedne z neko stalno ravnino v prostoru. k_{24} odgovarja tipični tridimenzionalni deformaciji, pri kateri so smeri vektorjev L pravokotne na sedlasto ploskev.

V smektičnem tekočem kristalu tipa A pride običajno do deformacij, pri katerih se ohrani razdalja med molekulskimi plastmi kakor tudi pravokotnost molekul na tangentno ravnino plasti. To pomeni, da nastopa le deformacija »prečnega upogiba«, ne pa tudi »vzdolžnega« in »zasuka«. Zato imata obe elastični konstanti k_{22} in k_{33} , ki pripadata »nedovoljenima« deformacijama, zelo veliki vrednosti v primeri z ostalimi konstantami. To je značilna lastnost smektičnih tekočih kristalov.



Sl. 13. Temperaturna odvisnost elastičnih konstant k_{11} (meril Saupe) in k_{22} (merila Fréedericksz in Zwetkoff) za PAA.

Pri nematičnih tekočih kristalih nastopajo vse tri vrste deformacij. Zato so tudi vse tri elastične konstante k_{11} , k_{22} in k_{33} , ki edine nastopajo pri deformacijah tanke, urejene nematične plasti, istega reda velikosti. Njihove vrednosti je mogoče določiti z meritvijo.

Če hočemo npr. izmeriti vrednost elastične konstante k_{11} ⁷, vzamemo do 0,5 mm debelo plast nematičnega tekočega kristala, v kateri ležijo molekule vzporedno s steklenima ploščicama. Vzorec damo v zunanje magnetno polje, ki naj ima smer osi x (sl. 10a). Molekule se skušajo postaviti v smer magnetnega polja, pri čemer jih ovirajo elastične sile. Zato se zavrtijo le za nek kot φ v ravnini (x, z) . $\varphi = 0^\circ$ ob obeh steklenih ploščicah, ob katerih so molekule kot prilepljene, največjo vrednost pa zavzame φ na sredi plasti. Deformacija nematične plasti se kaže v spremembi optičnih lastnosti. Merimo, na primer, razliko poti med dvema žarkoma, od katerih je eden linearno polariziran v smeri osi y , eden pa v smeri osi z . Pri deformirani plasti se razlika poti zmanjša. Poskus pokaže, da obstoji neka kritična magnetna poljska jakost H_0 , ki je odvisna od debeline plasti. Deformacija nastopi šele, če je $H > H_0$, za $H < H_0$ pa je ni. Saupe je z uporabo Frankovega izraza za prosto energijo (en. 2) izračunal vrednost H_0 :

$$H_0 = \frac{\pi}{x_0} \sqrt{\frac{4\pi k_{11}}{\mu_0 (\chi_1 - \chi_2)}}. \quad (3)$$

Pri tem je x_0 debelina plasti, χ_1 je magnetna susceptibilnost, če so molekule orientirane v smeri magnetnega polja, χ_2 pa če leže molekule pravokotno na smer magnetnega polja. Ker je mogoče meriti H_0 , $\chi_1 - \chi_2$ in x_0 , lahko iz enačbe (3) določimo elastično konstanto k_{11} . Na podoben način, če le spremenimo smer magnetnega polja ali orientacijo vzorca, lahko določimo tudi konstanti k_{22} in k_{33} .

Saupe⁷, Fréedericksz in Zwetkoff so izmerili na ta način temperaturno odvisnost elastičnih konstant za PAA. Na sliki 13 so rezultati meritev k_{11} in k_{22} . Vrednosti teh konstant so zelo majhne, reda velikosti 10^{-6} dine. Ta velikost približno odgovarja medmolekularni interakcijski energiji deljeni z molekulsko dolžino. Vrednost elastičnih konstant z naraščajočo temperaturo pada in postane nič pri temperaturi prehoda tekoče kristalne faze v izotropno kapljevino. Ugotovili so tudi, da je za PAA razmerje $k_{22} : k_{11} : k_{33} = 1 : 1,6 : 3,8$. Zanimivo je, da se to razmerje s temperaturo ne spreminja.

Frankov izraz za prosto energijo posameznih vrst tekočih kristalov so uporabili že mnogi avtorji za nadaljnje račune, npr. pri študiju obnašanja tekočih kristalov v magnetnem polju ali pa za izračun parske korelacijske funkcije, sipanja svetlobe, jedrske spinske relaksacije itd.

4. Fenomenološka obravnava faznega prehoda iz izotropne v nematične fazo

Frankova teorija obravnava samo tekoče kristalno stanje, ne pa tudi faznih prehodov v to stanje. Šele v zadnjem času so izdelali tudi teorijo za popis faznega prehoda iz nematične mezofaze v izotropno kapljevino.^{8, 9} Prehod je prvega reda. Nematična in izotropna faza se med seboj razlikujeta po urejenosti molekul, ki se pri temperaturi prehoda T_k nezvezno spremeni. Za popis faznega prehoda potrebujemo parameter reda, ki meri urejenost molekul. Definiramo ga lahko z mikroskopskega ali pa z makroskopskega stališča.

Z mikroskopskega stališča je najenostavneje definirati parameter reda za nematične tekoče kristale, ki vsebujejo le osno simetrične molekule. V tem primeru je parameter reda

$$S = \frac{1}{2} \langle 3 \cos^2 \vartheta - 1 \rangle. \quad (4)$$

ϑ je kot med vzdolžno osjo molekule in optično osjo, $\langle \rangle$ pa pomeni povprečje po vseh molekulah. S ima največjo vrednost 1, kadar leže molekule vzporedno. Za molekule, ki nimajo osne simetrije, posplošimo parameter reda:

$$S_{ij}^{a\beta} = \frac{1}{2} \langle 3i_a j_\beta - \delta_{ij} \delta_{a\beta} \rangle.$$

Vektorji i, j , in k so enotni vektorji vzdolž osi molekulskega koordinatnega sistema, indeksi a, β in γ pa se nanašajo na laboratorijski sistem.

Makroskopski pristop je splošnejši od mikroskopskega, ker ni vezan na predpostavko o togosti molekul. Za definicijo makroskopskega parametra reda lahko uporabimo katerokoli tenzorsko količino tekočega kristala. Običajno je to kar tenzor magnetne susceptibilnosti $\chi_{a\beta}$. Makroskopski parameter reda $Q_{a\beta}$ definiramo potem kot

$$Q_{a\beta} = \chi_{a\beta} - \frac{1}{3} \sum_{\gamma} \chi_{\gamma\gamma} \delta_{a\beta}.$$

$Q_{a\beta}$ je simetričen tenzor s sledjo nič. V lastnem sistemu ga lahko napišemo v obliki

$$Q_{a\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{Q+\eta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q-\eta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & +Q \end{bmatrix}$$

Če je $\eta = 0$, imamo enoosni, za $\eta \neq 0$ pa dvoosni nematični tekoči kristal.

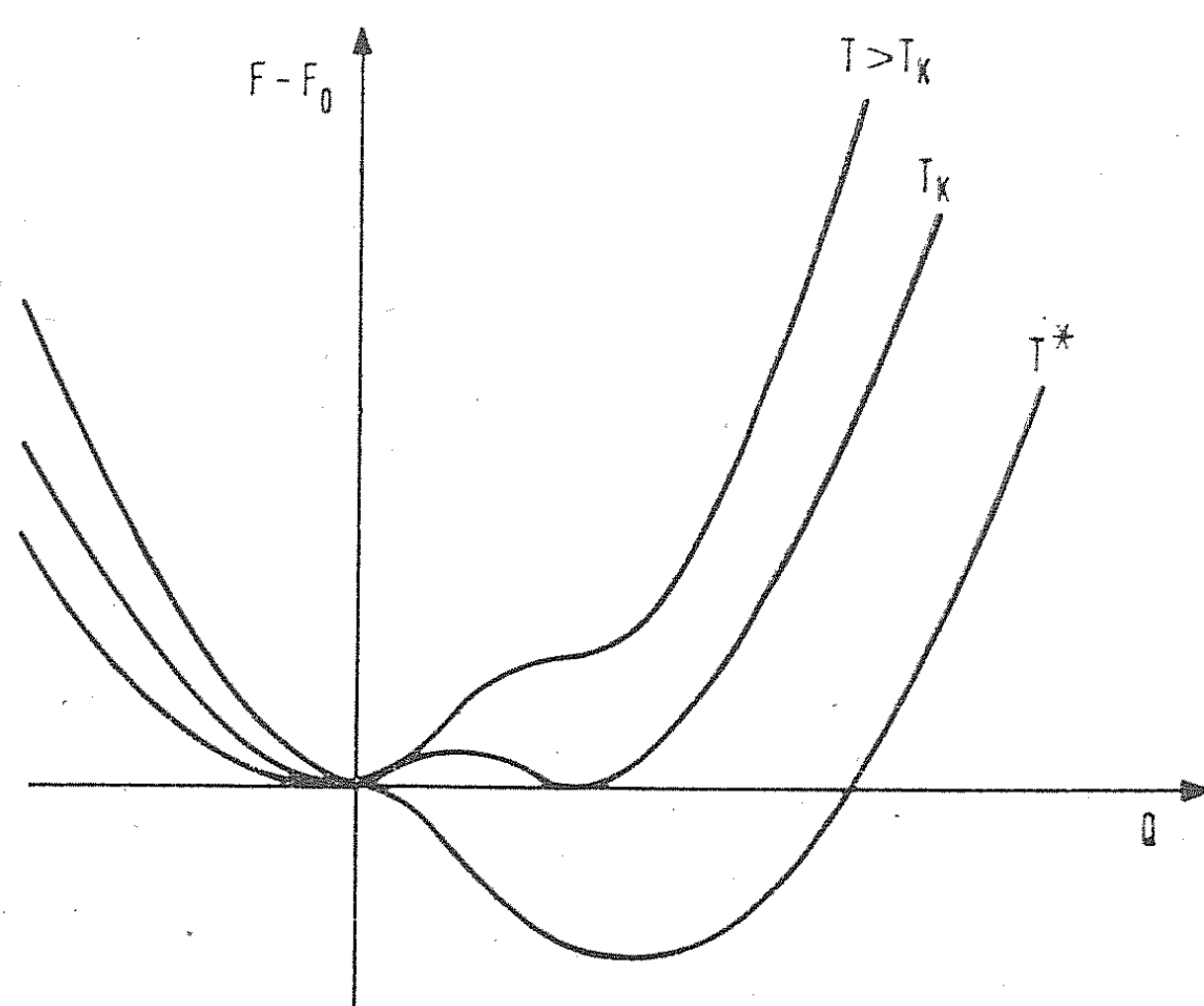
Kadar lahko magnetne interakcije med molekulami zanemarimo, obstoji enostavna zveza med makroskopskim in mikroskopskim parametrom reda:

$$Q_{a\beta} = n \sum_{i,j} S_{ij}^{a\beta} \chi^{ij}$$

n je število molekul na enoto prostornine, χ^{ij} pa tenzor susceptibilnosti za eno molekulo v molekularnem sistemu.

V bližini faznega prehoda razvijemo v skladu z Landauovo teorijo faznih prehodov gostoto proste entalpije F v vrsto po parametru reda in obdržimo le člene, ki se pri rotaciji koordinatnega sistema ne spremenijo:

$$F = F_0 + \frac{1}{2} A \sum_{a,\beta} Q_{a\beta} Q_{\beta a} + \frac{1}{3} B \sum_{a,\beta,\gamma} Q_{a\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma a} + \frac{1}{4} C \sum_{a,\beta,\gamma,\delta} Q_{a\beta}^2 Q_{\gamma\delta}^2 + \dots \quad (5)$$



Sl. 14. Prosta entalpija v odvisnosti od parametra reda.

Za A privzamemo¹⁰, da se spreminja kot $A(T) = a(T - T^*)^b$. T^* je temperatura, ki je malo nižja od temperature faznega prehoda T_k , b pa neznan eksponent, ki je v aproksimaciji molekularnega polja enak 1. Konstanti B in C sta neodvisni od temperature. Prisotnost kubičnega člena v razvoju gostote proste entalpije povzroča, da se parameter reda pri faznem prehodu nezvezno spremeni in je zato prehod prvega reda.

Oglejmo si izraz (5) za enoosni nematični tekoči kristal ($\eta = 0$)! Tenzor $Q_{\alpha\beta}$ ima v lastnem koordinatnem sistemu od nič različne le komponente $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q$ in $Q_{zz} = Q$, tako da dobimo

$$F = F_0 + \frac{3}{4} A Q^2 + \frac{1}{4} B Q^3 + \frac{9}{16} C Q^4 + \dots$$

Stephen⁹ predpostavi, da so nadaljnji členi v razvoju zanemarljivi tudi v urejeni fazi. Z odvajanjem poišče minimume proste entalpije (sl. 14). Izkaže se, da ima prosta entalpija minimum pri vrednostih:

$$Q = 0 \quad \text{pri } T > T_k$$

$$Q = 0 \text{ in } Q = -\frac{B}{6C} \left[1 + \left(1 - 24 \frac{AC}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{pri } T = T_k$$

$$Q = -\frac{B}{6C} \left[1 + \left(1 - 24 \frac{AC}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{pri } T < T_k$$

$$Q = -\frac{B}{3C} \quad \text{pri } T = T^*.$$

5. NMR spektroskopija tekočih kristalov

V prvih desetletjih po odkritju tekočih kristalov so preučevali njihovo zgradbo in lastnosti predvsem z optičnimi metodami, z navadnim ali polarizacijskim mikroskopom. Kasneje se je za določevanje zgradbe uveljavila metoda z uklonom rentgenskih žarkov. V zadnjih dveh desetletjih je postala tudi jedrska magnetna resonanca¹¹ (NMR) pomemben pripomoček za študij urejenosti in dinamike tekočih kristalov.

Z metodo NMR so največ opazovali protone v tekočih kristalih^{12, 13}. Vzroka za to sta dva. Prvič je absorpcijska črta, ki jo dajo protoni zelo močna in jo je lahko izluščiti iz šuma. Poleg tega pa vsebujejo protone praktično vsi tekoči kristali. Šele v zadnjih dveh letih so z NMR aparaturami z izboljšano občutljivostjo opazovali tudi signale devterija v liotropnih tekočih kristalih^{14, 15} in dušika v PAA¹⁶.

Širina NMR absorpcijske črte se spremeni pri faznih prehodih. Tako lahko določimo temperature prehodov, kar je posebej pomembno pri snoveh z več kot eno mezofazo. Ponavadi je mogoče iz oblike oziroma širine črte tudi sklepati na vrsto mezofaze.

Spektri protonov so najbolj zanimivi pri nematičnih tekočih kristalih, ker kažejo precej strukture. Le-to si bomo podrobneje ogledali. Še prej pa moramo vedeti nekaj o širini protonske NMR absorpcijske črte.

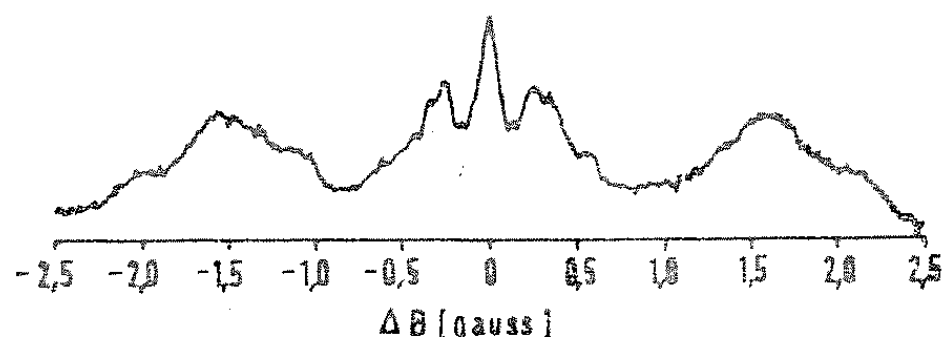
Za jedro s spinom $I = \frac{1}{2}$ in magnetnim momentom $\gamma \hbar I$, kjer je γ giromagnetno razmerje, si predstavljamo, da sta možni le dve orientaciji v zunanjem magnetnem polju z gostoto B : paralelna s poljem in antiparalelna, katerima pripadata energiji $E_{\frac{1}{2}}$ in $E_{-\frac{1}{2}}$:

$$E_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \gamma \hbar B \quad \text{za } m = \frac{1}{2} \text{ in}$$

$$E_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \gamma \hbar B \quad \text{za } m = -\frac{1}{2}.$$

Giromagnetno razmerje γ je različno za različna jedra. Energijska razlika med obema položajema je $\Delta E = \gamma \hbar B$. Pogoji za jedrsko magnetno resonanco je izpolnjen, kadar imajo kvanti elektromagnetnega polja energijo $\hbar \omega = \Delta E$. Pri stalni frekvenci in spreminjajočem se zunanjem magnetnem polju pride zato do absorpcije pri vrednosti magnetnega polja $B = \omega/\gamma$. Absorpcijska črta pa ni nikoli neskončno ostra. Njena širina je predvsem posledica interakcij med magnetnimi dipolnimi momenti jeder.

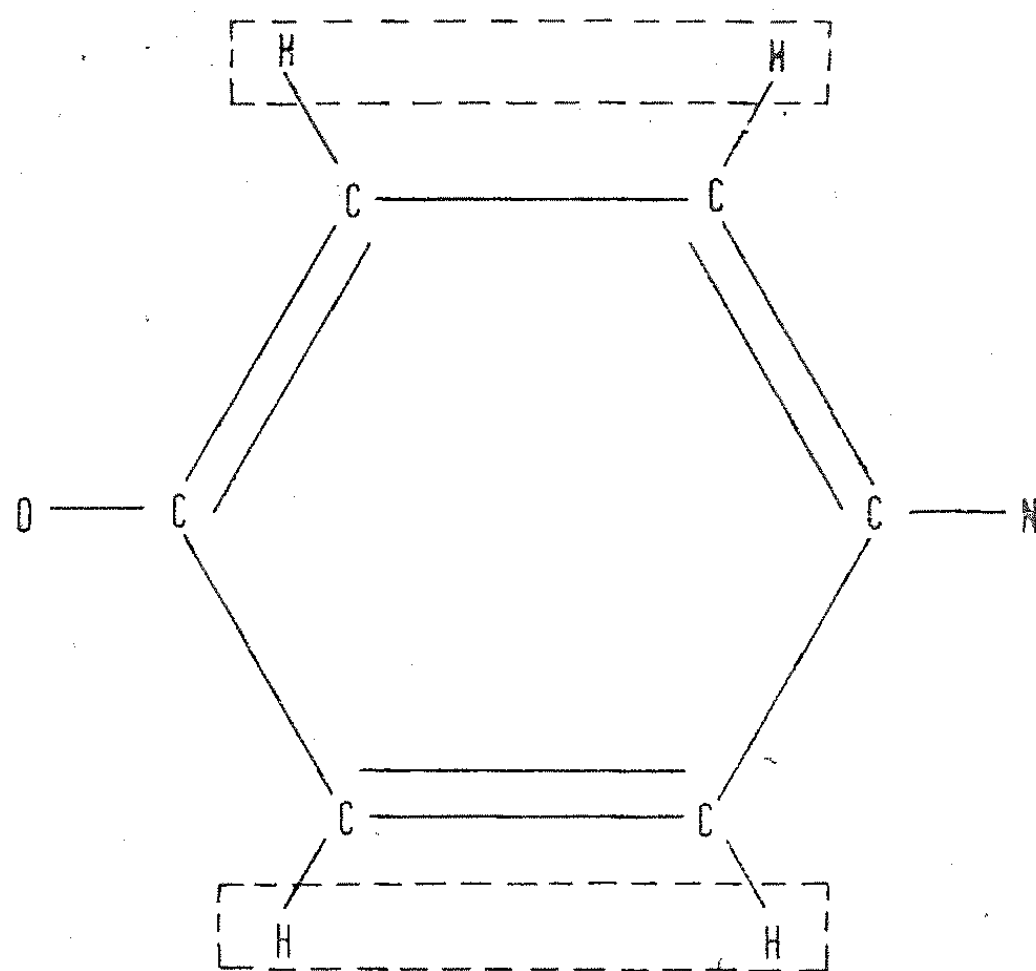
V kristalu nastane zaradi magnetnih dipolnih momentov jeder lokalno magnetno polje reda velikosti nekaj gaussov. Njegova jakost in smer se spreminjata s krajem. Posledica vpliva lokalnega magnetnega polja je razmazanost resonančne frekvence, torej razširitev



Sl. 15. NMR absorpcijski spekter protonov v tekočem kristalu PAA.

absorpcijske črte. Širine črt znašajo okrog 10 gaussov pri trdnih snoveh. Absorpcijski signal tekočin je 10^4 -krat ožji. Fizikalno si to razložimo takole: pri tekočinah imamo opravka s hitrim termičnim gibanjem jeder. Lokalno magnetno polje časovno tako hitro fluktuira, da zazna jedro le njegovo povprečno vrednost.

Sedaj se povrnimo k protonskemu spektru PAA (sl. 15). Molekula PAA vsebuje 14 vodikovih atomov; šest jih pripada dvema skupinama CH_3 , osem pa benzenovima obročema. Če nadomestimo protone, ki pripadajo skupinam CH_3 , z devteroni, praktično izgine srednja črta, ki je pri navadnem PAA višja kot stranski dve¹⁴. Iz tega poskusa sklepamo, da dajo protoni iz metilnih grup v spektru PAA srednjo črto, protoni iz benzenovih obročev pa stranski dve.



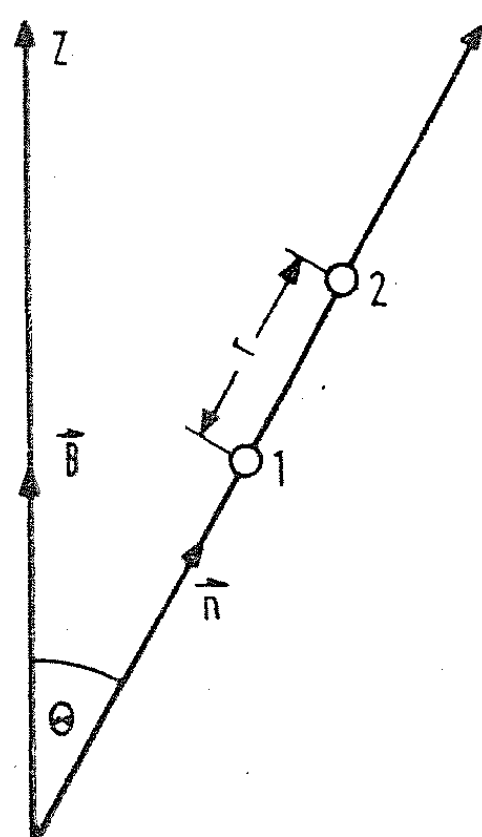
Sl. 16. Po dva sosednja protona na benzenovem obroču tvorita ločeno skupino.

Težko bi bilo računsko obdelati medsebojni vpliv večjega števila spinov v zunanjem magnetnem polju. Na srečo pa lahko v primeru PAA (in še mnogih drugih nematičnih tekočih kristalov) privzamemo, da tvorita dva sosednja protona na benzenovem obroču (sl. 16) ločeno skupino in upoštevamo samo njun medsebojni vpliv. Njuna oddaljenost je namreč manjša kot razdalje med posameznimi skupinami, magnetna dipolna interakcija pa z razdaljo hitro pojema.

Energijske nivoje sistema dveh spinov v zunanjem magnetnem polju lahko izračunamo¹⁸. Hamiltonov operator za tak spinski par je:

$$H = -\gamma \hbar B (I_z^1 + I_z^2) + \frac{\mu_0 \gamma^2 \hbar^2}{4\pi r^3} [\mathbf{I}^1 \cdot \mathbf{I}^2 - 3(\mathbf{I}^1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{I}^2 \cdot \mathbf{n})]. \quad (6)$$

I^1 in I^2 sta spinska operatorja, r je razdalja med obema spinoma, $\mathbf{n}$ pa enotni vektor v smeri veznice med njima. Prvi člen Hamiltonovega operatorja opisuje sklopitev magnetnih dipolnih momentov jeder z zunanjim magnetnim poljem, drugi pa medsebojno interakcijo



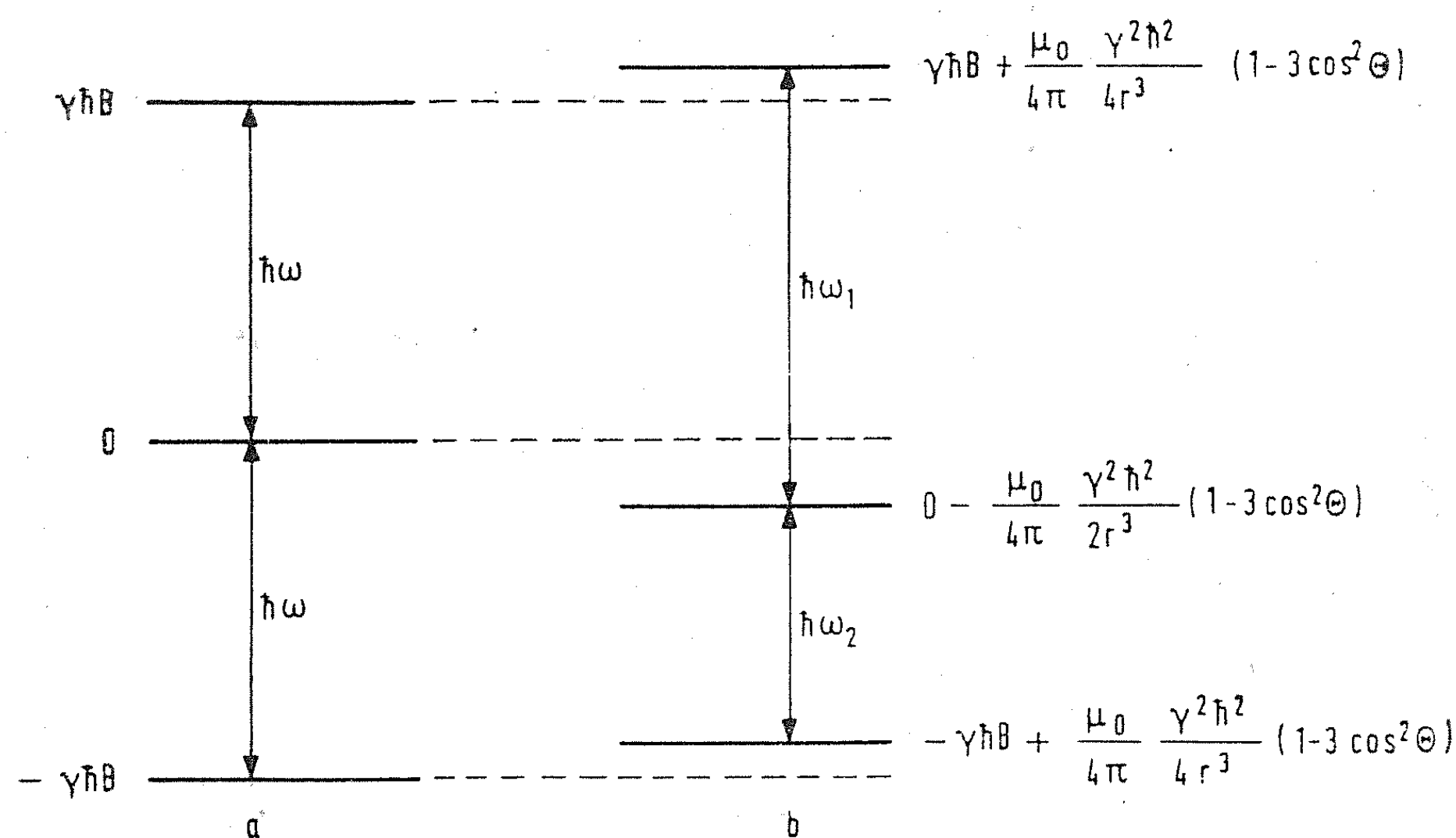
Sl. 17. θ je kot med smerjo veznice dveh spinov in smerjo zunanjega magnetnega polja.

dveh spinov. Kadar je zunanje magnetno polje (pri običajnih NMR meritvah je gostota zunanjega magnetnega polja nekaj tisoč gaussov) močno v primerjavi z lokalnim, obravnavamo drugi člen kot motnjo. Namesto pravokotnih koordinat v enačbi 6 lahko uporabimo sferične r , θ , φ . θ je kot med smerjo veznice obeh spinov in smerjo zunanjega magnetnega polja (sl. 17). Če izpustimo v Hamiltonovem operatorju člene, ki v prvem redu ne vplivajo na energijske nivoje, zapišemo H v naslednji obliki:

$$H = -\gamma\hbar B (I_z^1 + I_z^2) + \frac{\mu_0\gamma^2\hbar^2}{4\pi r^3} \left[\frac{3}{2} (1 - 3\cos^2\theta) I_z^1 I_z^2 - \frac{1}{2} (1 - 3\cos^2\theta) \mathbf{I}^1 \cdot \mathbf{I}^2 \right]. \quad (7)$$

Ta oblika je primerna za računanje matričnih elementov. Lastne vrednosti prvega člena so $\gamma\hbar B$, 0 in $-\gamma\hbar B$. Če upoštevamo še popravke, ki jih prinese drugi člen, so lastne vrednosti operatorja H :

$$\begin{aligned} & \gamma\hbar B + \frac{\mu_0\gamma^2\hbar^2}{16\pi r^3} (1 - 3\cos^2\theta) \\ & - \frac{\mu_0\gamma^2\hbar^2}{8\pi r^3} (1 - 3\cos^2\theta) \\ & -\gamma\hbar B + \frac{\mu_0\gamma^2\hbar^2}{16\pi r^3} (1 - 3\cos^2\theta). \end{aligned}$$



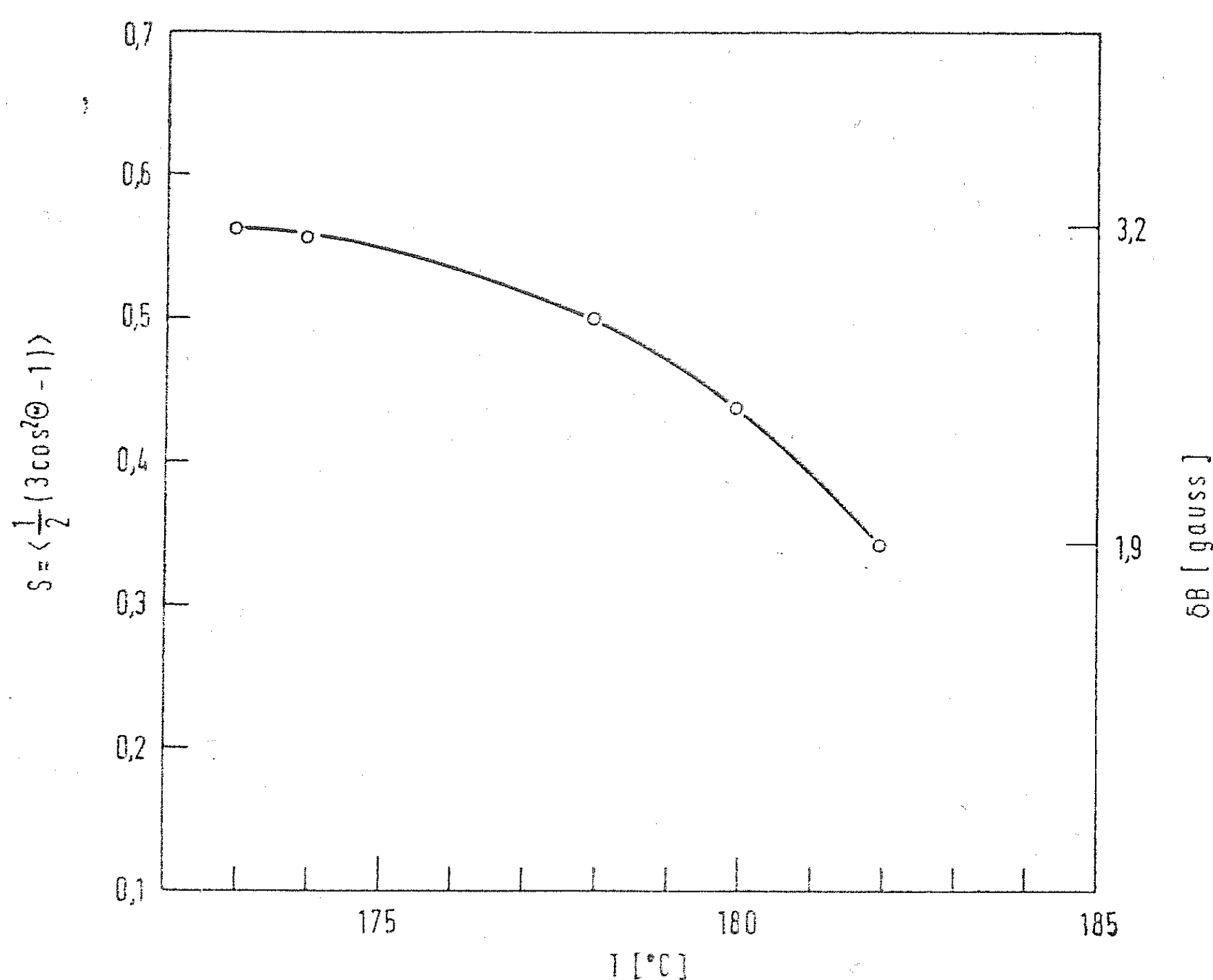
Sl. 18. Energijski nivoji sistema dveh spinov $I = 1/2$ v močnem zunanjem magnetnem polju: a. brez upoštevanja medsebojne interakcije; b. z upoštevanjem medsebojne interakcije (velikost popravka na sliki b je pretirana).

Namesto ene imamo sedaj dve resonančni frekvenci ω_1 in ω_2 (sl. 18). Njuna razlika je

$$\Delta\omega = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 \gamma^2 \hbar}{4\pi r^3} (1 - 3\cos^2 \theta). \quad (8)$$

Vidimo, da je razcep resonančne absorpcijske črte sorazmeren s kvadratom kosinusa kota med veznico obeh protonov in smerjo zunanega magnetnega polja.

Iz izmerjenega dipolnega razcepa je mogoče določiti parameter reda S (en. 4) tekočega kristala¹⁹. Sedaj je θ kot med trenutno smerjo osi molekule in smerjo zunanega magnetnega polja. V primeru PAA in njemu podobnih tekočih kristalov je veznica med obema protonoma približno vzporedna vzdolžni osi molekule. Zato sta kota θ v enačbi 8 in θ v izrazu za S ista. Ureditveni parameter S je tako premo sorazmeren z dipolnim razcepom, če smemo nadomestiti $\cos^2 \theta$ v enačbi 8 z njegovim termodinamskim povprečjem $\langle \cos^2 \theta \rangle$. Ta zamenjava je upravičena iz naslednjega razloga: karakterističen čas spreminjanja molekulske orientacije τ je reda velikosti 10^{-9} sekunde, torej precej manjši kot recipročna vrednost frekvenčne razlike $1/\Delta\omega$, $\tau \ll 1/\Delta\omega$. Zato »čuti« molekula samo časovno povprečje interakcije. Časovno povprečje lahko nadomestimo s povprečjem po »ensembli«.



Sl. 19. Temperaturna odvisnost dipolnega protonskega razcepa in ureditvenega parametra S v nematični fazi paraanizaldazina.²⁰

Ureditveni parameter je mogoče izmeriti tudi z drugimi metodami, vendar so meritve z jedrsko magnetno resonanco, kadar so mogoče, najbolj natančne. Značilen primer temperature odvisnosti ureditvenega parametra, določenega iz dipolnega protonskega razcepa, vidimo na sliki 19.

LITERATURA

¹ Obsežen opis tekočih kristalov poda knjiga G. W. Gray: *Molecular Structure and the Properties of Liquid Crystals* (Academic Press, London and New York, 1962), kratek pregled pa članek: J. L. Fergason: *Liquid Crystals*, *Sci. Am.* **211**, No. 8, str. 77 (August 1964).

² I. G. Čistjakov: *Židkie kristalli* (Izdateljstvo Nauka, Moskva, 1966), str. 112.

³ Hl. de Vries: *Rotatory Power and Other Optical Properties of Certain Liquid Crystals*, *Acta Cryst.* **4**, 219 (1951).

⁴ I. Levstik, F. Lukič, M. Schara: *Termografija novotvorb s holesterinskimi tekočimi kristali*, *Zdrav. vestn.* **39**, 399 (1970).

⁵ F. C. Frank: *On the Theory of Liquid Crystals*, *Disc. Faraday Soc.* **25**, 19 (1958).

⁶ A. Saupe: Temperaturabhängigkeit und Grösse der Deformationskonstanten nematischer Flüssigkeiten, Z. Naturforschung **15a**, 810 (1960).

⁷ A. Saupe: Die Biegeelastizität der nematischen Phase von Azoxyanisol, Z. Naturforschung **15a**, 815 (1960).

⁸ P. G. de Gennes: Short Range Order Effects in the Isotropic Phase of Nematics and Cholesterics, referat na III. International Liquid Crystal Conference, Berlin, 1970.

⁹ Chung-peng Fan, M. J. Stephen: Isotropic-Nematic Phase Transition in Liquid Crystals, Phys. Rev. Lett. **25**, 500 (1970).

¹⁰ L. Landau, E. Lifšic: Statistička fizika (Naučna knjiga, Beograd, 1960), str. 367.

¹¹ I. Zupančič: Jedrska magnetna resonanca, Obz. mat. fiz. **6**, 120 (1959).

¹² H. Lippmann, K. H. Weber: Linienformen der magnetischen Protonenresonanzabsorption in kristallinen Flüssigkeiten, Ann. Phys. (6), **20**, 265 (1957).

¹³ R. F. Gould, editor: Ordered Fluids and Liquid Crystals (Am. Chem. Soc. Publications, Washington, 1967), str. 26.

¹⁴ J. Charvolin, P. Rigny: Résonance magnétique nucléaire du deutéron dans les phases mésomorphes du système laurate de potassium — eau lourde, J. de Phys. **30**, C4 — 76 (1969).

¹⁵ R. Blinc, K. Easwaran, J. Pirš, M. Vilfan, I. Zupančič: Self-diffusion and Molecular Order in Lyotropic Liquid Crystals, Phys. Rev. Lett. **25**, 1327 (1970).

¹⁶ B. Cabane, W. G. Clark: Effects of Order and Fluctuations on the N^{14} NMR in a Liquid Crystal, Phys. Rev. Lett. **25**, 91 (1970).

¹⁷ P. L. Jain, J. C. Lee, R. D. Spence: Proton Magnetic Resonance in Liquid Crystals — Orientation Effects, J. Chem. Phys. **23**, 878 (1955).

¹⁸ A. Abragam: The Principles of Nuclear Magnetism (Oxford Press, London, 1961), str. 216.

¹⁹ P. Pincus: Magnetic Resonance Determination of the Orientational Order in Liquid Crystals, J. de Phys. **30**, C4-8 (1969).

²⁰ R. Blinc, D.E.O'Reilly, E. M. Peterson, G. Lahajnar, I. Levstek: Proton Spin — Lattice Relaxation Study of the Liquid Crystal Transition in p-Anisaldazine, Sol. State Comm. **6**, 839 (1968).

NOVA MATEMATIKA V OSNOVNI ŠOLI*

Na seji strokovnega sveta Zavoda za šolstvo SR Slovenije, ki je bila dne 9. marca 1971, je bilo sklenjeno, da bomo v šolskem letu 1971/72 uvedli moderno matematiko v učni program osnovne šole v Sloveniji, tudi v podružničnih šolah in kombiniranih oddelkih. Pričeli bomo s prvim razredom osnovne šole, v naslednjih šolskih letih pa nadaljevali iz razreda v razred, tako, da bomo v šolskem letu 1978/79 pripeljali prvo generacijo učencev do konca osnovnošolskega študija matematike po novem programu.

Namen modernizacije osnovnošolske matematike je dati učencem že v osnovni šoli tako matematiko, ki naj učencu pomaga razvijati logično mišljenje, po drugi strani pa mu daje potrebno temeljno znanje za razumevanje in dojemanje matematike v srednji šoli in kasneje tudi v višjih in visokih šolah.

Smatramo, da je moderna matematika v sodobni družbi povsem upravičila svojo navzočnost v tehniških, naravoslovnih, ekonomskih in družbenih vedah. To dejstvo so v Sloveniji upoštevale v svojih učnih programih vse visoke in višje šole, pa tudi nekatere srednje šole, zlasti gimnazije so modernizirale pouk matematike, le osnovna šola še nadalje ostaja pri tradicionalnem računstvu. Nekaj posameznih učiteljev, ki povsem samoniklo išče pota v modernejši pouk matematike v osnovni šoli, so samo dokaz, da je tudi v osnovni šoli mogoče in potrebno narediti odločilni korak v računstvu.

Glede na to je modernizacija računskega pouka v osnovni šoli nujen pogoj, če hočemo, da bo osnovna šola opravljala svoje naloge v skladu z dognanji in zahtevami sodobne znanosti in tehnike.

Glavna novost je v prenosu matematične snovi iz višje na nižjo stopnjo, npr. teorije množic, osnov matematične logike, nedekadnih sistemov idr. S tem vsebinskim premikom želimo razvijati v učencih osnovnih šol več smisla in potrebe za samostojno mišljenje in logično sklepanje. Za dosedANJI računski dril, memoriranje dejstev in formul ni ne časa ne prostora.

Ta vsebinski premik pa zahteva tudi modernejše metode dela, za katere je značilno izrazito raziskovalno načelo. Šola učencu ne posreduje matematičnih dejstev in spoznanj, ampak se mora učenec dokopati do njih sam in z lastnim delom.

V ozadje bo stopilo poučevanje bolj ali manj zapletenih računskih postopkov. Namesto tega bomo dali prednost spoznavanju nekaterih matematičnih struktur, ki bodo po vsebini in izvedbi primerni otrokovi razvojni stopnji. Pri tem smo izbrali sistem pouka matematike, ki je bil že preizkušen v nekaterih deželah in ki temelji na rezultatih psihološko pedagoških raziskav matematičnega učnega procesa.

Povod za spremembo pouka matematike v osnovni šoli so nam dali tudi učitelji sami, ki so na razne načine izražali nezadovoljstvo nad zastarelim načinom pouka računstva v osnovni šoli. Tudi nezadovoljivi učni uspehi v matematiki so pripomogli k tej odločitvi, a še največjo spodbudo so nam dali odgovori na anketo, ki smo jo poslali vsem šolam v Sloveniji in kjer je preko 85% učiteljev prvih razredov osnovnih šol odgovorilo, da se strinjajo s spremembo pouka matematike v osnovni šoli.

Zavod za šolstvo je že planiral delo v zvezi z uvajanjem nove matematike v osnovno šolo. V naslednjih letih bo treba postopoma usposobiti razredne učitelje za pouk nove matematike v prvih štirih razredih osnovne šole, ter predmetne učitelje za pouk od 5. do 8. razreda osnovne šole, motivirati in pridobiti učitelje osnovnih šol in prav tako učitelje

* Glej uvodnik »Sklepi 22. občnega zbora ...« (Op. ur.)

vseh drugih šol, pa tudi starše, javnost in družbene faktorje za spremembe v pouku matematike v osnovni šoli. Pripraviti moramo učbenike za učence in priročnike za učitelje, izdelati delovne zvezke za učence in učne lističe za pomoč učitelju pri skupinskem in pri individualnem delu v razredu, izdelati vsa didaktična sredstva za učence in za učitelja, izdelati naloge objektivnega tipa za preverjanje znanja, pripraviti učbenike za programiran pouk za izbrana poglavja iz matematike, izdelati program in pripraviti realizacijo televizijskih oddaj o novi matematiki za učiteljstvo in starše. Nalog je veliko, čeprav jih bomo postopoma reševali. To delo pa bomo uresničili le s pomočjo vseh, ki želijo napredno in sodobno osnovno šolo, predvsem pa s sodelovanjem obeh pedagoških akademij v Ljubljani in Mariboru, filozofske fakultete in fakultete za naravoslovje in tehnologijo na univerzi v Ljubljani, pedagoškega inštituta, strokovnih društev, in učiteljev srednjih šol, kjer že nekaj let poučujejo novo matematiko.

Naše prepričanje je, da le z dobro voljo in požrtvovalnostjo učiteljev osnovnih šol in s sodelovanjem vseh ostalih bomo dosegli uspehe, kakršnih si vsi želimo.

Stanko Uršič

NOVA MATEMATIKA IN ŠOLSKA REFORMA

Uvajanje »nove matematike« v 1. razred osnovnih šol ne pomeni le reformo matematičnega pouka na tej stopnji, ampak predstavlja jedro šolske reforme, ki ima za cilj, odpraviti v kar največji meri pasivnost in indiferentnost otroka in ga pripraviti do tega, da bo sam začel misliti in ustvarjati. Koliko ur včasih preteče pri današnjem načinu pouka, ne da bi se nam posrečilo vzbuditi v učencih resnično zanimanje za učno snov! Medtem ko se otrok z vso mladostno vnemo ogreva za igro, kino, tehniko in raznovrstne dogodivščine, pa ne kaže v šoli prav nobenega zanimanja, ampak le strašanski dolgčas.

Med sredstvi, ki naj otroka spravijo iz pasivnosti, so posebno važne *aktivne metode*. Bistvo teh metod je v naslednjem postopku:

a) **Predhodna priprava učencev.** Učitelj se ne sme zadovoljiti z razlago nekega pojava, ampak mora uporabiti vso svojo spretnost in znanje, da bi vzbudil v učencih radovednost in željo po razumevanju raziskovanega pojava, hkrati pa mora ustvariti podlago za takšno razumevanje.

b) **Samostojno delo učencev.** Učence je treba pustiti, da delajo sami. Verjetno se bodo motili in napačno razlagali dobljene rezultate. Toda če bodo sami odkrili napake, bodo tudi napake zanje plodovite. Prav to počasno, tavajoče delo rodi uspeh. Učenci se zavedajo svoje samostojnosti pri iskanju resnice, postanejo samozavestni in z veseljem prenašajo veliko večje umske napore, kot bi jih sicer.

c) **Skupna sinteza.** Učitelj na koncu vaje analizira dobljene rezultate, ugotavlja skupaj z učenci pridobljeno znanje in na kratko povzame sklepe.

Oglejmo si to na primeru! Na programu učne ure je četverkotnik. Namesto da učitelj »ex cathedra« razlaga vrste in lastnosti četverkotnikov, nariše na tablo dve daljici in naroči učencem, da ugotove, kakšne so možnosti medsebojnega sekanja glede na dolžine odsekov in glede na kote, ki jih daljici oklepata; nato naj spoje konce daljic in ugotove, kakšni liki nastanejo.

Učenci samostojno rišejo in spoznavajo: daljici se lahko razpolavljata ali pa ne, lahko se sekata v pravem ali v kakem drugem kotu; pri spajanju koncev daljic nastane četverkotnik, ki ima ali vse stranice enake ali vse kote enake ali vse stranice in vse kote enake itd. Med vajo hodi učitelj od učenca do učenca, svetuje, daje napotke... Na koncu povzame njihove izsledke, ugotovi značilnosti dobljenih likov in definira: kvadrat, pravokotnik, romb, rombold, trapez, deltoid...

Taka ura ni dolgočasna. Učenci vneto rešujejo dano nalogo in na koncu ure so vese li, da so samostojno odkrili različne vrste četverokotnikov in njihove glavne značilnosti.

Med državami, ki so se s silno vnemo lotile šolske reforme, je tudi Francija. V neki okrožnici francoskega ministrstva za narodno vzgojo beremo naslednje misli o aktivnih metodah:

»Aktivne metode imajo namen doseči, da bi bil otrok v razredu bolj igralec kot gledalec in poslušalec... Dinamičnost mladega človeka, ki ga nenehno žene, hočejo izkoristiti za njegovo lastno oblikovanje; namesto da to dinamiko zadržujemo ali jo celo tiščimo k tlom, je treba poiskati način, kako bi jo čim bolje izkoristili. Naj nihče ne pravi, da takšna pedagogika ubija disciplino in zmanjšuje zmožnost učencev za obvladovanje naporov! Izkušnja kaže nasprotno: da ni aktivnosti brez težaškega dela in brez notranje discipline.«

Pa še en razlog je za vpeljavo aktivnih metod v osnovne in srednje šole: individualizacija pouka.

Vsi učenci niso enako zmožni. Če bi vzel učitelj kriterij svoje zahtevnosti v razredu po slabših, bi se boljši polenili in bi zapravili svoje darove. Aktivne metode pa omogočajo učitelju boljše spoznavanje učencev in usmerjanje po njihovih sposobnostih. Tu učitelj lahko individualizira svoje metode. Ni potrebno, da bi vsi učenci delali z enakim tempom in tudi ne isto stvar. Nekateri so bolj temeljiti, drugi bolj široki; ta je zmožen velike koncentracije, drugi se le s težavo osredotoči na bistvo pojava; tega bolj zanima ta predmet ali ta stran pojava, onega drugi predmet ali druga stran pojava. Pri aktivnih metodah učitelj najbolje spozna naravo svojih učencev in jih v skladu z njo usmerja. Vsak učenec tu najde svoje mesto in tako vsi lahko napredujejo in oblikujejo svojo osebnost, ne da bi bil kdo v rasti oviran.

Aktivne metode so bistveni način dela pri pouku nove matematike. To je glavni razlog za reformo pouka v smislu uvajanja nove matematike. Pri tem ne gre za poudarek na novi vsebini, ampak zato, da nova vsebina s svojimi aktivnimi metodami veliko bolje kot stara služi razvoju določenih sposobnosti učenca, predvsem samostojnosti in logičnega mišljenja. In to že od zgodnjih otroških let. Saj kažejo raziskave pedagogov, da je otrok med šestim in sedmim letom najbolj dovzeten za napredek v razvoju logičnega mišljenja. Zato pa nova matematika prodira tudi v osnovne šole in celo v otroške vrtce.

Odločilnega pomena pri pouku nove matematike je tudi vloga učitelja, ki je zdaj popolnoma spremenjena. Naloga učitelja ni več poučevati, ampak voditi razred, z njim sodelovati in često brzdati prehitevanje tzv. »hitrih učencev«, ki bi hoteli prenašlo priti do površnih sklepov. Otroci se morajo učiti predvsem iz lastnih izkušenj in ne iz izkušenj učitelja, in vsak učenec se mora dokopati do matematičnih pojmov na svoj način, glede na svoje specifične miselne sposobnosti. Namesto dosedanje atmosfere poučevanja mora zavladati v razredu atmosfera učenja, toda nezavestnega učenja. Če gledamo otroke pri igri, vedno znova lahko ugotavljamo, kako jih neka skrivnostna sila prevzema, da pozabijo na ves svet okrog sebe. Otroci se v igro potope, vsi se ji predajo. Če hočemo doseči v šoli enako predanost, moramo potemtakem začeti z igro. Seveda je treba izbirati takšne igre, ob katerih si bodo otroci pridobivali izkušnje, na katerih bodo gradili pojme. Otroci se bodo učili, ne da bi se tega zavedali. To je velika prednost otroškega učenja.

V tradicionalnem pouku računstva se je ta proces nezavestnega učenja premalo upošteval. Zato je skrajni čas, da začnemo graditi naš učni program po nazorih sodobnih pedagogov. To seveda ne pomeni, računstvo odstraniti iz osnovne šole. Določena računska praksa je slej ko prej nujno potrebna. Toda glavni cilj šole postaja pridobivanje pojmov, vpogled v to, kar delamo. To mora biti na prvem mestu in ne sme biti zanemarjeno ali potisnjeno v ozadje.

Vstop v osnovno šolo naj bo torej nadaljevanje otrokovega predšolskega življenja in njegovih dosedanjih aktivnosti, iger, zabave itd. Naloga učitelja je le, da te aktivnosti vodi in usmerja proti določenemu cilju: do pojma števila, štetja in osnovnih računskih operacij.

Če gledamo na uvajanje nove matematike v osnovno šolo s stališča celotne šolske reforme — o kateri si menda nihče ne dela utvar, da ni nujna —, tedaj moramo samo želeči, da bi poskus čim bolje uspel. Za to pa je potrebno, da pri uresničevanju tega programa sodelujejo tako pedagogi kot matematiki strokovnjaki.

Franc Kvaternik

O PROGRAMU MATEMATIKE V SREDNJI ŠOLI*

Naslednji memorandum je sestavila skupina matematikov v Združenih državah in Kanadi. Nihče ni poskusil zbrati velikega števila podpisnikov s tem, da bi poslal memorandum v presojo celotni matematični skupnosti. Namesto tega je bil cilj dobiti skromno število podpisov od kompetentnih matematikov s širokim obzorjem in izkušnjami ter iz raznih krajev. Nekateri podpisniki, katerih podpora je zelo dobrodošla, so ponudili svoja imena, ko so zvedeli za memorandum od svojih kolegov.

Matematiki Združenih držav imajo sedaj primernejšo atmosfero, v kateri je možno razviti in si zagotoviti ugoden sprejem za izboljšave v pouku matematike. Res je nekaj skupin spoznalo ugodno priložnost in te sedaj trdo delajo z najboljšim namenom, da to priložnost izkoristijo.

Bila bi pa prava tragedija, če bi bila reforma pouka matematike izpeljana narobe in s tem izgubljena zlata priložnost. Na žalost pa obstajajo vplivi in sile, ki nas lahko zapeljejo. Matematiki, ki nasprotujejo premočnemu vplivu profesionalnih pedagogov, ki morda preveč poudarjajo pedagogiko na račun vsebine, imajo sedaj priložnost preveč poudariti vsebino na račun pedagogike in tako postati prav tako neučinkoviti. Matematiki morejo podzavestno smatrati, da imajo vsi mladi ljudje radi tisto, kar imajo radi današnji matematiki ali pa, da so edini učenci, ki jih je vredno vzgajati, tisti, ki bodo postali poklicni matematiki. Dejstvo, da se je danes treba naučiti več matematike kot v preteklosti, more povzročiti, da se uvedejo za dosego tega cilja bližnice. Tako pa utegne nastati več škode kot koristi.

Če imamo pred očmi neštete težave, bi bilo morda koristno formulirati nekaj osnovnih principov in praktičnih napotkov.

1. Za koga. Program matematike v srednji šoli naj bi poskrbel za potrebe vseh učencev: prispeval naj bi kulturnemu obzorju vseh učencev in nudil poklicno pripravo bodočim uporabnikom matematike, to je inženirjem in znanstvenikom, upoštevajoč tako fizikalne znanosti, ki so osnova naše tehnološke civilizacije, kakor tudi družbene znanosti, ki bodo mogoče postopoma potrebovale več matematike v prihodnosti. Medtem ko program skrbi za potrebe drugih učencev, lahko hkrati tudi nudi najpotrebnejše gradivo bodočim matematikom. Toda zapravljanje časa je, nuditi vsem učencem take predmete, ki zanimajo le majhno število bodočih matematikov, in pomeni preziranje potreb znanstvene skupnosti in družbe nasploh.

2. Veš, če znaš narediti. V matematiki ni znanje nikoli le posedovanje informacije, ampak treba je vedeti, kako uporabljati to informacijo. Znati matematiko pomeni imeti sposobnost za aktivno ukvarjanje z matematiko: tekoče uporabljati matematični jezik, reševati probleme, kritizirati argumente, dokazovati, in kar je najvažnejše, prepoznati matematični koncept v dani konkretni situaciji ali ga iz nje izluščiti.

Torej je še slabše kot brez koristi, če uvajamo nove pojme brez zadostnega ozadja konkretnih dejstev, če združujemo koncepte brez pravih izkušenj, ali če uvajamo pojme brez konkretne uporabe, ki bi vzpodbujala učence: prezgodnja formalizacija lahko vodi k sterilnosti; prezgodnje uvajanje abstrakcij povzroči odpor, posebno pri kritično mislečih, ki hočejo vedeti, čemu je neka abstrakcija primerna in kako se lahko uporabi, preden jo sprejmejo.

* Prevedeno iz »American Mathematical Monthly« 1962, Vol. 69, No. 3. Za dovoljenje se uredništvo lepo zahvaljuje.

3. Matematika in znanost. Po kulturnem pomenu kot tudi po praktični rabi je matematika povezana z drugimi znanostmi in druge znanosti so povezane z matematiko, ki je njihov jezik in njihov bistveni instrument. Če je matematika ločena od drugih znanosti, izgubi enega svojih najvažnejših virov interesa in motivacije.

4. Induktivni pristop in formalni dokazi. Matematično mišljenje ni samo deduktivno sklepanje; ne obstaja le iz formalnih dokazov. Duševni procesi, ki sugerirajo, kaj je treba dokazati in kako je treba dokazati, so ravno tako del matematičnega mišljenja kot dokaz, ki sledi iz njih. Izločevanje primerne koncepta iz konkretne situacije, posploševanje iz opazovanih primerov, induktivno dokazovanje, dokazovanje po analogiji in intuitivni proces za nastanek neke domneve — vse to so matematični načini mišljenja. In učenec brez prakse s takimi neformalnimi mišljenskimi procesi ne more razumeti prave vloge formalnega, strogega dokaza, ki ga je Hadamard tako dobro opisal: »Smisel matematične strogosti je dati veljavnost in legitimnost zmagam intuicije in strogost nikoli ni imela nobenega drugega namena.«

Obstajajo različne stopnje strogosti. Učenec naj se nauči ceniti, poiskati in kritično presoјati dokaze na nivoju, ki ustreza njegovemu izkustvu in obzorju. Če ga prezgodaj prisilimo na preveč formalen nivo, mu lahko vzamemo pogum in mu matematiko priskutimo. Občutek za strogost se da celo mnogo bolje pridobiti iz primerov, v katerih dokaz odpravi resnične naravne težave, kot pa z dlakocepstvom ali neskončnim poigravanjem s trivialnostmi.

5. Genetična metoda. »Za učenca, ki študira kateri koli predmet, je velika prednost, če lahko bere originalna dela o tem predmetu, kajti znanost se da najpopolneje asimilirati, kadar nastaja« je napisal James Clerk Maxwell. Da bi razložili neko idejo, so se nekateri navdihnjeni učitelji kot na primer Ernest Mach, sklicali na njen nastanek in so od začetka sledili zgodovinskemu oblikovanju te ideje. Iz tega je možno postaviti osnovno načelo: duševni razvoj posameznika se da najbolje voditi tako, da od začetka sledimo duševnemu razvoju rase — seveda obnovimo samo uspešne smeri in ne tisoč napak v posameznih podrobnostih.

Ta genetični princip nas more varovati pred splošno zmedo: Če je A logično pred B-jem v določenem sistemu, more B kljub temu upravičeno stati pred A-jem v učnem procesu posebno še, če je bil B zgodovinsko pred A-jem. Na splošno lahko pričakujemo večji uspeh, če sledimo genetičnemu principu, kakor od čisto formalnega pristopa k matematiki.

6. »Tradicionalna« matematika. Pouk matematike v osnovnih in srednjih šolah daleč zaostaja za potrebami današnjega časa in je potreben bistvenega izboljšanja. S tem splošno sprejetim mnenjem se povsem strinjamo. Često slišimo, da je vsebina matematičnih predmetov, ki jih poučujejo v srednji šoli, zastarela. To trditev bi morali natančno proučiti, ne pa kar površno sprejeti. Elementarna algebra, planimetrija, stereometrija, trigonometrija, analitična geometrija in infinitezimalni račun so še vedno osnove, kot so bile pred petdesetimi ali sto leti: bodoči uporabniki matematike se morajo učiti vse te predmete ne glede na to, ali se pripravljajo, da bodo postali matematiki, fiziki, sociologi ali inženirji, in vsi ti predmeti lahko nudijo kulturno vrednost vsem učencem. Tradicionalen pouk na srednjih šolah vsebuje do neke mere vse te predmete razen infinitezimalnega računa; bilo bi porazno, če bi katerega koli opustili.

Pri sedanjem programu matematike na srednjih šolah ni toliko slab izbor vsebine matematičnih predmetov, ki jih poučujejo, pač pa izoliranost matematike od drugih področij znanja in raziskovanja, posebno od fizikalnih znanosti, in izoliranost različnih predmetov med seboj; celo računski postopki in izreki znotraj istega matematičnega predmeta se zde izolirani triki učencu, ki ne ve nič o izvoru in namenu manipulacij in dejstev, ki naj bi se jih naučil na pamet. In tako se, na žalost, često zgodi, da se zdi snov, ki jo poučujejo, nerabna

in dolgočasna, razen mogoče maloštevilnim bodočim matematikom, ki vztrajajo kljub takemu učnemu programu.

7. »Moderna« matematika. Ker ni zveze med različnimi deli sedanjega učnega programa matematike, svetujemo tistim, ki se ukvarjajo z novimi programi, naj uvedejo enotne splošne koncepte. Mislimo tudi, da bi lahko razumna raba množic ter jezika in konceptov abstraktne algebre vnesla več skladnosti in enotnosti v pouk matematike na srednjih šolah. Vendar pa se duh moderne matematike ne da učiti le s ponavljanjem njene terminologije. Držeč se svojih načel želimo, da bi vpeljava novih izrazov in pojmov sledila zadostni konkretni pripravi, nadaljevali pa bi z naravnimi, izzivalnimi uporabami in ne s površno in nesmiselno snovjo: treba je motivirati in uporabiti nove pojme, če želimo prepričati inteligentnega učenca, da ta pojem zasluži pozornost.

Tu ne moremo začeti s podrobno analizo predlaganega novega programa, a če ga presojamo na osnovi zgoraj navedenih vodil (odstavki 1 — 5), moramo reči, da se ne strinjamo z nekaterimi točkami v njem.

Seveda nimajo vsi matematiki enakega okusa. Matematika ima mnogo aspektov. Lahko jo imamo za sredstvo, ki nam omogoča razumeti svet okoli sebe: matematika je verjetno imela to vrednost za Arhimeda in Newtona. Matematiko pa lahko smatramo tudi za igro s poljubnimi pravili, kjer je najbolj pomembno, da se držimo pravil igre: kak tak pogled je mogoče primeren za določene probleme v zvezi z osnovami. Še več drugih aspektov matematike je in profesionalni matematik lahko daje prednost kateremukoli. Toda pri poučevanju izbira ni več stvar okusa. Lahko pričakujemo, da bo inteligenčen učenec hotel raziskovati svet okoli sebe, ne moremo pa pričakovati, da se bo hotel učiti poljubna pravila. Zakaj prav ta in ne druga?

Vsekakor želimo mnogo uspeha vsem, ki imajo opravka z novim programom pouka matematike. Posebno želimo, da bi bila v novem programu bolj izražena zveza med matematiko in znanostjo in da bi se novi program skrbno ogibal razliki med predmeti, ki imajo logično prednost in med tistimi, ki naj bi imeli prednost pri poučevanju. Samo tako lahko upamo, da bodo postale osnovne vrednosti matematike, njen pravi pomen, namen in uporabnost dostopne vsem učencem, všteti morebitne bodoče matematike. Nedavno izražena »splošna zaskrbljenost glede tendence k pretiranemu poudarku na abstrakciji v pouku matematike inženirjem« kaže v isto smer.

Prevedla T. B.

IZ NAŠIH AKTIVOV

AKTIV MATEMATIKOV IN FIZIKOV

dne 14. apr. 1971 v Ljubljani

J. Ferbar je predvajal nadaljevanje angleškega poučnega filma o entropiji.

D. Modic je informiral navzoče o normativih za gradnjo osnovnih šol, ki so izšli 1968. leta, poleg tega pa jih je opozoril na brošuro »Kabinetni pouk«, ki je izšla pred kratkim. Pri tem se je omejil samo na zahteve, ki so postavljene glede fizikalnih učilnic in laboratorijev. Ugotovil je, da je prostor premajhen, da mora biti glede na število učencev, ki je določeno z normativi, glede na velikost delovnih miz in za gibanje učenca predvidenega prostora, učilnica za fiziko večja od matične učilnice. Druga pomanjkljivost je velikost shrambe (kabineta) za fiziko, ki je prav tako premajhna. Tretja pomanjkljivost je zahteva, da morajo biti vse napeljave izvedene v omaricah, namesto da bi bila dopustna izvedba v pokritih jaških.

Na občnem zboru je bila predlagana ustanovitev komisije za učila. Na sestanku so bili vanjo predlagani naslednji: F. Ahlin, J. Battestin, J. Ferbar, S. Kadunc, J. Kotnik, A. Kregar, F. Kvaternik, D. Modic, dr. A. Moljk, M. Pagon, F. Plevnik, T. Skulj, D. Tomažič, P. Zajc, ki jih bo treba povabiti k sodelovanju.

Po sestanku aktiva so se sestali nekateri člani komisije za učila. Ugotovili so, da je naloga komisije sodelovati z Zavodom za šolstvo pri ocenjevanju novih učil, prizadevati si za izboljšanje možnosti za nabavljanje učil domačih in tujih tovarn, pri čemer je treba za to zainteresirati izobraževalne skupnosti, zavod za šolstvo, sekretariat za prosveto in kulturo, domača podjetja (npr. ISKRA), sprožiti akcijo za informiranje šol o modernih učilih, proučiti normative za gradnjo laboratorijev, za opremo in posredovati mnenje ustreznih forumom. Vsa dejavnost pa naj bi težila za tem, da se bo z vso to problematiko sčasoma začel ukvarjati poseben oddelek zavoda za šolstvo. Za vodjo komisije je bil izbran J. Ferbar.

Na sestanku aktiva je bilo okrog 50 članov.

J. Ferbar je ponovil predavanje filma o entropiji v Kopru 21. 4. 1971.

AKTIV MATEMATIKOV IN FIZIKOV

21. 4. 1971 od 17. do 19. ure v

Novem mestu

Na sestanku, ki se ga je udeležilo 24 učiteljev z dolenjskih šol, je poročala Mara Glonar o poskusnem uvajanju moderne matematike v 1. razredu osnovne šole, eksperimentu, ki teče v Novem mestu na obeh osnovnih šolah v nekaj oddelkih.

Pri delu uporabljajo priročnike srbskega matematika Prvanovića. Program obsega formiranje pojma predmet, lego in položaj, velikost, obliko, pojem števila od 1 do 20 in števila nič, aritmetične operacije, reševanje nalog in pisanje števil in simbolov, med drugim tudi reševanje enostavnih enačb.

Presenetljiva je ugotovitev, da z novim načinom, ko izhajajo od množic (pojem, element, lastnosti, moč, podmnožica, primerjanje množic, prazna množica, operacije z množicami, operator, enakosti, neenakosti) skoraj vse klasične težave (npr. prehod čez desetico) odpadejo. Tudi pošteevanka jim v drugem razredu ne dela nobenih težav.

Njena izvajanja je dopolnila Angela Suhadolnik, ki prav tako sodeluje pri eksperimentu.

Predavanje je bilo ponovljeno 12. 5. 1971 v Ljubljani pred 110 poslušalci.

D. Modic

PISMA UREDNIŠTVU

Morda bo naše bravec zanimal nagovor študenta na večeru absolventov matematično-fizikalnega oddelka 1971.

Spoštovani profesorji, asistenti, kolegi absolventi!

Dovolite mi, da v te besede strnem del absolventskih misli in občutkov.

Štiri leta smo skupaj drgnili prej stare, za tem nove klopi, trošili smo kredo in črnilo, počenjali marsikaj ali pa nič. Absolventi smo.

Prehodili smo svojo pot metamorfoze. Iz zelenih brucov smo se izlegli. Nekateri tovariši so omagali že na začetku — ne vsi po svoji krivdi.

Kaj smo se v tem času naučili? Do kakšnih spoznanj smo se dokopali? Nekateri upamo, da potrebujemo samo še nekaj let študija in že bomo skoraj zagotovo vedeli, da nič ne vemo; drugi smo že uspeli pozabiti vsaj devet desetlin vsega, kar smo se bili naučili. Nekaterim se je fizika uprla, drugim se je matematika zagnusila, nekateri ljubimo teoretično fiziko, drugi numerično matematiko, nekaterim je cilj kariera, drugi hlepimo po denarju, spet nekateri smo s študijem zelo zadovoljni, drugi smo nezadovoljni, nekaterim je edina želja diplomirati, ... Vsak ima svoje mnenje o študiju, vsak ima svoje mnenje o matematiki in fiziki.

Včeraj sem na filozofski fakulteti, kjer študentje zborujejo že tri dni, videl viseti lepak: »Odprimo vrata zaporov, norišnic in drugih fakultet.« Mar res ne najdemo sami poti do naše zavesti?

Potegnimo črto! Ali bomo imeli kaj seštevati?

Posujmo se s pepelom in — diplomi naproti!

Še malo bo zasmrdelo po žveplu, pa se bomo porazgubili, da niti sled sence ne ostane za nami; in entropijskemu zakonu bo zadoščeno.

Kakorkoli že je, danes smo se zbrali, da se formalno prelevimo iz navadnih študentov v absolvente, da vdrugo zapojemo »gaudeamus«, čeprav je naša zelena zrelost dvomljivo preperela, da se poslovimo od šolskih klopi in ne nazadnje za to, da poravnamo dolg, ki ga dolgujemo vam, spoštovani profesorji in asistenti, dolg, ki ga ne moremo poravnati drugače, kot študentsko nesramno:

Hvala vam za vse!

T. P.

ODGOVORI UREDNIŠTVA

Dragi mladi tovariši — dijaki 2.a razreda gimnazije Koper!

Veseli smo bili vašega pisma, ne glede na njegovo vsebino. V logaritemskih tablicah sta omenjeni napaki res le »tiskarska škrata«. Ne upamo pa, da sta ti dve napaki edini. Kljub korekturam, smo že večkrat opazili, da se v knjige, še prav posebej matematične in fizikalne, kar radi vtihotapijo ne le »tiskarski škrti«, pač pa tudi vse bolj hudi spodrsaljaji. Kljub temu vas nismo vzeli povsem neresno in smo vam pred kratkim poslali namesto »Vegovega cekina« zadnjo knjigo iz knjižnice »SIGMA« F. Lebedinec in A. Vadnal: Funkcije II.

Za komisijo za tisk

Ciril Velkovrh

Oktober 1931 je začel v Ljubljani izhajati Elektrotehniški vestnik, izdajala ga je Strokovna zadruga koncesioniranih elektrotehnikov. Občudovati je treba pogum ustanoviteljev, ki so v takratnih skromnih razmerah in sredi velike gospodarske krize našli sredstva in smisel za svoj strokovni časopis. Pravilno so sklepali, da je uspeh v elektrotehnikah možen le s stalnim izobraževanjem in izpopolnjevanjem, kar pa najlepše omogoča dobro strokovno glasilo.

Vestnik je več ali manj redno izhajal, sicer v skromnem formatu in obsegu, njegova vsebina pa je bila od leta do leta boljša. Med vojno je zaradi okupacije naše domovine revija prenehala izhajati, to je tudi vzrok, da ob 40-letnici začetka izhajanja tudi nimamo 40. letnika.

Takoj po osvoboditvi so kot nadomestilo za medvojna leta izdali v knjižni obliki Elektrotehniški zbornik. Takrat je tudi nastopil kot novi urednik pokojni profesor Roman Poniž, tako da je revija začela leta 1946 zopet redno izhajati, vendar v večjem obsegu in na velikem formatu, ki ga ima še danes. Pod vodstvom novega, zelo agilnega urednika se je revija hitro uveljavila v Jugoslaviji in v tujini, leta 1947. je začela izhajati tudi vzporedna srbo-hrvatska izdaja, Elektrotehniški vestnik je postal glasilo jugoslovanskih elektroinženirjev in tehnikov.

Posebnost Elektrotehničnega vestnika so številne zamenjave z domačimi in zlasti inozemskimi strokovnimi revijami, ki obsegajo sedaj skoro 400 strokovnih časopisov in revij, to so praktično vse elektrotehniške revije sveta. Tehtno vrednost je imela ta zamenjava zlasti v tistih povojnih letih, ko so bile devize za tujo znanstveno in strokovno periodiko samo nedosegljive sanje.

V petdesetih letih se je Elektrotehniški vestnik odlikoval z elegantnimi teoretičnimi članki profesorja Koželja, ki so bili navadno kot inozemska priloga prevedeni tudi v tuj jezik in so po svetu vzbujali pozornost. Žal je bil ta razvoj leta 1968 boleče prizadet s smrtjo urednika profesorja Poniža in kmalu nato tudi stalnega sodelavca profesorja Koželja.

Novemu uredniku je uspelo obdržati revijo na njenem tradicionalnem nivoju, s pritegnitvijo novih sodelavcev ji pa skuša dati tudi več praktične vsebine, direktno uporabne in zanimive za elektrotehnike v industriji in elektrogospodarstvu. Od leta 1968 je izdajatelj Elektrotehniškega vestnika Elektrotehniška zveza Slovenije.

40 let za strokovno elektrotehniško revijo je tudi v svetovnem merilu že lep jubilej, v Jugoslaviji je pa Elektrotehniški vestnik daleč najstarejše elektrotehniško glasilo.

Oktober letos bo ob 40-letnici izšla posebna številka, ki bo v njej podan pregled razvoja revije od leta 1931 pa do danes. Ob tej priliki bo tudi svečana seja uredniškega odbora ter več drugih javnih manifestacij.

JOŽE ULČAR

In memoriam



Prezgodnja smrt Jožeta Ulčarja, rednega profesorja Naravoslovno matematične fakultete v Skopju in uglednega sodelavca Matematiške biblioteke ter Zbornika matematiških problemov prof. Mitrinovića, je bolešno zadela širok krog njegovih učencev, sodelavcev in prijateljev. Naslednje vrstice naj bodo posvečene življenju in delu našega uglednega matematika, ki nam je zapustil pomembna dela iz področja svoje stroke ter svetel spomin skromnega in plemenitega človeka ter požrtvovalnega družbenega delavca.

Jože Ulčar je bil rojen 4. aprila 1915 na Bledu. Gimnazijo je končal leta 1934 v Kranju, nato pa se je vpisal na matematični oddelek filozofske fakultete v Ljubljani, kjer je diplomiral leta 1938. Bil je učenec odličnih metodikov in znanstvenikov Josipa Plemlja in Richarda Zupančiča, od katerih je pridobil solidno znanje in nagnjenje k znanstvenemu delu.

V rodni Sloveniji je služboval zelo kratek čas. Leta 1939 je odšel v Makedonijo, kjer je delal do konca svojega življenja. V Strumici in Bitolju je bil profesor in direktor gimnazije, po ustanovitvi Filozofske fakultete v Skopju leta 1946 pa je bil izbran za predavatelja. Leta 1954 je postal docent, leta 1959 izredni profesor in leta 1965 redni profesor Naravoslovno matematične fakultete v Skopju. Od leta 1963 do 1965 je bil prorektor Skopske univerze. Umrl je 16. januarja 1967.

Poleg svojega pedagoškega dela je imel profesor Ulčar cel niz dolžnosti. Bil je tajnik, podpredsednik in predsednik Društva matematikov in fizikov SR Makedonije. V Zvezi društev matematikov in fizikov je aktivno sodeloval v komisiji za pouk matematike na univerzah, visokih in višjih šolah. Več let je bil predsednik komisije za profesorske izpite iz matematike v SR Makedoniji in odposlanec na maturitetnih izpitih. Svoje bogato znanje je razdal na številnih predavanjih in seminarjih za profesorje srednjih šol. Sodeloval je pri izdelavi načrtov in učbenikov in s tem ogromno doprinesel k napredku matematičnega pouka v SR Makedoniji. Bil je odlikovan z Redom dela in Redom bratstva in edinstva s srebrnim vencem. Bil je izrazit borec za bratstvo in enotnost naših narodov in se je popolnoma vključil v okolje, v katerem je živel. Čeprav po rodu Slovenec, je odlično obvladal makedonski jezik in je tudi predaval v makedonščini. Posebno velike zasluge si je pridobil pri izdelavi strokovne terminologije v tem jeziku.

Znana je Ulčarjeva široka matematična razgledanost. V začetku delovanja Filozofske fakultete v Skopju, v letih 1946—1948, sta vsa predavanja iz matematike prevzela le dva predavatelja: D. S. Mitrinović in J. Ulčar. Imela nista niti enega asistenta. Ulčarjevi tečaji so bili v različnih obdobjih: analitična geometrija, algebra, diferencialni in integralni račun, diferencialna geometrija, projektivna in opisna geometrija. Svoja predavanja je stalno izpopolnjeval, bil je jasen v izražanju, pri tem pa ni odstopal od matematične strogosti.

Nas bo predvsem zanimala njegova publicistična dejavnost na področju matematike: njegova znanstvena dela in njegov prispevek k učbenikom ter k pedagoško matematični literaturi, zlasti v svojstvu sodelavca Matematične biblioteke in Zbornika matematičnih problemov.

Ulčar je objavil devet znanstvenih del. To ni veliko število. Toda očitno je, da se je Ulčar lotil vsakega dela iz določenega notranjega nagiba. Bil je zelo kritičen. Njegova dela so izhajala le kot dozorele ideje, ki so se izoblikovale v njem po skrbnem proučevanju med daljšimi znanstvenimi in metodičnimi »eksperimenti«.

V delu **Edno geometrijsko tolkovanje na srednata krivina**, podaja avtor geometrijsko razlago srednje krivine.

Delo **Edna teorema od teorijata na granicite** vsebuje lastnosti neke vrste funkcij.

Delo **Za znakovite na parcijalnite izvodi od edna funkcija** so dve promenlivi, posplošuje neko geometrijsko razlago znakov zaporednih odvodov funkcije dveh spremenljivk.

V delu **Edna zabeleška za Gausovata i sredna krivina kaj eliptički iskriveni ploskosti**, je podano geometrijsko tolmačenje srednje in Gaussove krivine v primeru eliptičnih točk.

Notica **Geometrijska konstrukcija na edna kvadratična korespondenca**, prikazuje preprosto geometrijsko konstrukcijo korespondence med premicama dveh ravnin.

Notica **Za eden kriterij za razpoznavanje tipot na površinite od II red**, v kateri kaže Ulčar na nenatančnost nekega kriterija za razpoznavanje tipa ploskev drugega reda, je najdena v Lopšicovem učbeniku, ki je objavljen v ZSSR.

Delo **Edna grafička metoda za rešavanje na ravenkite** vsebuje izvirno grafično metodo za reševanje enačb z eno ali dvema neznankama, pri čemer izkorišča preslikavo, ki ni nujno vzajemno enolična.

Najvažnejše Ulčarjevo delo je vsekakor njegova habilitacija **O neincidentnim stranama nekih politopa**. V tem delu je dal Ulčar več zanimivih rezultatov in med temi objavil med drugim tudi nekatere rezultate D. Kurepe v zvezi s problemom določevanja največjega števila medsebojno neincidentnih stranic simpleksa Evklidovega večdimenzionalnega prostora, pri čemer je upošteval tudi nekatere vrste politopov. Podal je posplošitve za primer pravih politopov in nekaterih simpleksov ter običajnih politopov v večdimenzionalnem prostoru.

Zadnje Ulčarjevo znanstveno delo **O enodimenzionalnih kompleksih** predstavlja obdelavo rezultatov iz habilitacijskega dela in vsebuje nove originalne prispevke.

Od leta 1956 Ulčar ni objavljial znanstvenih del, zato pa so njegove pedagoške izkušnje prišle do izraza v njegovih predavanjih kakor tudi v učbenikih. Ta vrsta Ulčarjevih del vsebuje marsikateri izvirni prispevek in rešitev.

Oglejmo si še nekaj njegovih del iz področja metodike pouka, popularizacije pouka in uvajanja sodobnih gledišč v učno snov.

Zelo opažena je Ulčarjeva knjižica **Elementarno geometrijski preslikavanja i grupen princip vo geometrijata**. Tu je prikazana Kleinova ideja, po kateri je vsaka geometrija v bistvu geometrija dane grupe. Analitično in sintetično so podane definicije in lastnosti afinih in projektivnih preslikavanj kot tudi razlaga, kako ta preslikavanja določajo afino oziroma projektivno geometrijo, kako se ekvifina geometrija vključuje v afino, afina pa v projektivno. Razlago ponazarjajo raznovrstni, dobro izbrani primeri.

Članek **Za eden vid geometrijski konstrukciji** prikazuje na bogato ilustriranih zgledih, kako se pojem preslikavanja izkorišča za reševanje konstrukcijskih problemov.

V članku **Za ednostrano preiduvanje kon problemot na grafičko rešavanje na linearni sistemi vo našata nastavna praktika** so prikazane nekatere methodske enostranosti poučevanja.

Sestavek **Racionalni točki kaj elipsi i hiperboli i pitagorski triagolnici** se nanaša na nek zelo zanimiv primer iz učne prakse.

V članku **Stari i novi približni konstrukciji za rektifikacija na kružnata linija i kvadratura na krugot** je prikazano 19 zadevnih konstrukcij.

Ulčarjev učbenik **Analitična geometrija so vektorska algebra** je napisan v duhu Kleinovih idej. To je knjiga visoke pedagoške vrednosti, tako po sodobni zasnovi in obilju materiala kot po lepo izbranih primerih in velikem številu instruktivnih nalog.

Za srednjo šolo je napisal učbenik **Nacrtna geometrija za III in IV klas gimnazije**, za študente pa je pripravil skripta iz **Teorije ploskev**.

Sodelovanje Jožeta Ulčarja pri Matematički biblioteki in Zborniku matematiških problema prof. Mitrinovića predstavlja posebno stran njegove sinteze njegovih znanstvenih in pedagoških izkušenj. Sem spada predvsem daljši članek **Vektorji**, v katerem je podana sodobna obdelava vektorjev, ki pelje do vektorskega prostora nad poljubnim obsegom.

V članku **Elipsa kot paralelna projekcija kroga** je izpeljal na netradicionalen način metrične in afine lastnosti elipse.

V članku **Velika imena v geometriji** je v zanimivem in dokumentiranem opisu življenja in dela največjih ustvarjalcev s področja geometrije, podal svojevrsten prikaz zgodovine geometrije. Ta članek kaže velik Ulčarjev smisel za zgoščen in bogat opis, lasten samo dobrem poznavalcem svoje stroke in odličnim stilistom.

Prispevki Jožeta Ulčarja Zborniku matematiških problema prof. Mitrinovića ne predstavljajo samo odlična dela svoje vrste, marveč tudi pomemben doprinos učbeniški literaturi. V Zbornikih II in III pripadajo Ulčarju poglavja **Diferencialna geometrija in Projektivna geometrija**. Poglavje **Diferencialna geometrija** vsebuje 165 nalog, v katerih je obsežena vsa standardna klasična diferencialna geometrija: prostorske krivulje, ploskve, krivulje na ploskvah, transformacije koordinat in preslikavanja. Razen nekoliko izjem, ima vsaka naloga na koncu tudi rezultat, skoraj vsaka pa tudi navodilo ali potek reševanja. Nekatere rešitve so izvedene z vsemi nadrobnostmi. Razvidna je medsebojna povezanost na videz raznovrstnih in neodvisnih teoremov, ki omogoča rešiti nalogo na več načinov. Oznake so vektorske in tenzorske. Često več zaporednih nalog tvori enoto v tem smislu, da z raznih strani osvetlujejo isti razred krivulj in ploskev in podajajo vzajemno odvisnost in povezanost posameznih pojmov in dejstev. Oddelek **Projektivna geometrija** vsebuje 224 nalog in obravnava harmonijsko četverico točk in premic, projektivno preslikavanje enodimenzionalnih form, vključno z involucijo, krivulje drugega reda in druge razrede, projektivno preslikavanje teh krivulj, projektivno preslikavanje ravnin z različnimi posebnimi primeri. Afine in metrične naloge so uspešno kombinirane z drugimi, ki so samo projektivne. Naloge so silno raznolike in vsebinsko bogate. To je prva takšna zbirka pri nas, vendar na višini.

Ulčar je tudi soavtor zbirke **Zbirka zadači po viša matematika za studenti na tehnički fakulteti**, v kateri je napisal poglavje v zvezi z diferencialno geometrijo.

D. S. Mitrinović in J. Ulčar sta pred nekaj leti pripravila knjigo **Differential Geometry**, ki je leta 1969 izšla na Holandskem v angleščini. Ulčar njenega izida ni dočakal.

J. Ulčar je tudi napisal pregled razvoja matematičnih ved v SR Makedoniji do leta 1963 **Uvođenje mladih u naučni rad**, Matematička biblioteka, zv. 20, Beograd 1963, str. 97—99. Tu je podana prva ocena o stanju matematike v Makedoniji. Ko bodo nekoč zgodovinarji matematičnih ved pisali o razvoju matematike v Makedoniji in Jugoslaviji, bo J. Ulčar zavzel mesto enega od pionirjev.

Iz vsega povedanega lahko dobimo določno sliko o Ulčarjevem znanstvenem in strokovnem prispevku k matematiki. Ulčarjev doprinos predstavlja zanimivo in skladno povezavo njegovega znanstvenega in pedagoškega dela. Tudi manj pomembni prispevki se odlikujejo po njegovi matematični osebnosti. Kot da je na jedrnat način hotel pokazati večino svojih ustvarjalnih naporov in svoje obsežne matematične kulture, tako da bi dosegel neko zaokroženost in neko celovitost, pri čemer pa bi ostal vedno čisto svojski.

D. S. Mitrinović in B. S. Popov — prev. F. Kvaternik

NOVE KNJIGE

Bailey P. B. Shampine L. F., Waltman P. E.: *Nonlinear two point boundary value problems*. New York and London, Academic Press 1968. XV + 171 str. 8°. (Mathematics in Science and Engineering. Vol. 44) (MOS 34 B 15).

1. poglavje: Uvod
2. poglavje: Povezava med prvim in drugim robnim problemom
3. poglavje: Picardova iteracija
4. poglavje: Razdalja med ničlami rešitve in interval enolične rešljivosti
5. poglavje: Izreki o primerjanju
6. poglavje: Glavni eksistenčni izrek
7. poglavje: Drugi izrek o eksistenci in enoličnosti
8. poglavje: Numerično reševanje z metodami začetnih vrednosti
9. poglavje: Numerično reševanje z metodami robnih problemov

Navadne linearne diferencialne enačbe so področje klasične analize, ki je že dolgo temeljito obdelano in poznano. Teorija nelinearnih diferencialnih enačb je mlajša veja, ki je še v polnem razvoju. O rešitvah in reševanju nelinearnih diferencialnih enačb, pri katerih so podani začetni pogoji, najdemo mnogo napisanega v učbenikih diferencialnih enačb.

V knjigi obravnavajo avtorji tale problem: dana je diferencialna enačba drugega reda

$$y'' + f(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Iščemo rešitve, ki zadoščajo robnemu pogoju

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (2)$$

ali kakšnemu drugemu robnemu pogoju. Ta problem je zelo težak in šele v zadnjih dveh desetletjih so ga natančneje preiskali. Recenzirana knjiga je prva, posvečena nelinearnemu robnemu problemu. V njej je zbrano znanje, ki je bilo raztreseno v mnogih člankih v matematičnih revijah.

Večji del knjige je posvečen vprašanju eksistence in enolične rešljivosti problema (1), (2). Zadnji poglavji obravnavata numerično reševanje tega problema.

Knjiga bo nedvomno stimulirala nadaljnje raziskave na tem področju.

Edwards R. E.: *Functional analysis. Theory and applications*. New York, Holt, Rinehart and Winston 1965. XV + 781 str., od tega 32 strani literature. 8°. (MOS 46-01, 47-01).

0. poglavje: Uvodno o teoriji mere in topologiji
1. poglavje: Vektorski prostori in topološki vektorski prostori
2. poglavje: Hahn-Banachov izrek
3. poglavje: Izreki o fiksni točki
4. poglavje: Topološki dualni prostori nekaterih prostorov: Radonove mere
5. poglavje: Distribucije in linearne parcialne diferencialne enačbe
6. poglavje: Izrek o odprti preslikavi in zaprtem grafu
7. poglavje: Princip omejenosti
8. poglavje: Teorija dualnosti
9. poglavje: Teorija kompaktnih operatorjev
10. poglavje: Krein-Milmanov izrek in njegova uporaba

Odkar je l. 1932 izšla prva knjiga o funkcionalni analizi, Banachovi »Operations lineaires«, se je ta, razmeroma nova veja matematike, silno razvila. Doslej je bilo napisanih gotovo več kot 30 knjig, posvečenih funkcionalni analizi. Naj omenimo le nekaj najbolj zna-

nih: N. Bourbaki: »Espaces vectoriels topologiques«; G. Köthe: »Lineare topologische Räume« in enciklopedično delo N. Dunford, J. T. Schwartz: »Linear operators« v dveh delih (skupaj okoli 1800 strani), tretji del je tik pred izidom.

Funkcionalna analiza Edwardsa se od zgoraj omenjenih treh del razlikuje predvsem v naslednjem. Ta obravnavajo teoretično stran funkcionalne analize, uporabo omenjajo kvečjemu v nalogah. Edwards si je zadal za nalogo, enako poudariti teorijo in uporabo funkcionalne analize. Zato v knjigi izčrpno obravnava teorijo mere in teorijo distribucij, celo poglavje 5 pa posveti linearnim parcialnim diferencialnim enačbam, ki so še sedaj področje matematike v burnem razvoju.

Knjiga gotovo ni namenjena začetnikom, niti ne npr. našim študentom druge stopnje, čeprav formalno ne zahteva predznanja iz funkcionalne analize. Mislim, da je knjiga odličen pripomoček matematiku, ki si želi poglobljenega znanja iz funkcionalne analize.

Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik. (Metode funkcionalne analize v numerični matematiki) Hrsg, L. Collatz und H. Unger. Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag 1969. 143 str. 8°. (International series of numerical mathematics. Vol. 12.).

Zbornik člankov povzema delo četrtega simpozija o funkcionalni analizi v numerični matematiki. Simpoziji so posvečeni uporabi novih dognanj iz funkcionalne analize v numerični matematiki. Iz uvoda povzemamo naslednjo misel:

»Posebno jasno se je pokazalo, da sta globji vpogled v način delovanja elektronskega računalnika in uporaba novejših rezultatov abstraktne funkcionalne analize nepogrešljiva za plodno raziskovalno delo v numerični analizi.«

Od člankov v knjigi naj omenimo le dva, ki posebno jasno potrjujeta zgornje mnenje udeležencev simpozija: P. J. Laurent: Karakterizacija in konstrukcija aproksimacij v konveksni množici normiranega prostora in R. E. Moore: Funkcionalna analiza za elektronski računalnik.

A. S.

Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs, and Mathematical tables. New York, Dover Publications 1968. CIV + 1046 str. 4°. 7. natis.

To delo je obsežen proročnik, kjer so priznani strokovnjaki s področja uporabne matematike pod vodstvom M. Abramowitza in I. Stegunove na več kot tisoč straneh velikega formata v pregledni obliki zbrali ogromno koristnih informacij. Priročnik je v glavnem posvečen specialnim funkcijam, o obsežnosti izbora pa najbolje priča spisek poglavij.

1. Matematične konstante
2. Fizikalne konstante
3. Elementarne analitične metode
4. Elementarne transcendentne funkcije
5. Eksponentni integral in sorodne funkcije.
6. Gama funkcija in sorodne funkcije
7. Verjetnostni integral in Fresnelovi integrali
8. Legendreove funkcije
9. Besselove funkcije s celim indeksom
10. Besselove funkcije z necelim indeksom
11. Integrali Besselovih funkcij
12. Struvejeve funkcije in sorodne funkcije
13. Konfluentne hipergeometrične funkcije
14. Coulombove valovne funkcije
15. Hipergeometrične funkcije
16. Jacobijeve eliptične funkcije in theta funkcije
17. Eliptični integrali

18. Weirstrassove eliptične in sorodne funkcije
19. Funkcije paraboličnega cilindra
20. Mathieujeve funkcije
21. Sferoidalne valovne funkcije
22. Ortogonalni polinomi
23. Bernoullijevi in Eulerjevi polinomi, Riemannova Zeta funkcija
24. Kombinatorična analiza
25. Numerična interpolacija, odvajanje in integriranje
26. Porazdelitvene funkcije verjetnostnega računa
27. Razne funkcije
28. Številski sistemi
29. Laplaceova transformacija

Posamezna poglavja so, kolikor je to mogoče, enako organizirana. Pri vsaki funkciji najdemo našteje njene osnovne analitične lastnosti, na primer izražave s konvergentnimi in asimptotičnimi vrstami, integralske reprezentacije, dalje nadvse koristne polinomske ali racionalne aproksimacije. Vsako poglavje vsebuje še nekaj osnovnih tabel z vso informacijo o možnostih interpoliranja. Prav tako najdemo vsakokrat še razdelek, posvečen numeričnim primerom uporabe tabel, formul in aproksimacij, ter precej popolno bibliografijo.

Iz navedenega je razvidno, da je »Abramowitz« nadvse primeren nadomestek za danes že zastarelo delo E. Jahnkeja in F. Emdeja »Tables of Functions«, ki je na tem področju kraljevalo nekaj desetletij.

Spain B., M. g. Smith: Functions of Mathematical Physics. London, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970. XI + 208 str. 8°.

Ta knjiga je v prvi vrsti učbenik. Avtorja v zelo zmernem tempu obravnavata osnovne lastnosti nekaterih specialnih funkcij. Prva štiri poglavja (Reševanje linearnih homogenih diferencialnih enačb drugega reda z vrstami, Rešitve navadnih linearnih diferencialnih enačb v obliki krivuljnih integralov, Oscilacijski izreki in Sturm-Liouvillejeva teorija, Asimptotika) so uvodnega značaja in seznanjajo bralca z osnovnimi pojmi za reševanje linearnih diferencialnih enačb matematične fizike. Temu sledi izolirano poglavje o lastnostih gama funkcije, zadnjih šest poglavij pa je namenjenih posameznim specialnim funkcijam (Hipergeometrična funkcija, Konfluentna hipergeometrična funkcija, Legendreove funkcije, Besselove funkcije, Laguerreovi in Hermiteovi polinomi).

Tekst spremlja veliko število lepo izbranih primerov, na koncu vsakega poglavja pa je nekaj nalog z rešitvami. Delo je zaključena celota in avtorja se praviloma ne sklicujeta na druge vire. Poznavanje funkcijske teorije in osnov diferencialnih enačb za razumevanje zadostuje.

Luke Y. L.: The Special Functions and Their Approximations, vol. 1, New York, Academic Press 1969. CC + 349 str. 8°. Mathematics in Science and Engineering.

Knjiga specialne funkcije in njihove aproksimacije je monografija v dveh delih. V prvem delu podaja avtor teorijo specialnih funkcij, vendar na nestandarden način. Omejil se je na hipergeometrično funkcijo, konfluentno hipergeometrično funkcijo in Meijerjevo G-funkcijo ter njihove generalizacije. Ker pa lahko s temi funkcijami izrazimo praktično vse ostale specialne funkcije, je avtor lahko tako obdelal zelo široko področje in si privoščil precejšno globino, ne da bi obseg knjige preveč narastel. Rezultati, ki jih navaja, so sicer večinoma znani, vendar so večinoma objavljeni v težko dostopnih publikacijah.

Za drugi del knjige obljublja avtor številne numerične rezultate, ki naj bi znatno olajšali numerično delo s specialnimi funkcijami.

E. Zakrajšek

Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. Hrsg. R. Sauer und I. Szabo. T. I — IV. Berlin, Springer Verlag 1967-1970. 8°. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften... Bd. 139, 140, 141, 142.)*

V štiri zvezke razdeljeno delo »Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs« (MHI) hoče inženirja seznaniti s teorijami in metodami moderne matematike, ki so, ali bodo, pomembne za tehniške stroke. Potrebno je predznanje snovi iz predavanj o matematiki v prvih treh ali štirih semestrih na nemških tehniških visokih šolah.

Hiter napredek tehnike, v povezavi z naravoslovnimi vedami, je pripeljal do tega, da so potrebna vedno obširnejša matematična sredstva za obdelavo tehniških problemov. Med tem razvojem so na eni strani nekatere abstraktne matematične vede, ki so nastale, ne oziraje se na uporabo, v okviru takozvane »čiste matematike« (kot npr. Boolova algebra), ki pa so danes važno orodje inženirjev. Po drugi strani so praktične potrebe v tehniki in gospodarstvu pripeljale do izgradnje novih vej matematike (npr. problemi optimiranja pri raziskavi tržišča. Mnogi inženirji potrebujejo zato ne le poglobljenega znanja klasičnih matematičnih vej, ampak morajo poznati tudi novo nastale veje matematike. To stališče je odločalo pri izbiri snovi v »MHI«. Seveda pa je izbira snovi več ali manj subjektivno pobarvana. Izdajatelja vendar upata, podprta od urednikov in avtorjev, da nista prezrla ničesar, kar je važno za velike potrebe na tem področju.

»MHI« ni samo zbirka pravil. Knjiga ne prinaša samo formul, ki jih vsaka od obravnavanih disciplin potrebuje, ampak tudi osnovne definicije, izreke in metode v obliki, ki upošteva fizikalno-geometričen način inženirjevega mišljenja. To pomeni: v definicijah vpeljeni pojmi so, kolikor se le da, nazorno pojasnjeni in vedno se poskuša bralcu pojasniti, zakaj so ti pojmi vpeljeni. Primeri in prepričljive utemeljitve naj bi bralcu olajšale razumevanje izrekov in metod. Dokazi so izpeljani samo tam, kjer je to potrebno za razumevanje izreka ali metode. Napotki na učbenike dajejo bralcu možnost, da si ogleda dokaze.

Dandanes zelo razširjeni delež računalnikov je uporabno matematiko v toliko spremenil, da so poleg rešitev, danih s formulo, dobili velik pomen tudi numerični postopki za rešitev matematičnega problema. Ta knjiga upošteva to okolnost na mnogih mestih z natančno obdelavo numeričnih postopkov. V tej zvezi je treba opozoriti posebno na II. del, zlasti pa na III. del, v katerem so trije razdelki posvečeni numeričnemu računu. V III. delu dodani odstavek obravnava tudi logično strukturo računalnikov in osnove programiranja.

Čeprav se to delo predvsem ozira na potrebe inženirjev, ga bodo koristno uporabili tudi naravoslovci, predvsem fiziki, pa tudi matematiki. Skladno s prodiranjem matematičnih metod na vedno širša področja, so nekateri razdelki tega dela zanimivi tudi za predstavnike drugih strok, npr. za strokovnjake v gospodarstvu in industriji je zanimiv odstavek J v III. delu o linearnem in nelinearnem optimiranju in v IV. delu odstavek M o verjetnostnem računu in matematični statistiki.

V zadnjem zvezku so zbrani osnovni izreki in formule za teoretično-tehniške vede, predvsem za mehaniko in elektrotehniko. S tem je uporabniku širšega področja »normalnih problemov« dana zaloga formul in delna povezava z matematično snovjo.

Bralec bo morda pritrdil zasnovi tega dela, ki pa marsikaterim željam ne bo ustrezalo. Avtorji in izdajatelja se že vnaprej zahvaljujejo za vse pobude, ki bi prišle iz kroga bralcev. Sem spadajo tudi opozorila na strokovne in tiskarske napake, ki se jim, vkljub trudu vseh udeležencev, ni mogoče nikoli popolnoma izogniti.

München — Berlin, spomladi 1970

Robert Sauer in István Szabó

* Iz uvoda izdajateljev k celotnemu delu, prevedel J. Garbajs.

KLASIFIKAGIJA ČLANKOV V OMF

V lanskem koledarskem letu smo na željo RSPK prvič tiskali pri člankih v OMF decimalni vrstilec, ki pomeni uvrstitev objavljene snovi po znani univerzalni decimalni klasifikaciji (UDK). V letošnjem letu pa smo se odločili za manjšo spremembo. Knjižnica IJŠ in odseka za fiziko FNT razvršča svoje bibliotečne enote po UDK. V matematični knjižnici odseka za matematiko FNT in oddelka za matematiko IMFM pa smo se odločili za novo ameriško razdelitev MOS, ki jo je pripravil in izdal v reviji »Mathematical Reviews« Ambrican Mathematical Society, Mathematical Offprint Servis, Providence, Rhode Island 02904. Le ta je za uvrščanje novih matematičnih področij mnogo bolj prikladen, ker jih upošteva v enaki meri kot klasične matematične discipline. Za primer naj navedemo le, da je topologija po klasičnem UDK le neznaten del geometrije. Po MOS pa zavzema topologija kar tri samostojna poglavja (54, 55, 57). Zato smo se za objavo klasifikacije člankov v OMF odločili, da bomo uporabljali sistem, ki ga uporablja ustrezna knjižnica.

V nadaljevanju vam posredujemo skrajšano obliko MOS, v katerem smo za primerjavo vpisali tudi ustrezne številke UDK. Pripomniti pa moramo, da so vsa poglavja podrobno razdeljena na ozko specialna področja ter tako namenjena predvsem za uvrščanje člankov in krajših del. Velik del knjižnega fonda pa bi le težko uvrstili v enega izmed teh. Zato so na začetku vsakega poglavja posebni vrstilci, kot smo jih navedli v poglavju 26. (Dodatne pripombe: I., II. in naloge pa smo iz praktičnih razlogov dodali sami.)

Stvarnega kataloga po MOS se lahko poslužite tudi ob priliki obiska matematične knjižnice, Ljubljana, Jadranska c. 19.

A. S., C. V.

MOS	UDK	
00-XX	5	SPLOŠNO
A 05	501	Splošna matematika
A 10	51 (08)	Zbrana dela. Poročila s kongresov.
A 25	51.01	Metodologija in filozofija matematike.
01-XX	31 (09)	ZGODOVINA IN BIOGRAFIJA
02-XX	517.1	LOGIKA IN OSNOVE MATEMATIKE
04-XX	519.5	TEORIJA MNOŽIC
05-XX	519.1	KOMBINATORIČNA ANALIZA
06-XX	512.8	UREJENOSTI, MREŽE, UREJANJE ALGEBRAIČNE STRUK- TURE
08-XX	519.5	SPLOŠNI MATEMATIČNI SISTEMI
10-XX	511	TEORIJA ŠTEVIL
12-XX	511.6	ALGEBRAIČNA TEORIJA ŠTEVIL. TEORIJA OBSEGOV IN POLINOMOV
13-XX	512.8 519.4	KOMUTATIVNI KOLOBARJI IN ALGEBRE
14-XX	513.6	ALGEBRAIČNA GEOMETRIJA
15-XX	512.8	LINEARNA IN MULTILINEARNA ALGEBRA. TEORIJA MATRIK
16-XX	512.8 519.4	ASOCIATIVNI KOLOBARJI IN ALGEBRE
17-XX	512.8 519.4	NEASOCIATIVNI KOLOBARJI IN ALGEBRE Linearna algebra
18-XX	512	TEORIJA KATEGORIJ. HOMOLOŠKA ALGEBRA
20-XX	512.8 519.4	TEORIJA GRUP IN POSPLOŠITVE
22-XX	512.865.3	TOPOLOŠKE GRUPE. LIJEVE GRUPE
26-XX	517.51	FUNKCIJE REALNE SPREMENLJIVKE
00		Članki, ki jih je težko klasificirati
01-I		učbeniki — analiza I.
01-II		učbeniki — analiza II.
01-naloge	(076)	Analiza — Zbirka vaj
02		Učbeniki na višjem nivoju

MOS	UDK	
04		Računanje z računalnikom in programiranje (Ne teorijo računanja ali programiranja.)
28-XX	519.53	TEORIJA MERE IN INTEGRACIJE
30-XX	517.53	FUNKCIJE KOMPLEKSNE SPREMENLJIVKE
31-XX	517.54	TEORIJA POTENCIALA
32-XX	517.55	FUNKCIJE VEČ KOMPLEKSNIH SPREMENLJIVK IN ANALITIČNI PROSTORI
33-XX	517.56	SPECIALNE FUNKCIJE
34-XX	517.9	NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE
35-XX	517.944	PARCIALNE DIFERENCIALNE ENAČBE
39-XX	517.948	KONČNE DIFERENCE IN FUNKCIONALNE ENAČBE
40-XX	517.52	ZAPOREDJA. VRSTE. SUMABILNOST
41-XX	517.52	APROKSIMACIJE IN RAZVRSTITVE
42-XX	517.522	FOURIEROVA ANALIZA
43-XX	517.52	ABSTRAKTNA HARMONIČNA ANALIZA
44-XX	517.43.512	INTEGRALNE TRANSFORMACIJE. OPERATORSKI RAČUN
45-XX	517.948.32	INTEGRALSKE ENAČBE
46-XX	517.43	FUNKCIONALNA ANALIZA
47-XX	517.948.35	TEORIJA OPERATORJEV
49-XX	519.3	VARIACIJSKI RAČUN
50-XX	513	GEOMETRIJA
52-XX	513.87	KONVEKSNE MNOŽICE IN GEOMETRIČNE ENAČBE
53-XX	513.73	DIFERENCIALNA GEOMETRIJA
54-XX	513.83	SPLOŠNA TOPOLOGIJA
55-XX	513.836	ALGEBRAIČNA TOPOLOGIJA
57-XX	513.6	MNOGOTEROSTI
58-XX	513.6	GLOBALNA ANALIZA, ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH
60-XX	519.21/23	VERJETNOSTNI RAČUN IN STOHAŠTIČNI PROCESI
62-XX	519.24/28	STATISTIKA
65-XX	518	NUMERIČNA ANALIZA
68-XX	681.3	RAČUNALNIŠKE ZNANOSTI
70-XX	531.3	MEHANIKA DELCEV IN SISTEMOV
76-XX	532/533	MEHANIKA TEKOČIN
78-XX	535 538	OPTIKA. ELEKTROMAGNETNA TEORIJA
80-XX	536	KLASIČNA TERMODINAMIKA. PRENOS TOPLOTE
81-XX	530.145.6	KVANTNA MEHANIKA
82-XX	531.14 536.75 539.2	STATISTIČNA FIZIKA. STRUKTURA SNOVI
83-XX	530.12	RELATIVNOSTNA TEORIJA
85-XX	521/524	ASTRONOMIJA IN ASTROFIZIKA
86-XX	525	GEOFIZIKA
90-XX	681.3 518.9	EKONOMIKA. OPERACIJSKO RAZISKOVANJE. PROGRAMIRANJE. IGRE.
92-XX	57	BIOLOGIJA
93-XX	681.3	SISTEMI. KONTROLA
94-XX	681.3 621.39	TEORIJA INFORMACIJ, KOMUNIKACIJ, VEZIJ, AVTOMATOV
96-XX	51:373	POUK MATEMATIKE — osnovna šola
97-XX	51:373.5	POUK MATEMATIKE — srednja šola