IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1970
Letnik 17
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani
Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani
Avsec France, gimnazija Kranj
Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani
Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan« v Ljubljani
Garb France, gimnazija Ravne
Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani
Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani
Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije
Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujte na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din
za dijake 5 din
za ustanove in podjetja 20 din
za inozemstvo 25 din (2 $)
posamezna številka 5 din

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.** Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2

O UNIVERZALNIH ALGEBRAH

NIKO PRIJATELJ

MOS 08 A 25

Podan je pregled osnovnih definicij iz teorije univerzalnih algeber in izpeljani so nekateri elementarni izreki.

A review of the basic definitions in the theory of universal algebras is given and some elementary theorems are proved.

Čeprav z vsako eksplicitno opredelitvijo kakega področja matematike hkrati tudi tvegamo, da bo taka opredelitev že v bližnji prihodnosti preozka ali celo varljiva, bi nasploh vendar še lahko rekli, da sodobna algebra proučuje o p e r a c i j e med elementi ene ali več množic. Glede na število in posebne lastnosti teh operacij razločujemo posebne algebrske strukture, kot na primer semigrupa, grupa, kolobar, obseg, mreža, modul, vektorski prostor itd. In prav dobro vemo, da je za vsakim od teh imen skrita obsežna matematična teorija, ki urejeno predstavlja že dosežene izsledke in hkrati oblikuje nove probleme. Pri proučevanju teh posebnih algebrskih struktur, ali kakor tudi rečemo, teh posebnih a l g e b e r in primerjanju ustreznih rezultatov pa so se pokazale številne analogije, ki po Moorovem principu v matematiki vedno implicirajo obstoj neke splošnejše strukture, ki te posebne združuje, kolikor gre za poglavitne črte, sicer pa jih interpretira kot svoje specialne primerke. Tako je nastala tudi splošna algebrska struktura ali u n i v e r z a l n a a l g e b r a, ki študira potemtakem splošne operacije v dani množici z namenom, da najde in proučuje vse tiste lastnosti, ki so skupne posebnim algebram, kot so na primer semigrupa, grupa, kolobar, obseg, mreža itd.

Ideja univerzalne algebre je bila povsem nedvoumno zamišljena že ob koncu prejšnjega stoletja. Leta 1898 je namreč izšla knjiga A. N. Whiteheada z naslovom A treatise on universal algebra. V njej avtor poroča, da je treba iskati začetke teh splošnih raziskav pri W. R. Hamiltonu in A. De Morganu, medtem ko je za ime odgovoren J. J. Sylvester. Potem pa pravi naslednje:

Take algebre so že same zase vredne podrobnega proučevanja; prav tako pa zaslužijo, da jih med seboj primerjamo, zaradi vpogleda, ki ga s tem dobimo v splošno teorijo simboličnega izvajanja in posebej v algebrsko simboliko. Primerjalno proučevanje seveda nujno predpostavlja določen predhodni posebni študij, saj je primerjanje brez poznanja nemogoče.

Kljub jasni spoznavi o koristnosti takega splošnega študija pa Whiteheadu še ni uspelo dobiti kakih pomembnih rezultatov. Razlog za to je vsekakor treba iskati v dejstvu, da tačas še ni bilo opravljeno nujno potrebno predhodno delo, se pravi, sistematično raziskovanje posebnih algebrskih struktur. Šele z nastopom moderne algebre, v dvajsetih letih našega stoletja, je bil ta nujno potrebni pogoj izpolnjen. In res so bili prvi rezultati v zvezi z univerzalnimi algebrami objavljeni šele v letih 1933 do 1935. Njihov avtor je bil G. Birkhoff, ki je tudi prevladujoče vplival na nadaljnji razvoj do leta 1950. V tem času so se raziskave sukale okrog prostih algeber, izrekov o homomorfizmu in izomor-

fizmu, kongruenčnih mrež in mrež podalgeber. Po letu 1950 je bila po zaslugi A. Tarskega odkrita tudi tesna zveza z matematično logiko, namreč s teorijo modelov, ki pomeni novo smer raziskav univerzalnih algeber. E. Marczewski pa je leta 1958 opozoril na pomembnost baz prostih algeber, ki jih je imenoval neodvisne množice. Na tej osnovi je bila v številnih publikacijah obravnavana algebrska teorija prostih algeber. Nadaljnje raziskave in nove posplošitve so med drugim pokazale, da so topološki prostori le posebni primeri tako imenovanih neskončnih delnih algeber, v zadnjem času pa se je obrnilo zanimanje tudi k topološkim in delno urejenim univerzalnim algebram. S. Eilenberg in F. W. Lawvere sta se lotila proučevanja univerzalnih algeber z vidika teorije kategorij.

Iz teh skopih podatkov je najbrž vendarle razvidno, da so univerzalne algebre sicer zelo splošna, a kljub temu presenetljivo bogata matematična struktura. V naslednjem bomo bralca seznanili z osnovnimi definicijami in z nekaterimi izreki, ki so brez posebnih težav dokazljivi.

1

Najprej moramo opredeliti splošni pojem o p e r a c i j e. Navadno imamo s to besedo v mislih tako imenovano binarno ali dvočleno operacijo v dani množici A, ki priredi vsakemu urejenemu paru (a, b) elementov te množice natanko en element množice A. Ali lepše povedano, vsaka binarna operacija v množici A je neka preslikava f kartezičnega produkta $A^2 = A \times A$ v množico A. Očitno se nam zdaj odpira tale posplošitev: n-člena operacija v množici A je preslikava f kartezičnega produkta $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n faktorjev) v množico A. Če postavimo $A^1 = A$ in definiramo še $A^0 = \{ \emptyset \}$, smo s tem opredelili n-členo operacijo v dani množici A za vsako naravno število n, ki ga imenujemo t i p ustrezne operacije. Enočlena operacija v množici A ni potemtakem nič drugega kot neka preslikava te množice same vase. Vsaka nič-člena operacija f v množici A pa očitno določa en sam element te množice, ki je seveda f-slika edinega elementa $\emptyset$ množice A^0. Ker je tip vsake operacije naravno število, omejili smo se torej le na preslikave končnih kartezičnih produktov, so vse te operacije f i n i t n e.

Zdaj pa že lahko povemo, kaj je univerzalna algebra:

Univerzalna algebra $\mathcal{A}$ je urejen par (A, F), v katerem je A neprazna množica, F pa družina finitnih operacij v množici A.

Neprazno množico A, ki je tako rekoč prizorišče dogodkov, imenujemo o s n o v n o množico algebre $\mathcal{A}$. Družina finitnih operacij F pa je lahko končna, tudi prazna, ali pa neskončna. Če premore družina F za elemente le končno mnogo operacij $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$, potem pišemo namesto (A, F) raje kar $(A; f_0, f_1, \ldots f_{n-1})$. V nasprotnem primeru pa bomo vselej smatrali, da je družina F določena z neko množico indeksov, ki je dobro urejena. Potemtakem si lahko mislimo, da je ustrezna množica indeksov neko ordinalno število $\mathfrak{o}$. Ker ima vsako ordinalno število za elemente natanko vsa ordinalna števila, ki so manjša od njega, pripada torej vsakemu ordinalnemu številu $\gamma < \mathfrak{o}$ v družini F neka operacija f_γ, ki je n_γ-člena in je $n_\gamma \in N$.

S tem, da smo se glede množice indeksov, ki določa družino F, omejili na ordinalna števila, nismo na splošnosti pravzaprav ničesar zgubili, saj vemo, da je po aksiomu izbire mogoče vsako množico dobro urediti. Pač pa nam to

omogoča, da vpeljemo tako imenovani tip algebre in s tem v zvezi tudi podobnostne razrede algeber. Najprej recimo takole:

»Tip algebre« τ je zaporedje $(n_0, n_1, \ldots n_\gamma, \ldots)$ naravnih števil, definirano za vsak indeks γ, ki je ordinalno število, manjše od določenega ordinalnega števila $\varnothing(\tau)$, ki ga imenujemo red tipa τ. Vsakemu $\gamma < \varnothing(\tau)$ pripada simbol f_γ, ki je simbol za neko n_γ-členo operacijo.

Potem rečemo:

Algebra $\mathcal{A} = (A, F)$ je tipa τ, če je A neprazna množica in če lahko najdemo v družini operacij F za natanko vsako ordinalno število $\gamma < \varnothing(\tau)$ neko operacijo f_γ, ki je n_γ-člena.

V algebri tipa τ je potemtakem za vsak $\gamma < \varnothing(\tau)$ simbol f_γ tega tipa realiziran z neko n_γ-členo operacijo f_γ.

Pojasnimo to splošno definicijo z uporabo na nekaterih posebnih algebrah, ki jih dobro poznamo.

(a) Semigrupa $(A; .)$ je algebra z eno dvočleno operacijo $.$, ki je asociativna. Njen tip je torej (2), red tipa pa ordinalno število 1.

(b) Semigrupa z enoto $(A; ., 1)$ je algebra z eno dvočleno operacijo $.$ in eno niččleno operacijo 1, saj lahko definiramo preslikavo $f : A^0 \to A$ z $f(\emptyset) = 1$. Potemtakem je to algebra tipa (2, 0), red tipa pa je ordinalno število 2.

(c) Grupo lahko opredelimo kot semigrupo z enoto, v kateri eksistira preslikava, ki prevede vsak element a v njemu inverzni element a^{-1}. V tej interpretaciji je torej grupa $(A; ., 1, ^{-1})$ algebra z eno dvočleno, eno niččleno in eno enočleno operacijo, se pravi, da je tipa (2, 0, 1) in da je red tipa ordinalno število 3.

(d) Kolobar $(A; +, ., 0)$ je očitno algebra z dvema dvočlenima operacijama $+$ in $.$ in eno niččleno operacijo 0, torej tipa (2, 2, 0) z redom tipa 3. Če pa še upoštevamo, da eksistira v vsakem kolobarju tudi preslikava, ki prevede vsak element a v njemu nasprotni element $-a$, ga lahko štejemo tudi za algebro tipa (2, 2, 0, 1) z redom tipa 4.

(e) Pri obsegu $(A; +, ., 0, 1, ^{-1})$, ki je očitno tipa (2, 2, 0, 0, 1) z redom tipa 5, pa trčimo na primer, ko enočlena operacija $^{-1}$ ni definirana v vsej množici A, marveč le na podmnožici $A - \{0\}$ in jo zato imenujemo delno operacijo. Brž ko je v družini operacij F nad dano neprazno množico A vsaj ena delna operacija, pravimo, da je urejeni par (A, F) delna algebra. Z delnimi algebrami se v tem sestavku ne nameravamo ukvarjati.

Razred vseh algeber danega tipa τ imenujemo podobnostni razred algeber in ga zaznamujemo s simbolom $K(\tau)$.

Iz definicije »tipa algebre« pa tudi iz navedenih zgledov je razvidno, da nam samo poznanje tipa neke algebre sicer le malo pove o njeni specifični notranji strukturi. Vendar pa je zanimivo, da nam ta tako »oskubeni« podatek že povsem zadošča za razvijanje pomembnih algebrskih konstrukcij, ki jih dobro poznamo iz študija posebnih algeber. Tako lahko na primer definiramo v vsakem podobnostnem razredu pojem homomorfizma:

Ako sta $\mathcal{A} = (A, F)$ in $\mathcal{A}' = (A', F')$ algebri, ki spadata v isti podobnostni razred $K(\tau)$, potem je preslikava

$$\varphi : A \to A'$$

homomorfizem algebre $\mathcal{A}$ v algebro $\mathcal{A}'$ natanko tedaj, če je za vsak $\gamma < \varnothing(\tau)$ in poljubne $a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1} \in A$

$$\varphi[f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1})] = f_\gamma'(\varphi a_0, \varphi a_1, \ldots \varphi a_{n_\gamma - 1})$$

Če sta f_γ in f_γ' niččleni operaciji in je $f_\gamma(\emptyset) = a \in A$ in $f_\gamma'(\emptyset) = a' \in A'$, dobimo pri homomorfizmu φ očitno $\varphi[f_\gamma(\emptyset)] = f_\gamma'[\varphi(\emptyset)] = f_\gamma'(\emptyset)$, se pravi, da je $\varphi(a) = a'$. Vsak homomorfizem preslika torej »izbrane« elemente algebre $\mathcal{A}$ v ustrezne »izbrane« elemente algebre $\mathcal{A}'$.

Seveda imenujemo homomorfizem φ, če je preslikava φ injektivna, monomorfizem in če je preslikava φ surjektivna, epimorfizem. Ako pa homomorfizem φ bijektivno preslika množico A na množico A', potem je izomorfizem in v tem primeru rečemo, da sta algebri $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ izomorfni. In podobno, kot storimo to pri študiju posebnih algeber, lahko izjavimo tudi tukaj:

Teorija univerzalnih algeber raziskuje tiste lastnosti teh algeber, ki se ohranjajo pri izomorfnih preslikavah.

Prav nič težko se ni prepričati o tejle resnici:

Če je φ homomorfizem algebre $\mathcal{A}$ v algebro $\mathcal{A}'$ in ψ homomorfizem algebre $\mathcal{A}'$ v algebro $\mathcal{A}''$, potem je kompozitum $\psi\varphi$ homomorfizem algebre $\mathcal{A}$ v algebro $\mathcal{A}''$.

Brž lahko vpeljemo tudi pojem podalgebre dane algebre.

Bodi $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra tipa τ, B pa kakšna n e p r a z n a podmnožica množice A. Če je za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ in poljubne $b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1} \in B$ tudi $f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1}) \in B$, potem je $\mathcal{B} = (B, F)$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$.

Takoj lahko pokažemo:

Če je $\{(B_\alpha, F)\}_{\alpha \in J}$ poljubna družina podalgeber dane algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ in je presek $\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha$ neprazna množica, potem je tudi $(\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha, F)$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$.

Naj bodo za poljuben $\gamma < \sigma(\tau)$ elementi $b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1}$ v preseku $\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha$. Potem so ti elementi tudi v vsakem B_α in po hipotezi je zato tudi $f_\gamma(b_0, b_1, \ldots$ $\ldots b_{n\gamma-1})$ v vsakem B_α, torej tudi v preseku $\bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha$.

Ta lastnost podalgeber nam očitno omogoča, da lahko konstruiramo k vsaki neprazni podmnožici H dane algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ najmanjšo podalgebro, ki vsebuje podmnožico H. To podalgebro označujemo s simbolom $([H], F)$ in rečemo, da je generirana iz podmnožice H, oziroma, da je H njena generatorska množica.

Simbol $[H]$ označuje torej osnovno množico najmanjše podalgebre, ki vsebuje neprazno podmnožico H. Vendar lahko smiselno razširimo pomen tega simbola tudi na primer, ko je $H = \emptyset$. In sicer takole:

Če algebra $\mathcal{A} = (A, F)$ nima nobenih niččlenih operacij, naj bo $[\emptyset] = \emptyset$. Če pa ta algebra premore kakšne niččlene operacije, naj bo $[\emptyset]$ osnovna množica najmanjše podalgebre, ki je generirana iz natanko tistih elementov množice A, ki so vrednosti ustreznih niččlenih operacij.

Iz definicije podalgebre je razvidno, da so elementi, določeni z niččlenimi operacijami, v vsaki podalgebri dane algebre $\mathcal{A} = (A, F)$. Brž ko ima potemtakem algebra $\mathcal{A}$ vsaj eno niččleno operacijo, je podalgebra $([\emptyset], F)$ najmanjša podalgebra algebre $\mathcal{A}$.

Naj bo zdaj $\varphi : A \to A'$ homomorfizem algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ v algebro $\mathcal{A}' = (A', F')$ in naj bo (B, F) kakšna podalgebra algebre $\mathcal{A}$, (B', F') pa kakšna podalgebra algebre $\mathcal{A}'$. Potem velja:

(1) $(\varphi(B), F')$ je podalgebra algebre $\mathcal{A}'$

(2) $(\varphi^{-1}(B'), F)$ je podalgebra algebre $\mathcal{A}$, če je le $\varphi^{-1}(B') \neq \emptyset$.

Dokaz (1): Pri poljubnem $\gamma < \sigma(\tau)$ si prosto izberimo elemente c_0, $c_1, \ldots c_{n\gamma-1} \in \varphi(B)$. Potem gotovo eksistirajo taki elementi $b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1} \in B$,

da je $\varphi\, b_i = c_i$ za vsak $0 \leqq i < n_\gamma$. Ker je φ homomorfizem, (B, F) pa podalgebra, dobimo takoj $f_\gamma'\,(c_o, c_1, \ldots c_{n\gamma-1}) = f_\gamma'\,(\varphi\, b_o, \varphi b_1, \ldots \varphi\, b_{n\gamma-1}) = \varphi\,(f_\gamma\,(b_o, b_1, \ldots b_{n\gamma-1})) \in \varphi\,(B)$.

Dokaz (2): Ker je po hipotezi $\varphi^{-1}\,(B')$ neprazna podmnožica množice A, si lahko za vsak $\gamma < \sigma\,(\tau)$ izberemo kakšne elemente $c_o, c_1, \ldots c_{n\gamma-1} \in \varphi^{-1}\,(B')$. Potem je seveda $\varphi\, c_i \in B'$ za vsak $0 \leqq i < n_\gamma$. Če upoštevamo, da je φ homomorfizem, (B', F') pa podalgebra, je $\varphi\,(f_\gamma\,(c_o, c_1, \ldots c_{n\gamma-1})) = f_\gamma'\,(\varphi\, c_o, \varphi\, c_1, \ldots \varphi\, c_{n\gamma-1}) \in B'$, se pravi, da je res $f_\gamma\,(c_o, c_1, \ldots c_{n\gamma-1}) \in \varphi^{-1}\,(B')$.

Če je φ epimorfizem algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ na algebro $\mathcal{A}' = (A', F')$, potem sledi iz (1), da je

$$(\varphi\,(A), F') = (A', F')$$

V tem primeru pravimo, da je algebra $\mathcal{A}'$ h o m o m o r f n a s l i k a algebre $\mathcal{A}$.

Prav lahko ugotovimo tudi tole:

Naj bo algebra $\mathcal{A}'$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$ in (B', F') kakšna podalgebra algebre $\mathcal{A}'$. Potem eksistira taka podalgebra (B, F) algebre $\mathcal{A}$, da je podalgebra (B', F') njena homomorfna slika.

Po hipotezi eksistira epimorfizem φ algebre $\mathcal{A}$ na algebro $\mathcal{A}'$. Ker je torej φ surjektivna preslikava, podmnožica $\varphi^{-1}\,(B')$ gotovo ni prazna in zato je po (2) $(\varphi^{-1}\,(B'), F)$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$. Spet zaradi surjektivnosti preslikave φ pa je $\varphi\,(\varphi^{-1}\,(B')) = B'$. Potemtakem je res podalgebra (B', F') homomorfna slika podalgebre $(\varphi^{-1}\,(B'), F)$.

Iz doslej povedanega se nam že kažeta dve možni poti, po katerih lahko pridemo od dane algebre k novim. Prva je v konstrukciji podalgeber, druga pa v homomorfnih slikah dane algebre. V zvezi s tema možnostima vpeljimo pojem i z p e l j a n e a l g e b r e ali na kratko i z p e l j a n k e:

Algebra $\mathcal{A}'$ je izpeljanka algebre $\mathcal{A}$ natanko tedaj, kadar eksistira tako končno zaporedje algeber $\mathcal{A} = \mathcal{A}_o, \mathcal{A}_1, \ldots \mathcal{A}_n = \mathcal{A}'$, da je za vsak $i = 1, 2, \ldots n$ algebra A_i bodisi podalgebra bodisi homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_{i-1}$.

In zdaj nas zanima, kaj je končni rezultat te postopne dvovrstne konstrukcije? Odgovor nam da naslednji izrek:

Vsaka izpeljanka dane algebre $\mathcal{A}$ je homomorfna slika neke podalgebre algebre $\mathcal{A}$.

Izrek bomo dokazali s popolno indukcijo glede na število n členov zaporedja.

Za $n = 1$, imamo očitno le dve možnosti: algebra $\mathcal{A}'$ je bodisi podalgebra bodisi homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$. Ker je vsaka algebra glede na identično preslikavo homomorfna slika same sebe, je v prvem primeru torej res algebra $\mathcal{A}'$ homomorfna slika neke podalgebre algebre $\mathcal{A}$, namreč same sebe. In ker je vsaka algebra tudi podalgebra same sebe, je v drugem primeru algebra $\mathcal{A}'$ res homomorfna slika neke podalgebre algebre $\mathcal{A}$, namreč podalgebre $\mathcal{A}$. Za $n = 1$ potemtakem izrek velja.

Vzemimo zdaj, da je izrek veljaven za vsako zaporedje, ki ima n členov in naj bo

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_o, \mathcal{A}_1, \ldots \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}'$$

neko dano zaporedje z $n + 1$ členi. Lotimo se ga takole:

(a) Najprej poglejmo, če so morda v zaporedju trije zaporedni členi $\mathcal{A}_{i-1}$, $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_{i+1}$, da je bodisi $\mathcal{A}_i$ podalgebra v $\mathcal{A}_{i-1}$ in $\mathcal{A}_{i+1}$ podalgebra v $\mathcal{A}_i$, bodisi $\mathcal{A}_i$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_{i-1}$ in $\mathcal{A}_{i+1}$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_i$. Ker je v prvem primeru tudi $\mathcal{A}_{i+1}$ podalgebra v $\mathcal{A}_{i-1}$, smemo torej vmesni člen $\mathcal{A}_i$

izločiti. In ker je v drugem primeru očitno tudi $\mathcal{A}_{i+1}$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_{i-1}$, lahko spet izločimo vmesni člen $\mathcal{A}_i$. V obeh primerih moremo potemtakem prvotno zaporedje z $n+1$ členi nadomestiti z nekim zaporedjem, ki ima le še n členov. Za tako zaporedje pa po hipotezi izrek velja.

V nadaljnjem se lahko torej omejimo le še na taka $(n+1)$-člena zaporedja, pri katerih nobeni trije zaporedni členi niso v odnosu zaporednih podalgeber, niti v relaciji zaporednih homomorfnih slik. Za začetek takega zaporedja prideta potemtakem v poštev le dve možnosti:

(b) $\mathcal{A}_1$ je podalgebra v $\mathcal{A}_o$ in $\mathcal{A}_2$ je homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_1$. Če nadaljnjih členov ni, je trditev izreka pravilna. Če pa je še kak člen $\mathcal{A}_3$, mora biti ta seveda podalgebra algebre $\mathcal{A}_2$, saj je $\mathcal{A}_2$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_1$. V tem primeru pa smo že prej ugotovili, da eksistira taka podalgebra $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}_1$, da je $\mathcal{A}_3$ homomorfna slika te podalgebre $\mathcal{B}$. Potemtakem smemo v našem zaporedju nadomestiti člen $\mathcal{A}_2$ z $\mathcal{B}$, tako, da je zdaj $\mathcal{B}$ podalgebra v $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_3$ homomorfna slika algebre $\mathcal{B}$. S tem pa smo dobili v zaporedju tri zaporedne člene $\mathcal{A}_o$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}$, ki so v odnosu zaporednih podalgeber, in ta primer smo odpravili že v (a).

(c) $\mathcal{A}_1$ je homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_o$ in $\mathcal{A}_2$ je podalgebra v $\mathcal{A}_1$. Ker vemo, da eksistira taka podalgebra $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}_o$, da je $\mathcal{A}_2$ njena homomorfna slika, lahko zamenjamo v zaporedju $\mathcal{A}_1$ z $\mathcal{B}$, tako da je zdaj $\mathcal{B}$ podalgebra v $\mathcal{A}_o$ in $\mathcal{A}_2$ homomorfna slika algebre $\mathcal{B}$. Če ima zaporedje le tri člene, je s tem dokaz končan. Če pa je v zaporedju še člen $\mathcal{A}_3$, mora biti ta homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_2$, saj je $\mathcal{A}_2$ podalgebra v $\mathcal{A}_1$. Toda s tem, ko smo člen $\mathcal{A}_1$ zamenjali z $\mathcal{B}$, smo dobili tri zaporedne člene $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ki so v odnosu zaporednih homomorfnih slik. To pa je spet primer (a), ki smo ga že rešili. Izrek o izpeljanki je torej dokazan.

2

V teorijah posameznih algebrskih struktur imajo poseben pomen tudi ekvivalenčne relacije, ki so združljive z ustreznimi operacijami. Take ekvivalenčne relacije, tukaj jih bomo imenovali kongruenčne relacije, omogočajo namreč, da iz dane algebre, v kateri so definirane, konstruiramo nove, tako imenovane faktorske algebre. Pretežni del teorije, ki je v zvezi s kongruenčnimi relacijami pri posebnih algebrskih strukturah, moremo brez težav razširiti tudi na univerzalne algebre. Najprej recimo takole:

Naj bo $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra tipa τ, R pa ekvivalenčna relacija v množici A. Potem je R kongruenčna relacija v algebri $\mathcal{A}$ natanko tedaj, kadar je izpolnjena naslednja lastnost: za vsak $\gamma < \varnothing(\tau)$ in poljubne $a_o, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1}, b_o, b_1, \ldots b_{n_\gamma - 1} \in A$ je dovoljen sklep

(S) iz $a_i R b_i$ za $0 \leqq i < n_\gamma$ sledi $f_\gamma(a_o, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1})\, R\, f_\gamma(b_o, b_1, \ldots b_{n_\gamma - 1})$

Pa recimo, da je v dani algebri $\mathcal{A}$ definirana neka kongruenčna relacija R. Naredimo najprej faktorsko množico A/R osnovne množice A, ki ima za elemente vse ekvivalenčne razrede $R[a]$, torej

$$A/R = \{ R[a];\ a \in A \}$$

Potem pa definirajmo v tej faktorski množici za vsak $\gamma < \varnothing(\tau)$ operacijo f_γ' takole: za poljubne $a_o, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1} \in A$ bodi

(T) $$f_\gamma'(R[a_o], R[a_1], \ldots R[a_{n_\gamma - 1}]) = R[f_\gamma(a_o, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1})]$$

Seveda se moramo prepričati, da je tako definirana operacija f_γ' res operacija med ekvivalenčnimi razredi, se pravi, da je neodvisna od izbire reprezentantov teh razredov. To pa je res. Če je namreč $R[a_i] = R[b_i]$ za $0 \leqq i < n_\gamma$, je $a_i R b_i$ in zato po (S) $f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1}) R f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n_\gamma - 1})$, se pravi, da je

$$R[f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1})] = R[f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n_\gamma - 1})]$$

Odtod pa dobimo zaradi (T) takoj, da je

$$f_\gamma'(R[a_0], R[a_1], \ldots R[a_{n_\gamma - 1}]) = f_\gamma'(R[b_0], R[b_1], \ldots R[b_{n_\gamma - 1}])$$

Z definicijo (T) smo torej res napravili tudi iz faktorske množice A/R neko algebro tipa τ, ki jo imenujemo f a k t o r s k o a l g e b r o algebre $\mathcal{A}$ glede na kongruenčno relacijo R in jo označimo s simbolom

$$\mathcal{A}/R = (A/R, F')$$

Naj bo zdaj p naravna preslikava algebre $\mathcal{A}$ na ustrezno faktorsko algebro $\mathcal{A}/R$, torej $p(a) = R[a]$ za vsak $a \in A$. Ker je po (T) očitno za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ in poljubne $a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1} \in A$

$$p(f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1})) = R[f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1})] =$$
$$= f_\gamma'(R[a_0], R[a_1], \ldots R[a_{n_\gamma - 1}]) = f_\gamma'(p(a_0), p(a_1), \ldots p(a_{n_\gamma - 1}))$$

vidimo, da je naravna preslikava p epimorfizem algebre $\mathcal{A}$ na faktorsko algebro $\mathcal{A}/R$.

Brž tudi lahko spoznamo:

Če je φ homomorfizem algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ v algebro $\mathcal{A}' = (A', F')$, potem je relacija R_φ, ki je definirana v množici A s predpisom

(U) $$a R_\varphi b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

kongruenčna relacija v algebri $\mathcal{A}$.

Ker je relacija R_φ definirana z enakostjo, je na dlani, da je to ekvivalenčna relacija v množici A. Zanjo pa je veljaven tudi sklep (S). Če je namreč $a_i R_\varphi b_i$ za $0 \leqq i < n_\gamma$, je po (U) tudi $\varphi(a_i) = \varphi(b_i)$ in zato zaradi homomorfizma φ

$$\varphi(f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1})) = f_\gamma'(\varphi a_0, \varphi a_1, \ldots \varphi a_{n_\gamma - 1}) = f_\gamma'(\varphi b_0, \varphi b_1, \ldots \varphi b_{n_\gamma - 1}) =$$
$$= \varphi(f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n_\gamma - 1}))$$

Odtod pa dobimo spet po (U), da je res

$$f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1}) R_\varphi f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n_\gamma - 1})$$

Vsakemu homomorfizmu $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ pripada torej neka kongruenčna relacija R_φ v algebri $\mathcal{A}$ in zato tudi neka faktorska algebra $\mathcal{A}/R_\varphi$ algebre $\mathcal{A}$. Prav tako pa vemo, da je $(\varphi(A), F')$ podalgebra algebre $\mathcal{A}'$. Tako imenovani i z r e k o h o m o m o r f i z m u pa trdi, da je podalgebra $(\varphi(A), F')$ izomorfna faktorski algebri $\mathcal{A}/R_\varphi$. O tem se prepričamo takole:

Definirajmo preslikavo $\psi : \mathcal{A}/R_\varphi \to (\varphi(A), F')$ s temle predpisom $\psi(R_\varphi[a]) = \varphi(a)$ za vsak $a \in A$. Ker je po (U) $a R_\varphi b$, se pravi $R_\varphi[a] = R_\varphi[b]$ natanko tedaj, kadar je $\varphi(a) \doteq \varphi(b)$, je preslikava ψ očitno bijektivna. Potemtakem se moramo le še uveriti, da je ψ homomorfizem. Toda za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ in poljubne $a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1} \in A$ velja, če upoštevamo (T) in pa dejstvo, da je φ homomorfizem:

$$\psi\,(f_\gamma'\,(R_\varphi\,[a_o], R_\varphi\,[a_1], \ldots R_\varphi\,[a_{n\gamma-1}])) = \psi\,(R_\varphi\,[f_\gamma\,(a_o, a_1, \ldots a_{n\gamma-1})]) =$$
$$= \varphi\,(f_\gamma\,(a_o, a_1, \ldots a_{n\gamma-1})) = f'_\gamma\,(\varphi a_o, \varphi a_1, \ldots \varphi a_{n\gamma-1}) =$$
$$= f_\gamma'\,(\psi\,(R_\varphi\,[a_o]), \psi\,(R_\varphi\,[a_1]), \ldots \psi\,(R_\varphi\,[a_{n\gamma-1}]))$$

S tem je izrek o homomorfizmu dokazan.

Od tod pa pridemo takoj tudi na kanonično dekompozicijo vsakega homomorfizma. Če je torej φ kak homomorfizem algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ v algebro $\mathcal{A}' = (A', F')$, potem dobimo za vsak element $a \in A$ ustrezno sliko $\varphi\,(a) \in A'$ lahko tudi takole:

Najprej preslikamo algebro $\mathcal{A}$ na faktorsko algebro $\mathcal{A}/R_\varphi$ z naravnim epimorfizmom p_φ. Pri tem se element $a \in A$ preslika v $p_\varphi\,(a) = R_\varphi\,[a]$. Nato uporabimo izomorfizem ψ faktorske algebre $\mathcal{A}/R_\varphi$ na podalgebro $(\varphi\,(A), F')$, ki preslika $R_\varphi\,[a]$ v $\varphi\,(a)$. In naposled preslikajmo še podalgebro $(\varphi\,(A), F')$ v algebro $\mathcal{A}'$ z identično preslikavo i, ki prevede vsak element iz $\varphi\,(A)$ sam vase in je $a \in A$, se pravi, da je homomorfizem $\varphi = i\,\psi\,p_\varphi$. Ta dekompozicija je lepo zato očiten monomorfizem. Potemtakem je res $\varphi\,(a) = i\,(\psi\,(p_\varphi\,(a)))$ za vsak razvidna iz naslednjega komutativnega diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "p_\varphi"] \arrow[drrr, "\varphi"'] & \mathcal{A}/R_\varphi \arrow[r, "\psi"] & (\varphi(A),\ F') \arrow[d, "i"] \\
 & & \mathcal{A}'
\end{tikzcd}$$

Če je φ epimorfizem, se pravi, da je algebra $\mathcal{A}'$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$, potem je seveda faktorska algebra $\mathcal{A}/R_\varphi$ izomorfna vsej algebri $\mathcal{A}'$. Torej lahko rečemo:

Vsaka homomorfna slika dane algebre $\mathcal{A}$ je izomorfna neki faktorski algebri te algebre.

Ker je tudi obratno vsaka faktorska algebra $\mathcal{A}/R$ dane algebre $\mathcal{A}$, glede na naravni epimorfizem p, homomorfna slika te algebre, smemo potemtakem, če izomorfnih algeber ne razlikujemo, vse homomorfne slike dane algebre preprosto istovetiti z vsemi faktorskimi algebrami te algebre. Vsaka taka faktorska algebra pa je povsem določena z ustrezno kongruenčno relacijo v dani algebri. Pojem homomorfne slike moremo torej reducirati na pojem kongruenčne relacije.

3

Zaradi pomena kongruenčnih relacij, ki je razviden iz prejšnjega razdelka, si jih oglejmo še malo pobliže.

Naj bo $C\,(\mathcal{A})$ množica vseh kongruenčnih relacij v dani algebri $\mathcal{A}$. Vpeljimo v to množico relacijo » $\leqq$ « na takle način: za poljubna elementa $R_o, R_1 \in C\,(\mathcal{A})$ je $R_o \leqq R_1$ natanko tedaj, kadar iz aR_ob sledi aR_1b.

Takoj vidimo, da relacija » $\leqq$ « delno ureja množico $C\,(\mathcal{A})$. Če označimo z I relacijo identitete v algebri $\mathcal{A}$, se pravi, da je $aIb \Leftrightarrow a = b$, potem je I seveda kongruenčna relacija v algebri $\mathcal{A}$, torej $I \in C\,(\mathcal{A})$. Ker je vsaka kongruenčna relacija R refleksivna, je $I \leqq R$ za vsak $R \in C\,(\mathcal{A})$, tako, da je I najmanjši element množice $C\,(\mathcal{A})$. In če pišemo z U univerzalno relacijo v algebri $\mathcal{A}$, se pravi, da je $a\mathrm{U}b$ za poljubna elementa te algebre, je tudi U kongruenčna

relacija, torej element množice $C(\mathcal{A})$. Ker pa je seveda $R \leqq U$ za vsak $R \in C(\mathcal{A})$, je U največji element množice $C(\mathcal{A})$.

Lahko pa pokažemo še več:

Množica $C(\mathcal{A})$ je glede na relacijo » $\leqq$ « polna mreža.

Da se o tem prepričamo, vzemimo poljubno neprazno družino $\{R_\alpha\}_{\alpha \in J}$ elementov množice $C(\mathcal{A})$ in pokažimo, da eksistirata v tej množici $\inf_\alpha \{R_\alpha\}$ in $\sup_\alpha \{R_\alpha\}$. V ta namen definirajmo najprej v algebri $\mathcal{A}$ relacijo R takole:

(V) $$aRb \Leftrightarrow aR_\alpha b \text{ za vsak } \alpha \in J$$

Iz te definicije sledi:

(a) Ker so vse relacije R_α refleksivne, je taka tudi relacija R.

(b) Simetričnost relacij R_α nam da

$$aRb \Rightarrow aR_\alpha b \text{ za vsak } \alpha \in J \Rightarrow bR_\alpha a \text{ za vsak } \alpha \in J \Rightarrow bRa$$

(c) Zaradi tranzitivnosti relacij R_α je

$$aRb \;\&\; bRc \Rightarrow aR_\alpha b \;\&\; bR_\alpha c \text{ za vsak } \alpha \in J \Rightarrow aR_\alpha c \text{ za vsak } \alpha \in J \Rightarrow aRc$$

(d) Za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ in poljubne elemente $a_i, b_i, (0 \leqq i < n_\gamma)$, algebre $\mathcal{A}$ dobimo, če upoštevamo, da so R_α kongruenčne relacije

$$a_i R b_i \Rightarrow a_i R_\alpha b_i \text{ za vsak } \alpha \in J \Rightarrow f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1}) R_\alpha f_\gamma(b_0, \ldots b_{n_\gamma - 1})$$
$$\text{za vsak } \alpha \in J \Rightarrow f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma - 1}) R f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n_\gamma - 1}).$$

Kakor vidimo, je relacija R kongruenčna relacija v algebri $\mathcal{A}$, se pravi, element množice $C(\mathcal{A})$.

Ker iz aRb sledi po (V) $aR_\alpha b$ za vsak $\alpha \in J$, je $R \leqq R_\alpha$ za vsak $\alpha \in J$. R je torej spodnja meja družine $\{R_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Naj bo $S \in C(\mathcal{A})$ poljubna spodnja meja te družine, se pravi, da je $S \leqq R_\alpha$ za vsak $\alpha \in J$. Potem iz aSb sledi $aR_\alpha b$ za vsak $\alpha \in J$ in zato po (V) tudi aRb. To pomeni, da je $S \leqq R$. Kongruenčna relacija R, ki smo jo definirali z (V), je potemtakem res največja spodnja meja družine $\{R_\alpha\}_{\alpha \in J}$, torej

$$R = \inf_\alpha \{R_\alpha\}$$

Da poiščemo še supremum družine $\{R_\alpha\}_{\alpha \in J}$, naredimo družino $\mathcal{D}$ vseh njenih zgornjih meja, torej

$$\mathcal{D} = \{S;\ S \in C(\mathcal{A}) \text{ in } R_\alpha \leqq S \text{ za vsak } \alpha \in J\}$$

Ta družina ni prazna, saj je največji element $U \in C(\mathcal{A})$ gotovo v njej. Pravkar pa smo se prepričali, da ima vsaka neprazna družina elementov množice $C(\mathcal{A})$ infimum v $C(\mathcal{A})$. Torej eksistira tak $S_0 \in C(\mathcal{A})$, da je

$$S_0 = \inf \mathcal{D}$$

Če je tudi $S_0 \in \mathcal{D}$, je S_0 očitno najmanjša zgornja meja družine $\{R_\alpha\}_{\alpha \in J}$. To pa je res. Po definiciji družine $\mathcal{D}$ je namreč vsak element R_α spodnja meja te družine. Ker pa je S_0 njena največja spodnja meja, mora biti $R_\alpha \leqq S_0$ za vsak $\alpha \in J$. Tako smo torej dobili, da je

$$S_0 = \sup_\alpha \{R_\alpha\}$$

S tem je naša trditev dokazana.

Naj bo zdaj (B, F) kakšna podalgebra dane algebre $\mathcal{A}$, R pa kongruenčna relacija v $\mathcal{A} = (A, F)$. Zaznamujmo z $R[B]$ podmnožico vseh tistih elementov iz A, ki so v relaciji R s kakšnim elementom množice B, torej

$$R[B] = \{ a ; \ a \in A \ \text{ in } \ (\exists b \in B)(aRb) \}$$

Množico $R[B]$ imenujemo z a p r t j e množice B glede na kongruenčno relacijo R. Takoj lahko ugotovimo:

$(R[B], F)$ je podalgebra algebre $\mathcal{A}$.

Za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ lahko namreč najdemo k poljubnim elementom $a_0, a_1, \ldots a_{n\gamma-1}$ iz $R[B]$ take elemente $b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1}$ iz B, da je $a_i R b_i$ za $0 \leqq i < n_\gamma$. Ker je R kongruenčna relacija, je zato tudi $f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n\gamma-1}) R f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1})$. Odtod pa sledi po definiciji množice $R[B]$, da je tudi $f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n\gamma-1}) \in R[B]$, kajti (B, F) je podalgebra in zato je $f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1}) \in B$.

Kongruenčna relacija R v algebri $\mathcal{A}$ priredi potemtakem vsaki podalgebri (B, F) neko podalgebro $(R[B], F)$, ki očitno vsebuje podalgebro (B, F). Kajti z vsakim elementom $b \in B$ je v množici $R[B]$ tudi ves njegov ekvivalenčni razred $R[b]$. Množica $R[B]$ je torej natanko unija vseh ekvivalenčnih razredov, ki pripadajo elementom $b \in B$. Če omejimo kongruenčno relacijo R le na podalgebro $(R[B], F)$, potem ima ustrezna faktorska algebra $(R[B]/R, F')$ za elemente ravno ekvivalenčne razrede $R[b]$ za vsak $b \in B$. Zato je preslikava φ podalgebre (B, F) v faktorsko algebro $(R[B]/R, F')$, ki je določena s predpisom $\varphi(b) = R[b]$ za vsak $b \in B$, gotovo surjektivna. Poleg tega pa velja tudi za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ in poljubne $b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1} \in B$

$$\varphi(f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1})) = R[f_\gamma(b_0, b_1, \ldots b_{n\gamma-1})] = f_\gamma'(R[b_0], \ldots R[b_{n\gamma-1}]) =$$
$$= f_\gamma'(\varphi b_0, \varphi b_1, \ldots \varphi b_{n\gamma-1})$$

φ je potemtakem epimorfizem podalgebre (B, F) na faktorsko podalgebro $(R[B]/R, F')$. Po izreku o homomorfizmu je zato faktorska algebra $(B/R_\varphi, F')$ izomorfna algebri $(R[B]/R, F')$. Toda R_φ v tem primeru ni nič drugega, kot omejitev kongruenčne relacije R na podalgebro (B, F), saj je $b_1 R_\varphi b_2$ natanko tedaj, kadar je $\varphi(b_1) = \varphi(b_2)$, torej $R[b_1] = R[b_2]$, oziroma $b_1 R b_2$. Tako smo prišli do p r v e g a i z r e k a o i z o m o r f i z m u, ki se glasi:

Če je R kongruenčna relacija v dani algebri $\mathcal{A}$ in je (B, F) kakšna njena podalgebra, potem sta faktorski algebri $(B/R, F')$ in $(R[B]/R, F')$ izomorfni.

Bodi spet R kongruenčna relacija v dani algebri $\mathcal{A}$ in obrnimo svojo pozornost na kongruenčne relacije v faktorski algebri $\mathcal{A}/R$! Najprej ugotovimo naslednje:

Vsaki kongruenčni relaciji S v algebri $\mathcal{A}$, ki ustreza zahtevi $R \leqq S$, lahko priredimo v faktorski algebri $\mathcal{A}/R$ neko kongruenčno relacijo S/R na podlagi definicije

$$(D_1) \qquad R[a] \, S/R \, R[b] \Leftrightarrow aSb$$

Takoj vidimo, da je S/R res relacija med ekvivalenčnimi razredi, se pravi neodvisna od izbire njihovih reprezentantov. Če je namreč $R[a] = R[a_1]$ in $R[b] = R[b_1]$, je aRa_1 in bRb_1. Zaradi $R \leqq S$ je tudi aSa_1 *in* bSb_1. Potemtakem je aSb natanko tedaj, kadar je a_1Sb_1 in zato po (D_1)

$$R[a] \, S/R \, R[b] \Leftrightarrow aSb \Leftrightarrow a_1Sb_1 \Leftrightarrow R[a_1] \, S/R \, R[b_1]$$

Ker je relacija S refleksivna, simetrična in tranzitivna, je iz definicije (D_1) neposredno razvidno, da je taka tudi relacija S/R.

Za vsak $\gamma < o(\tau)$ in poljubne elemente $R[a_i]$, $R[b_i]$, $(0 \leqq i < n_\gamma)$ faktorske algebre $\mathcal{A}/R$ pa tudi lahko sklepamo, če upoštevamo (D_1) in definicijo operacij v faktorski algebri (T):

$$R[a_i]\, S/R\, R[b_i] \text{ za } 0 \leqq i < n_\gamma \Rightarrow a_i S b_i \text{ za } 0 \leqq i < n_\gamma \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_\gamma(a_o, a_1, \ldots a_{n\gamma-1})\, S\, f_\gamma(b_o, b_1, \ldots b_{n\gamma-1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R[f_\gamma(a_o, a_1, \ldots a_{n\gamma-1})\, S/R\, R[f_\gamma(b_o, b_1, \ldots b_{n\gamma-1})] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_\gamma'(R[a_o], R[a_1], \ldots R[a_{n\gamma-1}])\, S/R\, f_\gamma'(R[b_o], R[b_1], \ldots R[b_{n\gamma-1}])$$

Relacija S/R je potemtakem res kongruenčna relacija v faktorski algebri $\mathcal{A}/R$.

Velja pa tudi obratno:

Vsaki kongruenčni relaciji S v faktorski algebri $\mathcal{A}/R$ lahko priredimo v algebri $\mathcal{A}$ neko kongruenčno relacijo $\overline{S}$ na podlagi definicije

(D_2) $$a\overline{S}b \Leftrightarrow R[a]\, S\, R[b]$$

Poleg tega velja, da je $R \leqq \overline{S}$.

Iz definicije takoj spoznamo, da je relacija $\overline{S}$ refleksivna, simetrična in tranzitivna, saj je taka tudi relacija S.

Za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ in poljubne elemente a_i, b_i, $(0 \leqq i < n_\gamma)$, algebre $\mathcal{A}$ pa velja tudi sklep, če upoštevamo (D_2) in (T):

$$a_i\overline{S}b_i \text{ za } 0 \leqq i < n_\gamma \Rightarrow R[a_i]\, S\, R[b_i] \text{ za } 0 \leqq i < n_\gamma \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_\gamma'(R[a_o], R[a_1], \ldots R[a_{n\gamma-1}])\, S\, f_\gamma'(R[b_o], R[b_1], \ldots R[b_{n\gamma-1}]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R[f_\gamma(a_o, a_1, \ldots a_{n\gamma-1}]\, S\, R[f_\gamma(b_o, b_1, \ldots b_{n\gamma-1})] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_\gamma(a_o, a_1, \ldots a_{n\gamma-1})\, \overline{S}\, f_\gamma(b_o, b_1, \ldots b_{n\gamma-1})$$

Torej je $\overline{S}$ res kongruenčna relacija v algebri $\mathcal{A}$. Pokažimo še, da je $R \leqq \overline{S}$. Iz aRb sledi najprej $R[a] = R[b]$; od tod pa seveda zaradi refleksivnosti relacije S tudi $R[a]\, S\, R[b]$ in zato po definiciji (D_2) $a\overline{S}b$.

Potemtakem smo prišli do tegale izsledka:

Eksistirata dve preslikavi $\varphi : S \to S/R$ in $\psi : S \to \overline{S}$. Prva preslika podmnožico

$$I_d = \{ S;\ R \leqq S \}$$

množice $C(\mathcal{A})$ vseh kongruenčnih relacij v algebri $\mathcal{A}$ v množico $C(\mathcal{A}/R)$ vseh kongruenčnih relacij v faktorski algebri $\mathcal{A}/R$, druga pa množico $C(\mathcal{A}/R)$ v podmnožico I_d.

Izračunajmo zdaj kompozita $\psi\varphi$ in $\varphi\psi$.

Za poljuben $S \in I_d$ je $\psi(\varphi(S)) = \psi(S/R) = \overline{(S/R)}$. Na podlagi definicij ($D_2$) in ($D_1$) pa je za poljubna elementa a, b algebre $\mathcal{A}$

$$a\,\overline{(S/R)}\,b \Leftrightarrow R[a]\, S/R\, R[b] \Leftrightarrow aSb$$

Torej je $\overline{(S/R)} = S$, se pravi, da je $\psi\varphi$ identična preslikava v podmnožici I_d.

In za poljuben $S \in C(\mathcal{A}/R)$ je $\varphi(\psi(S)) = \varphi(\overline{S}) = \overline{S}/R$. Toda spet po definicijah (D_1) in (D_2) je za poljubna elementa $R[a]$, $R[b]$ faktorske algebre $\mathcal{A}/R$

$$R[a]\,\overline{S}/R\,R[b] \Leftrightarrow a\overline{S}b \Leftrightarrow R[a]\,S\,R[b]$$

Se pravi, da je $\overline{S}/R = S$, torej je $\varphi\psi$ identična preslikava v množici $C(\mathcal{A}/R)$.

Odtod vidimo, da je φ b i j e k t i v n a preslikava podmnožice I_d na množico $C(\mathcal{A}/R)$, ψ pa k njej inverzna preslikava φ^{-1}.

Pokazali smo že, da je množica $C(\mathcal{A})$ vseh kongruenčnih relacij v dani algebri $\mathcal{A}$ glede na relacijo »$\leqq$« polna mreža. S to relacijo je seveda tudi podmnožica I_d delno urejena. Prepričajmo se, da bijektivna preslikava φ in njej inverzna preslikava ψ ohranjata delno urejenost.

Naj bosta S_1 in S_2 poljubna elementa iz I_d. Potem je $\varphi(S_1) = S_1/R$ in $\varphi(S_2) = S_2/R$. Če je $S_1 \leqq S_2$, dobimo po (D_1)

$$R[a]\,S_1/R\,R[b] \Rightarrow aS_1b \Rightarrow aS_2b \Rightarrow R[a]\,S_2/R\,R[b]$$

torej tudi $\varphi(S_1) \leqq \varphi(S_2)$.

In če sta S_1 in S_2 poljubna elementa iz $C(\mathcal{A}/R)$, je $\psi(S_1) = \overline{S}_1$ in $\psi(S_2) = \overline{S}_2$. Ako je $S_1 \leqq S_2$, nam da (D_2)

$$a\overline{S}_1b \Rightarrow R[a]\,S_1\,R[b] \Rightarrow R[a]\,S_2\,R[b] \Rightarrow a\overline{S}_2b$$

torej tudi $\psi(S_1) \leqq \psi(S_2)$.

Zaradi tega pravimo, da je bijektivna preslikava φ i z o m o r f i z e m delno urejene podmnožice I_d na polno mrežo $C(\mathcal{A}/R)$ in da sta urejenostni strukturi $(I_d, \leqq)$ in polna mreža $(C(\mathcal{A}/R), \leqq)$ izomorfni.

V teoriji mrež imajo podmnožice oblike I_d poseben pomen in zato tudi posebno ime. Vsako tako podmnožico imenujemo d u a l n i i d e a l, g e n e r i r a n z e l e m e n t o m R. Potemtakem lahko izjavimo:

Če je R kongruenčna relacija v dani algebri $\mathcal{A}$, potem je polna mreža $(C(\mathcal{A}/R), \leqq)$ vseh kongruenčnih relacij v faktorski algebri $\mathcal{A}/R$ izomorfna dualnemu idealu, generiranemu z R, polne mreže $(C(\mathcal{A}), \leqq)$ vseh kongruenčnih relacij v algebri $\mathcal{A}$.

Iz definicije (D_1) vidimo, da je

$$S/R\,[R[a]] = S/R\,[R[b]] \Leftrightarrow S[a] = S[b]$$

To pomeni, da je preslikava $\varphi : S[a] \rightarrow S/R\,[R[a]]$ faktorske algebre $\mathcal{A}/S$ v faktorsko algebro $\mathcal{A}/R/S/R$ bijektivna. Za vsak $\gamma < \sigma(\tau)$ in poljubne $S[a_i]$, $(0 \leqq i < n_\gamma)$, iz $\mathcal{A}/S$ pa tudi velja

$$\varphi(f_\gamma'(S[a_0], S[a_1], \ldots S[a_{n_\gamma-1}])) = \varphi(S[f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma-1})]) =$$
$$= S/R\,[R[f_\gamma(a_0, a_1, \ldots a_{n_\gamma-1})]] = S/R\,[f_\gamma'(R[a_0], R[a_1], \ldots R[a_{n_\gamma-1}])] =$$
$$= f_\gamma''(S/R\,[R[a_0]], S/R\,[R[a_1]], \ldots S/R\,[R[a_{n_\gamma-1}]]) = f_\gamma''(\varphi(S[a_0]), \ldots \varphi(S[a_{n_\gamma-1}]))$$

Potemtakem je φ izomorfizem. Tako pridemo do d r u g e g a i z r e k a o i z o m o r f i z m u, ki pravi:

Ako sta R in S kongruenčni relaciji v dani algebri $\mathcal{A}$ in je $R \leqq S$, potem je faktorska algebra $\mathcal{A}/S$ izomorfna faktorski algebri $\mathcal{A}/R/S/R$.

LITERATURA

G. Grätzer, Universal Algebra, D. van Nostrand Company, Princeton, 1968.
P. M. Cohn, Universal Algebra, Harper and Row, New York, 1965.

O NEKOREKTNO ZASTAVLJENIH PROBLEMIH

ANTON SUHADOLC

MOS 35 R 25

V članku obravnavamo obratno nalogo prenosa toplote po homogeni palici. Tu skušamo iz znane porazdelitve temperatvure v času T izračunati tisto rešitev enačbe prenosa toplote za $0 \leqq t \leqq T$, ki se bo ujemala pri $t = T$ s predpisano porazdelitvijo temperature. V splošnem obratna naloga ni rešljiva. V članku je pokazano, kako je mogoče konstruirati rešitev, ki se pri $t = T$ poljubno malo razlikuje od predpisane porazdelitve temperature.

IMPROPERLY POSED PROBLEMS

In this article we treat the inverse problem of heat transfer. Here we try to determine the temperature distribution for $0 \leqq t \leqq T$, if the temperature distribution for $t = T$ is known. Generally this problem does not possess a solution. We show how a solution of heat equation can be constructed, such that it will be for $t = T$ as close to the prescribed temperature distribution as desired.

V pričujočem članku si bomo ogledali nekorektno zastavljeni problem reševanja parcialne diferencialne enačbe. Zaradi enostavnosti bomo obravnavali enačbo prenosa toplote po palici.

Vzemimo homogeno palico dolžine π. Enačba prenosa toplote pri običajnih fizikalnih predpostavkah je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

Funkcijo $u(x, t)$ tolmačimo kot temperaturo palice na mestu x v času t. Povedati moramo še, kaj se godi na koncih palice. Vzemimo matematično najenostavnejši primer; konca palice držimo ves čas na temperaturi 0:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{2}$$

Znana je tudi začetna porazdelitev temperature vzdolž palice:

$$u(x, 0) = f(x), \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0 \tag{3}$$

Privzemimo npr., da je $f(x)$ zvezna funkcija. Iz teorije paraboličnih parcialnih diferencialnih enačb vemo, da eksistira ena sama rešitev diferencialne enačbe (1), ki zadošča robnima pogojema (2) in začetnemu pogoju (3). Vemo tudi, da majhne spremembe začetnega pogoja $f(x)$ povzroče le majhne spremembe rešitve $u(x, t)$. Točneje: če imamo poleg začetnega pogoja (3) dan še drug začetni pogoj

$$u(x, 0) = f_1(x), \; f_1(0) = 0, \; f_1(\pi) = 0, \; f_1(x) \text{ zvezna funkcija}$$

in če velja

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} | f_1(x) - f(x) | < \varepsilon \tag{4}$$

velja za pripadajoči rešitvi $u(x, t)$ in $u_1(x, t)$ ocena

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} | u_1(x, t) - u(x, t) | < \varepsilon \quad \text{za vsak } t \geqslant 0 \tag{5}$$

Po Hadamardu imenujemo nalogo rešiti enačbo (1) s pogojema (2) in (3) dobro zastavljeno, če ima naloga eno samo rešitev in če je rešitev zvezno odvisna od začetnega pogoja, npr. v smislu, ki ga pojasnjujeta enačbi (4) in (5). Če naj diferencialna enačba (I) kolikor toliko verno opisuje fizikalni pojav, mora biti naloga dobro formulirana: napaka, ki jo napravimo npr. pri meritvi začetnega pogoja $f(x)$, nima katastrofalnih posledic. Rešitev bo obremenjena z napako istega velikostnega reda.

Oglejmo si rešitev enačbe (1) s pogojema (2) in (3) natančneje. Začetni pogoj moremo razviti v vrsto po sinusih mnogokratnikov spremenljivke x

$$f(x) \approx \sum_1^\infty f_n \sin nx, \qquad f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

Rešitev $u(x, t)$ iščemo v obliki

$$u(x, t) = \sum_1^\infty a_n(t) \sin nx \tag{6}$$

Nastavek (6) že zadošča robnima pogojema (2). Vstavimo ga še v enačbo (1) in dobimo s primerjavo koeficientov pri $\sin nx$:

$$a_n'(t) = -n^2 a_n(t)$$

od tod takoj

$$a_n(t) = a_n(0) \, e^{-n^2 t} \tag{7}$$

Začetne pogoje $a_n(0)$ dobimo iz začetnega pogoja (3):

$$u(x, 0) = \sum_1^\infty a_n(0) \sin nx = \sum_1^\infty f_n \sin nx$$

Od tod sklepamo $a_n(0) = f_n$. To vstavimo v enačbo (7), dobljeno v nastavek (6),

$$u(x, t) = \sum_1^\infty f_n \, e^{-n^2 t} \sin nx \tag{8}$$

Izpeljava rešitve je bila formalna. Prav lahko se prepričamo, da dobljena rešitev zadošča enačbi (1) in pogojema (2) in (3). Vrsta (8) je namreč konvergentna na vsak t, enakomerno za x iz intervala $[0, \pi]$:

$$\left| \sum_1^\infty f_n \, e^{-n^2 t} \sin nx \right| \leqslant \sum_1^\infty | f_n | \, . \, e^{-n^2 t}$$

Koeficienti f_n so prav gotovo omejeni, ker smo predpostavili, da je $f(x)$ zvezna funkcija. Vsota s členi oblike $\exp(-n^2 t)$ pa je konvergentna za vsak $t > 0$. Prav tako vidimo, da je konvergentna absolutno in enakomerno v x vrsta, ki jo dobimo s p-kratnim odvajanjem vrste (8) na spremenljivko t:

$$\sum_1^\infty f_n (-n^2)^p \, e^{-n^2 t} \sin nx, \quad t > 0$$

To pa pomeni, da je rešitev $u(x, t)$ poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva na spremenljivko t. Podobno velja za parcialne odvode na x. Iz formule (8) prav lahko spoznamo, da se rešitev $u(x, t)$ malo spremeni, če malo spremenimo začetni pogoj.

Formulirajmo sedaj obratno nalogo prevajanja toplote. Iščemo funkcijo $u(x, t)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T > 0$, ki zadošča diferencialni enačbi (1) z robnima pogojema (2) in »končnemu« pogoju

$$u(x, T) = g(x), \qquad g(0) = 0, g(\pi) = 0 \tag{10}$$

kjer je $g(x)$ dana, zvezna funkcija s Fourierovim razvojem $g(x) \approx \Sigma\, g_n \sin nx$. Formalno lahko poiščemo rešitev te naloge po isti poti kot v prejšnjem primeru. V nastavku (6) določimo funkcije a_n iz enačbe (1) in »končnega« pogoja (10), ki nam da

$$u(x, T) = \sum_1^\infty a_n(0)\, e^{-n^2 T} \sin nx = \sum_1^\infty g_n \sin nx$$

Od tod sklepamo $a_n(0) = g_n\, e^{n^2 T}$. To vstavimo v enačbo (7) in v nastavek (6):

$$u(x, t) = \sum_1^\infty g_n\, e^{n^2 T}\, e^{-n^2 t} \sin nx \tag{11}$$

Vzemimo poljuben $t_o < T$; koeficienti pri $\sin nx$ so $g_n\, e^{n^2(T-t)}$. Potreben pogoj za konvergenco vrste (11) je seveda, da gredo koeficienti z rastočim n proti 0. To pomeni, da morajo koeficienti a_n razvoja funkcije $g(x)$ v Fourierovo vrsto z rastočim n padati proti 0 vsaj tako hitro kot $e^{-n^2 T}$, kar pa na sploh ne bo res. V splošnem obratni problem prevajanja toplote ni rešljiv. To vidimo lahko tudi takole: če eksistira rešitev $u(x, t)$ obratne naloge, je rešitev $u(x, t)$ poljubno mnogokrat zvezno odvedljiva na x za vsak $t > 0$, kot smo zgoraj dokazali. Tedaj mora biti poljubno mnogokrat odvedljiva tudi funkcija $g(x) = u(x, T)$. Za poljubno zvezno funkcijo to ni vedno res.

Vzemimo, da za neko dano funkcijo $g(x)$ obratna naloga ima rešitev. Tedaj ima naloga rešitev očitno tudi za funkcijo $g(x) + \varepsilon \,.\, \sin n_o x$, kjer je n_o poljubno naravno število. Rešitev $u_1(x, t)$, ki pripada temu končnemu pogoju, je

$$u_1(x, t) = u(x, t) + \varepsilon\, e^{n_o^2(T-t)} \sin n_o x$$

Dodatni člen lahko za nekatere vrednosti spremenljivke x napravimo poljubno velik, če le vzamemo n_o dovolj velik. Rešitev obratnega problema v primeru, ko ta eksistira, ni zvezno odvisna od »končnega« pogoja v smislu, kot ga definirata enačbi (4) in (5). Ena od posledic je praktična: pri približnem izračunu rešitve se vsaka računska nenatančnost ali napaka pri nadaljnjem računanju povečuje. Skoraj gotovo je izračunana aproksimacija rešitve nesmiselna.

Naloge z zgornjimi lastnostmi imenujemo nekorektno zastavljene. Take naloge srečamo tudi drugje, ne samo pri reševanju parcialnih diferencialnih enačb. Omenimo naj še dva primera:

1. Fredholmova integralska enačba 1. vrste

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)\, g(y)\, dy$$

kjer je g iskana funkcija, f in $K(x, y)$ dani zvezni funkciji, je tudi nekorektno zastavljen problem.

2. Naloga izračunati odvod dane zvezne funkcije je tudi nekorektno zastavljena naloga. Najprej ni vsaka zvezna funkcija odvedljiva. Če odvedljivi funkciji prištejemo funkcijo $\varepsilon \sin nx$, velja za prišteti del $\max\limits_{0 \leq x \leq \pi} |\varepsilon \sin nx| = \varepsilon$. Odvod vsote se razlikuje od odvoda prvotne funkcije za $\max\limits_{0 \leq x \leq \pi} |n \varepsilon \cos nx| = \varepsilon n$; to število lahko napravimo pri fiksnem ε poljubno veliko, če primerno izberemo n.

Predvsem v zadnjem času srečavamo v praksi vse bolj pogosto nekorektno zastavljene naloge: v seizmologiji, meteorologiji, hidrodinamiki, magnetodinamiki in drugod. Pri tem se pojavita dve vprašanji: kako smiselno definirati pojem rešitve nekorektno zastavljene naloge (ki v klasičnem smislu rešitve morda sploh nima) in kako take rešitve izračunati.

Na vprašanji bomo odgovorili le za primer obratne naloge toplotne prevodnosti. Vzemimo spet enačbo (1) z robnima pogojema (2) in »končnim« pogojem (10)! Predpišimo si poljubno število $\varepsilon > 0$. Iščemo tako rešitev enačbe (1), $U_\varepsilon(x, t)$, ki zadošča robnima pogojema (2), »končnemu« pogoju (10) pa le približno:

$$|u_\varepsilon(x, T) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{za vse } x \in [0, \pi] \tag{12}$$

Taka rešitev u_ε navadno ni ena sama. Tudi metod, kako take rešitve izračunati, je neskončno mnogo. Opisali bomo eno tako metodo. Dokazali bomo za vsak $\varepsilon > 0$ eksistenco rešitve enačbe (1) s pogojem (2), ki zadošča pogoju (12).

Namesto enačbe (1) vzemimo enačbo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}, \quad \delta > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{13}$$

Enačbi (1) smo dodali »majhen« člen $\delta \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$. Dobljena enačba je četrtega reda, zato moramo predpisati tudi več robnih pogojev. Poleg pogoja (2) zahtevamo še

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, t) = 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\pi, t) = 0 \tag{14}$$

Predpišimo še »končni« pogoj

$$U(x, T) = \sum_1^\infty g_n \sin nx \tag{15}$$

Za to enačbo pa je obratni problem korektno zastavljen, kot bomo takoj spoznali!

Rešitev iščemo spet po Fourierovi metodi z nastavkom (6):

$$U(x, t) = \sum_1^\infty c_n(t) \sin nx \tag{16}$$

Vsi robni pogoji so izpolnjeni. Enačba (13) da diferencialne enačbe za določitev funkcij c_n:

$$c_n'(t) = -n^2 c_n(t) + \delta n^4 c_n(t)$$

Rešitev te diferencialne enačbe je

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-n^2 t + \delta n^4 t} \tag{17}$$

Začetne pogoje $c_n(0)$ dobimo iz »končnega« pogoja (15)

$$c_n(0) = g_n e^{n^2T - \delta n^4 T}$$

To vstavimo v enačbo (17), dobljeno v (16) in že imamo rešitev:

$$U(x, t) = \sum_1^\infty g_n e^{(n^2 - \delta n^4)(T-t)} \sin nx \tag{18}$$

Če je $0 \leqslant t \leqslant T$, δ pa fiksno pozitivno število, je $n^2 - \delta n^4 < 0$ za vse n od nekega n_o naprej. Vrsta (18) je tedaj konvergentna enakomerno za $t \in [0, T]$ in $x \in [0, \pi]$ skupaj z vsemi parcialnimi odvodi vrste na t in x. Prav lahko je pokazati, da majhne spremembe funkcije $g(x)$ (v smislu, ki ga opisuje enačba (4)), malo vplivajo na rešitev $U(x, t)$. Naloga (13), (14), (15) je torej korektno zastavljena.

Reševanje nekorektno zastavljene naloge (1), (2), (10) smo nadomestili z reševanjem korektno zastavljene obratne naloge za neko drugo, sorodno diferencialno enačbo. Iz dobljene rešitve $U(x, t)$ pa izračunamo želeno rešitev $u_\varepsilon(x, t)$ takole:

Poiščimo rešitev $v(x, t)$ diferencialne enačbe (1) z robnima pogojema (2) in začetnim pogojem

$$v(x, 0) = U(x, 0) = \sum_1^\infty g_n e^{(n^2 - \delta n^4) T} \sin nx \tag{19}$$

Rešitev po znanem eksistira in je ena sama. Dana je s formulo (8), v kateri je treba vzeti $f_n = g_n \exp[(n^2 - \delta n^4) T]$:

$$v(x, t) = \sum_1^\infty g_n e^{(n^2 - \delta n^4) T} e^{-n^2 t} \sin nx \tag{20}$$

Za to rešitev trdimo, da zadošča pogoju (12) vsaj v primeru, ko je $g(x)$ dovolj pohlevna funkcija in δ dovolj majhno število. Natančne pogoje in trditve formulirajmo v izreku!

Izrek. Naj bo $g(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[0, \pi]$, $g(0) = g(\pi) = 0$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ eksistira taka rešitev $v(x, t)$ enačbe

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0$$

z robnima pogojema

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0$$

ki pri danem $T > 0$ zadošča pogoju

$$|v(x, T) - g(x)| < \varepsilon \text{ za vse } x \in [0, \pi].$$

Dokaz: Spoznali smo že, da funkcija $v(x, t)$ eksistira, saj smo jo eksplicitno izračunali, glej enačbo (20). Preveriti moramo le, da velja ocena (12).

Najprej se prepričajmo, da za Fourierove koeficiente g_n funkcije $g(x)$ velja ocena $|g_n| < (2M)/n^2$. Formulo

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx$$

integrirajmo dvakrat zapored per partes:

$$g_n = \frac{2}{\pi}\left\{ - g(x) \left| \frac{\cos nx}{n} \right|_0^\pi + g'(x) \frac{\sin nx}{n^2} \right|_0^\pi - \frac{1}{n^2} \int_0^\pi g''(x) \sin nx \, dx \right\}$$

Oba izintegrirana člena odpadeta: prvi, ker je po predpostavki $g(0) = g(\pi) = 0$, drugi, ker je $\sin nx$ na obeh krajiščih enak 0. Pod zadnjim integralom je integrand omejen, saj smo predpostavili, da je g dvakrat zvezno odvedljiva, torej je drugi odvod absolutno pod neko konstanto M. Velja torej ocena

$$|g_n| \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M\pi}{n^2} = \frac{2M}{n^2}$$

Izračunajmo sedaj razliko $g(x) - v(x, T)$!

$$g(x) - v(x, T) = \sum_1^\infty g_n [1 - e^{-\delta n^4 T}] \sin nx \tag{21}$$

Ker je $0 < 1 - e^{-\delta n^4 T} \leqslant 1$, $|\sin nx| \leqslant 1$, $|g_n| \leqslant (2M)/n^2$, lahko najdemo tako veliko število N, da velja ocena

$$\left|\sum_{N+1}^\infty g_n [1 - e^{-\delta n^4 T}] \sin nx\right| \leqslant 2M \sum_{N+1}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{22}$$

V ostalih prvih N členih vsote v enačbi (21) pa lahko vzamemo doslej še poljubno pozitivno število δ tako majhno, da bo

$$N [1 - e^{-\delta n^4 T}] \max_{n \leq N} |g_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Od tod in iz ocene (22) sledi, da je $|g(x) - v(x, T)| < \varepsilon$, kar je bilo treba dokazati.

Končno naj omenimo, da bi lahko namesto ocene (12) zahtevali, da rešitev enačbe (1) s pogojema (2) zadošča »končnemu« pogoju (10) s predpisano natančnostjo ε v kakšnem drugem smislu. Če je npr. $g(x)$ s kvadratom integrabilna merljiva funkcija, bi lahko dokazali, da za poljuben $\varepsilon > 0$ eksistira taka rešitev $w(x, t)$ enačbe (1), (2), za katero velja

$$\int_0^\pi |g(x) - w(x, t)|^2 \, dx < \varepsilon$$

V citirani knjigi obravnavata avtorja mnogo bolj splošne primere nekorektno zastavljenih parcialnih diferencialnih enačb. Študirata tudi numerične metode za izračun približnih rešitev. Kako metode v konkretnih primerih delujejo, je pokazano na mnogih računskih zgledih.

Literatura

J. I. Lions and R. Lattes: The Method of Quasi-reversibility, Applications to Partial Differential Equations. New York 1969, American Elsvier.

TRIJE KORAKI V ZGRADBI SNOVI*

VICTOR F. WEISSKOPF

UDK 539.12

Klasifikacijske sheme so dale ključ za razumevanje zgradbe atomov in jeder. Ali bo tako tudi pri osnovnih delcih?

THREE STEPS IN THE STRUCTURE OF MATTER

For atoms and nuclei, classification shemes provided the key to the underlying structure. Will the same be true for elementary particles?

Zmešnjavo elementov je uredil pred sto leti D. I. Mendelejev s svojo *periodno tabelo.* Uganka o pravilnosti v tej tabeli pa je ostala nerešena še 52 let vse do slavnega Bohrovega *načela o zgradbi,* ki je osnovano na kvantni teoriji atoma. S poskusi so prodrli globlje v zgradbo snovi in odkrili lastnosti atomskih jeder. Ko so razvrstili jedra po številu protonov in nevtronov, so naleteli na podobno periodičnost. Pojasnil jo je *lupinski model jedra,* ki so ga vpeljali 1951 J. H. D. Jensen, A. Goeppert-Mayer, O. Haxel in H. E. Suess. V zadnjih dveh desetletjih so obstreljevali proton in nevtron z visokoenergijskimi curki in odkrili mnogo novih kratkoživih tvorb. Pred nedavnim so M. Gell-Mann, K. Nishijima in Y. Ne'eman delno uredili dozdevno kaotični seznam novih »delcev«. Toda tega reda še ne znamo pojasniti.

To so trije koraki pri prodiranju v naravo snovi — prvi se nanaša na zgradbo atomovega elektronskega oblaka, drugi na sestavo jedra iz protonov in nevtronov in tretji na zgradbo osnovnih delcev. Med temi tremi raziskovalnimi območji, od katerih je vsako odprlo nov svet pojavov, so zanimive podobnosti in ostre razlike.

Atomi

V devetnajstem stoletju sta bili kemija in fizika ločeni. V kemiji so nastopali nefizikalni pojmi kot nedeljivi atomi z določenimi in nespremenljivimi lastnostmi in obliko. Ti pojmi niso sodili v klasično fiziko tistega časa. Fizika je tedaj obravnavala zvezno se spreminjajoče lastnosti trdnih teles, kapljevin in plinov. Te so povezane s koeficienti: prožnostnimi moduli, viskoznostmi, dielektričnimi lastnostmi, prevodnostmi in tako naprej. Fiziki niso znali pojasniti velikosti teh konstant. Prizadevali so si le, da bi spoznali vedenje snovi pri izbrani skupini vrednosti. Fizika 19. stoletja ni znala ravnati z atomom in njegovimi lastnostmi. J. J. Thomson, H. A. Lorentz in njuni sodobniki pa so že poznali elektron in slutili njegovo pomembno vlogo.

---

* Članek V. F. Weisskopfa: »Three Steps in the Structure of Matter« je izšel v Physics Today, 23 (8), 17 (1970). Profesor Weisskopf in uredništvo revije Physics Today sta ljubeznivo dovolila, da prevedemo članek. Za to se jima lepo zahvaljujemo. Članek je prevedel J. Strnad.

Količini, ki ju elektronu izmerimo — naboj e_0 in masa m_0 — pa ne določata niti dolžine niti energije. Potrebno je bilo vpeljati konstanto h. To je storil M. Planck v svojem pomembnem delu 1900. Leto 1900 ni prineslo samo preloma stoletja, ampak je tudi naznanilo v fiziki spremembo, ki je dosegla vrh s tem, da je napravila kemijske pojme bolj fizikalne. Pokazalo se je, da je kvantna mehanika — ta otrok 20. stoletja — osnova za razlago kemičnih pojavov, kot so stabilnost, velikost in vzbuditvene energije atomov. Na osnovi ravnovesja med Coulombovo privlačno silo med jedri in elektroni in kvantnomehansko ničelno energijo elektronov, ki ne morejo zapustiti omejenega dela prostora, je uvedla atomski enoti za dolžino in energijo — *Bohrov radij* in *Rydbergovo konstanto.* V fiziko je vpeljala oblikovni element: osnovne enačbe kvantne mehanike določajo značilne oblike in razporeditve, ki odražajo notranjo simetrijo razmer v atomih ali molekulah.

Kvantna mehanika je tudi fizikalno pojasnila prostorsko razporeditev kemijskih vezi. Pokazalo se je, da sledi stabilnost in nespremenljivost kemičnih lastnosti iz diskretnih kvantnih stanj. Kvantna fizika je vključevala kemijske zamisli in pojme in kemija je prenehala biti ločena znanost.

Bohrov navdih

Bohrova razlaga periodne tabele je izhajala iz kvantne teorije atoma. Kako je mogel Bohr zadeti pravo razlago 1921, preden so izoblikovali kvantno mehaniko in — to je še presenetljiveje — preden je 1925 W. Pauli spoznal *izključitveno načelo?*

Bohr je konstruiral atome po vrsti z dodajanjem po enega elektrona. Zaslutil je, da ne moreta biti več kot dva elektrona na enem tiru. To je razbral iz atomskih spektrov in do tega se je dokopal med preučevanjem periodičnosti Mendelejeva. Govoril je o »odporu proti sprejemu več elektronov z enakimi kvantnimi števili«, ko si je prizadeval, da bi razumel, zakaj je na vsakem tiru par elektronov. Mislil si je, da »imata elektrona lahko enaki kvantni števili n in k le, če sestavljata harmonično celoto«.

Veliki kritik in puritanec Pauli pa ni maral take razlage. Že 1921 je slutil, da je za vsem tem splošno načelo. Kot zanimivo pričevanje o Paulijevem gledišču naj navedem nekaj pripomb, ki sem jih našel načečkane ob robu neke knjige v Paulijevi knjižnici v CERN. V knjigi, ki je posvečena predvsem slavnemu Bohrovemu načelu o zgradbi, je Bohr pripomnil o dodatku 11. elektrona k zaključeni lupini desetih elektronov: »Pričakovati moramo, da gre 11. elektron na 3. tir.« Paulija je ta trditev vznejevoljila, tako da je pripisal: »Ni razloga, da bi kaj pričakoval, pač pa si tako sklepal po spektrih« in dostavil dva klicaja.

Po štirih letih skrbnega preučevanja atomskih spektrov in Zeemanovega pojava v močnem magnetnem polju je Pauli dokončno izoblikoval svoje načelo, ki je opravičilo Bohrovo razlago periodne tabele elementov. Po petnajstih letih je Pauliju 1940 uspelo dokazati, da izključitveno načelo za delce s polovičnim spinom ni novo dodatno načelo, pač pa nujno sledi iz oblike relativističnih valovnih enačb.

Razvoj kvantne mehanike je povzročil, da kemijski pojmi niso bili več nefizikalni. To je bil pomemben korak k enotnosti znanosti. Različne sile med atomi, ki so jih prej obravnavali kot kemijske sile — van der Waalsove sile,

viskoznost, elektrika, kapilarnost — so se zlile v eno samo dobro znano interakcijo: elektrostatično privlačno silo med elektroni in jedri. Zakoni kvantne mehanike določajo učinke te privlačne sile v danih okoliščinah.

Osnovni števili

Kvantna mehanika atomov in molekul sloni na dveh številih. Za naravo pojavov, ki jih opazujemo, je bistveno, da sta ti števili majhni. To sta *konstanta fine strukture* $e_0^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ in *razmerje med masama elektrona in nukleona* m_0/M. Če bi konstanta fine strukture dosegla vrednost 1 ali jo presegla, bi v kvantni mehaniki prevladovali relativistični pojavi. Tedaj bi bili na primer pari elektron—pozitron pomembni gradniki atomov. Fizika in kemija bi bili popolnoma drugačni, če razmerje mas m_0/M, ki določa zgradbo molekul, ne bi bilo majhno. Poprečna razdalja med jedri v molekuli je v zvezi z razsežnostjo elektronske lupine, ki jo lahko izenačimo z amplitudo ničelnega gibanja elektronov. Na jedra deluje (po Newtonovem zakonu o vzajemnem učinku) enaka sila kot na elektron. Toda njihovo ničelno gibanje je manjše za faktor $(m_0/M)^{1/2}$. Zaradi tega so jedra v molekuli lokalizirana. Sestavljajo jedrsko ogrodje. To omogoča izredno raznolikost molekularne arhitekture, ki obsega tudi kristale in makromolekule. Če bi se masa protona približno ujemala z maso elektrona, ne bi bilo kemije, trdnih teles in nazadnje tudi ne življenja in zavesti.

Razloga za to razliko še ne poznamo. Zagotovo je povezan z obstojem močne interakcije med nukleoni. To je eno izmed osrednjih vprašanj sodobne fizike delcev. Osnovnih razlogov, zaradi katerih je svet tak in ne drugačen, ne bomo razumeli, dokler ne bomo znali pojasniti velike mase nukleonov in male mase elektronov in konstante fine strukture.

Jedra

Naš svet kemije in biologije lahko obstaja samo v razmerah, v katerih izmenjava energije med delci ni preveč burna in v katerih je hkrati na razpolago dovolj energije za mirne spremembe molekulske zgradbe. Take ugodne razmere imamo na Zemlji, ki je v varni razdalji 10^{11} m od najbližje zvezde in ki ima ozračje za zaščitni ovoj.

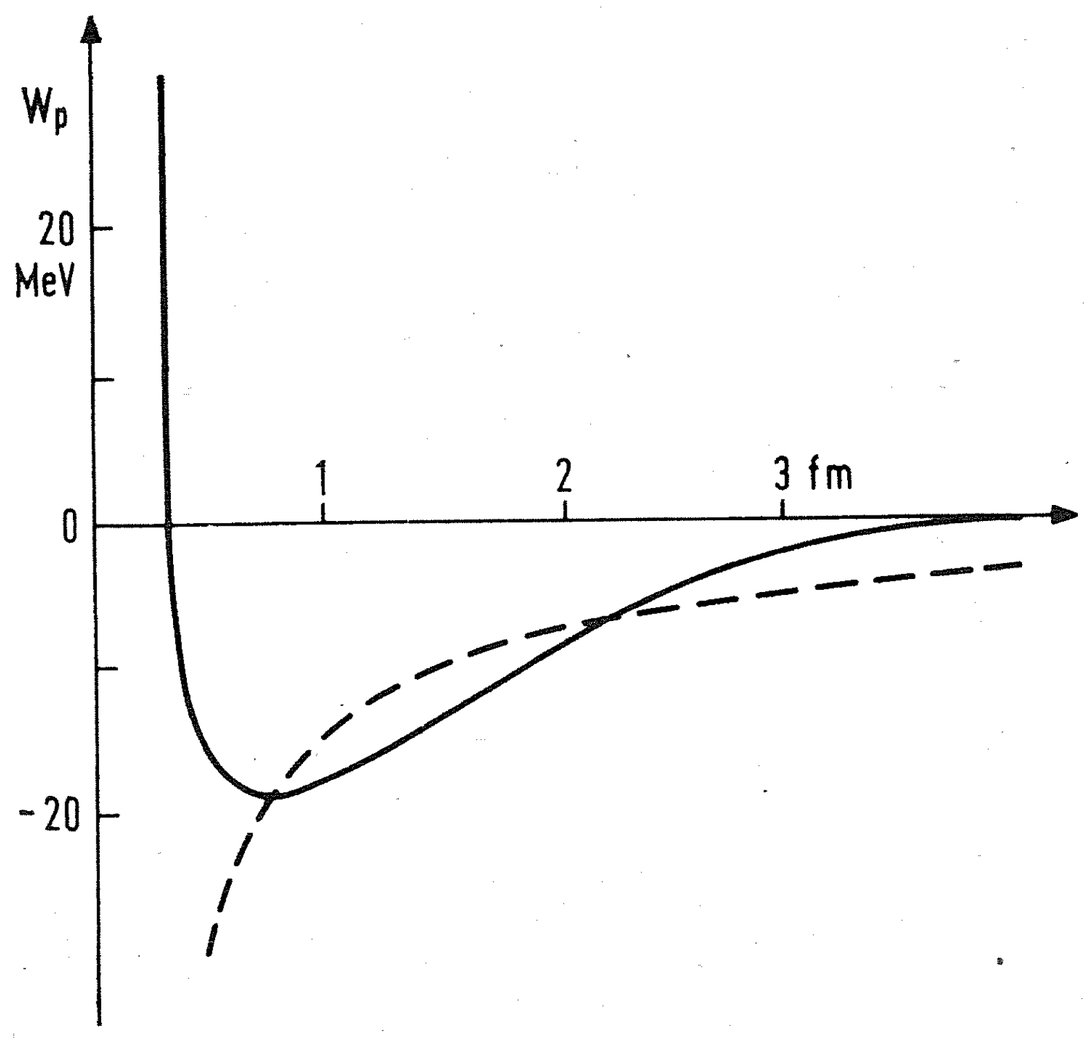
Večina snovi v vesolju je v čisto drugačnih razmerah. V središčih zvezd so na primer najpomembnejši pojavi med jedri. Tam je odločilno drugačno načelo o zgradbi. Na površju Zemlje pa jedrskih pojavov skoraj ni, ker se zaradi premajhnih energij ne morejo sprožiti. Naletimo samo na redke zglede za take pojave: na naravne radioaktivne elemente, ki so ostalina daljne preteklosti, v kateri je zemeljsko snov ob eksploziji izbruhala kaka supernova.

Jedrska sila

Jedrske pojave lahko preučujemo le v laboratoriju, če jih sprožimo s pospeševalniki. Taka preučevanja so se bogato obrestovala, saj so odkrila svet, ki je podoben svetu naših atomov in molekul in obenem od njega različen. Najprej omenimo odkritje nove sile, ki deluje med nukleoni. To zapleteno silo kaže sl. 1. Pri manjših razdaljah kot 1 fermi (10^{-15} m) je odbojna, pri razdalji

od 1 fermija do nekaj fermijev pa postane privlačna in pri še večjih razdaljah eksponentno pojema proti nič. V podrobnostih je sila odvisna od medsebojne orientacije spinov in simetrije kvantnega stanja obeh delcev.

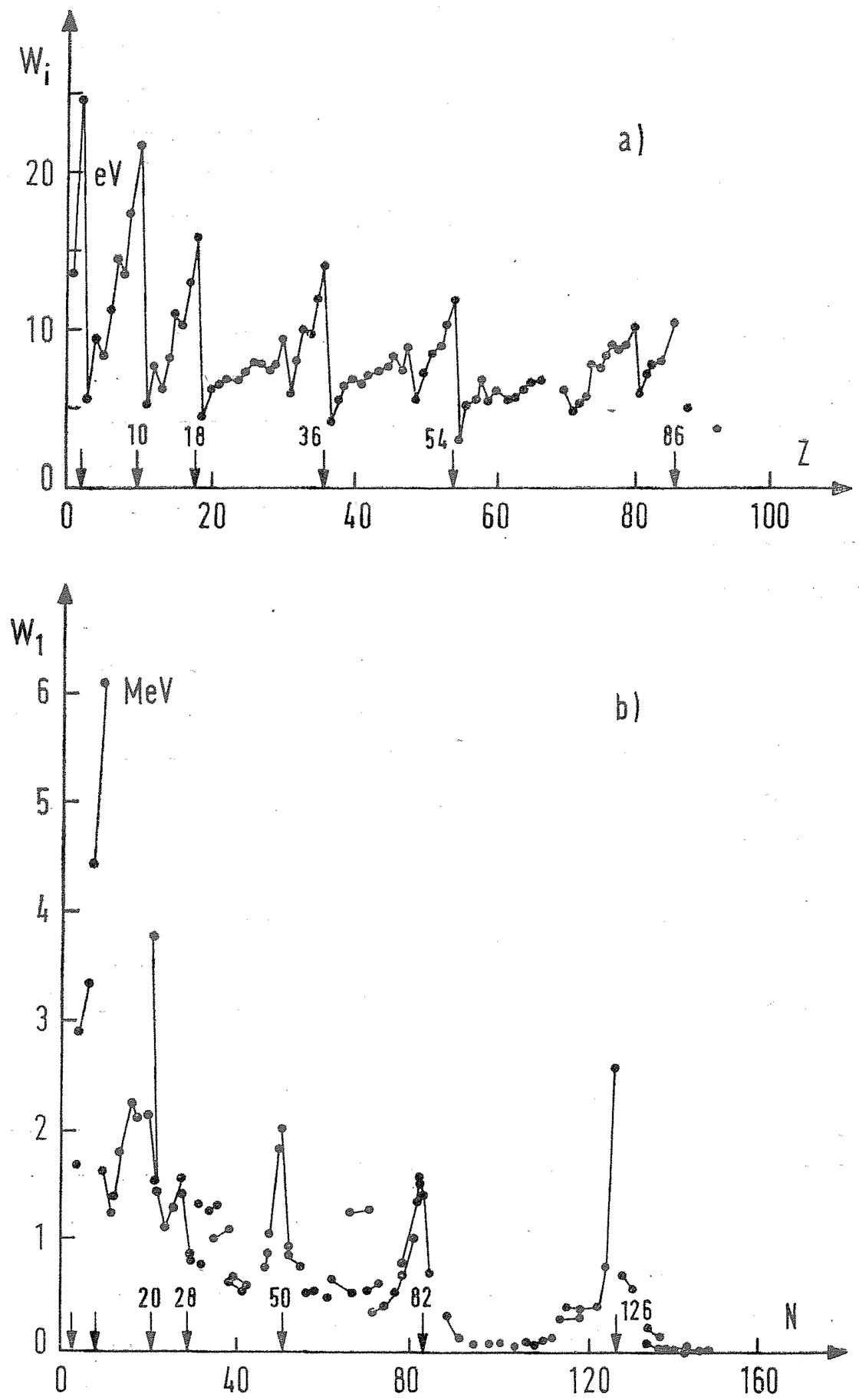
Za razliko od električne sile jedrske sile ne moremo zaznati makroskopsko. Makroskopsko električno polje nastane, ko združimo mnogo električnih nabojev v dani prostornini. Polja posameznih nabojev sežejo daleč iz te prostornine in se seštejejo, tako da je polje močno. Česa takega ne moremo doseči pri polju jedrske sile, saj njegov doseg ni znatno večji kot najmanjša razdalja, do katere se lahko približata nukleona.



Sl. 1. Jedrska sila je odbojna pri razdalji pod 1 fm in privlačna pri večji razdalji. Coulombski potencial za par nabojev $+3e_0$ in $-3e_0$ je narisan črtkano. Oblika jedrskega potenciala spominja na molekulski potencial

Približno smemo primerjati jedrsko silo na privlačnem območju s privlačno silo nabojev $+3e_0$ *in* $-3e_0$. Tako ocenimo energije in velikost preprostih jeder z izrazoma za Rydbergovo konstanto in Bohrov radij, v katerih nadomestimo e_0 s $3\,e_0$ in maso elektrona z maso nukleona. Po tem so jedrske energije 20 000-krat večje, velikosti jeder pa 20 000-krat manjše kot ustrezne vrednosti pri atomih.

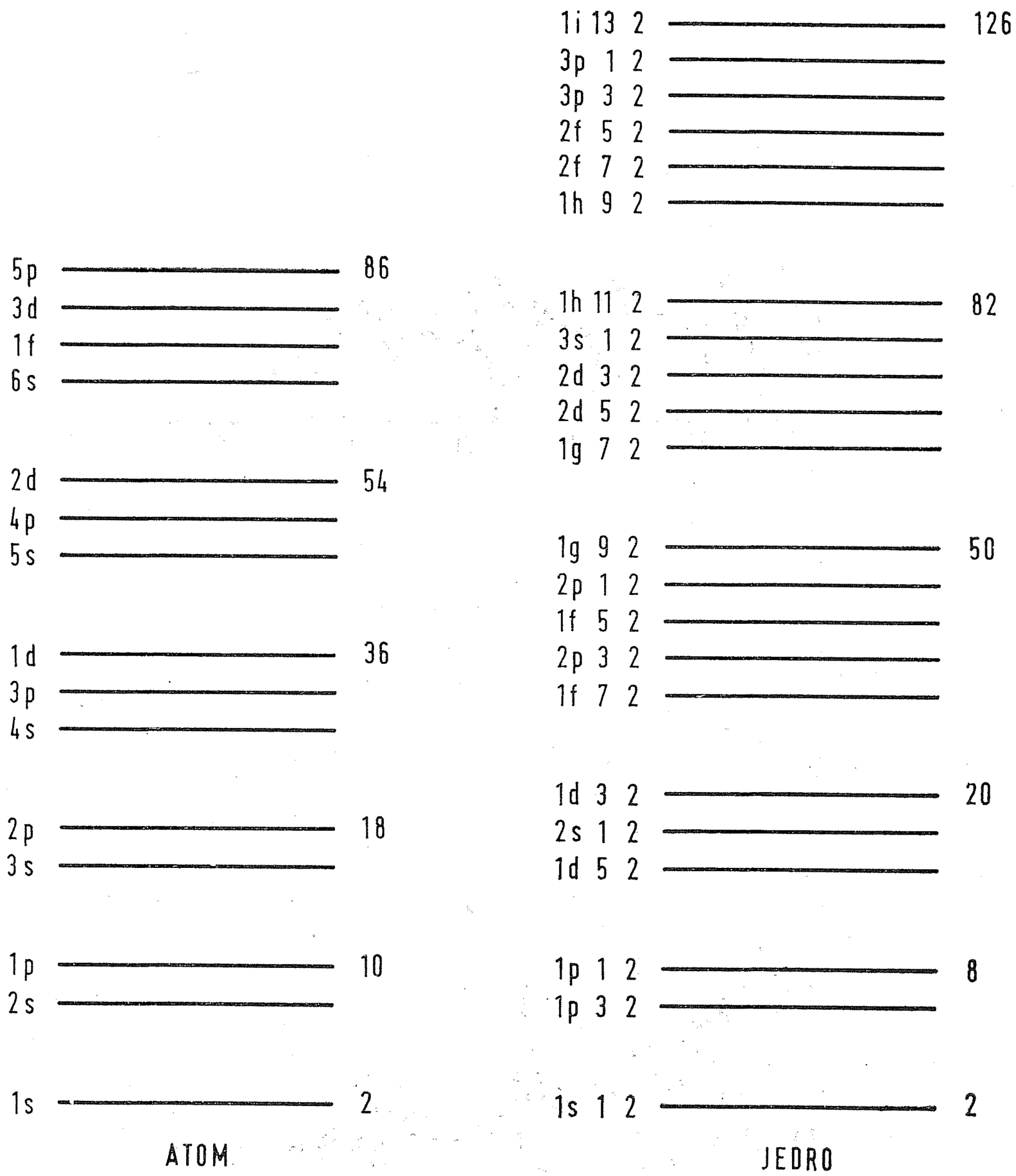
V mnogih pogledih je postala jedrska fizika ponovitev atomske fizike s podobnimi spektri in kvantnimi števili. Obstajajo pa značilni razločki. Pri jedrih na primer ni izrazitega polja, ki bi izviralo od težkega osrednjega delca. Jedrska sila ima drugačno naravo: deluje med vsemi gradniki jedra. Toda v kvantni mehaniki določa mnogo lastnosti simetrija. Poprečno privlačno polje, ki deluje na vsak nukleon v jedru, pa ima enako krogleno simetrijo kot električno polje jedra v atomu. Zaradi tega pridemo do podobnih skupin kvantnih števil, do podobnega načela o zgradbi, do podobne periodne tabele jedrskih lastnosti, če razvrstimo jedra po številu protonov ali nevtronov. Na koncu period naletimo na jedra z zaključenimi lupinami in velikimi vezavnimi energijami. Ta *magična jedra* so sorodna žlahtnim plinom. Slika 2 primerja atomske ionizacijske energije in jedrske vzbuditvene energije in kaže podobnost med atomsko in jedrsko periodičnostjo. Splošni značaj je podoben, opazimo pa pomembne razločke.



Sl. 2. Sorodni periodičnosti za atome in za jedra razberemo z diagramov za atomsko ionizacijsko energijo W_i (a) in za jedrsko vzbuditveno energijo W_1. Največje so energije za žlahtne pline in magična jedra (puščice), ki ustrezajo zaključenim lupinam. jedrske vzbuditvene energije W_1 se nanašajo na prva vzbujena stanja v sodo-sodih jedrih; črte povezujejo jedra z enakim številom protonov

Lastnosti, ki se ne ujemajo

Podobnost med jedrskimi in atomskimi spektri odpove na več mestih. Prvič: vrstni red nivojev v poprečnem potencialu jedra se razlikuje od vrstnega reda v Coulombovem polju. Jedrska sila nima singularnosti v sredini, zato je nivo 2 s višji od nivoja 1 p (sl. 3), medtem ko je v Coulombovem polju obratno. Drugič: močna sklopitev spin—tir v jedru spremeni zasedbena števila zaporednih lupin, tako da se končajo periode pri drugih številih delcev. Še več: Hundovo pravilo je obrnjeno, ker se odbijajo elektroni v atomu, medtem ko se privlačijo vsi gradniki jedra. To pravilo pravi, da je v atomu v zadnji nepopolni lupini osnovno tisto stanje, ki ima konfiguracijo z najvišjo multipliciteto. Tedaj so namreč elektroni najbolj razmaknjeni drug od drugega. Nasprotno ima v jedru osnovno stanje najmanjšo možno multipliciteto. Zato imajo vsa jedra s sodim številom protonov Z in s sodim številom nevtronov N spin nič. Od nič različna vrtilna količina je vezana na liho zasedbeno število.



Sl. 3. Različni razporeditvi energijskih nivojev nastaneta zaradi razlike med električno in jedrsko silo. Jedrska sila nima singularnosti na sredi, zato se zamenjata nivoja 2 s in 1 p; sklopitev spin-tir pa spremeni zasedbena števila, ki so pripisana na desni. Risba podaja le vrstni red nivojev, ne pa vrednosti energij

Nadaljnja razlika je v tem, da so v jedru gradniki dveh vrst — protoni in nevtroni, ki imajo skoraj enako maso. Glede jedrske sile sta ti vrsti enakovredni. Zaradi tega so nivoji, ki jih dobimo po zamenjavi protonov z nevtroni, približno degenerirani. Degeneriranost ni popolna zaradi šibkejše električne sile med naboji protonov. S to degeneriranostjo je povezana nova simetrija in novo kvantno število — *izospin*, ki igra vlogo v jedrskih spektrih.

Druga posledica enakosti mas vseh gradnikov je v tem, da središče jedra ni posebej lokalizirano. Zato nastane novo jedro in ne molekula, če se pri jedrski reakciji spojita dve jedri. Tako nastane na primer ob spojitvi dveh kisikovih jeder žveplovo jedro. Pri tem ne nastane kako ogrodje ali kaka višja razporeditev. V tem pogledu je pri združevanju jeder mnogo manj možnosti za ustvarjanje novih struktur kot pri združevanju atomov. Toda energija, ki se sprosti pri spajanju jeder, je milijonkrat večja kot pri kemičnih reakcijah.

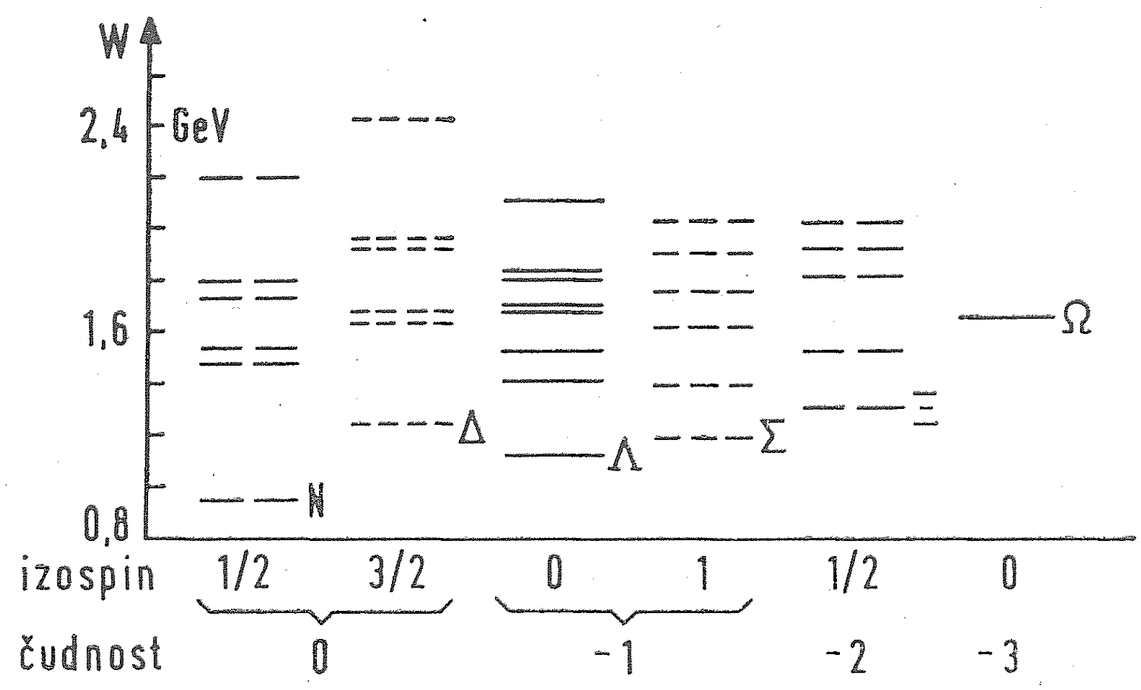
Zaradi naraščajočega Coulombovega odboja med protoni ima število nukleonov, ki se dajo združiti, zgornjo mejo. Kak poseben lupinski pojav je lahko vzrok za to, da leži ta meja nad transuranskimi elementi, ki jih poznamo

danes. V vesoljskih razmerah, na primer v nevtronskih zvezdah, utegne gravitacijska privlačna sila preprečiti, da bi se nukleoni razleteli.

V svetu jeder opazimo še en nov pojav. Prehodi med kvantnimi stanji z višjo energijo v kvantna stanja z nižjo energijo ne potekajo samo z izsevanjem fotonov kot v atomih, ampak tudi z izsevanjem *leptonskih parov* — elektronov in nevtrinov. To je posledica skrivnostne *šibke interakcije*, ki ima presenetljive lastnosti, prekrši na primer simetrijo levo-desno. Taki prehodi so mogoči med stanji z različnima skupnima nabojema jeder. Po tem sodijo vsa jedra z enakim številom nukleonov ne glede na naboj k istemu kvantnemu sistemu. Sistem preide po zaporednih prehodih v stanje, v katerem je število protonov tolikšno, da je energija najnižja.

Nukleoni in mezoni

Tretji korak v spoznavanju narave snovi je povezan s prodorom v zgradbo nukleona. Pokazalo se je, da se spremeni stanje nukleona, če ga obstreljujemo s curki delcev z energijo več kot nekaj sto megaelektronvoltov. Nukleon preide v kratkoživa »vzbujena« kvantna stanja, iz katerih se povrne v osnovno stanje (proton, nevtron). Ob tem izseva presežno energijo na različne načine. V spektru teh »vzbujenih« stanj (sl. 4) imajo energijske razlike velikostno stopnjo 10^8 eV, se pravi, da so tisočkrat večje od vzbuditvenih energij jeder.

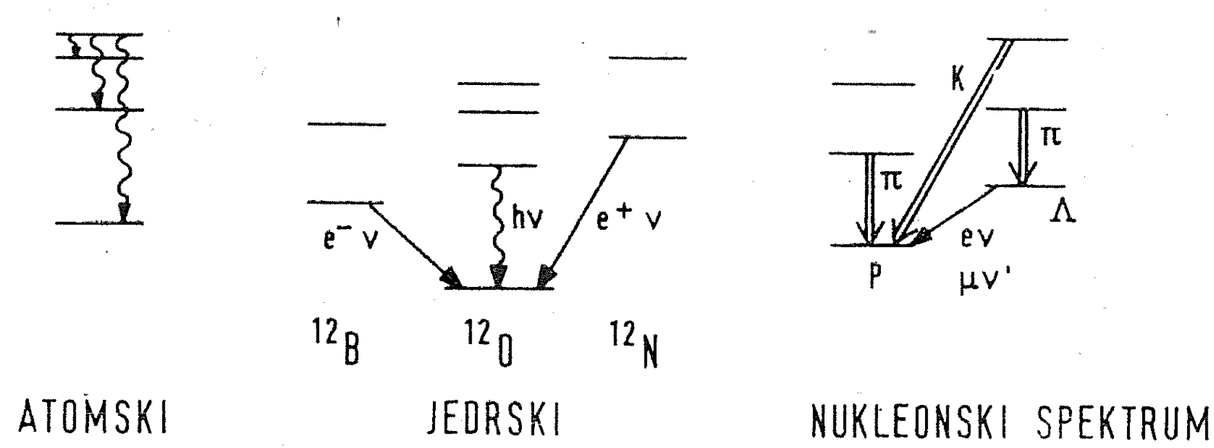


Sl. 4. Mnogo osnovnih delcev so spoznali kot vzbujena stanja nukleona z energijami, ki so tisočkrat večja od jedrskih vzbuditvenih energij. Stanja sestavljajo skupine, ki jih označujeta kvantni števili čudnost in isospin. Število črtic označuje multipliciteto naboja za vsako stanje

Po skrbnem preučevanju vzbuditvenih energij, kvantnih števil in izsevanih delcev so M. Gell-Mann, K. Nishijima, Y. Ne'eman in mnogi drugi vnesli red v navidezno zmešnjavo. Pri tem so vpeljali novo kvantno število *čudnost* ali *hipernaboj* in razvrstili delce po vidikih teorije grup za grupo SU (3).

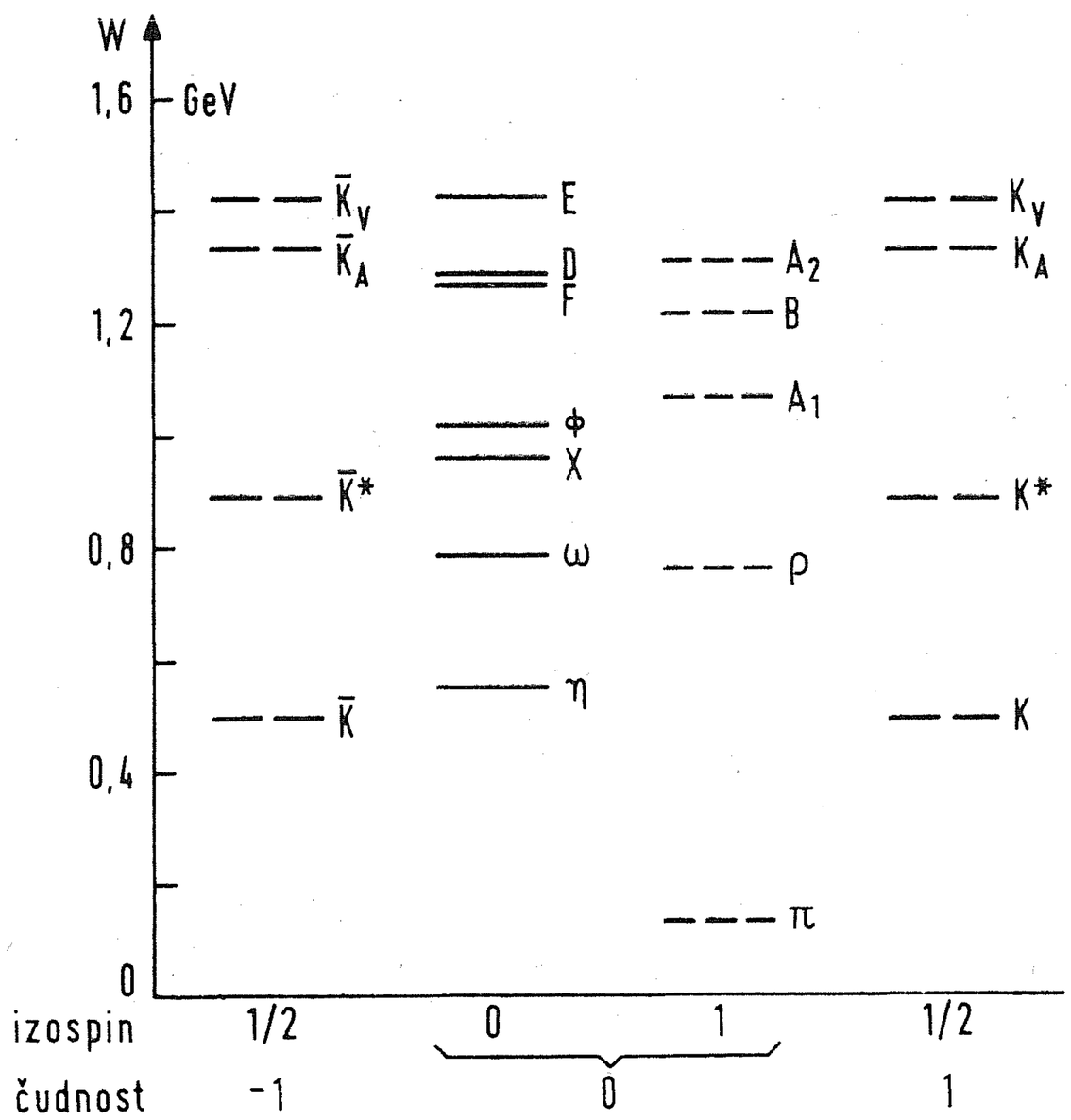
V novih delcih, ki jih označujejo grške črke Δ, Λ, Σ,Ξ in Ω, so spoznali vzbujena stanja nukleona. Ta stanja sestavljajo skupine, ki se med seboj razlikujejo po kvantnih številih. Nekatera od njih, kot na primer vrtilna količina in izospin, so bila znana iz atomske in jedrske fizike, a hipernaboj je nov. Pri teh pojavih ne nastopi le novo kvantno število, ob prehodih med kvantnimi stanji se pokažejo tudi nove oblike energije. Poleg fotonov in parov elektron-nevtrino, ki jih sevajo atomi in jedra, se pri teh prehodih izseva novi leptonski par mion-nevtrino. Mion je težki elektron, ki je okoli dvestokrat težji od

navadnega. Popolnoma nove oblike pri izsevanju ali absorpciji pa so *mezoni.* Na sliki 5 so zgledi za tri vrste kvantov polj in interakcij, pri katerih se pojavijo.



Sl. 5. Kvanti polja, ki se izsevajo v treh vrstah spektrov. Fotoni (elektromagnetna interakcija — valovito), leptonski pari (šibka interakcija — enojna črta) in mezoni (močna interakcija — dvojna črta) označujejo po vrsti atomske, jedrske in nukleonske prehode

Obstaja več vrst mezonov. Nekateri nosijo spin, naboj ali hipernaboj. Mezone lahko razvrstimo na skupine po istih kvantnih številih kot nukleone. Spektrum mezonov kaže sl. 6. Ob prehodu med nukleonskima stanjema dovede ali odnese razliko kvantnih števil absorpcija ali emisija mezona. Razvrstitev po kvantnih številih je prinesla torej red tudi v zmešnjavo mezonskih stanj.

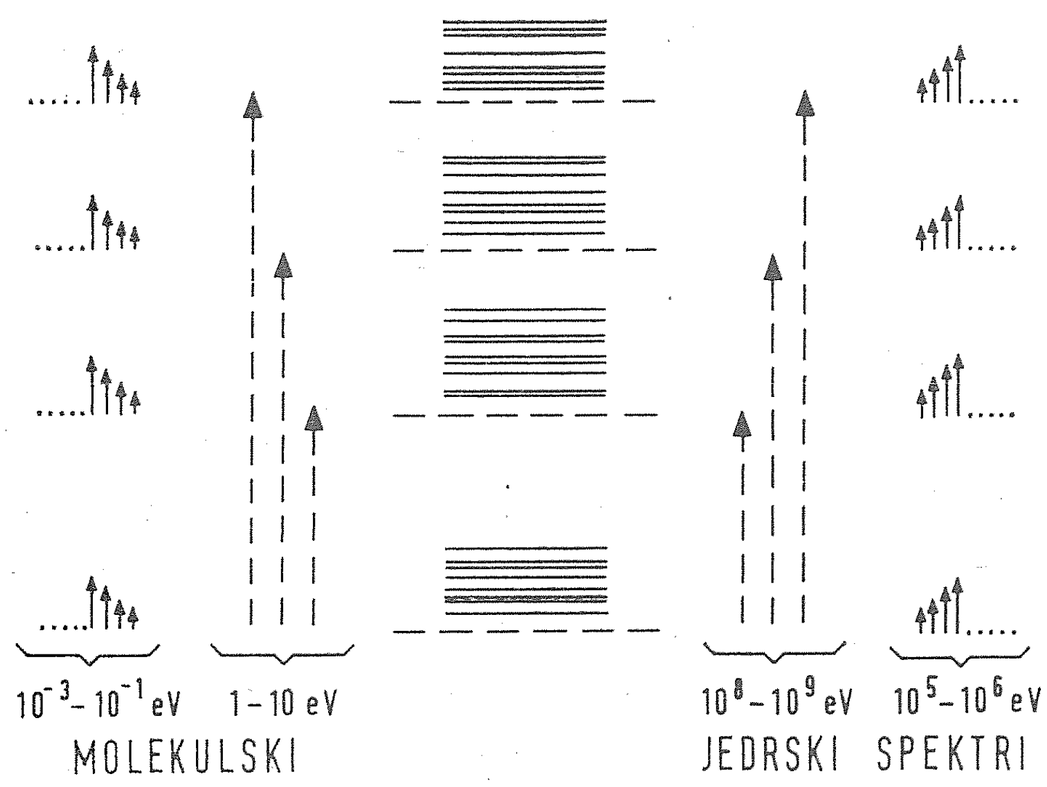


Sl. 6. Mezone razvrstimo podobno kot nukleone. Spektri obojih imajo značilnosti sestavljene zgradbe, ki jo predvideva model kvarkov

Ali smemo primerjati jedra z molekulami?

Ali so tri spektroskopije — atomska, jedrska in nukleonska — trije enaki koraki v smeri proti vse manjšim tvorbam? Prikladneje je, če upoštevamo samo dvoje sistemov, atom in nukleon, in še nivoje sestavljenih sistemov, molekul

v prvem in jeder v drugem primeru. Tako so pred nami na prvi strani atomski in molekulski spektri in na drugi nukleonski in jedrski spektri. Po tem so jedrski spektri le razširitev nukleonskega spektra, prav tako kot so molekulski spektri le razširitev atomskih. Nukleoni igrajo v jedru enako vlogo kot atomi v molekulah in jedrske sile igrajo enako vlogo kot kemijske sile. Ta podobnost je še očitnejša zaradi sorodnosti med jedrskimi in kemičnimi silami. Oboje so privlačne na večjih razdaljah, odbojne na manjših in odvisne od orientacije spinov in od simetrije. Podobnost je prav presenetljiva, če upoštevamo širši vzbuditveni spektrum jedra, ki ne vsebuje samo vzbuditev sistema proton-nevtron, ampak tudi vzbuditve nukleonov po tretji spektroskopiji. Spektrum, ki ga dobimo, ko dodamo notranjim nukleonskim vzbuditvam jedrske vzbuditve, močno spominja na molekulske spektre (sl. 7).



Sl. 7. Združitev jedrskih vzbuditev (neprekinjene puščice) in notranjih nukleonskih vzbuditev (črtkane puščice) da spektrum, ki je podoben molekulskemu, v slednjem nastopajo vrtilno-nihajne vzbuditve (neprekinjeno) skupaj z elektronskimi (črtkano). Morda jedrska sila, prav tako kot molekulska sila, ni osnovna, ampak sledi iz neke preprostejše in bolj osnovne sile

Vendar je jedrska sila manj učinkovita kot kemična. Vezava devterona je na primer tako šibka, da bi devteron razpadel že, če bi se vrtel z enim kvantom vrtilne količine. Nasprotno prenesejo vezi dvoatomskih molekul še centrifugalno silo pri vrtenju z 20 do 40 kvanti vrtilne količine. Tudi vezavna energija nukleona v jedru je mnogo manjša od energije za notranjo vzbuditev, medtem ko imata v molekulah ti energiji enako velikostno stopnjo. Najbrž je najprikladneje, če primerjamo jedrsko silo z van der Waalsovo silo med atomi z zaključenimi lupinami. Jedrska snov ustreza po tem superfluidnemu heliju. Ta podobnost lahko dobro pojasni sorazmerno neodvisno gibanje nukleonov v jedru (lupinski model) in nekatere tipične lastnosti spektrov.

Precej zamotana oblika vsili misel, da jedrska sila ni tako osnovna kot elektrostatična privlačna sila. Morda je jedrska sila le posledica bolj osnovnega pojava, ki ima sedež v nukleonih, posledica nečesa mnogo učinkovitejšega in preprostega, prav tako kot je kemijska sila posledica preproste elektrostatske interakcije.

Model kvarkov

Povrnimo se k vzbujenim stanjem nukleonov in mezonov! V nasprotju z atomsko in jedrsko je bila doslej ta spektroskopija zgolj empirična. Ne moremo je pojasniti ali izpeljati iz notranje dinamike sistema, ker te dinamike ne poznamo. Presenetljivo je, da govori urejenost nukleonskih in mezonskih spektrov za sestavljeno zgradbo. Nukleonski spektrum ima nekaj značilnih potez sistema treh delcev. Vsak tak delec naj bi bil član tripleta poddelcev s polovičnim spinom. Mezonski spektrum spominja na spektrum dveh poddelcev, ali bolje poddelca in njegovega antidelca.

S tem tako imenovanim modelom kvarkov lahko sicer pojasnimo precej pojavov v zvezi z vzbujenimi stanji mezonov in nukleonov. Naletimo pa tudi na mnogo težav. Vzbuditvene energije mezonov in nukleonov imajo za razliko proti svetu atomov in molekul enako velikostno stopnjo (včasih so celo večje) kot mirovalna energija sistema v osnovnem stanju. Pri tolikšnih energijah pa morajo pari pravih ali virtualnih delcev in antidelcev nastopiti pri vsaki interakciji. Za zdaj še ne poznamo postopka, s katerim bi to upoštevali.

Nerešena uganka

Zgradbe nukleonov in mezonov še ne poznamo. Ne vemo, kaj določa silo med njimi, in ne vemo, zakaj je mirovalna energija nukleona v osnovnem stanju tolikokrat večja od mirovalne energije elektrona. Omenili smo, da je to razmerje odločilno za lastnosti snovi, ki nas obdaja. Ne razumemo, zakaj so protoni in nevtroni tako težki, zato ne smemo trditi, da razumemo kemijo.

Šele učimo se govoriti o teh tvorbah in njihovih interakcijah. *Disperzijske zveze, algebra tokov* in *Reggejevi poli* omogočajo, da sestavimo iz eksperimentalnih dejstev logično ogrodje, ki se sklada z izreki relativnosti in kvantne teorije polj. Najverjetneje bodo potrebne mnogo večje energije curkov, da bomo ugotovili, kaj se dogaja v notranjosti teh tvorb. Za zdaj dosežemo lahko le, da trčijo, in nato preiščemo kvantna stanja, v katerih odletijo narazen. Smo v podobnem položaju, kot če bi poskušali ugibati o zgradbi atomov po preučevanju »nizkoenergijskih« trkov med atomi. S tem mislimo trke, pri katerih se vzbude atomi, ne da bi se razbili. To bi bilo težavno, če ne brezizgledno prizadevanje.

Spektrum vzbujenih nukleonskih in mezonskih stanj so odkrili šele pred slabimi desetimi leti. Zato ne smemo obupovati, če danes ne znamo razložiti spektrov osnovnih delcev. Kar 52 let je trajalo, preden so razložili periodno tabelo.

NOVICA

VELIKOST ATOMSKIH JEDER

V najpreprostejšem približku vzamemo, da je atomsko jedro kroglica z ostro mejo. Radij kroglice je

$$R = R_0 A^{1/3} \tag{1}$$

če je gostota snovi po vsem jedru konstantna in za vsa jedra enaka. A je relativna atomska masa jedra (v atomskih enotah mase), konstanto R_0 pa je treba določiti z merjenji. Omenimo nekatera od njih!

Sipanje hitrih delcev α. — Pri sipanju delcev α na jedrih izračunamo diferencialni sipalni presek z Rutherfordovo formulo za sipanje točkastega naboja na drugem točkastem naboju z enakim znakom. Toda pri delcih α z dovolj veliko kinetično energijo formula odpove za sipalne kote, ki so večji od nekega mejnega kota. Vzrok za to je jedrska sila, ki je ne upošteva Rutherfordova formula in ki začne delovati med delcem α in jedrom, če se dovolj približata. Razdalja, do katere se delca približata pri mejnem kotu, določa radij jedra.

Merjenje totalnega preseka za srednjehitre nevtrone. Totalni presek za nevtrone s kinetično energijo deset do dvajset megaelektronvoltov je enak dvojnemu geometrijskemu preseku jedra: $\sigma_t = 2\pi R^2$.

Merjenje diferencialnega sipalnega preseka pri prožnem sipanju nevtronov. Pri uklonskem sipanju nevtronov nastane prvi uklonski minimum pri sipalnem kotu $\vartheta = \arcsin 0{,}61\, \lambda/R$, prav tako kot pri uklonu svetlobe na krožni ploščici. Pri tem je $\lambda = h/m_n v$ valovna dolžina, ki jo pripišemo nevtronu s hitrostjo v.[1]

Pri naštetih merjenjih otipamo jedro z delcem, ki sodeluje z njim z močno (jedrsko) interakcijo. Ne smemo spregledati, da ima tak delec lastno razsežnost. Nasprotno pa smemo elektron in mion pogosto imeti za točkasta. Zato z njima zanesljiveje otipamo meje jedra. Vendar sodelujeta delca samo z nabojem in magnetnim momentom jedra. Zaradi tega dobimo z njima le razsežnost naboja in magnetnega momenta jedra.

Mionski atomi. V mionskih atomih je vezan namesto elektrona v atomu okoli dvestokrat težji mion. Ta se giblje v manjši razdalji od jedra kot elektron, tako da preživi pri težjih jedrih znaten čas v jedru. Iz razlike med izmerjeno vezalno energijo miona in izračunano vezalno energijo miona po enačbi za elektron lahko dobimo radij jedra.[2]

Prožno sipanje hitrih elektronov. Najzanesljivejše podatke o razsežnosti naboja jedra da merjenje diferencialnega preseka pri prožnem sipanju elektronov s kinetično energijo tisoč in več megaelektronvoltov.[3]

Ta in nekatera druga merjenja — na primer še *razpad β zrcalnih jeder, rentgenski spektri težjih atomov, izotopski pojav pri hiperfini razcepitvi spektralnih črt* — dajo za konstanto R_0 v enačbi (1) vrednosti od 1,2 do 1,5 fm (1 fermi = 10^{-15} m). Dejstvo, da konstante R_0 ne moremo zanesljivo določiti, posebno pa še merjenja s hitrimi elektroni[3], pričajo, da je enačba (1) slab približek. Gostota očitno ni konstantna po vsem jedru. Dopustiti moramo, da je sredi jedra večja, proti robu pa zvezno pojema. Navadno vzamemo za porazdelitev gostote *Saxon-Woodsovo odvisnost*

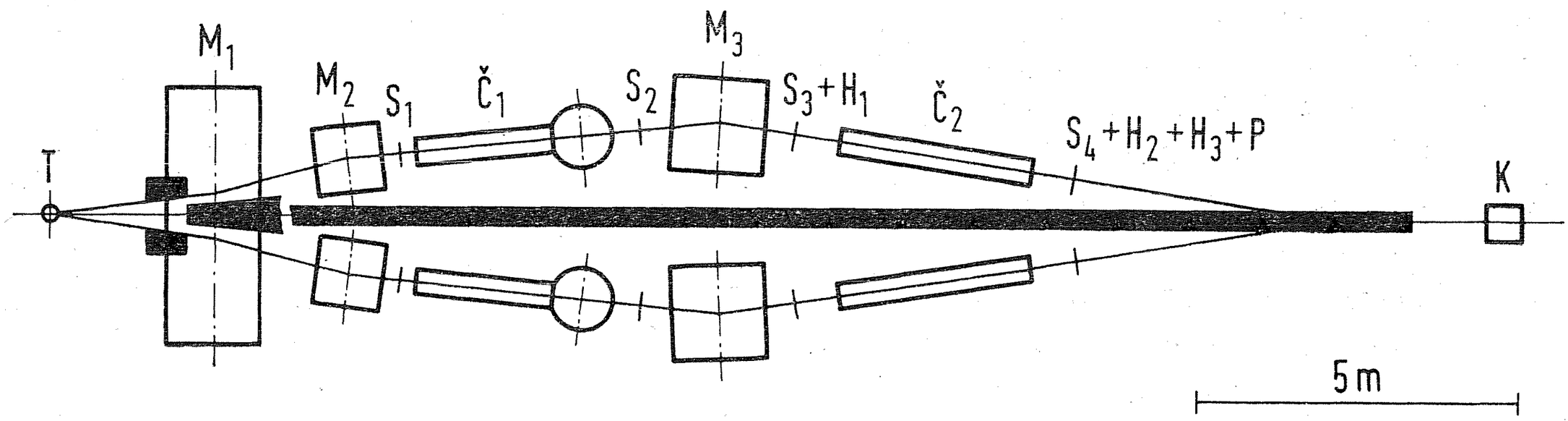
$$\varrho(r) = \varrho_0/[e^{(r-R)/s} + 1] \tag{2}$$

Konstanta ϱ_0 je določena z zahtevo, da je skupni naboj jedra Ze_0, s pa je debelina površinske plasti, v kateri se gostota znatno spreminja. R je že ocena za srednji radij jedra. Merjenja s hitrimi elektroni so dala pri vseh jedrih za debelino površinske plasti $s = 0{,}545$ fm, za R pa je obveljala enačba (1) s konstanto $R_0 = 1{,}07$ fm.

Merjenja s hitrimi elektroni so dala seveda le porazdelitev naboja in magnetnega momenta v jedru. Toda do nedavnega so v pomanjkanju zanesljivejših podatkov privzeli, da se porazdelitev naboja (2) ujema s porazdelitvijo mase. Enačba (2) naj tedaj ne bi veljala samo za gostoto električnega naboja, ampak tudi za gostoto mase. V zadnjem času pa so se množili razlogi proti temu privzetku. Podatki za velikost jedra, ko si jih dobili z elektroni, namreč niso dali zadovoljivih rezultatov pri pojavih, pri katerih so nastopali delci z močno interakcijo. Dokončno so ovrgle privzetek o enakosti porazdelitve mase in naboja v jedru merjenja razsežnosti jeder z nevtralnimi mezoni ϱ^0.[4] Ti sodelujejo z jedri samo z močno interakcijo, tako da se je posrečilo z njimi dobiti neposredno razsežnosti jeder pri močni interakciji.

Merjenja so izvedli na hamburškem elektronskem sinhrotronu za 7,5 GeV DESY*. Ob zaviranju hitrih elektronov v notranji vrteči se tarči sinhrotrona nastanejo fotoni. Curek fotonov po posebni vakuumski cevi zapusti pospeševalno cev in zadene zunanjo tarčo. V tej se ob trku rodijo nevtralni mezoni ϱ^0, ki takoj razpadejo na pionske pare:

$$\gamma + \text{jedro} \rightarrow \varrho^0 + \text{jedro} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \text{jedro}$$



Sl. 1. Poenostavljena risba dvokrakega spektrometra za pionske pare. T tarča, v kateri rodijo fotoni mezone ϱ^0. Ti razpadejo z razpadnim časom okoli 6.10^{-24} s v par π^+ π^-. M_1, M_2, M_3 magneti, S_1, S_2, S_3, S_4 scintilacijski števci, H_1, H_2, H_3 teleskopi scintilacijskih števcev, $Č_1$, $Č_2$ števca Čerenkova, P števec plazov, K merilnik energijskega toka fotonov, ki jih prepusti tarča in ki potekajo po tankem kanalu v zaščitnem oklepu iz betona in svinca. Drugi krak je simetričen. Eden izmed krakov zazna π^+, drugi π^-. Pionski par zaznajo po hitri koincidenci v števcih S_2, S_3, S_4, $Č_1$ in P v obeh krakih[5]

Pionske pare preiščemo z dvokrakim magnetnim spektrometrom (sl. 1).[5] Ta je namenjen preiskovanju mezonov ϱ, ki nastanejo »v smeri naprej«, se pravi v ozkem stožcu okoli smeri vpadnega fotonskega curka. Kot ϑ med smerjo nastalih mezonov in smerjo fotonskega curka meri le kako stopinjo ali dve. Ob razpadu mezona ϱ, ki je odletal v smeri naprej, torej pri $\vartheta = 0$, sprejme spektrometer piona z enako velikima gibalnima količinama, usmerjena pod kotoma β simetrično glede na vpadni fotonski curek. Poleg kota β je treba določiti še gibalno količino pionov. Tega ni težko storiti z odklanjanjem pionov

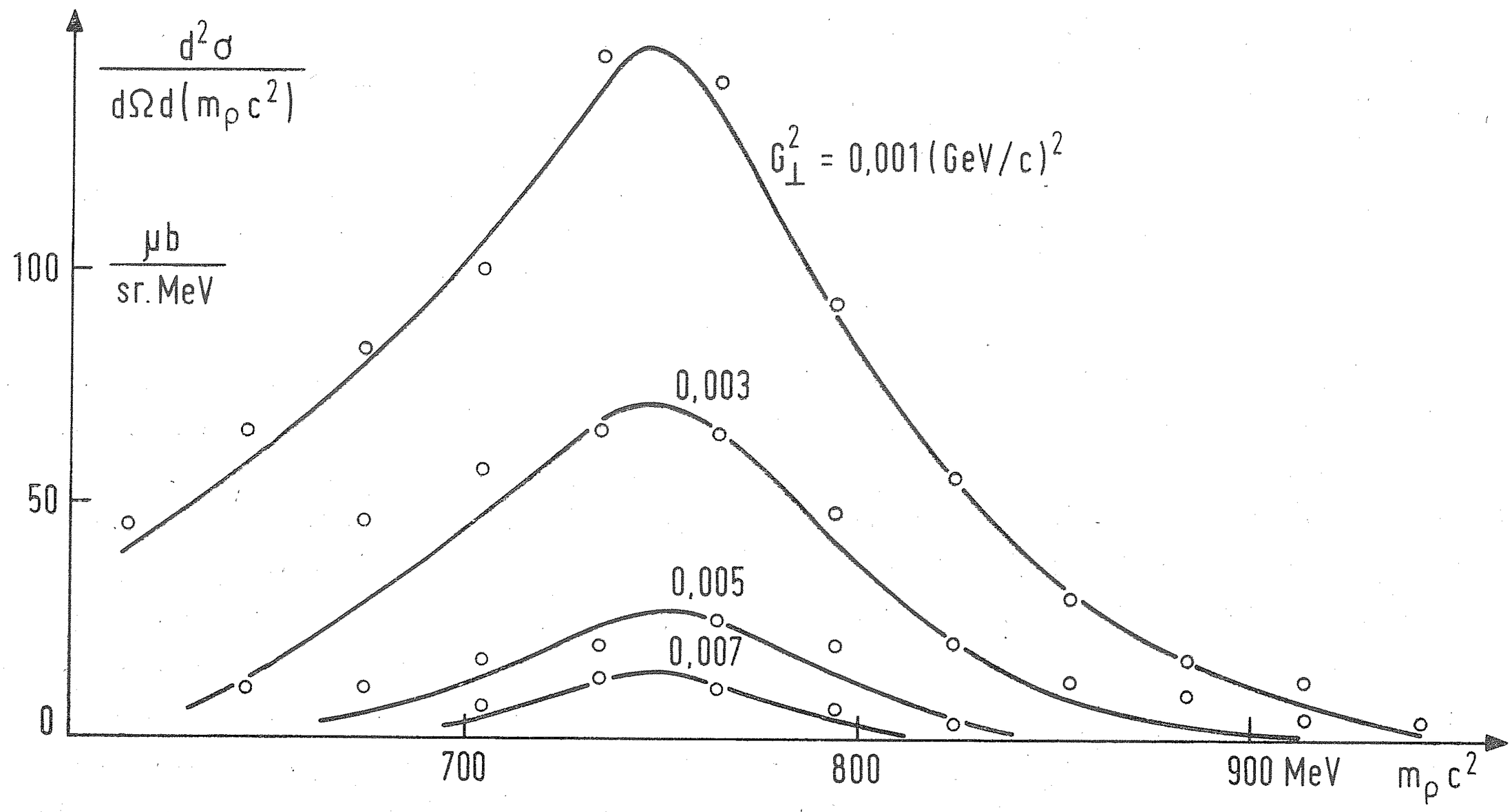
* DESY, Deutsches Elektronensynchrotron.

v magnetnih poljih. Iz kota β in gibalnih količin pionov izračunajo skupno mirovalno in kinetično energijo obeh pionov v njunem težiščnem sistemu. Tako dobijo mirovalno energijo $m_\varrho c^2$ mezona ϱ. Iz hitrosti tega težiščnega sistema v laboratorijskem pa sledi gibalna količina G_ϱ mezona ϱ.

Z merjenjem parov pionov, ki nimata enako velikih gibalnih količin, obsežejo še mezone ϱ, ki odletijo pod kotom ϑ, malo različnim od nič. Pri nastanku mezona ϱ prevzame jedro odrivno gibalno količino $\mathbf{G}$. Odrivna gibalna količina jedra ima samo vzdolžno komponento $G_{\parallel}$, če nastane mezon ϱ v smeri naprej ($\vartheta = 0$). V primeru, da nastane mezon ϱ pod kotom $\vartheta \neq 0$, pa ima odrivna gibalna količina jedra tudi prečno komponento $G_{\perp}$.

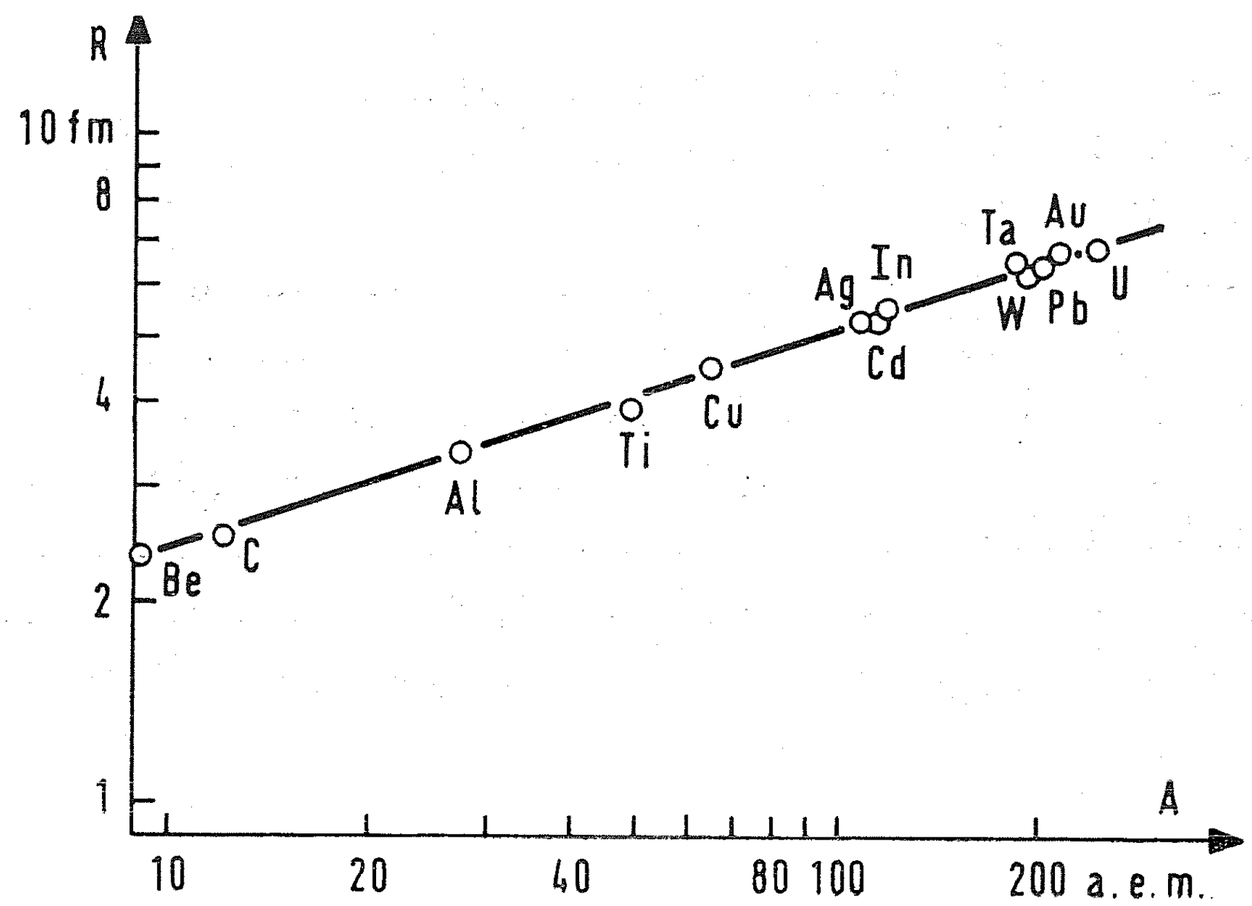
Merili so s tarčami iz 13 elementov: Be, C, Al, Ti, Cu, Ag, Cd, In, Ta, W, Au, Pb in U. Za vsako od tarč so razvrstili ugotovljene mezone ϱ^0 po mirovalni energij $m_\varrho c^2$, po gibalni količini G_ϱ in po kvadratu prečne komponente odrivne gibalne količine jedra $G_{\perp}{}^2$, za katerega se pokaže, da je sorazmeren s ϑ^2. Mirovalno energijo so merili na območju od 400 do 1000 MeV z negotovostjo $\pm$ 15 MeV. Gibalno količino G_ϱ so merili na območju od 4,8 do 7,2 GeV/c z negotovostjo $\pm$0,15 GeV/c. Kvadrat odrivne gibalne količine $G_{\perp}{}^2$ so merili na območju od 0 do 0,04 (GeV/c)^2 z negotovostjo $\pm$0,001 (GeV/c)^2. V celoti so preiskali okoli milijon nastalih mezonov ϱ^0.

Za vsak element so poiskali pri izbranih vrednostih gibalne količine G_ϱ diferencialni presek $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\,(m_\varrho c^2)$ za nastanek mezona ϱ^0 v odvisnosti od mirovalne energije in od kota ϑ (sl. 2). Odvisnost preseka od mirovalne energije je dana z zvonasto krivuljo z vrhom pri energiji okoli 765 MeV in z razpolovno širino okoli 140 MeV. Tako odvisnost pričakujemo, saj je mezon ϱ resonanca, za katero navajajo ravno to srednjo mirovalno energijo in razpolovno širino (120 $\pm$ 25) MeV, se pravi razpadni čas $\hbar/120$ MeV $= 5{,}5.10^{-24}$ s.



Sl. 2. Presek za fotonski nastanek mezonov ϱ^0 z gibalno količino 6,2 GeV/c na jedru svinca. Za vsak element so dobili petdeset podobnih diagramov pri drugačnih vrednostih gibalne količine mezonov ϱ. Ozadje je zelo majhno, kar priča, da nastanejo skoraj vsi pionski pari ob razpadu mezonov ϱ in da ne nastajajo v zaznavni meri naravnost pari pionov[4]

Odvisnost diferencialnega preseka od prečne komponente odrivne gibalne količine je v zvezi z velikostjo jedra. V približku za zelo majhne kote ϑ je diferencialni presek za nastanek mezona ϱ^0 sorazmeren z $e^{-G_\perp^2/\hbar^2 a^2}$. Pri tem meri konstantna a velikost jedra.[6] Eksperimentatorji se niso zadovoljili s tem približkom, pač pa so želeli merske podatke čim bolje reproducirati s precej zapleteno formulo, dobljeno iz teorije. Pri tem so privzeli za porazdelitev mase v jedru odvisnost (2). Primerjavo med teoretično napovedjo in merskimi podatki je opravil računalnik. Najboljše je bilo ujemanje, če so za R v (2) vstavili $R_0 A^{1/3}$ s konstanto $R_0 = 1{,}12$ fm. Relativna negotovost tega rezultata je bila samo $\pm 2\,\%$ (sl. 3). Za debelino površinske plasti so vstavili kar $s = 0{,}545$ fm, ker se je pokazalo, da so računski rezultati skoraj neodvisni od izbire s. Za koren iz poprečnega kvadratnega radija jeder so tako dobili $(0{,}69\, A^{2/3} + 4{,}16)^{1/2}$.



Sl. 3. Konstanta R iz enačbe (2) za različno težka jedra, izmerjena z mezoni ϱ^0. Merske napake so opazne le pri lahkih jedrih. Pri teh tudi uporabljeni približek ni popolnoma zanesljiv. Črta ustreza odvisnosti $R = 1{,}12\,\text{fm}.A^{1/3}$.[4]

Natančnost pri današnjih poskusih je že tolikšna, da je treba upoštevati razliko med velikostjo jedra za delce z močno interakcijo ($R_0 = 1{,}12$ fm) in za delce z eletromagnetno interakcijo ($R_0 = 1{,}07$ fm). Zares so dobili s prvo vrednostjo boljše ujemanje med napovedmi in merskimi podatki za fotonski nastanek mezonov φ na jedrih. Nova vrednost za R_0 za delce z močno interakcijo se tudi ujema z oceno, ki so jo dobili pri sipanju protonov na jedrih. Ker pa je treba upoštevati pri protonih interference med delom, ki je posledica močne interakcije, in med delom, ki je posledica elektromagnetne interakcije, so poskusi s protoni nezanesljivi. Teoretičnega pojasnila, zakaj je konstanta R_0 za delce z močno interakcijo večja kot za delce z elektromagnetno interakcijo, še ni. Pri tej razlagi bo treba upoštevati tudi dejstvo, da imajo mezoni lastne razsežnosti. Mezoni sicer nimajo trde sredice kot nukleoni, vendar si jih moramo predstavljati kot oblake virtualno izsevanih delcev z močno interakcijo in ne kot točke.

Na koncu ne bo odveč, če z enačbami podkrepimo nekatere trditve. Računati moramo relativistično.[7] Pri fotonskem nastanku mezona ϱ na jedru se ohrani skupna gibalna količina in skupna kinetična in mirovalna energija:

$$\mathbf{G}_\gamma = \mathbf{G}_\varrho + \mathbf{G}, \qquad W_\gamma = W_\varrho + W_\mathrm{k}$$

$W_\gamma = h\nu + cG_\gamma$ je energija fotona in G_γ njegova gibalna količina. G_ϱ je gibalna količina nastalega mezona ϱ in $\mathbf{G}$ odrivna gibalna količina jedra. $W_\varrho = m_\varrho c^2 + W_{\mathrm{k}\varrho}$ je celotna energija mezona ϱ in W_k odrivna kinetična energija jedra. Pri tem smo že upoštevali, da jedro spočetka miruje in da se njegovo notranje stanje ne spremeni. Za komponente odrivne gibalne količine veljata enačbi

$$G_{\parallel} = G_\varrho \cos\vartheta + G_\gamma, \quad G_\varrho \sin\vartheta = G_\perp$$

ϑ je kot med smerjo vpadnega fotona in smerjo, v kateri odleti nastali mezon ϱ, $G_{\parallel}$ je komponenta odrivne gibalne količine jedra v smeri vpadnega fotona in $G_\perp$ komponenta, pravokotna na to smer.

Jedro je mnogo težje kot mezon ϱ, tako da prevzame mezon ϱ, še posebej, če odleti v smeri naprej, skoraj vso energijo fotona. Zato je približno $W_\gamma = W_0$. To velja tem bolj, čim težje je jedro. Pri majhnih kotih ϑ sta tedaj komponenti odrivne gibalne količine

$$G_\perp = G_\varrho \vartheta = (W_\gamma/c)\,\vartheta$$

in

$$G_{\parallel} = G_\gamma - G_\varrho = G_\gamma - (W_\varrho{}^2 - m_0{}^2 c^4)^{1/2}/c = (m_\varrho c^2)^2/2\,c\,W_\gamma$$

Nazadnje smo upoštevali enačbo

$$c^2 G_\varrho{}^2 + (m_\varrho c^2)^2 = W_\varrho{}^2 \tag{3}$$

izenačili W_ϱ in W_γ in razvili koren po $m_\varrho c^2/W_\gamma \ll 1$. Prečna komponenta odrivne gibalne količine je torej sorazmerna s kotom ϑ.

Pomembna invarianta je kvadrat četverca prenosa gibalne količine[7]

$$t = (W_\gamma - W_\varrho)^2/c^2 - (G_\gamma - G_0)^2 = (m_\varrho c^2)^2 - 2\,W_\gamma W_\varrho/c^2 + 2\,G_\gamma G_\varrho \cos\vartheta$$

Tu smo upoštevali enačbi $W_\gamma = cG_\gamma$ in (3). V našem približku je $t = (m_\varrho c^2) - 2\,W_\gamma{}^2/c^2 + 2\,G_\gamma{}^2\,(1 - m_\varrho{}^2 c^4/2\,W_\gamma{}^2)\,(1 - \frac{1}{2}\vartheta^2)$. Hitro se prepričamo, da se to približno ujema z $-(G_\perp{}^2 + G_{\parallel}{}^2)$. Pogosto je pri dani mirovalni energiji $m_\varrho c^2$ prikladneje navesti diferencialni presek za nastanek mezona ϱ kot $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ namesto kot $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$. V našem približku je med obema preprosta zveza $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}t = (\pi\,c^2/W_\varrho{}^2)\,\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$.

Za presek $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ obstajajo teoretične napovedi.[8, 9] Mezon ϱ^0 lahko nastane pri sodelovanju zunanjih plasti nukleonov v jedru s fotonom. Nukleon si moramo tedaj predstavljati kot virtualno resonanco Δ, ki jo obdajajo pari virtualnih pionov, združeni v mezone ϱ in ω. Pri tem sploh niso prizadete notranje plasti nukleona in ostane njegovo notranje stanje povsem nespremenjeno. Tudi notranje stanje vsega jedra se pri takem nastanku mezona ϱ^0 ne spremeni. Zdi se, da služi jedro samo kot center, na katerem se ukloni foton in pri tem nastane mezon ϱ^0. Mezon ϱ^0 pa bi lahko nastal tudi, ko bi se foton sipal na enem samem virtualnem pionu, ki bi ga izseval nukleon. Pri prvi možnosti — *perifernem uklonskem nastanku mezona* ϱ — je po teoriji presek za nastanek mezona ϱ^0 sorazmeren s presekom $(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t)_0$ za sipanje piona na jedru v enakih

okoliščinah: $d\sigma/dt \propto (cG_\varrho/W_\varrho)\,(d\sigma/dt)_0$. Za sipalni presek pionov na jedrih pa je znano, da je pri majhnih vrednostih t sorazmeren z $e^{t/\hbar^2 a^2}$. V našem približku je to sorazmerno z $e^{-W_\gamma^2 \vartheta^2/c^2 \hbar^2 a^2}$. Ujemanje med teorijo in poskusi priča, da nastane mezon ϱ^0 z uklonom fotona na zunanjih plasteh nukleona in ne z izmenjavo enega piona.

J. Strnad

LITERATURA

[1] E. Segre: Nuclei and Particles, New York (Benjamin) 1964, str. 198.

[2] M. Pintar: Mezonski atomi, Obz. mat. fiz. **7**, 49 (1960).

[3] J. Strnad: Elektromagnetna struktura nukleonov, Obz. mat. fiz. **8**, 120 (1961).

[4] H. Alvensleben, U. Becker, W. K. Bertram, M. Chen, K. J. Cohen, T. M. Knasel, R. Marshall, D. J. Quinn, M. Rohde, G. H. Sanders, H. Schubel, S. C. C. Ting: Photoproduction of Neutral Rho Mesons from Complex Nuclei, Phys. Rev. Letters, **24**, 786 (1970): Determination of Strong-Interaction Nuclear Radii, Phys. Rev. Letters, **24**, 792 (1970).

[5] J. G. Asbury, W. K. Bertram, U. Becker, P. Joos, M. Rohde, A. J. S. Smith, S. Friedlander, C. Jordan, S. C. C. Ting: Validity of Quantum Electrodynamics at Small Distances, Phys. Rev. Letters **18**, 65 (1967).

[6] V. F. Weisskopf: Pomen raziskovanja osnovnih delcev za razvoj moderne fizike — prevod, Obz. mat. fiz. **10**, 116 (1963), str. 123.

[7] J. Strnad: Relativnost, Ljubljana (Mladinska knjiga) 1969, str. 158.

[8] L. J. Lanzerotti, R. B. Blumenthal, D. C. Ehm, W. L. Faissler, P. M. Joseph, F. M. Pipkin, J. K. Randolph, J. J. Russell, D. G. Stairs, J. Tenenbaum: Photoproduction of Neutral ϱ Mesons, Phys. Rev. **166**, 1365 (1968).

[9] P. Stichel: Photoerzeugung von π-Mesonen, Fortschr. Phys. **13**, 73 (1965).

OBISKI ČLANOV MATEMATIČNO-FIZIKALNEGA ODDELKA NA SREDNJIH ŠOLAH

Udeleženci občnega zbora DMFA v Novi Gorici marca 1970 so se strinjali s spoznanjem, da ni zadovoljive povezave med srednjo šolo in univerzo. Do podobne ugotovitve je prišla tudi študijska komisija univerze. Priporočila je fakultetam, da po svojih močeh prispevajo k boljši povezavi med fakultetami in srednjimi šolami. Upravni odbor DMFA je zato pripravil proti koncu šolskega leta 1969/70 obiske učiteljev in asistentov odseka za fiziko FNT na srednjih šolah. Za začetek naj bi obiskovalec na kratko predaval o kakem zanimivem problemu iz fizike. Temu naj bi sledil razgovor o študiju na matematično-fizikalnem oddelku, v katerem bi se dijaki, ki se nameravajo vpisati na ta oddelek, seznanili z načinom študija, z njegovim obsegom in zahtevnostjo ter drugimi podrobnostmi.

Zdaj je čas, da poskusimo ugotoviti, ali je akcija uspela ali ne. Društvo je poslalo šestnajstim skoraj po naključju izbranim srednjim šolam dopise, s katerimi jim je ponudilo obiske enega izmed članov odseka za fiziko. Pričakovali bi, da se bodo vse te šole obrnile na imensko navedenega učitelja ali asistenta in se dogovorile za predavanje. Toda dobili smo samo 11 odgovorov. Na preostalih 29 šol smo poslali splošnejši dopis, v katerem smo jih vprašali ali bi bil obisk učitelja ali asistenta odseka za fiziko zaželen. Dobili smo samo dva odgovora.

Odziv na dopise društva je bil torej slab. O vzrokih lahko samo domnevamo. Eden je morda ta, da se je akcija začela šele proti koncu šolskega leta, ko je po šolah obilo drugega dela. Drugi vzrok je morda v slabi povezavi med profesorji matematike in fizike na srednjih šolah in društvom, se pravi njegovim upravnim odborom. Zgodi se, da dopisi, ki niso naslovljeni osebno, obležijo na konferenčnih mizah. Zanimivo je, da nismo dobili odgovora od gimnazij, ki imajo že dolgoletno matematično-fizikalno tradicijo: gimnazije Bežigrad v Ljubljani, gimnazij v Kranju, Kamniku, Kočevju ter gimnazij na Štajerskem. Iz teh gimnazij pride veliko tekmovalcev na republiški tekmovanji iz matematike in fizike. Tudi relativno veliko novincev se vpiše na matematično-fizikalni oddelek ravno iz teh gimnazij.

Šole, ki so odgovorile na dopis, so po dogovoru obiskali učitelji in asistenti odseka za fiziko. Tako je bilo na gimnazijah od srede aprila do konca maja 12 predavanj, in sicer:

16. 4. na gimnaziji v Kopru J. Strnad, »Čas v specialni teoriji relativnosti«
23. 4. na VI. gimnaziji Moste v Ljubljani J. Strnad, kot zgoraj
3. 5. na gimnaziji v Celju D. Jamnik, »Anihilacija elektronskih parov«
5. 5. na II. gimnaziji v Ljubljani R. Blinc, »Življenje zvezd«
8. 5. na gimnaziji v Idriji F. Ahlin, »Laser«
9. 5. na gimnaziji na Jesenicah A. Kodre, »Laser«
11. 5. na V. gimnaziji Šentvid v Ljubljani P. Gosar, »Sončne celice«
12. 5. na gimnaziji Poljane v Ljubljani J. Strnad, kot zgoraj
15. 5. na VII. gimnaziji Vič v Ljubljani M. Osredkar, »Mehanika poleta na Luno«

18. 5. na gimnaziji v Novi Gorici S. Pahor, »Laser«
21. 5. na gimnaziji v Škofji Loki S. Žumer, »Laser«
22. 5. na gimnaziji v Ajdovščini M. Hribar, »Laser«.

Obisk predavanj je bil več kot zadovoljiv. Največ je bilo četrtošolcev, ki so po končanem predavanju zastavili precej vprašanj predavatelju v zvezi z obravnavano snovjo. Nekoliko manj so vpraševali o načinu študija, o štipendijah in možnostih za zaposlitev ter o marsičem drugem, kar je zanimalo bodoče študente matematično-fizikalnega oddelka. S predavanjem in razgovorom so bili na vseh šolah zadovoljni. Kazalo bi nadaljevati s tako obliko popularizacije matematike in fizike ter poklicnega usmerjenja srednješolcev. Pravi uspeh pa lahko obrodi le dolgoletno prizadevanje, zato bi bilo treba napraviti dolgoročne načrte in izvajati akcijo skozi vse šolsko leto.

Tomaž Skulj

VEČ POZORNOSTI VZGOJI UČITELJEV FIZIKE

(Razmišljanje ob kongresu matematikov, fizikov in astronomov v Ohridu)

Vsem matematikom in fizikom so prav dobro znana dejstva in vzroki v zvezi s pomanjkanjem kadra za pouk fizike. Zato je popolnoma odveč ponovno prinašati in pretresati različne statistike in argumentacije. Potrebno pa je na to dejstvo pogosto in intenzivno opozarjati ustrezne organe, čeprav to že delamo ves čas po osvoboditvi brez večjih uspehov. Dovolj stimulativnih ukrepov še nismo dočakali. Vprašati pa se moramo seveda tudi, ali smo znotraj kolektiva fizikov storili vse, kar je mogoče, da bi povečali število učiteljev fizike in zboljšali njihovo kvaliteto. Znane so propagandne akcije za pridobivanje mladih fizikov. Zelo važen ukrep je bila ustanovitev študija tehnične fizike. Ta je zajel mlade ljudi, ki bi fizike učiteljske smeri ne prišli študirat, temveč bi šli na kako tehnično stroko. S tem študijem smo vsekakor povečali število študentov fizike. Ta študij krije sedaj potrebe po fizikih povsod izven šolstva, dočim so morali prej kriti te potrebe šolski fiziki. Nekaj tehničnih fizikov pa pota usode zanesejo celo v šolske službe. Tako je ustanovitev te nove smeri posredno ali neposredno le prinesla precej koristi tudi šoli, obenem pa približala število študentov fizike našemu možnemu maksimumu. Zaradi sodobnega tehničnega razvoja in razvoja šolstva nastale potrebe pa terjajo, da bi morali ta maksimum najbrž tudi doseči. Propagandna sredstva v ta namen (tekmovanje, naravoslovne gimnazije, matematično-fizikalni razredi, sodobni tehnični razvoj itd.) smo skoraj do kraja izkoristili. Od večkrat obljubljene zunanje stimulacije učiteljske službe po dosedanjih izkušnjah tudi ne moremo bogvekaj pričakovati. Preostane še notranje sredstvo: sistematično izboljšanje kvalitete šolskega pouka in prek tega povečanje števila mladih ljudi, sposobnih in voljnih za študij fizike, in povečanje njihovega znanja. Za to pa je potreben dvig kvalitete učnega kadra in izboljšanje opreme za pouk fizike po šolah. Izrecno pa je treba svariti pred inflacijo, to je zmanjšanjem zahtev na študij učiteljske fizike, kar bi sicer število študentov zvišalo, pri tem pa znižalo kvaliteto tako, da bi bil celoten rezultat škodljiv. Sploh je treba v zvezi s tem vprašanjem pripomniti, da bomo to, kar smo v letih pred ustanovitvijo tehnične fizike zamudili, težko popravili.

Kot že omenjeno, so naše najbolj neposrednee možnosti za izboljšanje kadrovskega vprašanja v prizadevanju za izpopolnitev opreme za fizikalni pouk in za čim boljšo vzgojo učnega kadra. Vsak napredek v tej smeri olajšuje pouk, torej izboljša delovne pogoje. Obenem dvigne kvaliteto pouka, kar rodi pri mladini večje zanimanje za fiziko in povzroči večji priliv novincev v fizikalni študij. Tu bi se omejil le na vprašanje dviga kvalitete vzgoje učiteljskega kadra, na kar naš veliki fizikalni kolektiv lahko še najmočneje in neposredno vpliva.

Da bomo videli, kaj lahko popravimo, si približno predočimo sedanje stanje: Na šolsko smer fizikalnega študija prihajajo s srednjih šol študentje, ki nimajo v poprečju dobrih ocen v fiziki in matematiki. Dobri srednješolski študentje gredo na tehnično fiziko. Če kdo tam ni dovolj uspešen, dobi včasih priporočilo, naj prestopi na šolsko smer. Ob takem selekcioniranju seveda ne moremo pričakovati, da bomo dobili dobre šolske fizike.

Za formiranje bodočega učitelja fizike v metodičnem pogledu je odgovoren in si prizadeva v tem smislu navadno le učitelj metodike, ki pa je v več primerih le honorarno zaposlen na fakulteti. Je manj ugleden in sam. Tudi učni načrti ponekod ne nudijo dovolj časa in prilike za pripravo na bodoči pouk.

Študent učne smeri fizike ne sliši med svojim študijem ravno malokrat izjav, da je njegovo bodoče delo manj pomembno in manj zahtevno, kakor delo tehničnega fizika. Večkrat izjavljajo to celo njegovi univerzni učitelji (izjave so seveda navadno bolj implicitne).

Ker se na univerzi ceni le znanstveno delo, se profesorji zanimajo mnogo bolj za študente z znanstveno orientacijo in se potegujejo bolj za sredstva za znanstveno delo. Zbirke za pouk splošne fizike so zato dokaj nesodobne in ne bogate. Tako študentje šolske fizike nimajo dovolj prilike, da se seznanijo z eksperimentalnim delom, koristnim za šolo.

Ob takem stanju je razumljivo, da študentje ne jemljejo dovolj resno dela za svoje metodično oblikovanje in ne dobijo veselja do svojega bodočega poklica. Zaradi tega in drugih razlogov (nižji dohodki, slaba perspektiva, sorazmerno nizek družbeni ugled itd.) je tako malo novincev.

Odveč je poudarjati, kako škodljive so take razmere za naš razvoj. Kvarimo si temelje, na katerih bi radi dobro gradili. Spoznanje te škodljivosti se sicer zrcali v Resoluciji o matematiki in fiziki, ki je bila sprejeta pred nekaj leti, vendar tudi ta ni rodila dovolj sadu.

Potrudimo se torej, da bomo boljšali vzgojo učiteljev fizike! To je precej v naših močeh. S tem prepričanjem smo na posvetovanju učiteljev metodike v februarju 1968 sklenili, da bomo na prihodnjem posvetovanju, ki ga pa še ni bilo, sestavili predlog, kako naj se v bodoče enotno formirajo učitelji fizike na vseh ustreznih fakultetah. Na osnovi informacij fakultet v Beogradu, Ljubljani, Novem Sadu, Sarajevu, Skopju in Zagrebu je sestavljen naslednji osnutek predloga za vzgojo učiteljev fizike.

Ta vzgoja naj bi imela naslednje sestavine:

1. predavanja iz osnov pedagogike in psihologije s posebnim poudarkom na mladinsko psihologijo z izpitom;

2. predavanja iz metodike fizikalnega pouka, vsaj dve uri na teden eno leto, z izpitom;

3. vaje iz metodike fizike, ki obsegajo: praktikum za eksperimentiranje in laboratorijske vaje za šolo (študent vodi dnevnik), nastope pred kolegi

z diskusijami, sestavo učnih dispozicij za posamezna poglavja, metodiko razreševanja fizikalnih računskih nalog, vsega vsaj po štiri ure na teden eno šolsko leto;

4. hospitacije na osemletni in srednji šoli, študent komentira hospitacije, vseh hospitacij 10 do 25 v teku študija;

5. po en uspešen nastop iz fizike v razredu na osemletni šoli in na srednji šoli, ki ju oceni učitelj metodike.

Študent naj bi dobil za svoje delo pri metodiki eno oceno, ki bi jo določil učitelj metodike na osnovi uspehov, ki jih je pokazal študent pri gornjih dejavnostih.

Vsaka fakulteta, ki vzgaja učitelje za fiziko, mora imeti fizikalno zbirko, neodvisno od ostalih zbirk. Ta naj omogoča vse poskuse za osnovno in srednjo šolo, izvedbo praktikuma za eksperimentiranje ter laboratorijskih vaj. Zbirko naj bi upravljali ali vsaj soupravljali študentje. Imeli naj bi dostop vanjo in naj bi lahko v njej delali tudi izven časa za obvezno delo. Ta zbirka bi lahko s časom prerasla v veliko zbirko za popularizacijo fizike. Potrebni so seveda tudi ustrezni prostori.

Da bi pa učitelj metodike imel več podpore za svoje delo, naj bi študent učne smeri

dobival več pobud in veselja za svoje bodoče delo tako na fakulteti kakor v javnosti in več sodeloval s svojimi učitelji,

že na fakulteti naj bi spoznal vse metode svojega bodočega dela, družbeno pomembnost tega dela in etično zadoščenje ob uspehih pri takem delu; v tej smeri naj bi se trudili vsi učitelji, ki mu predavajo,

na šolah naj bi našel za dober pouk čim bolj urejene razmere (zbirke, prostori, zlasti predavalnica, pripravljenost uprave) ter tovariše pripravljene na sodelovanje,

da bi v čim večji meri odpadli neugodni pojavi selekcioniranja, naj bi bila zahtevnost šolske smeri fizikalnega študija čim bolj ekvivalentna zahtevnosti tehnične smeri,

po odhodu s fakultete naj bi imel učitelj možnost in čas za strokovno izpopolnjevanje sam in v občasnih seminarjih.

Tako bi lahko fiziki sami do neke mere zvečali število študentov učne smeri in zboljšali kvaliteto absolventov. To bi zboljšalo tudi pouk v šolah, Seveda je treba skrbeti tudi za izboljšanje zunanjih dejavnikov, ki jih tu nisem obravnaval.

Predlagam, naj vsi zainteresirani o vprašanju razmišljajo, dajo dopolnilne in spreminjevalne predloge. da bo čim prej nastala osnova za ustrezne ukrepe fakultet in prosvetnih organov. Vprašanje je nujno!

F. Ahlin

TEKMOVANJA

LETOS JE BILA OLIMPIADA IZ FIZIKE V MOSKVI

Na zaključni slovesnosti letošnjega zveznega tekmovanja mladih fizikov v Beogradu je bila izbrana skupina dvanajstih kandidatov, najboljših tekmovalcev, za šestčlansko jugoslovansko ekipo, ki se je udeležila IV. olimpiade iz fizike v Moskvi.

Vsi kandidati smo bili povabljeni na priprave v Beograd, ki so trajale od 22. do 25. junija. Na pripravah se nas je zbralo deset dijakov. Štirje so bili iz Beograda, štirje iz SR Hrvaške, eden iz SR Bosne in Hercegovine ter jaz iz SR Slovenije. Pripravljali smo se dopoldne in popoldne, reševali smo naloge, in se vadili v praktičnih meritvah. Priprave sta vodila mgr. Milan Raspopović in dr. Božidar Milić. Drugi dan, v torek 23. junija smo dobili 12 nalog, katerih rešitve smo oddali naslednji dan. Popoldne smo imeli tudi praktično meritev: ugotoviti smo morali električne elemente v črni škatlici, njihovo vezavo in parametre. Škatlica je imela tri priključke, na razpolago smo imeli vire izmeničnega in enosmernega toka ter univerzalni inštrument. V četrtek dopoldne pa smo reševali naloge: iz mehanike (Maxwellovo nihalo), iz elektrike (utripajoči tokovi) in iz optike (sferična napaka). Popoldne je bila razglasitev rezultatov. V olimpijsko ekipo smo se uvrstili: Antonije Đorđević, Milivoje Belić, Aleksandar Zavaljevski, Oliver Đurić (vsi iz Beograda), Branko Dolenc (iz Varaždina) in jaz (iz Nove Gorice).

V Moskvo smo se odpeljali zvečer 3. julija z vlakom. Z nami je potoval kot vodja ekipe mgr. Raspopović. V Moskvo smo prispeli kot zadnja ekipa v nedeljo, 5. julija, po skoraj 46 ur trajajoči vožnji. Stanovali smo skupaj z ostalimi ekipami v internatu, kjer smo jedli in tudi tekmovali. Vsaka ekipa je imela svojo sobo, skupno pa smo imeli klubsko sobo. Kljub temu nismo imeli z drugimi ekipami tesnejših stikov. Vzrok temu so bile jezikovne težave.

V ponedeljek je zasedala mednarodna tekmovalna komisija, mi pa smo si medtem ogledali Moskvo. V torek je bila svečana otvoritev IV. olimpiade iz fizike, naslednja dva dni smo tekmovali in nato so se do 15. julija vrstili ogledi Kremlja, Tretjakovske galerije, Mavzoleja Lenina itd. Vmes je bila v ponedeljek, 13. julija, slovesna podelitev priznanj z zaključkom olimpiade.

Nekatere ekipe so pokazale izredno znanje, npr. SZ in ČSSR. Ob tem lahko vidimo, kaj pomeni tradicija fizikalnih tekmovanj in kje jim posvečajo veliko pozornost! Naša ekipa je bila šesta. Med nami je bil najboljši Đorđević, ki je dobil drugo nagrado.

Zanimiv je bil način ocenjevanja. Že pred tekmovanjem smo izvedeli za kriterije:

— pri vsaki nalogi je bilo treba najprej opisati fizikalno bistvo naloge, Za to so bile določene 4 točke;

— za pravilno uporabo fizikalnih zakonov, navedbo vseh načinov reševanja in izbiro najboljšega je bilo mogoče dobiti 3 točke,

— za pravilno izpeljavo končne formule 1 točka,

— za pravilen številčni rezultat 1 točka,

— in za obliko 1 točka.

Za vsako nalogo je bilo tako mogoče dobiti 10 točk, za eksperimentalno nalogo pa 20 točk. Reševali smo štiri naloge in izvedli eno eksperimentalno nalogo, torej skupno je bilo možno dobiti 60 točk. Naloge je predlagal prof. Fabrikant. Mislim, da so bile naloge nekoliko težje kot prejšnja leta, pa tudi praktična naloga je bila nenavadna. Bila je iz optike, pri meritvi smo uporabljali naše oči, te pa so precej nezanesljiv inštrument.

Iz Moskve smo odpotovali 15. julija. Vsi smo bili mnenja, da je bila olimpiada odlično organizirana. Veliko smo se naučili in za marsikatero spoznanje smo bogatejši. Pri tem pa smo videli zelo mnogo zanimivosti, tako da am bo Moskva in prijaznost gostiteljev ostala še dolgo v lepem spominu.

Miran Bavčar

UTRINEK

O KORISTNOSTI JEDRSKE FIZIKE

V razpravi o možnostih jedrske fizike in o argumentih, ki jih lahko uporabimo — če smo odkriti —, da pridemo do denarja, še nihče ni omenil vzgoje novih fizikov. Profesor Casimir, direktor Philipsovih laboratorijev na Nizozemskem, je izjavil, da je nekaj njegovih najboljših fizikov prišlo iz jedrske fizike. Zdaj ne delajo več v jedrski fiziki, pač pa v fiziki trdne snovi ali v elektroniki ali v računalništvu. Vendar je bila po mnenju profesorja Casimirja vzgoja v jedrski fiziki tako dobra, da bi jo težko dosegli v kaki drugi veji fizike. To priča, da postaja jedrska fizika vse bolj »ekstenzivna« v izrazoslovju profesorja Weisskopfa.

Osebno sem ugotovil, da je možnost še v drugi smeri. Pod mojim vodstvom dela ta čas v CERN skupina na sipanju negativnih kaonov na polariziranih protonih. V skupino, ki šteje štiri fizike, so prišli trije iz jedrske fizike. Ko se potegujemo za priznanje uporabnosti jedrske fizike, bi morali poskrbeti, da bi bila ta dejstva vsem znana.

A. H. Wapstra,
prispevek k diskusiji na sestanku o prihodnosti preučevanja jedrske zgradbe v Dubni, julija 1968

Iz knjige *Future of Nuclear Structure Studies, Proceedings of a Panel, Dubna 1—3 July 1968,* Vienna (IAEA), 1969, str. 130.

DOMAČE VESTI

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo — odsek za fiziko, ob sodelovanju Inštituta J. Stefan, Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko in Zavoda za šolstvo SRS, prirejata za srednješolske profesorje fizike in matematike

SEMINAR

POGLAVJA IZ FIZIKALNE OPTIKE

Seminar bo od 1. do 3. februarja 1971 na odseku za fiziko FNT, Ljubljana, Jadranska 19.

Program predavanj:

1. dan

1. Elektromagnetno valovanje (J. Strnad)
2. Optični eksperimenti v mikrovalovnem področju (G. Kernel)
3. Sevanje dipola (D. Jamnik)
4. Fizikalne osnove detekcije in energijske pretvorbe svetlobe (J. Pahor)

2. dan

1. Stimulirana emisija (L. Pičman)
2. Laserji (A. Moljk)
3. Eksperimenti s šolskim laserjem (F. Ahlin)
4. Holografija (S. Pahor)

3. dan

1. Prehod elektromagnetnega valovanja skozi snov (R.Blinc)
2. Kerrov efekt (P. Gosar)
3. Sipanje svetlobe na majhnih delcih (I. Kuščer)
4. Fotoefekt v polprevodnikih (F. Cvelbar)

Predavanja bodo 60 minutna. Preostali čas bo porabljen za oglede inštitutov in seminarje po željah udeležencev. Razen vsakodnevnih uvodnih teorijskih predavanj, ki so navedena pod št. 1, bodo predavatelji vsa predavanja spremljali z demonstracijskimi poskusi. Pripombe in želje v zvezi s programom sprejema vodja seminarja doc. dr. F. Cvelbar.

Začetek seminarja bo 1. februarja 1970 ob 10. uri v veliki fizikalni predavalnici na Jadranski 26. O podrobnem urniku predavanj bodo udeleženci posebej obveščeni.

Na seminar so vabljeni vsi profesorji in predmetni učitelji za fiziko in matematiko ter vsi, ki se zanimajo za obravnavano snov.

Stroške seminarja nosijo organizatorji, potne stroške pa udeleženci sami, njihove ustanove oziroma Zavod za šolstvo SRS.

Prijave pošljite do 25. januarja 1971 sekretarju seminarja Asist, ing. Normi Mankoč, odsek za fiziko FNT, Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 543.

NASTANEK, RAZVOJ IN PERSPEKTIVE OPTIČNE INDUSTRIJE V SLOVENIJI

Letos je poteklo dvajset let, odkar je bil ustanovljen Tehnični inštitut za optiko in steklopihaštvo v Ljubljani. Skromni začetki v letu 1949 so pomenili prve zametke slovenske in jugoslovanske optične industrije. Po dveh letih je inštitut že prerastel v gospodarsko podjetje TOS. Z leti so se začeli pojavljati problemi s prostorom in opremo. Zato je bilo v letu 1964 zgrajeno moderno osemnadstropno poslopje, ki je rešilo stisko s prostorom. Podjetje se je preimenovalo v Tovarno aparatov in instrumentov VEGA in si pripojilo do tedaj samostojni znanstveni zavod Jurij Vega. Iz tega časa izvirajo začetki modernega proizvodnega načina z obilnim raziskovalnim delom v lastnem razvojnem oddelku. Temeljita analiza tržišča in številni novi sposobni mladi in ambiciozni ljudje so prispevali k temu, da se je pred tremi leti začela naglo večati proizvodnja. Z uvedbo moderne tehnologije, s specializacijo in selekcijo asortimenta ter kontrolirano in priznano kvaliteto je ta mlada, a tehnično in ekonomsko zahtevna industrijska veja oblikovala v zadnjem času proizvodni program, ki jo uvršča na pomembno mesto tudi v svetovnem merilu.

Lastno šolanje ljudi je omogočalo rast zlasti zahtevnejše proizvodnje. Povpraševanje po izdelkih je že tako naraslo, da ga ni mogoče popolnoma zadovoljiti. Zato se je tovarna VEGA po temeljitem preudarku odločila, da dokupi strojno opremo in z minimalnimi adaptacijami ter seveda z dodatnim izmenskim delom in modernizacijo proizvodnje zadovolji povečane potrebe tržišča.

Z enakimi zmogljivostmi in ob skrajšanem delovnem tednu je tovarna VEGA doslej skokovito povečevala poslovne uspehe. Delež izvoza v celotni prodaji, pretežno na konvertibilna področja, se je več kot podvojil. Poslovna rast je v 1969 dvakrat hitrejša kot v prejšnjih letih, ko se je proizvodnja večala za 17 %, prodaja pa za 20 % na leto. Vse to je bilo doseženo ob cenah, ki so že 7 let konstantne, pri optičnih aparatih pa so se celo nekoliko znižale. Širjenje se nadaljuje, ker ga narekujejo ekonomičnost, rentabilnost in pogodbene obveznosti, še posebej do inozemskih kupcev.

Proizvodni program in poslovni koncept slovenske optične proizvodnje je vključeval iz leta v leto več zahtevnejših izdelkov, posebno še učnih pomagal. Sedaj obsega predvsem naslednje osnovne skupine proizvodov in storitev:

projekcijska optika in pribor: objektivi (fiksni in »zoomi«), diaprojektorji (avtomatski, polavtomatski, amaterski), episkopi in epidiaskopi in grafoskopi (Apollo-6, Triumph-69);

teleoptika: astronomski, lovski in strelski daljnogledi;

mikrooptika: šolski in žepni mikroskopi;

optični merilni instrumenti: merilne lupe, profilni projektorji in ročni spektroskopi;

varnostne in signalne naprave: prometna ogledala, optični in drugi vgradni elementi za signalne naprave v železniškem in cestnem prometu, svetlobne zapore in antirefleksna vzvratna zrcala;

elektrooptika;

optični elementi in osvetlitveni sistemi;

finomehanični izdelki.

V zadnjih dveh letih je tovarna VEGA z lastnimi raziskovalnimi napori ali v mednarodni kooperaciji razvila številne zahtevne aparate in objektive,

pa tudi nekaj finomehaničnih izdelkov. Ti dopolnjujejo optično proizvodnjo ali omogočajo optimalno izrabo finomehaničnih zmogljivosti, ki jih mora imeti optična dejavnost.

Tovarno VEGA zanimajo predvsem trajne kooperacije s priznanimi inozemskimi firmami. Te ji omogočajo po eni strani pridobitev najnovejših tehničnih in tehnoloških dosežkov optične proizvodnje, na drugi strani pa zagotavljajo prodajo velikoserijske proizvodnje na svetovnem tržišču.

Verjetno je najdlje prišlo mednarodno sodelovanje tovarne VEGA z ameriškimi firmami BUHL in American Optical Co. v proizvodnji pisalnih projektorjev — grafoskopov, ki postajajo v šolstvu in drugih izobraževalnih ustanovah ter v zdravstvu itd. nenadomestljiva pomagala. Tuji partnerji izdelajo vse finomehanske dele, optični in svetlobni del pa v celoti izdelamo doma. Prvi izdelek, ki je bil plod medsebojnega sodelovanja, je bil grafoskop Apollo-6 (v letu 1968 je dobil ta proizvod Grand prix). Novi grafoskop Triumph-69 je najsodobnejši na svetovnem tržišču in je lastni proizvod slovenske optične industrije ter združuje vse do sedaj znane dosežke v svetu. S firmo BUHL iz ZDA so v pripravi tudi druge oblike dolgoročnega sodelovanja, kar bo prispevalo k še večji prodaji tega učila za barvno projekcijo pri dnevni svetlobi. Poleg že omenjenih projektorjev izdelujemo za konvertibilno področje različne objektive najvišjih kvalitet, med drugim tudi izredno komplicirane objektive »zoom« (»vario«).

Izvoz intelektualnih storitev si je tovarna VEGA zagotovila s podpisom protokola s predstavniki ministrstva za gospodarstvo Egipta o izgradnji optične tovarne, ki jo namerava graditi tamkajšnja državna družba. Tovarna VEGA bo izšolala ljudi za novo tovarno, posredovala vse svoje izkušnje in najmanj 5 let prodajala tej tovarni polizdelke raznih optičnih aparatov iz svojega proizvodnega programa

Uspešno je tudi dolgoročno poslovno-tehnično povezovanje z največjim producentom diaprojektorjev v Zvezni republiki Nemčiji, s firmo Ed. Liesegang. Znano je, da ima optična industrija v Nemčiji velik sloves in tradicijo. Prav tu se je pokazala visoka kvaliteta ljubljanske tovarne: firma Ed. Liesegang od letos vgrajuje v diaprojektorje VEGIN optični sistem.

Tudi za fotoaparate Regula izdeluje VEGA v celoti vse objektive in optične dele. Z Nemčijo je sodelovanje zastavljeno na široko. Vsebuje tudi večletno izdelavo in prodajo optike firmi ISCO Göttingen.

Skupaj z japonsko firmo Maruman je tovarna VEGA ustanovila prvo jugoslovansko-japonsko mešano družbo VEMA s sedežem v Ljubljani. Družba bo izdelovala kot prva pri nas plinske vžigalnike.

Tovarna VEGA se s starim proizvodnim programom ni mogla vključiti v svetovno tržišče. Zato je bilo treba sestaviti in izvesti nov proizvodni program. To je uspelo predvsem z usposabljanjem ljudi, ki morejo delati po evropskih normativih, in s sodobno tehnologijo, ki smo jo dosegli delno z lastnim razvojem, delno pa z vključevanjem v mednarodno delitev dela. V prihodnje se bo povezovanje pri znanstvenih raziskavah in vzgoji še povečalo. V ta namen je sklenila tovarna VEGA dolgoročno pogodbo z Institutom za matematiko, fiziko in mehaniko ter Institutom za strojništvo na ljubljanski univerzi.

Desetletni poslovni in razvojni program te industrije bo obsegal predvsem razširitev proizvodnje objektivov »zoom«, teleobjektivov, oljnih regulatorjev vseh vrst in razvoj in proizvodnjo izredno zahtevne nitne optike.

Moderna optična industrija sloni še v znatno večji meri kot večina drugih panog na vsestransko usposobljenih in praktično izurjenih strokovnjakih. V tej panogi se bolj kot kjerkoli drugod kaže visoka potreba po številnih razgledanih fizikih, matematikih, strojnikih, elektrotehnikih in drugih ter po množici verziranih in inteligentnih kvalificiranih delavcev. Medtem ko lahko druge industrijske veje dobijo razmeroma lažje svoje kadre iz vseh vrst šol, jih mora optična industrija izšolati sama. Tovarna VEGA je v dvajsetih letih v ta namen vložila veliko naporov in denarja.* Financiranje šolanja na srednjih, višjih in visokih šolah ter financiranje lastne industrijske šole in permanentnega dopolnilnega strokovnega izobraževanja omogoča sprotno prilagajanje optične proizvodnje utripu svetovne tehnologije in tržišča.**

Modernizacija proizvodnje in učinkovita organiziranost postajata vsak dan pomembnejši. Velike potrebe optične industrije po hitrem prilagajanju strokovnih dosežkov v svetu so narekovale ustrezno prilagoditev sistema nagrajevanja.

Tovarna VEGA je rasla brez odkupa licenc in brez enkratne postavitve poslovnih in proizvodnih objektov. Nastala je brez izkušenj in tradicije, ki predstavljajo v tej dejavnosti izredno pomembno prednost. Zato je bilo v dvajsetih letih veliko iskanja, kako postaviti poslovno in samoupravno organizacijo na čim boljše temelje. Iz prvih obrtniških poizkusov je v zadnjih letih nastal industrijski način dela in poslovanja. Prožnost je eden od bistvenih elementov te dejavnosti. Prav iz tega tudi izhaja vrsta organizacijskih ukrepov. Drugi pomembni element je hitro prilagajanje sodobnim dosežkom znanosti v tehniki in v ekonomiki. Tretji element, ki nastopa trajno v vseh organizacijskih in samoupravnih oblikah te proizvodnje, pa je visoka kvalifikacijska struktura, brez katere optična industrija ne more obstajati. Način poslovnega organiziranja je moral zagotoviti vse te elemente. Doseženi uspehi pričajo, da je tovarna VEGA na dobri poti.

G. Sfiligoj, tovarna aparatov in instrumentov VEGA

---

* Skupni izdatki za izobraževanje so v zadnjih letih dosegli 6 % neto produkta.

** Več o razlogih in težavah pri vključevanju strokovnjakov v delo gospodarskih organizacij glej v sestavkih: G. Sfiligoj: »Tendence in pojavi v politiki zaposlovanja strokovnjakov«, Ekonomska revija, št. 4, Ljubljana 1966, in G. Sfiligoj: »Nagrajevanje strokovnjakov«, Teorija in praksa, št. 9, Ljubljana 1965.

STROKOVNI ČASOPISI

STROKOVNO ČASOPISJE ZA FIZIKO

V naši dobi hitrega napredka fizike mora človeš porabiti več časa za čitanje fizikalnih časopisov, da lahko sledi razvoju in ve, kaj je novega v fiziki in kakšna pomembna spoznanja in nove eksperimentalne možnosti se pojavljajo. Človek je lahko dober učitelj le še ob stalnem izpopolnjevanju znanja s čitanjem strokovnega časopisja in obiskovanjem strokovnih predavanj, tečajev in konferenc. Vse to je treba vključiti v delovno dolžnost učitelja. Pri tem moramo za čitanje vzeti že več kot 10 % delovnega časa, poprečno vsaj eno uro na dan. Ta lastni študij predstavlja vsekakor osnovni način permanentnega izobraževanja. Zato mora imeti vsaka šola priročno knjižnico za fiziko, ki ima nekaj glavnih učbenikov in priročnikov in vsaj nekaj strokovnih časopisov, ki jih lahko učitelji redno čitajo.

V naslednjem objavljamo seznam časopisov o pouku fizike, seznam nekaterih splošno informativnih časopisov o posameznih področjih in problemih fizike ter seznam nekaterih splošno informativnih znanstvenih časopisov.

Vabimo vas, da sporočite uredništvu naslove drugih časopisov, za katere smatrate, da bi morali biti navedeni v teh seznamih, da bi jih v dopolnilih objavili.

Vse časopise lahko naročite za dinarje pri Državni založbi Slovenije ali pri Mladinski knjigi in drugih založbah.

A. Moljk

Časopisi o pouku fizike

FIZIKA V ŠKOLE, dvomesečnik, Medjunarodnaja kniga (naroč. št. 73432) 10,00 Din

PHYSICS EDUCATION, dvomesečnik, The Circulation department, The Institute of Physics and the Physical Society, 47 Belgrave Square, London, SW1, England angl. funtov 3/15/0

THE PHYSICS TEACHER, mesečnik, Dept. S. F. American Institute of Physics, 335 East 45th Street, New York, N. Y. 10017, USA $ 7,00

AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS, mesečnik, American Institute of Physics, 335 45 Street, New York, N. Y. 10017, USA $ 14,50

THE SCHOOL SCIENCE REVIEW, the Journal of the ASE, John Murray, 50 Albermale Street, London angl. funt 2/6/0

EDUCATION IN SCIENCE, The bulletin of the ASE, College Lane, HATFIELD, Herts, England angl. funt 2/6/0

PRAXIS DER MATURVISSENSCHAFTEN, I. Physik, Aulis Verlag Deubner & Co, Köln, BDR DM 35,—

PHYSIK IN DER SCHULE, dvomesečnik, Verlag Volk und Wissen, 108, Berlin 8, Lindenstrasse 54 a, DDR nemške marke 5,—

GIORNALE DI FISICA, trimesečnik, Editrici compositori, Bologna, Italia Lit. 3.125,—

Bilteni tvrdk in opisi aparatov, na pismeno željo brezplačno.
PHYWE Nachrichten (Ausgabe für Gymnasien, Realschulen und Fachschulen), dvakrat letno

PHYWE AG, 34 Göttingen, Levinstrasse 1, Göttingen, Postfach 665, BDR

LEYBOLD WELLE, E. Leybolds Nachfolger, 5 Köln — Bayental, Bonnerstrasse 504, BDR

EALING CATALOGUE, Ealing Scientific Limited, Greycaine Road, Watford, Herts, England

Splošno informativni časopisi iz fizike

PHYSICS TODAY, mesečnik, American Institute of Physics, 335 East 45 Street, New York, N. Y. 10017, USA $ 10,50

PHYSICS BULLETIN, mesečnik, The Institute of Physics and the Physical Society, Circulation department, 47 Belgrave Square, London SW1, England angl. funt 3/10/0

EUROPHYSICS NEWS, Bulletin of the European Physical Society, P. O. Box, CH-1227 Carouge-Geneve, Suisse

CONTEMPORARY PHYSICS, dvomesečnik, Taylor & Francis, Red Lion Court, Fleet Street, London EC 4, England $ 18,40

PHYSIKALISCHE BLÄTER, mesečnik, Physik Verlag, Mosbach, Baden, BRD $ 10,00

USPEHI FIZIČESKIH NAUK, mesečnik, Medjunarodnaja kniga, naroč. št. 71004 din 160,00

NOVOJE V ŽIZNI, NAUKE, TEHNIKE
SERIJA FIZIKA, ASTRONOMIJA (brošjuri), mesečnik, Medjunarodnaja kniga, naroč. št. 700722 din 6,25

Splošno informativni znanstveni časopisi

SCIENCE Journal, mesečnik, IPC Business Press Ltd, Dortset House, Stamford Street, London Se 1 $ 12,00

NEW SCIENTIST, tednik, New Science Publications, 128 Long Acre, London WC 2 angl. funt 4

NATURE, International Jounal of Science, Macmillan (Journals) Limited, Brunel Road, Basingstoke, Hants, England angl. funtov 14/0/0

International SCIENCE AND TECHNOGOLY, mesečnik, Conover-Mast Publications, 205 E. 42 Street, New York, N. Y. 10017, USA $ 8,00

SCIENCE, tednik, American Association for the Advancement of Science, 1515 Massachusetts Ave. NW, Waschington, D. C, 20005, USA $ 18,00

NAUKA I ŽIZNJ, mesečnik, Medjunarodnaja kniga, naroč. št. 70601 din 25,00

LA RECHERCHE, mesečnik, 4 place de l'Odeon, Paris 6e franc. fr. 70,—

SCIENCE & AVENIR, mesečnik, 16 Rue de la Baume, Paris 8e franc. fr. 40,—

SAPERE, mesečnik, Edizioni Dedalo, Bari, Italija ital. lir 3.000,—

NOVE KNJIGE

V LETU 1969 SMO PREJELI NASLEDNJE REVIJE V ZAMENO ZA OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1.—6. ACT FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE. Bratislava.

1. Physica. 1969. Publ. 8, 9.
2. Antropologia. 1969. Publ. 14.
3. Mathematica. 1967. Publ. 16, 17, 18. K — 1968. Publ. 19, 21, 22.
4. Meteorologia. 1969. Publ. 2.
5. Zoologia. 1968. Publ. 14.
6. ACTA GEOLOGICA ET GEOGRAPHICA UNIVERSITATIS COMENIANAE. Geologica. Bratislava 1968. Publ. 15, 16. K. — 1969. Publ. 17.
7. ALGEBRA I LOGIKA — seminar. Novosibirsk. 1967, t. 6, vyp. 4, 5, 6. K. — 1968, t. 7. K. 1969, t. 8, vyp. 1, 2, 3.
8. ANALELE STIINTIFICE ALE UNIVERSITATII »AL. I. CUZA« DIN IASI. (ser. nuoa) Sectiunea I.a Matematika, 1968, t. 14, f. 2. K. 1969, t. 15, f. 1.
9. ANALELE UNIVERSITATII BUCUSTESTI. Ser. stiintele naturii: mat. mec. *Bucuresti.* 1968, a. 17. K
10. ANALELE UNIVERSITATII DIN TIMISOARA. Ser. mat.-fiz. Timisoara 1968. (F.) 6. K
11. ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE. Ser. A. Mathematica. Helsinki 1968, Nos 423, 424, 431, 434 do 437. K. 1969, Nos 438 do 455.
12. ARKIV FÖR MATEMATIK. Stockholm 1967/69. Bd. 7, H. 6. K. — 1969/70. Bd. 8, H. 1.
13. BILTEN. Sarajevo 1969, br. 12. K
14. BILTEN NA DRUŠTVATO NA MATEMATIČARITE I FIZIČARITE OD SOCIALISTIČKA REPUBLIKA MAKEDONIJA. Skopje 1967, t. 18. K. 1968, t. 19. K
15. BOLETIN DE LA ACADEMIE DE CIENCIAS FISICAS, MATEMATICAS Y NATURALES. Caracas 1968, anno 28. Nos 80, 81. 1969, anno 29. No. 82.
16. BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA. Ser. 2. Mexico 1967, vol. 12. K. 1968, vol. 13. K
17. BULLETIN OF THE BORIS KIDRIČ INSTITUTE. Beograd 1968, vol. 19. Ser. Chemie. Nos 1—4. K. Nuclear science. Nos 1—5. K
18. BONNER MATHEMATISCHEN SCHRIFTEN. Bonn 1969, Nr. 35, 36, 37.
19. BULLETIN DE L'ACADEMIE POLONAIS DES SCIENCES. Series des sciences mathematiques, astronomiques et physiques. Varsovie 1969, vol. 17. K
20. BULLETIN OF THE CALCUTTA MATHEMATICAL SOCIETY. Calcutta 1966, vol. 58, Nu. 3. — 1967, vol. 59, Nu. 1/2.
21. BULLETIN OF THE DISASTER PREVENTION RESEARCH INSTITUTE. Kyota 1969, vol. 18, P. 3, 4, 5.
22. BULLETIN SCIENTIFIQUE. Zagreb 1969, T. 14. K
23. COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE. Praha 1968, T. 9, No. 4. K. — 1969, T. 10. K
24. ČESKOLOVENSKY ČASOPIS PRO FIZIKU. Praha 1968, T. 18. K. — 1969, T. 19. K
25. DIFFERENCIAL'NYE URAVNENIJA, Minsk 1969. T. 5, vyp. 1—12.
26. ECONOMIC COMPUTATION AND ECONOMIC CYBERNETICS STUDIES AND RESEARCH, Bucuresti 1968, t. 4. K — 1969. K
27. ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK. Ljubljana 1969, letnik 36. K
28. FARMACEVTSKI VESTNIK. Ljubljana 1969, letnik 20. K
29. FIZIKA. Zagreb 1968/69, Vol. 1, Nu. 3, 4. K. — 1970, Vol. 2, Nu. 1, Supl. 1.
30. FOTOKEMIJSKA INDUSTRIJA. Zagreb 1969, god. 16. K
31. GLASNIK MATEMATIČKI. Zagreb 1969. T. 4. K
32. GODIŠNJAK FILOZOFSKOG FAKULTETA U NOVOM SADU. Novi Sad 1968, knj. 11. K. — 1969, knj. 12. K
33. IDRIJSKI RAZGLEDI. Idrija 1969. Leto 14, štev. 1, 2, 3.
34. INFORMATION PROCESSING IN JAPAN. Tokyo 1968, vol. 8. K
35. INFORMATIONEN. Köln 1967. Bd. 2, H. 12. — 1968. Bd. 3, H. 1, 2, 3, 4, 9, 10. 1969. Bd. 4, H. 1, 2, 3.

36. INTERNATIONAL MATHEMATISCHE NACHRICHTEN. Wien 1969. Nr. 91, 92, 93. K
37. IZVESTIJA NA MATEMATIČESKAJA INSTITUT. Sofija 1969. T. 10. K
38. JOURNAL OF THE FRANKLIN INSTITUTE. Phyladelphia 1969. Vol. 278, 288. K
39. THE JOURNAL OF THE INDIAN MATHEMATICAL SOCIETY. Madras 1968. Vol. 32. K
40. JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY. Ser. A.—I. mathematica. Hiroshima 1968, vol. 32, Nu. 2. K. — 1969, vol. 33. K
41. MATEMATIČKI LIST ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE. Beograd 1968/69, g. 3. K
42. MATEMATIČKI VESNIK (nova serija). Beograd 1969, knj. 6. K
43. MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA. Zagreb 1968/69, g. 19. K
44. MATEMATIKA VE ŠKOLE. Praha 1968/69, r. 19. K
45. THE MATHEMATICAL CAZETTE. London 1969, vol. 53. K
46. NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE. Beograd 1964/65, god. 13/14. K
47. NATURA. Plovdiv 1968. T. 2, F. 1
48. NAUČNI TRUDOVE. Plovdiv 1968. T. 6. K
49. NOTICES OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. Providence 1969. Vol. 16. K
50. OSAKA JOURNAL OF MATHEMATICS. Toyonaka 1968, vol. 5. K
51. POKROKY MATEMATIKY, FIZIKY A ASTRONOMIE. Praha 1969, r. 14, č. 1
52. POROČILO — INŠTITUT »J. STEFAN«, Ljubljana 1968. Nos 234 do 252
53. PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. Menasha 1969, vol. 20, 21, 22, 23. K
54. PROCEEDINGS OF THE FACULTY OF SCIENCE OF TOKAI UNIVERSITY. Tokyo 1969, vol. 4. K
55. PROTEUS, Ljubljana 1968/69, leto 31, št. 6 do 10. K
56. PUBLICATIONS DE L'INSTITUTE MATHEMATIQUE. Beograd 1969. T. 9. K
57. PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA. Beograd 1968. Nos 229 do 242. K. — 1969. Nos 243, 244, 246 do 273
58. RAZPRAVE. Ljubljana. Društvo meteorologov Slovenije 1969, leto 11. K
59. REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA. Madrid 1969. T. 29. K
60. REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA Y DE LA ASOCIACION FISICA ARGENTINA. Buenos Aires 1966/68, vol. 23, Nu. 4. K. — 1969, vol. 24, Nu. 2, 3
61. REVUE ROUMAINE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUES. Bucuresti 1969. T. 14, No, 1, 2, 3
62. RIVISTA DI MATEMATICA DELLA UNIVERSITA DI PARMA. Parma 1967, vol. 8. K. — 1968, vol. 9. K
63. ROZHLEDY MATEMATICKO-FIZIKALNI. Praha 1968/69, r. 47. K
64. SODOBNA PEDAGOGIKA. Ljubljana 1969, leto 20. K
65. STUDIA UNIVERSITATUM BABES-BOLYAI. Ser. matematica-physica. Cluj 1969. T. 14, F. 1
66. STUDII SI CERCETARII MATEMATICE. Bucuresti 1969. T. 21, Nr. 1, 2, 3
67. UČENYE ZAPISKI LENINGRADSKOGO ORDENA LENINA GOSUDARSTVENOGO UNIVERZITETA IM. A. A. ŽDANOVA. Ser. Matematičeskih nauk. Trudy astronomičeskoj observatorii. Leningrad 1968. Vyp. 42, T. 25, No. 337
68. UČENYE ZAPISKI TARTUSKOGO GOSUDARSTVENOGO UNIVERSITETA. Trudy po matematike i mehanike. Tartu 1968. Vyp. 220, T. 8. K
69. UKRAINSKIJ MATEMATIČESKIJ ŽURNAL. Kiev 1969. T. 21. K
70. USPEHI MATEMATIČESKIH NAUK. Moskva 1969. T. 24. K
71. VARILNA TEHNIKA. Ljubljana 1969. Letnik 18. K
72. VESCI AN BSSR. Serija fizika-matematičeskih nauk. Minsk 1969. K
73. VESTNIK BELORUSKOGO GOSUDARSTVENOGO UNIVERSITETA IM. V. I. LENINA. Serija I.: Matematika, fizika, mehanika. Minsk 1969. No. 1, 2
74. VESTNIK LENINGRADSKOGO UNIVERZITETA. Serija fizika-himija. Leningrad 1969, t. 1, 2, 3. — 1968, t. 4. K
75. VESTNIK MOSKOVSKOGO UNIVERSITETA. Serija matematika, mehanika. Moskva 1969. K
76. ZDRAVSTVENI VESTNIK. Ljubljana 1969. Letnik 38. K

Ciril Velkovrh

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XVII. LETNIK — 3. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

SEPTEMBER 1970

VSEBINA

Članki Stran

O univerzalnih algebrah (N. Prijatelj) 97
O nekorektno zastavljenih problemih (A. Suhadolc) 109
Trije koraki v zgradbi snovi (V. F. Weisskopf) 115

Novica

Velikost atomskih jeder (J. Strnad) 125

Šola

Obiski članov matematično-fizikalnega oddelka na srednjih šolah (T. Skulj) 131
Več pozornosti vzgoji učiteljev fizike (F. Ahlin) 132

Tekmovanja

Letos je bila olimpiada iz fizike v Moskvi (M. Ravbar) 135

Utrinek

O koristnosti jedrske fizike (A. H. Wapstra) 135

Domače vesti

Seminar — poglavja iz fizikalne optike 137
Nastanek, razvoj in perspektive optične industrije v Sloveniji (G. Sfiligoj) 138

Strokovni časopisi

Strokovno časopisje za fiziko (A. Moljk) 141

Nove knjige 143

CONTENTS

Articles Page

On Universal Algebras (N. Prijatelj) 97
Improperly posed Problems (A. Suhadolc) 109
Three Steps in the Structure of Matter (V. F. Weisskopf) 115

News

The Size of Atomic Nuclei (J. Strnad) 125

School 131

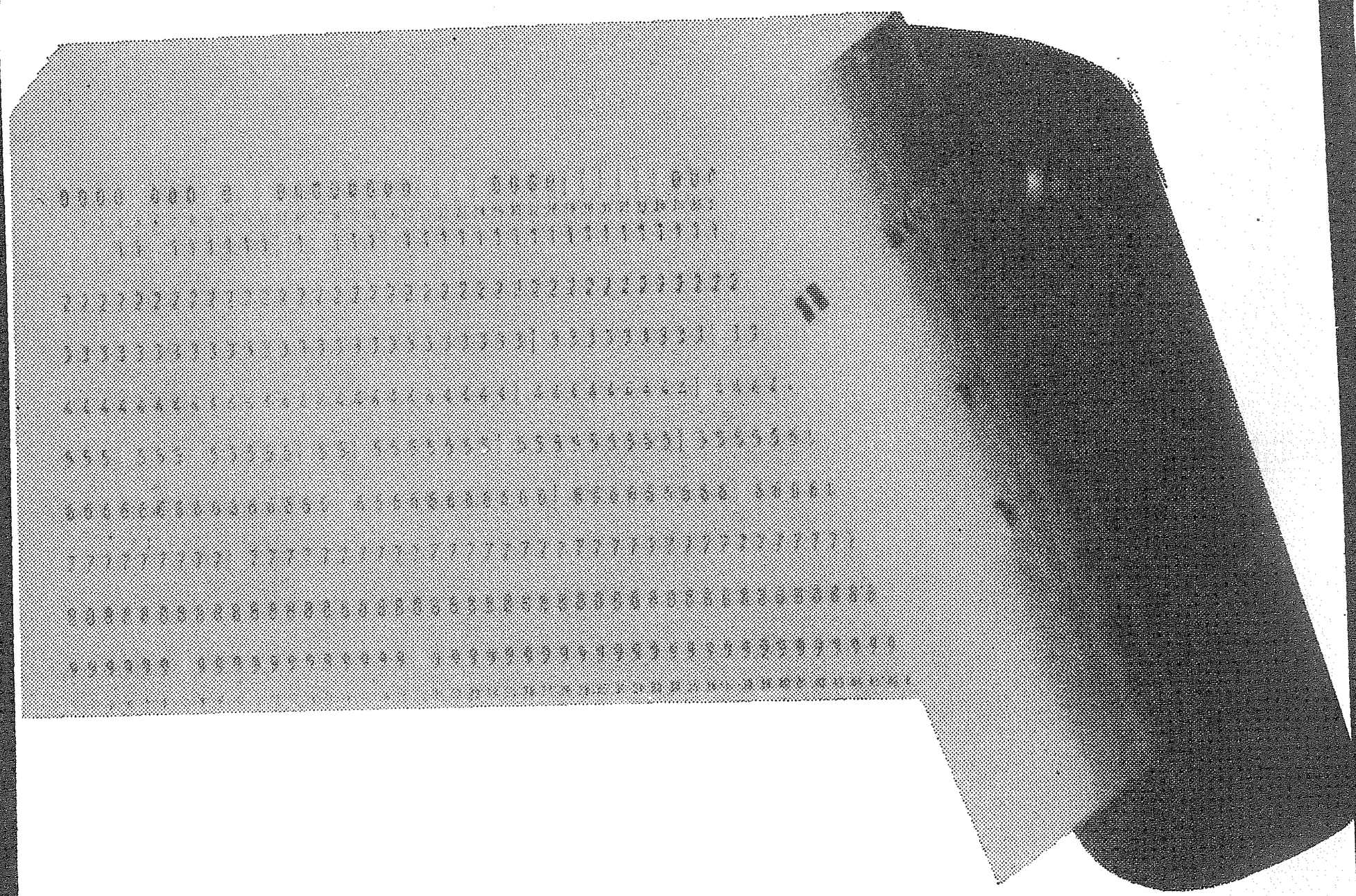
Competitions 135

Spark 135

Home News 137

Professional Journals 141

New Books 143



ljubljanska banka

nadaljuje tradicijo
zanesljivega bančnega servisa

osemdesetletne izkušnje,
najširša mreža poslovnih enot v državi
in predstavništva v tujini,
poslovni korespondenti po vsem svetu,
članstvo v mednarodnih finančnih
korporacijah,
sodobna tehnična oprema

ljubljanska banka

pravi naslov za denarne zadeve