IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1970
Letnik 17
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani
Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani
Avsec France, gimnazija Kranj
Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani
Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan« v Ljubljani
Garb France, gimnazija Ravne
Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani
Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani
Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije
Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdaja društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujte na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din
za dijake 5 din
za ustanove in podjetja 20 din
za inozemstvo 25 din (2 $)
posamezna številka 5 din

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.** Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2.

O ADITIVNI TEORIJI ŠTEVIL

JOŽE GRASSELLI

V sestavku so opisani nekateri osnovni pojmi, izreki in problemi aditivne teorije števil. Najprej formuliramo osrednji problem in orišemo nekatere njegove posebne primere. Obravnavamo računske operacije in metriko v množici zaporedij nenegativnih celih števil. Opišemo Šnirelmanovo gostoto in pokažemo njeno pomembnost. Brez dokaza navajamo Mannov izrek in Erdoesov izrek.

ON THE ADDITIVE NUMBER THEORY

In this paper a survey of some basic concepts, theorems and problems of the additive number theory is given. First, we state the main problem and some of its special cases. We treat the algebraic operations and the metric in the set of sequences of nonnegative integers. Schnirelmann's density is mentioned and its importance shown. We state without proof the theorems of Mann and of Erdoes.

1

Osrednji problem aditivne teorije števil je mogoče zaobjeti z naslednjim vprašanjem: *Kakšne lastnosti mora imeti zaporedje nenegativnih celih števil, da se s seštetjem določeno mnogo njegovih členov dobe vsa naravna števila?* Za poljubno zaporedje A, ki ima kot člene nenegativna cela števila, je torej treba najti pogoje, pri katerih obstoji takšno število m, da je vsako naravno število mogoče zapisati z vsoto m sumandov, ki so vsi vzeti iz zaporedja A.

Do nedavna so reševali ta problem samo za posebne primere, ko je bilo zaporedje A podano. Običajno je bilo tudi število m dano in je bila naloga dokazati, da je vsako naravno število izrazljivo kot vsota m števil iz A. Navedimo nekaj znanih izrekov in problemov, ki sodijo v ta okvir!

Po Lagrangeu (1736—1813) je vsako naravno število vsota štirih kvadratov celih števil. Če torej vzamemo zaporedje

$$A_2 = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots\} \tag{1}$$

se vsako naravno število dobi s seštetjem štirih njegovih členov. Zgledi: $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, $30 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$.

Lagrangeov izrek je pravzaprav del odgovora na neko bolj splošno vprašanje. Naj bo k naravno število in zaporedje A_k sestavljeno iz k-tih potenc vseh nenegativnih celih števil

$$A_k = \{0^k, 1^k, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots\} \tag{2}$$

E. Waring (1734—1798) je postavil domnevo, da vsakemu $k \geqq 2$ pripada takšno število $m(k)$, da je vsako naravno število vsota $m(k)$ sumandov, vzetih iz A_k. V Lagrangeovem izreku imamo potrditev te domneve za primer, ko je $k = 2$; tedaj je $m(2) = 4$. Dolgo časa je bilo to vse, kar se je trdnega vedelo o Wa-

ringovi domnevi. Da je domneva v celem pravilna, je dokazal šele D. Hilbert (1862—1943).

Vzemimo zdaj zaporedje vseh lihih praštevil

$$A_p = \{ 3, 5, 7, 11, \ldots \} \tag{3}$$

S to množico je povezan slavni Goldbachov problem. C. Goldbach (1690—1764) je trdil, da se soda števila, ki so večja od 4, izražajo z vsoto dveh lihih praštevil, od 7 večja liha števila pa z vsoto treh lihih praštevil. Tako je npr. $12 = 5 + 7$, $11 = 3 + 3 + 5$. Goldbachov problem zahteva, da se omenjena trditev dokaže. Rešitvi se je doslej najbolj približal I. Vinogradov. Pred približno tridesetimi leti je ugotovil, da je vsako dovolj veliko liho število vsota treh lihih praštevil. Obstaja torej takšno število K, da je vsako liho število, ki je večje od K, mogoče zapisati kot vsoto treh členov iz A_p. Število K ni poznano. Po ocenah, ki so jih našli, je K manjši od števila

$$M = e^{e^{e^{41,96}}}$$

Število M je tako ogromno, da odpade vsaka možnost, da bi npr. s preverjanjem dognali veljavnost Goldbachove domneve še za liha števila, ki so pod M. Ugotovitev Vinogradova vsekakor kaže, da bi moglo biti med lihimi števili kvečjemu končno mnogo takih, za katera Goldbachova trditev ne bi veljala. Kar se tiče izrazljivosti sodih števil, je Goldbachov problem še skoraj popolnoma odprt. Tu se še npr. ne ve, ali je vsako dovolj veliko sodo število vsota dveh lihih praštevil.

Taki in podobni zgledi so bili značilni za aditivno teorijo števil vse do leta 1930. Tedaj so začele prodirati ideje L. Šnirelmana (1905—1938), ki je pokazal, da je možno problem izrazljivosti naravnih števil obravnavati tudi tako splošno, kakor smo ga opisali na začetku, ko torej zaporedje A ni eksplicitno znano. Ta preokret je dal disciplini novih spodbud in prinesel zanimiva odkritja.

2

Naj pomeni $\mathcal{S}$ množico vseh končnih in neskončnih zaporedij, katerih členi so nenegativna cela števila, ki se večajo z naraščajočim indeksom. Element $A \in \mathcal{S}$ ima torej obliko

$$A = \{ a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \} \tag{4}$$

in so tu členi sama različna rastoča nenegativna cela števila, tako da velja $0 \leqq a_0$ in $a_n < a_{n+1}$ za vsak indeks n. Pri končnem zaporedju je seveda le končno mnogo členov. Razen omenjenih elementov naj vsebuje $\mathcal{S}$ še prazno zaporedje. To zaporedje nima nobenega člena, označevali ga bomo z znakom $\emptyset$. S tem, da privzamemo element $\emptyset$, se lastnosti množice $\mathcal{S}$ poenostavijo.

Enakost elementov v $\mathcal{S}$ je opredeljena z enakostjo zaporedij. Naj bo $B \in \mathcal{S}$

$$B = \{ b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \} \tag{5}$$

Enačba $A = B$ pomeni, da je $a_n = b_n$ za vsak indeks. Če se ne ujemata vsaka dva istoležna člena, sta zaporedji različni $A \neq B$.

Če je v zaporedju A samo končno mnogo drugačnih števil kot v B, sta zaporedji *asimptotično enaki* in pišemo $A \sim B$. Tako je npr.

$$\{ 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots \} \sim \{ 1, 3, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots \}$$

Ni se težko prepričati, da ustvarja asimptotična enakost v $\mathcal{S}$ ekvivalenčno relacijo. Eden od razredov objame vsa končna zaporedja.

V množici $\mathcal{S}$ se dajo vpeljati razne računske operacije. Obravnavajmo najprej seštevanje! Če hočemo sešteti elementa A in B, napravimo vse mogoče vsote $a_i + b_j$ po enega člena a_i iz A in b_j iz B, jih uredimo po velikosti in od enakih vsot obdržimo samo po eno. Tako dobljeno zaporedje je *vsota* $A + B$ in je očitno iz $\mathcal{S}$. Zgleda:

$$A = \{ 0, 1, 3 \} \qquad B = \{ 1, 4 \} \qquad A + B = \{ 1, 2, 4, 5, 7 \}$$

Če je Z_o množica vseh nenegativnih celih števil in

$$C = \{ 0, 1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots \} \qquad D = \{ 0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots \}$$

je

$$C + D = Z_o$$

Nadalje velja za vsak element A iz $\mathcal{S}$

$$A + \varnothing = \varnothing \tag{6}$$

Enočleno zaporedje $\{ 0 \}$ je iz $\mathcal{S}$ in igra pri seštevanju vlogo nevtralnega elementa. Za vsak $A \in \mathcal{S}$ je namreč

$$A + \{ 0 \} = A \tag{7}$$

Iz opredelitve seštevanja je razvidno, da je za poljubne elemente $A, B, C \in \mathcal{S}$

$$A + B = B + A \tag{8}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{9}$$

Vsota je torej komutativna in asociativna. Enačbe (7), (8) in (9) povedo, da je $\mathcal{S}$ za vpeljano seštevanje komutativna polgrupa z enoto.

Enačba (7) je izpolnjena za vsak element $A \in \mathcal{S}$. Naj bo zdaj A neki izbrani element iz $\mathcal{S}$ in iščimo vse take elemente X v $\mathcal{S}$, za katere je

$$A + X = A \tag{10}$$

Ena rešitev je seveda $X = \{ 0 \}$. Lahko se zgodi, da je to tudi edina rešitev. Če je npr. $A = \{ 1, 2 \}$, je že tako. Če pa vzamemo $A = \{ 0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots \}$, je enačba (10) izpolnjena razen za $X = \{ 0 \}$ tudi še npr. za $X = \{ 0, 2 \}$, $X = \{0, 2, 4 \}$ in sploh za vsako zaporedje X, ki vsebuje poleg 0 še končno ali neskončno mnogo samih sodih pozitivnih števil. Element X, ki izpolnjuje enačbo (10) in je različen od $\{ 0 \}$, se imenuje *relativni nič* elementa A. Ker je za vsak X

$$\varnothing + X = \varnothing \tag{11}$$

je vsak element $X \neq \{ 0 \}$ relativni nič praznega zaporedja.

Za $A \in \mathcal{S}$ je vsak od elementov $A + A$, $A + A + A$ itd. v $\mathcal{S}$. Vpeljimo izražavo

$$\begin{aligned} 0 \,.\, A &= \{ 0 \} \\ 1 \,.\, A &= A \\ 2 \,.\, A &= A + A \\ 3 \,.\, A &= A + A + A \end{aligned} \tag{12}$$

itd. Tako imamo v $\mathcal{S}$ opredeljeno *množenje* elementov z nenegativnimi celimi števili. Običajno označujemo ta produkt brez pike. Ni se težko prepričati, da za poljubni celi nenegativni števili n, m in elementa A, B iz $\mathcal{S}$ drže pravila

$$(mn)\,A = m\,(nA)$$
$$(m + n)\,A = mA + nA$$
$$m\,(A + B) = mA + mB$$

Lagrangeov izrek iz prejšnjega razdelka moremo z upoštevanjem (1) zdaj na kratko takole zapisati

$$A_2 + A_2 + A_2 + A_2 = Z_o \qquad \text{oz.} \qquad 4\,A_2 = Z_o$$

Če označimo z L zaporedje vseh lihih števil, ki niso manjša od 9

$$L = \{\,9, 11, 13, 15, \ldots\,\}$$

se izrek Vinogradova iz prejšnjega razdelka po (3) glasi

$$L \sim 3\,A_p$$

Videli smo, da je vsota dveh elementov iz $\mathcal{S}$ zmeraj element iz $\mathcal{S}$. Ali velja tudi narobe, da je vsak element iz $\mathcal{S}$ vsota dveh elementov iz $\mathcal{S}$? Vsak element iz $\mathcal{S}$ lahko pišemo v obliki

$$\{a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = \{\,m\,\} + \{\,a_o - m, a_1 - m, a_2 - m, \ldots, a_n - m, \ldots\,\} \qquad (13)$$

kjer je m celo število med 0 in a_o, $0 \leqq m \leqq a_o$. Razcepitve, kot jih podaja enačba (13), imenujemo *trivialne razcepitve.* Pri trivialni razcepitvi je vsaj en sumand enočleno zaporedje. Če bi dopuščali trivialne razcepitve, bi bilo treba zgornjemu vprašanju zmeraj pritrditi. Čisto drugače pa je, če trivialnih razcepitev ne jemljemo v obzir. Lahko se namreč zgodi, da element netrivialnih razcepitev sploh ne premore. Element $\{\,0, 1\,\}$ je že takšen. Z nobenima elementoma $\{\,a_o, a_1\,\}$, $\{\,b_o, b_1\,\}$ namreč ni mogoče izpolniti enačbe

$$\{\,0, 1\,\} = \{\,a_o, a_1\,\} + \{\,b_o, b_1\,\}$$

Števili a_1, b_1 bi namreč morali biti najmanj 1 in zato $a_1 + b_1$ najmanj 2, to pa ni v $\{\,0, 1\,\}$.

Element, ki ima samo trivialne razcepitve, se imenuje *primitiven.* Če pa ima element vsaj eno netrivialno razcepitev, je *neprimitiven.* Naj samo povemo, da je vsako zaporedje, ki premore relativne nič, npr. neprimitivno. Znanih je nekaj kriterijev, ki omogočajo spoznati primitivnost nekaterih zaporedij.

Neprimitivni element se da izraziti z vsoto dveh elementov, katerih nobeden ni enočleno zaporedje. Če sta sumanda primitivna, smo dobili izražavo neprimitivnega elementa s primitivnima elementoma. Če pa sta en ali oba sumanda neprimitivna, lahko še naprej razcepljamo. Ob tem nas takoj zanima, ali je neprimitivni element vsota primitivnih elementov, in če je, ali je izražava s primitivnimi elementi enolična. Vprašanji sta podobni, kakor ju srečamo pri razcepitvi celih števil na produkt praštevil. Razmere pa so zdaj nekoliko drugačne. Njihov opis zahteva, da si ogledamo, kako je uvedena v množici $\mathcal{S}$ topologija.

Zaznamujemo zaporedje $0, 1, 2, \ldots, m$ celih števil med 0 in m na kratko z znakom $[\,0, m\,]$. Posebej je $[\,0, 0\,] = \{\,0\,\}$. Če je A element iz $\mathcal{S}$, je za vsako

nenegativno celo število m presek $A \cap [0, m]$ element iz $\mathcal{S}$. V primeru, kadar A in $[0, m]$ nimata nobenega skupnega števila, je njun presek seveda prazno zaporedje $\emptyset$.

Če imamo dva elementa A, B iz $\mathcal{S}$, lahko primerjamo množici $A \cap [0, m]$ in $B \cap [0, m]$ pri različnih m. Kadar je za vsak cel nenegativen m tudi

$$A \cap [0, m] = B \cap [0, m] \tag{14}$$

sta elementa enaka $A = B$. Prav tako iz enakosti elementov $A = B$ sledi veljavnost enačbe (14) za vsak m. Če pa enačba (14) ne drži zmeraj, obstaja najmanjši $m = m'$, ko je prvič

$$A \cap [0, m'] \neq B \cap [0, m'] \tag{15}$$

Vpeljimo zdaj v $\mathcal{S}$ funkcijo $d(A, B)$, ki naj bo takole določena

$$d(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{pri } A = B \\ \dfrac{1}{m' + 1} & \text{pri } A \neq B \end{cases} \tag{16}$$

Funkcija $d(A, B)$ je nenegativna in opredeljena za vsak par elementov A, B. Hitro se je mogoče prepričati, da pri poljubnih elementih $A, B, C \in \mathcal{S}$ velja

$$d(A, A) = 0 \tag{17}$$

$$d(A, B) = d(B, A) \tag{18}$$

$$d(A, B) \leqq d(A, C) + d(C, B) \tag{19}$$

Te lastnosti kažejo, da je funkcija $d(A, B)$ razdalja in množica $\mathcal{S}$ glede na to razdaljo metrični prostor.

Na znani način se v metričnem prostoru $\mathcal{S}$ opredeli konvergenca. Zaporedje $\{A_i\}$, ki ima za člene elemente $A_i \in \mathcal{S}$, konvergira proti elementu $A \in \mathcal{S}$, če teži zaporedje števil $d(A_i, A)$ proti nič, ko narašča i prek vsake meje. Iz trikotniške neenačbe (19) takoj sledi, da je limita A enolično določena.

Poglejmo, kako se konvergenca odraža na členih zaporedij! Če zaporedje $\{A_i\}$ izpišemo, se glasi

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_o^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots\} \\ A_2 &= \{a_o^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}, \ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_i &= \{a_o^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}, \ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{20}$$

Zapišimo še zaporedje A

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \tag{21}$$

Ker velja $d(A_i, A) \to 0$, bo od nekega $i = i_o$ naprej

$$d(A_i, A) < \frac{1}{a_o + 1}, \quad i \geqq i_o$$

Po definiciji razdalje (16) se to pravi, da je $m' > a_o$ in zato za vse $i \geqq i_o$

$$A_i \cap [0, a_o] = A \cap [0, a_o] \quad \text{oz.} \quad A_i \cap [0, a_o] = a_o$$

saj je $A \cap [0, a_o] = a_o$. V prvi koloni iz (20) so torej vsi členi od člena z indeksom i_o naprej enaki a_o. Zaporedje števil, ki ga sestavlja prva kolona v (20), konvergira torej proti prvemu členu zaporedja A. Vzemimo zdaj člen $a_n \in A$. Pri dovolj velikih indeksih i bo

$$d\,(A_i, A) < \frac{1}{a_n + 1}$$

in zato $m' > a_n$. Za vse dovolj velike i bo torej

$$A_i \cap [0, a_n] = A \cap [0, a_n] = \{ a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n \}$$

ali

$$\lim a_o^{(i)} = a_o, \ \lim a_1^{(i)} = a_1, \ldots, \ \lim a_n^{(i)} = a_n$$

ko gre $i \to \infty$. Ker lahko m' zaradi $d\,(A_i, A) \to 0$ preseže vsako število, je

$$\lim a_n^{(i)} = a_n$$

pri $i \to \infty$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$ Če je tedaj A limita zaporedja $\{ A_i \}$, vsaka od kolon iz (20) konvergira proti istoležnemu členu zaporedja A.

Pomudimo se še pri vprašanju, ali je prostor $\mathcal{S}$ poln. Ugotoviti je treba, ali ima zaporedje $\{ A_i \}$, pri katerem padejo razdalje med dovolj poznimi elementi pod vsako pozitivno vrednost, limito v $\mathcal{S}$. S podobnim preudarkom, kot smo ga ravnokar uporabili, najdemo, da ima vsako zaporedje $\{ A_i \}$, pri katerem velja $d\,(A_r, A_s) \to 0$, ko tečeta r in s proti ∞, limito v $\mathcal{S}$. Množica $\mathcal{S}$ je torej poln metrični prostor.

Za zgled si oglejmo zaporedje $\{ A_i \}$, pri katerem je element $A_i = \{ i \}$. Za (20) dobimo

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ 1 \} \\ A_2 &= \{ 2 \} \\ A_3 &= \{ 3 \} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_i &= \{ i \} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{22}$$

Če je $r < s$, je $d\,(A_r, A_s) = 1/(r + 1)$ in zato $d\,(A_r, A_s) \to 0$ pri $r, s \to \infty$. Kakšna je limita zaporedja (22)? Ker je za vsak i razdalja $d\,(A_i, \emptyset) = 1/(i + 1)$ in se pri $i \to \infty$ približuje nič, je limita zaporedja (22) prazno zaporedje $\emptyset$. To je v skladu z dejstvom, da edina kolona, ki v (22) nastopa, divergira proti ∞. Navedeni zgled tudi pojasnjuje, kakšen je pomen elementa $\emptyset$. Če bi ga izpustili, množica $\mathcal{S}$ ne bi bila več poln prostor.

Ker so elementi iz $\mathcal{S}$ množice števil, je jasno, da pomeni inkluzija $A \subseteq B$, da so v zaporedju B vsa števila iz zaporedja A in morda še katera druga števila. Če je v zaporedju elementov $\{ A_i \}$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots \tag{23}$$

pravimo, da je zaporedje monotono naraščajoče. Monotono naraščajoče zaporedje je zmeraj konvergentno, njegova limita je unija členov zaporedja (23)

$$B = \bigcup A_i \tag{24}$$

Vzemimo namreč kakšen fiksen naraven m! Tedaj je $B \cap [0, m]$ končna množica in zaradi (24) obstaja takšen indeks i_o, da je

$$B \cap [0, m] = A_{i_0} \cap [0, m]$$

Ta enačba drži po (23) tudi za vse $i > i_o$. Ker velja isti sklep pri vsakem m, je trditev dokazana.

Vsoto smo v množici $\mathcal{S}$ opredelili za končno mnogo elementov. Konvergenca omogoča razširiti pojem vsote na primer, ko je neskončno sumandov, ko imamo torej opraviti z neskončno vrsto. Naj bo $\{ A_i \}$ neskončno zaporedje elementov iz $\mathcal{S}$. Vrsta

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_i + \ldots \tag{25}$$

je konvergentna, če je zaporedje delnih vsot konvergentno. Prostor $\mathcal{S}$ ima lastnost, da je v njem vsaka neskončna vrsta konvergentna. Dokaz za to dejstvo je preprost. Za število 0 sta dve možnosti: ali je vsebovano v vseh elementih A_i od nekega naprej ali pa ne. V prvem primeru imamo tak indeks r, da velja $0 \in A_i$ za $i \geqq r$. Delne vsote od r-te naprej

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_r, A_1 + A_2 + \ldots + A_r + A_{r+1}, \ldots \tag{26}$$

so tedaj monotono naraščajoče in je zato njihovo zaporedje konvergentno. V drugem primeru imamo neskončno elementov, ki ne vsebujejo števila 0. Najmanjše število, ki nastopa v delnih vsotah (26), se zato veča, ko prihajamo k poznejšim delnim vsotam in preseže sčasoma vsako še tako veliko vrednost. Preseki intervala $[0, m]$ z dovolj poznimi vsotami zaporedja (26) so zato prazni pri vsakem m, to pa pomeni, da ima zdaj vrsta (25) za limito prazno zaporedje $\emptyset$.

Povrnimo se zdaj k vprašanju, kako je z razcepitvijo elementov v množici $\mathcal{S}$. Velja trditev, *da je vsako zaporedje iz $\mathcal{S}$ vsota končno ali neskončno mnogo primitivnih zaporedij iz $\mathcal{S}$.* Pri tem so v $\mathcal{S}$ taka zaporedja, ki jih ni mogoče izraziti z vsoto končno mnogo primitivnih zaporedij. Dokazov za ta dejstva ne bomo navajali. Pripomnimo naj še, da razcepitev ni enolična. V $\mathcal{S}$ so zaporedja, ki se izražajo kot vsota različno mnogo različnih primitivnih zaporedij.

3

Za zaporedje $A \in \mathcal{S}$

$$A = \{ a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \} \tag{27}$$

naj pomeni $A(x)$ število pozitivnih členov, ki ne presegajo naravnega števila x. Pri vsakem naravnem x je količnik $A(x)/x$ točno določen. Natančna spodnja meja količnikov $A(x)/x$, ko teče x po vseh naravnih številih, je *gostota zaporedja A*. Če gostoto zaporedja A zaznamujemo z znakom $D(A)$, imamo definicijo

$$D(A) = \inf \frac{A(x)}{x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

Ker je zmeraj $A(x) \leqq x$, velja ocena

$$0 \leqq D(A) \leqq 1 \tag{29}$$

Gostota zaporedja je torej nenegativno število in ni nikdar večja od 1. Končno zaporedje ima očitno gostoto nič. Tudi za vsako neskončno zaporedje, ki ne vsebuje števia 1, je gostota enaka nič. Množici vseh naravnih števil pripada gostota ena. To lastnost ima še samo zaporedje vseh nenegativnih celih števil. Pri zaporedju

$$A_2 = \{ 0, 1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots \}$$

je $A_2(x)/x \leqq x^{-1/2}$ in zato $D(A_2) = 0$. Podobno najdemo, da je za zaporedje

$$A = \{1, 3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots \}$$

gostota $D(A) = 1/3$. Določitev gostote pri bolj kompliciranih zaporedjih je lahko prav hud problem.

Oglejmo si zdaj nekatere lastnosti gostote! Vzemimo zaporedji A, B z gostotama $D(A)$, $D(B)$! Obe naj vsebujeta število nič. Zato njuna vsota $C = A + B$ zajema med drugim vsa števila iz A in iz B. Če je x naravno število, pobere A iz zaporedja $[1, x]$ ravno $A(x)$ števil, ki so vsa tudi v C. Ako sta a_k, a_{k+1} zaporedna člena iz A, števila

$$a_k + 1, a_k + 2, \ldots, a_k + l = a_{k+1} - 1 \tag{30}$$

niso v A. Lahko pa so nekatera od teh števil v C. Za števila oblike $a_k + r$, $r \in B$, $0 < r \leqq 1$, že velja to. Med a_k in a_{k+1} je takih števil $B(l) = B(a_{k-1} - a_k - 1)$. Naj bo a_j največji člen iz A, ki ne presega x. Koliko je v C pozitivnih števil, ki niso nad x? Najprej imamo $A(x)$ takšnih števil iz A in potem še $B(a_{k+1} - a_k - 1)$ števil oblike (30) med vsakima zaporednima členoma iz A. Ker morda s tem vseh števil še nismo zajeli, drži ocena

$$\begin{aligned} C(x) \geqq A(x) + B(a_1 - 1) + B(a_2 - a_1 - 1) + B(a_3 - a_2 - 1) + \\ + \ldots + B(x - a_j - 1) \end{aligned} \tag{31}$$

Po definiciji gostote velja za sumande na desni v (31) od drugega naprej

$$\begin{aligned} &B(a_1 - 1) \geqq (a_1 - 1) D(B) \\ &B(a_2 - a_1 - 1) \geqq (a_2 - a_1 - 1) D(B) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &B(x - a_j - 1) \geqq (x - a_j - 1) D(B) \end{aligned}$$

Teh sumandov je $A(x)$. Če vse to upoštevamo v (31), sledi

$$C(x) \geqq A(x) + D(B)[x - A(x)] = A(x)[1 - D(B)] + xD(B) \tag{32}$$

Ker je $A(x) \geqq xD(A)$, dobimo iz (32) naprej

$$C(x) \geqq xD(A)[1 - D(B)] + xD(B)$$

Ta ocena drži za vsak naraven x. Če z x delimo in pišemo spet $C = A + B$, najdemo

$$D(A + B) \geqq D(A) + D(B) - D(A) D(B) \tag{33}$$

Gostota vsote dveh zaporedij, katerih vsako vsebuje število nič, ni pod vsoto gostot obeh sumandov, zmanjšani za produkt gostot sumandov.

Neenačba (33) se da zapisati tudi v obliki

$$D(A+B) \geqq 1-[1-D(A)][1-D(B)] \tag{34}$$

kar takoj vidimo, če odpravimo oklepaje. S popolno indukcijo je mogoče oceno (34) razširiti na vsoto zaporedij $A_1, A_2, \ldots, A_n$, če se le vsako začenja s številom nič. V takem primeru velja

$$D(A_1+A_2+\ldots+A_n) \geqq 1-[1-D(A)][1-D(A_2)]\ldots[1-D(A_n)] \tag{35}$$

Ob zgledih se je utrdilo prepričanje, da je mogoče oceno (33) izboljšati. Dokončen odgovor je prišel leta 1942, ko je H. Mannu uspelo dokazati znamenito neenačbo

$$D(A+B) \geqq \min[D(A)+D(B), 1] \tag{36}$$

Povejmo jo še z besedami: *Če je vsota gostot dveh zaporedij, ki se obe začenjata z nič, večja ali enaka ena, je gostota vsote teh zaporedij ena. Če pa je vsota gostot dveh zaporedij število, ki je pod ena, je gostota njune vsote večja ali enaka temu številu.*

Dokaz tega Mannovega izreka je preobširen, da bi ga tukaj navajali. Dodamo naj, da je mogoče tudi ta izrek raztegniti na več sumandov, ki se vsi začenjajo z nič. Velja namreč neenačba

$$D(A+A_2+\ldots+A_n) \geqq min[D(A_1)+D(A_2)+\ldots+D(A_n), 1] \tag{37}$$

Na zgledih je ugotovljeno, da se oceni (36) in (37) ne dasta izboljšati. Desne strani je možno povečati le, če se zaporedja, ki jih seštevamo, odlikujejo s kakšnimi posebnimi lastnostmi.

Če seštejemo dve ali več zaporedij, katerih vsota gostot doseže ali preseže ena, je po Mannovem izreku v njihovi vsoti obseženo vsako naravno število. Omenili smo že namreč, da sta edini zaporedji, ki imata gostoto ena, zaporedje vseh naravnih števil in zaporedje vseh nenegativnih celih števil.

Poglejmo zdaj, kako se da iz ocene (35) izpeljati neka rešitev osrednjega problema!

Denimo, da ima zaporedje A, ki se začenja z nič, pozitivno gostoto $D(A) = g > 0$. Če tvorimo vsoto n sumandov, ki so vsi A

$$nA = A + A + \ldots + A$$

je po oceni (35) gostota tega zaporedja

$$D(nA) \geqq 1-(1-g)^n \tag{38}$$

Ker je $0 < g \leqq 1$, bo pri dovolj velikem n potenca $(1-g)^n < 1/2$ in torej po (38)

$$D(nA) > \tfrac{1}{2} \tag{39}$$

Naj bo zdaj x kakšno naravno število. Na intervalu $[0, x]$ leži več kot $x/2+1$ členov c_i zaporedja nA, saj velja po (39) za število pozitivnih členov v nA zmeraj $nA(x)/x > 1/2$. Vsakemu členu c_i priredimo število $x - c_i$, ki je nenegativno in ne presega x. Členi c_i in števila $x - c_i$ sestavljajo množico več kot $x+1$ nenegativnih celih števil, ki so vsa $\leqq x$. Ker pa je med 0 in x samo $x+1$

celih števil, morata vsaj dve od naših števil biti enaki. Pri primernih indeksih i, j bo torej

$$x - c_i = c_j \quad \text{oz.} \quad x = c_i + c_j \tag{40}$$

Toda x je poljubno naravno število. Enačba (40) tedaj pove, da se vsako naravno število izraža kot vsota dveh števil iz zaporedja nA. Imenujmo zaporedje $A \in \mathcal{S}$, ki ima lastnost, da je pri nekem naravnem številu m v množici mA zapopadeno vsako naravno število, *bazo naravnih števil*! Dokazali smo tedaj izrek: *Vsako zaporedje, ki se začenja z nič in ima pozitivno gostoto, je baza naravnih števil.*

Dobljeni izrek prevede reševanje osnovnega problema na določitev gostote zaporedja. Ker se da ta naloga obdelati z metodami iz analize, je pomen izreka precejšen. Šnirelman je s tem izrekom in z drugimi podobnimi izreki utemeljil uporabnost pojma gostote v aditivni teoriji števil.

Zaporedja, ki imajo gostoto nič, pušča zadnji izrek ob strani. Toda tudi takšno zaporedje je včasih baza naravnih števil. Zaporedja kvadratov in višjih potenc vseh celih nenegativnih števil imajo npr. vsa gostoto nič. Iz Lagrangeovega oz. Waringovega izreka pa je jasno, da so vsa ta zaporedja baze naravnih števil. Seveda so med zaporedji z gostoto nič tudi takšna, ki niso baza za naravna števila. Zaporedje

$$A = \{ 0, 1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots \} \tag{41}$$

ima gostoto nič. S popolno indukcijo se prepričamo, da je za vsak n

$$n! - 1 = (n-1)(n-1)! + (n-2)(n-2)! + \ldots + 3 \,.\, 3! + 2 \,.\, 2! + 1 \,.\, 1! \tag{42}$$

Tu imamo število $n! - 1$ izraženo z vsoto $n(n-1)/2$ členov iz (41) in z manj členi iz (41) izražava ni možna. Torej je $n! - 1$ šele v množici $2^{-1} n (n-1) A$. Ni tedaj takega končnega m, da bi za vse naravne n število $n! - 1$ bilo v zaporedju mA. Zato zaporedje (41) ni baza naravnih števil.

Zaporedja gostote nič, ki so baze naravnih števil, imajo neko posebnost, ki jo bomo opisali. Vzemimo kakšno zaporedje A s pozitivno gostoto, manjšo od ena! Če prištejemo zaporedju A zaporedje B, ki je tudi pozitivne gostote, je gostota zaporedja $A + B$ večja od gostote zaporedja A. To pove Mannov izrek (36). More se zgoditi, da je gostota zaporedja $A + B$ nad gostoto zaporedja A tudi v takem primeru, ko ima B gostoto nič. Zaporedje B gostote nič, ki je takšno, da je

$$D(A + B) > D(A), \quad 0 < D(A) < 1$$

za vsako zaporedje A, ki ima pozitivno od ena manjšo gostoto, se imenuje *bistvena komponenta*. Zaporedja gostote nič, ki so baze naravnih števil, označuje naslednji Erdösov izrek: *Vsaka baza naravnih števil je bistvena komponenta.* V obratni smeri pa izrek ni resničen. Znana so namreč zaporedja B, ki so bistvene komponente, a za noben naraven m vsota mB ne vsebuje vsakega naravnega števila.

Literatura:

A. O. Gelfond — J. V. Linnik, Elementarnye metody v analitičeskoj teorii čisel. 1962.

H. B. Mann, Addition Theorems. The Addition Theorems of Group Theory and Number Theory. 1965.

H. H. Ostmann, Additive Zahlentheorie. 1956.

ASIMPTOTIČNA OCENA INTEGRALOV

ANTON SUHADOLC

Članek obravnava asimptotično vedenje integrala I_n definiranega z (1), ko gre n čez vsako mejo. Če ustreza $f(n)$ na intervalu $[0, a]$ pogojem: (1) $|f(x)| < 1$ za $0 < x \leqq a$ in (2) $f(x) = 1 - x^\alpha g(x)$, kjer je $\alpha > 0$, $g(x)$ zvezna funkcija na intervalu $[0, a]$ in $g(0) = c > 0$, potem je $\lim n^{1/\alpha} I_n = \alpha^{-1} c^{-1/\alpha} \Gamma(1/\alpha)$. Na koncu je nekaj uporab, med drugim rešitev naloge iz Siam Review 11 (1969), Problem 69 — 4.

ASYMPTOTIC ESTIMATE OF INTEGRALS

In this paper the asymptotic behaviour of I_n defined by (1) is condsidered. If $f(x)$ satisfies the conditions: (1) $|f(x)| < 1$ for $0 < x \leqq a$, and (2) $f(x) = 1 - x^\alpha g(x)$, where $\alpha > 0$, $g(x)$ continuous on $[0, a]$, and $g(0) = c > 0$, then we have $\lim n^{1/\alpha} I_n = \alpha^{-1} c^{-1/\alpha} \Gamma(1/\alpha)$, $n \to \infty$. There are some applications of this formula, among others the solution of a problem posed in Siam Review 11 (1969), Problem 69 — 4.

Oglejmo si integral

$$I_n = \int_a^b [f(x)]^n \, dx \tag{1}$$

kjer je $f(x)$ zvezna funkcija na intervalu (a, b). Kaj lahko rečemo o I_n, ko gre n čez vsako mejo? Nazorno je, da je limita ∞, če je npr. integrand nenegativen in na kakšnem podintervalu večji kot 1. Če $f(x)$ spreminja predznak, limita morda sploh ne obstaja. Če je $f(x)$ povsod na intervalu absolutno pod 1, je limita 0. Zanimiv je primer, ko je $f(x)$ absolutno pod 1, le v eni ali v nekaj točkah je $f(x) = 1$. Tedaj je sicer tudi $\lim I_n = 0$; vprašamo pa se lahko, kako hitro gre I_n proti 0, ko gre n čez vsako mejo.

Ogledati si hočemo enostavne pogoje, pri katerih prav lahko izračunamo, kako hitro limitira I_n proti 0.

Izrek. Realna funkcija $f(x)$ naj bo zvezna na končnem intervalu $[0, a]$ in naj ima tam tele lastnosti:

(a) $f(0) = 1$; *za vsak majhen $\delta > 0$ eksistira tak pozitiven $q < 1$, da je $|f(x)| \leqq q$ za vse $x \in [\delta, a]$.*

(b) *Funkcija $f(x)$ se da pisati v obliki $f(x) = 1 - x^\alpha g(x)$, kjer je $\alpha > 0$, $g(x)$ zvezna funkcija na intervalu $[0, a]$ in $g(0) = c > 0$.*

Pri teh pogojih velja

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/\alpha} \int_0^a [f(x)]^n \, dx = \frac{1}{\alpha} c^{-1/\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \tag{2}$$

Zadnjo trditev lahko opišemo nazorno takole: integrali I_n konvergirajo proti 0 tako hitro kakor $n^{-1/\alpha}$.

Dokaz izreka je le formalizacija tegale nazornega sklepa: ker ima $f(x)$ maksimum enak 1 pri $x = 0$, drugje pa je $f(x)$ absolutno pod 1, bo glavni doprinos k integralu I_n prišel iz okolice točke $x = 0$. Ta doprinos bomo izračunali.

(i) Najprej dokažimo, da velja (2) za funkcijo

$$f(x) = e^{-cx^a} = 1 - x^a \left(c - \tfrac{1}{2} c^2 x^a + \ldots\right)$$

Očitno je, da ta funkcija ustreza pogojema (a) in (b). V tem primeru je

$$\int_0^a [f(x)]^n \, dx = \int_0^a e^{-ncx^a} \, dx$$

Če uvedemo v integral na desni spremenljivko $t = ncx^a$, dobimo

$$n^{1/a} \int_0^a [f(x)]^n \, dx = \frac{1}{a} c^{-1/a} \int_0^{nca^a} e^{-t} t^{1/a-1} \, dt$$

Očitno konvergira integral na desni pri $n \to \infty$ proti

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{1/a-1} \, dt = \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$$

Torej velja formula (2) za funkcijo $f(x) = e^{-cx^a}$. Za vsak $c > 0$ in vsak $a > 0$ imamo tedaj

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/a} \int_0^a e^{-ncx^a} \, dx = \frac{1}{a} c^{-1/a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

(ii) Naj bo zdaj $f(x)$ poljubna funkcija, ki ustreza pogojema (a) in (b). Zaradi (a) imamo za vsak $\delta > 0$ in vsak b, $\delta < b \leqq a$, oceno

$$\left| n^{1/a} \int_\delta^b [f(x)]^n \, dx \right| \leqq n^{1/a} q^n (b - \delta)$$

Ker je $0 < q < 1$, limitira produkt $n^{1/a} q^n$ proti 0, če gre $n \to \infty$. Torej

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/a} \int_\delta^b [f(x)]^n \, dx = 0, \quad 0 < \delta < b \leqq a \tag{4}$$

Naj bo $0 < \delta \leqq a$. Postavimo

$$\liminf_{n \to \infty} n^{1/a} \int_0^\delta [f(x)]^n \, dx = I_1, \quad \limsup_{n \to \infty} n^{1/a} \int_0^\delta [f(x)]^n \, dx = I_2$$

Te dve limiti vsekakor eksistirata. Lahko pa bi bili še $\pm \infty$. Iz (4) hitro vidimo, da sta limiti I_1 in I_2 neodvisni od zgornje meje δ, če je le $0 < \delta \leqq a$.

(iii) Izberimo si poljubno pozitivno število ε. Iz pogoja (b) se vidi, da je kvocient $[f(x) - e^{-(c+\varepsilon)x^a}]/x^a$ zvezna funkcija na intervalu $[0, a]$ in da zavzame pri $x = 0$ vrednost $\varepsilon > 0$. Torej pri dovolj majhnem $\delta > 0$ je ta kvocient gotovo pozitiven na intervalu $[0, \delta]$.

Prav tako vidimo, da je kvocient $[f(x) - e^{-(c-\varepsilon)x^a}]/x^a$ zvezna funkcija, ki je povsod negativna na dovolj majhnem intervalu $[0, \delta]$. (Pri $x = 0$ ima namreč vrednost $-\varepsilon$.) Od tod sledi

$$e^{-(c+\varepsilon)x^a} \leqq f(x) \leqq e^{-(c-\varepsilon)x^a}, \qquad 0 \leqq x \leqq \delta$$

Torej velja za vsak n ocena

$$n^{1/\alpha} \int_0^\delta e^{-n(c+\varepsilon)x^\alpha}\, dx \leqq n^{1/\alpha} \int_0^\delta [f(x)]^n\, dx \leqq n^{1/\alpha} \int_0^\delta e^{-n(c-\varepsilon)x^\alpha}\, dx$$

Napravimo limito $n \to \infty$. Po formuli (3) konvergirata integrala na levi in desni. V limiti dobimo torej neenačbo

$$\frac{1}{\alpha}(c+\varepsilon)^{-1/\alpha}\, \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leqq I_1 \leqq I_2 \leqq \frac{1}{\alpha}(c-\varepsilon)^{-1/\alpha}\, \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Ta ocena velja za vsak $\varepsilon > 0$. Če gre $\varepsilon \to 0$, limitirata leva in desna stran proti istemu izrazu $\alpha^{-1} c^{-1/\alpha}\, \Gamma(\alpha^{-1})$. Torej je $I_1 = I_2 = \alpha^{-1} c^{-1/\alpha}\, \Gamma(\alpha^{-1})$. Ker sta spodnja in zgornja limita I_1 in I_2 med seboj enaki, eksistira limita izraza na levi v formuli (2) in je enaka izrazu na desni. S tem je izrek dokazan.

V predpostavkah izreka je bil maksimum funkcije $f(x)$ v krajišču $x = 0$. Prav nič se ne bi dokaz spremenil, če bi imeli poljuben končen interval (a, b) in bi bil maksimum v krajišču $x = a$ ali v krajišču $x = b$. Če ima funkcija $f(x)$ več maksimumov enakih 1, bi integracijski interval razrezali na primerne podintervale in na vsakem uporabili dokazani izrek. Če pa je npr. integracijski interval neskončen, vzemimo npr. $b = \infty$, je treba poleg pogojev (a) in (b) izreka dodati še en pogoj, ki zagotavlja dovolj hitro padanje integranda. Enostaven pogoj take vrste je npr. tale:

(c) Velja naj $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^p}$, $p > 0$, za vse $x \geqslant x_0 > 1$.

Če je izpolnjen pogoj (c), ocenimo del integrala $\int_a^\infty [f(x)]^n dx$ po intervalu (x_0, ∞) takole:

$$|\mathrm{L}| = \left|\int_{x_0}^\infty [f(x)]^n\, dx\right| \leqslant \int_{x_0}^\infty x^{-pn}\, dx = \frac{1}{pn-1}\, x_0^{-pn+1}$$

Ker je $x_0 > 1$, gre izraz na desni z $n \to \infty$ proti 0 hitreje kot vsaka potenca n^s, torej $\lim\limits_{n\to\infty} (n^{1/\alpha}\, \mathrm{L}) = 0$. Izrek torej velja tudi za integrale z neskočnimi mejami, če je izpolnjen npr. pogoj (c).

Izrek moremo za malenkost posplošiti še v drugi smeri. Če je funkcija $h(x)$ zvezna in omejena na integracijskem intervalu in $h(a) \neq 0$, (a je točka, v kateri ima $f(x)$ absolutni maksimum), lahko na podoben način dokažemo

$$\lim n^{1/\alpha} \int_a^b [f(x)]^n\, h(x)\, dx = \frac{1}{\alpha}\, c^{-1} \,.\, h(a) \,.\, \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Izrek moremo posplošiti še v naslednjem smislu: pri predpostavkah izreka bi na isti način, kot smo dokazali naš izrek, dokazali lahko tole:

$$I_n = \int_a^b [f(x)]^n\, dx = A_1\, n^{-1/\alpha} + A_2\, n^{-2/\alpha} + \ldots + A_k\, n^{-k/\alpha} + R_k \tag{5}$$

kjer za ostanek R_k velja $\lim\limits_{n\to\infty} (n^{k/\alpha}\, R_k) = 0$. Koeficient A_1 je seveda tisti, ki nastopa na desni strani enačbe (2). Opisani razvoj (5) imenujemo asimptotični razvoj količine I_n po potencah $n^{-1/\alpha}$.

Primeri. 1) Vzemimo za $f(x)$ npr. $x^{-p} J_p(2x)\, p!$, kjer pomeni J_p Besselovo funkcijo prve vrste. Znano je, da velja razvoj

$$x^{-p} J_p(2x)\, p! = 1 - \frac{1}{p+1} x^2 + \ldots$$

in da je zgornji izraz pod 1 za vse $x > 0$. Pogoja (a) in (b) našega izreka sta izpolnjena, pri čemer je $\alpha = 2$ in $c = \dfrac{1}{p+1}$. Ker je tudi $|J_p(2x)| < 1$ za vse $x > 0$, je

$$x^{-p} J_p(2x)\, p! \,| \leqslant \frac{p!}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^{p/2}} \text{ za vse } x, \text{ za katere je } x^{p/2} \geqslant p!.$$

Torej je tudi pogoj (c) izpolnjen. Rezultat (2) nam sedaj da:

$$\lim \sqrt{n} \int_0^\infty \left[\frac{J_p(2x)\, p!}{x^p}\right]^n dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{p+1}\, \sqrt{\pi}$$

Tu smo upoštevali $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Pripomnimo še, da je bil zgornji problem objavljen za primer $p = 1$ v SIAM Review, vol. 11, str. 47 (1969), Problem 69-4.

2) Vzemimo sedaj $f(x) = exe^{-x}$; ta ima na intervalu $[0, \infty)$ en sam maksimum, in to pri $x = 1$, kjer je tudi $f(1) = 1$. V okolici točke $x = 1$ velja

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \ldots$$

torej je $\alpha = 2$ in $c = 1/2$. Pogoja (a) in (b) sta izpolnjena, pa tudi (c) je, saj $f(x)$ pada proti 0 z $x \to \infty$ celo eksponentno. Formula (2) nam da

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} \int_0^\infty x^n n^n e^{-nx}\, dx\right) = \sqrt{2\pi}$$

V integral vpeljimo novo spremenljivko $nx = t$ in obe strani delimo še s $\sqrt{2\pi}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1$$

To je dobro znana Stirlingova formula.

3) Naslednji primer bo pokazal drugačno vrsto uporabe asimptotične ocene (2). Vzemimo $f(x) = 1 - x^\alpha$, kjer je $\alpha > 0$. Ta funkcija zadošča pogojema (a) in (b), pri čemer je α isti kot v definiciji funkcije $f(x)$; $c = 1$. Torej je

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{1/\alpha} \int_0^b (1 - x^\alpha)^n\, dx\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right), \text{ kjer je } 0 < b \leqslant 1$$

Integrand v zgornjem integralu potenciramo po binomskem izreku in dobljeno končno vsoto členoma integriramo. Dobimo oceno

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k\alpha + 1} b^{k\alpha+1} \approx n^{-1\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Znak $\approx$ pomeni, da je limita kvocienta leve in desne strani v zgornji vrstici enaka 1, ko gre $n \to \infty$. Rezultat opišemo lahko takole: vsota na levi se za velike n vede kot konst. . $n^{-1/\alpha}$.

JEDNA TEOREMA O HOMOLOGNIM POLJIMA TAČAKA

RADOMIR ŽIVKOVIĆ

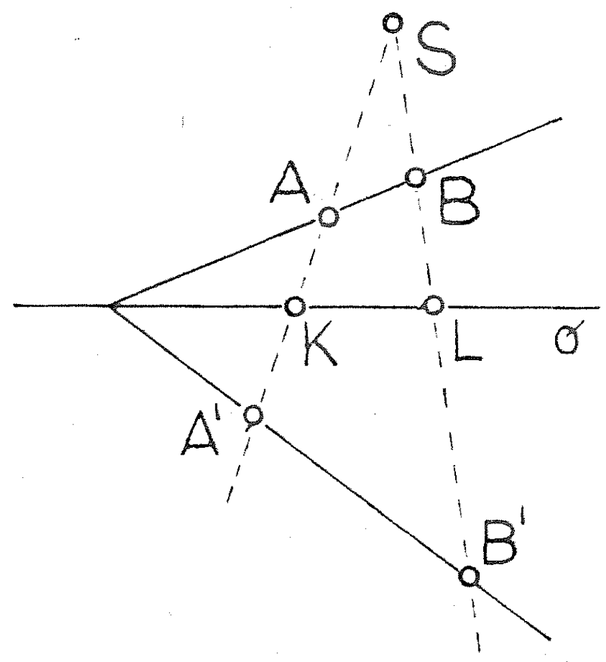
Članek vsebuje geometrični dokaz nekega izreka o kompozitu centralne kolineacije in homotetije z istim središčem. Na koncu je uporaba tega izreka za rešitev problema, najti kvadrat, katerega projekcija je dan četverokotnik, če je znana razdalja središča projekcije od ravnine projekcije.

A THEOREM ON HOMOLOGOUS DOMAINS OF POINTS

This note contains a geometric proof of a theorem on the composite map of a central collineation and a homothetic map having the same center. The result is applied for the solution of the following problem: Find a square having a given quadrilateral for its projection if the distance between the center of projection and the plane of projection is known.

Ako je između dva polja tačaka α i α' jedne ravni uspostavljeno perspektivno kolinearno preslikavanje, kažemo da je između polja α i α' ravni uspostavljeno homologno preslikavanje ili, kraće, homologija. Zato se može reći: homologija je neidentično kolinearno preslikavanje ravni na samu sebe, pri kome je jedna tačka S te ravni dvojna i sve tačke jedne prave o te ravni također dvojne. Prava o je osa, a tačka S je središte homologije.

Pokazuje se da beskonačno dalekoj pravoj $m'\infty$ polja α' homologija τ pridružuje pravu $m \parallel o$ u polju α, a beskonačno dalekoj pravoj $n\infty$ polja α homologija τ pridružuje pravu $n' \parallel o$ u polju α'. Pravu m (n') zovemo protivosa polja α (α').

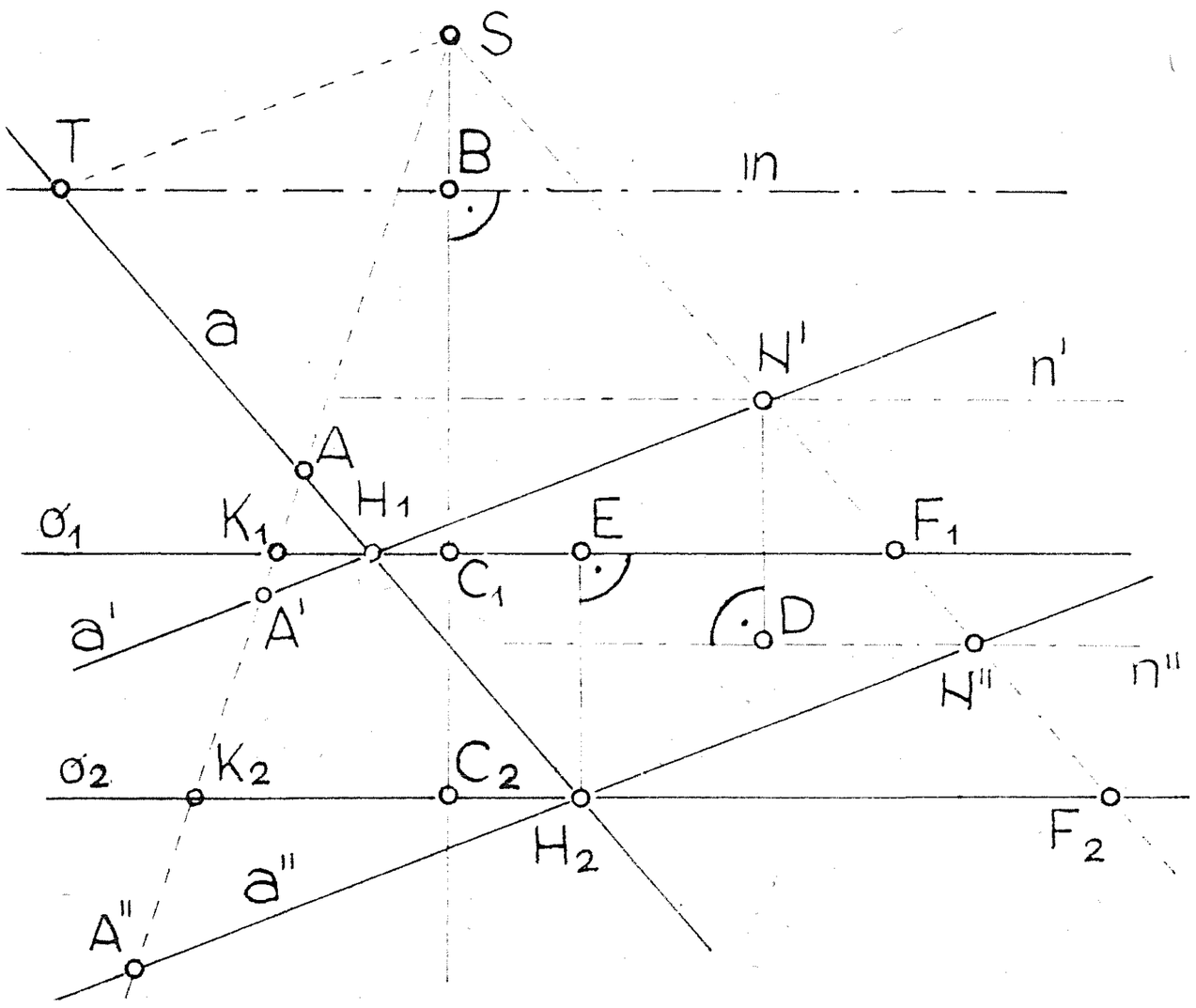


Za homologno pridružena polja α i α' dokazuje se nepromjenljivost dvostrukog omjera odgovarajućih orijentiranih duži:

$$\frac{SA'}{KA'} : \frac{SA}{KA} = \frac{SB'}{LB'} : \frac{SB}{LB} = \ldots = k,$$

gdje su tačke $K, L, \ldots$ presjeci zraka homologije sa osom o homologije (sl. 1.). Taj stalni dvostruki omjer zove se konstanta homologije.

Neka je između dva polja tačaka a i a' (sl. 2.) uspostavljeno homologno preslikavanje τ_1, dato središtem S, osom o_1 i parom pridruženih tačaka A i A'. Neka je prava m protivosa polja a, a prava n' protivosa polja a'. Neka prava $SB \perp o_1$ siječe prave m i o_1 u tačkama B i C_1. Dokažimo da važi sljedeća teorema.



TEOREMA: Homotetičnim preslikavanjem χ polja a' u polje a'' sa tačkom S kao središtem homotetije i brojem $k \neq 0$ kao koeficijentom homotetije, uspostavlja se između polja a i a'' homologno preslikavanje τ_2, istoga središta i protivose polja a, pri čemu je:

a) konstanta k_2 homologije τ_2 jednaka proizvodu konstante k_1 homologije τ_1 i koeficijenta k homotetije χ;

b) osa o_1 i protivosa n' homologije τ_1 pomjerena translatorno u osu o_2 i protivosu n'' homologije τ_2 za vektor $\overrightarrow{C_1C_2}$ proporcionalan vektoru $\overrightarrow{BC_1}$ udaljenosti ose o_1 od protivose m, sa veličinom $k - 1$ kao konstantom proporcionalnosti.

Neka su a i a' par homologno pridruženih pravih za homologiju τ_1. Neka je A'' tačka zrake SA takva da je

$$\frac{SA'}{SA''} = k \tag{1}$$

Tačkom S kao središtem i parom tačaka A' i A'' određeno je homologno preslikavanje χ između polja a' i a'', koje je homotetija. Proizvod $\chi\tau_1$ između preslikavanja τ_1 i χ je novo homologno preslikavanje τ_2 između polja a i a'', sa tačkom S kao središtem homologije. Kako je $a'' \parallel a'$, beskonačno dalekoj tački $T''\infty$ prave a'' pridružena je tačka T prave m ($St \parallel a''$, $T = ST \times a$), pa je prava m protivosa polja a i za homologiju τ_2. Osa $o_2 \parallel m$ te homologije prolazi presjekom H_2 pridruženih pravih a i a''. Za konstante k_1 i k_2 homologija τ_1 i τ_2 važe jednakosti:

$$\frac{SA'}{K_1A'} : \frac{SA}{K_1A} = k_1 \qquad (2),$$

$$\frac{SA''}{K_2A''} : \frac{SA}{K_2A} = k_2 \qquad (3)$$

Neka se tačka A kreće po pravoj a udaljujući se u beskonačnost. Njoj pridružena tačka A' homologijom τ_1 približava se tada, po pravoj a', beskonačno blizu tački N' protivose n' polja a' ($SN' \parallel a$, $N' = SN' \times a'$), a tačka K_1 tački $F_1 = o_1 \times SN'$. Pri tome omjer $\frac{SA}{K_1S}$ teži prema 1, pa je, prema jednakosti (2):

$$\frac{SN'}{F_1N'} = k_1 \qquad (4)$$

Analognim razmatranjem, u vezi sa homologijom τ_2, iz jednakosti (3) dobije se:

$$\frac{SN''}{F_2N''} = k_2 \qquad (5),$$

gdje je N'' tačka protivose n'' polja a'' ($N'' = SN' \times a''$) pridružena tački $A\infty$ prave a, a tačka $F_2 = SN' \times o_2$. Ako su tačke H_1 i H_2 presjeci prave a sa pravima o_1 i o_2, tada iz podudarnosti trouglova H_2F_2N'' i H_1F_1N' izlazi da je $F_1N' = F_2N''$, pa, zato, iz jednakosti (4) i (5) slijedi $\frac{SN''}{SN'} = \frac{k_2}{k_1}$, a pošto je, prema slici 2. i prema jednakosti (1) $\frac{SN''}{SN'} = \frac{SA''}{SA'} = k$, to je $\frac{k_2}{k_1} = k$, tj.

$$k_2 = k_1k \qquad (6)$$

Time je dokazana tvrdnja a) teoreme.

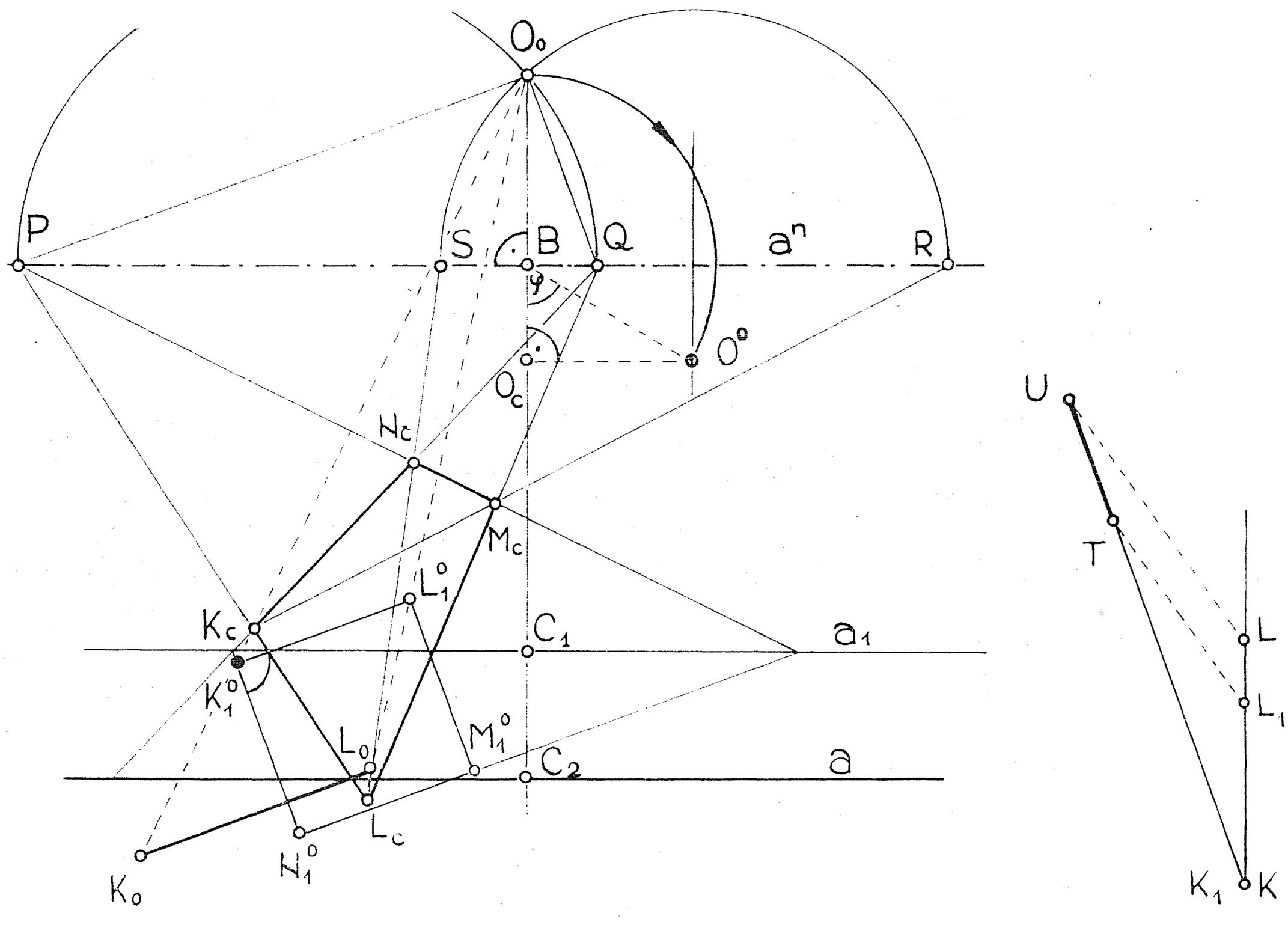
Duži u jednakostima (2) i (3) orijentirane su, pa posmatrajmo pripadne vektore. Homologija τ_1 tački B protivose m pridružuje beskonačno daleku tačku $B'\infty$ polja a' na zraci SB. Iz jednakosti (2), uzevši u obzir da je $\lim\limits_{B' \to B'\infty} \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{C_1B'}} = 1$, i analogno iz jednakosti (3) za homologiju τ_2, izlaze ove dvije jednakosti: $1 : \frac{\overrightarrow{SB}}{\overrightarrow{C_1B}} = k_1$, $1 : \frac{\overrightarrow{SB}}{\overrightarrow{C_2B}} = k_2$, gdje je tačka $C_2 = SB \times o_2$. Iz dvije poslednje jednakosti izlazi $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\overrightarrow{C_2B}}{\overrightarrow{C_1B}}$, što, na osnovi jednakosti (6), daje $\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{BC_1} \,.\, k$. Pošto je $\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1C_2}$, dobije se jednakost

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{BC_1}\,(k - 1) \qquad (7)$$

Iz paralelograma $H_1H_2N''N'$ vidi se da osa o_1 i protivosa n' imaju isti vektor translacije $\overrightarrow{N'D} = \overrightarrow{EH_2} = \overrightarrow{C_1C_2}$. Tako je dokazana i tvrdnja b) teoreme. Osa o_2 ne smije se poklopiti sa protivosom m (tada osa o_2 ne bi mogla biti istovremeno pridružena sama sebi i beskonačno dalekoj pravoj $m'\infty$). Dakle, mora biti $\overrightarrow{C_1C_2} \neq \overrightarrow{C_1B}$, što je, prema (7), ispunjeno za $k \neq 0$, a to je u teoremi i pretpostavljeno.

Kako je poznato, jednu realizaciju homologije imamo kod obaranja ravni u centralnoj projekciji. Kada se ravan α obori oko traga a u ravan projekcija π, tada polje α pređe u polje α_0. Između polja α_0 i polja α_c (polje centralnih projekcija) uspostavljeno je homologno preslikavanje, pri čemu je oboreno središte (očište) središte homologije, trag α je osa, a nedogledni trag i oborena izbježna prava i_0 imaju ulogu protivosa te homologije.

Naprijed navedena teorema može se iskoristiti u centralnom projiciranju, kod zadataka u kojima se na ravnu geometrijsku figuru postavljaju određeni uslovi u pogledu njenog oblika i veličine, mada se takvi zadaci mogu raditi i bez ove teoreme. Evo takvog jednog primjera:



U ravni projekcija π dat je konveksni četverougao $K_cL_cM_cN_c$ (sl.3.a) i, uz to, data je veličina d udaljenosti tačke O od ravni π. Treba odrediti tačku O i ravan α tako da dati četverougao bude projekcija, iz tačke O na ravan π, kvadrata $KLMN$ koji je u ravni α, i ima stranicu KL date veličine.

Da bi se suprotne stranice datog četverougla preslikale u paralelne prave, mora se nedogledni trag a^n (protivosa m) ravni α kvadrata povući tačkama

$P = K_cL_c \times M_cN_c$ i $Q = K_cN_c \times L_cM_c$. Pravima susjednih stranica, odnosno dijagonala četverougla $K_cL_cM_cN_c$ odgovaraju oborene normalne nedogledne prave, pa je oboreno očište O_o u presjeku kružnica, čiji so prečnici duži PQ i RS ($R = K_cM_c \times a^n$, $S = L_cN_c \times a^n$), Sada se lako nađe glavna tačka O_c (normalna projekcija tačke O na ravan π), pomoću trougla BO_cO^o ($B = a^n \times \times O_oB \perp a^n$, $BO^o = BO_o$, $O_cO^o \parallel a^n$ i $O_cO^o = d$. Ugao $\varphi = O^oBO_c$ nagibni je ugao ravni α prema ravni π. Tražena ravan je $\alpha \parallel (\alpha^n, O)$, pa joj treba još naći trag $\alpha \parallel \alpha^n$.

Povucimo proizvoljno trag $a_1 \parallel a^n$ ravni $\alpha_1 \parallel \alpha$ i nađimo oborenu stranicu $K_1{}^oL_1{}^o$ kvadrata $K_1L_1M_1N_1$ u ravni α_1. Translacijom traga a_1, prema (7), za vektor $\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{BC_1}(k-1) = \overrightarrow{BC_1}\left(\frac{K_oL_o}{K_1{}^oL_1{}^o} - 1\right) = \overrightarrow{BC_1}\,\frac{KL - K_1{}^oL_1{}^o}{K_1{}^oL_1{}^o}$, čiji je intenzitet nađen na sl. 3.b ($K_1L_1 = K_1{}^oL_1{}^o$, $KT = |\overrightarrow{BC_1}|$, pa je $|\overrightarrow{C_1C_2}| = TU$), može se naći traženi trag a ravni α. On se, inače, može naći i bez traga a_1 i (7), ako se prvo nađe duž K_oL_o ($K_oL_o = KL$, $K_oL_o \parallel PO_o$, $K_o \subset O_oK_c$, $L_o \subset O_oL_c$).

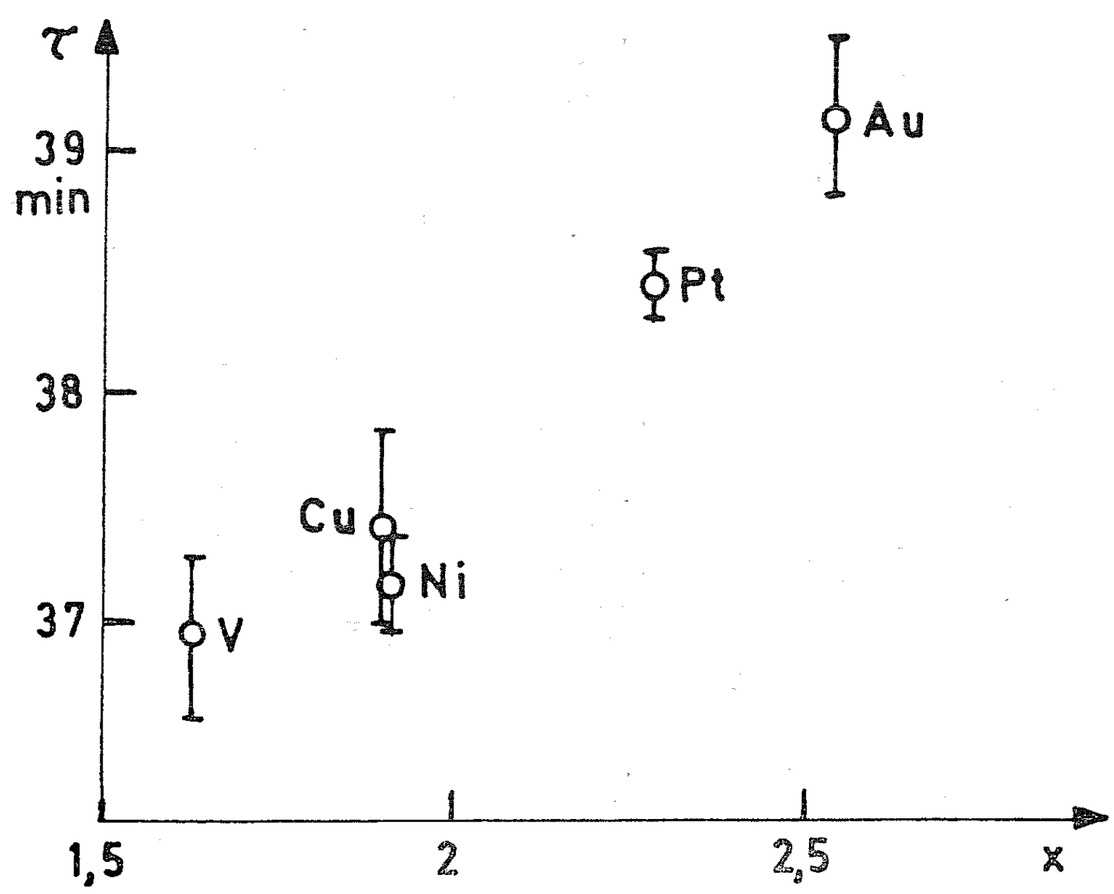
Tačka O_o uvijek postoji, pa broj rješenja može biti 0, ili 1, ili 2, prema tome da li je d veće, ili jednako, ili manje od BO_o.

NOVICI

VPLIV KEMIJSKE VEZI NA RAZPADNI ČAS ATOMSKIH JEDER

Navajeni smo, da na dogajanja v atomskem jedru ne moremo vplivati s spreminjanjem temperature ali z vgraditvijo atoma v molekulo ali v kristal. Karakteristične energije za jedro imajo namreč velikostno stopnjo 1 MeV, ki je mnogo večja kot na primer poprečna kinetična energija atoma zaradi termičnega gibanja — ta ima pri navadni temperaturi velikostno stopnjo 0,01 eV — ali kot vezavna energija med atomi — ta ima velikostno stopnjo 1 eV. Pri jedrskih stanjih, ki imajo zelo majhno vzbuditveno energijo, pa je drugače. O tem pričajo poskusi, pri katerih so prišli do navidez osupljivega rezultata, da lahko vplivamo na razpadni čas jedra s spreminjanjem kemijske vezi atoma. Merili so prehode iz stanj z zelo majhno vzbuditveno energijo v osnovno stanje pri jedrih ^{7}Be, ^{99}Tc, ^{125}Te, ^{90}Nb in ^{235}U.[1-5] Rezultati so tako zanimivi, da kaže o pojavu razmisliti nekoliko podrobneje. Oglejmo si merjenja z jedrom ^{235}U![1]

Osnovno stanje jedra urana ^{235}U ima spin $\frac{7}{2}$ in negativno parnost. Prvo vzbujeno stanje z vzbuditveno energijo manj kot 100 eV ima spin $\frac{1}{2}$ in pozitivno parnost. Jedro ne more preiti iz tega vzbujenega stanja v osnovno z izsevanjem fotona, ker je tak prehod zaradi velike spremembe vrtilne količine in majhne energijske razlike zelo malo verjeten. Ocenili so, da bi bil razpadni čas 10^{16} let. Mnogo verjetnejša je *notranja konverzija*, s katero preide jedro v osnovno stanje v poprečju že po približno 38 minutah. Pri tem odda jedro prek elektromagnetne interakcije odvečno energijo elektronu v elektronskem oblaku, ki obdaja jedro. Elektron zapusti atom s kinetično energijo, ki je za vezavno energijo elektrona manjša od energije jedrskega prehoda. Pri ^{235}U je energija prvega vzbujenega stanja tako majhna, da je mogoča notranja konverzija le z elektroni iz valenčnih lupin. Tu gre za tri elektrone iz lupine 5f, enega iz lupine 6d in dva iz lupine 2s z vezavnimi energijami po 71 eV, 43 eV in manj kot 1 eV. Prav ti elektroni sodelujejo v kemijskih vezeh s sosednjimi atomi.



Razpadni čas ^{235}U za prehod iz vzbujenega stanja $\frac{1}{2}+$ v osnovno stanje $\frac{7}{2}-$ kot funkcija elektronegativnosti kovine, v katero so vgrajeni uranovi atomi.[1] Navpične črte kažejo efektivne napake

Tako ni težko pojasniti vpliva kemijske vezi na razpadni čas za prehod iz prvega vzbujenega v osnovno stanje.

Napravili so naslednji poskus: Vgradili so atome urana ^{235}U v prvem vzbujenem stanju v ploščice iz različnih kovin. To so dosegli tako, da so vzbujene uranove atome, ki nastanejo pri razpadu α ^{239}Pu in odnesejo s seboj odrivno energijo 90 keV, lovili na folije iz različnih kovin in jih s tem vgradili v njihovo kristalno mrežo. Šteli so konverzijske elektrone, ki so prihajali iz folije. Ugotovili so, da se razpadni čas spreminja v odvisnosti od *elektronegativnosti* atomov ploščice (sl. 1).*

Ali lahko vsaj približno pojasnimo ta rezultat? Označimo z V_{int} elektromagnetno interakcijo med jedrom in elektroni, ki povzroči notranjo konverzijo. Valovna funkcija ψ_z naj opiše jedro v vzbujenem stanju ($\frac{1}{2}^+$), ψ_k pa jedro v osnovnem stanju ($\frac{7}{2}^-$). Valovno funkcijo valenčnih elektronov pred konverzijo označimo s φ_z, valovna funkcija φ_k pa naj opiše valenčne elektrone, ki so po konverziji ostali v atomu, in tistega, ki je zapustil atom. Verjetnostna gostota za notranjo konverzijo na časovno enoto je po drugem zlatem pravilu kvantne mehanike:

$$w = (2\,\pi/\hbar)\,|\langle\, \varphi_k\, \psi_k \mid V_{\text{int}} \mid \psi_z\, \varphi_z \,\rangle|^2\, \varrho\,(E)$$

Tu je $\langle\, \varphi_k\, \psi_k \mid V_{\text{int}} \mid \psi_z\, \varphi_z \,\rangle$ matrični element za notranjo konverzijo in $\varrho\,(E)$ število stanj na enoto energijskega intervala za elektron, ki zapusti jedro. Razpadni čas prehodov je sorazmeren z obratno vrednostjo w. Efektivni potencial, ki ga čuti valenčni elektron, je odvisen od kemijske vezi. Kemijska vez torej vpliva na valovne funkcije valenčnih elektronov v izrazu za verjetnostno gostoto. Zato je razpadni čas odvisen od kemijske vezi.

Če bi hoteli izračunati verjetnostno gostoto, bi morali poiskati valovne funkcije elektronov za različne efektivne potenciale. Izračunati pa bi morali tudi valovni funkciji jedra. To bi bilo zelo težavno, četudi bi bili zadovoljni že z grobimi približki in bi uporabili računalnik. Hitro pa lahko ocenimo, ali bo razpadni čas jedra naraščal ali padal z naraščajočo elektronegativnostjo sosednjih atomov. Čim bolj elektronegativni so sosedje vzbujenega uranovega jedra, tem močneje pritegnejo valenčne elektrone atoma. Verjetnost za to, da bodo ti elektroni blizu jedra je tedaj tem manjša — interakcija z jedrom je tem šibkejša, čim bolj elektronegativni so sosedje atoma. Pri bolj elektronegativnih sosedih bo torej verjetnost za notranjo konverzijo manjša, razpadni čas pa daljši. Ta sklep se ujema z merskimi podatki.

N. Mankoč

---

* *Elektronegativnost* je mera za sposobnost atoma v molekuli, da pritegne elektrone. Ni mogoče popolnoma enolično definirati elektronegativnosti, tako da bi ustrezal atomu v vseh okoliščinah en sam podatek. (To bi bilo izvedljivo samo za enega izmed atomskih elektronov v določenem stanju.) Pomagamo si z zasilnimi definicijami. Največ je v rabi *Paulingova.* Absolutna vrednost razlike elektronegativnosti dveh atomov 1 in 2 je tem večja, čim večja je razlika $D = W_{12} - \frac{1}{2}\,(W_{11} + W_{22})$. Tu so W_{11}, W_{22} in W_{12} disociacijske energije molekul iz parov atomov 11, 22 in 12. Po definiciji je

$$|\,x_2 - x_1\,| = k\,D^{1/2},\ k = 0{,}044\,(\text{eV})^{-1/2}.$$

Za vodik je po dogovoru izbrana elektronegativnost $x_H = 2{,}1$. Doslej je uspelo določiti po tej definiciji elektronegativnost za dobre tri desetine atomov. *Mullikanova definicija* je bolj zapletena. Po tej je uspelo določiti elektronegativnost za dve desetini atomov. Za te primere se je pokazalo, da je Mullikanova elektronegativnost sorazmerna s Paulingovo: 3,15 x.

Literatura:

[1] M. Nève de Mevergnies: Chemical Effect on the Half-Life ob U^{235m}, Phys. Rev. Letters **23**, 422 (1969).

[2] H. Mazaki, S. Shimizu: Effect of Chemical State on the Decay Constant of U^{235m}, Phys. Rev. **148**, 1161 (1966).

[3] J. A. Cooper, J. M. Hollander, J. O. Rasmussen: Effect of the Chemical State on the Lifetime of the 24-second Isomer of Nb^{90}, Phys. Rev. Letters, **15**, 680 (1965).

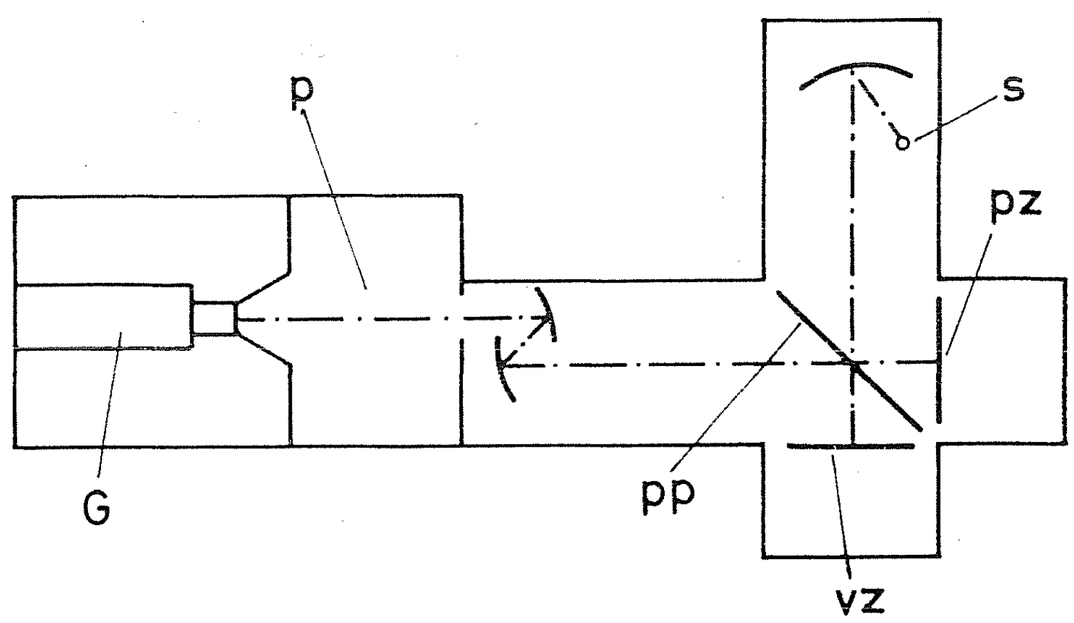
[4] K. T. Bainbridge, M. Goldhaber, E. Wilson: Influence of the Chemical State on the Lifetime of a Nuclear Isomer Tc^{99m}, Phys. Rev. **90**, 430 (1953).

[5] D. H. Byers, B. Stump: Low Temperature Influence on the Tehnecium-99m Lifetime. Phys. Rev. **112**, 77 (1958).

FOURIEROVA SPEKTROSKOPIJA

Daljnje infrardeče območje elektromagnetnega spektra obsega nekako območje med valovnima dolžinama 3000 μ in 40 μ. Raziskave v tem območju so se razmahnile šele v novejšem času, ko se je razvila *Fourierova spektroskopija.* Njeno osnovo je postavil že na začetku dvajsetega stoletja Michelson ob delu s svojim interferometrom.[1] Naletel pa je na toliko tehnoloških težav, da se je lahko razmahnila izdelava in uporaba Fourierovih spektrometrov šele sedaj z razvojem novih detektorjev in polprepustnih zrcal.

Fourierov spektrometer[2] tvrdke Beckman RIIC ima tri glavne dele: Michelsonov interferometer, računalnik in pisalni instrument (sl. 1). Kot izvir služi

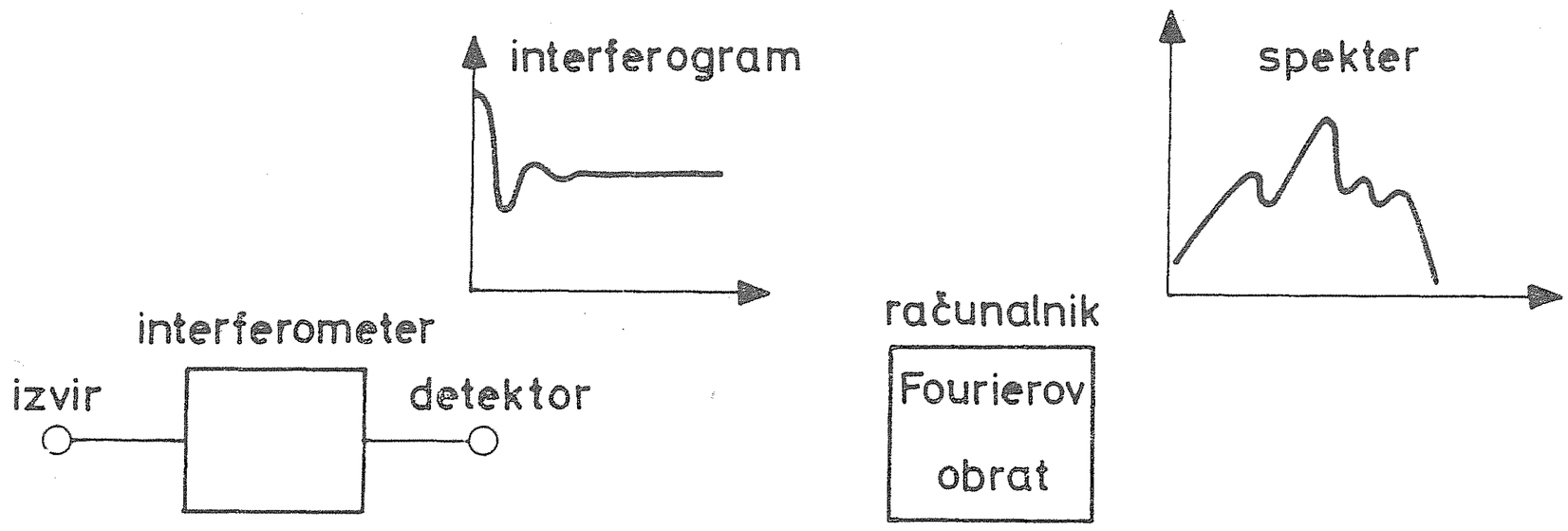


Sl. 1. Poenostavljena risba Fourierovega spektrometra[2]: s živosrebrna svetilka, pp polprepustna ploščica, pz potujoče zrcalo, vz vpeto zrcalo, p prostor za vzorec, G Golayev detektor

visokotlačna živosrebrna svetilka, ki oddaja spekter z zelo razširjenimi črtami. Polprepustna ploščica razdeli kolomirani svetlobni curek na dva delna curka.[1] Oba delna curka interferirata, ko se po odboju na ravnih zrcalih zopet sestaneta za polprepustno ploščico. Sestavljeni curek gre skozi vzorec in vstopi v Golayev detektor, ki spremeni svetlobni signal v električni.[3] Ta se zapiše v interni spomin računalnika, ki ga sestavljata dve ločeni polovici. V prvi je shranjen spekter ozadja, v drugi pa spekter vzorca. Aritmetična enota računalnika izvede matematične operacije, pisalni instrument pa prenese spekter na papir.

Pri spektrometru na mrežico ali na prizmo otipava detektor spekter, ko se vrti mrežica ali prizma. Delovanje Fourierovega spektrometra pa ni tako

pregledno. (Zato so na koncu sestavka izpeljane glavne enačbe, ki omogočijo boljše razumevanje delovanja.) Pri tem se med spektrometriranjem premika eno izmed ravnih zrcal; imenujemo ga *potujoče zrcalo.* Zaradi premikanja potujočega zrcala se spreminja pot enega izmed delnih curkov. Detektor zaznava sestavljeni svetlobni curek, medtem ko se spreminja razlika v optičnih poteh delnih curkov. Krivulji, ki kaže odvisnost signala na izhodu detektorja od razlike optičnih poti, pravimo *interferogram* (sl. 2). To še ni končen spekter.



Sl. 2. Shematični potek snemanja s Fourierovim spektrometrom

Tega dobimo šele po računski obdelavi interferograma. Pri tej upošteva aritmetična enota računalnika ozadje in izvede Fourierov obrat interferograma. Pisalni instrument nariše končni spekter na papir, na katerem je na abscisni osi nanesena frekvenca, na ordinatni osi pa prepustnost vzorca.

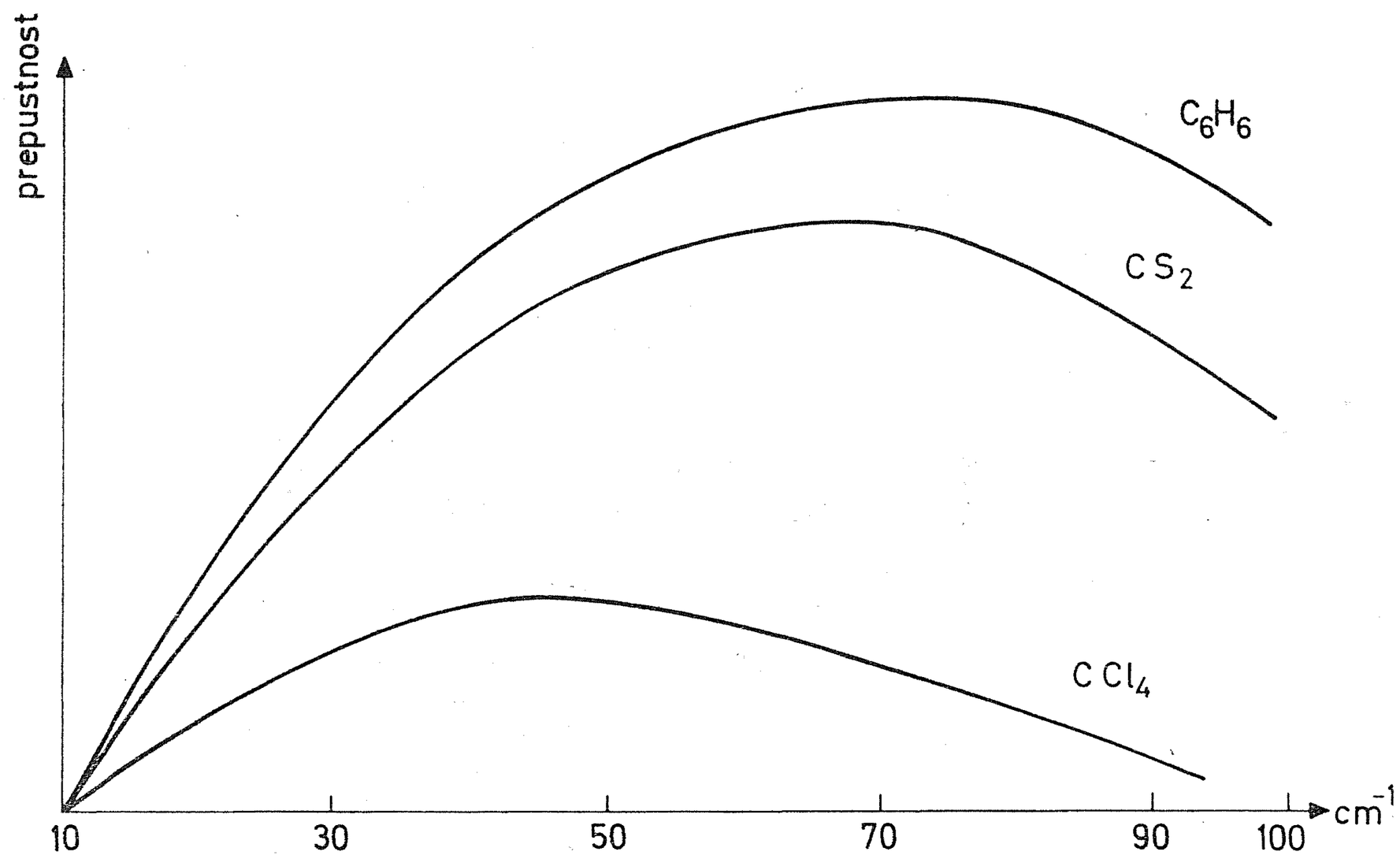
Ločljivosti Fourierovih spektrometrov ne omejujejo reže. To je ena glavnih prednosti pred spektrometri na mrežico ali na prizmo. Ločljivost Fourierovega spektrometra (glej str. 74) je odvisna samo od celotne poti, ki jo naredi potujoče zrcalo med snemanjem. Zato jo lahko izberemo po želji. Če nas zanima samo površen spekter, izberemo slabo ločljivost; snemanje traja v tem primeru več deset minut. Če bi radi dobili čim vernejši spekter, izberemo visoko ločljivost; seveda pa traja snemanje v tem primeru zelo dolgo, lahko tudi več kot en dan. Največje ločljivosti, ki so jih dosegli s Fourierovim spektrometrom, so okoli desetkrat boljše od ločljivosti pri mrežnih spektrometrih. Fourierov spektrometer je sedem do desetkrat hitrejši kot mrežni z enako ločljivostjo.[5] Poleg tega je premaknila Fourierova spektroskopija spodnjo mejo, ki je za mrežne spektrometre okoli 660 μ, na začetek mikrovalovnega območja, to je na okoli 3000 μ.

Slaba stran Fourierove spektroskopije je v tem, da končnega spektra ne dobimo naravnost, temveč moramo interferogram še računsko obdelati. Zato vsebujejo novejši spektrometri računalnik, kar pa napravo znatno podraži.

V daljnjem infrardečem področju lahko s Fourierovim spektrometrom preučujemo vibracijske in rotacijske spektre molekul, nihanja v kristalih, feromagnetne in antiferomagnetne lastnosti kristalov, anizotropnost tekočih kristalov, optične spektre plazme in fluorescentnih snovi ter ciklotronsko resonanco v trdnih snoveh.

Poleg absorpcijskih spektrov lahko z malimi spremembami merimo tudi refleksijske spektre kristalov in tekočin ter lomni kvocient snovi v odvisnosti od valovne dolžine.

Na inštitutu B. Kidrič smo merili s Fourierovim spektrometrom tvrdke Beckman RIIC. Zanimala nas je absorpcija nepolarnih tekočin npr. CCl_4,



Sl. 3. Absorpcijski spekter nekaterih nepolarnih tekočin (merjeno na inštitutu B. Kidrič)

C_6H_6, CS_2 v daljnjem infrardečem območju. Za sedaj absorpcije v tem območju še ni mogoče zanesljivo pojasniti. Več teorij razlaga položno razvlečeno odvisnost absorpcijskega koeficienta od valovne dolžine (sl. 3). Whiffen je mnenja, da nastane absorpcija v nepolarnih tekočinah zaradi vzbujenih dipolov, ki so posledica trkov med molekulami.[4] Najverjetneje pa gre za tekočinska mrežna nihanja.[5]

*

V nadaljevanju si bežno oglejmo teoretične osnove delovanja Fourierovega spektrometra. Polprepustna ploščica (sl. 1) s prepustnostjo $T = 0{,}5$ in odbojnostjo $R = 0{,}5$, ki je naklonjena za 45^0 proti smeri vpadnega valovanja, razdeli vpadno enobarvno valovanje v dve delni valovanji. Označimo z E_1 električno poljsko jakost v valovanju, ki se odbije od trdno vpetega zrcala, z E_2 pa električno poljsko jakost v valovanju, ki se odbije od potujočega zrcala! Obe valovanji interferirata, preden vstopita v vzorec. Po prehodu skozi vzorec pa vstopi sestavljeno valovanje v detektor. Če je $\frac{1}{2}\triangle$ premik potujočega zrcala od lege, pri kateri sta poti delnih valovanj enaki, velja[5]

$$E_1 = E_0\,(RT)^{1/2} \cos \omega t, \quad E_2 = E_0\,(RT)^{1/2} \cos \omega\,(t - \triangle/c)\,.$$

E_0 je amplituda električne poljske jakosti. Gostota energije elektromagnetnega valovanja v odvisnosti od razlike optičnih poti $w\,(\triangle)$ je sorazmerna s kvadratom vsote $E = E_1 + E_2$:[5–6]

$$w\,(\triangle) = \varepsilon_0\,E^2 = 2\,E_0^2\,RT\,\varepsilon_0\,(1 + \cos 2\,\pi\,\bar{\nu}\,\triangle)$$

$\bar{\nu} = 1/\lambda$ je valovno število, ki ga navadno navedemo v cm^{-1}. Če vpadno valovanje ni enobarvno, ima $w\,(\triangle)$ obliko integrala

$$w\,(\triangle) = \int 2\,RT\,S\,(\bar{\nu})\,(1 + \cos 2\,\pi\,\bar{\nu}\,\triangle)\,d\bar{\nu}$$

$S(\bar{\nu}) = d(\varepsilon_0 E^2)/d\bar{\nu}$ je porazdelitev gostote energije elektromagnetnega valovanja po valovnem številu. Funkcija $I(\triangle) = \frac{1}{2} w(\triangle)/RT$ določa interferogram. Zapišemo jo tudi drugače

$$I(\triangle) = \int S(\bar{\nu})(1 + \cos 2\pi\bar{\nu}\triangle)\, d\bar{\nu} = \tfrac{1}{2} I(0) + \int S(\bar{\nu}) \cos 2\pi\bar{\nu}\triangle\, d\bar{\nu} \qquad (1)$$

$I(0)$ je vrednost interferograma pri $\triangle = 0$, ko sta optični poti delnih curkov enaki. S Fourierovim izrekom dobimo iz $I(\triangle)$ iskani spekter:

$$S(\bar{\nu}) = 4 \int [I(\triangle) - \tfrac{1}{2} I(0)] \cos 2\pi\bar{\nu}\triangle\, d\triangle \qquad (2)$$

Vsi štirje zapisani integrali imajo spodnjo mejo 0 in zgornjo mejo ∞. Toda v praksi ne snemamo interferograma do neskončnih vrednosti $\triangle$, temveč samo do največje vrednosti $\triangle_0$. Zato aproksimiramo $S(\bar{\nu})$ s $S'(\bar{\nu})$:

$$S'(\bar{\nu}) = 4 \int_0^{\triangle_0} \left(\int_0^{\infty} S(\bar{\nu}') \cos 2\pi\bar{\nu}\triangle\, d\bar{\nu}'\right) \cos 2\pi\bar{\nu}'\triangle\, d\triangle$$

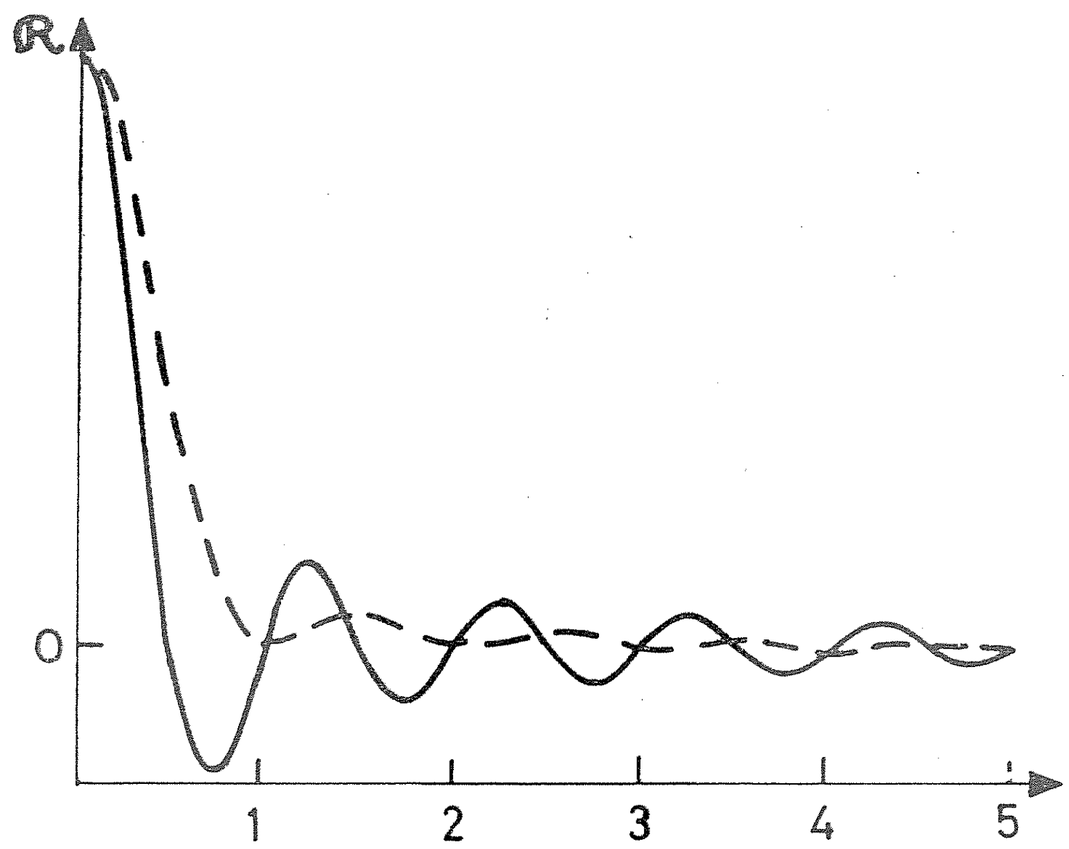
Pri tem smo upoštevali zvezo (1). Integracija po $\triangle$ da :

$$S'(\bar{\nu}) = \int_0^{\infty} S(\bar{\nu}')\, \mathcal{R}(\bar{\nu}, \bar{\nu}', \triangle_0)\, d\bar{\nu}' ,$$

če je

$$\mathcal{R} = 2\triangle_0 [\sin 2\pi(\bar{\nu} - \bar{\nu}')\triangle_0 / 2\pi(\bar{\nu} - \bar{\nu}')\triangle_0 + \\ + \sin 2\pi(\bar{\nu} + \bar{\nu}')\triangle_0 / 2\pi(\bar{\nu} + \bar{\nu}')\triangle_0] . \qquad (3)$$

Pri pogoju $\bar{\nu}' \gg 1/\triangle_0$, ki je skoraj vedno izpolnjen, lahko zanemarimo drugi člen (3), tako da je (sl. 4):



Sl. 4. Funkcija $\mathcal{R}(\bar{\nu}, \bar{\nu}', \triangle_0)$; sklenjena krivulja za $B(\triangle) = 1$, črtkana krivulja za $B(\triangle) = 1 - \triangle/\triangle_0$.[6]

$$\mathcal{R} = 2\triangle_0 [\sin 2\pi(\bar{\nu} - \bar{\nu}')\triangle_0 / 2\pi(\bar{\nu} - \bar{\nu}')\triangle_0]$$

Širina na polovični višini pove ločljivost naprave: $\triangle\bar{\nu} = 0{,}7/\triangle_0$. Da se izognemo težavam, ki bi nastale v končnem spektru zaradi stranskih maksimov, uvedemo funkcijo $B(\triangle)$, ki zgladi funkcijo $\mathcal{R}(\bar{\nu}, \bar{\nu}', \triangle_0)$ (sl. 4). $S'(\bar{\nu})$ je potem

$$S'(\bar{\nu}) = 4 \int_0^{\triangle_0} [I(\triangle) - \tfrac{1}{2} I(0)]\, B(\triangle) \cos 2\pi\bar{\nu}\triangle\, d\triangle \qquad (4)$$

Posledica glajenja pa je poslabšana ločljivost. Če je $B(\triangle) = 1 - \triangle/\triangle_0$, je ločljivost $\triangle\bar{\nu} = 1/\triangle_0$. Pri Fourierovih spektrometrih računamo s tako definirano ločljivostjo. Najboljše ločljivosti, ki so jih dosegli, so okoli 0,03 cm^{-1}.[6]

Novejši spektrometri delujejo takole: Michelsonov interferometer meri interferogram pri diskretnih verdnostih razlike optičnih poti $-n\delta\triangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots N$. Pri tem mora $\delta\triangle$ ustrezati pogoju $\delta\triangle \leqq 1/2\,(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2)$, če je $\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2$ območje, na katerem želimo snemati. Integral (4) preide tedaj v vsoto:

$$S' = \Sigma\,[I\,(n\,\delta\,\triangle) - \tfrac{1}{2}\,I\,(0)]\,(1 - n/N)\cos 2\,\pi\,\bar{\nu}_1\,n\,\delta\,\triangle\,.\,\delta\,\triangle \qquad (5)$$

v kateri je treba upoštevati člene od $n = 0$ do $n = N$. Analogno-digitalni pretvornik prevede vrednosti interferograma $I\,(n\,\delta\,\triangle)$ v binarno obliko, računalnik pa zračuna iskani spekter.[7]

B. Peterman
Kemični inštitut »B. Kidrič«
Ljubljana

LITERATURA

[1] J. Strnad: Uvod v fiziko, (Univerzitetna založba, Ljubljana 1969), str. 594.

[2] Prospekti in navodila za Fourierov spektrometer z oznako FS-720 tvrdke Beckman RIIC.

[3] D. Hadži: Infrardeči spektrometri, Obz. mat. fiz. **2**, 125 (1952).

[4] N. E. Hill et all.: Dielectric Properties and Molecular Behaviour, (Van Nostrand Reinhold Co., London 1969).

[5] A. Hadni: Essentials of Modern Physics Applied to the Study of Infrared, (Pergamon Press Ltd., Oxford 1967).

[6] D. H. Martin: Spectroscopic Techniques for Far Infrared, Submillimetre and Millimetre Waves, (North-Holland Publish. Co., Amsterdam 1967).

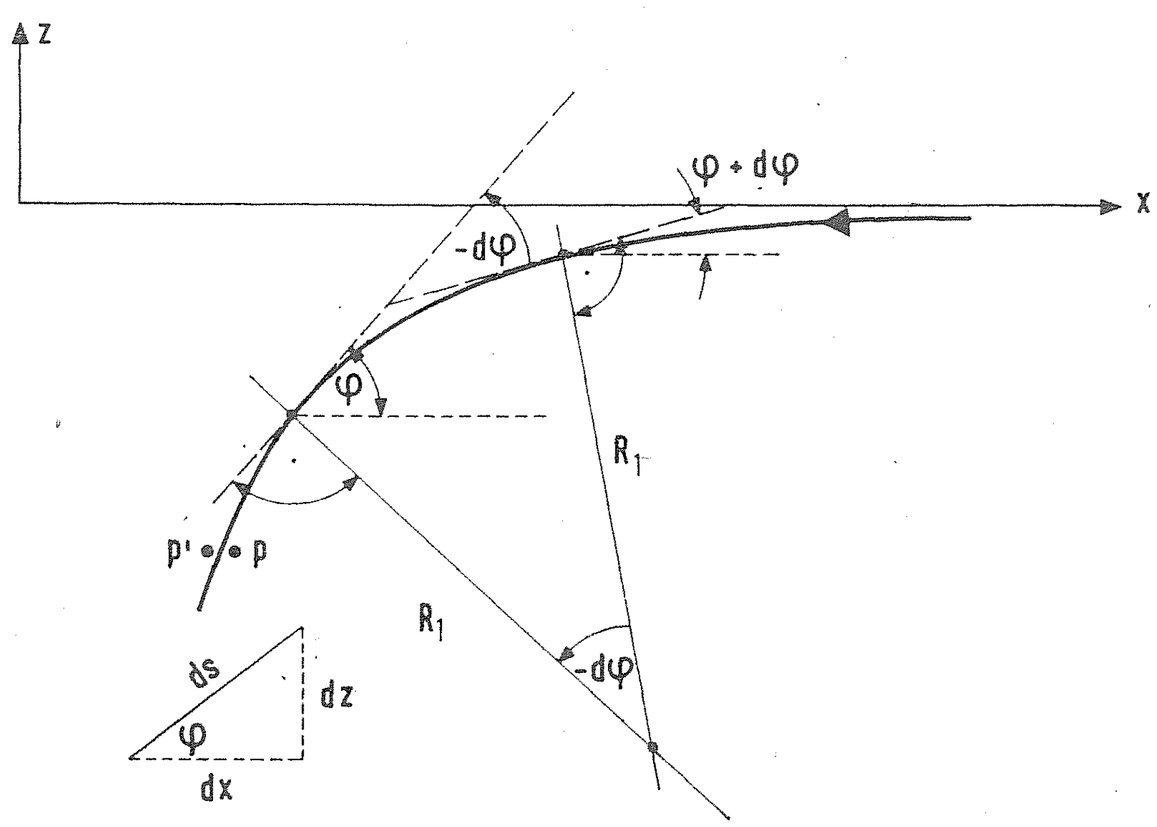
[7] International Far Infrared and Interferometry Meeting (Geneva, Oct. 1968).

PLAVAJOČA IGLA

Naloge s površinsko napetostjo, pri katerih je treba določiti oblike gladine, so pretežavne, da bi jih delali pri računskih vajah iz fizike I. Izčrpneje obravnavajo take naloge učbeniki teoretične fizike.[1] Nekatere izmed nalog, pri katerih nastopata samo dve razsežnosti, pa je mogoče napraviti tako, da lahko študenti prvega letnika sledijo računanju.* Kot zgled obdelajmo iglo, ki plava na gladini kapljevine! Kapljevina ima površinsko napetost γ. Igla je prevlečena s tanko plastjo parafina ali kake podobne snovi, ki je kapljevina ne omoči. Gostota igle ϱ^* je večja kot gostota kapljevine ϱ.

Pri reševanju te naloge moramo poznati obliko gladine. Iglo obravnavamo kot zelo dolg valj z radijem r, tako da ni treba upoštevati razmer na krajiščih. Os z usmerimo navpično navzgor, os x pa položimo pravokotno na geometrijsko os igle v gladino kapljevine v veliki razdalji od sten posode in od igle. V vsaki točki tik pod gladino kapljevine se mora hidrostatični tlak $p = p' - \varrho\, gz$ ujemati s tlakom zaradi zakrivljenosti gladine $p = p' + \gamma/R_1$. Tu je p' zračni tlak, R_1 pa krivinski radij gladine.** Iz obeh enačb dobimo

$$-\varrho\, gz = \gamma/R_1 \tag{1}$$



Sl. 1. K izvajanju enačbe za obliko gladine

---

* Pobudo za ta sestavek so dala vprašanja študentov matematike in fizike iz prvega letnika, ki so v neki zbirki naleteli na nalogo z nepopolnimi podatki in s popolnoma zgrešeno rešitvijo.[3]

** Pot do te enačbe samo nakažemo. V okrogli kapljici z radijem R je tlak večji kot zunaj. Mislimo si kapljico prerezano na pol. Sila na polkroglo zaradi razlike tlakov $\pi R^2 (p - p')$ uravnovesi silo površinske napetosti po obsegu glavnega kroga $2\pi R \gamma$. Sledi $p - p' = 2\gamma/R$. Pri kaki drugi ploskvi moramo namesto tega vzeti $p - p' = \gamma (1/R_1 + 1/R_2)$ (*Laplaceov zakon*). R_1 in R_2 sta glavna krivinska radija ploskve, to je krivinska radija krivulj, ki nastaneta kot preseka ploskve in dveh med seboj pravokotnih ravnin. Ti ravnini vsebujeta pravokotnico na ploskev v izbrani točki in radija sta najmanjši in največji od vseh mogočih krivinskih radijev krivulj. V našem primeru gladina v smeri osi y ni ukrivljena. Krivulja, ki nastane kot presek ploskve in ustrezne ravnine, je premica. Zaradi tega je $1/R_2 = 0$. — Zaradi površinske napetosti je povečan tlak na *konkavni* strani ploskve.

Krivinski radij izračunamo iz enačbe $ds = R_1 . (-d\varphi)$ (sl. 1), v kateri je ds ločni element in $d\varphi$ ustrezni element središčnega kota. Pri tem je φ kot med tangento na krivuljo in osjo x. Lok s štejemo pozitivno v smeri od nemotene gladine proti igli, tako da je R_1 pozitiven. Iz trikotnika s stranicami ds, dx in dz dobimo enačbi $ds = dx/\cos\varphi$ in $ds = dz/\sin\varphi$, iz katerih sledi $1/R_1 = -d\varphi/ds = -\sin\varphi\, d\varphi/dz = -\cos\varphi\, d\varphi/dx$. To vstavimo v enačbo (1) in dobimo

$$4\, z'\, dz' = \sin\varphi\, d\varphi \qquad 4\, z'\, dx' = \cos\varphi\, d\varphi \tag{2}$$

Vpeljali smo $z' = z/a$ in $x' = x/a$. Pri tem je $a^2 = 4\,\gamma/\varrho g$. Pri vodi, ki ima pri navadni temperaturi površinsko napetost 0,072 N/m, je $a = 5{,}4$ mm. ($2^{-\frac{1}{2}}\, a = (\gamma/\varrho g)^{\frac{1}{2}}$ pogosto imenujejo *kapilarnostno konstanto.*)

Prve enačbe (1) ni težko integrirati: $-\cos\varphi + \text{konst} = 2\, z'^2$. Iz zahteve $z'(\varphi = 0) = 0$ sledi konst $= 1$ in dalje $z'^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) = \sin^2\frac{1}{2}\varphi$. V našem primeru mora biti z' za kot φ na intervalu $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ negativen:

$$z' = -\sin\tfrac{1}{2}\varphi \tag{3}$$

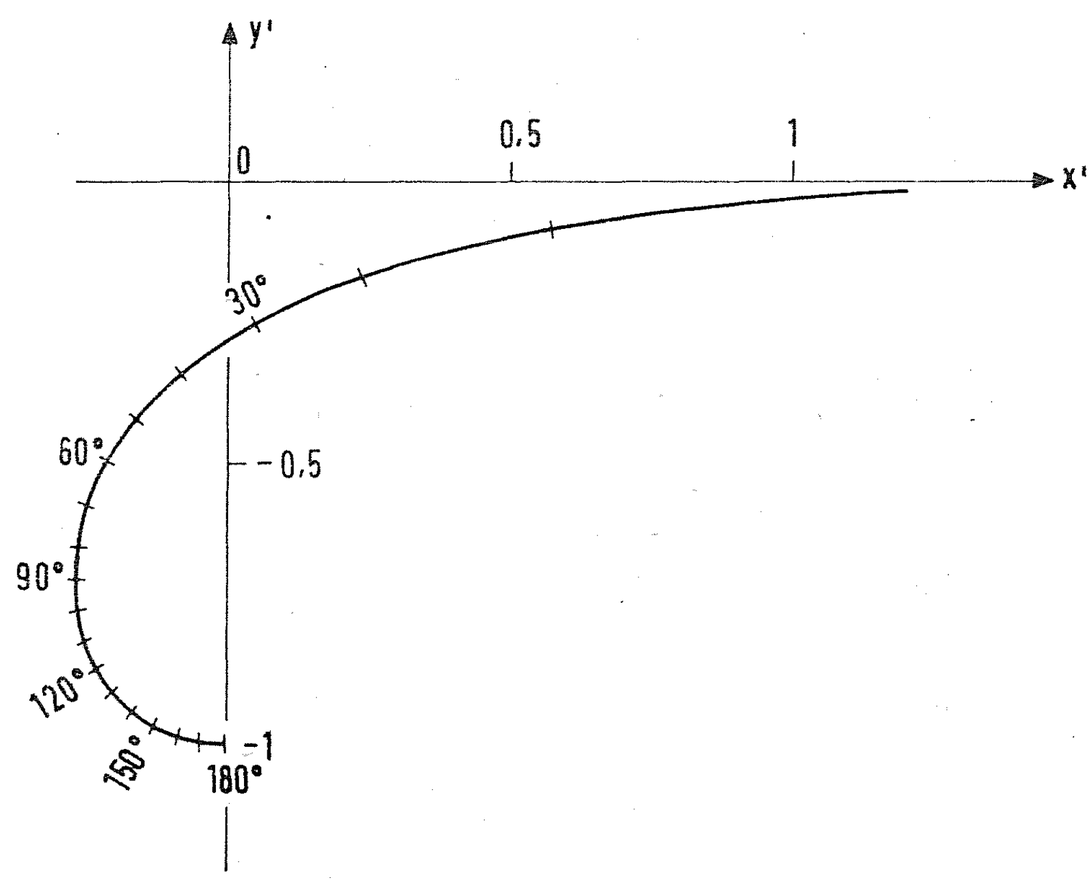
To vstavimo v drugo enačbo (2) in dobimo

$$dx' = \tfrac{1}{4}\cos\varphi\, d\varphi/\sin\tfrac{1}{2}\varphi = -\tfrac{1}{4}\, d\varphi/\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi$$

Te enačbe ni tako lahko integrirati. Z odvajanjem pa se prepričamo, da je

$$x' = -\tfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\varphi - \cos\tfrac{1}{2}\varphi + \text{konst} \tag{3'}$$

Konstanto izberemo za vsak primer posebej. Sl. 2 kaže krivuljo $y'(x')$ za konst $= 0$.



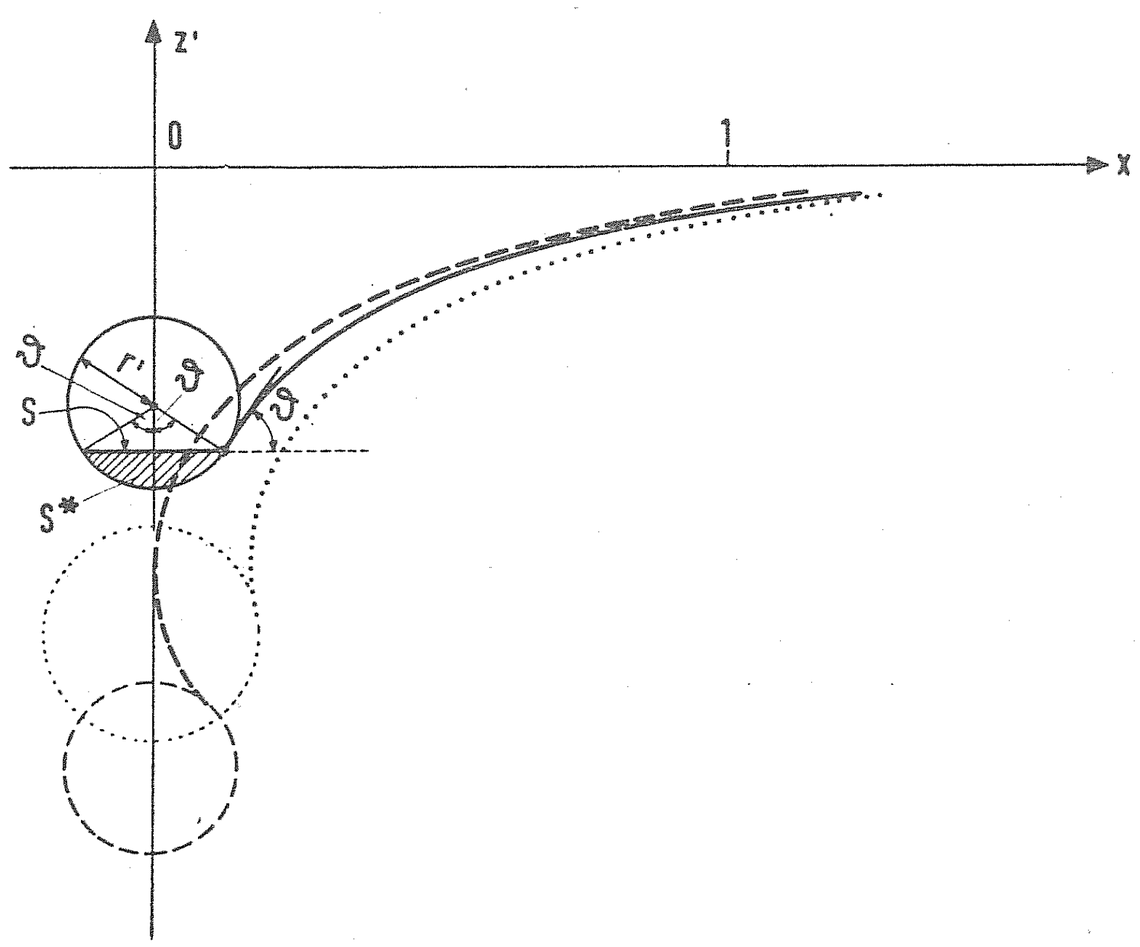
Sl. 2. Krivulja, ki določa obliko gladine

Po tem uvodu se lotimo plavajoče igle. Gladina kapljevine je v stični črti tangentna na plašč igle. Kot med tangento na gladino in vodoravnico (osjo x) v stični črti zaznamujemo s ϑ. To je največja vrednost, ki jo doseže kot φ. Os z' postavimo v geometrijsko os igle, tako da določata obliko gladine enačbi (3)

$$x' = \tfrac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\vartheta/\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\varphi) - \cos\tfrac{1}{2}\varphi + \cos\tfrac{1}{2}\vartheta + r'\sin\vartheta \qquad y' = -\sin\tfrac{1}{2}\varphi \tag{4}$$

Pri tem smo vpeljali $r' = r/a$.

Upoštevamo navpične komponente vseh sil, ki delujejo na iglo. Na iglo z dolžino l delujeta teža $\varrho^* l \pi r^2 g$ in sila površinske napetosti v obeh stičnih črtah $2 \gamma l \sin \vartheta$. Preostalo silo kapljevine bi dobili, če bi integrirali navpično komponento sile zaradi hidrostatičnega tlaka po delu plašča pod stičnima črtama. Nevšečne integracije se znebimo, če si mislimo iglo med stičnima črtama prerezano z ozko vodoravno režo. Na dno zgornjega dela deluje sila zaradi hidrostatičnega tlaka $-\varrho g z(\vartheta) S$, na potopljeni spodnji del pa vzgon $\varrho S^* l g$. Pri tem je $S = 2 x(\vartheta) l = 2 l r \sin \vartheta$ površina zamišljenega preseka skozi stični črti in $S^* = \int z dx = r^2 \int \sin \varphi \, d \cos \varphi = r^2 (\vartheta - \frac{1}{2} \sin 2 \vartheta)$ prečni presek spodnjega dela igle (sl. 3).



Sl. 3. Plavajoča igla iz jekla na vodi. Pikčasto je narisana ravnovesna lega pri največjem možnem radiju $r = ar' = 5{,}4\,\text{mm} \,.\, 0{,}186 = 1{,}00\,\text{mm}$ in kotu $\vartheta = 104^0$. Črtkano je narisana ravnovesna lega igle z radijem $5{,}4\,\text{mm} \,.\, 0{,}154 = 0{,}83\,\text{mm}$ pri kotu $\vartheta = 139^0$, ko je igla pogreznjena najgloblje, sklenjeno pa druga ravnovesna lega pri tem radiju in pri kotu $\vartheta = 60^0$

V ravnovesju mora biti vsota vseh sil, od katerih deluje teža navzdol, vse druge pa navzgor, enaka nič:

$$-\pi r^2 \varrho^* g + 2 \gamma \sin \vartheta + 2 a r \varrho g \sin \vartheta \sin \tfrac{1}{2} \vartheta + \varrho g r^2 (\vartheta - \tfrac{1}{2} \sin 2 \vartheta) = 0$$

Enačbo smo že delili z l. Damo ji brezdimenzijsko obliko

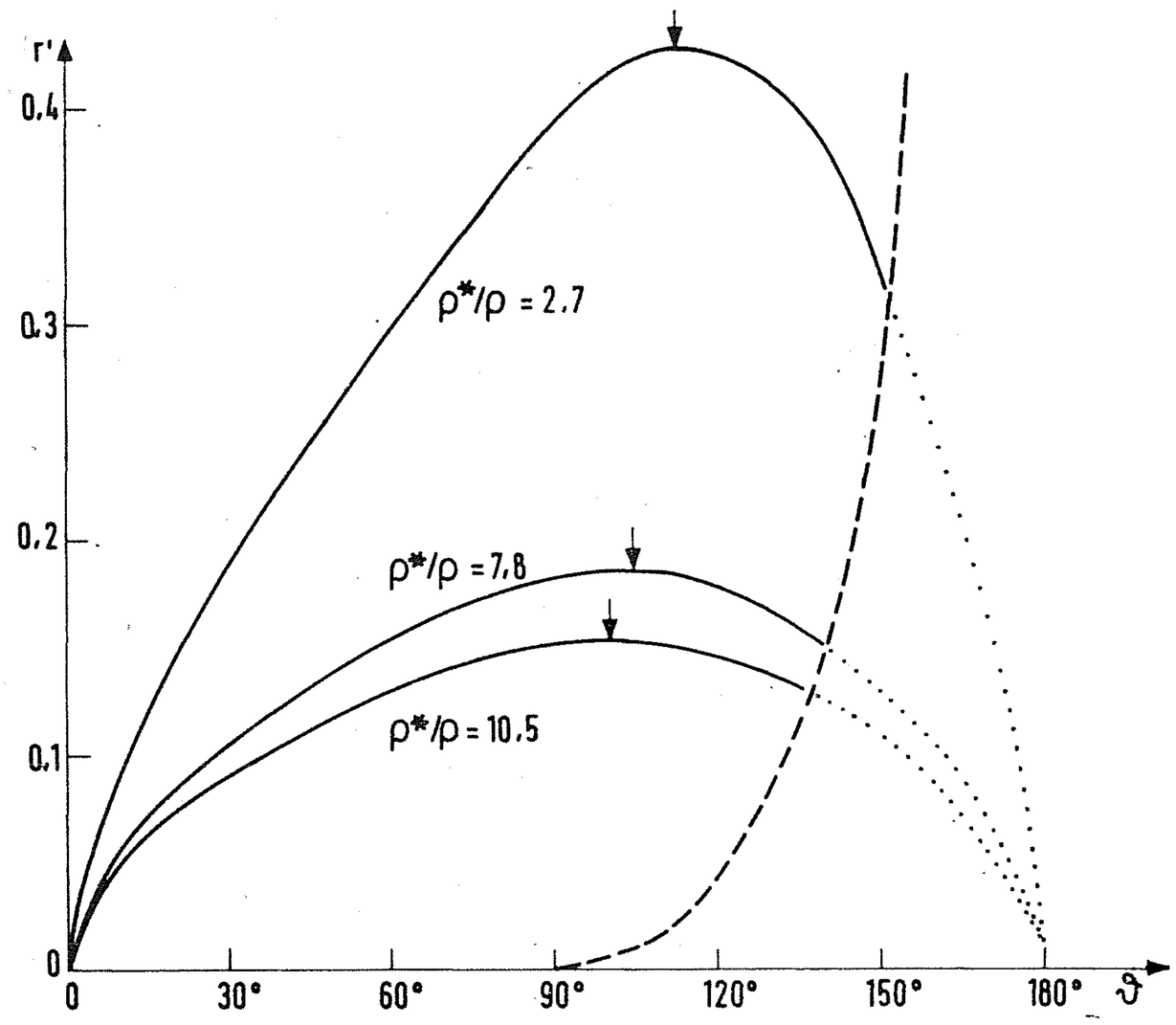
$$(\pi \varrho^*/\varrho + \tfrac{1}{2} \sin 2 \vartheta - \vartheta) r'^2 - 2 \sin \vartheta \sin \tfrac{1}{2} \vartheta \,.\, r' - \tfrac{1}{2} \sin \vartheta = 0$$

Koren te kvadratne enačbe je

$$r' = \{ \sin \vartheta \sin \tfrac{1}{2} \vartheta + [\tfrac{1}{2} \sin \vartheta (\pi \varrho^*/\varrho - \vartheta + \sin \vartheta)]^{\frac{1}{2}} \}/(\pi \varrho^*/\varrho - \vartheta + \tfrac{1}{2} \sin 2 \vartheta)$$

Koren je realen, ker je za $\varrho^*/\varrho > 1$ in $0 \leqq \vartheta < \pi$ vedno $\vartheta - \sin \vartheta < \pi \varrho^*/\varrho$. Upoštevati je treba samo koren s pozitivnim znakom, ker mora biti r' pozitiven in je pri navedenih zahtevah vedno tudi $\vartheta - \frac{1}{2} \sin 2 \vartheta < \pi \varrho^*/\varrho$.

Slika 4 kaže odvisnost $r'(\vartheta)$ za igle iz aluminija, jekla in srebra z gostotami $2{,}7\,\text{g/cm}^3$, $7{,}8\,\text{g/cm}^3$ in $10{,}5\,\text{g/cm}^3$ na vodi. S puščicami so zaznamovane največje vrednosti radijev. Oceno za pripadajoče kote dobimo iz $\sin \vartheta_0 = (1 + \varrho/\pi \varrho^*)^{-\frac{1}{2}}$, ki velja tem bolje, čim večji je kvocient $\pi \varrho^*/\varrho$. Natančen račun ekstrema bi bil predolgovezen.



Sl. 4. Radiji igel iz aluminija, jekla in srebra, ki plavajo na vodi v odvisnosti od kota ϑ. Črtkano je narisana mejna krivulja: če pri danem radiju kot ϑ preseže to mejo, se igla potopi, ker se nadnjo sestaneta leva in desna gladina kapljevine. S slike razberemo, da ustrezata izbranemu radiju okoli največjega možnega radija dve ravnovesni legi pri različnih kotih ϑ

V resnici kot ϑ ne more doseči vrednosti π. Že pri manjših vrednostih se namreč sestaneta nad iglo leva in desna gladina kapljevine in igla se potopi. Najmanjša razdalja med gladinama nad iglo je $2\,x'\,(\varphi = \frac{1}{2}\pi)$ za $\vartheta > \frac{1}{2}\pi$. Iz zahteve, da je v mejnem primeru ta razdalja enaka nič, sicer pa je večja kot nič, sledi

$$r' \geqq [1/\sqrt{2} - \cos\tfrac{1}{2}\vartheta - \ln(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{4}\vartheta/\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{8}\pi)]/\sin\vartheta$$

S to zahtevo dobimo mejno krivuljo, ki je narisana črtkano na sl. 4.

Na koncu omenimo, da določa krivulja na sl. 2 tudi obliko gladine (v prečnem preseku) zelo velike kaplje na vodoravni podlagi, ki je kapljevina ne omoči. Pri manjšem mejnem kotu od π se konča krivulja pri kotu ϑ, ki je ustrezno manjši od π. Na odseku $0 \leqq \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$ določa ta krivulja tudi gladino kapljevine ob ravni navpični steni, ki je kapljevina ne omoči in ki je daleč od drugih sten posode. Če je mejni kot manjši kot π se pač konča krivulja pri kotu ϑ, ki je ustrezno manjši od $\frac{1}{2}\pi$. Isti odsek krivulje določa tudi gladino ob navpični steni, ki jo kapljevina omoči. Le sliko si je treba misliti postavljeno na glavo. Pri večjem mejnem kotu od nič se pač konča krivulja pri kotu ϑ, ki je ustrezno manjši od $\frac{1}{2}\pi$.

J. Strnad

LITERATURA

[1] Na primer L. D. Landau, E. M. Lifšic: Gidrodinamika, Moskva (Fizmatgiz), 1953.

[2] V. L. Ginzburg, L. M. Levin, M. S. Rabinovič, D. V. Sivuhin, E. S. Četverikova: Sbornik zadač po obščem kursu fiziki, čast II, Moskva (Nauka) 1964, str. 131, 316.

[3] G. Dimić: Zbirka zadataka iz fizike, Beograd (Građevinska knjiga), 1965, str. 63, 288.

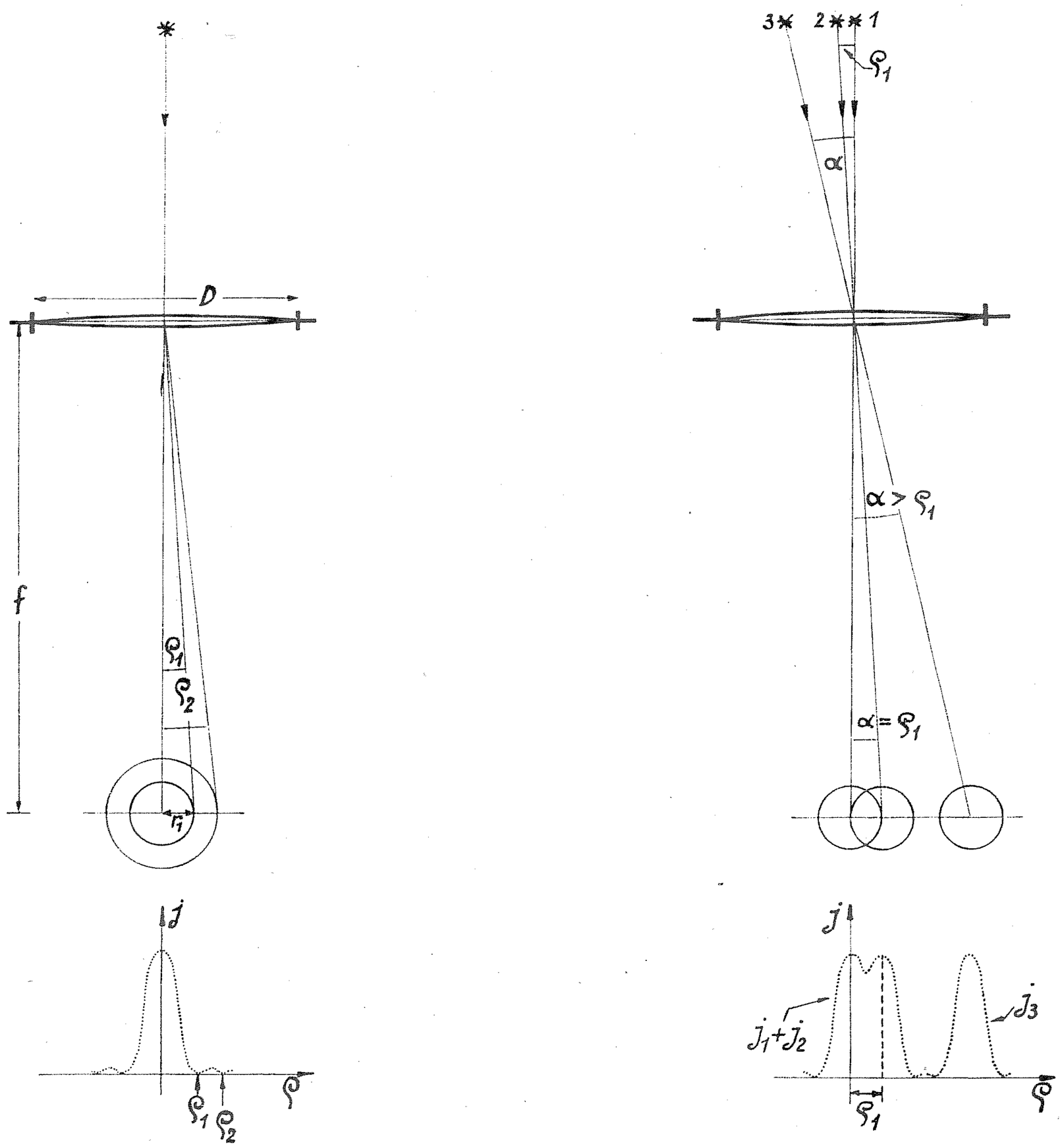
LOČLJIVOST IN ZMOGLJIVOST DALJNOGLEDA

Od predmeta prihaja svetloba v daljnogled skozi vstopno zenico (presek objektiva). Na okrogli vstopni zenici se svetloba uklanja. Zaradi uklona je slika točkastega svetila krožec, katerega premer zavisi od premera vstopne zenice in valovne dolžine svetlobe.

Točkasto svetilo* naj seva stalni tok enobarvne svetlobe z valovno dolžino λ. Zelo daleč od svetila je ovira s krožno odprtino, ki ima premer D. V odprtino namestimo idealni objektiv — lečo ali zrcalo z veliko goriščno razdaljo f. Svetloba pada pravokotno na odprtino, se na njej uklanja in delni curki iz posameznih delov odprtine interferirajo. Na zaslonu v goriščni ravnini objektiva opazujemo uklonsko sliko.

---

* Zaradi velike oddaljenosti smemo imeti zvezde za točkasta svetila.



Sl. 1. Levo: Uklonska slika zvezde je sestavljena iz svetlega krožca, tj. Airyjeve ploščice, ki jo obdajajo temni in svetli kolobarčki. Svetli kolobarčki hitro slabijo (razmerje med glavnim maksimumom in prvim stranskim maksimumom je okoli 1/0,017!) tako, da je v splošnem vidna le ploščica (Gl. še sl. 2!). Ploščica je narisana pretirano velika. Podan je tudi približni diagram za $j \propto [J_1 (\pi D \varrho/\lambda)/(\pi D \varrho/\lambda)]^2$ v goriščni ravnini objektiva za določeni D in λ. Desno: Če je $\alpha > \varrho_1$, vidimo dve ločeni ploščici. Zvezdi (1 in 3) dobro razločimo. Če je $\alpha < \varrho_1$, se ploščici tako prekrivata, da se zlijeta v eno. Vidimo eno samo sliko in zvezd ne ločimo. Zvezdi (1 in 2) še ločimo, ko je $\alpha = \varrho_1$

Z računom dobimo[1] odvisnost gostote svetlobnega toka na zaslonu od kota ϱ med optično osjo in smerjo proti izbrani točki na zaslonu:

$$j \propto [J_1 (\pi D \sin \varrho/\lambda)/(\pi D \sin \varrho/\lambda)]^2 \qquad (1)$$

Tu je J_1 Besslova funkcija prvega reda. Kot ϱ je zelo majhen, tako da smemo nadomestiti $\sin \varrho$ z ϱ.

Funkcija (1) je podobna funkciji $[\sin (\pi D \varrho/\lambda)/(\pi D \varrho/\lambda)]^2$, ki jo dobimo za gostoto svetlobnega toka v uklonski sliki za dolgo režo s širino D[2, 3]. Funkcija (1) ima glavni maksimum pri $\varrho = 0$. V središču je torej gostota svetlobnega toka največja. Pri večjih kotih ϱ pa gostota svetlobnega toka hitro pada. Prvi temni kolobar je pri kotu ϱ_1, za katerega velja $J_1 (\pi D \varrho_1/\lambda) = 0$. Funkcija J_1 (x) ima prvo ničlo pri $x_1 = 1{,}22\,\pi$. Iz tega sledi $\varrho_1 = 1{,}220\,\lambda/D$. Naslednji temni kolobarji (minimumi) so pri kotih $\varrho_2 = 2{,}233\,\lambda/D$, $\varrho_3 = 3{,}238\,\lambda/D$, $\varrho_4 = 4{,}241\,\lambda/D, \ldots$ Med temnimi kolobarji pa so svetli kolobarji (stranski maksimumi), ki hitro pojemajo z naraščajočim kotom ϱ. Na svetli srednji krožec — tako imenovano *Airyjevo*** *ploščico* — odpade okoli 90 odstotkov svetlobnega toka, ki ga prepusti objektiv. Praktično vidimo v daljnogledu le Airyjevo ploščico s kotnim polmerom $\varrho_1 = 1{,}22\,\lambda/D$. Polmer te ploščice v goriščni ravnini objektiva pa je $r_1 = \varrho_1 \,.\, f = 1{,}22\,\lambda/(D/f)$.

Ločljivost daljnogleda. Z daljnogledom s premerom objektiva D opazujmo dve enako svetli zvezdi, ki sta navidezno razmaknjeni za kot α! Središči obeh Airyjevih ploščic v goriščni ravnini objektiva sta med seboj razmaknjeni tudi za kot α. Zvezdi ločimo, če pade središče ploščice prve zvezde vsaj na rob ploščice druge zvezde, torej če je $\alpha \geqq \varrho_1$ (*Rayleighjev**** *kriterij*). *Ločljivost* torej definiramo kot najmanjši zorni kot med dvema točkastima svetiloma, ki ju daljnogled še loči:

$$\varrho_1 = 1{,}22\,\lambda/D \qquad (2)$$

Ločljivost daljnogleda je tem večja, čim večja je odprtina daljnogleda. Enačba (2) določa ločljivost v idealnih okoliščinah. Ne upošteva aberacij leč in zrcal v objektivu in ne pojavov v zemeljskem ozračju, kar vse močno zmanjša ločljivost.

Ločljivost (2) izrazimo v kotnih sekundah za svetlobo z valovno dolžino 5500 Å, za katero je oko najbolj občutljivo. Dobimo:

$$\varrho_1'' = k/D\,,$$

kjer je $k = 1{,}22 \,.\, 5500 \,.\, 10^{-8}$ cm $.\, (2{,}06 \,.\, 10^5)'' = 14''$ cm. Ločljivost Mt. Palomarskega reflektorja s premerom 5 m bi bila v idealnih okoliščinah okoli 0,″03. Z njim bi mogli ločiti zvezdi, ki sta na nebu razmaknjeni za 0,″03 in razločiti celo zorne kote nekaterih zvezd. Dejanska ločljivost pa je mnogo slabša.

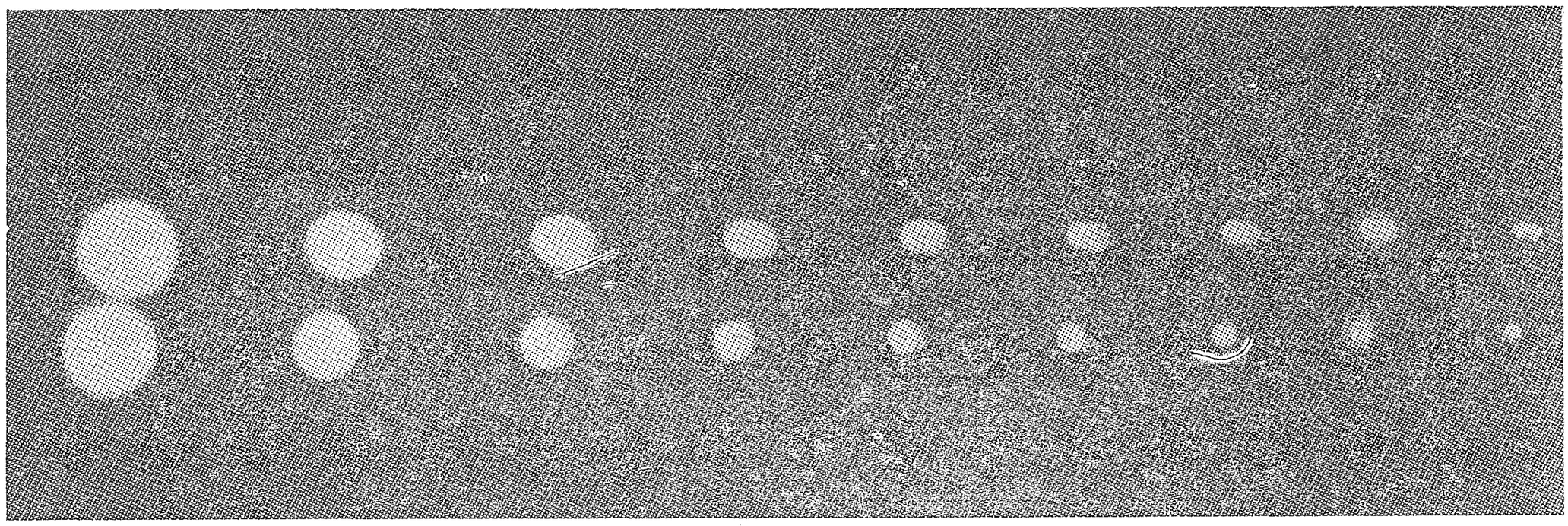
Zmogljivost daljnogleda. S prostim očesom moremo videti še zvezde z magnitudo $m = 6{,}5^m$. Z daljnogledom pa zaznamo mnogo šibkejše zvezde. Daljnogled ni pravzaprav nič drugega kot orjaška zenica. Čim večja je zenica, tem več svetlobnega toka prestreže. Razmerje med svetlobnima tokovoma, ki ju

---

** Sir George Biddel *Airy* (1801—92), kraljevi astronom in direktor greenwiške zvezdarne, se je ukvarjal tudi s fizikalno in geometrijsko optiko.

*** Lord John William Strutt *Rayleigh* (1842—1919) je deloval v mnogih področjih fizike. Izdelal je kriterije o ločljivosti optičnih instrumentov.

prestrežeta z iste zvezde daljnogled in oko, katerega zenica ima premer 0,6 cm, je $\pi (D/2)^2/\pi (0{,}6\ \mathrm{cm}/2)^2 = (D/0{,}6\ \mathrm{cm})^2$. Z daljnogledom, ki ima premer objektiva D, vidimo torej zvezde, ki so $(D/0{,}6\ \mathrm{cm})^2$-krat šibkejše od zvezd, še vidnih s prostim očesom. Z uporabo daljnogleda pridobimo $m_1 - m = \Delta m = 2{,}5 \log (D/0{,}6\ \mathrm{cm})^2$ zvezdnih magnitud. Z njim bi zaznali zvezde do magnitude $m_I = m + \Delta m = 6{,}5^m + 5 \log (D/0{,}6\ \mathrm{cm})$. Tu nismo upoštevali izgub svetlobnega toka v daljnogledu. Z daljnogledom, ki ima $D = 6$ cm, bi na primer pridobili 5^m glede na prosto oko. Videli bi še zvezde z magnitudo $m_1 = 6{,}5^m + 5^m = 11{,}5^m$. Toda pri opazovanju z daljnogledom se izgubi okoli 40 odstotkov



Sl. 2. Pri različno velikh odprtinah daljnogleda opazovana trojna zvezda. Čim večje so odprtine, tem manjše so slike zvezd, torej je večja ločljivost daljnogleda. Z daljnogledom majhne odprtine razločimo le dve zvezdi, daljnogled z veliko odprtino pa nam odkrije trojno zvezdo

svetlobnega toka. V idealnih okoliščinah je *mejna magnituda*, ki jo z daljnogledom zmoremo zaznati: $m_1 = 6{,}5^m + 2{,}5 \log (0{,}6\ D^2/0{,}6^2\ \mathrm{cm}^2)$, oziroma [4]

$$m_1 = 7{,}1^m + 5 \log (D/\mathrm{cm}) \qquad (3)$$

Z enačbo (3) je določena *zmogljivost daljnogleda*. Z njo hitro ocenimo, katero magnitudo še vidimo s kakim daljnogledom. Največji refraktor na svetu na observatoriju Yerkes ima $D = 1$ m in s tem zmogljivost $m_1 = 17{,}1^m$.

Marjan Prosén

LITERATURA

[1] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, London 1959, str. 394.

[2] J. Strnad, Uvod v fiziko, II. del. Katedra za fiziko, Ljubljana, 1968.

[3] R. Kladnik, Fizika, II. del, Univerza v Ljubljani, FAGG, 1966.

[4] D. Ja. Martynov, Kurs protičeskoj astrofiziki, Nauka, Moskva, 1967, str. 34.

IZ NAŠIH AKTIVOV

AKTIV MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV V LJUBLJANI

V aprilu in maju sta bila v Ljubljani dva sestanka aktiva matematikov, fizikov in astronomov.

Na sporedu sestanka dne 15. 4. 1970 je bilo 1. predavanje prof. dr. A. Moljka: »Sodobni eksperimentalni pouk fizike« ter 2. razprava v zvezi s tem.

1. Predavatelj je v svojem izvajanju najprej omenil izpopolnjevanje učiteljev, nato dosedanjo opremo in učila na naših šolah, nato pa pokazal, kakšna je sodobna oprema za eksperimentalni pouk fizike (projektorji, filmi, senzorji, ojačevalniki, oscilografi, beležni instrumenti, digitalne izvedbe instrumentov itd.). Pokazal je nekaj kratkih filmov (uklon na kristalni mreži, Dopplerjev efekt, sipanje, Brownovo gibanje, zrušenje mostu zaradi resonančnega nihanja) in laser, ki ga izdeluje naša ISKRA.

Potreben je v laboratoriju laborant in material za njegovo delo. Kot sodoben način je omenil tudi programirano učenje.

Zavzel se je za kontinuirano prilagajanje učnih načrtov dejanskemu stanju, ob sklepu pa je izrazil misel, da bi tudi univerza morala kaj več storiti za pouk na šolah.

2. V razpravi so se udeleženci strinjali z njegovimi izvajanji, bili pa so mnenja, da je potrebno bolje organizirati trgovino z učili, RIS naj bi dodeljevala šolam tudi devize za nakup učil in ustanovi naj se metodično-strokovna knjižnica, ki bi imela večino novih projektov za pouk fizike in podobno literaturo, normative za učila in laboratorije je potrebno spremeniti in dopolniti. Izvoljena je bila komisija za učila in laboratorije (Battestin, Ferbar, Kotnik, Kvaternik, Kregar, Modic, dr. Moljk, Plevnik, Zajc, Skulj), sklenili so predlagati upravnemu odboru društva, da bi se društvo moralo bolj zavzeti za izboljšanje položaja na šolah in za povečanje števila učiteljev fizike in matematike.

Udeleženci so predlagali za teme naslednjih sestankov:

1. Laser in maser.
2. Ogled laboratorija: Plazma.
3. Osnove kvantne fizike.
4. Vektorji v srednji šoli.

Na sporedu 2. sestanka dne 20. 5. 1970 pa je bilo:

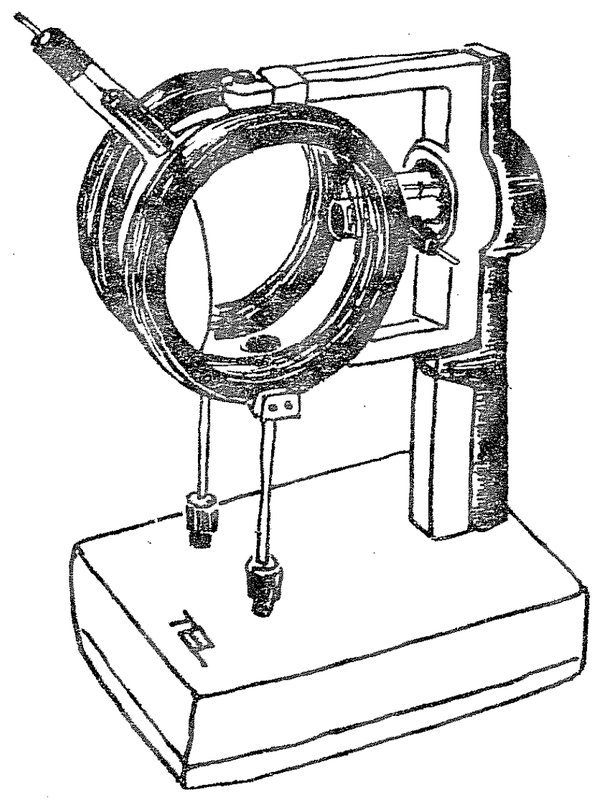
1. J. Ferbar: Učni film »Entropija, I. del«.
2. J. Ferbar-D. Dodic: Katodni žarki in njihove lastnosti, demonstracija učil za pouk elekronike firme TELTRON.
3. J. Ferbar: Nekaj poskusov s spiralo za valovanje (»slink«).
4. S. Uršič: Ob izidu delovnih zvezkov za vaje iz fizike za srednje šole.

1. J. Ferbar je demonstriral film »Entropija, I. del«, v katerem je uveden pojem entropija in pokazano, da sta makroskopska in mikroskopska definicija entropije identični. Film je uvod v pojem entropije.

2. Angleška firma Teltron je dala v preizkušnjo učila za pouk elektronike. Zbirka je sestavljena iz usmernika za nizko napetost, usmernika za napetosti do 500 V, usmernika za napetosti do 6 kV, stojala za elektronke, v katerega se lahko montirajo dioda, trioda, cev z malteškim križem, Perrinova cev s Farada-

yevo kletko, cev z dvema curkoma elektronov, cev za uklon elektronov in še nekatere druge, ki pa niso bile demonstrirane, med njimi cev za merjenje e/m. V zbirko sodita tudi dve Helmholtzovi tuljavi in optična mrežica, s katero pokažemo uklonu elektronov analogni poskus.

Cevi so krogle s premerom 22,5 cm, pri dnu sta narejeni, tako kot običajno rišemo njuni shemi.



Z zbirko je možno pokazati nastanek katodnih žarkov in njihove lastnosti, model osciloskopa, meriti količnih e/m, videti uklon elektronov in še nekatere druge poskuse.

Kompletna zbirka stane 826 angl. funtov.

3. V Angliji je bila nabavljena tudi spirala s premerom kakih 8 cm, ki je, kot je J. Ferbar demonstriral navzočim, primerna za poskuse iz valovanja (transverzalni valovi, longitudinalni, odboj, sprememba faze pri odboju, stoječe valovanje) pa tudi za nekatere druge reči (npr. zakaj teče voda skozi natego). Spirale se dobijo v treh velikostih od 1 do 3 m (raztegnjene). Prednost pred spiralo, ki jo imajo na univerzi je v tem, da se ne da »zmešati«, ker so navoji ploski.

4. Ker sta izšla dva zvezka za vaje iz fizike (mehanika, kalorika, akustika, valovanje in optika), je S. Uršič, eden od avtorjev, razložil namen in vlogo takih zvezkov. Navzoči so se strinjali, da bodo zvezki koristni tam, kjer doslej niso delali vaj v večjem obsegu, da pa bo treba drugod, kjer vaje že dobro tečejo, dopolniti njihov izbor.

Sestanka dne 15. 4. se je udeležilo 42, sestanka dne 20. 5. pa 50 članov.

Dušan Modic

TEKMOVANJA

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letošnje republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike je bilo 24. aprila od 9. do 12. ure na Gimnaziji pedagoške smeri v Ljubljani. Udeležilo se ga je 175 srednješolcev iz 22 srednjih šol iz vse Slovenije, in sicer 61 prvošolcev, 27 drugošolcev, 38 tretješolcev in 49 četrtošolcev. Iz ljubljanskih gimnazij je bilo največ tekmovalcev: I. gimnazija Bežigrad 33, II. gimnazija 15, Gimnazija Šentvid 1, Gimnazija Poljane 12, VII. gimnazija Vič 3, gimnazija pedagoške smeri 6, TŠE 1. Iz drugih krajev pa Gimnazija Brežice 4, Gimnazija Celje 2, Gimnazija Idrija 4, Gimnazija Jesenice 8, Gimnazija Kamnik 3, Gimnazija Koper 22, Gimnazija Maribor Tabor 16, Gimnazija Kranj 5, GTŠ Maribor 1, Gimnazija Nova Gorica 14, Gimnazija Novo mesto 2, Gimnazija Piran 6, Gimnazija Ptuj 1, Gimnazija Škofja Loka 15 dijakov.

Komisija, ki so jo sestavljali univerzitetni in srednješolski profesorji: predsednik Ivan Vidav, Ivan Štalec, Ivan Pucelj, Milan Ziegler, Sonja Križanič, Vladimir Batagelj, Vladimir Pilgram in Andrej Kmet je pripravila za vsak razred po 4 naloge:

Naloge za prvi razred

1. Reši enačbo $|1 - |x|| = a$!

2. Naravna števila od 1 naprej so napisana drugo za drugim z leve na desno v desetiškem sistemu. Katera cifra je na 1970. mestu?

3. V pravokotnem trikotniku ABC (kot pri C je pravi kot) je CS težiščnica. Trikotniku CSB je včrtan krog, točka D je dotikališče tega kroga s stranico SB. Kolikšni so koti trikotnika ABC, je če SD = DB?

4. Naj bosta M in N razpolovišči nasprotnih stranic AB in CD konveksnega četverokotnika ABCD. Točka P je presečišče daljic MC in BN, točka Q pa presečišče daljic AN in IM. Dokaži: ploščina četverokotnika MPNQ je enaka vsoti ploščin trikotnikov AQD in BCP.

Naloge za drugi razred

1. Zapiši kvadratno enačbo, katere korena x_1 in x_2 ustrezata pogojema

$$(x_1 + x_2) + 3\,x_1\,x_2 = 5 \text{ in } a\,(x_1 + x_2) = x_1\,x_2 = 2\,a$$

(a) Za kateri a enačba ne obstaja?
(b) Pri katerem a ima enačba dvakratni koren? Kolikšen je koren?
(c) Za katere a sta korena realna?

2. Reši enačbo $xy - 5\,y - 2\,x = 13$ s celimi števili x in y!

3. V tristranični piramidi SABC je AC = BC, rob SC pa je pravokoten na ravnini ABC. Konstruiraj središče piramidi včrtane krogle, ako je AB = c, BC = a, CS = h. Izračunaj polmer te krogle, ako je $a = 13$, $c = 10$, $h = 9$!

4. V prostoru so dane štiri točke A, B, C, D. Določi ravnino, ki bo enako oddaljena od vseh 4 točk in bo imela A in C na eni, B in D pa na drugi strani. Kdaj bo vsaka ravnina nekega šopa skozi določeno premico zadoščala nalogi?

Naloge za tretji razred

1. Enačba $Ax^2 + 17\,xy + Cy^2 - 2\,x + Ey - 2 = 0$ predstavlja dvojico premic. Enačba ene od teh premic je $x + 5\,y - 1 = 0$. Kako se glasi enačba druge premice? Določi tudi koeficiente A, C in E!

2. Izračunaj

$$\left(-\frac{\sqrt[6]{243}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)^{15}\,!$$

(Tu sta korena $\sqrt[6]{243}$ in $\sqrt[3]{3}$ pozitivni števili.)

3. Izračunaj kot $x + 2\,y$, če je $\operatorname{tg} x = 1/7$ in $\sin y = 1/\sqrt{10}$. Pri tem sta x in y ostra kota.

4. Če velja med koti A, B, C trikotnika odnos

$$\frac{\cos C + 2\cos A}{\cos C + 2\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A},$$ potem je trikotnik

pravokoten ali enakokrak. Dokaži to!

Naloge za četrti razred

1. V katerem pravokotnem trikotniku z dano dolžino hipotenuze je razdalja med težiščem in središčem včrtanega kroga najmanjša? Izrazi to najmanjšo razdaljo z dolžino hipotenuze!

2. Pravilni desetkotnik je včrtan v krog s polmerom enote. Dokaži, da je produkt dolžin vseh stranic in vseh diagonal enak številu stotisoč!

3. Točke ravnine so razdeljene na tri ločene (disjunktne) množice točk A, B in C. Dokaži, da obstajata vsaj dve točki iz iste množice, ki imata dano razdaljo d!

4. V ravnini je danih $n \geqq 3$ točk s tole lastnostjo: za poljubne tri točke izmed njih obstajata dve, ki nista oddaljeni ena od druge za več kakor r. Dokaži, da obstajata dva kroga s polmerom r, ki vsebujeta vse te točke!

Člani komisije so naloge pregledali in ocenili ter določili vrstni red nagrajenih in pohvaljenih dijakov:

1. nagrada: Boris LAVRIČ, 1. razred, gimn. Kranj; Karel MARKELJ, 3. razred, gimn. Tabor, Maribor; Milan VODOPIVEC, 3. razred, I. gimn. Bežigrad, Ljubljana.

3. nagrada: Marko ROBNIK, 1. razred, gim. Tabor, Maribor; Martin KOPRIVEC, 2. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Tanja KLEPEJ, 3. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Igor MERVIČ, 3. razred, gimnazija Nova Gorica; Lojze ŠUC, 4. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Jurij STARE, 4. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Miran BAVČAR, 4. razred gim. Nova Gorica.

Pohvale: Anton JAGRIČ, 1. razred, gim. Celje; Zlatan MAGAJNA, 1. razred, gim. Koper; Mirjam BON, 1. razred, gim. Nova Gorica; Marko PETKOVŠEK, 1. razred, II. gim. Ljubljana; Andrej VOZLIČ, 1. razred, II. gim. Ljubljana; Vlasta KRIŽMAN, 1. razred, gim. Nova Gorica; Janez CERAR, 2. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Janka MEDVED, 2. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Andrej BRVAR, 3. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Marjan SAVIČ, 3. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Janez BRIŠKI, 3. razred, gim. Poljane, Ljubljana; Simon URBANČIČ, 3. razred, gim. Ptuj; Samo KUŠČER, 3. razred,

I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Sašo HADŽI, 3. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Boža MEZEK, 3. razred, gim. Škofja Loka; Darko ZORMAN, 3. razred, gim. Jesenice; Igor FAKIN, 4. razred, I. gim. Bežigrad, Ljubljana; Nada ŠPACAPAN, 4. razred, gim. Koper.

Najbolje so rešili naloge dijaki ljubljanske bežigrajske gimnazije, kar je pri republiških tekmovanjih že nekajletna tradicija. Po razredih so naloge najbolje reševali dijaki tretjih letnikov, najslabše pa dijaki drugih letnikov.

Komisija je za zvezno tekmovanje določila 3 dijake iz drugega letnika, 5 iz tretjega letnika in 4 iz četrtega letnika.

Stane Pirnat

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV V BEOGRADU

Letos je bilo zvezno tekmovanje v nedeljo, 17. maja. Tekmovali so dijaki drugega, tretjega in četrtega razreda srednjih šol. Sodelovalo je 18 dijakov drugega, 22 tretjega in 28 iz četrtega razreda. Dobili so po štiri naloge in štiri ure časa za reševanje. Naloge so bile te-le:

2. razred

1. Poišči tri kompleksna števila z absolutno vrednostjo 1, tako da sta njihova vsota in produkt enaka 1.

2. Diagonale konveksnega petkotnika ABCDE tvorijo konveksni petkotnik $A_1B_1C_1D_1E_1$ in petokrako zvezdo.

a) Poišči vsoto kotov petokrake zvezde z vrhovi v točkah ABCDE.

b) Če je petkotnik pravilen, poišči razmerje med površino tega petkotnika in petkotnika $A_1B_1C_1D_1E_1$!

3. Dan je kvadrat ABCD. Bodi P_1 katerakoli notranja točka daljice AB,
P_2 sečišče premic DP_1 in BC
P_3 sečišče premic AP_2 in CD
P_4 sečišče premic BP_3 in DA
P_5 sečišče premic CP_4 in AB.
Dalje konstruiramo točke $P_6, P_7, \ldots, P_{13}$ po tem postopku. Dokaži, da je $P_{13} \equiv P_1$!

4. Naj bodo $a, a_1, a_2, \ldots a_m$ cela števila in n naravno število. Dokaži,

a) da je število $a\,(a^{2n} - 1)$ deljivo s 6;

b) da je vsota $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ deljiva s 6, če in samo če je vsota $s' = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \ldots + a_m^{2n+1}$ deljiva s 6!

3. razred

1. Dana je elipsa $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$, ki jo poljubna premica p, vzporedna osi y seče v točkah M in N. Poišči geometrijsko mesto presečne točke P premic MA in NB in presečne točke Q premic MB in NA, kjer sta A $(-a, 0)$ in B $(a, 0)$ temeni elipse, ko se premica p giblje vzporedno z y osjo.

2. Naj bodo a, b, c stranice trikotnika in α, β, γ njegovi koti. Dokaži enakost

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cos\alpha + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cos\beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cos\gamma = 3.$$

3. V koordinatni ravnini $x0y$ je narisana celoštevilčna koordinatna mreža, odsek (p) premice v tej ravnini je definiran s predpisom

$$(p) \begin{cases} 7x - 3y - 5 = 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 100 \end{cases}$$

Kolikšno je število kvadratov te mreže, v katerih notranjosti leže točke odseka (p)?

4. Poišči geometrijsko mesto sredin daljic dane dolžine c, katerih krajišči se gibljeta po mimobežnih diagonalah gornje in spodnje osnovne ploskve kocke z robom a $(a < c < a\sqrt{2})$!

4. razred

1. Brez uporabe logaritemskih tablic ugotovi, katero število je večje:

$$\log_3 4 \text{ ali } \log_4 5!$$

2. Elemente aritmetičnega zaporedja

$$1,\ 1+2n,\ 1+4n, \ldots \qquad n \in N$$

grupiramo tako, da damo v prvo grupo prvi element, v drugo naslednjih $(1+n)$ členov, v tretjo naslednjih $(1+2n)$ in tako dalje. Dokaži, da je vsota členov v vsaki grupi enaka kubu števila členov v tej grupi!

3. Osnovna ploskev piramide je kvadrat, nagibni koti stranskih ploskev proti osnovni ploskvi so po vrsti v razmerju 1 : 2 : 4 : 2. Poišči te kote!

4. Če je p praštevilo, dokaži da je število

$$N = \frac{(2p)!}{(p!)^2} - 2$$

deljivo s p^2.

Še isti dan popoldne je komisija pregledala in ocenila izdelke. Prvo nagrado je podelila dijakom, ki so zbrali vse možne točke. To so bili v četrtem razredu Božić Milan, Janković Vladimir, Cirić Ninoslav (vsi Mat. gimn. Beograd) in Josip Tumbas iz Subotice; v tretjem razredu Mirko Janc iz beograjske Matematične gimnazije; v drugem razredu nihče ni osvojil vseh točk, najboljši pa je bil Tadić Marko iz zagrebške Matematične gimnazije, ki je dobil drugo nagrado. Komisija je izbrala šest članov naše ekipe za Mednarodno matematično olimpiado, ki bo letos v Budimpešti, in sicer prvih pet iz četrtega razreda ter zmagovalca v tretjem. Glede ostalih dveh mest pa bo odločitev padla šele, ko bodo znani tudi rezultati tekmovanja iz fizike. Večina matematikov namreč sodeluje tudi na tem tekmovanju, obe mednarodni olimpiadi pa časovno skoraj sovpadata, tako da udeležba na obeh pravzaprav ni mogoča.

Od naših dijakov sta dosegla lep uspeh Janez Cerar (I. gimnazija Ljubljana) s tretjo nagrado v drugem razredu in Karel Markelj (gimnazija Maribor-Tabor) z drugo nagrado v tretjem razredu, ki je s tem postal tudi kandidat za eno od preostalih dveh mest v reprezentanci. V četrtem razredu so se vsi slovenski tekmovalci plasirali solidno tik za nagrajenimi s približno 50 % osvojenih točk.

Očitna je premoč Matematičnih gimnazij iz Beograda in Zagreba, kar je tudi razumljivo, saj imajo tam po 12 ur matematike tedensko. Morda ne bi bilo napak, ko bi začeli tudi pri nas razmišljati o tem, seveda pa bi bilo treba prej dobro preudariti vse težave in koristi, ki bi jih taka gimnazija prinesla. Zaenkrat imamo v Sloveniji samo matematični oddelek na I. gimnaziji in na Poljanah v Ljubljani, ki so pokazali že kar lepe rezultate.

Peter Petek

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

Letos je bilo že osmo republiško tekmovanje srednješolcev iz fizike. V četrtek, 7. maja popoldne se je zbralo na I. gimnaziji Bežigrad v Ljubljani 156 dijakinj in dijakov iz 16 srednjih šol, kar je za polovico več kot lansko leto. Tekmovalo je 56 drugošolcev, 47 tretješolcev in 53 četrtošolcev. Največ dijakov je bilo iz ljubljanskih gimnazij: I. gimnazija 34, II. gimnazija 15, gimnazija Moste 15, gimnazija Vič 1, gimnazija Poljane 25 dijakov. Iz ostalih krajev Slovenije: gimnazija Jesenice 5, gimnazija Koper 3, gimnazija Kranj 2, I. gimnazija Maribor 8, gimnazija Maribor-Tabor 14, gimnazija Nova Gorica 10,

gimnazija Novo mesto 14, gimnazija Ptuj 1, gimnazija Ravne na Koroškem 3, gimnazija Škofja Loka 5 in tehniška šola Jesenice 1. Tekmovalna komisija sedmih univerzitetnih in srednješolskih profesorjev, kateri je predsedoval prof. dr. Anton Moljk, je pripravila za vsak razred 4 naloge.

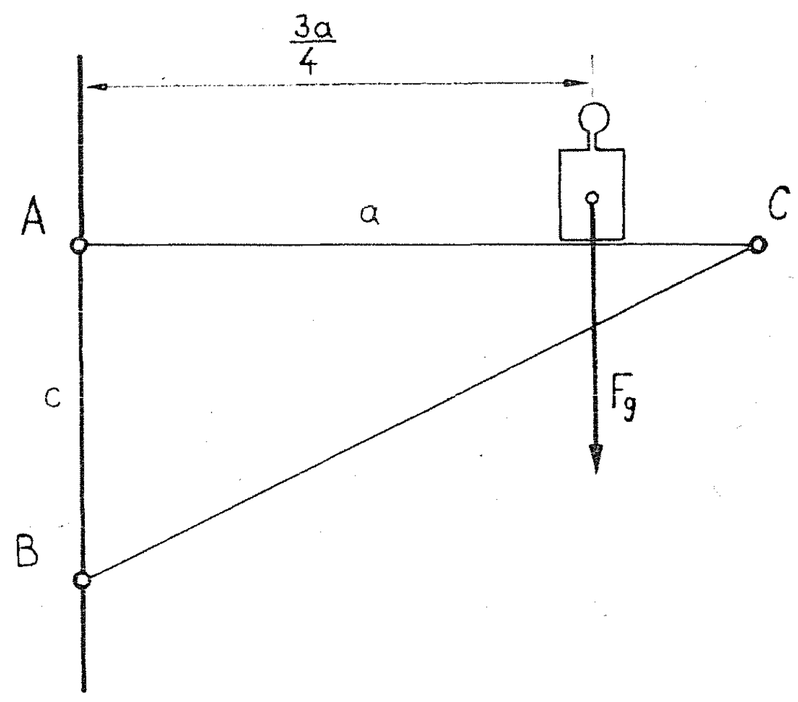
Naloge za drugi razred

1. V razpredelnici so podane hitrosti avtomobila ob določenih časih. Izračunaj poprečne pospeške in jih vnesi v razpredelnico ter nariši krivulji hitrosti in pospeška v odvisnosti od časa.

Razpredelnica

t [s]	v [km/h]
0	0
4,2	60
6,2	80
9,6	100
14,2	120
20,2	140
29,4	160

2. Na trikotni nosilec (zanemarljive teže), z vodoravno prečko dolžine a in višine c, postavimo utež za 10 kg v razdalji $3\,a/4$ od stene. Vodoravna prečka dolžine a nosilca je enaka dvojni višini c. Kolikšni sta sili v točkah A in B in kakšno smer imata? (Glej sliko 1.)



3. Valjast brus ima maso 4 kg in vztrajnostni moment 0,49 kgm^2 ter se vrti z 10 obrati na sekundo v puši s premerom 5 cm. Koliko obratov bo še napravil do tedaj, ko se bo ustavil, če ga nehamo poganjati in ga zavira le trenje v ležaju (puši) zaradi njegove teže pri tornem koeficientu 0,05?

4. Kolikšna stalna sila poganja 100 kilogramsko raketo navpično navzgor, da doseže v 5 sekundah hitrost 100 m/s? V kateri višini doseže raketa to hitrost? ($g = 10$ m/s^2)

Naloge za tretji razred

1. Lokomotiva se giblje s hitrostjo 72 km/h in piska 4 sekunde s frekvenco 300 Hz. Koliko časa sprejema ta signal mirujoči opazovalec ob ravni progi in katero frekvenco sliši, če se mu lokomotiva približuje? Temperatura zraka je 17° C.

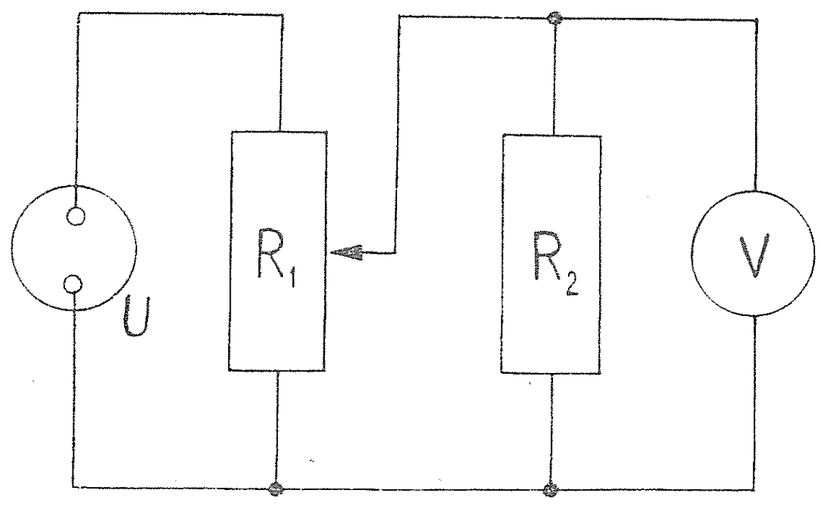
2. Izračunaj spremembo frekvence osnovnega tona (180 Hz) 0,50 m dolge jeklene strune (gostota 7,8 kg/m^3, prožnostni modul 2.10^4 kp/mm^2, temperaturni koeficient dolžinskega raztezka 12.10^{-6} st^{-1}), če se temperatura zmanjša za 10 st, dolžina strune pa ostane nespremenjena. (Nasvet: začni z razliko kvadratov obeh frekvenc . . .)

3. Plin segrejemo pri stalnem tlaku za 1 st, pri tem se njegova prostornina zveča za 1/300 začetne prostornine. Pri katerih pogojih je to mogoče?

4. Predmet je 90 cm oddaljen od zaslona. Če vmes premikamo zbiralno lečo, dobimo na zaslonu ostro sliko pri dveh legah leče. Kolika je goriščna razdalja leče, če je višina slike pri eni legi 4-krat večja kot pri drugi.

Naloge za četrti razred

1. Na drsni upornik z uporom 1000 Ω je priključen akumulator z gonilno napetostjo 10 V. Med drsnik, ki je na sredi drsnega upornika, in enega izmed priključkov akumulatorja je priključen drugi upornik z uporom 500 Ω. Koliko voltov kaže voltmeter (z zelo velikim uporom), ko pomerimo z njim napetost na drugem uporniku? (Glej sliko.)



2. Tri nepremična majhna telesa so v vodoravni črti razporejena v razmikih po 1 cm in imajo naboje (z leve proti desni) $+10^{-7}$ As, -2.10^{-7} As, $+10^{-7}$ As. V razdalji 2 cm pod srednjim telesom miruje četrto telo z nabojem $+2.10^{-7}$ As. Kolikšna je masa četrtega telesa?

3. Kvadraten okvir iz aluminijeve žice damo med pola močnega magneta tako, da je vrhnja stranica okvira v polju pravokotno na vodoravnih silnicah, spodnja pa izven njega. Ko okvir spustimo, kmalu doseže stalno hitrost. Kolikšna je ta hitrost pri gostoti magnetnega polja 1 Vs/m^2? Gostota aluminija je 2,7 g/cm^3, specifični upor pa 0,030 $\Omega\, mm^2/m$.

4. Ploščati kondenzator, na katerem je napetost 0,5 V, ima vodoravni plošči v razmiku 5 cm. S spodnje pozitivne plošče izbijemo elektron, tako da ima navpično navzgor hitrost 10^6 m/s. Po kolikšnem času pade elektron nazaj na ploščo, če je med ploščama vakuum? Naboj elektrona je $1{,}6.10^{-19}$ As, masa pa $9{,}1.10^{-31}$ kg.

Komisija je po končanem tekmovanju pregledala in ocenila izdelke dijakov ter sklenila, da dobe nagrade in pohvale naslednji dijaki:

Prvo nagrado: Gorazd Lešnjak, I. gimn. Maribor, 2. razred; Matjaž Prijatelj, gimn. Nova Gorica, 3. razred; Miran Bavčar, gimn. Nova Gorica, 4. razred; Milan Brumen, gimn. Maribor-Tabor, 4. razred; Karel Kapš, gimn. Novo mesto, 4. razred; Pavle Knaflič, I. gimn. Ljubljana, 4. razred; Olga Loštrek, I. gimn. Ljubljana, 4. razred; Brane Solomun, I. gimn. Ljubljana, 4. razred; Jurij Stare, I. gimn. Ljubljana, 4. razred.

Drugo nagrado: Zvone Škofič, gimn. Poljane, Ljubljana, 2. razred; Dušan Gorjup, gimn. Nova Gorica, 2. razred; Jelka Urbančič, gimn. Poljane, Ljubljana, 2. razred; Aleš Založnik, I. gimn. Maribor, 2. razred; Mirko Dobovišek, II. gimn. Ljubljana, 4. razred; Janko Polanec, II. gimn. Ljubljana, 4. razred.

Tretjo nagrado: Janez Križan, teh. sred. šola, Jesenice, 2. razred; Ljubomir Polanc, gimn. Nova Gorica, 2. razred; Leopold Gorjup, gimn. Nova Gorica, 3. razred; Milan Vodopivec, I. gimn. Ljubljana, 3. razred; Mojca Dvoršek, VI. gimn. Moste, Ljubljana, 3. razred; Franc Mihelčič, gimn. Poljane, Ljubljana, 3. razred; Tomaž Urlep, gimn. Poljane, Ljubljana, 3. razred; Matjaž Kodrič, gimn. Nova Gorica, 4. razred; Franc Sevšek, gimn. Poljane, Ljubljana, 4. razred; Matjaž Poljšak, gimn. Jesenice, 4. razred.

Pohvale: Janez Cerar, I. gimn. Ljubljana, 2. razred; Miloš Toni, VI. gimn. Moste, Ljubljana, 2. razred; Martin Koprivec, I. gimn. Ljubljana, 2. razred; Andrej Lobnik, VI. gimn. Moste, Ljubljana, 3. razred; Igor Merviš, gimn. Nova Gorica, 3. razred; Saša Hadži, I. gimn. Ljubljana, 3. razred; Riko Jerman, I. gimn. Ljubljana, 3. razred; Gorazd Lakovič, gimn. Poljane, Ljubljana, 4. razred; Darij Ban, gimn. Nova Gorica, 4. razred; Milan Kutnjak, gimn. Maribor-Tabor; Jure Špiler, II. gimn. Ljubljana, 4. razred; Milorad Dušič, gimn. Poljane, Ljubljana, 4. razred.

Najuspešnejši so bili četrtošolci, sedem jih je izdelalo naloge brez napake. Največ nagrad in pohval so dobili dijaki I. gimnazije v Ljubljani in gimnazije v Novi Gorici. Komisija je izbrala devet najboljših dijakov v slovensko ekipo za zvezno tekmovanje mladih fizikov.

Tomaž Skulj

VI. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV V BEOGRADU

Komisija za republiško tekmovanje srednješolcev iz fizike je sestavila za zvezno tekmovanje devetčlansko ekipo:

Gorazd Lešnjak, I. gimnazija Maribor, 2. razred,
Matjaž Prijatelj, gimnazija Nova Gorica, 3. razred,
Leopold Gorjup, gimnazija Nova Gorica, 3. razred,
Miran Bavčar, gimnazija Nova Gorica, 4. razred,
Milan Brumen, II. gimnazija Maribor, 4. razred,
Karel Kapš, gimnazija Novo mesto, 4. razred,
Pavle Knaflič, I. gimnazija Ljubljana, 4. razred,
Olga Lošterk, I. gimnazija Ljubljana, 4. razred,
Brane Solomun, I. gimnazija Ljubljana, 4. razred.

Pred zveznim tekmovanjem so imeli dijaki slovenske ekipe v Ljubljani priprave pod vodstvom profesorja novomeške gimnazije Janeza Ferbarja, vodje slovenske ekipe na zveznem tekmovanju. Dijaki so imeli v petek, 22. maja dopoldne, priprave na VI. gimnaziji Moste, popoldne so si ogledali nuklearni inštitut Jožef Stefan, kjer so jih pogostili. Popoldne so se pripravljali v mali predavalnici oddelka za matematiko in fiziko FNT; priprave sta vodila asistent Marjan Gros in Janez Ferbar. Reševali so zahtevnejše naloge iz srednješolske fizike in naloge iz prejšnjih republiških in zveznih tekmovanj mladih fizikov. Dijaki, ki so prišli iz drugih krajev Slovenije, so prenočili v Ljubljani v avtocampu Ježica. Pred odhodom v Beograd so se z vodjem še enkrat sestali v soboto zjutraj in nato skupno odpotovali.

V nedeljo, 24. maja se je ob 9. uri na prirodno-matematični fakulteti v Beogradu pričelo tekmovanje. Na njem je sodelovalo 45 dijakov iz vseh šestih republik. (SR Srbija 19, SR Hrvaška 11, SR Slovenija 9, SR Makedonija 3, SR Črna gora 2, SR Bosna in Hercegovina 1 tekmovalec.) Tekmovali so v treh skupinah.

V skupini A (mehanika in toplota) je tekmovalo 11 dijakov.

V skupini B (elektrika in magnetizem) je tekmovalo 17 dijakov.

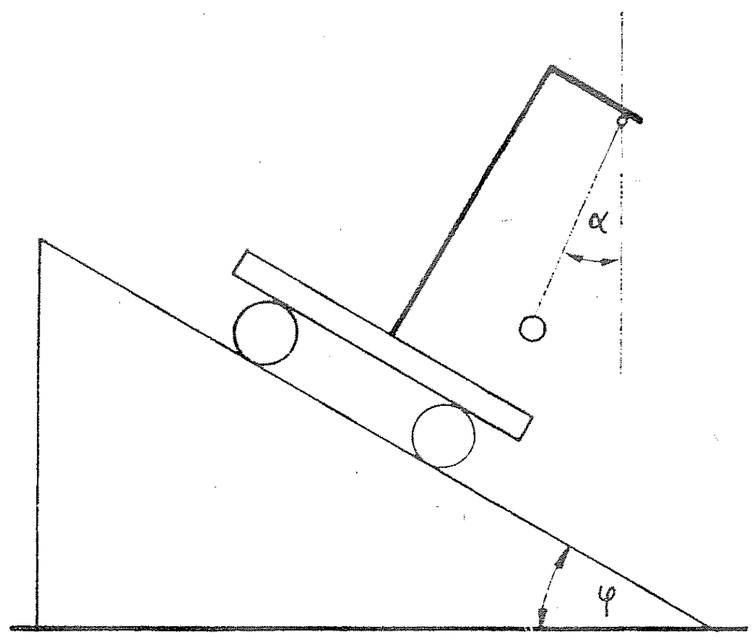
V skupini C (optika in atomistika) je tekmovalo 17 dijakov.

Prvi trije tekmovalci slovenske ekipe so tekmovali v skupini A, vsi ostali pa v skupini B.

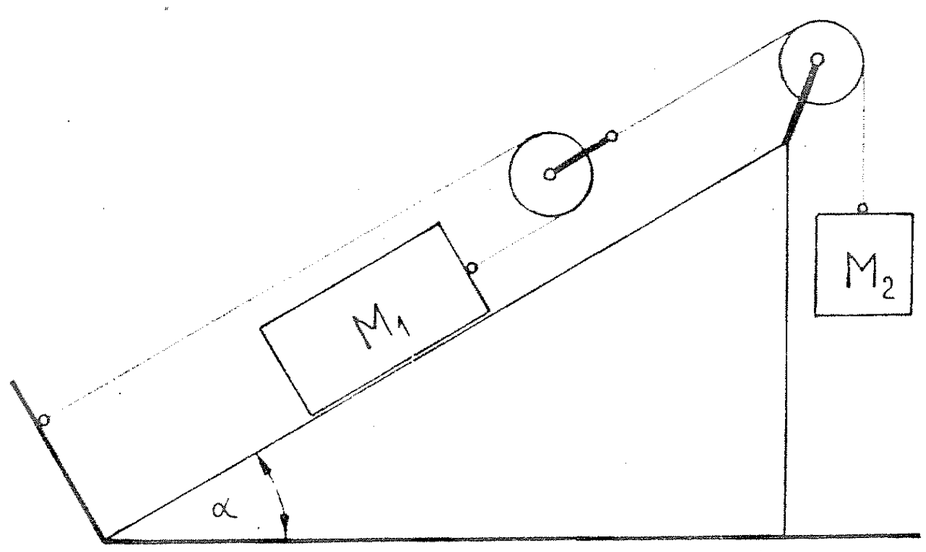
Zvezna komisija, katere predsednik je bil dr. Božidar Milić, je pripravila za vsako skupino 5 nalog.

Skupina A (mehanika in toplota)

1. Po klancu z naklonskim kotom φ se brez trenja pomika voziček, na katerem se nahaja matematično nihalo (glej sliko 1), obešeno na vrvici brez teže. Določi za kolikšen kot α se odkloni vrvica nihala od navpičnice in s kolikšno silo je napeta vrvica?



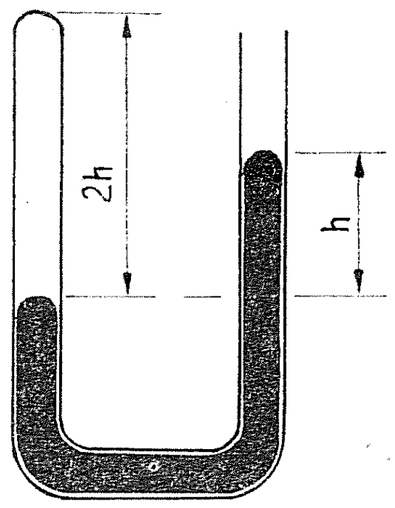
2. Telo z maso $M_1 = 400$ g drsi po klancu z naklonskim kotom $\alpha = 30^0$. To telo s sistemom škripcev (glej sliko 2) je povezano z drugim telesom mase $M_2 = 200$ g. Izračunaj pospešek telesa M_2 in sili, s katerima sta napeti vrvici? Trenje in masi škripcev zanemari.



3. Sila motorja avtomobila, težkega 500 kp naraste najprej linearno s časom: v 1 s od nič na 50 kp, potem pa ostane 1 s konstantna in naposled pade v 1 s linearno na nič. Avtomobil se giblje brez trenja po vodoravni cesti. Kolikšna bo njegova končna hitrost?

4. Posoda z volumnom $V_1 = 50$ l je spojena z drugo posodo z volumnom $V_2 = 15$ l s cevko, v kateri je ventil. Ventil je napravljen tako, da se odpre in spusti plin iz večje v manjšo posodo samo takrat, kadar je razlika tlakov 88 cm Hg. V začetku se v veliki posodi nahaja plin pri normalnem tlaku in temperaturi $t_1 = 17^0$ C. Kolikšen bo tlak v manjši posodi, če se cel sistem segreje do temperature $t_2 = 162^0$ C? V manjši posodi je vakuum.

5. Živosrebrni manometer ima obliko U-cevke, zaprte na enem koncu (glej sliko 3). Dolžina zračnega stebra v zaprtem kraku je $2h$, kadar je zunanji tlak p_0 in višina stebra živega srebra v odprtem kraku h. Določi, koliko pokaže manometer, če se začne gibati navpično navzgor s pospeškom $0{,}5\,g$ (g je težni pospešek). Temperatura in zunanji tlak se ne spremenita.



Skupina B (elektrika in magnetizem)

1. Kondenzator s kapaciteto $C_1 = 50\ \mu F$, ki je nabit z napetostjo 500 V priključimo na prazen kondenzator s kapaciteto $C_2 = 30\ \mu F$. Žica, s katero zvežemo kondenzatorja, ima maso 1 g. Za koliko se spremeni njena temperatura, če se vsa energija, ki se sprosti pri tem spoju, potroši za segrevanje žice? Specifična toplota bakra je 380 J/kg st.

2. V električnem krogu z upornikom $R = 5\ \Omega$ mora teči tok $I = 8$ A. Določi minimalno število akumulatorjev, ki so potrebni za to in način vezave. Gonilna napetost akumulatorja je $E_0 = 2$ V in notranji upor $r = 0{,}5\ \Omega$.

3. Ozek curek elektronov preleti v vakuumu skozi ravni ploščati kondenzator vzporedno z njegovima ploščama in pade na fluorescenčni zaslon, oddaljen $p = 15$ cm od konca kondenzatorja. Kondenzator je na začetku brez napetosti, potem pa nanj priključimo napetost 50 V. Zaradi tega se svetla točka na zaslonu premakne za $s = 21$ mm. Razdalja med ploščama kondenzatorja je $d = 18$ mm, in njegova dolžina $b = 6$ cm. Kolikšna je hitrost elektronov?

4. Trije neskončno dolgi ravni prevodniki so postavljeni vzporedno drug poleg drugega v isti ravnini in v enakih medsebojnih razdaljah $a = 3$ cm. Po dveh prevodnikih spustimo tok I, po tretjem pa $-2\,I$. Določi položaj premice, vzporedne s prevodniki, tako da je v točkah premice skupna gostota magnetnega polja $B = 0$, Razlikuj dva primera.

5. Dve vzporedni kovinski palici zanemarljivega upora tvorita klanec z naklonskim kotom Θ. Razdalja med njima je s; na podnožju sta palici ozemljeni. Po njih drsi brez trenja palica z maso m in uporom R. Cel sistem se nahaja v magnetnem polju gostote B z navpično navzgor usmerjenimi silnicami.

(a) Izračunaj hitrost, s katero se palica giblje, ko se vzpostavi ravnovesno stanje.

(b) Ali se rezultat spremeni, če so silnice magnetnega polja usmerjene vertikalno navzdol?

Skupina C (optika in atomistika)

1. Svetlobni izvor S, ki se nahaja v razdalji $L = 1$ m od zaslona, oddaja tenek snop svetlobe, ki pada pravokotno na zaslon v točki P. Na pot žarkov postavimo stekleno ploščo, debeline $d = 20$ cm in lomnega količnika $n = 1{,}5$ tako, da tvori smer svetlobnega žarka skozi ploščo s smerjo prvotnega svetlobnega žarka kot 30°.

a) Izračunajte premik PP' snopa svetlobe.

b) Izračunajte v odstotkih koliko več časa je treba, da pride svetloba v drugem primeru do zaslona.

2. Vzporeden snop bele svetlobe pada pravokotno na optično mrežico konstante $d = 0{,}1$ mm in na zaslonu, ki je oddaljen $L = 1$ m, dobimo spekter. Kolikšna je širina spektra prvega reda? (Vidna svetloba ima valovne dolžine v intervalu od 3600 do 7800 Å.)

3. S poskusom je ugotovljeno, da jasnost Newtonovih kolobarjev pri rumeni natrijevi svetlobi postaja vse manjša za večanjem vrstne številke kolobarja. Pri $N = 500$ se interferenčni maksimumi in minimumi ne morejo več jasno spoznati. Pri $N > 500$ postane interferenčna slika zopet jasnejša. Ta pojav si razlagamo s tem, da sta v natrijevem spektru dve zelo blizu stoječi črti. To natančneje pojasnite. Ena črta ima valovno dolžino 5890 Å. Kolikšna je valovna dolžina druge črte? Pri katerem vrstnem številu $N > 500$ bo interferenčna slika spet postala jasna?

4. V rentgenski cevi so elektroni pospešeni z napetostjo 150 kV. Izračunajte:

a) Valovno dolžino fotona, ki ima energijo enako kinetični energiji elektrona v cevi.

b) Energijo fotona, katerega valovna dolžina je enaka de-Broglijevi valovni dolžini elektrona.

5. Kolikšna je največja relativna sprememba energije fotona valovne dolžine 1 Å pri Comptonovem efektu?

Tekmovanje je bilo zaključeno ob 13,15.

Petčlanska komisija asistentov katedre fizike, prirodno-matematične fakultete je začela tedaj pregledovati izdelke. Zaradi proslave Dneva mladosti organizator ni mogel preskrbeti prenočišča za tekmovalce, in je zvezna komisija morala opraviti svoje delo še isti dan. Ko je komisija za pregled nalog opravila svoje delo, je zvezna komisija pregledala izdelke in potrdila tekmovalcem ocene. Nato je zvezna komisija odprla ovojnice s šiframi in sestavila vrstni red nagrajenih in pohvaljenih tekmovalcev.

Prva nagrada: Lazar Milin, matematična gimnazija Beograd, skupina B; Stjepan Meljanac, gimnazija S. Bertič, Osijek, skup. C; Antonije Djordjević, XIV. gimnazija Beograd, skup. C.

Druga nagrada: Marko Tadić, XV. gimnazija Zagreb, skup. A; Aleksandar Zavaljevski, matematična gimnazija Beograd, skup. B; Oliver Djurić, matematična gimnazija Beograd, skupina B.

Tretja nagrada: Branislav Sazdović, matematična gimnazija Beograd, skupina C; Branko Dolenc, tehniška šola, Varaždin, skupina C.

Pohvaljeni: trije v skupini A, sedem v skupini B, med njimi tudi dva slovenska tekmovalca:

Miran Bavčar, gimnazija Nova Gorica,
Pavle Knaflič, I. gimnazija Ljubljana
in v skupini C sedem pohvaljenih.

Miran Bavčar je bil v skupini B četrti, tako se je uvrstil med dvanajst kandidatov za olimpiado iz fizike v Moskvi, kamor odpotuje jugoslovanska šestčlanska ekipa.

Ob 20. uri so bili objavljeni rezultati, nagrajenim dijakom so bile izročene diplome in denarne nagrade. Po končani podelitvi se je slovenska ekipa vrnila z nočnim vlakom v Ljubljano.

Zaradi velikega števila udeležencev republiškega tekmovanja mladih fizikov in njihovega sorazmerno dobrega uspeha, smo letos pričakovali boljše uvrstitve naših dijakov na zveznem tekmovanju mladih fizikov. Uspehi dijakov na prejšnjih zveznih tekmovanjih kažejo, da dijaki iz naših gimnazij po znanju zaostajajo za dijaki matematičnih gimnazij iz Srbije in Hrvaške. To bi morda veljalo tudi za ostale tri republike. Vsekakor moramo biti pozorni na veliko število tekmovalcev na zveznem tekmovanju iz matematične gimnazije Beograd (16 dijakov) in iz matematične gimnazije Zagreb (7 tekmovalcev), skupaj 23 dijakov: tj. polovica vseh tekmovalcev letošnjega zveznega tekmovanja mladih fizikov. Od osmih nagrad so dijaki iz matematičnih gimnazij Beograd in Zagreb dobili pet in od sedemnajstih pohval — devet pohval.

Očitno je, da bi bilo treba posvetiti več pozornosti za matematiko in fiziko nadarjenim dijakom v srednjih šolah. Številna udeležba dijakov na republiškem tekmovanju mladih fizikov kaže povečano zanimanje za fiziko in tudi večjo skrb profesorjev pri usmerjanju mladih talentov. Zanimanje mladine za znanost in tehniko bi bilo treba razvijati še naprej ob še večji pomoči vseh, ki se zavedajo, da je znanje matematike, fizike in tehnike nadvse pomembno za naš razvoj in napredek.

Tomaž Skulj

KOLEDAR

MEDNARODNI STROKOVNI SESTANKI IZ FIZIKE

Avgust 1970

17—21: POLPREVODNIKI: Boston, Mass. USA
podrobnosti:
Semi-conductors commission
c/o Prof. E. W. J. Mitchell. secretary
J. J. Thompson Physical Laboratory
Whiteknights Park
Reading/Berkshire, England

17—21: KOTNE KORELACIJE V JEDRSKI FIZIKI, Delft Holandska
org.: Dr. B. van Nooijen,
Technische Hogeschool Delft
Dept. of experimental and nuclear physics
Berlageweg 15, Delft, Holland

17—29: JEDRSKA ZGRADBA: Herceg-novi (letna šola)
podrobnosti:
A. Kukoč, Institut Boris Kidrič Vinča, pošt. fah 522, Beograd

27—29: TRANSPORTNE LASTNOSTI TRDNIH SNOVI, Sydney, Australia
org: Dr. G. K. White
CSIRO-Division of physics
Sydney University Grounds
Chippendale, NSW 2008, Australia

31—4: POLARIZACIJSKI POJAVI PRI JEDRSKIH REAKCIJAH
podrobnosti:
Nuclear physics Commission c/o Prof. J.J Teillac, secretary Laboratoire Joliot-Curie, Faculté des sciencev d'Orsay
Orsay 91, France

31—4: FIZIKA PLAZME IN KONTROLIRANA FUZIJA, Rim
podrobnosti:
B. Brunelli, Laboratori Gas-Ionizzati, C. P. 65, I-00044 Frascati, Roma

September 1970

1—4: UPORABNE TRANSPORTNE TEORIJE, Oxford, Anglija
podrobnosti:
I. P. Grant, Science Research Council, Atlas Computer Lab., Chilton/Didcot, Anglija

1—5: MAGNETNE RESONANCE IN SORODNI POJAVI, Bucharest, Romunija
podrobnosti:
V. Lupei, Institut de Physique atomique, P.O.B. 35, Bucharest (Rumania)

4—10: FIZIKA NIZKIH TEMPERATUR, Kyoto, Japonska
org: T. Sugawara
Institute for solid state physics, University of Tokyo, 7-21-1 Roppingi, Minatoku, Tokyo, Japan

6—11: HIPERFINE INTERAKCIJE UGOTOVLJENE Z JEDRSKIM SEVANJEM, Rehovoth, Izrael
org: G. Goldring, Nuclear Physics Dept., Weizmann Institute of Science, Rehovoth, Israel

7—11: HADRONSKA SPEKTROSKOPIJA, Keszthely, Madžarska
org: Institute for theoretical physics, Pushkin Street 5, Budapest VIII, Hungary

7—12: GOSTOTA ELEKTRONSKEGA NABOJA IN SPIN, Aussois, Francija
org: Dr. E. F. Bertaut, Laboratoire d'Électrostatique et de Physique du Métal, Cedex No. 166, Grenoble — gare 38, France

11—17: VZGOJA UČITELJEV FIZIKE ZA SR. ŠOLE, Eger, Madžarska
org: Prof. E. Nagy,
Institute for Experimental Physics, Eötvös University, Muzeun Körüt 6—8, Budapest VIII, Madžarska

14—18: FIZIKA NEKRISTALNIH TRDNIN, Sheffield, Anglija
org: Dept. of glass technology
University of Sheffield
Northumberland Road
Sheffield S 102 TZ

14—19: V. Kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, Ohrid podrobnosti:
Dr. D. Dimitrovski, sekr.
Skopje, p. f. 162

14—19: MAGNETIZEM, Grenoble, Francija
org: Prof. L. Néel
Lab. d'Électrostatique et de Physique du Métal, Casier postal No. 166, Grenoble — gare 38, France

21—23: MAGNETNE TANKE PLASTI
org.: Prof. L. Valenta
Dept. of theoretical physics
Charles University,
Ke Karlou 3
Praha 2, ČSSR

28—30: METASTABILNE METALNE ZLITINE, Brela, Jugoslavija
org.: prof. M. Paič
Institut za fiziku sveučilišta, Bijenička c. 48,
Zagreb

Oktober 1970

5—10: NATANČNA MERJENJA IN OSNOVNE KONSTANTE, Geithersberg, Maryland, USA
org: Dr. L. M. Branscomb,
A-363 Physics Building
National Burear of Standards, Washington, D. C. 20234, USA

11—17: FIZIKA IN KEMIJA POLPREVODNIKOV, HETEROSTIKI IN PLASTNE STRUKTURE, Budapest, Madžarska
podrobnosti:
G. Gergely, Vice president of the org. Committee, P. O. B. 76, Budapest IV, Ujpest 1

19—24: STATISTIČNA MEHANIKA
org: Dr. E. Braun
Comision Nacional de Energia Nuclear, Av. Insurgentes Sur 1079, Apartedo Postal No. 27—190, Mexico 18 D. F.

NOVE KNJIGE

ZBIRKA NALOG IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE I., II. IN III. DEL

Vse tri zbirke je izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS v ciklostirani izdaji. I. in II. del sta izšla l. 1968, III. del pa v letu 1969. Avtor prvega in drugega dela je Ivan Štalec. Tretji del pa so sestavili: F. Avsec, A. Cokan, M. Potisek, I. Pucelj, B. Roblek, I. Štalec in M. Vagaja.

Zbirke nalog so napisane kot priloga k učbenikom dr. Križaniča: Aritmetika, algebra in analiza I., II. in III. Naloge se ujemajo z vsemi poglavji učbenika. Sestavljene so tako, da učenec ob njih utrjuje in ponavlja učno snov, hkrati pa razvija logično mišljenje. Vsi trije deli so opremljeni z rezultati nalog in z navodili za reševanje pri vseh zahtevnejših nalogah. Prav to slednje je učencu dobra pobuda, da se naloge loti znova, če rezultat ne ustreza. V vseh treh delih je tudi dovolj težjih nalog z zvezdico, posebej pa se s tem odlikuje III. del. Moje mnenje in mnenje mojih kolegov je, da so vse tri zbirke nalog zelo dobro dopolnilo k veljavnim učbenikom za srednjo šolo, posebej za gimnazijo. Želimo le, da zbirka kmalu izide v knjižni izdaji, da bo dostopna vsem učencem.

Marija Munda

NOVE KNJIGE V ZBIRKAH »KNJIŽNICA SIGMA« IN »MATEMATIKA«

Člane društva matematikov, fizikov in astronomov SRS obveščamo, da so v letošnjem letu izšle v omenjenih zbirkah štiri nove knjige. Le-te in še nekatere druge lahko dobite v matematični knjižnici, Ljubljana, Jadranska c. 19 (tel. št. 61-564) s popustom, ki so ga omogočili Mladinska knjiga (založnik) in naše društvo oz. Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko (izdajatelja).

Zap. štev.	»SIGMA«	cena v din malo-prodajna	za člane
3.	N. Prijatelj: Uvod v matematično logiko. (Ponatis) 1969. 152 str.	26,—	18,—
6.	O. Sajovic: Normalna aksonometrija. 1962. 264 str.	7,—	6,—
7.	F. Križanič: Vektorji, matrike, tenzorji. 1962. 264 str.	9,30	8,—
8.	Z. Bohte: Numerično reševanje enačb. 1964. 152 str.	5,60	5,—
13.	R. Jamnik: Teorija iger. 1966. 256 str.	8,—	7,—
15.	N. Prijatelj: Matematične strukture II. 1967. 310 str.	28,—	19,—
16.	J. Strnad: Kvantna fizika. 1969. 248 str.	29,—	19,—
19.	**J. Strnad: Relativnost. 1969. 261 str.**	**49,—**	**29,—**
18.	**I. Pucelj: Neevklidične geometrije. 1969. 246 str.**	**30,—**	**21,—**
19.	**F. Lebedinec in A. Vadnal: Funkcije II. 1970, 1944 str.**	**26,—**	**22,—**

V pripravi so še naslednje knjige:

S. Uršič: Logaritmi in druge tabele. (Ponatis)

A. Vadnal: Rešeni problemi linearnega programiranja.

M. Hribar: Zbirka rešenih fizikalnih nalog z republiških tekmovanj.

V. Batagelj in T. Pisanski: Zbirka rešenih matematičnih nalog z republiških tekmovanj.

N. Prijatelj: Matematične strukture III.

I. Kuščer: Termodinamika.

A. Vadnal: Funkcije (I.) (2. ponatis)

	»MATEMATIKA«		
I.	F. Križanič: Vektorska in tenzorska analiza. 1966. 367 str.	15,—	12,—
II.	**F. Križanič: Linearna algebra in linearna analiza. 1969. 395 str.**	**60,—**	**48,—**

V pripravi sta naslednji dve knjigi:

R. Jamnik: Verjetnostni račun.

I. Vidav: Algebra.

V matematični knjižnici lahko dobite tudi naslednje publikacije:

I. Vidav: Višja matematika. I. 3. izdaja. 1968. 395 str.	80,—	50,—
I. Vidav: Grupe v geometriji. 1970. 16 str.	—	brezplačno
Zbirka nalog iz aritmetike, algebre in analize za III. razred gimnazije. 1970. 220 str. (2. ponatis)	—	12,—
Zbirka nalog iz matematike za srednješolce. V. del. 1968. 50 str. (Skripta so namenjena dijakom, ki se pripravljajo na tekmovanja)	—	3,—

Ciril Velkovrh

UDELEŽENCEM V. KONGRESA DMFAJ V OHRIDU

Ker verjetno še niso vsi seznanjeni z delom kongresa in z vsemi možnostmi potovanja, navajamo nekatere podrobnosti, ki jih je izdal organizacijski odbor kongresa:

Glede na namestitvene možnosti Ohrida in glede na število in razpored razpoložljivih dvoran za delo sekcij je organizacijski odbor porazdelil udeležence po strokah in sekcijah, kar je vplivalo tudi na porazdelitev udeležencev po hotelih, ki se nahajajo v samem Ohridu in v turističnem naselju Sveti Stefan, 5 km od Ohrida. Med obema krajema bo ves čas kongresa redna avtobusna in ladijska zveza.

Potek kongresa:

13. IX. Prihod gostov in njihova namestitev. Razdelitev kongresnega materiala.
14. IX. Dopoldne slovesno odprtje kongresa. Popoldne delo po sekcijah.
15. IX. in 16. IX. delovna dneva kongresa.
17. IX. Dan za počitek, ogled mesta in izlete.
18. IX. Delovni dan kongresa.
19. IX. Skupščina Društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije.
Odhod za večino udeležencev je popoldne.

Ves čas kongresa bodo omogočeni obiski muzejev, starih cerkva in drugih kulturnozgodovinskih spomenikov in zanimivosti mesta, kakor tudi umetniških in folklornih prireditev. Pri prihodu in odhodu gostov je dana možnost za ogled Makedonije s krožno avtobusno vožnjo.

Kongres se bo odvijal po naslednjih glavnih sekcijah:

Matematika-algebra in logika
geometrija in topologija — uporabna matematika
analiza — metodika in zgodovina matematike

Fizika — jedrska fizika
fizika trdnega stanja — ostala področja fizike
fizika plazme — pouk fizike
optika
Astronomija

Podroben razpored sekcij in točen urnik kongresa, kakor tudi čas in kraj ekspozeja vsakega udeleženca bo natisnjen v posebnem programu dela V. kongresa, ki ga bodo udeleženci dobili ob prihodu.

Razen tega bodo ves čas kongresa organizirane
razstave knjig, učbenikov in učil,
obiski starih ohridskih cerkva. muzejev in zgodovinskih znamenitosti, ki jih bodo vodili posebni vodiči,
umetniške prireditve in
folklorne prireditve.

Da bi se udeležencem olajšal prihod in odhod iz Ohrida, so predvidene naslednje variante potovanja:

I. Za udeležence, ki potujejo s svojimi avtomobili

13. IX. 1970 Ohrid: Sprejem udeležencev v Ohridu in v turističnem naselju Sveti Stefan, v hotelu, kjer ima kdo rezervacijo. Gostiteljske usluge se začno z večerjo 13. IX. in končajo z obedom 19. IX.

II. Za udeležence, ki pridejo z vlakom do Bitole

13. IX. 1970 Bitola: Sprejem na železniški postaji in v agenciji PUTNIK. Namestitev v avtobusih po predhodnem razporedu. Odhod v Ohrid in namestitev v hotelih. Odhod 19. IX. po obedu proti Bitoli (prek Oteševa na Prespanskem jezeru). Cena avtobusa je 30 din po osebi.

III. Za udeležence, ki si pri prihodu in pri odhodu želijo ogledati Makedonijo

13. IX. 1970 Skopje: Sprejem na železniški postaji in v agenciji PUTNIK. Namestitev v avtobusih po predhodnem razporedu. Odhod proti Ohridu ob 9. uri. Med potjo obed (suha hrana). Prihod v Ohrid popoldne in namestitev v hotelih. Odhod iz Ohrida 19. IX. popoldne. Cena avtobusa je 88 din po osebi.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XVII. LETNIK — 2. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE
LJUBLJANA, JUNIJ 1970

VSEBINA

Članki — Stran

O aditivni teoriji števil (J. Grasselli) 49
Asimptotična ocena integralov (A. Suhadolc) 59
Jedna teorema o homolognim poljima tačaka (R. Živković) 63

Novici

Vpliv kemijske vezi na razpadni čas atomskih jeder (N. Mankoč) . . . 68
Fourierova spektroskopija (B. Peterman) 71

Šola

Plavajoča igla (J. Strnad) 75
Ločljivost in zmogljivost daljnogleda (M. Prosen) 79

Iz naših aktivov

Aktiv matematikov, fizikov in astronomov v Ljubljani (D. Modic) . . . 82

Tekmovanja

Republiško tekmovanje srednješolcev iz matematike (S. Pirnat) . . . 84
Zvezno tekmovanje mladih matematikov v Beogradu (P. Petek) . . . 86
Republiško tekmovanje mladih fizikov (T. Skulj) 87
VI. zvezno tekmovanje mladih fizikov v Beogradu (T. Skulj) 90

Koledar 94

Nove knjige 95

CONTENTS

Articles — Page

On the Additive Number Theory (J. Grasselli) 49
Asymptotic Estimate of Integrals (A. Suhadolc) 59
A Theorem on Homologous Domains of Points (R. Živković) 63

News

Influence of Chemical Binding on the Decay Time of Atomic Nuclei (N. Mankoč) 68
Fourier Transform Spectroscopy (B. Peterman) 71

School 75

From our Actives 82

Competitions 84

Calendar 94

New Books 95