

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1969  
tnik 16  
vilka 4

Izdaja društvo matematikov  
fizikov in astronomov SR Slovenije

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

---

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani

Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani

Avsec France, gimnazija Kranj

Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani

Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan« v Ljubljani

Garb France, gimnazija Ravne

Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani

Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani

Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije

Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

---

Izdaja društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujte na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din

za dijake 5 din

za ustanove in podjetja 20 din

za inozemstvo 25 din (2 \$)

posamezna številka 5 din

---

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.** Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

---

*Ob 50-letnici Slovenske univerze v Ljubljani  
1919—1969*



V okviru proslav ob petdesetletnici ljubljanske univerze sta bila odkrita spomenika prvemu rektorju prof. dr. Josipu Plemlju ter Juriju Vegi. Prvi kip, ki ga je izdelal akademik Boris Kalin, stoji pred glavnim poslopjem univerze, Trg revolucije 11, drugi pa v parku pred fakulteto za elektrotehniko, Tržaška cesta 25. Izdelal ga je kipar Ivan Zajec. Pri odkritju obeh spomenikov sta govorila prof. dr. Ivan Vidav oz. prof. ing. Albert Struna.

## *O življenju in delu prof. Josipa Plemlja\**

IVAN VIDAČ

Pred 50 leti matematika še ni imela tako pomembne vloge kakor danes. Vendar bi si tudi tedaj težko zamislili novo ustanovljeno ljubljansko univerzo brez nje. Na srečo smo imeli ljudi, ki so si že pridobili priznanje v znanstvenem svetu. Zato so lahko takoj organizirali študij matematike na tedanji filozofski fakulteti in so začeli s predavanji iz matematike na tehniški fakulteti. Že l. 1919 je bil ustanovljen matematični seminar. Njegovo vodstvo in s tem vzgojo slovenskih matematikov je prevzel prof. dr. Josip Plemlj, ki je bil eden izmed najvidnejših znanstvenikov mlade univerze.

Življenjska pot prof. Plemlja je bila v kratkem takale: Rojen je bil 11. decembra 1873 v vasi Grad na Bledu v kmečki družini. Oče mu je umrl zelo zgodaj. Po očetovi smrti je zavladala v družini gmotna stiska. Zato mali Joža sprva ni mogel misliti na šolanje, čeprav si je tega zelo želel. Srečno naključje je pripomoglo, da ga je mati lahko poslala v šolo v Ljubljano. S skromnimi prispevki od doma in s podporami dobrih ljudi se je preživljal do konca 4. gimnazije. Pozneje pa se je vzdrževal sam s poučevanjem svojih sošolcev. Od tedaj ni imel več materialnih težav pri študiju.

Vesetje za matematiko je dobil že v prvih razredih gimnazije. Kmalu je sam študiral snov za višje razrede, tako da je srednješolsko matematiko obvladal konec tretjega razreda. Kot četrtošolec je pomagal osmošolcem pri maturitetnih nalogah. Ni se pa odlikoval samo s sposobnostjo hitrega dojemanja, temveč je začel zelo zgodaj sam odkrivati nova dejstva v matematiki. Tako je že v nižji gimnaziji našel vrste za kotne funkcije. V petem razredu je že študiral višjo matematiko, ker se mu je tedaj posrečilo dobiti neki starinski učbenik o tem.

Posebno je bil spreten pri reševanju težkih konstrukcijskih nalog. Do takih nalog je imel veselje vse življenje in jim je iskal vedno nove rešitve. Iz gimnazijskih let izvira tudi njegova konstrukcija pravilnega sedmerokotnika, in sicer natančno, ne samo aproksimativno; to je enostavna rešitev s trisekcijo kota, ki je bila do tedaj neznana in ki nujno privede do stare babilonske oz. indijske konstrukcije. Objavil pa je svojo rešitev dosti pozneje (l. 1911). Ob neki priliki je izrazil mnenje, da bo morda to njegovo delo preživelo vsa njegova druga dela, ki so se gibala na meji tega, kar je bilo s tedanjimi pripomočki dosegljivega. Tiče se namreč vprašanja, ki izvira iz davnih časov, je dostopno preprostemu matematičnemu razumu in bo zato gotovo vedno zbuvalo nekaj zanimanja.

Po vsem tem je razumljivo, da si je pridobil že v gimnaziji velik sloves, tako med profesorji kakor med sošolci. V višji gimnaziji je bil njegov profesor matematike Vincenc Borštner. Takoj ga je spoznal in ga zelo cenil. Nikoli ga ni vprašal za red. Le če se nobenemu v razredu ni posrečilo rešiti kake naloge, se je obrnil k Plemlju in mu rekel, naj on reši nalogo.

---

\* Govor pri odkritju spomenika.

Po maturi l. 1894 je odšel na Dunaj, kjer je študiral matematiko in fiziko pri profesorjih Escherichu, Gegenbauerju, Boltzmannu in Weissu. Escherich je že pri prvem srečanju v seminarju odkril njegov izredni talent in ga določil za akademsko kariero. Omogočil mu je tudi študij s tem, da mu je preskrbel Knafljevo stipendijo. Prof. Plemelj je promoviral l. 1898 z disertacijo *Über lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffizienten*. Nadaljeval je študije najprej v Berlinu in nato še eno leto v Göttingenu pri slavnih matematikih F. Kleinu in D. Hilbertu.

L. 1902 je postal privatni docent na dunajski univerzi. L. 1907 pa je bil imenovan za izrednega profesorja na univerzi v Černovicah, naslednje leto pa za rednega profesorja prav tam. Univerza v Černovicah je imela misijo širiti slavo nemške kulture na vzhod. Profesor kot zaveden Slovenec si je seveda želel, da bi čim prej nehal delati v čast nemški znanosti. Sam pravi o tisti dobi takole: »Zadnja desetletja pred prvo svetovno vojno v stari monarhiji so bila karakterizirana z notranjimi boji med nemškim in drugimi narodi, pri prvem za nadvlado, pri drugih pa za enakopravnost. Zase se nisem mogel pritoževati, ker sem dosegel vse pravočasno. Bil sem v stiku s stanovskimi tovariši vsega sveta, moji kolegi iz Avstrije in Nemčije so me imeli čisto za svojega, čeprav so vedeli, da sem Slovenec. Če smo se menili o politiki, sem videl, da hočejo biti pravični, toda njihova vzgoja je bila taka, da niso mogli razumeti resničnega stanja. Mene pa je očitna krivičnost v stari državi tako razdvojila z državo samo, da sem, ko je Avstrija cinično izzvala svetovno vojno, z vsem srcem želel pogin te države.«

To stališče do stare monarhije mu je prineslo med prvo vojno veliko težav. Tedanja avstrijska policija ga je označila s P. V. in ga leta 1917 celo konfinirala na Moravskem. S posredovanjem dunajskih matematikov je bil pozneje premeščen na Dunaj, kjer je delal v nekem vojaškem inštitutu.

Po razsulu avstroogrške monarhije je bil najprej član univerzitetne komisije pri pokrajinski vladi v Ljubljani. Takoj ob ustanovitvi ljubljanske univerze je postal redni profesor za matematiko. Kot eden izmed najbolj uglednih naših znanstvenikov je bil izvoljen za prvega rektorja (1919/20). Na ljubljanski univerzi je delal nepretrgoma skoraj 40 let, do l. 1957, ko je prešel na Slovensko akademijo znanosti in umetnosti. Še nekaj let potem je honorarno predaval. Umrl je 22. maja 1967 v Ljubljani.

Glavna matematična področja, s katerimi se je ukvarjal prof. Plemelj, so teorija diferencialnih in integralnih enačb, teorija potenciala in funkcijska teorija.

Teorija integralskih enačb se je razvila prav v času, ko je študiral v Göttingenu. Göttingenska šola se je takoj lotila raziskovanja novega področja. Prof. Plemelj je bil eden od prvih, ki so tu dosegli lepe uspehe. Objavil je več razprav, ki so mu prinesla priznanje v matematičnem svetu. Uspešno je uporabil integral-ske enačbe v teoriji potenciala. Vrhunec njegovega dela na tem področju je monografija *Potentialtheoretische Untersuchungen*, ki je dobila nagrado znanstvenega društva kneza Jabloniowskega v Leipzigu.

Najlepši spomenik pa si je prof. Plemelj postavil z rešitvijo Riemannovega problema iz teorije diferencialnih enačb. S tem problemom so se matematiki ukvarjali 50 let. Šele l. 1905 se je posrečilo Hilbertu prevesti Riemannov problem na neko rešljivo integral-sko enačbo, ki pa je bila komplicirana in ni zagotavljala splošne rešitve. Prof. Plemelj je našel ključ do svoje rešitve v izreku

o robnih vrednostih regularne analitične funkcije. Enačbe, ki dajo robne vrednosti, so zdaj znane pod imenom Plemljeve formule.

Tehtni so prispevki prof. Plemlja v teoriji uniformizacije algebraičnih funkcij, kjer je izredno poenostavil dokaze za existenco uniformizirajočih spremenljivk. Nadalje je našel kvantitativno stran in najostrejšo formulacijo izreka o analitičnem raztegu slik. Pomembni so njegovi izsledki tudi v teoriji diferencialnih enačb Fuchsovega tipa, v teoriji Kleinovih teoremov itd. Med manjšimi prispevki pa je treba omeniti izredno lep dokaz Fermatove trditve za pete potence.

Ker so bila dela prof. Plemlja zelo pomembna in so nekatera postala osnova za nadaljnja raziskovanja, si je že pred prvo vojno pridobil razna priznanja in nagrade. Po vojni je postal l. 1923 dopisni član Jugoslovanske akademije v Zagrebu, l. 1930 Srpske akademije v Beogradu in l. 1954 Bavarske akademije v Münchnu. Član Slovenske akademije pa je bil od njene ustanovitve.

Vrnitev v domovino l. 1919 je pomenila velik preobrat v njegovem življenju. Povojne težave v stiku s svetom, strokovna osamljenost v majhnem mestu, kakor tudi drugi vzroki so povzročili, da je bil od tedaj le še učitelj matematike, manj pa ustvarjalec novega. Kljub neugodnim razmeram za delo doma pa je odklonil l. 1928 vabilo graške univerze, da prevzame tam stolico matematike.

Za razvoj matematike pri nas je bil njegov prihod v Ljubljano izrednega pomena. Vzgojil je več generacij matematikov. Vsi učitelji so njegovi učenci. Predaval je posebej za slušatelje matematike te predmete: teorijo analitičnih funkcij, diferencialne enačbe z variacijskim računom in algebro s teorijo števil. Za tehnike in matematike skupaj pa je predaval še predmeta matematika I in II.

Pred to vojno si skoraj nismo mogli misliti, da bi imeli kako knjigo iz višje matematike v našem jeziku. Tudi prof. Plemelj do 80. leta ni izdal ničesar v slovenščini, če izvezamemo dva članka, ki sta izšla v Radu Jugosl. Akad. l. 1923. Šele prvi kongres matematikov in fizikov, ki je bil l. 1949 na Bledu, mu je dal pobudo, da je napisal svoja predavanja. Tako so izšle pri Slovenski akademiji tri njegove knjige: Teorija analitičnih funkcij (1953), Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba (1960) in Algebra s teorijo števil (1962). Zadnje njegovo delo je izšlo l. 1964 in nosi naslov Problems in the Sense of Riemann and Klein. Knjiga, ki jo je prevedel v angleščino prof. J. R. M. Radok, obravnava tista področja, s katerimi se je profesor največ ukvarjal in največ prispeval za njihov razvoj: diferencialne in integralske enačbe, Riemannov problem in Kleinovi teoremi.

Mislim, da govorim v imenu vseh naših matematikov, ki smo bili nekoč učenci prof. Plemlja in smo ga imeli radi, ko izražam veliko zadovoljstvo, da je univerza ob petdesetletnici ustanovitve postavila spomenik človeku, ki je bil matematik velikega formata, prvi rektor naše univerze in skoraj 40 let njen profesor.

## *O življenju in delu Jurija Vege\**

ALBERT STRUNA

Zbrani pred spomenikom znamenitega slovenskega matematika Jurija Vege, izpolnjujemo že zelo staro in popravljamo zakasnelo obveznost, da bi tudi v Ljubljani imel spomenik mož, ki je med nami vreden najsvetlejšega spomina. Ta namen je bil večkrat ponovljen in še več je bilo v ta namen zavedno napisanega: saj je ob stopetdesetletnici Vegovega logaritmovnika (bilo je leta 1933) dr. Lavo Čermelj objavil obširno študijo, je leta 1954 ob dvestoletnici Vegovega rojstva Elektrotehniški vestnik objavil govor na svečani akademiji Društva matematikov in fizikov Slovenije, je to društvo v lanskem letu dalo pobudo za slovesno otvoritev na novo opremljene Vegove sobe v rojstni hiši v Zagorici pri Moravčah in je — toda ne nazadnje — Zveza inženirjev in tehnikov Slovenije privzela leta 1966 v Knjigo o naših znamenitih tehnikih (pravzaprav o znanstvenikih z realnih, predvsem pa tehničnih področij) sestavek o Vegovem življenju in delu, kakor ga je napisal učeni in najbolj poklicani znalec dr. Lavo Čermelj.

Toda od prvega predloga za spomenik v Ljubljani leta 1838, tj. pred dobrimi stotridesetimi leti, bi še vse ostalo pri starem, če bi za proslavo 50-letnice slovenske univerze ne prekinili s staro pravdo za »prostor in čas — kje in kdaj?« Ta je menda dokončno zaključena — vsaj glede časa.

Ne morem imeti namena, da bi opisoval Vegovo življenjsko pot, naj zadostuje samo ugotovitev, da je bila ena sama presunljiva zgodba trdega prizadevanja in nepopustljivega hotenja in da je na tej — žal prekratki poti — ponesel v svet glas o maloštevilnem toda bistrem slovenskem narodu. Jurij Vega je bil slovenske krvi, rojen v preprosti kmečki hiši kot sin polgruntarja Jerneja Vege — kakor že rečeno — v Zagorici pri Moravčah.

Dandanes se moramo spominjati njegovega imena z občudovanjem in spoštovanjem hkrati in ponašamo se lahko z bogato dediščino, ki jo je zapustil naši matematični znanosti — čeprav v tujem jeziku. Med našimi velikimi matematiki Jurijem Vego, Francem Močnikom in Francem Hočevarjem je bilo le četrtemu Josipu Plemlju dano, da je svoja klasična predavanja izdal v slovenskem jeziku. Vega je napisal matematična predavanja za takratne avstrijske vojaške šole, uvajal je moderno topniško balistiko, vrhunski dosežek pa so njegovi logaritmovniki. Bil je temeljit učenjak, težko pa je presoditi, ali ni bil obenem prav tako hraber vojak. Bil je oboje. Narava je v njem združila ukaželjnost, znanje, bojevitost in podjetnost v čudovito skladnost. Njegova dela iz matematične znanosti so postala svetovno znana, za vojaške vrline pred Beogradom, Mannheimom, Kehlom, Wiesbadnom in na Moravskem — ko je slednjič Avstrijo branil pred Nemci — je bil deležen najvišjih odlikovanj.

Največji poudarek pa naj bo namenjen zadoščenju, da imamo Vegov spomenik tudi v Ljubljani. Hkrati naj bo izrečena tudi želja, da bi ga nikdar ne

---

\* Govor pri odkritju spomenika.

zadela usoda spomenikov v Idriji in Moravčah. Idrijskega iz leta 1903, ki je stal pred realko, so leta 1932 odstranili italijanski fašisti. Toda mož, ki je dobil naročilo, naj oprsje razbije, tega ni storil. Skril ga je nekje v Furlaniji in ob petdesetletnici ustanovitve realke leta 1951 so ga postavili spet na nekdanji prostor. Moravškemu iz leta 1907 so v narodnoosvobodilni vojni izstrelki okrušili marmornati podstavek in tudi prsi so zadele štiri krogle. Popolnoma neprizadet mu je ostal spomenik na Luni, kjer je po njem imenovano krožno gorovje blizu Mare Australe in kjer so med najbližnjimi sosedi Steinheil, Fraunhofer, Watt in še drugi znameniti možje. Z zadoščenjem smo še ugotovili, da je Vegovo ime tudi na najnovejšem luninem atlantu, ki ga je letos izdal kartografski oddelek »National Geographic Society«. S tem je namreč spet potrjeno, da je zmoten govor o svetli zvezdi Vega v ozvezdju Lire, ker je ta Vega španskega izvora, namreč kot sinonim za »huerto«. To zmoto je v drugačni obliki ponovil dozdevni učenjak, ki je našemu Vega hotel naprtiti španski izvor, da celo po plemiški plati, ali pa ga je bodel baronovski stan, ki si ga je pridobil in ki bi ga ne bilo pripisati kmečkemu sinu.

Zato citiram še dr. Bratka Krefta z lanskoletne proslave v Zagorici, ko je dejal, da »zgodovina slovenskega naroda zgovorno priča, da v svetu kulture ne odloča večja ali manjša številnost nekega naroda, marveč da more maloštevilni narod roditi prav tako velike ljudi, kakor številčno močnejši in večji narodi. Svetu smo dali veliko več znamenitih mož, kakor se nam prizna...«

Čeprav si je Vega veliko večje spomenike z lastnimi deli postavil že sam, naj se ta, ki ga odkrivamo, pridruži k obema — ki že stojita — kot viden in neizbrisen znak hvaležnosti slovenskega naroda za zvestobo, ki jo je izkazoval vse življenje delu, poklicu in narodu.

Prosim dekana fakultete za elektrotehniko tov. dr. ing. Alberta Čebulja, da prevzame spomenik v varstvo.

# TOPLOTNA PREVODNOST DIELEKTRIČNIH KRISTALOV

R. PIRC

Inštitut »J. Stefan« in Univerza v Ljubljani

## 1. Uvod

Pri sobni temperaturi so dielektrični kristali večinoma slabi prevodniki toplote. Podatki iz tabele 1 pričajo, da je njihova toplotna prevodnost vsaj za eno velikostno stopnjo manjša od prevodnosti kovin. Izjema je le diamant, katerega nenavadno velika toplotna prevodnost prekaša celo prevodnost srebra in bakra. Pri nižjih temperaturah pa se razmere spremenijo. Toplotna prevodnost dielektričnega kristala se z ohlajevanjem naglo večja in doseže maksimum pri temperaturi nekaj deset stopinj Kelvina (sl. 1). V tem območju številni dielektriki prevajajo toploto bolje od kovin. Ko pa se s temperaturo približujemo absolutnemu ničlišču, se prevodnost dielektrikov zmanjšuje in pade končno na nič. Tako temperaturno odvisnost toplotne prevodnosti dielektričnih kristalov je možno pojasniti s kvantno teorijo trdnih snovi. Prav pri tej razlagi je dosegla kvantna teorija enega prvih in presenetljivih uspehov.

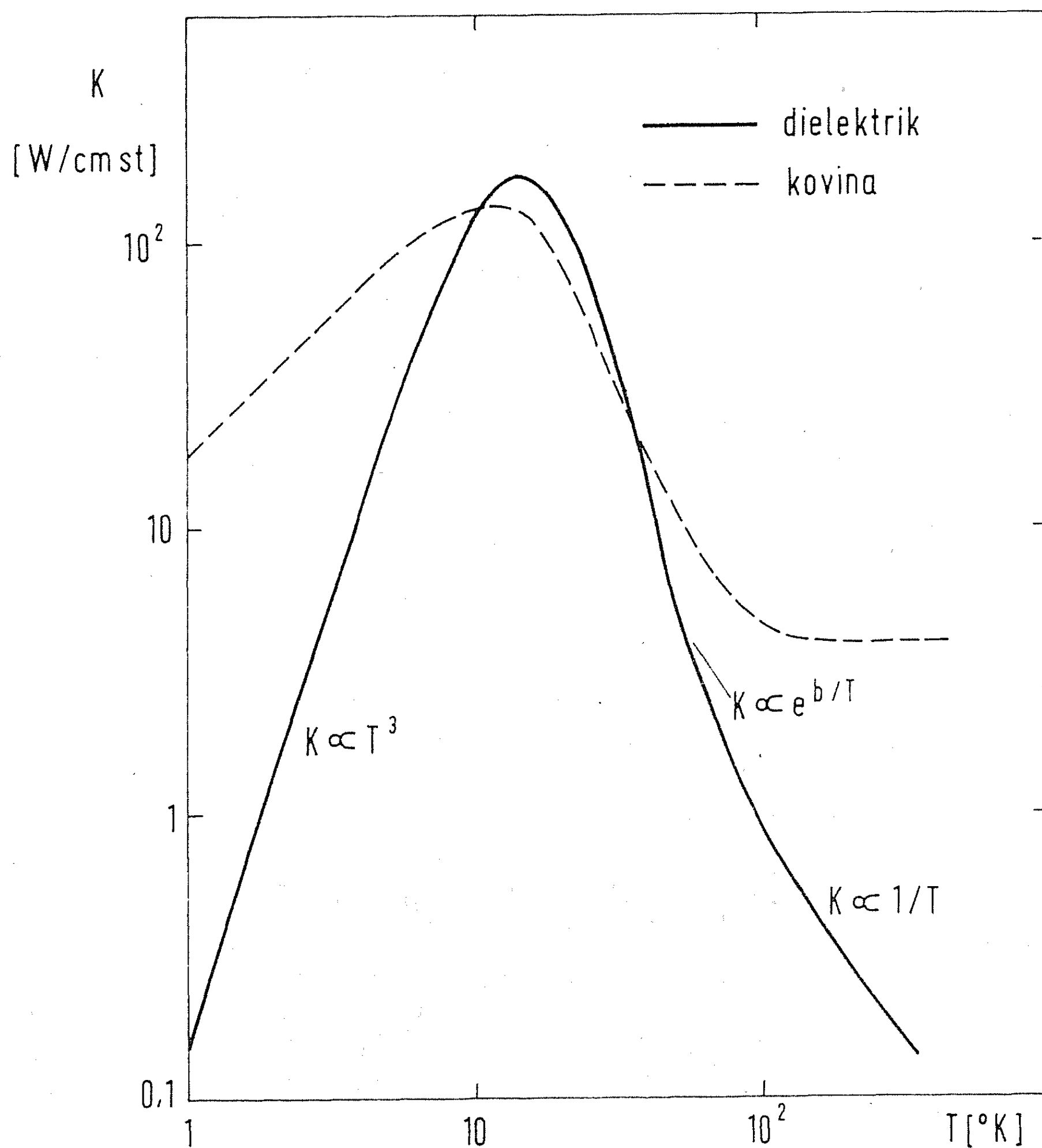
Tabela 1. Toplotna prevodnost  $K$  nekaterih dielektričnih in kovinskih kristalov pri sobni temperaturi (300 °K)

| Dielektriki <sup>1</sup> | $K$         | Kovine <sup>2</sup> | $K$         |
|--------------------------|-------------|---------------------|-------------|
| NaCl                     | 0,09 W/cmst | Al                  | 2,22 W/cmst |
| LiF                      | 0,167       | Cu                  | 3,93        |
| CaF <sub>2</sub>         | 0,10        | Fe                  | 0,75        |
| Diamant                  | 5,83        | Ag                  | 4,18        |

Namen tega članka je preprosto opisati osnove prenosa toplote po dielektričnih kristalih. V naslednjem poglavju se bomo seznanili z nosilci toplotnega toka in v 3. poglavju s transportno enačbo, s katero opišemo njihovo razširjanje. V 4. poglavju pa bomo z Debyevim modelom za mrežni spekter izpeljali praktično formulo za toplotno prevodnost, ki jo uporabljajo tudi pri analizi eksperimentalnih podatkov.

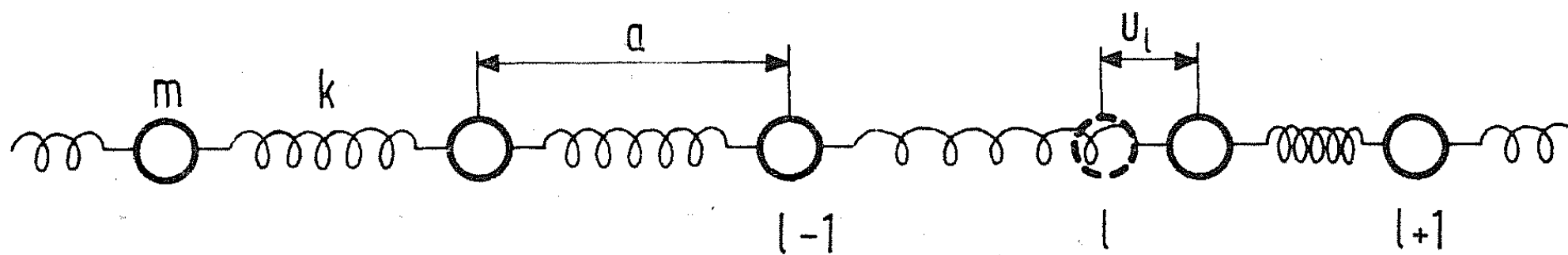
## 2. Toplotni tok mrežnih nihanj

V nasprotju z molekulami plina, ki neurejeno potujejo po vsej posodi, ima atom v trdni snovi določeno poprečno lego. V kristalih tvorijo poprečne lege atomov pravilno prostorsko mrežo. Če vzbudimo kak atom k nihanju, se nihanje po medatomskeih vezeh razširi na sosednje atome in tako potuje po mreži v obliki valovanj. Toplotni tok ustreza mrežnemu nihanju, pri katerem valovanja prenašajo nihajno energijo iz toplejšega dela kristala v hladnejši.



Sl. 1. Odvisnost toplotne prevodnosti od temperature: primerjava med dielektričnim in kovinskim kristalom. Na osnovi eksperimentalnih podatkov za dielektrik<sup>3</sup> LiF in za kovino<sup>4</sup> baker. Obe merili sta logaritemski

Ilustrirajmo te trditve z enostavnim modelom linearne verige atomov! V enakih razmikih  $a$  je nanizanih  $N$  atomov z maso  $m$ , vsak od njih pa je s sosedoma povezan z idealno prožno vzmetjo s koeficientom  $k$  (sl. 2). Od časa



Sl. 2. Del linearne verige z  $N$  enakimi atomi

odvisni odmik  $l$ -tega atoma od poprečne lege označimo z  $u_l \equiv u_l(t)$ , njegovo gibalno količino pa s  $p_l \equiv p_l(t) = m du_l/dt$ . Ker nas ne zanimajo posebnosti na krajiščih verige, si mislimo verigo sklenjeno. Potem je  $u_N = u_0$  ali splošno:  $u_{l+N} = u_l$ . Prav tak periodični robni pogoj velja za  $p_l$ . Hamiltonko verige atomov sestavljajo kinetične energije vseh atomov in prožnostne energije vseh vzmeti:

$$H = \sum_{l=0}^{N-1} p_l^2 / 2m + \frac{1}{2} k \sum_{l=0}^{N-1} (u_{l+1} - u_l)^2 \quad (1)$$

Lastna nihanja verige si predstavljamo kot potujoča valovanja, pri katerih nihajo vsi atomi z enako frekvenco in amplitudo. Poljubno nihanje verige sestavimo iz vsote lastnih nihanj. Po tem je odmik  $l$ -tega atoma v splošnem

$$u_l = (1/\sqrt{N}) \sum_q u(q) e^{iqla} \quad (2)$$

V zapisani Fourierovi vrsti je  $u(q) \equiv u(q, t)$  od časa odvisna amplituda lastnega nihanja z valovnim številom  $q$ . Ker so odmiki  $u_l$  realni, mora veljati  $u(-q) = u(q)$ .<sup>\*</sup> Nadalje je zaradi periodičnega robnega pogoja izbira valovnih števil omejena z enačbo  $e^{iq(N+l)a} = e^{iq_1 a}$ , se pravi:  $q = n' 2\pi/Na$ , če je  $n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Neskončna množica valovnih števil predstavlja v resnici le  $N$  fizikalno različnih valovanj, kolikor ima sistem prostostnih stopenj. Valovanji z valovnim številoma  $q$  in  $q + n' 2\pi/a$ , če je  $n'$  celo število, se namreč razlikujeta le po številu valov v vmesnem prostoru med sosednjimi atomi. Smotrno je torej uporabljati le taka valovna števila, da bo pripadajoča valovna dolžina  $\lambda = 2\pi/|q|$  kvečjemu enaka ali večja od  $2a$ . To lastnost imajo valovna števila, ki ležijo na intervalu  $-\pi/a < q \leq +\pi/a$ .

Tudi gibalne količine atomov zapišemo s podobno Fourierovo vrsto, kot je vrsta (2), z ustreznimi koeficienti  $p(q) \equiv p(q, t)$ . Potem vstavimo vrsti za  $u_l$  in  $p_l$  v desno stran izraza (1) in izračunamo vsoti po  $l$ . Pri tem nam pomaga splošna zveza

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{i(q_1 + q_2 + \dots)la} = \begin{cases} N, & \text{če } q_1 + q_2 + \dots = Q \\ 0, & \text{v drugih primerih} \end{cases} \quad (3)$$

Tukaj smo s  $Q = n' 2\pi/a$  označili poljuben mnogokratnik dolžine intervala, na katerem ležijo dopustna valovna števila. V našem primeru ostanejo za  $Q = 0$  vsa valovna števila na tem intervalu. Sledi:

$$H = \sum_{q=-(N-1)\pi/Na}^{+\pi/a} \left\{ \frac{1}{2} |p(q)|^2/m + 2k \sin^2\left(\frac{1}{2} qa\right) \cdot |u(q)|^2 \right\} \quad (4)$$

Trdimo, da je ta izraz ekvivalenten vsoti hamiltonk za  $N$  med seboj neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Vsakemu od njih ustreza določeno lastno nihanje verige, ki ga imenujemo tudi normalno nihanje. Koeficient vzmeti za  $q$ -ti oscilator bi bil  $k_q = 4k \sin^2 \frac{1}{2} qa$ , masa poljubnega oscilatorja pa  $m_q = m$ . Ustrezna lastna frekvenca oscilatorja in s tem frekvenca  $q$ -tega normalnega nihanja je po tem dana z običajno zvezo  $\omega(q)^2 = k_q/m_q$  ali

$$\omega(q) = (4k/m)^{1/2} \sin \left| \frac{1}{2} qa \right| \quad (5)$$

Odvisnost frekvence od valovnega števila priča, da imamo opraviti z disperzijo. Ustrezna disperzijska krivulja je narisana na sl. 3 a.

Sedaj zapišimo še odvisnost amplitud normalnih nihanj od časa:  $u(q, t) = u(q, 0) e^{\pm i\omega(q)t}$ . Pri tem velja spodnji znak za  $q \geq 0$ , zgornji pa za  $q < 0$ . Potemtakem predstavlja izraz (2) zares superpozicijo potujočih valovanj, ki se razširjajo po verigi v obeh možnih smereh. Seveda bi namesto potujočih valovanj za normalna nihanja lahko izbrali tudi stoječa valovanja. Vendar pa je s potujočimi valovanji mnogo lažje sestaviti nihanje, ki ustreza toku energije po verigi.

V kvantni mehaniki je energija harmonskega oscilatorja diskretna funkcija njegove lastne frekvence. Tako ima  $q$ -ti oscilator energijo  $E(q) = \hbar \omega(q) [n(q) + \frac{1}{2}]$ ; pri tem pomeni  $n(q) = 0, 1, 2, \dots$  število kvantov energije. Celotna energija verige atomov je

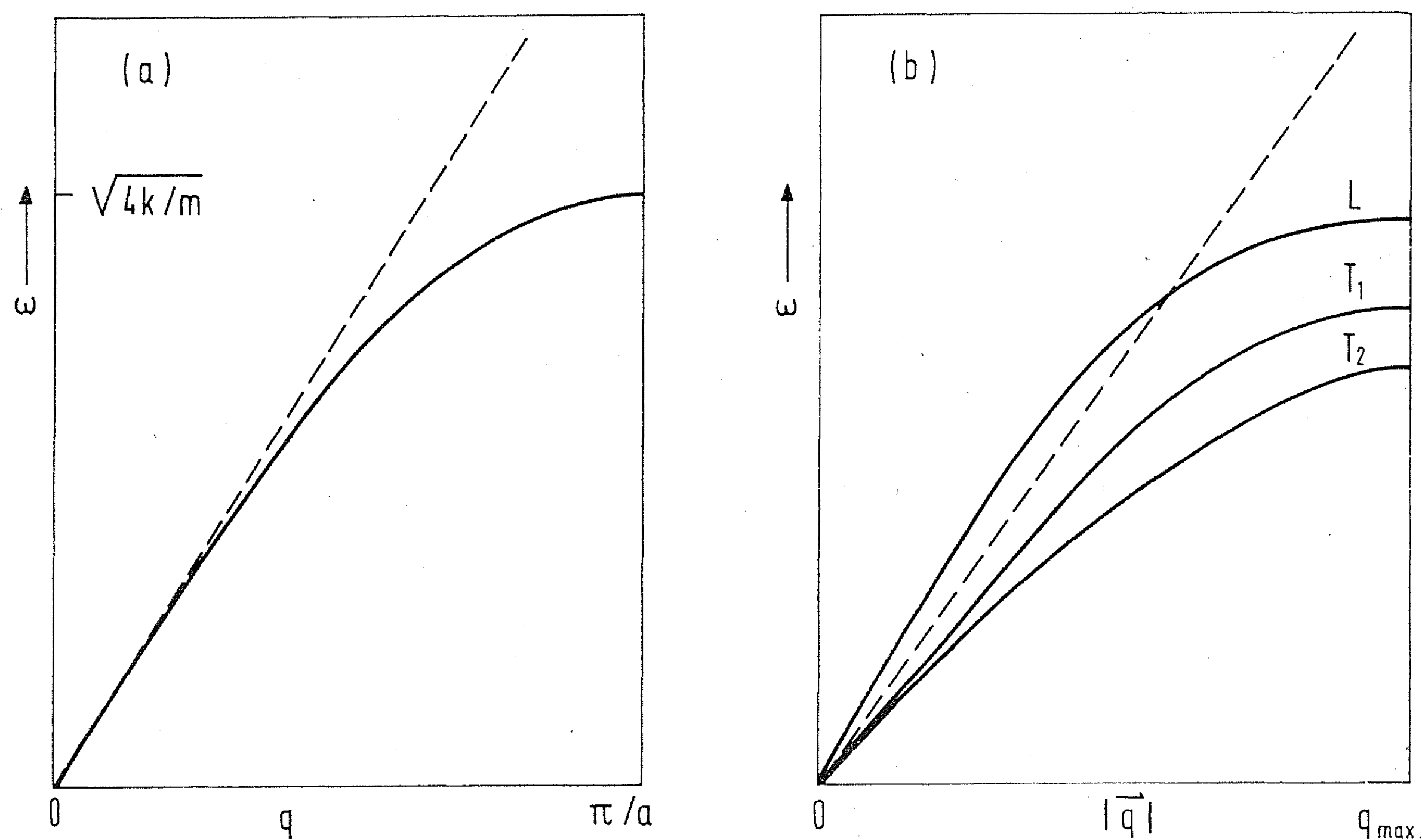
$$E = \sum_q \hbar \omega(q) [n(q) + \frac{1}{2}] \quad (6)$$

Vsota po  $q$  naj odslej teče v enakih mejah kot pri formuli (4). Kvant energije, ki pripada danemu normalnemu nihanju, imenujemo *fonon*.

Preidemo k obravnavanju prenosa energije po verigi. Vzemimo, da smo na omejenem delu verige vzbudili nekaj atomov k nihanju in pogledimo, kako se nihajna energija razširja v okolico! Takšno *ekscitacijo* opišemo s *paketom valovanj*, ki imajo približno enaka valovna števila in frekvence. Če ustreza  $q$  težišču paketa in  $\delta q$  njegovi efektivni širini na intervalu valovnih števil, je paket omejen na del verige z dolžino  $\delta x \cong 1/\delta q$ , težišče paketa pa se giblje z grupno hitrostjo  $v(q) = d\omega(q)/dq$ . Gibanje ekscitacije povzroči energijski tok, ki je sorazmeren energiji fononov v paketu ter obratno sorazmeren času, v katerem paket prepotuje verigo:\*  $\delta J \propto n(q) \hbar \omega(q) v(q)/Na$ . Celotni toplotni tok, ki se pretaka po verigi, dobimo kot vsoto prispevkov vseh možnih paketov, torej

$$J = (1/Na) \sum_q \hbar \omega(q) v(q) n(q) \quad (7)$$

Dosedanje rezultate moremo posplošiti na tridimenzionalne kristale. Namesto verige z  $N$  atomi nastopa sedaj prostorska mreža z  $N$  osnovnimi celicami. Če je v vsaki celici le po en atom, ima mreža  $3N$  prostostnih stopenj. Temu ustreza  $3N$  normalnih nihanj mreže, ki imajo obliko ravnih valovanj. Njihovi valovni vektorji  $\mathbf{q}$  tvorijo neskončno množico pravilno razporejenih točk v prostoru, ki ga imenujemo recipročni prostor. Gostota točk v recipročnem prostoru je  $V/(2\pi)^3$ , če je  $V$  volumen kristala. V tem prostoru ležijo tudi taki vektorji  $\mathbf{Q}$ , ki jih smemo prišteti k poljubnemu valovnemu vektorju  $\mathbf{q}$ , pri čemer kažeta valovanji  $\mathbf{q}$  in  $\mathbf{q} + \mathbf{Q}$  identično sliko atomskih premikov. Množica vseh vektorjev  $\mathbf{Q}$  tvori recipročno mrežo. Osnovna celica te mreže ima prostornino  $(2\pi)^3 N/V$  in vsebuje torej  $N$  valovnih vektorjev. Dopustni valovni vektorji ležijo v delu recipročnega prostora s prostornino osnovne celice, ki ima enake



Sl. 3. Frekvenca normalnih nihanj linearne verige v odvisnosti od valovnega vektorja. Črtkana črta predstavlja frekvence Debyevega kontinuuma (a). Tri veje frekvenčnega spektra prostorske mreže z enim atomom v osnovni celici (b) (shematično): ena longitudinalna (L) in dve transversalni ( $T_1$ ,  $T_2$ ). Valovni vektor se spreminja linearno od središča Brillouinove cone ( $|\mathbf{q}| = 0$ ) do roba cone ( $q_{\max}$ ). Črtkana črta: Debyeov spekter (enak za vse tri veje)

\* Videti je napak, da  $n(q)$  sedaj pomeni število fononov v valovnem paketu, ki strogo vzeto ni normalno nihanje verige. K temu problemu se bomo vrnili ob koncu 4. pogl.

simetrijske lastnosti kot recipročna mreža. Imenujemo ga *prva Brillouinova cona*.<sup>\*</sup> To je tridimenzionalna posplošitev prejšnjega intervala  $-\pi/a < q \leq +\pi/a$ .

Za vsak  $\mathbf{q}$  so možna sedaj tri različna nihanja s frekvencami  $\omega(\mathbf{q}, p)$ ,  $p = 1, 2, 3$ . Če se valovni vektor spreminja v dani smeri po prvi Brillouinovi coni, dobimo torej tri disperzijske krivulje — *tri veje spektra* (sl. 3 b). Vse tri veje so po obliki zelo podobne disperzijski krivulji za verigo atomov (sl. 3 a). Valovanja v posameznih vejah se med seboj razlikujejo po polarizaciji: ločimo dve *transverzalni* in eno *longitudinalno* polarizacijo. Frekvence valovanj, ki ustrezajo longitudinalni veji, so v splošnem večje od frekvenc transverzalnih valovanj. Pri tem je polarizacija nihanja atomov le v nekaterih posebnih primerih<sup>\*\*</sup> zares longitudinalna (tj. vzporedna s smerjo razširjanja) ali transverzalna (pravokotna na  $\mathbf{q}$ ).

Če je v osnovni celici več atomov, npr.  $r$ , ima spekter  $3r$  vej. Pri treh vejah gre frekvenca proti nič za  $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ , podobno kot zgoraj. Te veje imenujemo *akustične veje*. Preostane  $3(r-1)$  optičnih vej.

Ugodno je, če prejšnjo pisavo posplošimo in s  $q$  zaznamujemo skupnost valovnega vektorja  $\mathbf{q}$  in indeksa za vejo spektra  $p$  ( $p = 1, 2, \dots, 3r$ ). Tako pomeni  $\omega(q)$  isto kot  $\omega(\mathbf{q}, p)$  in  $n(q)$  nič drugega kot  $n(\mathbf{q}, p)$ . Zato obdržimo formulo (6) za celotno energijo kristala in v njej po novem seštevamo po  $3rN$  normalnih nihanjih.

Nosilce toplotnega toka v tridimenzionalnih kristalih si zamišljamo kot lokalizirana nihanja mreže, ki jih spet opišemo z valovnimi paketi. Pri tem združimo valovanja z enako polarizacijo, katerih valovni vektorji ležijo v majhnem področju recipročnega prostora v okolici vektorja  $\mathbf{q}$ , ki ustreza težišču paketa. Težišče se giblje z grupno hitrostjo  $\mathbf{v}(q) = \nabla_{\mathbf{q}} \omega(q)$ . (Tu pomeni  $\nabla_{\mathbf{q}} = (\partial/\partial q_x, \partial/\partial q_y, \partial/\partial q_z)$ .) S podobnim premislekom kot prej pridemo končno do izraza za gostoto toplotnega toka v kristalu:

$$\mathbf{J} = (1/V) \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega(q) \mathbf{v}(q) n(q) \quad (8)$$

### 3. Transportna enačba

V kristalu, ki je v termodinamičnem ravnovesju, je rezultanta toplotnih tokov enaka nič. To prav lahko dokažemo s formulo (8). Za  $n(q)$  moramo vstaviti poprečno število fononov v  $q$ -tem normalnem nihanju, ki je podano s statistiko Boseja-Einsteina,

$$\bar{n}(q) = [e^{\hbar\omega(q)/k_B T} - 1]^{-1} \quad (9)$$

( $k_B$  je Boltzmannova konstanta.) Nato upoštevamo, da sta frekvenci normalnih nihanj  $q = (\mathbf{q}, p)$  ter  $-q = (-\mathbf{q}, p)$  enaki, ustrezni grupni hitrosti pa imata nasprotna znaka, in je zato  $\mathbf{J} = 0$ .

Končni toplotni tokovi lahko tečejo le kot posledica temperaturnih gradientov, torej v neravnovesnih stanjih posebne vrste. Predstavljamo si, da se v tem primeru število fononov danega normalnega nihanja spreminja s krajem in je v splošnem odvisno tudi od časa. Zato uvedemo količino  $n(q, \mathbf{r})$ , ki pomeni

\* Ta pojem srečamo tudi pri obravnavanju elektronskih stanj v kristalih.<sup>5</sup>

\*\* Npr. v kubičnih kristalih, če potuje valovanje vzporedno z eno izmed glavnih osi kristala.

število fononov v valovnem paketu, ki je prostorsko omejen na volumski element kristala  $\delta V$  v okolici točke  $\mathbf{r}$ ; fononi pripadajo veji  $p$ , težišču paketa pa ustreza valovni vektor  $\mathbf{q}$ .

Spreminjanje gostote fononov v točki  $\mathbf{r}$  s časom bomo podobno kot pri plinu atomov ali plinu elektronov obravnavali z Boltzmannovo transportno enačbo. Število  $n(\mathbf{q}, \mathbf{r})$  se s časom spreminja iz dveh razlogov. Prvič: fononi odtekajo v okolico in pritekajo iz nje v  $\delta V$  zaradi hitrosti  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ , s katero potuje paket; drugič: zaradi trkov in sipanj med fononi in sipanja fononov na raznih ovirah nastajajo in izginjajo fononi v  $\delta V$ .

Odvod gostote fononov  $[n(\mathbf{q}, \mathbf{r})/\delta V]$  po času zaradi preseljevanja valovnih paketov je sorazmeren divergenci toka fononov, torej

$$(\partial/\partial t) [n(\mathbf{q}, \mathbf{r})/\delta V]_{\mathbf{v}} = -\nabla \cdot \{ [n(\mathbf{q}, \mathbf{r})/\delta V] \mathbf{v}(\mathbf{q}) \} = -\mathbf{v}(\mathbf{q}) \cdot \nabla [n(\mathbf{q}, \mathbf{r})/\delta V] \quad (10)$$

Zadnji izraz velja, ker je grupna hitrost neodvisna od kraja. Ker mora biti prostornina  $\delta V$  vselej večja od razsežnosti valovnega paketa, se sme funkcija  $n(\mathbf{q}, \mathbf{r})$  le počasi spreminjati s krajem. Predstavljamo si, da so vzrok temu spreminjanju krajeve spremembe temperature. Zato izpuščamo spremenljivko  $\mathbf{r}$  in namesto enačbe (10) zapišemo

$$\partial n(\mathbf{q})/\partial t|_{\mathbf{v}} = -\mathbf{v}(\mathbf{q}) \cdot (\nabla T) \partial n(\mathbf{q})/\partial T \quad (11)$$

Poznamo več vrst pojavov pri sipanju fononov; za vsakega od njih bi bil potreben podrobnejši študij. Za sedaj bomo njihov prispevek v odvodu funkcije  $n(\mathbf{q})$  po času formalno označili z  $\partial n(\mathbf{q})/\partial t|_s$ . V stacionarnem stanju se mora ta prispevek natanko kompenzirati s prejšnjim, torej

$$\partial n(\mathbf{q})/\partial t|_s - \mathbf{v}(\mathbf{q}) \cdot (\nabla T) \partial n(\mathbf{q})/\partial T = 0 \quad (12)$$

To je transportna enačba za nosilce toplotnega toka v dielektričnih kristalih. Ko vstavimo vanjo prispevke posameznih procesov sipanja, ki določajo strukturo prvega člena, dobimo v splošnem komplicirano integralno enačbo. Zadovoljiti se bomo morali s poenostavljeno enačbo, v kateri sipalni člen nadomestimo s fenomenološkim nastavkom in popišemo jakost sipanja s primernim parametrom. V ta namen predpostavimo, da se funkcija  $n(\mathbf{q})$  zaradi sipanja približuje s časom eksponentno vrednosti  $\bar{n}(\mathbf{q})$ , ki bi v termodinamičnem ravnovesju obveljala v obravnavanem delu kristala. Torej je

$$\partial n(\mathbf{q})/\partial t|_s = -[n(\mathbf{q}) - \bar{n}(\mathbf{q})]/\tau(\mathbf{q}) \quad (13)$$

Razpadanje neravnovesnega števila fononov  $n(\mathbf{q})$  imenujemo relaksacijo  $q$ -tega normalnega nihanja, parameter  $\tau(\mathbf{q})$  pa relaksacijski čas za to nihanje.

Izraz (13) vstavimo namesto prvega člena enačbe (12). V drugem členu pa namesto  $\partial n(\mathbf{q})/\partial T$  zapišemo  $\partial \bar{n}(\mathbf{q})/\partial T$ , kar je opravičljivo, če so temperaturni gradienti majhni. Pričakujemo namreč, da je razlika  $n - \bar{n}$  približno sorazmerna z  $\nabla T$  in da smemo zavreči člene z velikostno stopnjo  $(\nabla T)^2$ . Sledi

$$n(\mathbf{q}) - \bar{n}(\mathbf{q}) = -[\hbar\omega(\mathbf{q}) \partial \bar{n}(\mathbf{q})/\partial T] \tau(\mathbf{q}) \mathbf{v}(\mathbf{q}) \cdot (\nabla T)/\hbar\omega(\mathbf{q}) \quad (14)$$

Izraz v oglatem oklepaju je v zvezi s specifično toploto kristala. O tem se prepričamo, če v enačbo (6) vstavimo  $\bar{n}(\mathbf{q})$  za število fononov v  $q$ -tem normalnem nihanju: tako dobimo termodinamično poprečno energijo kristala  $\bar{E}$ . Z odvajanjem  $\bar{E}$  po temperaturi pridemo do toplotne kapacitete kristala:

$$C = \partial \bar{E} / \partial T = \sum_q \hbar \omega(q) \partial \bar{n}(q) / \partial T = \sum_q C(q) \quad (15)$$

Očitno pove količina  $C(q) \equiv \hbar \omega(q) \partial \bar{n}(q) / \partial T$ , kolikšen je prispevek ustreznega normalnega nihanja k specifični toploti.

Rešitev transportne enačbe (14) moramo vstaviti v izraz (8) za gostoto toplotnega toka. Ker ravnovesne vrednosti  $\bar{n}(q)$  ne prispevajo nič k celotnemu toku, preostane le

$$\mathbf{J} = - (1/V) \sum_q C(q) \tau(q) \mathbf{v}(q) [\mathbf{v}(q) \cdot \nabla T] \quad (16)$$

Končno definirajmo tenzor toplotne prevodnosti z elementi  $K_{ij}$ :

$$J_i = - \sum_{j=1}^3 K_{ij} (\nabla T)_j \quad (17)$$

Indeksa  $i$  in  $j$  označujeta ustrezne kartezične komponente. Izotropni del tega tenzorja je enak tretjini sledi tenzorja:

$$K = \sum_q \frac{1}{3} [C(q)/V] v^2(q) \tau(q) \quad (18)$$

Tu je  $v(q) = |\mathbf{v}(q)|$ .

Primerjajmo to s toplotno prevodnostjo

$$K = \frac{1}{3} [C/V] v l \quad (19)$$

v kinetični teoriji plinov! Tu je  $v$  poprečna hitrost,  $l$  pa poprečna prosta pot molekul plina. Tudi v (18) bi lahko formalno uvedli  $l(q) = v(q) \tau(q)$ . Potem bi imel vsak člen vsote enako obliko kot (19). To se sklada s prejšnjo sliko, da si smemo fonone v  $q$ -tem normalnem nihanju predstavljati kot delce plina. Količina  $l(q)$  bi imela torej vlogo proste poti teh delcev. Vendar pa s to analogijo ne smemo zaiti predaleč. Mogoča so namreč sipanja, ki prispevajo k razpadanju normalnih nihanj, ne morejo pa spremeniti toplotnega toka (*normalni procesi*). Relaksacijski čas v (18) je zato v glavnem določen z drugimi procesi. To pa pomeni, da je resnična prosta pot fononov v splošnem krajša od  $l(q)$ .\*

#### 4. Uporaba rezultatov teorije toplotne prevodnosti v fiziki

Splošnem rezultatu (18) želimo dati prikladnejšo obliko. Vsote po vseh normalnih nihanjih seveda ne znamo izračunati natančno. To bi nam uspelo le, če bi imeli popolne podatke o mrežnem spektru in bi poznali še relaksacijske čase vseh normalnih nihanj. V praksi se največkrat zadovoljimo s kvalitativnimi ocenami toplotne prevodnosti. V tem primeru smemo zavreči posebnosti mrežnega spektra, ki so značilne za posamezne kristale. To storimo z vpeljavo primernih fenomenoloških parametrov. Takšen parameter je npr. hitrost zvoka v kristalu.

Oglejmo si to najprej na zgledu verige atomov! Iz enačbe (5) izračunamo grupno hitrost

$$|v(q)| = (k/m)^{1/2} \cos \frac{1}{2} qa \quad (20)$$

Za velike valovne dolžine  $\lambda = 2\pi/|q| \gg a$ , je grupna hitrost približno enaka  $|v(q)| \approx (k/m)^{1/2} a = v$ . Konstanta  $v$  ni nič drugega kot hitrost razširjanja zvoka po homogeni elastični palici z linearno gostoto  $m/a$  in elastičnim mo-

\* Primernejše ime za  $l(q)$  bi bilo *relaksacijska dolžina*.

dulom  $ka$ . Frekvenca nihanj pa je po enačbi (5) približno sorazmerna z valovnim številom,  $\omega(q) \approx v \cdot |q|$ . V dolgovalovnem območju je torej frekvenčni spekter popolnoma podan z zvočno hitrostjo  $v$ .

Ker je spekter akustičnih valovanj v tridimenzionalnem kristalu podoben spektru verige (sl. 3), mora za velike valovne dolžine veljati prav tako  $\omega(q) \approx v(p) \cdot |q|$ . Tu je  $v(p)$  zvočna hitrost za ustrezno akustično vejo. V splošnem dobimo tri različne hitrosti, kar kaže, da se kristal obnaša podobno kot anizotropni kontinuum. V najbolj grobem približku bomo privzeli, da ima spekter poljubnega kristala le tri veje. Za vsako od njih naj velja ista linearna zveza med frekvenco in valovnim vektorjem:  $\omega(q) = v |q|$ . Konstanta  $v$  ima pomen nekakšne poprečne zvočne hitrosti v kristalu. Ta približek je *Debyejev model mrežnega spektra*, ki ga poznamo iz teorije specifične toplote trdnih snovi.<sup>6</sup> Fizikalni smisel modela je v tem, da nadomestimo nihanja kristalne mreže z nihanji izotropnega elastičnega kontinuumu. Toda v kontinuumu ni nikakršne naravne omejitve glede velikosti valovnega vektorja. Zato moramo recipročni prostor omejiti umetno. Izberemo si kroglo s središčem v koordinatnem izhodišču, ki mora vsebovati  $rN$  valovnih vektorjev. S tem dovolimo kontinuumu  $3rN$  normalnih nihanj, kolikor ima prostostnih stopenj kristalna mreža z  $r$  atomi v osnovni celici. Ker je gostota valovnih vektorjev v recipročnem prostoru  $V/(2\pi)^3$ , dobimo za radij krogle:  $q_0 = (6\pi^2 rN/V)^{1/3}$ . Valovnemu vektorju  $q_0$  ustreza maksimalna dovoljena frekvenca (*Debyeova frekvenca*)  $\omega_D = v q_0$ . V zvezi z njo definiramo še *Debyeovo temperaturo*:  $\Theta = \hbar\omega_D/k_B = (\hbar v/k_B) (6\pi^2 rN/V)^{1/3}$ . To je nov, koristen parameter za karakterizacijo mrežnega spektra. Parameter  $\Theta$  pogosto nastopa neodvisno od poprečne zvočne hitrosti  $v$ .

Z Debyevim modelom se moremo prav hitro znebiti vsote v formuli (18). Zgledujemo se po teoriji specifične toplote.<sup>6</sup> Mislimo si, da je poleg frekvence tudi relaksacijski čas  $\tau(q)$  odvisen samo od dolžine valovnega vektorja. Po tem dobimo enak prispevek za vsa valovanja, katerih valovni vektorji ležijo v tanki krogelni plasti z debelino  $d|q|$ . Število teh valovanj je za vsako od treh vej spektra enako

$$[V/(2\pi)^3] \cdot 4\pi |q|^2 d|q| = D(\omega) d\omega \quad (21)$$

Tukaj je  $d\omega = v d|q|$ . Funkcija  $D(\omega)$ , ki je definirana z zvezo (21), predstavlja gostoto normalnih nihanj na frekvenčno enoto (*Debyeova gostota*). Velja  $D(\omega) = 3rN \omega^2/\omega_D^3 = (V/2\pi^2 v^3) \omega^2$ . Z uvedbo Debyeve gostote se izraz (18) zapiše takole

$$K = (1/2 \pi^2 v) \int_0^{\omega_D} \omega^2 C(\omega) \tau(\omega) d\omega \quad (22)$$

Uporabljam poenostavljeno pisavo  $C(\omega) = C[|q(\omega)|, p]$  ter  $\tau(\omega) = \tau[|q(\omega)|, p]$ .

S formulama (15) in (9) prevedemo izraz (22), če vstavimo  $x = \hbar\omega/k_B T$ , v končno obliko

$$K = A T^3 \int_0^{\Theta/T} x^4 e^x (e^x - 1)^{-2} \tau[\omega(x)] dx \quad (23)$$

Konstanta  $A$  je enaka  $A = k_B^4/2 \pi^2 \hbar^3 v$ .

Videti je, da na toplotno prevodnost kristala bistveno vpliva funkcija  $\tau(\omega)$ , tj. frekvenčna odvisnost relaksacijskega časa. Ker v splošnem k relaksaciji normalnih nihanj prispeva več različnih fizikalnih procesov, je smotrno razcepiti recipročni relaksacijski čas na vsoto

$$1/\tau(\omega) = \sum_i 1/\tau_i(\omega) \quad (24)$$

v kateri je  $\tau_i(\omega)$  parcialni relaksacijski čas za  $i$ -ti proces. To smemo storiti le takrat, kadar omenjeni procesi potekajo neodvisno drug od drugega. Seveda pa ne moremo vselej pričakovati, da bo  $\tau(\omega)$  pohlevna funkcija frekvence. Zato utegne biti vrednost formule (23), ki sloni na grobem Debyeovem modelu, prav dvomljiva. Končno sodbo o tem morejo dati samo eksperimenti. Če se pokaže, da velja formula (23) za dani kristal, moremo iz izmerjene odvisnosti  $K(T)$  sklepati na odvisnost parcialnih relaksacijskih časov od frekvence. Podatke o  $\tau_i(\omega)$  dobimo iz teorije ali pa uporabimo primeren empirični nastavek. Neznane parametre v funkciji  $\tau_i(\omega)$  izberemo tako, da dosežemo čim boljše ujemanje z izmerjeno odvisnostjo prevodnosti od temperature. To delo prepustimo elektronskemu računalniku.

Največ si obetamo od formule (23) pri kvalitativnem opisovanju poteka toplotne prevodnosti. Razmeroma dobro poznamo namreč osnovne procese sipanja fononov, ki prevladujejo v posameznih temperaturnih območjih. Z ustreznimi relaksacijskimi časi  $\tau_i(\omega)$  moremo pojasniti odvisnost  $K(T)$ , ki je narisana na sl. 1.\*

Le poredko se lahko izognemo numerični integraciji v formuli (23). Pri zelo nizkih temperaturah,  $T \ll \Theta$ , smemo zgornjo mejo integrala premakniti v neskončnost, ne da bi s tem bistveno pokvarili rezultat. Če se npr. pokaže, da poteka najvažnejša komponenta relaksacijskega časa kot  $\tau(\omega) \propto \omega^{-n}$ , sledi

$$K(T) \propto T^{3-n} \quad (25)$$

To preprosto pravilo pogosto služi kot orientacija pri ocenjevanju odvisnosti toplotne prevodnosti od temperature.

Kot možnost praktične uporabe formule (23) omenimo še analizo toplotne prevodnosti kristalov, ki vsebujejo določeno vrsto mrežnih defektov. Sklepamo, da je relaksacijski čas za take kristale

$$1/\tau(\omega) = 1/\tau_p(\omega) + 1/\tau_d(\omega) \quad (26)$$

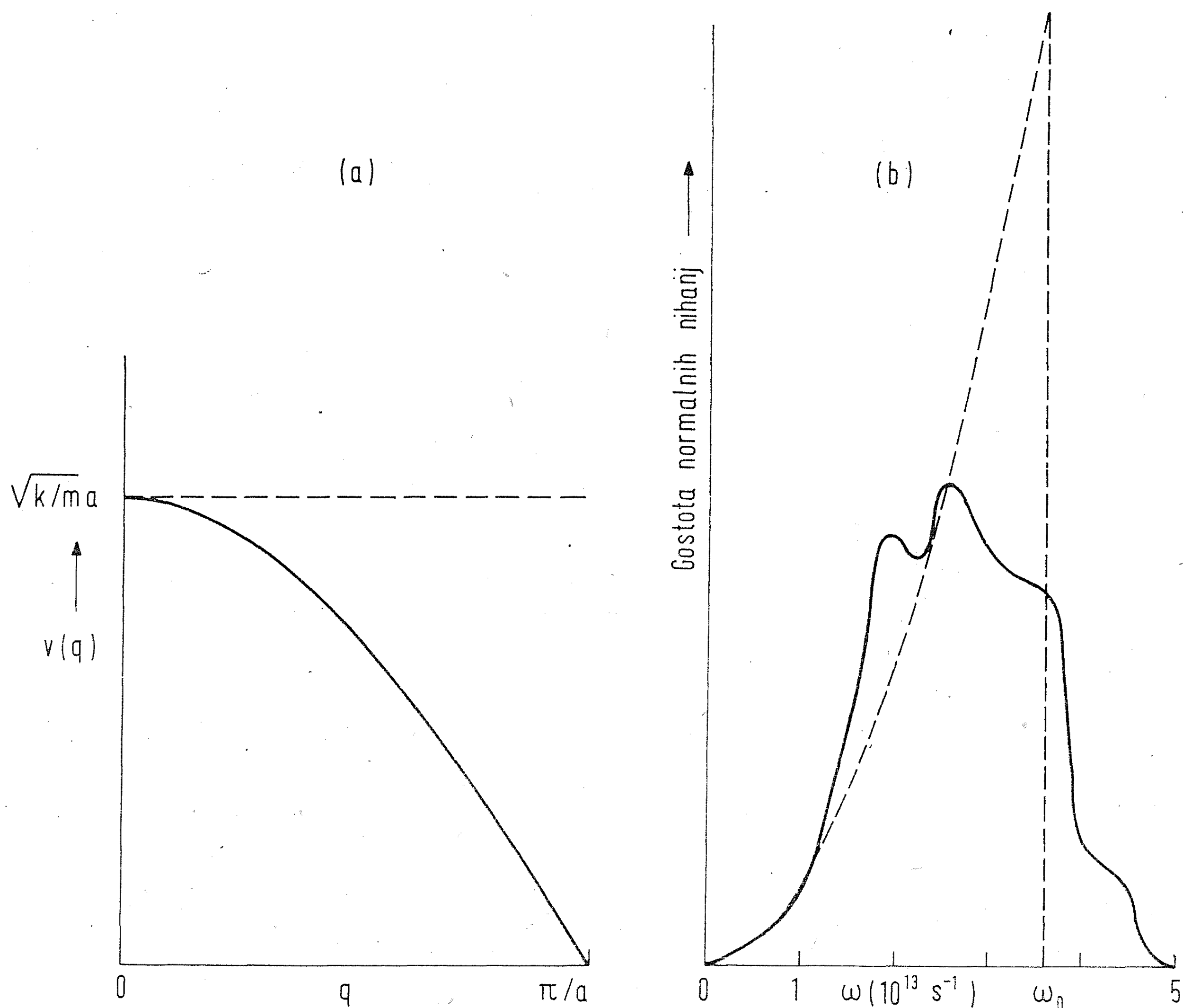
če je sedaj  $\tau_p(\omega)$  relaksacijski čas v čistem kristalu. Drugi člen pomeni dodatni prispevek k relaksaciji zaradi sipanja fononov na defekti. Z meritvami najprej doženemo, če velja formula (23) za kristal brez defektov. Pri tem dobimo  $\tau_p(\omega)$ . Nato meritev ponovimo na kristalu z defekti, določimo  $\tau(\omega)$  in končno z enačbo (26) izračunamo  $\tau_d(\omega)$ . Tako pridemo do pomembnih podatkov o sipanju in posredno tudi o interakciji med fononi in defekti.

Pri presoji formule (23) smo že omenili vlogo Debyevega modela. Zavedati se moramo, da je ta model najbolj uporaben pri nizkih temperaturah. Tam so namreč vzbujena predvsem nizkofrekvenčna nihanja, katerih pravi spekter se le malo razlikuje od Debyevega. Pri velikih frekvencah pa je resnični spekter ponavadi precej drugačen. To je bilo nakazano že na sl. 3. Še nazornejša pa je razlika, če primerjamo odvisnost grupne hitrosti od valovnega vektorja s konstantno zvočno hitrostjo (sl. 4 a), ali pa Debyevo gostoto normalnih nihanj s pravo gostoto nihanj, ki jo moremo izračunati iz izmerjenih spektrov (sl. 4 b). V Debyeovem modelu nadalje ni sledu o optičnih nihanjih, ki jih preprosto stlačimo v zgornji del podaljšanih akustičnih vej.

---

\* Sipalnim procesom, ki smo jih pustili ob strani, bo posvečen poseben članek v eni izmed prihodnjih števil Obzornika.

Kljub vsemu si z Debyevim modelom pogosto pomagamo tudi v območju visokih temperatur. V teoriji specifične toplote npr. dobimo rezultate, ki so kvalitativno dovolj dobri.<sup>6</sup> Toda to je le izjemen primer: funkcija v izrazu za specifično toploto (15) je namreč zares pohlevna in ne pokvari znatno integrala Debyeve gostote. Rezultate moremo izboljšati kvantitativno, če prilagodimo vrednost Debyeve temperature. S tem nekako upoštevamo razliko med Debyevim



Sl. 4. Grupna hitrost in gostota normalnih nihanj v Debyevem modelu. Primerjava odvisnosti grupne hitrosti od valovnega vektorja pri linearni verigi (polna črta) z Debyevim modelom (črtkano). Na robu cone ( $q = \pi/a$ ) je resnična hitrost enaka nič (a). Gostota normalnih nihanj za realistični primer<sup>6</sup> (NaCl). Črtkana črta: Debyeve gostota nihanj,  $3D(\omega)$  (b)

spektrom in resničnim mrežnim spektrom. V teoriji toplotne prevodnosti pa opravičujemo uporabo Debyevega modela predvsem z njegovo izjemno preprostostjo.

Debye model nam naknadno pomaga še pri izpeljavi transportne enačbe v 3. poglavju. Tam smo fonone obravnavali kot energijske kvante lokaliziranih nihanj, ki so omejena na območje kristala z razsežnostjo valovnega paketa. Težava tiči v dejstvu, da lokalizirana nihanja ne ustrezajo lastnim stanjem kristala in torej nimajo ostro določene energije. Dokazati moramo, da razmazanost energije fononov ne pokvari znatno temperaturno odvisnih statističnih faktorjev v transportni enačbi.<sup>8</sup> Če torej  $\delta q$  pomeni širino valovnega paketa v recipročnem prostoru, ima razmazanost energije velikostno stopnjo,  $\hbar \delta \omega = \hbar v \delta q$ . Statistika pa ne bo utrpela znatnih sprememb, če je izpolnjena zahteva  $\hbar v \delta q < k_B T$ . Iz tega sledi, da sme biti razsežnost valovnega paketa,

$\delta x = 1/\delta q$ , kvečjemu  $\delta x > \hbar v/k_B T$ . Ker je  $\hbar v q_0 = k_B \Theta$  in  $q_0 = 1/a$ , če je  $a$  efektivna mrežna konstanta, sledi zahteva  $\delta x > a \Theta/T$ . Na drugi strani pa hočemo, da naj se temperatura le neznatno spreminja na področju valovnega paketa. To pomeni, da mora biti  $|\nabla T| \delta x \ll T$ . Zadnji neenačbi skupaj oblikujeta zahtevo glede velikosti temperaturnega gradienta:  $|\nabla T| \ll (T/a) (T/\Theta)$ , ki je izpolnjena v vseh praktično pomembnih primerih.

#### LITERATURA

<sup>1</sup> P. G. Klemens, Solid State Physics, Vol. 7 (urednika F. Seitz in D. Turnbull), New York (Academic Press Inc.), 1958; str. 1.

<sup>2</sup> R. M. Rose, L. A. Shepard, J. Wulff: Structure and Properties of Materials, Vol. 4, New York (Wiley), 1966.

<sup>3</sup> P. D. Thacher, Phys. Rev. **156**, 975 (1967).

<sup>4</sup> R. L. Powell in sod., Phys. Rev. **115**, 314 (1959).

<sup>5</sup> P. Gosar, OMF **7**, 116 (1960).

<sup>6</sup> C. Kittel: Introduction to Solid State Physics, 3. izd., New York (Wiley), 1967.

<sup>7</sup> F. C. Brown: The Physics of Solids, New York (Benjamin), 1967; § 6.8.

<sup>8</sup> R. E. Peierls: Quantum Theory of Solids, Oxford (University Press), 1955.

## TOPOLOŠKA KLASIFIKACIJA FRÉCHETOVIH PROSTOROV

V mnogih matematičnih teorijah se ukvarjamo z objekti, ki imajo dve strukturi: algebraično in topološko. Objekti take vrste so na primer linearni topološki prostori, normirane algebre, Liejeve grupe itd. Glede na ti dve strukturi, ki sta dani na prostoru, lahko prostor klasificiramo na tri načine. Ena klasifikacija se nanaša na obe strukturi, druga le na algebraično in tretja le na topološko strukturo.

Predmet tega sestavka bodo linearni topološki prostori. Linearni topološki prostor je linearni vektorski prostor s tako topologijo, da sta operaciji seštevanja in množenja s skalarjem zvezni. Linearni topološki prostor ima torej obe omenjeni strukturi.

Poglejmo, kako je s topološko klasifikacijo linearnih neskončno dimenzionalnih topoloških prostorov, med katerimi so znani in zanimivi prostori funkcionalne analize. Pri tem nas algebraična struktura teh prostorov popolnoma nič ne zanima. Take vrste razmišljanja spadajo v področje tako imenovane neskončne dimenzionalne topologije.

Leta 1928 je M. Fréchet v delu *Les espaces abstraits* postavil vprašanje: kateri linearni topološki prostori so med seboj homeomorfní? Preslikavo  $f$  iz topološkega prostora  $X$  v topološki prostor  $Y$  imenujemo homeomorfizem, če je povratno enolična, zvezna in je  $f^{-1}$  tudi zvezna preslikava. Za dva prostora, med katerima eksistira preslikava, ki je homeomorfizem, pravimo, da sta homeomorfna. Prejšnje vprašanje je postavil Fréchet še bolj konkretno, ali je prostor  $l_2$  homeomorfen prostoru  $s$ . Prostor  $s$  je prostor realnih zaporedij. S tem vprašanjem je sprožil študij topološke klasifikacije linearnih topoloških prostorov. Sicer je leta 1932 Banach v delu *Théorie des opérations* sporočil, da je Mazur dokazal, da prostora  $l_2$  in  $s$  nista homeomorfna, to je, topološko istega tipa. Kasneje se je izkazalo, da ta dokaz ni pravilen in Fréchetovo vprašanje je ostalo še nadalje odprto skoraj celih štirideset let.

V zadnjem času se je s problemom topološke klasifikacije bavila vrsta matematikov. Pri tem so največ študirali poseben razred v splošnem nenormiranih linearnih prostorov, to je Fréchetove prostore. Najprej uvedimo pojem lokalno konveksnih prostorov. Pravimo, da je neki linearni topološki prostor lokalno konveksen, če vsaka okolica elementa  $o$  vsebuje konveksno okolico. Če je linearni topološki prostor lokalno konveksen in še poln metrični prostor, imenujemo tak prostor Fréchetov prostor. Če je Fréchetov prostor normiran, je to kar Banachov prostor (poln normiran linearni vektorski prostor). Tako je vsak Banachov prostor enostavno Fréchetov prostor.

Povrnimo se k prej zastavljenemu vprašanju. Prav v zadnjem času je R. D. Anderson dokazal, da sta prostora  $l_2$  in  $s$  med seboj homeomorfna. To je eden izmed temeljnih rezultatov na področju neskončno dimenzionalne topologije in je bil najprej dokazan leta 1966 [1]. Dokaz v drugi obliki sta leta 1968 podala R. Anderson in R. Bing [2].

Rezultat, da je  $l_2 \sim s$  (z znakom  $\sim$  označimo homeomorfnost), je posebej pomemben zato, ker smo z njim dobili popolno klasifikacijo separabilnih neskončno dimenzionalnih Fréchetovih prostorov. Poljska matematika Bessaga

in Pełczyński sta namreč leta 1965 dokazala tole trditev: pri pogoju, da so vsi separabilni neskončno dimenzionalni Banachovi prostori homeomorfni prostoru  $l_2$ , je vsak separabilni neskončno dimenzionalni Fréchetov prostor  $X$  tudi homeomorfen prostoru  $l_2$ , vendar  $X$  ne sme biti prostor  $s$ . Leto kasneje pa je ruski matematik Kadec dokazal, da so vsi separabilni neskončno dimenzionalni Banachovi prostori med seboj homeomorfni. Tako smo prav z Andersonovim teoremom, ki pravi, da je prostor  $l_2$  homeomorfen prostoru  $s$ , dobili manjkajoči korak pri kompletnej klasifikaciji Fréchetovih prostorov. Sedaj lahko zapišemo tole trditev:

*Vsi separabilni neskončno dimenzionalni Fréchetovi prostori so med seboj homeomorfni.*

Oglejmo si le strukturo precej zapletenega dokaza Andersonovega teorema  $l_2 \sim s$ . Kot smo omenili, se da teorem dokazati po različnih poteh. Tu podajmo pot, ki je kombinacija dokaza iz članka [1] oziroma [3] in članka [2]. Najprej predstavimo prostora  $l_2$  in  $s$ . Prostor  $l_2$  je prostor takih realnih zaporedij  $(x_1, x_2, \dots) = (x_i)_{i \geq 0}$ , da je vrsta iz členov  $x_n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  konvergentna. Torej

$$l_2 = \{(x_i)_{i \geq 0} \mid x_i \text{ je realno število, } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}.$$

V prostor uvedemo metriko, in sicer bodi razdalja med dvema točkama  $x = (x_i)$  in  $y = (y_i)$  iz  $l_2$  definirana

$$d(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

Znano je, da je s tako definirano metriko prostor  $l_2$  poln metrični prostor. Norma je seveda definirana kot

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}.$$

V prostoru  $l_2$  imamo dan tudi skalarni produkt

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

pri tem ustreza  $(x, y)$  vsem zahtevanim lastnostim skalarnega produkta. Vemo tudi, da je prostor  $l_2$  separabilen. Torej je  $l_2$  separabilen neskončno dimenzionalen Hilbertov prostor. Kot normiran prostor je  $l_2$  tudi lokalno konveksen in je zato Fréchetov prostor.

Prostor  $s$  bodi prostor realnih zaporedij  $(x_i)_{i \geq 0} = (x_1, x_2, \dots)$ , predstavimo ga lahko tudi kot neskončen produkt premic  $R_i$ , kjer je  $R_i$  premica realnih števil. Torej

$$s = \prod_{i \geq 0} R_i.$$

Topologija, ki jo vpeljemo v prostor  $s$ , je običajna produktna topologija in baza za topologijo je družina vseh množic oblike  $\prod_{i \geq 0} U_i$ , kjer so množice  $U_i$

odprte množice v  $R_i$  in je  $U_i$  prava podmnožica le za končno mnogo  $i$ , sicer je  $U_i = R_i$ . Kot tak je  $s$  linearni topološki prostor. V prostor  $s$  lahko vpeljemo tudi metriko. Vzemimo na primer, da je razdalja med dvema elementoma  $x$  in  $y$  iz prostora  $s$  definirana takole:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

Pokazati se da, da je v tej metriki prostor s poln metrični prostor. Kot neskončen produkt premic je prostor s lokalno konveksen prostor in je torej Fréchetov prostor. Vemo tudi, da je s separabilen prostor. Omenimo še, da je prostor s primer prostora, ki je Fréchetov, pa ni Banachov prostor. Ker nas zanima le topološka in ne algebraična struktura, lahko prostor s predstavimo tudi v tej obliki:

$$s = \prod_{i>0} {}^0I_i,$$

kjer smo z  ${}^0I_i$  označili interval  $(0,1)$ . Ta zapis je možen, ker sta premica  $R_i$  in odprti interval  ${}^0I_i$  homeomorfna. Taka predstavitev prostora s je namreč ugodna pri dokazovanju Andersonovega teorema.

Struktura dokaza sestoji iz štirih osnovnih rezultatov, ki jih bomo podali v obliki naslednjih teoremov.

**Teorem A:** Za poljubno števno družino  $\{K_i\}_{i>0}$  kompaktnih množic iz prostora s velja

$$s \setminus \bigcup_{i>0} K_i \sim s.$$

Teorem pove, da lahko iz prostora s izrinemo števno družino kompaktnih množic, pa ostane topološki karakter prostora s nespremenjen. Naslednji teorem se nanaša na prostor  $l_2$ .

**Teorem B:** Če je  $\bigcup_{i>0} E_i$  unija vseh končno dimenzionalnih koordinatnih hiperravnin v  $l_2$ , potem je

$$l_2 \setminus \bigcup_{i>0} E_i \sim l_2.$$

Torej tudi iz prostora  $l_2$  lahko izrinemo neko družino množic, ne da bi se topološki karakter prostora  $l_2$  spremenil.

V teoremu je  $E_i$  določen takole:

$E_i = \{(x_j) | (x_j) \in l_2, x_k = 0, \text{ če je } k > i\}$ . Torej, če imamo  $(x_j) \in E_i$  za točko, pomeni, da ima točka le končno mnogo od nič različnih koordinat.

Preden bomo navedli naslednja teorema, definirajmo dva posredna prostora, ki sta pri dokazu potrebna. Naj bo

$$\tilde{l}_2 = \{(x_j) | (x_j) \in l_2 \setminus \bigcup_{i>0} E_i \text{ in } \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 = 1\}.$$

Prostor  $\tilde{l}_2$  je torej prostor neskončnih zaporedij, v katerih je neskončno členov od nič različnih in vsota kvadratov členov enaka 1. Ali, če zaporedje predstavlja točko v prostoru, leže točke prostora  $\tilde{l}_2$  vse na sferi s polmerom 1 in vsaka točka ima neskončno od nič različnih koordinat. Drugi posredni prostor označimo z  $M_1$ :

$$M_1 = \{(x_j) | (x_j) \in l_2 \setminus \bigcup_{i>0} E_i, x_1 = 1\}.$$

$M_1$  je prostor neskončnih zaporedij, v vsakem od teh zaporedij pa ni končno členov in prvi člen naj bo 1. Sedaj zapišimo teorem, ki daje topološko povezavo med zgoraj omenjenimi prostori.

**Teorem C:**  $\tilde{l}_2 \sim M_1 \sim l_2 \setminus \bigcup_{i>0} E_i \sim l_2$ .

Prva dva homeomorfizma v zgornji relaciji se dasta prav lahko pokazati. Zadnji homeomorfizem je ravno trditev teorema B. Tako sta torej prostora  $\tilde{l}_2$  in  $l_2$  homeomorfna. Na koncu je treba konstruirati še poseben homeomorfizem  $f$  iz prostora  $\tilde{l}_2$  v prostor  $s$ , in sicer tak, da je  $s \setminus f(\tilde{l}_2)$  števna unija kompaktnih množic iz prostora  $s$ . Potem z uporabo teorema A dobimo teorem D.

**Teorem D:**  $f(\tilde{l}_2) \sim s$ .

Iz teoremov A do D dobimo očitno tole relacijo:

$$l_2 \sim \tilde{l}_2 \sim f(\tilde{l}_2) \sim s,$$

iz nje pa neposredno sledi iskani rezultat  $l_2 \sim s$ .

Zgoraj naštetih teoremov ne bomo dokazovali, posebno veliko truda pa zahtevata dokaza teoremov A in B.

Če pogledamo teorema A in B, vidimo, da mora obstajati neki tak homeomorfizem, ki preslika del prostora na ves prostor. Oglejmo si problem splošno. Naj bo  $X$  neskončno dimenzionalen linearni topološki prostor. Iščemo eksistenco take množice  $K$  iz prostora  $X$ , da velja

$$X \setminus K \sim X.$$

Tako množico  $K$ , za katero velja zgornje, imenujemo *zanemarljivo množico*. To pomeni, da se topološki karakter prostora prav nič ne spremeni, če iz njega izrinemo zanemarljivo množico. Obstaja torej poseben problem, kako ugotoviti lastnosti množice  $K$  v danem neskončno dimenzionalnem linearnem topološkem prostoru, da bo množica  $K$  zanemarljiva, ali kako konstruirati tak homeomorfizem, ki preslika  $X \setminus K$  na  $X$ .

Prvi rezultat take vrste je dognal V. Klee, ki je leta 1953 pokazal, da je za poljubno kompaktno množico  $K$  iz prostora  $\setminus l_2$  prostor  $l_2$  homeomorfen  $l_2 \setminus K$ . Problem dokaza teorema A oziroma teorema B je prav v tem, da pokažemo eksistenco zanemarljivih množic na prostorih  $s$  in  $l_2$ .

Na koncu naj omenimo, da se je v zvezi z dokazom teorema porodila cela vrsta odprtih vprašanj na področju neskončno dimenzionalne topologije (glej seznam vprašanj v [2]) in z njimi se prav v tem času bavi nekaj matematikov.

Gabrijel Tomšič

#### LITERATURA:

[1] Anderson R.: Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. AMS 72 (1966), 515-519.

[2] Anderson R., Bing R.: A complete elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. AMS 74 (1968), 771—793.

[3] Anderson R.: Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of open intervals, Trans. AMS 126 (1967), 200—216.

Veljavnost *Newtonovega gravitacijskega zakona* je preverjena z opazovanjem gibanja planetov in dvojnih zvezd ter makroskopskih teles v laboratoriju (ne oziramo se na majhen popravek v splošni teoriji relativnosti, ki je zanesljivo merljiv le pri planetu Merkurju). Zato se zdi utemeljeno pričakovanje, da velja ta zakon tudi za atome in za osnovne delce, iz katerih so sestavljeni atomi, in še za druge osnovne delce. Navzlic temu se v zadnjem času lotevajo poskusov, ki naj bi to pokazali neposredno. Nemogoče je meriti gravitacijsko silo med osamljenima atomoma ali osnovnima delcema; sile električne narave so mnogo večje od nje. Zato merijo silo med Zemljo in atomom ali osnovnim delcem, tako da izmerijo pospešek prosto padajočega curka atomov ali osnovnih delcev. Če velja tudi zanje gravitacijski zakon, se mora izmerjeni pospešek v okviru nenatančnosti pri merjenju ujemati s težnim pospeškom  $9,8 \text{ m/s}^2$  za makroskopska telesa (natančna vrednost je odvisna od geografske širine in od lokalnih razmer). Drugačen izid poskusa bi omajal zaupanje v ta zakon in v *zakon o sorazmernosti težke in vztrajne mase* za atome ali za osnovne delce.

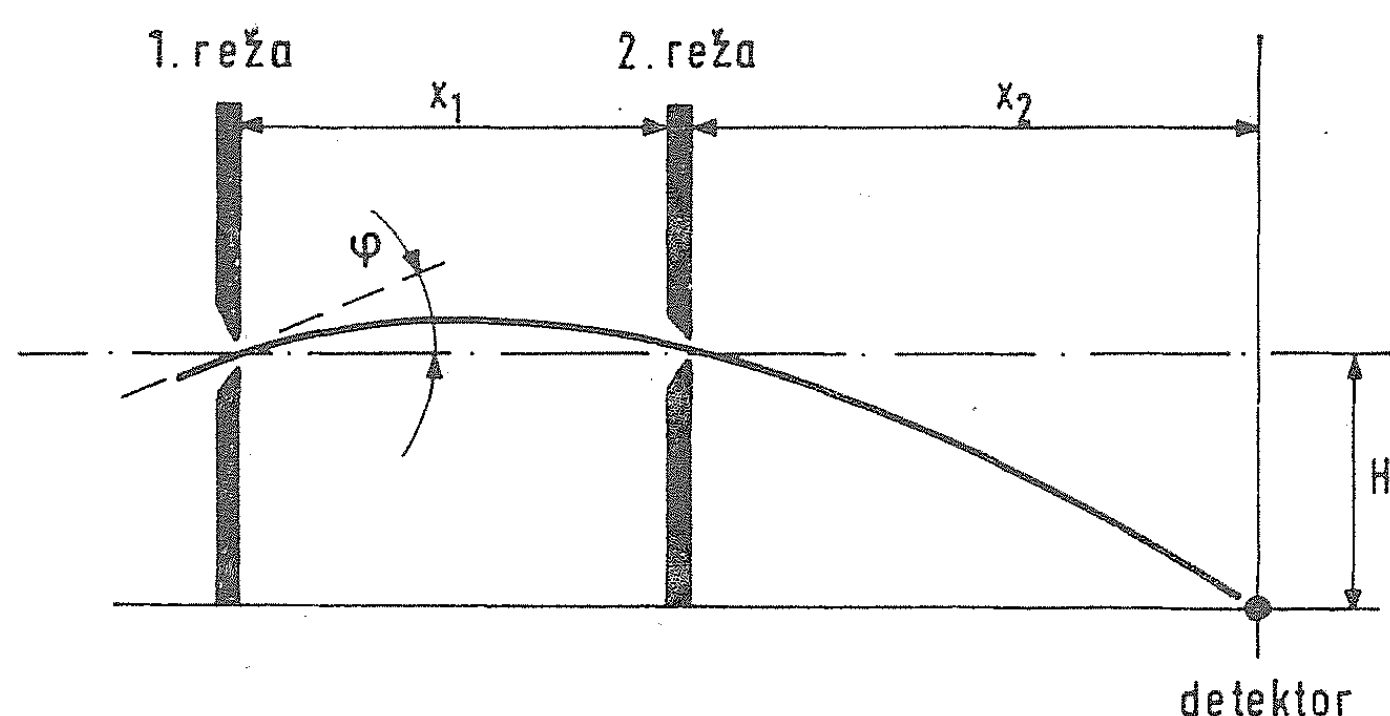
Na kratko bomo opisali poskuse z atomi<sup>1,2</sup>, nevtroni<sup>3-5</sup> in elektroni<sup>6</sup>. Za te poskuse so izkoristili naprave, ki so bile zgrajene za kak drug namen. Le poskus z elektroni je prvi del širše zasnovanega poskusa, s katerim naj bi preverili gravitacijski zakon za osnovne delce in za njihove antidelce. Drugi del — poskus s pozitroni — je v teku. S tem poskusom naj bi se posredno prepričali, da velja gravitacijski zakon tudi za gravitacijsko silo med osnovnim delcem in njegovim antidelcem. Nasprotna možnost, da bi med delcem in antidelcem delovala odbojna gravitacijska sila, eksperimentalno še ni ovržena. Teoretično pa tudi v tem primeru ni razloga, da bi dvomili v veljavnost gravitacijskega zakona. Odbojna gravitacijska sila bi namreč privedla do težav v zvezi z *načelom ekvivalentnosti* v splošni teoriji relativnosti. Po tem načelu veljajo enake enačbe za gibanje teles v nepospešenem opazovalnem sistemu, ki je v gravitacijskem polju z določenim gravitacijskim pospeškom, kot v opazovalnem sistemu, ki se giblje z nasprotno enakim pospeškom zunaj gravitacijskega polja.

Vendar velja omeniti neko zanimivost. Vedno več astrofizikov sodi, da sta v vesolju enakopravno zastopani snov in antisnov, to je snov iz antiatomov, ki imajo v jedrih antiprotone in antinevtrone in okoli njih pozitrone. Tem astrofizikom bi prišla prav odbojna gravitacijska sila med delci in antidelci, to je med snovjo in antisnovjo. S to silo bi namreč preprosto pojasnili, zakaj so se oddaljile galaksije iz snovi od galaksij iz antisnovi in se tako izognile anihilaciji delcev in antidelcev. Obstoj galaksij iz snovi in iz antisnovi se da pojasniti tudi kako drugače; ena izmed možnih razlag je ta, da so nastali zaradi naključja ali iz kakih drugih razlogov v prvotni ognjeni krogli, iz katere se je razvilo vesolje, predeli s presežkom delcev nad antidelci in predeli s presežkom antidelcev nad delci. Čeprav se zdi verjetno, da bo obveljal gravitacijski zakon tudi za delce in antidelce, z zanimanjem pričakujejo končni izid poskusa z elektroni in s pozitroni. — Poskus z elektroni in s pozitroni je pomemben še zaradi tega, ker je privedel do uganke, ki je do zdaj še ni uspelo rešiti. To uganko bomo omenili na koncu sestavka.

\* \* \*

Pri merjenjih z atomskimi in nevtronskimi curki je osnovna zamisel preprosta. Curek določata dve vodoravni reži, ki ležita v isti vodoravni ravnini,

v večji razdalji pa merijo višino, za katero pade curek. Ob prehodu skozi prvo režo je curek nagnjen za zelo majhen kot  $\varphi$  proti vodoravnici. Os  $x$  koordinatnega sistema, ki ima izhodišče v tej reži, postavimo vodoravno v smeri curka, a os  $z$  usmerimo navpično navzgor. V tem primeru določa curek enačba  $z = \varphi x - \frac{1}{2} g x^2 / v^2$  za tir telesa pri poševnem metu. Kot  $\varphi$  je zelo majhen, zato smo v prvem členu postavili  $\varphi$  namesto  $\tan \varphi$  in v drugem 1 namesto  $1/\cos^2 \varphi$ . Curek gre skozi drugo režo pri  $x = x_1$  in  $z = 0$ , tako da mora biti  $\varphi = \frac{1}{2} g x_1 / v^2$ . V razdalji  $x = x_2$  je tedaj višina, za katero pade curek, dana z enačbo (sl. 1).



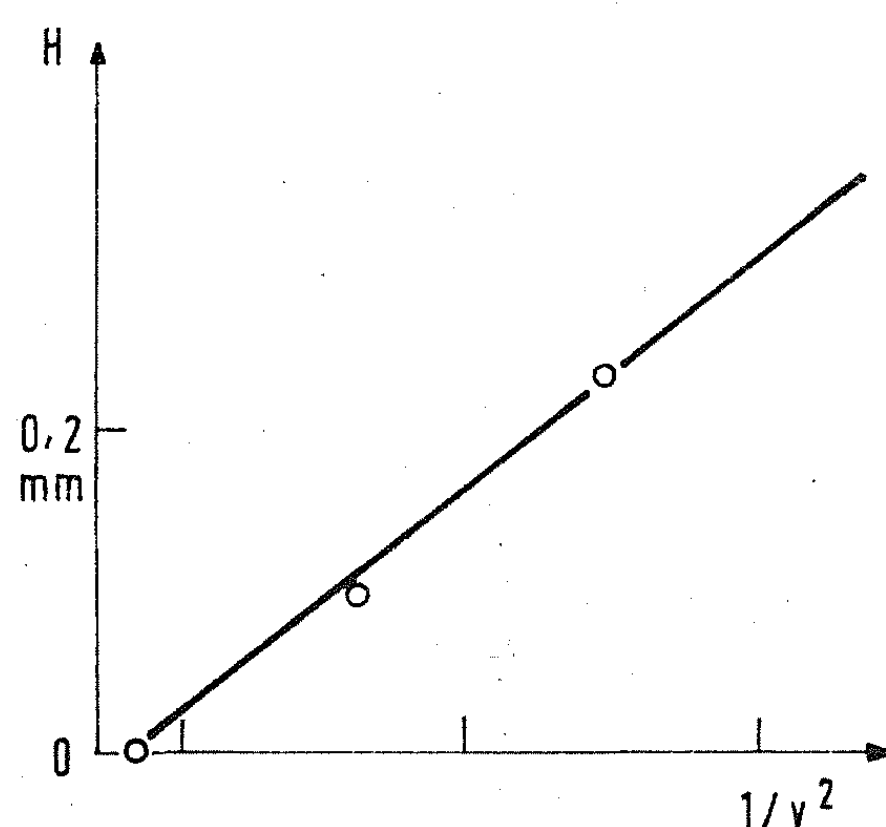
Sl. 1. Geometrijske razmere pri poševnem curku, ki gre skozi dve reži

$$H = -z(x_2) = \frac{1}{2} g x_2 (x_2 - x_1) / v^2 \quad (1)$$

Najprej omenimo merjenja, ki so jih s curkom cezija in kalija napravili I. Esterman, O. C. Simpson in O. Stern.<sup>1</sup> Pravzaprav so merili hitrostno porazdelitev atomov v curku. Curek je šel iz pečice skozi prvo in nato skozi drugo režo v razdalji  $x_1 = 1$  m in zadel detektor v razdalji  $x_2 = 2$  m. Tlak je bil manjši kot  $10^{-7}$  tora. Kot detektor je služila vodoravna segreta volframova žička. Atomi, ki so jo zadeli, so izpareli kot ioni in odleteli proti valjasti elektrodi, na katero je bila priključena negativna napetost proti žički. Tok ionov je bil sklenjen prek upornika z zelo velikim uporom in je naravnost meril število atomov iz curka, ki so v časovni enoti zadeli žičko. Z merjenjem toka v odvisnosti od višine žičke  $H$ , ki so jo naravnavali z mikrometrskim vijakom, so določili hitrostno porazdelitev, saj ustreza izbrani višini po (1) določena hitrost. Ugotovili so, da je bila — skladno s pričakovanjem — verjetnost, da je imel atom hitrost med  $v - \frac{1}{2} dv$  in  $v + \frac{1}{2} dv$  sorazmerna Maxwellovi porazdelitvi za atome v posodi, pomnoženi s hitrostjo  $v$  atomov v curku (torej z  $v \cdot e^{-mv^2/2kT} \cdot 4\pi v^2 dv$ ). Zaradi večje mase so imeli atomi cezija manjše hitrosti kot atomi kalija pri isti temperaturi. Vrh porazdelitve je bil za prve pri  $H = 0,174$  mm in za druge pri  $H = 0,04$  mm. Iz dobljenih rezultatov je zares sledilo, da velja za atome v curku ista enačba kot za poševni met makroskopskih teles. Vendar niso poskušali oceniti zanesljivosti poskusa z navedbo težnega pospeška za atome. (Pokazalo se je, da je bilo atomov z majhnimi hitrostmi v curku nekoliko premalo. Toda ta primanjkljaj so pojasnili s sipanjem počasnih atomov na drugih atomih tik pred vstopno režo.)

N. B. Johnson in J. C. Zorn sta s podobno napravo ponovila poskus s curkom kalijevih atomov.<sup>2</sup> Reži sta bili v razmiku 0,76 m, detektor pa je bil v razdalji 2,11 m. Med režama je bil hitrostni izbiralnik, kar je bila bistvena izboljšava. Sestavljalo ga je šest zobatih koles s po 280 zobmi na skupni osi, ki jo je poganjal sinhronski motor. S spreminjanjem frekvenc gonilne napetosti so uravnavali kotno hitrost koles, kontrolirali pa so jo s curkom svetlobe in s foto celico. Napetost na uporniku z velikim uporom so merili z elektro-

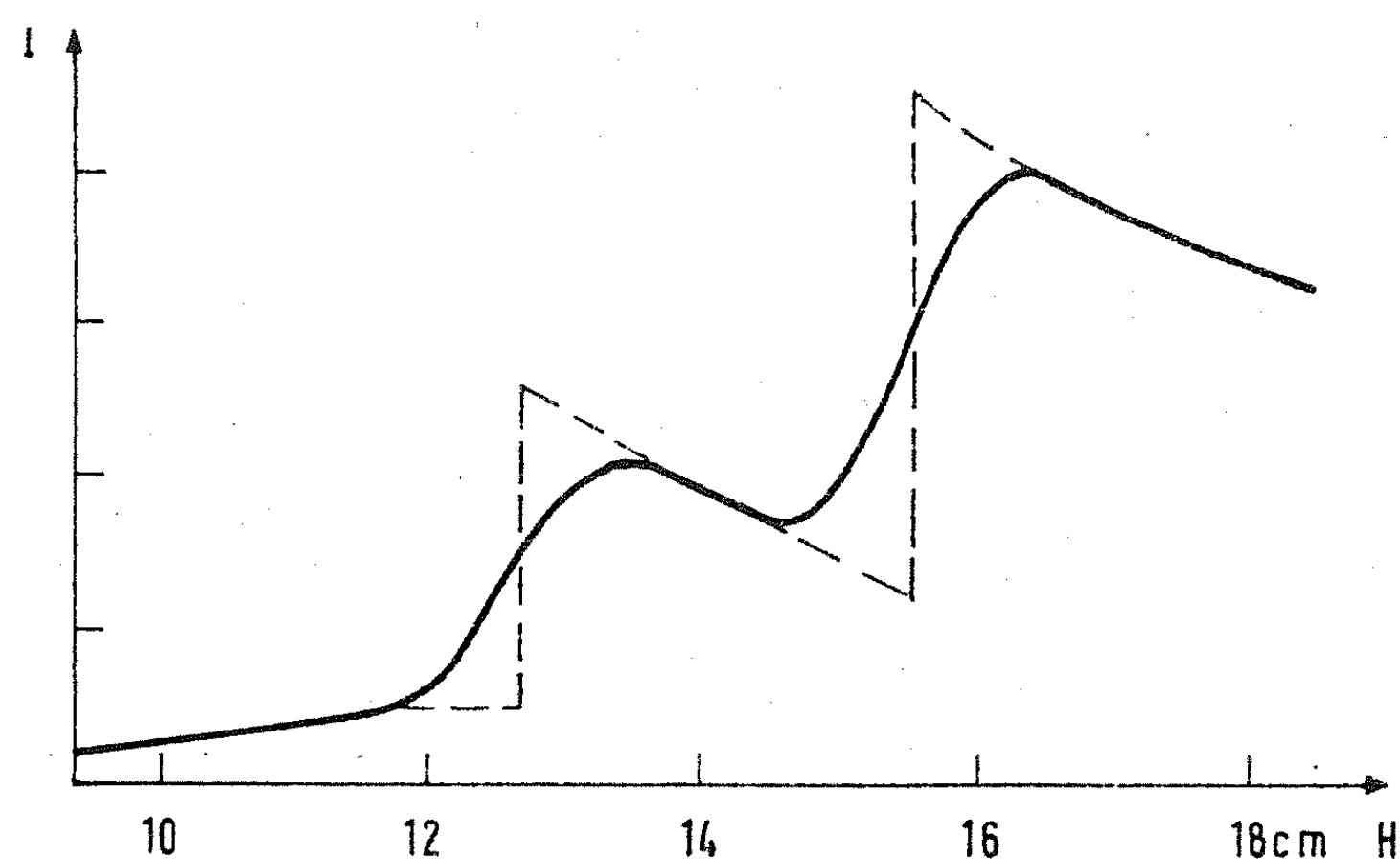
metrom na nihajoči jeziček. Na stotinko milimetra zanesljivo so poiskali lego žičke, v kateri jo je zadelo pri dani hitrosti največ atomov. Tako so dobili odvisnost višine  $H$  od hitrosti  $v$ . Premici v diagramu  $H(v^{-2})$  je ustrezal pospešek  $9,6 \text{ m/s}^2$ , ki je bil zaradi merskih napak negotov za  $\pm 0,2 \text{ m/s}^3$  (sl. 2).



Sl. 2. Višina, za katero pade curek kalijevih atomov, v odvisnosti od kvadrata obratne vrednosti hitrosti.<sup>2</sup> Merske točke se nanašajo na hitrosti 5,51 km/s, 3,01 km/s in 2,26 km/s

Padanje curka nevtronov je prvi opazoval A. W. McReynolds.<sup>3</sup> Curek termičnih nevtronov iz reaktorja je šel najprej skozi reži v razmiku 1,5 m, v razdalji 11,6 m pa je štel nevtrone proporcionalni števec z borovim fluoridom. Najprej so merili z neoslabljenim curkom termičnih nevtronov, za katere je bila najverjetnejša hitrost 3,95 km/s. Potem so postavili v curek kos berilijevega oksida, ki je prepustil v znatni meri le nevtrone z manjšo hitrostjo kot 0,9 km/s. Iz Braggove enačbe  $2d \cos a = N\lambda = Nh/mv$ , v kateri je  $d$  mrežna razdalja,  $a$  vpadni kot in  $\lambda = h/mv$  valovna dolžina nevtronov, sledi namreč, da se sipajo le nevtroni z večjo hitrostjo kot  $h/2md$ . Teh nevtronov potem ni v prepuščenem curku, zato je pri hitrosti  $h/2md$  opazen »absorpcijski« rob. Počasnejši curek nevtronov, ki so šli skozi kos berilijevega oksida, je padel za  $H - H' = 1,2 \text{ mm}$  nižje kot neoslabljeni curek. S tem podatkom in z razliko poprečnih vrednosti  $v^{-2}$  in  $v'^{-2}$  v obeh curkih so dobili iz enačbe (1) za pospešek nevtronov  $9,35 \text{ m/s}^2$ . Negotovost zaradi napak pri merjenju je bila še  $\pm 0,7 \text{ m/s}^2$ . Podobno nezanesljiv rezultat je dal tudi poskus s hitrimi nevtroni in s termičnimi nevtroni po preletu 100 m dolge poti.

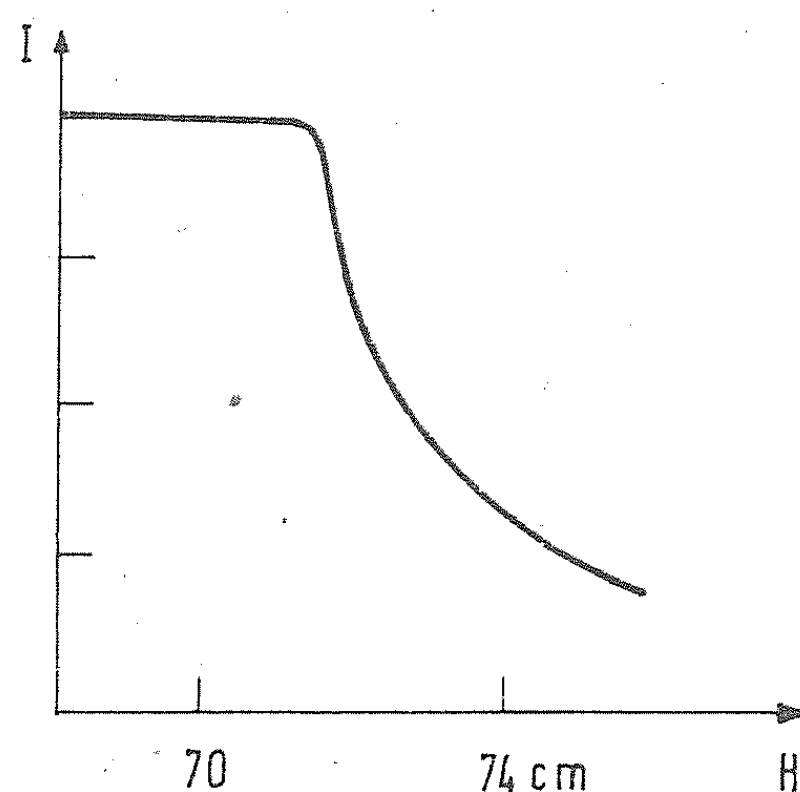
Zanesljiveje je meril J. W. T. Dabbs s sodelavci.<sup>4</sup> Pri tem sta bili reži v razmiku 3,94 m, števec za nevtrone pa je bil v evakuirani cevi v razdalji 180,58 m. Curek hitrih nevtronov, ki so šli skozi kos iz zlitine bora in aluminija



Sl. 3. Nevtronski tok v odvisnosti od višine, za katero pade curek.<sup>4</sup> Črtkano je narisana krivulja, ki bi jo pričakovali, če bi imeli vsi nevtroni enako hitrost in če ne bi bilo absorpcije; na njej sta dobro vidna »absorpcijska« robova

in skozi tanko plast kadmija, ni padel zaznavno in so z njim določili vodoravnico. Nevtroni, ki so padli za znatno višino, pa so zadeli na kos berilija. Absorpcijska robova, ki sta ustrezala skupinam mrežnih ravnin z razmikoma  $1,987 \text{ \AA}$  in  $1,289 \text{ \AA}$ , sta določala po enačbi  $v = h/md$  hitrosti  $0,94 \text{ km/s}$  in  $1,04 \text{ km/s}$ . Nevtroni s tema hitrostma so padli za  $15,5 \text{ cm}$  in za  $12,7 \text{ cm}$  (sl. 3). Iz enačbe (1) sta sledila za ta primera pospeška  $(9,75 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$  in  $(9,73 \pm 0,07) \text{ m/s}^2$ , medtem ko je bila lokalna vrednost težnega pospeška  $9,797 \text{ m/s}^2$ . V prvem primeru se je v merjenja najbrž vtihotapila kaka sistemska napaka.

L. Koester je meril nekoliko drugače.<sup>5</sup> V evakuirano  $100 \text{ m}$  dolgo cev je vstopil vodoraven curek termičnih nevtronov. Na koncu cevi so nevtroni zadeli pod majhnim kotom proti vodoravnici »zrcalo« iz ksilola ali kake podobne snovi. Te snovi imajo za nevtrone lomni kvocient  $1 - \frac{1}{2} \lambda^2 a_k n / \pi$ . Pri tem je  $\lambda = h/mv$  valovna dolžina,  $n$  gostota atomskih jeder, to je kar število atomov v prostorninski enoti, in  $a_k$  koherentna sipalna dolžina. Če pade curek na površje zrcala pod manjšim kotom kot  $\lambda (na_k/\pi)^{1/2}$ , kar meri navadno kakih deset kotnih minut, pride do totalnega odboja. Curek, ki je spočetka vodoraven, pade v razdalji  $x_2$  za višino  $H = -z(x_2) = \frac{1}{2} g x_2^2 / v^2$  (kot pri vodoravnem metu). Nagib curka, ki je padel za višino  $H$ , je  $|dz/dx| = g x_2 / v^2 = (Hg^2)^{1/2} / v$ , tako da ustreza mejnemu kotu  $\lambda (na_k/\pi)^{1/2}$  mejna višina  $\frac{1}{2} h^2 na_k / \pi m^2 g$ . Pri večjih višinah število nevtronov v odbitem curku hitro pade. Padec je postopen zaradi



Sl. 4. Nevtronski tok v odvisnosti od višine gladine za zrcalo iz ogljikovega tetra-klorida<sup>5</sup>

absorpcije in nekoherentnega sipanja (sl. 4). Iz mejne višine je izračunal Koester za pospešek nevtronov  $(9,78 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$ , medtem ko je bil lokalni težni pospešek  $9,808 \text{ m/s}^2$ .

\* \* \*

Merjenje z elektroni je mnogo zahtevnejše kot merjenje z nevtralnimi delci. Opazovati jih je treba v prostoru brez polja ali v šibkem navpičnem električnem polju z znano jakostjo. Najbolje je uporabiti evakuirano kovinsko posodo, v katero ne prodrejo zunanja statična električna polja. Treba pa je razmisliti, ali v kovini, ki miruje v težnem polju Zemlje, ali v votlini v kovini ni prav nobenega še tako šibkega električnega polja, tudi če po kovini ne teče noben električni tok. S preprostim premislekom hitro ugotovimo, da povzroči težnost v kovini šibko električno polje.

Vzemimo, da bi bila kovina sestavljena iz toge mreže pozitivnih ionov in iz plina prevodniških elektronov. Ker je plin v ravnovesju, mora biti v poprečju teža prevodniškega elektrona uravnovešena z neko silo. To je lahko le električna sila zaradi električnega polja v kovini:  $m_0 g = e_0 E$ . Po tem dobimo za jakost električnega polja v kovini, če po njej ni toka, ali v votlini v tej kovini

ali v neposredni bližini kovine  $E_g = m_0 g / e_0 = 5,7 \cdot 10^{-11}$  V/m navpično navzdol. Tak rezultat je dala tudi teorija L. I. Schiffa in M. V. Barnhilla, ki sta privzela, da je mreža ionov toga.<sup>7</sup> Ta jakost polja je neznatna, a pri poskusih s padanjem elektronov jo je treba upoštevati. Teža v tem primeru ravno uravnovesi električno silo na prost elektron v votlini in elektron se ne giblje pospešeno, če v kovini ni toka. — Pozitron, za katerega ima ta električna sila enako smer kot teža, pa pada s pospeškom  $2g$ .

F. C. Witteborn in W. M. Fairbank sta merila z elektroni v valjasti bakreni cevi pri temperaturi tekočega helija 4,2 K in pri tlaku  $10^{-11}$  tora.<sup>6</sup> Cev je bila dolga nekaj manj kot meter in je imela zelo enakomeren premer 5 cm. Magnetno polje superprevodne tuljave, ki je bila navita koaksialno s cevjo, je sililo elektrone, da se niso odklanjali iz navpične smeri. To magnetno polje z gostoto  $10^{-3}$  T je bilo konstantno na  $\pm 5 \cdot 10^{-6}$  T in z enako zanesljivostjo je bilo kompenzirano zemeljsko magnetno polje. Posamezne elektrone je zaznavala elektronska pomnoževalka. Po vsakem sunku elektronov, ki ga je oddala katoda, je analizator razvrstil zaznane elektrone po času preleta med katodo in pomnoževalko na intervale s širino 2,5 ms. Iz vsakega sunka je zaznala pomnoževalka okoli milijardo elektronov, a kvečjemu eden izmed njih je ob izstopu iz katode praktično miroval. Po bakreni cevi so speljali majhen električni tok, tako da je bilo v votlini dodatno električno polje z jakostjo  $E'$ . Na elektron je delovala vsota sil  $m_0 g - E_g e_0 + e_0 E' = e_0 E'$ , zaradi katere se je elektron gibal pospešeno. Elektron, ki je spočetka miroval, je preletel višino  $H$  v času  $(2 m_0 H / e_0 E')^{1/2}$ . Drugi elektroni so potrebovali manjši čas. Dobljene podatke so obdelali z računalnikom in ugotovili, da se dobro ujemajo s pričakovanji. Zdelo se je, da zares deluje na prost elektron s težo  $m_0 g$  v votlini v kovini polje s silo  $e_0 E_g = m_0 g$ .

Toda pojavili so se ugovori proti teoriji Schiffa in Barnhilla. A. J. Dessler in sodelavci in C. Herring so pokazali, da mreže ionov ne smemo imeti za togo.<sup>8,9</sup> Če bi privzeli, da tvorijo ioni plin podobno kot prevodniški elektroni, bi po enakem premisleku kot prej ugotovili, da je v kovini ali votlini polje z jakostjo  $Mg/e_0$  v smeri navzgor. Masa iona  $M$  je več kot tisočkrat večja kot masa elektrona, zato bi bilo po tem v kovini polje z jakostjo nekako  $10^{-6}$  V/m. To polje bi popolnoma prevladalo nad poljem zaradi teže elektronov samih. Tudi jakost  $10^{-6}$  V/m je še zelo majhna in je ne moremo zaznati razen v posebnih primerih (za primerjavo: jakost statičnega električnega polja v ozračju meri okoli sto V/m). V resnici ioni niso prosti, ampak so vezani v kristalno mrežo, toda to bistveno ne spremeni končnega sklepa.\*

---

\* Namesto mase iona je treba postaviti  $aM$ , če je  $a = \chi/\chi_e$  razmerje med stisljivostjo kovine  $\chi = -V^{-1}dV/dp$  pri natezanju ali stiskanju v eni smeri in stisljivosti elektronskega plina  $\chi_e$ . Stisljivost kovine je približno enaka obratni vrednosti prožnostnega modula  $Y$ . Natančneje je  $\chi = (1 - 2\mu)/Y$ ; pri tem upoštevamo s Poissonovim številom  $\mu$  prečno skrčitev pri natezanju ali prečno raztegnitev pri stiskanju. Kos kovine, ki prosto stoji ali prosto visi, se namreč zaradi lastne teže deformira tako, da je na spodnjem kraju gostota večja kot na zgornjem. Prevodniške elektrone obravnavamo kot Fermijev plin, za katerega velja enačba  $p_e = \frac{2}{3} n_e W_1$ , če je  $n_e$  gostota prevodniških elektronov in  $W_1$  poprečna kinetična energija elektrona.  $W_1$  je sorazmerna z  $n_e^{-2/3}$ . Po tem je obratna vrednost stisljivosti  $1/\chi_e = -V dp_e/dV = n_e dp_e/dn_e = 5 p_e/3 = 10 n_e W_1/9$ . Tako dobimo  $a = 10(1 - 2\mu) n_e W_1/9 Y$ . Za enovalentne kovine je gostota prevodniških elektronov enaka gostoti atomov. Ocenimo velikostno stopnjo  $a$  za baker: za  $Y/(1 - 2\mu)$  postavimo  $10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, za  $n_e$   $10^{29}$  m<sup>-3</sup> in za  $W_1$  kar podatek za temperaturo 0 K — okoli 1 eV —, pa dobimo približno  $a = 0,1$ .

Vprašanje, zakaj Witteborn in Fairbank nista ugotovila tega znatno močnejšega polja, mora ostati za zdaj brez zanesljivega odgovora. Avtorja namreč ne omenjata podrobno, kako sta merila zelo majhno dodatno jakost električnega polja  $E'$ . Medtem pa je J. C. Beams zelo verjetno ugotovil električno polje zaradi deformacije mreže ionov ob hitro se vrtečem kovinskem rotorju.<sup>10</sup> V tem primeru nastopa namesto težnega pospeška radialni pospešek  $\omega^2 r$ , če je  $\omega$  kotna hitrost rotorja in  $r$  razdalja od osi. Velikostna stopnja jakosti električnega polja je

$$E_\omega = \omega^2 r M / e_0$$

in velikostna stopnja napetosti med osjo in obodom rotorja je

$$U = \left| - \int_0^R E dr \right| = \frac{1}{2} M v_0^2 / e_0$$

Tu je  $R$  radij rotorja in  $v_0 = \omega R$  njegova obodna hitrost. Pri obodni hitrosti 330 m/s je Beams ugotovil napetost okoli 1 mV. Napetost je bila približno sorazmerna s kvadratom obodne hitrosti in obod je bil pozitiven glede na os. Če bi bila mreža toga, bi morala biti napetost obrnjena nasprotno in mnogo manjša:  $\frac{1}{2} m_0 v_0^2 / e_0$ .

Beams je meril z rotorji iz zlitine — iz duraluminija — pri sobni temperaturi in pri tlaku  $10^{-6}$  tora. Rotor iz katerega koli neferomagnetnega elementa bi se pri tako veliki hitrosti plastično deformiral. Jekla pa ni hotel uporabiti, da ne bi bilo težav pri kompenzaciji zemeljskega magnetnega polja. (V homogenem magnetnem polju s komponento gostote v smeri osi rotorja  $B$ , se namreč med osjo in obodom rotorja inducira napetost  $\frac{1}{2} \omega^2 R B$ .) Vendar je med merjenji ugotovil, da se da tudi pri feromagnetnih rotorjih brez večjih težav kompenzirati zemeljsko magnetno polje. Zato namerava v prihodnosti delati poskuse s takimi rotorji. Rotor je imel obliko križa s premerom 15 cm. Poganjalo ga je tanko vreteno, ki je segalo skozi tesnilni ležaj v vakuumsko posodo in na katerega je bila na prostem pritrjena majhna plinska turbina. Napetost so merili s sondami, na katerih se je influenciral naboj, ko se je mimo njih gibal krak rotorja. Merski rezultati niso bili zelo zanesljivi. Verjetno je motilo nenakomerno segrevanje rotorja zaradi upora v preostalem plinu.

Povzemimo: zdi se, da je Schiff-Barnhillova teorija pomanjkljiva, toda Wittebornova in Fairbankova merjenja se, kot kaže, začuda dobro ujemajo z njo. Na drugi strani pa Beamsova merjenja, čeprav še nenatančna — govorijo v prid popolnejši teoriji Desslerja in sodelavcev in Herringa. Težave so eksperimentalne narave, a tudi glede jakosti električnega polja, ki ga v kovini in tik ob njenem površju vzbudi težnost, še ni vse jasno. Kovino sestavlja namreč množica drobnih kristalov, ki so različno orientirani. Zaradi tega nastane ob površju kovine v mikroskopskih razmerah zelo močno in od kraja odvisno električno polje. Vpliv tega pojava (angl. *patch effect*) na izid poskusa še ni popolnoma pojasnjen. Seveda pa navzlic temu le malokdo pričakuje, da za elektrone ne bi veljal gravitacijski zakon. Upajmo, da bodo novi poskusi z elektroni in poskus s pozitroni kmalu dali odgovor na vsa vprašanja.

J. Strnad

#### LITERATURA

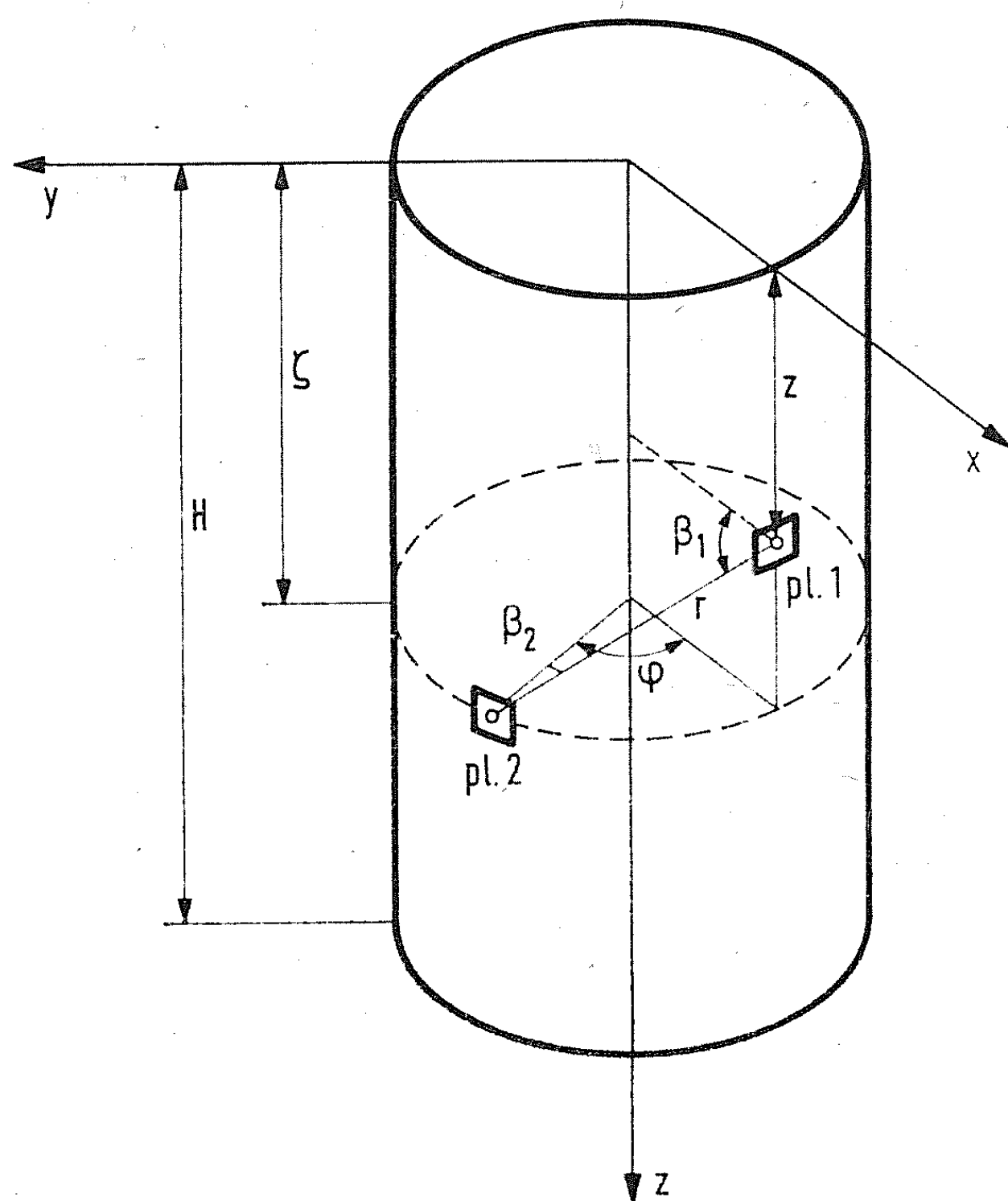
<sup>1</sup> I. Esterman, O. C. Simpson, O. Stern: The Free Fall of Atoms and the Measurment of the Velocity Distribution in a Molecular Beam of Cesium Atoms, Phys. Rev. **71**, 238 (1947).

- <sup>2</sup> N. B. Johnson, J. C. Zorn: The Free Fall of Atoms, Am. J. Phys. **37**, 554 (1969).  
<sup>3</sup> A. W. McReynolds: Gravitational Acceleration of Neutrons, Phys. Rev. **83**, 172 (1951); Direct Measurement of Gravity Acceleration of Neutrons, Phys. Rev. **83**, 233 (1951).  
<sup>4</sup> J. W. T. Dabbs, J. A. Harvey, D. Paya, H. Horstmann: Gravitational Acceleration of Free Neutrons, Phys. Rev. **139**, 756 (1965).  
<sup>5</sup> L. Koester: Absolutmessung der kohärenten Streulängen von Wasserstoff, Kohlenstoff und Chlor sowie Bestimmung der Schwerebeschleunigung für freie Neutronen mit dem Schwerkraft-Refraktometer am FRM, Z. Phys. **198**, 187 (1967).  
<sup>6</sup> F. C. Witteborn, W. M. Fairbank: Experimental Comparison of the Gravitational Force on Freely Falling Electrons and Metallic Electrons, Phys. Rev. Letters **19**, 1049 (1967).  
<sup>7</sup> L. I. Schiff, M. V. Barnhill: Gravitation-Induced Electric Field near a Metal, Phys. Rev. **151**, 1067 (1966).  
<sup>8</sup> A. J. Dessler, F. C. Michel, H. E. Rorschach, G. T. Trammell: Gravitationally Induced Electric Fields in Conductors, Phys. Rev. **168**, 737 (1968).  
<sup>9</sup> C. Herring: Gravitationally Induced Electric Field near a Conductor, and Its Relation to the Surface-Stress Concept, Phys. Rev. **171**, 1361 (1968).  
<sup>10</sup> J. C. Beams: Potentials on Rotor Surfaces, Phys. Rev. Letters **21**, 1083 (1968).

## KAKO POJEMA SVETLOST OKROGLEGA JAŠKA Z GLOBINO?\*

Pri reševanju fizikalnih problemov naletimo pogosto na diferencialne enačbe, medtem ko srečujemo integralne enačbe mnogo redkeje. Vendar poznamo primere, pri katerih pridemo naravneje do integralnih enačb in teh celo ne moremo prevesti v diferencialne, na primer pri sipanju svetlobe v megli ali nevtronov v moderatorju. Do integralne enačbe pridemo tudi, če se zanimamo za svetlost v okroglem jašku s hrapavimi sivimi stenami. Za ta poučni zgled<sup>1</sup> bomo izpeljali integralno enačbo in jo približno rešili za izbrane podatke. Dno jaška naj bo črno, nad jaškom naj bo enakomerno svetlo nebo. Albedo sten  $\lambda$  meri 0,8, razmerje med globino jaška in njegovim radijem je 4.

Radij jaška izberemo za enoto dolžine. Svetlost sten zaradi simetrije ni odvisna od polarnega kota  $\varphi$ , odvisna je samo od globine  $z$ . Svetlost sten



Sl. 1. Geometrijske razmere pri izvajanju integralne enačbe za svetlost sten v jašku

\* Povzetek dela, ki je bilo nagrajeno s Prešernovo nagrado za študente leta 1969.

zaznamujemo z  $B_0 u(z)$ , če je  $B_0$  svetlost neba. Izberemo ploskovni element stene pl 1 s koordinatami  $(1, 0, z)$  in ploskovni element stene pl 2 s koordinatami  $(\cos \varphi, \sin \varphi, \zeta)$  in s površino  $dS = d\varphi d\zeta$  (sl. 1). Po Lambertovem zakonu, ki velja za svetila s hrapavim površjem, je svetilnost elementa pl 2 pod kotom  $\beta_2$  proti pravokotnici  $dI = B_0 u(\zeta) dS \cos \beta_2$ , če je  $B_0 u(\zeta)$  svetlost tega elementa. Element pl 2 seva svetlobni tok, ki ima na elementu pl 1 gostoto  $dj(z) = dI/r^2$ , če je  $r$  razdalja obeh elementov. Osvetljenost elementa pl 1 je potem  $dj'(z) = dI \cos \beta_1 / r^2$ , če je  $\beta_1$  kot med zveznico obeh elementov in pravokotnico na pl 1. Odbiti del gostote svetlobnega toka  $dj^* = \lambda dj'(z)$  je po Lambertovem zakonu povezan s svetlostjo elementa pl 1:  $dj^*(z) = \pi B_0 du(z)$ .<sup>2</sup> Z združitvijo teh enačb dobimo:  $\pi B_0 du(z) = \lambda \cos \beta_1 \cos \beta_2 B_0 u(\zeta) r^{-2} dS$ . Vektor  $\mathbf{r}$ , ki sega od elementa pl 2 do elementa pl 1 ima komponente  $(1 - \cos \varphi, -\sin \varphi, \zeta - z)$ . Z njegovo velikostjo je določena razdalja obeh elementov  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi + (z - \zeta)^2 = 2(1 - \cos \varphi) + (z - \zeta)^2$ . Skalarni produkt enotnega vektorja  $\mathbf{r}/r$  in enotnega vektorja v smeri pravokotnice na pl 2  $(-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$  da  $\cos \beta_2 = (1 - \cos \varphi)/r$ . Skalarni produkt enotnega vektorja  $-\mathbf{r}/r$  in enotnega vektorja v smeri pravokotnice na pl 1  $(-1, 0, 0)$  pa da  $\cos \beta_1 = (1 - \cos \varphi)/r$ .

Skupno svetlost elementa pl 1 dobimo, če upoštevamo prispevke vseh mogočih elementov pl 2, se pravi, če integriramo po vsej steni. Končno dobimo:

$$u(z) = f(z) + \pi^{-1} \lambda \int u(\zeta) d\zeta \int (1 - \cos \varphi)^2 (2(1 - \cos \varphi) + (z - \zeta)^2)^{-2} d\varphi \quad (1)$$

Tu smo vstavili  $dS = d\zeta d\varphi$ . Po  $\zeta$  integriramo od nič do  $H$ , če je  $H$  globina jaška, merjena v radijih, po  $\varphi$  pa integriramo od 0 do  $2\pi$ . Na desni strani smo s  $f(z)$  upoštevali še prispevek neba.

Integracijo po kotu  $\varphi$  izvršimo, potem ko vpeljemo novo spremenljivko  $\alpha$ :  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \alpha$  in dobimo

$$u(z) = f(z) + \pi^{-1} \lambda \int_0^H u(\zeta) [1 - |z - \zeta| ((z - \zeta)^2 + 6)(z - \zeta)^2 + 4)^{3/2}] d\zeta \quad (2)$$

Treba je določiti še prispevek neba  $f(z)$ . Enakomerno svetlo nebo si lahko mislimo v poljubni razdalji. Ker poznamo prispevek sten valja s svetlostjo  $u(\zeta)$  za poljuben  $\zeta$ , je najugodnejše, če nadomestimo nebo z valjem, ki sega kot podaljšek jaška v neskončnost. Za prispevek neba velja podobna enačba kot za prispevek sten, le da je treba vstaviti v (2) 1 namesto  $u(\zeta)$  in da teče integracija po  $\zeta$  od 0 do  $-\infty$ . Pri integraciji po kotu  $\varphi$  postopamo kot prej, zdaj pa lahko izvedemo tudi integracijo po  $\zeta$ . Končno dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= \pi^{-1} \lambda \int_0^{-\infty} d\zeta \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 (2(1 - \cos \varphi) + (z - \zeta)^2)^{-2} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \lambda ((z^2 + 2)/(z^2 + 4)^{1/2} - z) \end{aligned} \quad (3)$$

Za svetlost sten jaška v globini  $z$  dobimo tako integralno enačbo

$$u(z) = f(z) + \frac{1}{2} \lambda \int_0^H u(\zeta) J(|z - \zeta|) d\zeta \quad (4)$$

V njej je  $J(|z - \zeta|) = 1 - |z - \zeta| ((z - \zeta)^2 + 6)/((z - \zeta)^2 + 4)^{3/2}$  jedro integralne enačbe in  $f(z)$ , ki ga določa (3), njen nehomogeni del. Jedro je simetrično, ker je odvisno samo od absolutne vrednosti razlike  $z - \zeta$ . (4) je *nehomogena integralna enačba Fredholmovega tipa*. Enačbe te vrste so v teoriji integralnih enačb

najbolje obdelane. Le redko so rešljive z znanimi funkcijami, poznamo pa večje število numeričnih metod, s katerimi poiščemo približno rešitev za izbrani primer. Enačba (4) je rešljiva za vsak  $\lambda$ , ki ni enak lastni vrednosti ustrezne homogene enačbe. Pokazati se da, da ima (4) rešitev za vsak  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Fizikalno zanimive so samo rešitve za ta primer.

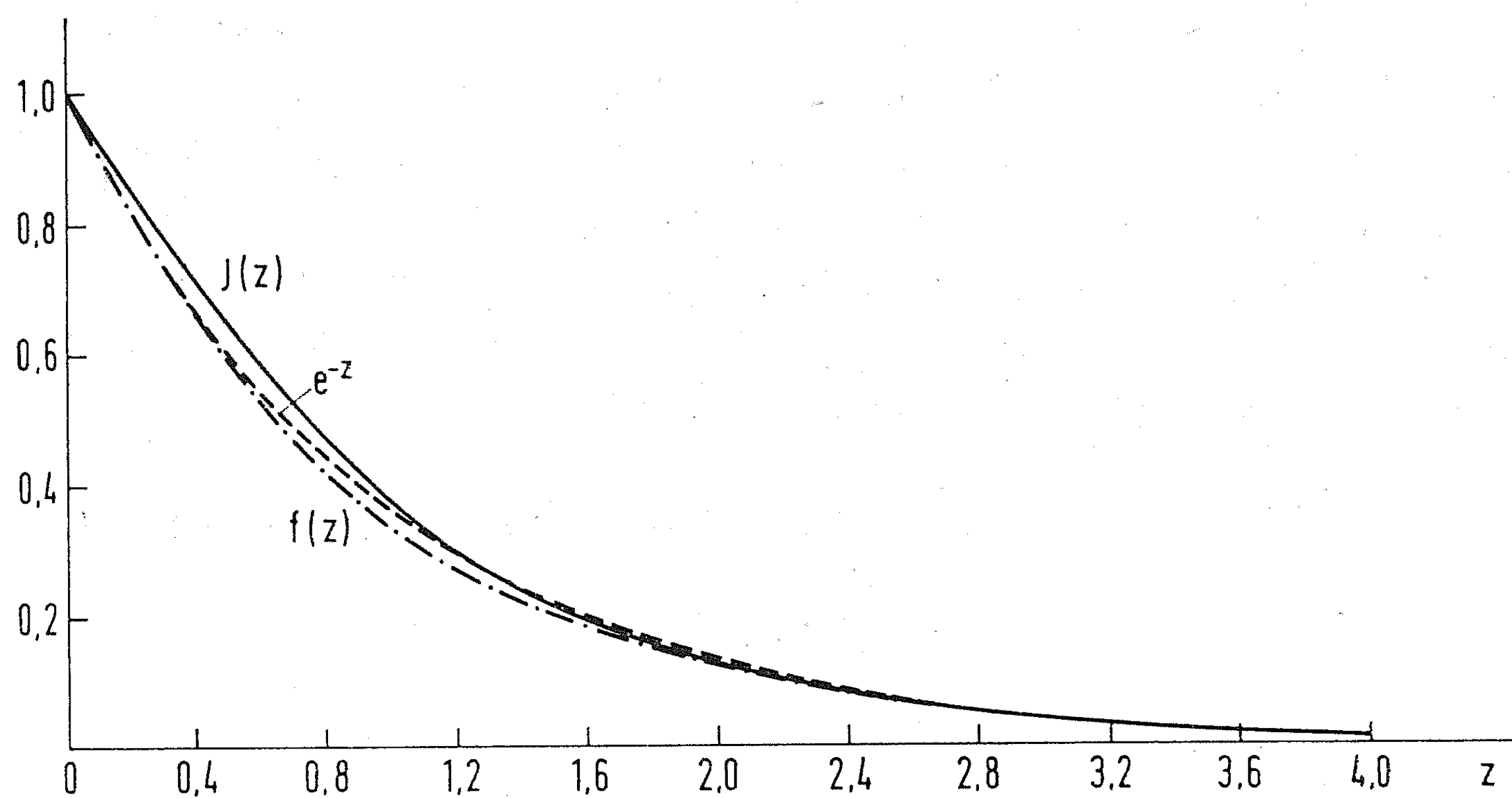
V tabeli I so zapisane približne rešitve integralne enačbe (4), izračunane za  $\lambda = 0,8$  in  $H = 4$  po treh numeričnih metodah:<sup>3, 4</sup>

- a) z numeričnim reševanjem po točkah (Nyströмова metoda),
- b) z metodo zaporednih približkov in
- c) z nastavkom.

a) Pri numeričnem reševanju po točkah je treba nadomestiti integral v enačbi (4) z vsoto končnega števila členov, tako da uporabimo eno izmed kvadraturenih formul. Ker ima jedro  $J(|z - \zeta|)$  nezvezen prvi odvod, je najprimernejša trapezna formula.

T a b e l a I

| $z$  | $J(z)$ | $f(z)$ | $u_I(z)$ | $u_{II}'(z)$ | $u_{II}''(z)$ | $u_{III}(z)$ |
|------|--------|--------|----------|--------------|---------------|--------------|
| 0,00 | 1,0000 | 1,0000 | 0,5549   | 0,5497       | 0,5496        | 0,5492       |
| 0,40 | 0,7096 | 0,6590 | 0,4572   | 0,4541       | 0,4540        | 0,4571       |
| 0,80 | 0,4685 | 0,4256 | 0,3802   | 0,3724       | 0,3723        | 0,3797       |
| 1,20 | 0,2964 | 0,2749 | 0,3145   | 0,3050       | 0,3048        | 0,3145       |
| 1,60 | 0,1849 | 0,1804 | 0,2589   | 0,2496       | 0,2495        | 0,2598       |
| 2,00 | 0,1161 | 0,1213 | 0,2123   | 0,2039       | 0,2038        | 0,2125       |
| 2,40 | 0,0744 | 0,0839 | 0,1734   | 0,1656       | 0,1655        | 0,1725       |
| 2,80 | 0,0488 | 0,0597 | 0,1378   | 0,1329       | 0,1328        | 0,1381       |
| 3,20 | 0,0329 | 0,0436 | 0,1079   | 0,1044       | 0,1043        | 0,1080       |
| 3,60 | 0,0228 | 0,0326 | 0,0813   | 0,0786       | 0,0789        | 0,0815       |
| 4,00 | 0,0161 | 0,0249 | 0,0572   | 0,0560       | 0,0559        | 0,0575       |



Sl. 2. Jedro integralne enačbe  $J(z)$  in nehomogeni del integralne enačbe  $f(z)$  v odvisnosti od globine  $z$  za izbrane podatke

Sl. 2 kaže, da pojemata prispevek neba  $f(z)$  in jedro  $J(z)$  z globino približno eksponentno. Pričakujemo, da bo tudi svetlost pojemala podobno. Če se točke, v katerih računamo vrednosti integranda, gostijo proti robu:  $h_n = n \cdot h_0$ ,

( $h_n$  je razmik med točkama  $z_n$  in  $z_{n-1}$ ), izpeljemo za integralno enačbo sistem  $N$  linearnih enačb:

$$u_I(z_n) = \frac{1}{2} \lambda f(z_n) + \frac{1}{4} \lambda h_0 [N u_I(z_N) J(z_n - z_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) u_I(z_k) J(z_n - z_k)] \quad (5)$$

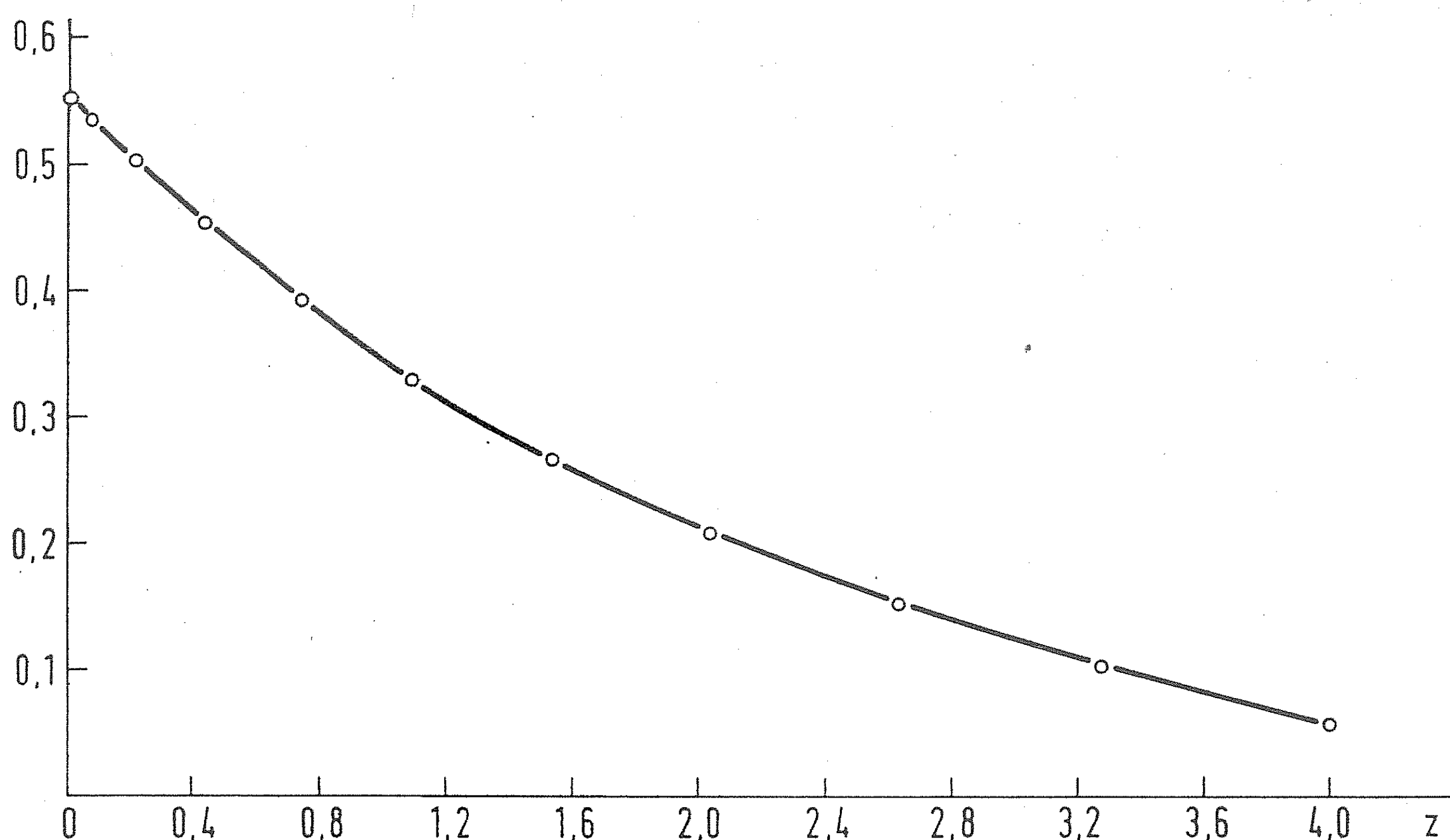
Maksimalna razlika med rešitvijo sistema (5)  $u_I(z_k)$  in rešitvijo integralne enačbe (4)  $u(z_k)$  je odvisna od natančnosti, s katero aproksimira trapezna formula integral.

V tabeli I so zapisane vrednosti  $u_I(z_k)$  za  $k = 1, \dots, 10$ , ki jih je izračunal računalnik Z-23 po algolskem programu. Vrednosti v enakomerno razmaknjenih točkah so dobljene z ekstrapolacijo, da lažje primerjamo rezultate po vseh treh metodah.

b) Pri metodi zaporednih približkov iščemo približke s predpisom

$$u_n(z) = f(z) + \frac{1}{2} \lambda \int_0^H J(|z - \zeta|) u_{n-1}(\zeta) d\zeta.$$

Približki konvergirajo proti rešitvi integralne enačbe za vsak  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Integrale računamo numerično po trapezni formuli.



Sl. 3. Svetlost sten v okroglem jašku v odvisnosti od globine  $z$  za izbrane podatke. Na ordinatno os je nanescena funkcija  $u(z)$ . Krožci kažejo izračunane vrednosti. Pri natančnosti, s kakršno je narisana slika, so vsi uporabljeni približki enakovredni

Integracijski interval razdelimo na 40 delov. Za začetni približek vzamemo najprej kar  $u_0(z) = f(z)$ . Vrednosti  $u_{II}'(z)$ , ki jih je dal v tem primeru po desetkratni iteraciji računalnik CDC 3300, so navedene v petem stolpcu tabele I. Za začetni približek pa lahko vzamemo tudi vrednosti, ki jih dobimo z metodo c. Šesti stolpec tabele I vsebuje vrednosti  $u_{II}''(z)$ , ki jih dobimo po iteraciji v tem primeru. Napaka približka je odvisna od natančnosti, s katero računamo integral, od začetnega približka in od števila iteracij.

c) Ker pojemata jedro integralne enačbe in prispevek neba  $f(z)$  skoraj eksponentno, smemo pričakovati, da bo tudi približna rešitev integralne enačbe (4) eksponentna funkcija. Zato jo poskusimo rešiti z nastavkom:  $u_{III}(z) =$

$= A e^{-az} + B e^{bz} + C$ . Potem ko izenačimo koeficiente pri  $e^z$ ,  $e^{-z}$ ,  $e^{az}$  in  $e^{-bz}$ , dobimo za približno rešitev:  $A = 0,5555$ ,  $B = -0,0059$ ,  $C = 0$ ;  $a = 0,4472$ ;  $b = 0,4472$ . V tabeli I so v sedmem stolpcu navedene vrednosti  $u_{III}(z)$  izračunane s tem približkom.

\* \* \*

Približne rešitve po vseh treh metodah se ujemajo vsaj na drugem mestu. Ker je natančnost rešitve pri prvih dveh metodah odvisna od natančnosti, s katero vsota aproksimira integral, je približna rešitev tem boljša, čim več delov ima integracijski interval. Pri drugi metodi je število delov intervala štirikrat večje kot pri prvi, torej pričakujemo, da sta rešitvi v petem in v šestem stolpcu bližje pravi rešitvi kot rešitev v četrtem stolpcu. Napako pri drugi metodi glede na začetni približek lahko ocenimo, če primerjamo med seboj peti in šesti stolpec. Rešitev z nastavkom je v tem primeru udobna, hitra in da dober rezultat, če jo primerjamo s prejšnjima. Ima še to prednost, da je izražena z znanimi funkcijami. Vendar je v drugih primerih nastavek le redko tako preprost.

*Norma Mankoč*

#### LITERATURA

- <sup>1</sup> I. Kuščer: Matematična fizika, Ljubljana (Inštitut J. Stefan), 1959, str. 298.
- <sup>2</sup> J. Strnad: Uvod v fiziko, Ljubljana (Univerzitetna založba), 1969, str. 640.
- <sup>3</sup> K. Jashida: Lectures on Differential and Integral Equations, New York (Interscience Publ.). 1960.
- <sup>4</sup> A. Suhadolc in J. Vrabec: Numerično reševanje Fredholmovih integralnih enačb druge vrste, Obz. mat. fiz. **15**, 106 (1968).

## »NOVA MATEMATIKA« V OSNOVNI ŠOLI?

Izredno nagli napredek znanosti zahteva spremembe tudi v šolstvu. Tradicionalna šola in stare vzgojne metode ne ustrezajo več. Od tod vsepovsod po svetu poskusi šolske reforme, ki posegajo prav v bistvo metodično pedagoških postopkov. Posebno občutne spremembe, tako v metodah kakor v obravnavani snovi, doživlja matematika. Nekaj navdušencev poskuša prodreti z novimi idejami, mnogi pa zmajujejo z glavo in odklanjajo novotarije. Na žalost so velikokrat temu vzrok le nemetodični pristopi, ne pa globlje poznavanje bistva. Zato mislim, da ne bo odveč, če si stvar nekoliko ogledamo.

Precej so se ogreli za »novo matematiko« v Franciji, kjer si že nekaj let utira pot obsežna šolska reforma, katere namen je vrniti šoli njeno vzgojno poslanstvo. Tu pa matematika lahko veliko prispeva. Seveda ne stari računarski način, ampak nove metode. In tako se v Franciji nekaj svetovno znanih strokovnjakov z vso vnemo in z vso svojo avtoriteto trudi postaviti matematiko v službo sodobni vzgoji. Prav zdaj je v teku poskus uvajanja »nove matematike« v 1. cikel srednje šole. (1. cikel francoske srednje šole ustreza naši nekdanji nižji gimnaziji oz. sedanji višji osnovni šoli.) V šolskem letu 1968/69 so preiskovali »novo matematiko« v okoli 50 oddelkih 1. razreda (»sixième«) v različnih francoskih pokrajinah (Pariz, Lyon, Bordeaux...). Z letošnjim šolskim letom so ta poskus razširili v vse oddelke prvega razreda, hkrati pa nadaljujejo z eksperimentom v 50 oddelkih 2. razreda (»cinqième«), ki ga bodo prihodnje leto posplošili; nato bodo uvedli poskus še v 4. razred (»quatrième«) in v 3. razred (»troisième«). S tem pa »nova matematika« še ne bo dokončno izpodrinila stare, čeprav bo že uvedena v vse štiri razrede 1. cikla po vsej Franciji. To se smatra še vedno le za poskus, ki bo trajal 4 leta za vsak razred. Šele na koncu tega prehodnega obdobja bodo analize dokončno odločile...

Oglejmo si zdaj nekoliko podrobneje ta francoski eksperiment! Učni načrt za 1. razred 1. cikla je naslednji:

### 1. Relacije

Vpeljava pojmov: množica, element, pripadnost; podmnožica, vključitev; presek, unija — vse na konkretnih primerih. Znaki:  $\epsilon$ ,  $\subset$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\emptyset$ .

Natančen opis relacij in njihovih lastnosti ob konkretnih primerih. Ponazoritev končne množice z ustreznimi tabelami ali s puščicami.

Primeri numeričnih relacij in grafična ponazoritev.

### 2. Cela in decimalna števila

Ponovitev osnovnih operacij na celih številih z osnovo 10 in na decimalnih številih: seštevanje, odštevanje, množenje. Uporaba znakov  $\leq$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $>$ .

Vaje z drugimi računskimi sistemi.

Velikostna stopnja rezultata. Računanje na pamet. Vaje v seštevanju in množenju več celih števil.

### 3. Študij in merjenje geometričnih in fizičnih teles

Daljica in njena dolžina.

Krog in njegov obseg; krožni lok in izsek.

*Ploščina kroga, kolobar. Trikotnik, četverokotnik.*

*Telesa: kocka, kvader, pokončna prizma, valj, piramida, stožec; prostornina, masa, gostota.*

*Čas. Hitrost enakomernega gibanja. Jakost toka.*

#### **4. Upodabljanje točk v ravnini in v prostoru**

*Določitev lege kraja s pomočjo kvadratne mreže.*

*Zemeljska krogla, pola ali tečaja. Vzporedniki, ekvator. Poldnevnik, začetni meridian. Določitev lege kraja s pomočjo zemljepisne širine in dolžine.*

#### **5. Relativna števila**

*Vpeljava relativnih števil, celih in decimalnih, na zgledih iz vsakdanjega življenja; vsota in razlika relativnih števil.*

Ta učni načrt se na prvi pogled ne razlikuje dosti od načrtov izpred 20 let, z izjemo 1. poglavja; toda v obdelavi je bistvena razlika. V uvodu k temu načrtu je namreč tole zapisano: *Vsi deli načrta so ozko sovisni in se morajo obravnavati povezano drug z drugim. To se pravi: ideje prvega dela (relacije!) se morajo uporabiti pri študiju vseh naslednjih poglavij; snov teh poglavij služi kot dokaz ali aplikacija prvega poglavja.*

Profesorji, ki so sodelovali pri tem poskusu, so bili prostovoljci in niso imeli na razpolago nikakega priročnika, pač pa so imeli vsi le eno željo: ustvariti aktiven pouk, ki bi v največji meri vzbudil iniciativnost učencev. Zato so posamezne skupine, ki so izvajale ta poskus, večinoma sproti sestavljale lističe (»fiches«) za posamezno uro in jih predhodno na svojih tedenskih sestankih prediskutirale. Zaradi koordinacije dela so se enkrat mesečno sešle tudi delovne skupine iz različnih šol iste pokrajine, medtem ko so se vodje grup iz vse Francije shajali tromesečno bodisi v Sèvresu ali Grenoblu.

Kot vzorec si oglejmo nekaj začetnih lističev, ki jih je izdelala ekipa profesorjev iz eksperimentalne šole v Sèvresu:

##### **List 1. MNOŽICA.**

*Množico lahko zapišemo na dva načina:*

*1. tako, da imenujemo vse ELEMENTE te množice, vsakega SAMO ENKRAT;*

*2. tako da navedemo LASTNOST, SKUPNO VSEM ELEMENTOM in samo njim.*

*Zgled:  $E = \{a, e, i, o, u\}$  (1. način)*

*E je množica samoglasnikov naše abecede (2. način)*

**1. vaja:**\* Poiščite pri vsakem od naslednjih primerov drugi način zapisa množice:

*E je množica vseh profesorjev 5. razreda*

*$F = \{\text{januar, februar, marec}\}$*

*$G = \{\text{palec, kazalec, sredinec, prstanec, mezinec}\}$*

*H je množica držav, ki mejijo na Jugoslavijo*

*$I = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$*

*J je množica vseh lihih števil med 4 in 16*

*K je množica trenutnih predsednikov SFRJ*

**2. vaja:** Ali je možno v vseh naslednjih primerih najti drugi način zapisa množice? Če ne, povejte zakaj!

*E je množica vseh ljudi, ki so bili na vrhu Triglava*

---

\* Vaje so prirejene ustrezno našim razmeram.

$F = \{\text{France Prešeren, Martin Krpan, Maršal Tito}\}$   
 $G$  je množica učencev v vašem razredu, ki so stari 16 let  
 $H = \{\text{Ljubljanski grad, Prešernov spomenik, tabla v našem razredu}\}$   
 $I = \{\text{ponedeljek, torek, sreda, četrtek, petek, sobota, nedelja}\}$

**3. vaja:** Če imate čas, si izmislite še nekaj primerov množic in jih zapišite po možnosti na oba načina!

## List 2. ELEMENT

Množica je sestavljena iz ELEMENTOV.

Množica je poznana, če lahko ugotovimo, ali je dani predmet element te množice ali ne (pravimo tudi »pripada množici« ali »ji ne pripada«).

Če je »a« element množice  $E$ , pišemo:  $a \in E$

Če »b« ni element množice  $E$ , pa označujemo:  $b \notin E$

**1. vaja:** Vzemimo množico  $E = \{1, 4, 3, 10, 27, 58\}$

Izpolnite naslednje vrste najprej z besedami in nato s primernimi simboli:  
 (Primer: 8 ni element množice  $E$ ;  $8 \notin E$ )

4 . . . . . ; 4  $\in$   $E$   
 12 . . . . . ; 12  $\in$   $E$   
 27 . . . . . ; 27  $\in$   $E$

**2. vaja:** Isto vprašanje kot pri 1. vaji.  $J$  je množica vseh Jugoslovanov

Brežnjev . . . . . ; Brežnjev  $J$   
 Armstrong . . . . . ; Armstrong  $J$   
 Ladko Korošec . . . . . ; Ladko Korošec  $J$   
 Naser . . . . . ; Naser  $J$

**3. vaja:** Vzemimo množico  $G = \{\text{Ljubljana, Maribor, Koper, Celje}\}$   
 Ali ljubljanski grad pripada množici  $G$ ?

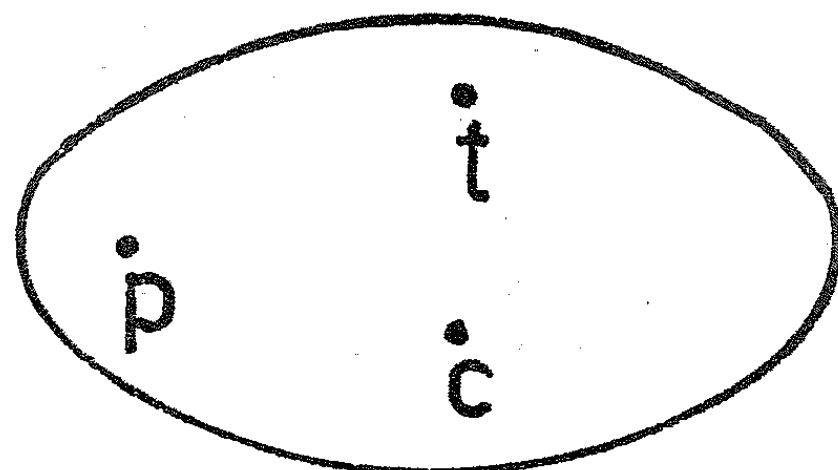
Vzemimo množico  $H = \{\text{Nada, Peter, Janez}\}$   
 Ali Nadin nos pripada tej množici?

## List 3. PONAŽORITEV MNOŽICE

Množico si lahko ponazorimo s shemo, ki jo predstavlja zaključena krivulja, znotraj katere je vsak element prikazan z eno samo točko.

Zgled: Predstava množice  $E$  (sl. 3—1)

$E = \{\text{pisalna miza, tabla, cunja}\}$

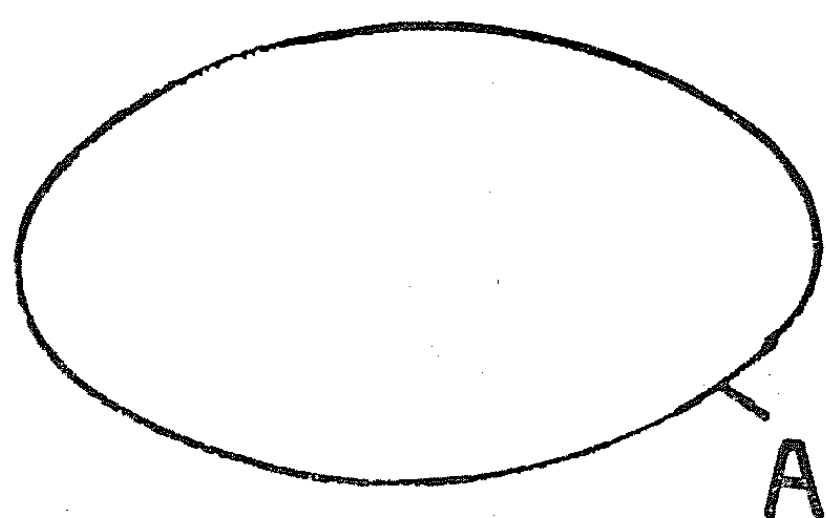


Sl. 3-1

Če so elementi množice preštevilni, si jih lahko mislimo, ne da bi jih označili.

Zgled: Shema množice  $A$  (sl. 3—2 in sl. 3—3)

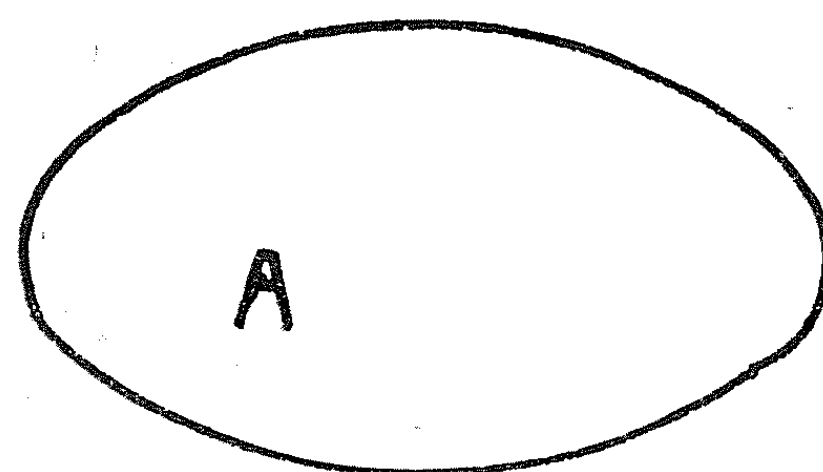
$A$  je množica učencev vaše šole



Sl. 3-2

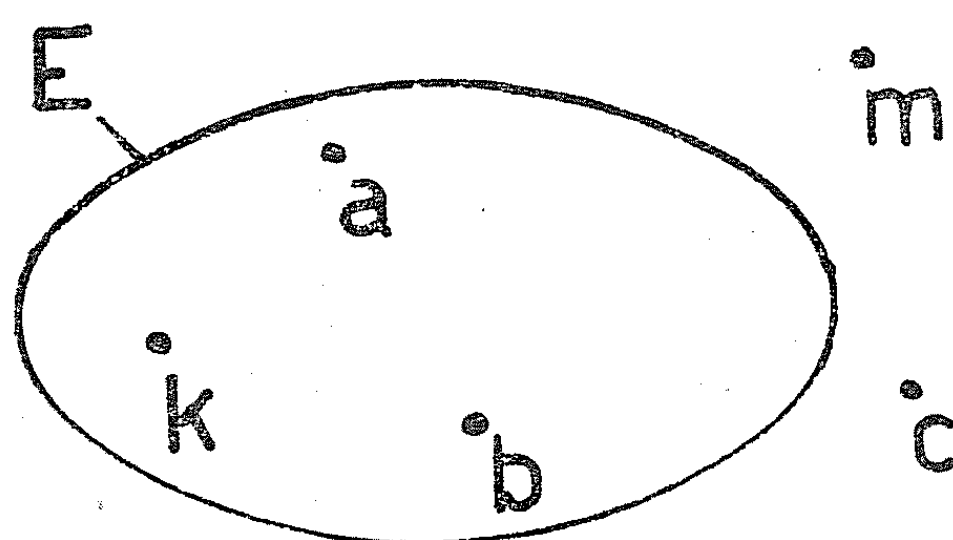
ali

Sl. 3-3



1. vaja: Povejte, ali a, b, c, k, m pripadajo množici E, predstavljeni na sl. 3—4, ali ne. Pri odgovoru uporabite vsakokrat primeren simbol!

Sl. 3-4



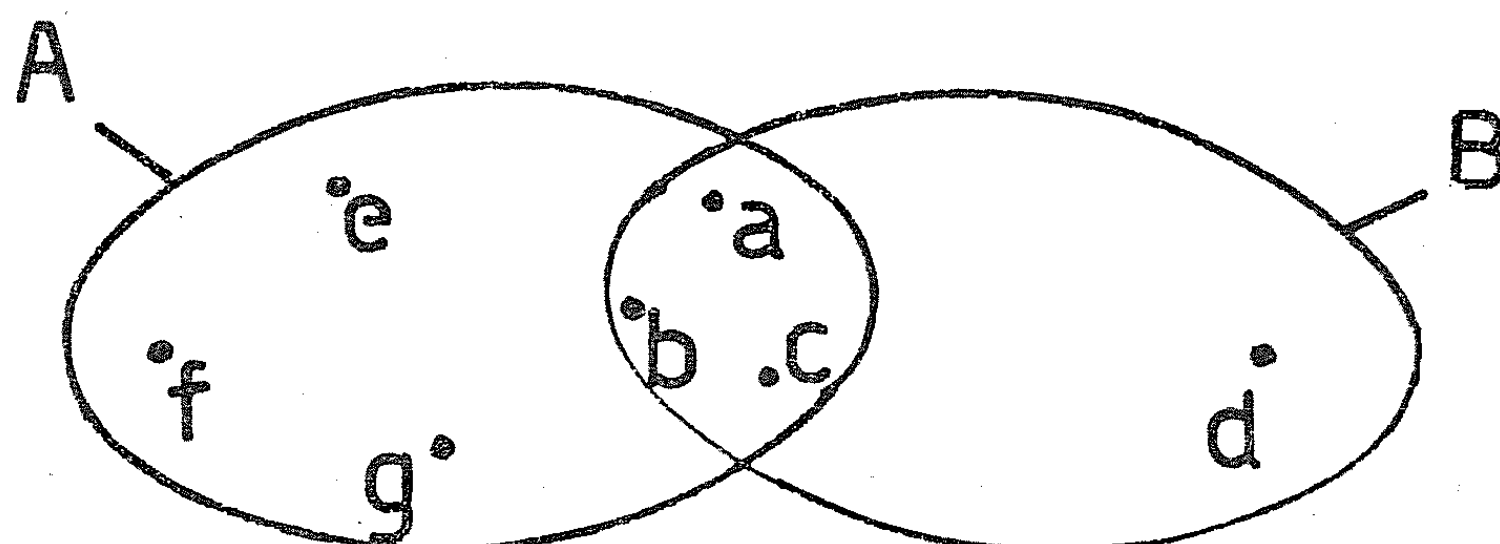
2. vaja: O množici E vemo naslednje:  $a \in E$ ,  $b \in E$ ,  $c \notin E$ ,  $d \in E$ ,  $f \notin E$ . Prikažite množico E shematično!

3. vaja: E naj bo množica profesorjev vaše šole. Zapišite to množico, potem pa jo prikažite shematično s pomočjo ustrezno razpostavljenih točk:

— . . . . .  
 — . . . . .  
 — . . . . .

4. vaja: Opišite v tekočem govoru ali z uporabo simbolov naslednjo shemo (sl. 3—5):

Sl. 3-5



To je nekaj primerov takšnih lističev. Kot vidimo, ima vsak listič na vrhu zgoščeno razlago, nato pa nekaj kontrolnih vaj za utrditev razloženih pojmov. Ob tem je seveda potrebna še ustna diskusija o vsakem pojmu. Če se zdi kak pojem nekoliko težji, mora biti nekaj lističev sestavljenih tako, da pripravijo ta pojem (vódene vaje!), pri enostavnih pojmihi pa zadostuje ustna diskusija. Ves pouk obstoji pravzaprav v individualnem ali pa skupinskem (po dva ali trije učenci skupaj) študiju lističev, učitelj pa neprestano hodi po razredu in spremlja njihovo delo. Od časa do časa je to individualno delo prekinjeno z diskusijo, pri kateri sodeluje ves razred, ali s študijo, ki jo ta ali oni učenec napravi na tabli pod vodstvom učitelja.

Učenci dobe lističe drugega za drugim: ko končajo enega, prejmejo naslednjega. Kdaj pa kdaj da učitelj nov listič tudi domov, da ga učenci proučijo in pripravijo svoje odgovore, ki jih nato v razredu kolektivno prediskutirajo.

Spričo individualizacije pouka nastaja problem, kako usklajati delo »hitrih« in »počasnih« učencev. To je omogočeno z dodatnimi lističi, ki se ločijo od drugih (npr. po barvi) in ki jih dobe »hitri« učenci. Poznanje teh lističev ni pogoj za razumevanje nadaljnjih poglavij, ampak služi le širjenju obzorja sposobnejših učencev. — Lahko pa »hitre« učence tudi zaposlimo s tem, da pomagajo slabšim, kar je koristno za oboje.

Seveda je potrebno od časa do časa tudi preveriti znanje učencev, in sicer vsakega posameznika. To preverjanje se lahko izvede prek testov ali prek pis-  
menih vprašanj, ki jih učitelj daje razredu; pri tem mora vsak učenec delati  
sam, pri odprtem ali zaprtem zvezku, odvisno od okoliščin. Če se ta način  
preskušanja znanja vrši v sproščenem ozračju, dovolj pogosto in brez vnaprejš-  
njega obvestila, koristno nadomešča »edino zveličavne« šolske naloge, ki marsi-  
komu poganjajo strah v kosti.

Ko zdaj po enem letu Francozi razširjajo poskus z »novo matematiko« na  
vse prve razrede 1. cikla v državi, je morda zanimivo vedeti, kako javnost spre-  
jema to novotarijo. Navajam rezultate ankete, ki so jo v okraju Lyon izvedli med  
starši šoloobveznih otrok in ki se precej skladajo z rezultati anket po drugih  
okrajih države.

Na vprašanje »ali vaš otrok rad govori o matematičnem pouku in kaj  
pravi« je odgovorilo:

|                                                         |      |
|---------------------------------------------------------|------|
| nič ne govori . . . . .                                 | 15 % |
| se izraža neugodno, rajši bi imel »računanje« . . . . . | 6 %  |
| kaže zanimanje ali veliko zanimanje . . . . .           | 79 % |

Na vprašanje »kakšno je vaše mnenje o tem pouku« pa je odgovorilo:

|                               |      |
|-------------------------------|------|
| neugodno . . . . .            | 5 %  |
| nima jasnega mnenja . . . . . | 38 % |
| ugodno s pomisleki . . . . .  | 19 % |
| zelo ugodno . . . . .         | 38 % |

Omenjeni pomisleki so v glavnem naslednji:

- kaj bo, če bo moral otrok menjati šolo?
- ne vidim prave smotrnosti tega pouka;
- ali ne bo otrok pozabil vsega računanja?
- kdaj bo začel spet »normalno« računati?
- kakšno korist bo imel od te matematike v življenju?
- kaj bo to koristilo tistemu, ki ne bo na fakulteti študiral matematike?

Prav zmanjšanje »normalnega« računanja je glavni očitek, ki ga nasprot-  
niki usmerjajo proti »novi matematiki«. Toda to je smoter, odgovarjajo za-  
govorniki novih idej. Učenec se mora zavedati, da matematika ni samo umet-  
nost računanja. Če je danes v naših razredih toliko otrok, ki so sovražno  
razpoloženi nasproti matematiki in zanjo zaprti, je to zaradi tega, ker jim  
matematika pomeni samo računanje. Seveda mora ostati računska praksa važna  
naloga matematičnega pouka, toda še važnejši njegov smoter je logično miš-  
ljenje, tega pa lahko naučimo učence tudi ob drugih stvareh, ne le ob številih.

Na koncu še kratka pripomba, kako je z učbeniki po vpeljavi lističev.  
Velika knjižna založba »Hachette« je izvedla med učitelji anketo, ali naj upo-  
raba lističev, ki so se odlično izkazali pri eksperimentalnem pouku, za stalno  
nadomesti učbenike. Anketa je pokazala, da je približno tretjina učiteljev za  
lističe, tretjina za učbenike, drugim pa je vseeno. Zaradi takega izida ankete  
izdajajo zdaj francoske založbe oboje, tako da imajo francoski učitelji mate-  
matike možnost izbrati po lastni uvidevnosti eno ali drugo.

Franc Kvaternik

## DELO KROŽKA ZA ASTRONOMIJO, FIZIKO IN MATEMATIKO NA GIMNAZIJI V ŠKOFJI LOKI V ŠOLSKEM LETU 1968/69

V začetku preteklega šolskega leta so dijaki gimnazije ustanovili krožek za astronomijo, za katero so imeli posebno zanimanje. Pozneje je krožek prerastel še v fizikalnega in matematičnega. Vse tri krožke smo sicer imeli že pred tremi leti, vendar so zamrli ob uvedbi praktičnega znanja iz fizike in matematike in odhodu krožkarjev, ki so tvorili njihovo jedro.

Zaradi zanimanja dijakov za astronomijo je krožek ponovno oživel. Poudarek je imel na astronomiji, saj je bil s tem namenom ustanovljen. Dijaki so se najmanj enkrat na teden zbrali na šoli, da bi si pridobili novo znanje iz astronomije, fizike in matematike. Ker je bilo največje zanimanje za astronomijo, smo njej posvetili polovico vsega časa. Čeprav je krožek deloval v večernih urah, so se tudi vozači vključili vanj in redno prihajali na delovne sestanke.

Ker so dijaki v začetku predvsem želeli opazovati nebo, smo pri astronomiji v prvem polletju obravnavali nebesno sfero: pojme v zvezi z določanjem lege zvezd na nebu, navidezna gibanja neba, Sonca, Lune, planetov in zvezd. Na kratko smo obravnavali tudi zgodovinski razvoj astronomije in v zvezi s tem ozvezdja po Heveliju. Drugo polletje smo posvetili razvoju vesolja in potovanju človeka v vesolje. Delo je potekalo v obliki predavanj, razgovorov, opazovanj, prikazovanja slik in diapozitivov. Program so izvajali dijaki in mentor, ki je skrbel za reden potek dela.

Ko so dijaki spoznali že nekaj osnovnih pojmov iz astronomije, smo z dovoljenjem Astronomsko geofizikalnega observatorija obiskali astronomsko opazovalnico na Golovcu, kjer nam je prof. Marjan Prosen razkazal naprave za opazovanje in nas seznanil z delom Observatorija. Dijaki so bili zelo zadovoljni z obiskom in so hvaležni vsem, ki so obisk omogočili, želeli pa bi si jih še več. Ogledali smo si tudi Planetarij v Ljubljani obenem z ekskurzijo v jedrski reaktor in elektrarno Medvode.

Delo na področju fizike je obsegalo poglavja od mehanike do atomike. Dijaki so se posebno zanimali za nebesno mehaniko, relativnostno teorijo, elektromagnetno valovanje, zgradbo atomov in atomskih jeder, raketno tehniko in jedrske reakcije. V zvezi z jedrskimi reakcijami smo si ogledali jedrski reaktor v Podgorici, kar nam je omogočil Inštitut »Jožef Štefan«. Pogovarjali smo se tudi o osnovnih delcih, materiji in antimateriji, nastanku svetlobe in optičnih pojavih. Kjer je bilo mogoče, smo izvajanja popestrili s poskusi, nad katerimi so se krožkarji vedno navduševali.

Pri matematičnih urah smo na osnovi programa obravnavali nekatera poglavja iz teorije množic in števil, algebre in geometrije. Reševali smo tudi aktualne matematične naloge, ki so bile pogosto kot priprava za tekmovanje matematikov.

Prodiranje človeka v vesolje je vzbudilo zanimanje za astronomijo in nekatera poglavja iz fizike: nebesna mehanika, elektronika, raketna tehnika, elektromagnetno valovanje, jedrske reakcije, učinkovanje med materijo in antimaterijo itd. Dijaki so spoznali, da je za razumevanje fizikalnih zakonitosti potrebno znanje matematike.

V krožku je bilo stalno 17 dijakov, občasno pa tudi čez 20, kar pomeni, da se je z astronomijo, fiziko in matematiko dodatno izven učnega programa ukvarjalo skoraj 9 % vseh dijakov gimnazije. Imeli so 27 delovnih sestankov,

ki so navadno trajali dve uri, opravili pa smo še dve opazovanji z manjšim teleskopom in izvedli dve ekskurziji, ki sem ju že omenil.

Z boljšimi pogoji dela in boljšimi napravami za opazovanja bi v krožek lahko pritegnili še več dijakov. Za opazovanja nismo imeli primernega prostora in smo hodili kar v naravo z vsemi razpoložljivimi napravami in pripomočki. Potrebovali bi boljši teleskop, da bi uresničili svoje načrte.

Za delo krožka nismo prejeli nobenih sredstev, uporabljali pa smo učila šole. Upamo, da si bomo v novem šolskem letu kupili komplet Newtonovega teleskopa, ki ga bo mogoče dobiti do konca prihodnjega meseca in ki bo imel 90-kratno povečavo.

Navajamo časovni in vsebinski pregled dela krožka:

### Astronomija

|               |                                                                           |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 5. X. 1968    | Ustanovni sestanek in sprejetje programa                                  |
| 10. X. 1968   | Nebesna telesa in nebesna sfera                                           |
| 17. X. 1968   | Določanje lege zvezd na nebu in ozvezdja                                  |
| 24. X. 1968   | Opazovanje neba s prostim očesom in Saturnovega kolobarja s teleskopom    |
| 7. XI. 1968   | Kratek zgodovinski pregled razvoja astronomije. Imena ozvezdij            |
| 14. XI. 1968  | Merjenje astronomskih razdalj in magnituda                                |
| 21. XI. 1968  | O problemih poleta človeka v vesolje                                      |
| 12. XII. 1968 | Navidezna gibanja Sonca                                                   |
| 19. XII. 1968 | Navidezna gibanja Lune                                                    |
| 26. XII. 1968 | Polet človeka proti Luni                                                  |
| 9. I. 1969    | Razgovor o poletu Apola 8                                                 |
| 6. II. 1969   | Naš planetni sestav                                                       |
| 6. III. 1969  | Priprave za opazovanje                                                    |
| 10. III. 1969 | Opazovanje Venere in vidnih ozvezdij z daljnogledom                       |
| 13. III. 1969 | Razgovor o programu poleta Apola 9                                        |
| 3. IV. 1969   | Sodobne metode dela astronomije (Novak Milena I. a)                       |
| 10. IV. 1969  | Razgovor o zadnjem opazovanju neba                                        |
| 16. IV. 1969  | Ogled Astronomsko geofizikalnega observatorija na Golovcu                 |
| 24. IV. 1969  | Pregled nekaterih osnovnih pojmov iz astronomije pred ogledom planetarija |
| 10. V. 1969   | Ogled planetarija v Ljubljani                                             |
| 7. V. 1969    | Nastanek in razvoj vesolja                                                |
| 15. V. 1969   | Nastanek in razvoj vesolja (nadaljevanje)                                 |

### Fizika

|               |                                                                                  |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 21. XI. 1968  | Obravnava in sprejetje programa                                                  |
| 26. XII. 1968 | Newtonovi zakoni in nebesna mehanika                                             |
| 9. I. 1969    | Nekateri aktualni problemi iz mehanike                                           |
| 16. I. 1969   | Teslov transformator in pojavi pri elektromagnetnem valovanju (Rejc Alojz IV. a) |
| 6. III. 1969  | O življenju in delu Nikole Tesle (Irena Flander IV. a)                           |
| 13. III. 1969 | Zgradba atoma in optični pojavi                                                  |
| 7. V. 1969    | Zgradba atomskega jedra in jedrske reakcije                                      |
| 10. V. 1969   | Ekskurzija v elektrarno Medvode in jedrski reaktor v Podgorici                   |

## Matematika

|               |                                                           |
|---------------|-----------------------------------------------------------|
| 24. X. 1968   | Sprejetje programa dela                                   |
| 7. XI. 1968   | O deljivosti števil in kongruenci                         |
| 14. XI. 1968  | Primeri za uporabo kongruence                             |
| 5. XII. 1968  | Reševanje Apolonijeve naloge (Logonder Rado III. b)       |
| 12. XII. 1968 | Cevin izrek (Ferlan Miran IV. a)                          |
| 9. I. 1969    | Reševanje nekaterih konstrukcijskih nalog                 |
| 6. III. 1969  | Naloge v zvezi s pripravami za tekmovanje matematikov     |
| 13. III. 1969 | Računanje s kongruencami                                  |
| 20. III. 1969 | Priprave za tekmovanje matematikov                        |
| 27. III. 1969 | Nadaljevanje priprav za tekmovanje matematikov in fizikov |
| 8. IV. 1969   | Reševanje neenačb                                         |
| 17. IV. 1969  | Reševanje transcendentnih enačb                           |
| 22. V. 1969   | Algebrske strukture množic                                |
| 10. VI. 1969  | Linearne transformacije in matrike                        |

Krožek je v vseh primerih, kjer ni navedeno ime dijaka, vodil mentor. Izkušnje v preteklem šolskem letu so pokazale, da je s krožkom treba nadaljevati in delo izboljšati v vseh omenjenih oblikah dela. Dijaki si želijo dodatnega znanja zlasti iz astronomije in tistih poglavij iz matematike in fizike, ki jih po učnem načrtu ni predvidenih za redni pouk. Želijo si tudi več astronomskih opazovanj s teleskopom, kar je otežkočeno zaradi pomanjkljivih inštrumentov in drugih pripomočkov. Za uspešno delo pri opazovanjih z enim teleskopom ne bi smelo delati več kot pet dijakov, v najslabšem največ deset. Zato bi potrebovali vsaj dva do tri daljnogleda z 90-kratno povečavo, kakršnega sem že omenil. Imeti bi morali tudi primerno opazovalnico, da bi se pogoji za delo bistveno izboljšali. Volja pri dijakih je, nimamo pa sredstev, da bi načrt v celoti izvedli. Delo astronomskega krožka bi izboljšali lahko z večjim sodelovanjem astronomsko geofizikalnega observatorija v Ljubljani, kar upamo, da nam bo uspelo.

Dodatno delo s tistimi dijaki, ki si želijo znanja v večjem obsegu, kot je predvideno po učnem načrtu, je koristno in ne bi bilo prav, če bi ga podcenjevali ali opuščali tam, kjer je zanj pri dijakih posebno veliko zanimanje. Prav je, da mladim nudimo znanje, ki si ga želijo.

*Branko Roblek*

# DOMAČE VESTI

## STALIŠČE DRUŠTVA GLEDE POLEMIKE V ČASOPISJU ...

Upravni odbor društva je na svoji seji dne 3. decembra 1969 razpravljala o javni polemiki v časopisju, ki se je razvila o učbeniku fizike za osnovne šole. Odbor obžaluje, da kritične pripombe niso bile poslane v Obzornik za matematiko in fiziko, ki ima posebno rubriko za strokovne razprave o vprašanjih pouka teh ved.

Odbor bi želel, da postane ta rubrika v Obzorniku pomembnejša in da pomaga reševati probleme pouka matematike in fizike pri nas. Tako bo Obzornik z obravnavanjem številnih vprašanj o pouku matematike in fizike na raznih stopnjah šol ob vedno hitrejšem znanstveno tehničnem napredku v naših okoliščinah postal še bolj koristno delovno glasilo društva.

*Predsednik: Jože Grasselli*

## ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

Dne 12. maja 1969 je bilo v Beogradu zvezno matematično tekmovanje. Naloge po posameznih razredih so bile naslednje:

### 2. razred

1. Katera od  $m$  neodvisna zveza je med rešitvama enačbe

$$(x^2 - 6x + 5) + m(x^2 - 5x + 6) = 0?$$

2. Dokaži, da je za vsak naraven  $n$  vsaj eno od števil

$$3^{3n} + 2^{3n} \text{ in } 3^{3n} - 2^{3n} \text{ deljivo s } 35!$$

3. Dana sta kroga s središčema  $O$  in  $O'$  in polmeroma  $R$  in  $R/2$ . Kroga se znotraj dotikata v točki  $A$ . Konstruiraj krog, ki se dotika obeh krogov in premice  $OO'$ !

4. V tristrani piramidi so vsi koti stranskih ploskev ob vrhu piramide pravi. Dokaži, da vrh piramide, težišče osnovne ploskve in središče piramidi očrtane krogle ležijo na isti premici!

### 3. razred

1. Tristranična piramida  $OABC$  ima stranske robove  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$  in  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC = \sphericalangle COA = 90^\circ$ . Označimo ustrezno z  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  kote pri ogliščih  $A$ ,  $B$ ,  $C$  osnovne ploskve  $ABC$ . Dokaži, da je

$$\operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta : \operatorname{ctg} \gamma = a^2 : b^2 : c^2!$$

2. Poišči vse realne rešitve sistema enačb

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = 1!$$

3. Dana je pravilna četrstrostrana prizma z osnovnim robom  $2a$  in višino  $a(1 + \sqrt{3})$ . Kroglja gre skozi vsa štiri oglišča osnovne ploskve in se dotika druge osnovne ploskve. Izračunaj tisti del površine prizme, ki je v krogli!

4. Ista kot prva za četrti razred.

#### 4. razred

1. Kratkovidni modrijan, ki vidi predmete samo na razdalji, manjši kot 1 m, je sklenil stavo: Če kjerkoli, na razdalji  $d$  metrov od njega postavijo neki predmet in mu po vsakem njegovem koraku, dolgem 1 m, povedo, če se je s tem korakom približal predmetu, bo v končno mnogo korakov našel predmet. Število korakov bo pri tem manjše od  $\frac{3}{2}d + 7$ . (Modrijan najde predmet, ko se mu približa na razdaljo, manjšo od 1 m, torej ko ga zagleda.) Dokaži, da bo modrijan stavo dobil!

2. Če je  $p$  liho praštevilo in  $a$  celo število, ki ni deljivo s  $p$ , je natanko eno od števil

$$A = a^{1+2+3+\dots+(p-1)} + 1$$

$$B = a^{1+2+3+\dots+(p-1)} - 1$$

deljivo s  $p$ . Dokaži!

3. Včrtaj v presek notranjih ploskev parabol

$$x^2 = p^2 + 2py \qquad x^2 = p^2 - 2py$$

elipso z največjo površino!

4. Poišči vse realne rešitve sistema enačb

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2$$

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = a^n !$$

Nagrade in pohvale so prejeli:

**1. nagrado:** Crnac Davor, 2. r. 5. g. Zagreb; Čerin Zvonko, 4. r. 5. g. Zagreb; Janc Marko, 2. r. Mat. g. Beograd; Kadelburg Zoran, 4. r. Mat. g. Beograd; Milin Lazar, 2. r. Mat. g. Beograd; Pepić Slobodan, 3. r. Mat. g. Zagreb.

**2. nagrado:** Božić Milan, 3. r. Mat. g. Beograd; Henč Damir, 3. r. Mat. g. Zagreb; Janković Vladimir, 3. r. Mat. g. Beograd; Mrđenović Branko, 4. r. Mat. g. Beograd; Petrović Branislav, 4. r. Mat. g. Beograd; Ristić Ilija, 4. r. g. Peć.

**3. nagrado:** Čukić Ljubomir, 4. r. Mat. g. Zagreb; Nikolić Branislav, 3. r. g. Kraljevo.

**Pohvale:** Ćirić Ninoslav, 3. r. Mat. g. Beograd; Marić Dušan, 2. r. Mat. g. Beograd; Obradović Miroslav, 4. r. Mat. g. Beograd; Pevac Lazar, 4. r. g. Tuzla; Podrug Dinko, 3. r. g. Kraljevo; Radović Uroš, 3. r. g. Foča; Sedmak Radovan, 4. r. Mat. g. Zagreb; Starè Jurij, 3. r. I. g. Ljubljana; Vugić Vezud, 2. r. Tek. šk. Sarajevo; Zagorc Oton, 3. r. g. Nova Gorica.

V Ljubljani smo za slovenske tekmovalce pred zveznim tekmovanjem organizirali tridnevne priprave, ki so jih vodili Pisanski, Batagelj in Dacar. S pripravami so bili vsi tekmovalci zelo zadovoljni, saj so zapolnile nekatere velike vrzeli v njihovem znanju.

Slovenci so se letos v Beogradu slabše odrezali kot prejšnja leta. Čeprav so bili vsa leta do sedaj med najboljšimi, mislim, da vzrokov za skrbi še ni. Navsezadnje, vsakdo ima lahko kdaj smolo.

*Josip Globevnik*

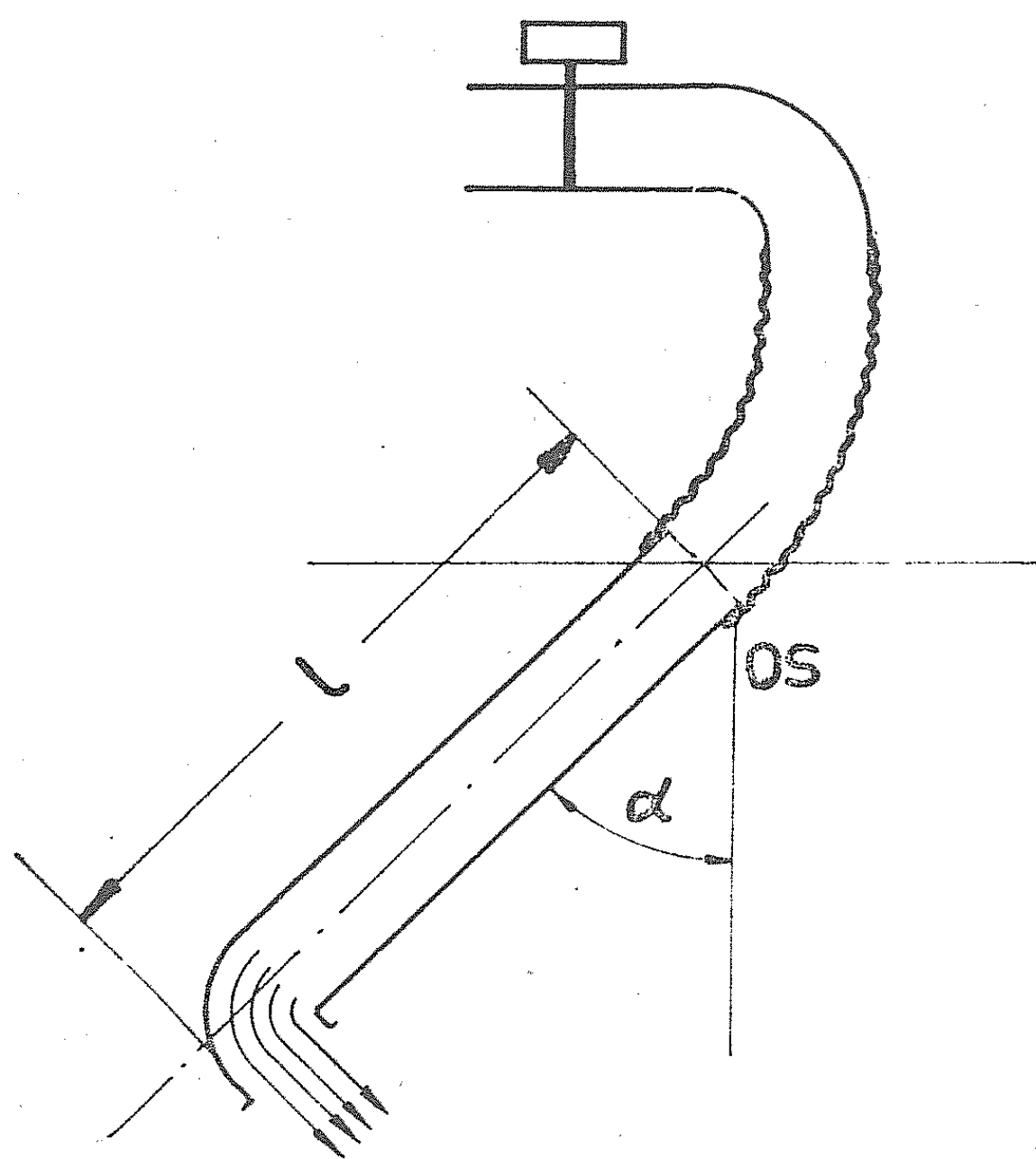
## ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV V FIZIKI

Zvezno tekmovanje mladih fizikov je bilo v soboto, 25. maja 1969 ob 15. uri v zgradbi »Prirodno matematične fakultete« v Beogradu. Zvezna komisija se je sestala že v petek ob 19.30 in nato naslednji dan okoli 8.30. Popoldne je bilo tekmovanje v treh grupah: I. grupa je obsegala mehaniko in toploto, II. grupa elektromagnetizem, III. grupa pa optiko in atomistiko. Naloge so bile naslednje:

### I. skupina (mekanika in toplota)

1. Z višine 10 m pada krogla. V trenutku, ko gre mimo okna v višini 5 m, jo zadene projektil, ki ga izstrelimo proti njej v vodoravni smeri. Projektil se ustavi v središču krogle. S kolikšno hitrostjo bo padla krogla na tla? Projektil je zadel kroglo s hitrostjo 600 m/s, njegova masa pa je 10-krat manjša od mase krogle.

2. Na vodoravno pipo je s pomočjo idealno gibljive gumijaste cevi pritrjena vertikalna steklena cevka, dolžine 1 m in preseka  $0,3 \text{ cm}^2$ . Masa cevke je 80 g. Če se pipa odpre, odteka vodni curek iz cevke pod kotom  $90^\circ$ , cevka pa oklepa z vertikalo kot  $45^\circ$ . Kolika je bila pri tem hitrost iztekanja vode? Glej sliko!



3. V podhlajeni vodi temperature  $t_1 = -4^\circ$  povzročimo kristalizacijo. Koliki del vode zmrzne? Do katere temperature  $t_2$  bi (teoretično) morala biti voda podhlajena, da bi pri takem postopku vsa zmrznila? Kaj bi se zgodilo, če bi dosegli za  $10^\circ$  nižjo temperaturo od  $t_2$  in bi tedaj povzročili kristalizacijo? Spec. toplota vode je 1 kcal/kgst, ledu pa 0,5 kcal/kgst. Spec. talilna toplota ledu je 80 kcal/kg.

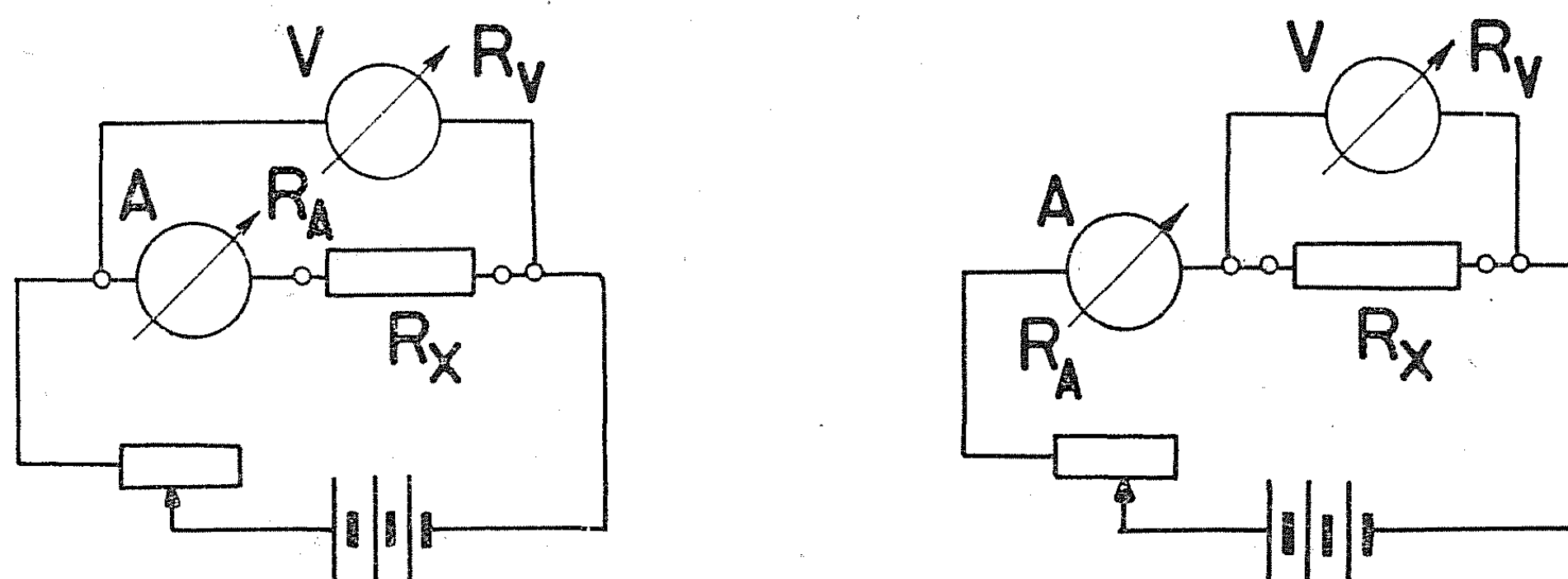
4. Trdno telo plava v tekočini temperature  $t_0 = 0^\circ \text{ C}$  tako, da je  $p\%$  njegove prostornine pod gladino tekočine. Tekočina se nato segreje do temperature  $t_1$ , ko telo plava v njej. Določi temperaturni koeficient prostorninskega raztezka tekočine  $\alpha'$ , če znaš temp. koef. prostorninskega raztezka trdnega telesa  $\alpha$ ! Nalogo reši najprej splošno, nato pa vstavi naslednje vrednosti:  $t_1 = 20^\circ \text{ C}$ ,  $p = 98\%$ ,  $\alpha = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ st}^{-1}$ .

5. Na steklenem površju so vedno adsorbirane molekule plinov. Zaradi tega se morajo steklene posode segrevati, če hočemo v njih dobiti visok vakuum. Izračunaj, za koliko mm Hg se poveča tlak v kroglasti posodi s polmerom 10 cm, če zlezejo adsorbirane molekule s sten v posodo! Površina ene molekule je  $10^{-15} \text{ cm}^2$ , adsorbirana plast pa se lahko vzame za enoplastno. Temperatura je  $300^\circ \text{ C}$ , univerzalna plinska konstanta pa 8,3 J/molst.

### II. skupina (elektromagnetizem)

1. Dve naelektreni kroglici enakega polmera, enake teže in z enakim nabojem sta obešeni na enako dolgih nitkah in spuščeni v tekoč dielektrik z relativno dielektričnostjo  $\epsilon$  in gostoto  $\rho_0$ . Kolika je gostota snovi, iz katere sta kroglici, če vemo, da se kot med nitkama ni spremenil pri potapljanju v dielektrik? Reši splošno!

2. Pri merjenju neznanega upora po metodi  $U-I$  po shemah a) in b) je ampermeter pokazal v obeh primerih tok  $0,1\text{ A}$ . Voltmeter pa je v shemi a) pokazal  $10,05\text{ V}$ . Koliko je pokazal voltmeter v shemi b), če je notranji upor ampermetra  $R_A = 0,5\ \Omega$ , voltmetra pa  $R_V = 3000\ \Omega$ ? Za koliko % se merjeni upor razlikuje od  $U/I$  v teh dveh shemah, kjer sta  $U$  in  $I$  vrednosti, ki ju kažeta voltmeter in ampermeter?



3. Vektor hitrosti elektrona ima začetek pri vходу v ravni ploščati kondenzator, sredi med ploščama. Premica, na kateri leži vektor, prebada kondenzatorjevo ploščo natančno na polovici. Poišči razmerje najmanjše in največje napetosti med ploščama, pri katerih elektron še lahko uide iz kondenzatorja!

4. Na tuljavo s 1000 ovoji je natakknjena okrogla bakrena zanka. Polmer tuljave je  $5\text{ cm}$ , njena dolžina pa  $50\text{ cm}$ . Zanka ima isti polmer kot tuljava, prečni presek bakrene žice pa je  $2\text{ mm}^2$ . Poišči jakost toka v bakreni zanki, če se v tuljavi tok enakomerno veča za  $0,1\text{ A/s}$ ? Specifični upor bakra je  $1,7 \cdot 10^{-6}\ \Omega\text{ cm}$ .

5. Tuljava s samoindukcijo  $3 \cdot 10^{-5}\text{ H}$  tvori nihajni krog s ploščatim kondenzatorjem, katerega površina plošč meri  $100\text{ cm}^2$ , razdalja med njima pa je  $0,1\text{ mm}$ . Kolika je relativna dielektričnost izolatorja, ki izpolnjuje prostor med ploščama, če je nihajni krog uglasen na elektromagnetno valovanje valovne dolžine  $750\text{ m}$ ?

### III. skupina (optika in atomika)

1. V razdalji  $30\text{ cm}$  od tanke bikonveksne leče z goriščno razdaljo  $f_1 = 30\text{ cm}$  je nameščena druga tanka bikonveksna leča z goriščno razdaljo  $f_2 = 20\text{ cm}$ . V kateri razdalji od druge leče moramo postaviti zaslon, da bo na njem nastala ostra slika predmeta, ki stoji  $60\text{ cm}$  pred prvo lečo? Kolika je povečava slike? Konstruiraj sliko tudi grafično!

2. Optična mrežica ima  $600$  zarez na  $\text{cm}$ . V razdalji  $75\text{ cm}$  od mrežice je prosojen zaslon. Kolik je razmik  $a$  med črtama ničtega in prvega reda, ki ga vidi opazovalec skozi lupo z goriščno razdaljo  $14\text{ cm}$ , če je njegova zorna razdalja  $18\text{ cm}$ ? Uporabljena svetloba ima valovno dolžino  $5500\text{ Å}$  in pada pravokotno na optično mrežico.

3. Določi prostornino radona  $Rn$ , ki je v radioaktivnem ravnovesju z  $1\text{ mg}$  radija, če vzamemo, da je temperatura radona  $27^\circ\text{C}$ , njegov tlak pa  $2\text{ kp/cm}^2$ . Aktivnost  $1\text{ g}$  radija ( $1\text{ curie}$ ) je  $3,62 \cdot 10^{10}$  razpadov na sekundo. Polperioda radija je  $1610$  let, radona pa  $3,82$  dni.

4. Žareča kovinska površina je segreta do temperature  $1000^\circ\text{K}$ . Nato se polovici te površine zviša temperatura za  $100^\circ\text{K}$ , drugi polovici pa se temperatura za prav toliko zniža. Za kateri faktor se spremeni celotna energija, izsevana iz te površine?

5. Iz vzbujenega stanja, katerega energija je za  $0,825\text{ MeV}$  večja od energije osnovnega stanja, preide jedro v osnovno energijsko stanje ob istočasnem izsevanju žarka  $\gamma$ . Kolikšno napetost bi morali dati na rentgensko cev, da bi dobili sevanje iste valovne dolžine? Kolika je hitrost elektronov v cevi v tem primeru?

Slovenski tekmovalci so tekmovali takole:

Dušan Kunsterle, Saša Hadži in Anton Zagorc v prvi grupi,

Bojan Golli, Damjan Zazula in Jože Strajnar pa v drugi grupi.

Za tretjo grupo zaradi posebnega učnega načrta v Sloveniji ni bilo naših tekmovalcev.

Dne 25. maja so bile v sejni dvorani Prirodno matematične fakultete v Beogradu svečano podeljene nagrade. Skupno je bilo podeljenih: 3 prve nagrade, 5 drugih nagrad, 8 tretjih nagrad. Pohvaljenih je bilo 11 udeležencev tekmovanja.

Prve tri nagrade so dobili: Tisaj Krežo, matematična gimnazija v Zagrebu, iz III. skupine; Pribeg Zdravko, Školski Centar za strojarstvo i elektrotehniku, Zagreb, iz II. skupine; Meljenac Stjepan, gimnazija Osijek, iz II. skupine. V prvi skupini prva nagrada ni bila podeljena.

Izmed šestih naših tekmovalcev je prejel II. nagrado Golli Bojan, I. gimnazija v Ljubljani, iz II. skupine.

Ob takem rezultatu letošnjega zveznega tekmovanja v fiziki bi bilo potrebno razmisliti o nekaterih stvareh:

1. Letos smo poslali na zvezno tekmovanje manjše število tekmovalcev, kot pa bi jih lahko po propozicijah (6 namesto 10). Mnenja sem, da bi polnoštevilna ekipa lažje zastopala mlade fizike Slovenije. Velik faktor je vsekakor obvladanje določenih področij iz fizike, ki se razlikuje pri dijakih različnih šol. Npr. na eni gimnaziji dajejo profesorji poudarek na praktičnih nalogah, na drugi pa je poudarek na teoriji. Tako se zdi, da ni nujno, da se izkaže dobro uvrščeni dijak na republiškem tekmovanju, tudi na zveznem tekmovanju. Pri večjem številu tekmovalcev iz vse Slovenije bi se ta vpliv zmanjšal. Drugi faktor, ki govori v prid večjemu številu tekmovalcev: tekmovanje v Beogradu je pravzaprav neke vrste nagrada in posebno doživetje za mlade prizadevne fizike. Tudi zaradi tega bi bilo bolje, da pošljemo čim več tekmovalcev in pri tem ne bi smelo biti problema, kje dobiti denar. Še tretjič, tekmovanja dajejo določene izkušnje in tekmovalno rutino, tako mislim, da bi v prihodnje omogočili večjemu številu perspektivnih drugošolcev, posebno pa tretješolcev, tekMOVATI na zveznem tekmovanju.

2. Tudi letos so se pokazale težave v zvezi z učnim načrtom, s katerim je bilo treba uskladiti tekmovalne skupine na zveznem tekmovanju. Te težave so bile premostene tako kot lansko leto: slovenski tekmovalci so se lahko odločili za katerokoli od treh skupin:

1. Mehanika in toplota
2. Električna in magnetizem
3. Optika in atomika.

Glede na te tekmovalne skupine so pri nas prizadeti najbolj dijaki drugega razreda. Tako ni nujno, da so zastopani vsi razredi na zveznem tekmovanju z enakim številom tekmovalcev, ampak moramo tekmovalce zbrati na podlagi njihovih izdelkov pokazanega znanja na republiškem tekmovanju in to predvsem iz vrst tretješolcev in četrtošolcev.

3. Že prejšnja leta, posebno pa letos se je pokazala huda konkurenca matematičnih gimnazij v Beogradu in Zagrebu, tako ne smemo preveč kritično jemati letošnjega uspeha naših tekmovalcev (samo ena druga nagrada v drugi skupini). Morda ne bi škodil krajši seminar za predvidene tekmovalce pred zveznim tekmovanjem.

4. V šolskem letu 1968/69 je Borba ustanovila »Stalni jugoslovanski fond pri redakciji Borbe za stipendiranje mladih talenata«. Celo šolsko leto so v Borbi izhajale naloge pod naslovom »Olimpijada znanja« iz matematike in fizike za srednješolce. Vsak teden so mladi matematiki in fiziki širom srbo-hvaškega jezikovnega področja reševali te naloge in jih pošiljali komisiji pri FMT. Namen te akcije je bil, kot izgleda, dvojen. Prvič, trenirati mlade talente v izvrševanju nalog in reševanju problemov iz matematike in fizike; drugič, FMT razpolaga z večjimi sredstvi in je v obeh zveznih tekmovanjih podelil veliko stipendij (enoletne in večletne stipendije za srednješolce in visokošolce).

Nekatere brez obveznosti, druge štipendije pa so bile vezane na določen študij na univerzi, le-te so podeljevala nekatera velika jugoslovanska podjetja), toda s pogojem, da je štipendist sodeloval v reševanju nalog prek »Olimpijade znanja«. Tako so bili tekmovalci izven srbohrvaškega jezikovnega področja prikrajšani. O tej akciji smo razpravljali tudi v zvezni komisiji. Zaključek je bil ta, da naj Borba vzpostavi stike z ČP Slovenije in drugih republik (Makedonije in Črne gore) v zvezi z akcijo Olimpijada znanja. Potrebno bi bilo, da bi naš upravni odbor o tem razpravljajal in zavzel stališče. V primeru, da se upravni odbor odloči podpreti FMT, je nujno, da društvo MFA s svoje strani pripomore k uspešnim dogovorom med Borbo in ČP Slovenije, s katerim bi Borba vzpostavljala stike.

5. Naša skupinica tekmovalcev je bila na tekmovanju v Beogradu prepuščena sama sebi. Funkcija spremljevalca se je razblinila s tem, da je bil kot član komisije brez prostega časa, katerega bi sicer lahko posvetil našim tekmovalcem. Organizator pa tudi ni pripravil nobenega programa. Zaradi tega bi bilo treba v prihodnje poslati na zvezno tekmovanje poleg člana zvezne komisije še spremljevalca mladim tekmovalcem, morda takega prizadevnega srednjošolskega profesorja, ki jih vrsto let usmerja in pripravlja mlade tekmovalce na tekmovanja iz fizike.

6. Potrebno bi bilo vskladiti način tekmovanja republiškega in zveznega. Na republiškem tekmovanju lahko mladi fiziki uporabljajo literaturo, na zveznem pa ne. Ta način onemogoča nekatere tekmovalce, ki ne zbirajo znanja enciklopedično. Upravni odbor naj bi tudi o tem zavzel stališče in ga posredoval zvezni tekmovalni komisiji.

7. Na zveznem tekmovanju tekmovalci tekmujejo brezimensko, na izdelke in na zapečateni ovojnici napišejo šifro, v ovojnico pa zalepijo list z osebnimi podatki. Odprejo se le tiste ovojnice, ki imajo napisano šifro nagrajenih tekmovalcev. Ostali tekmovalci ostanejo anonimni. Na republiškem tekmovanju v SR Hrvaški odpirajo ovojnice na sami podelitvi nagrad. Objavijo pa tudi vrstni red ostalih tekmovalcev, vendar samo s šiframi. Treba je tudi o tem razmisliti in prevzeti tak način tekmovanja tudi pri nas.

8. Glede na izkušnje v drugih republikah in na zveznih tekmovanjih naj se tudi pri nas v prihodnje organizira tekmovanje tako, da ga zaključimo v enem dnevu.

9. Naši slovenski tekmovalci se težko primerjajo po znanju in rutini s tekmovalci iz matematičnih gimnazij. To je popolnoma razumljivo, mladi talenti si ne morejo pri pouku, po predpisanem učnem načrtu, pridobiti toliko znanja, kolikor bi ga lahko absorbirali. Tako so prepuščeni samim sebi, da se izpopolnjujejo. Ni na razpolago podatkov, na kolikih šolah vodijo profesorji fizikalne krožke in poglobljajo znanje mladim fizikom, Vemo pa, iz izkušenj, da so dijaki željni takega vodstva in hvaležni za vsako odkritje in vsak rešen problem. Zaradi nerešenih problemov okoli financiranja srednjega šolstva so povečini krožki odrinjeni v stran. Krožki lahko uspevajo le tam, kjer imata kolektiv in ravnatelj šole razumevanje in še tam je to delo borno plačano. Jasno je, da tako idealistično delo ne more biti nikoli poplačano, vendar bi morali biti mentorji teh krožkov kljub temu primerno nagrajeni. Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov bi moral tudi o tem vprašanju razmisliti in poskušati poiskati finančne vire za dodatno nagrajevanje vodij in vzgojiteljev mladih fizikov na srednjih šolah.

*Tomaž Skulj*

## POROČILO O RAZSTAVI MOČNIKOVIH UČBENIKOV V IDRIJI

Razstavni oddelek Slovenskega šolskega muzeja je priredil razstavo Močnikovih računov za vse šolske stopnje in vrste, metodičnih priročnikov za učitelje ter bibliografske literature o njem tudi v Idriji. Razstavljena dela so bila na vpogled javnosti tri dni (30. septembra in 1. ter 2. oktobra) v sejni dvorani Bloudkovega rekreacijskega centra. Svet za šolstvo občinske skupščine v Idriji je z uradnimi dopisi povabil vse šole v občini in učiteljske zbornice, naj si bogato žetev svojega ožjega rojaka iz prejšnjega stoletja pridejo pogledat. Z lepimi plakati je obvestil o pomenu razstave tudi tamkajšnje občane. Idrijska temeljna izobraževalna skupnost pa je v finančnem pogledu plačala najemnino za izredno lep razstavni prostor pa tudi za razsvetljavo in čiščenje, medtem ko je idrijski mestni muzej posodil devet velikih vitrin.

Slovesna otvoritev razstave je bila 30. oktobra ob 12. uri. Udeležilo se je je okoli 70 ljudi. Predvsem so bili tedaj navzoči dijaki četrtih razredov gimnazij in njihovi profesorji. Strokovno je razstavljene eksponate razložil naš kustos prof. Vincenc Žnidar, formalno pa je razstavo odprla za javnost predsednica občinskega sveta za šolstvo. Potem so se še isti dan, predvsem pa naslednja dva dneva zvrstili vsi sedmi in osmi razredi občinskih osemletk (iz Idrije, Spodnje Idrije, Cerknega in Črnega vrha), prav vsi razredi idrijske gimnazije, pa tudi učiteljski zbori. Vsem tem skupinam sta kustosa Vincenc Žnidar in Slavica Pavlič razlagala pomen in obseg Močnikovega dela. Poudarjala sta, da je priredil Slovenski šolski muzej to potujočo razstavo v sodelovanju z republiškim Društvom matematikov in fizikov ter po bibliografiji, ki jo je bil za društvo z velikim trudom sestavil profesor Jože Povšič, izdala pa za 150-letnico Močnikovega rojstva SAZU.

Idrijska javnost je bila z razstavo izredno zadovoljna. Posamič ali v organiziranih skupinah je Močnikovo plodno ustvarjanje na področju matematike in njene metodike поблиže spoznalo okoli 600 obiskovalcev. O razstavi je dvakrat poročal koprski radio, nanjo je opozoril dnevnik Delo, daljši sestavek pa bo objavljen tudi v Idrijskih razgledih.

*Vincenc Žnidar*

## KAJ NUDI NAŠIM ŠOLAM TOVARNA »VEGA« V LJUBLJANI?

V prvi številki letošnjega letnika »Obzornika« smo brali o navezavi stikov med tovarno »VEGA« v Ljubljani ter Društvom matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. V smislu omenjenega obvestila naj bo tudi pričujoči sestavek, ki naj pokaže, kaj danes nudi tovarna »VEGA« našim šolam.

Našim šolam ni neznano, vsekakor pa premalo poznano, da tovarna »VEGA« v Ljubljani že dalj časa izdeluje priprave, ki jih lahko pri pouku v šoli, morda še posebej pri pouku fizike, koristno uporabljamo. Ob tem ne smemo pozabiti, da je tovarna »VEGA« pri predmetih, ki so namenjeni šoli, poskušala oblikovati kar se da nizke cene, tako da bi bili šolam dostopni v polni meri.

Med najnovejšimi izdelki, namenjenimi v prvi vrsti šolam, spada vsekakor ponazorilni projektor APOLLO 6. Projektor predstavlja nadvse koristen pripomoček zlasti še zato, ker njegova uporaba predstavlja pridobitev na času, ki pomeni danes tudi v šoli eno od pomembnih kvalit. Z njim lahko projiciramo najrazličnejše risbe in slike, s katerimi predavatelj ponazarja temo pre-

davanja. Snov, ki jo želi predavatelj posredovati, lahko pripravi že predhodno, lahko pa s sočasnim risanjem ter pisanjem ponazori sam proces nastajanja risbe ali izpeljave določenega obrazca, enačbe. »Sava film« pa že pripravlja primerne diafilme za omenjeni projektor. Republiška skupnost izobraževanja je odobrila vsem šolam  $\frac{1}{3}$  prodajne cene regresa, kar znesse ca. 1000 novih dinarjev.

Med najnovejše izdelke tovarne spada tudi avtomatski diaproyektor VEGA—16. Projektor združuje lastnosti prejšnjih tipov projektorjev, nova prednost pa je, da omogoča premikanje okvira za diafilme naprej in nazaj, ter vstavljanje posamičnih diafilmov, ne da bi morali predhodno odstraniti okvir. S posebno halogensko žarnico omogoča projiciranje na razdaljo več deset metrov. Cena projektorja je 1200 novih dinarjev.

Komplet »šolski sestav leč in prizem«, ki stane le 35 novih din, omogoča vrsto praktičnih vaj: določevanje goriščne razdalje, popoln odboj, sestava periskopa, astronomski daljnogled, zemeljski daljnogled, daljnogled s prizmama, mikroskop, sferna napaka, razklon svetlobe itd.

Astronomski daljnogled s 44-kratno povečavo stane danes samo 190 novih dinarjev, tako da je resnično dostopen vsem šolam.

Poleg omenjenih predmetov ima tovarna »VEGA« na razpolago še vrsto projekcijskih aparatov vseh vrst, posamezna svetila, lupe, ročne spektroskope, objektivne, mikroskope itd. Tovarna ima na razpolago potrebne rezervne dele in nudi potrebni servis za svoje izdelke.

Naročila za svoje izdelke sprejema tovarna neposredno, dobijo pa se tudi v prodajalnah z učili, pri nas predvsem pri Državni založbi Slovenije.

*Zdravko Pivk*

## ODGOVOR

### Odgovor na vprašanje v Obzorniku za matematiko in fiziko 16, 45 (1969)

Izračunati je treba hitrost elektrona, ki preleti napetost 0,5 MV.

Hitrost izračunamo iz kinetične energije, ki jo dobi elektron, ko preleti dano napetost. Kinetično energijo izračunamo iz izreka o kinetični energiji. Sprememba kinetične energije je enaka delu zunanjih sil. Če elektron miruje v začetku, velja:

$$W_k = \int \mathbf{F} \, d\mathbf{s} = \int [d(m \mathbf{v})/dt] \, d\mathbf{s} = \int \mathbf{v} \, d(m \mathbf{v})$$

Če se masa ne bi spreminjala s hitrostjo, bi dobili znani klasični izraz za kinetično energijo:  $W_k = \frac{1}{2} m v^2$ . V specialni teoriji relativnosti pa velja za maso  $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , tako da je

$$W_k = m_0 \int v \, d[v (1 - v^2/c^2)^{-1/2}] = m_0 c^2 [1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1]$$

Iz te zveze dobimo končno za hitrost elektrona

$$v/c = [1 - 1/(e_0 U/m_0 c^2 + 1)^2]^{1/2}$$

Za mirovno energijo  $m_0 c^2$  vstavimo 0,51 MeV in dobimo za hitrost  $2,59 \cdot 10^8$  m/s.

*Karel Šmigoc*

## FINANČNI OBRAČUN OBZORNIKA ZA LETO 1969

|                                                                  |                  |
|------------------------------------------------------------------|------------------|
| Poslovanje prek banke                                            | N. din           |
| Lanski saldo . . . . .                                           | 2.331,80         |
| Dohodki: Subvencije . . . . .                                    | 20.000,00        |
| Naročnine . . . . .                                              | 10.428,00        |
| Odvod denarja iz ročne blagajne v banko . . . . .                | 300,00           |
| Obresti od sredstev na vpogled pri KBH . . . . .                 | 83,05            |
| Posojilo Društva mat., fiz. in astr. SRS . . . . .               | 10.000,00        |
|                                                                  | <u>43.142,85</u> |
| Izdatki: Tiskarna Ljudske pravice . . . . .                      | 25.395,00        |
| Zveza inženirjev in tehnikov SRS . . . . .                       | 50,00            |
| Avtorski honorar in davek . . . . .                              | 13.008,60        |
| Potni stroški . . . . .                                          | 989,50           |
| Bančni stroški . . . . .                                         | 741,60           |
| Dvig v ročno blagajno . . . . .                                  | 1.650,00         |
|                                                                  | <u>41.834,70</u> |
| Saldo ob koncu leta . . . . .                                    | <u>1.308,15</u>  |
| Poslovanje prek ročne blagajne                                   |                  |
| Lanski saldo . . . . .                                           | 773,20           |
| Dohodki: Dvig iz banke . . . . .                                 | 1.650,00         |
| Naročnine . . . . .                                              | 1.495,00         |
|                                                                  | <u>3.918,20</u>  |
| Izdatki: Poštšina, ekspedit in administrativni stroški . . . . . | 3.084,00         |
| Odvod denarja v banko . . . . .                                  | 300,00           |
|                                                                  | <u>3.384,00</u>  |
| Saldo ob koncu leta . . . . .                                    | 534,20           |

ad I: Posojilo Društva mat., fiz. in astronomov v znesku N. din 10.000,00 bo vrnjeno ko bo na žiro računu zadosti denarnih sredstev, zmanjšano za znesek N. din 989,50, ki bi ga moralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS nakazati »Obzorniku«.

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XVI. LETNIK — 4. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE  
LJUBLJANA, DECEMBER 1969

---

## VSEBINA

|                                                                                                                             | Stran |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Ob 50-letnici Slovenske univerze v Ljubljani . . . . .                                                                      | 145   |
| O življenju in delu prof. Josipa Plemlja (I. Vidav) . . . . .                                                               | 146   |
| O življenju in delu Jurija Vege (A. Struna) . . . . .                                                                       | 149   |
| <b>Članek</b>                                                                                                               |       |
| Toplotna prevodnost dielektričnih kristalov (R. Pirc) . . . . .                                                             | 151   |
| <b>Novice</b>                                                                                                               |       |
| Topološka klasifikacija Frechetovih prostorov (G. Tomšič) . . . . .                                                         | 162   |
| Padanje atomov, nevtronov in elektronov (J. Strnad) . . . . .                                                               | 166   |
| Kako pojema svetlost okroglega jaška z globino? (N. Mankoč) . . . . .                                                       | 172   |
| <b>Šola</b>                                                                                                                 |       |
| »Nova matematika« v osnovni šoli? (F. Kvaternik) . . . . .                                                                  | 177   |
| Delo krožka za astronomijo, fiziko in matematiko na gimnaziji v Škofji<br>Loki v šolskem letu 1968/69 (B. Roblek) . . . . . | 182   |
| <b>Domače vesti</b>                                                                                                         |       |
| Stališče Društva glede polemike v časopisju (J. Grasselli) .. . . .                                                         | 185   |
| Zvezno tekmovanje mladih matematikov (J. Globevnik) . . . . .                                                               | 185   |
| Zvezno tekmovanje srednješolcev v fiziki (T. Skulj) . . . . .                                                               | 187   |
| Poročilo o razstavi Močnikovih učbenikov v Idriji (V. Žnidar) . . . . .                                                     | 191   |
| Kaj nudi našim šolam tovarna »Vega« v Ljubljani (Z. Pivk) . . . . .                                                         | 191   |
| <b>Odgovor</b> . . . . .                                                                                                    | 192   |

## CONTENTS

|                                                                                | Page |
|--------------------------------------------------------------------------------|------|
| At the fiftieth Anniversary of the Slovenian University in Ljubljana . . . . . | 145  |
| About the Life and the Work of Professor J. Plemelj (I. Vidav) . . . . .       | 146  |
| About the Life and the Work of Jurij Vega (A. Struna) . . . . .                | 149  |
| <b>Article</b>                                                                 |      |
| Heat Conduction in Dielectric Crystals (R. Pirc) . . . . .                     | 151  |
| <b>News</b>                                                                    |      |
| Topological Classification of Frechet Spaces (G. Tomšič) . . . . .             | 162  |
| The Free Fall of Atoms, Neutrons and Electrons (J. Strnad) . . . . .           | 166  |
| The Luminance in a Vertical Cylindrical Hole (N. Mankoč) . . . . .             | 172  |
| <b>School</b> . . . . .                                                        | 177  |
| <b>Home News</b> . . . . .                                                     | 185  |

# **OBZORNIK**

## **ZA MATEMATIKO IN FIZIKO**

Tehnični in odgovorni urednik:  
Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor:

Blinč Robert, FNT univerze v Ljubljani  
Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani  
Avsec France, gimnazija Kranj  
Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani  
Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Stefan« v Ljubljani  
Garb France, gimnazija Ravne  
Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani  
Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani  
Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije  
Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije

Natisnila tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani

## VSEBINA

### Članki

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Vloga grup v elementarni matematiki (I. Vidav) . . . . .                              | 1   |
| O realnih številih (N. Prijatelj) . . . . .                                           | 49  |
| O odvodu v linearnih topoloških prostorih (J. Grasselli) . . . . .                    | 56  |
| Do Schrödingerjeve enačbe — po Feynmanovo (J. Strnad) . . . . .                       | 59  |
| Giblјivost elektronov v organskih polprevodnikih (P. Gosar) . . . . .                 | 78  |
| Gravitacijsko valovanje — odkrito? (J. Strnad) . . . . .                              | 97  |
| Ali bi lahko obstajali delci, ki bi bili hitrejši kot svetloba? (J. Strnad) . . . . . | 108 |
| Toplotna prevodnost dielektričnih kristalov (R. Pirc) . . . . .                       | 151 |

### Novice

|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| Novo pri enotah (J. Strnad) . . . . .                                 | 87  |
| Topološka klasifikacija Frechetovih prostorov (G. Tomšič) . . . . .   | 162 |
| Padanje atomov, nevtronov in elektronov (J. Strnad) . . . . .         | 166 |
| Kako pojema svetlost okroglega jaška z globino? (N. Mankoč) . . . . . | 172 |

### Šola

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Nekaj o osnovnih fotometričnih količinah v astronomiji (M. Prosen) . . . . .                                         | 33  |
| Ob nekaterih tujih učbenikih za fiziko (J. Strnad) . . . . .                                                         | 35  |
| Nekaj uporabne matematike za srednjo šolo (F. Avsec) . . . . .                                                       | 89  |
| Breztežnostno stanje (F. Avsec) . . . . .                                                                            | 91  |
| Vzgojna vloga fizike v srednji šoli (F. Kvaternik) . . . . .                                                         | 181 |
| Pouk fizike po programu PSSC (F. Kvaternik) . . . . .                                                                | 121 |
| Poskusi brez trenja v mehaniki (J. Strnad) . . . . .                                                                 | 123 |
| »Nova matematika« v osnovni šoli? (F. Kvaternik) . . . . .                                                           | 177 |
| Delo krožka za astronomijo, fiziko in matematiko na gimn. v Škofji Loki<br>v šol. letu 1968/69 (B. Roblek) . . . . . | 182 |

### Domače vesti

|                                                                                                                     |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Ob dvajsetletnici Društva slovenskih matematikov, fizikov in astronomov<br>(I. Vidav) . . . . .                     | 5 |
| 20. redni občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slo-<br>venije (M. Munda, C. Velkovrh) . . . . . | 7 |

|                                                                                                                                          |             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Fizikalni laboratoriji na celjskih gimnazijah (D. Modic) . . . . .                                                                       | 16          |
| Razgovor za »okroglo mizo« o matematični in fizikalni publicistiki<br>(A. Vadnal) . . . . .                                              | 17          |
| Sodelovanje Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS s tovarno<br>aparatorov in instrumentov »Vega« (C. Velkovrh) . . . . .        | 29          |
| Disertacije iz matematike in fizike, obranjene na univerzi v Ljubljani<br>1919—1967 (J. Kokole) . . . . .                                | 30          |
| Lep primer sodelovanja (M. Tozon) . . . . .                                                                                              | 93          |
| Poročilo z republiškega tekmovanja mladih matematikov (J. Globevnik) .                                                                   | 133         |
| Republiško tekmovanje srednješolcev v fiziki (Ur.) . . . . .                                                                             | 135         |
| Tekmovanje študentov fizike v Beogradu (P. Prelovšek) . . . . .                                                                          | 137         |
| Seznam diplomiranih slušateljev Višje pedagoške šole in Pedagoške akade-<br>mije v Ljubljani — oddelek za matematiko in fiziko . . . . . | 139         |
| Letna šola za topologijo v Zagrebu . . . . .                                                                                             | 143         |
| Stališče Društva glede polemike v časopisju (J. Grasselli) . . . . .                                                                     | 185         |
| Zvezno tekmovanje mladih matematikov (J. Globevnik) . . . . .                                                                            | 185         |
| Zvezno tekmovanje srednješolcev v fiziki (T. Skulj) . . . . .                                                                            | 187         |
| Poročilo o razstavi Močnikovih učbenikov v Idriji (V. Žnidar) . . . . .                                                                  | 191         |
| Kaj nudi našim šolam tovarna »Vega« v Ljubljani (Z. Pivk) . . . . .                                                                      | 191         |
| Utrinek . . . . .                                                                                                                        | 92          |
| Odgovori . . . . .                                                                                                                       | 42, 192     |
| Vprašanja . . . . .                                                                                                                      | 45, 94      |
| Nove knjige . . . . .                                                                                                                    | 45, 95, 144 |
| † Profesor Silvo Breskvar . . . . .                                                                                                      | 47          |