

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1969  
nik 16  
ilka 2

Izdaja društvo matematikov  
fizikov in astronomov SR Slovenije

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

---

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Avsec France, gimnazija Kranj

Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani

Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani

Garb France, gimnazija Ravne

Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani

Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan« v Ljubljani

Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani

Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani

Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije

Vidav Ivan FNT univerze v Ljubljani

---

Izdaja društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujte na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din

za dijake 5 din

za ustanove in podjetja 20 din

za inozemstvo 25 din (2 \$)

posamezna številka 5 din

---

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.** Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

## O REALNIH ŠTEVILIH

NIKO PRIJATELJ

V članku »Delno urejene algebraične strukture« (Obzornik za matematiko in fiziko, 1965, XII/1, 15—31) je J. Vrabec obravnaval med drugim tudi strukturo linearno urejenega komutativnega obsega, v katerem ima vsaka neprazna, navzgor omejena podmnožica tudi najmanjšo zgornjo mejo. Pokazal je, da gre pri tem za tako imenovano univalentno strukturo, se pravi, da sta poljubna primerka te strukture algebrsko in urejenostno izomorfna. S konstrukcijo obsega realnih števil je nadalje dokazal existenco takega primerka. Ker pa izomorfni primerki pri splošnih premišljanjih ne razlikujemo, lahko torej rečemo, da je obseg realnih števil s to strukturo povsem določen. V naslednjem si hočemo ogledati še nekatere druge ekvivalentne opredelitve obsega realnih števil.

Izhajajmo iz ugotovitve, da je sistem realnih števil linearno urejeni komutativni obseg  $(R, +, \cdot, <)$  s karakteristično lastnostjo:

(1) Vsaka neprazna, navzgor omejena podmnožica v  $R$  ima najmanjšo zgornjo mejo v  $R$ .

Iz te lastnosti bomo sedaj zapored izpeljali druge lastnosti obsega realnih števil, in sicer tako, da bo vsaka kasnejša lastnost logična posledica prejšnje. To »verigo« logičnih implikacij bomo nazadnje sklenili v »ekvivalenčni krog« s tem, da bomo iz zadnje izpeljane lastnosti spet dokazali izhodno lastnost (1). Tako se bomo prepričali, da lahko urejeni obseg realnih števil karakteriziramo s katerokoli izmed naštetih lastnosti.

Vpeljimo najprej pojem preseka v množici realnih števil  $R$ :

Urejeni par  $(X, Y)$  imenujemo presek v  $R$  natanko tedaj, kadar sta  $X$  in  $Y$  neprazni podmnožici realnih števil, ki ustrezata naslednjim zahtevam:

- (a)  $X \cap Y = \emptyset$
- (b)  $X \cup Y = R$
- (c)  $x \in X$  in  $y \in Y \Rightarrow x < y$

Podmnožico  $X$  imenujemo spodnji razred, podmnožico  $Y$  pa zgornji razred preseka  $(X, Y)$ .

Naj bo torej  $(X, Y)$  kak presek v  $R$ ! Ker sta  $X$  in  $Y$  neprazni podmnožici, vidimo iz (c), da je podmnožica  $X$  navzgor omejena, saj je vsak  $y \in Y$  zgornja meja te podmnožice. Zaradi lastnosti (1) eksistira zato najmanjša zgornja meja podmnožice  $X$  v  $R$ . Postavimo

$$\sup X = z \in R$$

Če upoštevamo (a) in (b), mora veljati za  $z$  natanko ena izmed možnosti

$$z \in X \quad \text{ali} \quad z \in Y$$

V primeru  $z \in X$  je  $z$  očitno največje število spodnjega razreda  $X$ , saj je  $z$  hkrati zgornja meja podmnožice  $X$ . Če pa je  $z \in Y$ , je  $z$  najmanjše število zgornjega razreda  $Y$ , ker je vsak  $y \in Y$  zgornja meja podmnožice  $X$ ,  $z$  pa njena najmanjša zgornja meja.

Potemtakem dobimo:

(2) Pri vsakem preseku  $(X, Y)$  v  $R$  ima ali spodnji razred  $X$  neko največje število ali zgornji razred  $Y$  neko najmanjše število.

Naj bo zdaj  $E$  kaka neprazna podmnožica realnih števil, ki je navzdol omejena v  $R$ ! Potem podmnožica  $X$  vseh spodnjih mej množice  $E$ , se pravi

$$X = \{x; x \leq a \text{ za vsak } a \in E\}$$

gotovo ni prazna. Prav tako pa je neprazna tudi njej komplementarna podmnožica  $\mathcal{C}X$ , saj je za vsak  $a \in E$  zanesljivo  $(a+1) \in \mathcal{C}X$ . Prepričajmo se, da je urejeni par  $(X, \mathcal{C}X)$  presek v  $R$ ! Lastnosti (a) in (b) sta neposredni posledici definicije komplementarne podmnožice. In če bi za kakšna  $x \in X$  in  $y \in \mathcal{C}X$  veljalo v nasprotju s (c)  $y \leq x$ , bi bilo seveda tudi  $y \leq a$  za vsak  $a \in E$ , torej  $y \in X$ , kar je protislovno z (a). Torej velja tudi (c). Glede na presek  $(X, \mathcal{C}X)$  je za števila iz podmnožice  $E$  uresničena natanko ena izmed možnosti:

$$\text{vsaj en } a \text{ iz } E \text{ je v } X \text{ ali vsi } a \in E \text{ so v } \mathcal{C}X$$

V prvem primeru je seveda, po definiciji podmnožice  $X$ ,  $a$  največje število spodnjega razreda  $X$ , se pravi največja spodnja meja podmnožice  $E$ . V drugem primeru pa brž uvidimo, da zgornji razred  $\mathcal{C}X$  ne more imeti najmanjšega števila. Če bi ga namreč imel, recimo, da bi bil to  $y_0$ , bi veljalo  $y_0 \leq a$  za vsak  $a \in E$ . Od tod pa bi sledilo, da bi moral biti  $y_0$  tudi v spodnjem razredu  $X$ , kar nasprotuje dejstvu, da je  $X \cap \mathcal{C}X = \emptyset$ . Zaradi lastnosti (2) mora potemtakem imeti tudi v drugem primeru spodnji razred  $X$  neko največje število in to pomeni, da eksistira največja spodnja meja podmnožice  $E$ .

Tako smo dobili:

(3) Vsaka neprazna, navzdol omejena podmnožica v  $R$  ima največjo spodnjo mejo v  $R$ .

Naslednja karakterizacija obsega realnih števil je dobro znani Heine-Borel-Lebesgov izrek. Preden ga izpeljemo iz (3), obnovimo nekaj osnovnih topoloških pojmov, ki jih potrebujemo za njegovo formulacijo.

Podmnožico  $G$  realnih števil imenujemo odprto natanko tedaj, kadar jo lahko zapišemo kot unijo samih odprtih intervalov. Ker je odprti interval  $(a, a)$  seveda prazna množica, je potemtakem tudi  $\emptyset$  odprta množica. Podmnožica realnih števil  $F$  pa pravimo, da je zaprta tedaj in le tedaj, če je njen komplement  $\mathcal{C}F$  odprta množica. Za neprazno podmnožico  $A$  realnih števil rečemo, da je omejena, če je navzdol in navzgor omejena. K vsaki omejeni podmnožici  $A$  očitno lahko najdemo tak zaprti interval  $[a, b]$ , da je  $A \subseteq [a, b]$ .

Naj bo  $A$  kakšna dana podmnožica realnih števil! Če eksistira k tej podmnožici  $A$  kakšna družina podmnožic  $\mathcal{D}$  tako, da lahko najdemo za vsak  $x \in A$  vsaj eno podmnožico  $G_x$  družine  $\mathcal{D}$ , da je  $x \in G_x$ , potem imenujemo družino  $\mathcal{D}$  pokritje podmnožice  $A$ . Ako so vse podmnožice družine  $\mathcal{D}$  od-

prte, govorimo o odprtem pokritju podmnožice  $A$  in če ima družina  $\mathcal{D}$  le končno mnogo elementov, o končnem pokritju podmnožice  $A$ .

Podmnožico  $A$  imenujemo kompaktno natanko tedaj, kadar lahko najdemo pri vsakem odprtem pokritju  $\mathcal{D}$  te podmnožice, končno mnogo elementov družine  $\mathcal{D}$ , ki so končno pokritje te podmnožice.

Vzemimo zdaj, da je  $F$  omejena in zaprta podmnožica realnih števil in  $\mathcal{D}$  poljubno odprto pokritje te podmnožice. Ker je  $F$  omejena podmnožica, eksistira zaprti interval  $[a, b]$  tako, da je  $F \subseteq [a, b]$ . In ker je  $F$  zaprta, je njen komplement  $\mathcal{C}F$  odprta podmnožica. Zato eksistira k vsakemu  $y \in [a, b] \cap \mathcal{C}F$  tak odprti interval  $J_y$ , da je  $y \in J_y \subseteq \mathcal{C}F$ , se pravi, da je  $J_y \cap F = \emptyset$ . Naredimo družino  $\mathcal{C}$  odprtih intervalov  $J_y$ :

$$\mathcal{C} = \{J_y; y \in [a, b] \cap \mathcal{C}F \text{ in } J_y \cap F = \emptyset\}$$

ki je očitno odprto pokritje podmnožice  $[a, b] \cap \mathcal{C}F$ . Potemtakem je unija družin  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{C}$ , torej  $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ , odprto pokritje zaprtega intervala  $[a, b]$ .

Pokažimo najprej, da je že končno mnogo elementov družine  $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$  pokritje zaprtega intervala  $[a, b]$ .

V ta namen si oglejmo podmnožico realnih števil:  $K = \{x; x \in [a, b] \text{ in končno mnogo elementov iz } \mathcal{D} \cup \mathcal{C} \text{ je pokritje } [x, b]\}$ . Naša naloga je torej pokazati, da je  $a \in K$ . Takoj vidimo, da podmnožica  $K$  ni prazna, saj je prav gotovo  $b \in K$ . Ker je namreč  $[b, b] = \{b\}$  in je, ali  $b \in F$  ali pa  $b \in \mathcal{C}F$ , eksistira bodisi en tak  $G_b \in \mathcal{D}$ , da je  $b \in G_b$ , bodisi en  $J_b \in \mathcal{C}$ , da je  $b \in J_b$ . Toda podmnožica  $K$  je tudi navzdol omejena, saj je  $a \leq x$  za vsak  $x \in K$ . Zato ima po (3) največjo spodnjo mejo v  $R$ . Pišimo  $\inf K = m$  in se uverimo, da je  $m \in K$ , se pravi, da eksistira končno mnogo elementov družine  $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ , ki so pokritje zaprtega intervala  $[m, b]$ ! Ker je seveda  $m \in [a, b]$ , je bodisi  $m \in G_m$  za kak  $G_m \in \mathcal{D}$ , bodisi  $m \in J_m$  za kak  $J_m \in \mathcal{C}$ . Če upoštevamo, da je  $G_m$  odprta množica,  $J_m$  odprti interval in  $m = \inf K$ , je gotovo mogoče najti tako realno število  $u \in K$ , da je  $m < u$  in bodisi  $[m, u] \subseteq G_m$  bodisi  $[m, u] \subseteq J_m$ . Ker je  $u \in K$ , je končno mnogo elementov družine  $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$  pokritje zaprtega intervala  $[u, b]$ . In če dodamo tem elementom le še  $G_m$  oziroma  $J_m$ , dobimo očitno neko končno pokritje zaprtega intervala  $[m, b]$ , saj je  $[m, u]$  v  $G_m$  oziroma v  $J_m$ . Potemtakem je res  $m \in K$ . Toda brž lahko vidimo, da mora biti  $m = a$ . V nasprotnem primeru bi bilo namreč  $a < m$ , saj je  $m \in [a, b]$ . Potem pa bi zopet lahko našli tako realno število  $v$ , da bi bilo  $a < v < m$  in  $[v, m] \subseteq G_m$  oziroma  $[v, m] \subseteq J_m$ . Od tod pa bi sledilo, da je končno pokritje intervala  $[m, b]$  tudi končno pokritje intervala  $[v, b]$ , da je torej  $v \in K$ . To pa ni mogoče, saj je  $v < m = \inf K$ .

Spoznali smo torej, da je že končno mnogo elementov družine  $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$  pokritje zaprtega intervala  $[a, b]$ . Vzemimo, da so to elementi  $G_1, G_2, \dots, G_n$  iz  $\mathcal{D}$  in  $J_1, J_2, \dots, J_m$  iz  $\mathcal{C}$ ! Ker pa je  $F \subseteq [a, b]$  in je za vsak  $J_i \in \mathcal{C}$   $J_i \cap F = \emptyset$ , je na dlani, da so  $G_1, G_2, \dots, G_n$  iz  $\mathcal{D}$  končno pokritje podmnožice  $F$ . Potemtakem velja

(4) Vsaka omejena in zaprta podmnožica v  $R$  je kompaktna.

Od tega Heine-Borel-Lebesgovega izreka je le kratka pot do prav tako »popularne« Bolzano-Weierstrassove trditve. Spomnimo se najprej, da imenujemo okolico takega realnega števila  $x$  vsako podmnožico  $O_x$  realnih števil, ki vsebuje kak odprt interval  $J_x$ , v katerem je  $x$ . In če je  $A$  poljubna

podmnožica v  $R$ , potem je realno število  $s$  stekališče te podmnožice natanko tedaj, kadar je v vsaki njegovi okolici  $O_s$  vsaj eno število iz  $A$ , različno od  $s$ . Zdaj pa izpeljimo iz izreka (4) Bolzano-Weierstrassovo trditev

(5) Vsaka omejena neskončna podmnožica v  $R$  ima vsaj eno stekališče v  $R$ .

Očitno je natanko dovolj, če pokažemo: vsaka omejena podmnožica v  $R$ , ki nima stekališč, je končna.

Naj bo torej  $A$  poljubna omejena podmnožica v  $R$ , ki je brez stekališč! Brž vidimo, da mora biti  $A$  zaprta množica. Kajti za vsak  $x \in \mathcal{C}A$  eksistira v tem primeru vsaj ena okolica  $O_x$ , za katero je  $O_x \cap A = \emptyset$ ; in zato eksistira tudi vsaj en odprt interval  $J_x$ , da je  $x \in J_x \subseteq \mathcal{C}A$ . Ker je za te intervale očitno  $\bigcup_{x \in \mathcal{C}A} J_x = \mathcal{C}A$ , je množica  $\mathcal{C}A$  odprta, torej množica  $A$  res zaprta. Ker pa tudi

noben  $y \in A$  ni stekališče podmnožice  $A$ , lahko najdemo k vsakemu  $y \in A$  tako okolico  $O_y$ , torej tudi tak odprt interval  $J_y$ , da je  $J_y \cap A = \{y\}$ . Toda družina odprtih intervalov  $\mathcal{D} = \{J_y; y \in A \text{ in } J_y \cap A = \{y\}\}$  je neko odprto pokritje omejene in zaprte podmnožice  $A$ . Ker je na osnovi (4) podmnožica  $A$  kompaktna, eksistira že končno mnogo elementov  $J_1, J_2, \dots, J_n$  družine  $\mathcal{D}$ , ki so pokritje podmnožice  $A$ . Vsak  $y \in A$  mora biti potemtakem v enem izmed odprtih intervalov  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . Ker pa vemo, da ima vsak izmed teh intervalov le po en  $y \in A$  za element, more imeti podmnožica  $A$  le končno mnogo elementov.

V nadaljnjem bomo karakterizirali obseg realnih števil s parom lastnosti.

Iz (5) sledi:

(a) Ako sta  $x, y$  poljubni realni števili in je  $0 < x < y$ , potem eksistira tako naravno število  $n$ , da je  $n \cdot x > y$ .

Če bi namreč to ne bilo res, potem bi za vsaj en par realnih števil  $x, y$  veljalo hkrati  $0 < x < y$  in  $0 \leq n \cdot x \leq y$  za vsako naravno število  $n$ . Množica  $A = \{n \cdot x; n \in N\}$  bi bila torej omejena in neskončna, toda očitno brez stekališč. To pa nasprotuje trditvi (5).

Zaradi (a) pravimo, da je obseg realnih števil **Arhimedov**.

(b) Bodi  $B = \{[a_n, b_n]; n \in N\}$  poljubno zaporedje zaprtih vložnih intervalov v  $R$ ! To pomeni, da je za vsak  $n \in N$   $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Oglejmo si množico  $C = \{a_n; n \in N\}$ . Ker je seveda  $a_0 \leq a_n \leq b_0$  za vsak  $n \in N$ , je množica  $C$  omejena v  $R$ . Lahko se zgodi, da je od določenega  $m \in N$  za vsak  $i \geq m$   $a_i = a_m$ . V tem primeru je  $a_n \leq a_m \leq b_n$  za vsak  $n \in N$  in zato je gotovo  $a_m \in \bigcap_{n \in N} [a_n, b_n]$ . V nasprotnem primeru pa mora biti k vsakemu  $n \in N$  vsaj en tak  $m \in N$ , da je  $a_m > a_n$ . Množica  $C$  torej nima največjega elementa in je zato neskončna. Ker je tudi omejena, ima na osnovi (5) vsaj eno stekališče  $s$  v  $R$ . Brž se lahko prepričamo, da mora biti  $a_n \leq s \leq b_n$  za vsak  $n \in N$  in da je zato seveda  $s \in \bigcap_{n \in N} [a_n, b_n]$ . Če bi bilo

namreč za kak  $m \in N$   $b_m < s$ , potem bi v okolici  $(s - b_m, s + b_m)$  števila  $s$  sploh ne bilo nobenega elementa iz  $C$ , saj je za vsak  $n \in N$   $a_n \leq b_m$ . In če bi bilo  $s < a_n$  za kak  $n \in N$ , bi seveda lahko našli najmanjši  $m \in N$ , za katerega bi bilo  $s < a_m$ . Potem bi moralo biti ali  $a_{m-1} < s < a_m$  ali pa  $a_{m-1} = s$ . Ker je za vsak  $n \in N$   $a_n \leq a_{n+1}$ , bi v prvem primeru v okolici  $(a_{m-1}, a_m)$  števila  $s$  ne bilo nobenega elementa iz  $C$ . V drugem primeru pa je iz istega razloga kveč-

jemu končno mnogo elementov  $a_i \in C$ , za katere je  $a_i < a_{m-1}$ . Zato bi gotovo lahko našli tak  $\varepsilon > 0$ , da bi v okolici  $(a_{m-1} - \varepsilon, a_m)$  števila  $s$  ne bilo nobenega od  $s$  različnega elementa iz  $C$ . Potemtakem smo ugotovili:

Presek vsakega zaporedja zaprtih vloženih intervalov v  $R$  je neprazna množica.

Če strnemo  $(\alpha)$  in  $(\beta)$ , dobimo

**(6) Obseg  $R$  je Arhimedov in presek vsakega zaporedja zaprtih vloženih intervalov v  $R$  je neprazna množica.**

Naj bo zdaj  $(x_n)$  poljubno Cauchyjevo zaporedje v  $R$ ! Kakor vemo, to pomeni, da eksistira k vsakemu  $\varepsilon > 0$  iz  $R$  tak  $n_\varepsilon \in N$ , da je za poljubni naravni števili  $p$  in  $r$  dovoljen sklep:

$$p, r \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_p - x_r| < \varepsilon$$

V posebnem primeru lahko torej najdemo k vsakemu od nič različnemu  $k \in N$  tak  $n_k \in N$ , da je  $|x_p - x_{n_k}| < 1/k$ , brž ko je naravno število  $p \geq n_k$ . Potemtakem je veljaven sklep

$$p \geq n_k \Rightarrow x_{n_k} - 1/k < x_p < x_{n_k} + 1/k$$

Sedaj pa priredimo vsakemu od nič različnemu  $m \in N$  naravno število

$$(a) \quad r_m = \sup \{ n_k; \quad k \leq m \}$$

in realni števili

$$(b) \quad a_m = \sup \{ x_{n_k} - 1/k; \quad k \leq m \}, \quad b_m = \inf \{ x_{n_k} + 1/k; \quad k \leq m \}$$

Potem je za vsak od nič različni  $m \in N$  in poljubno naravno število  $p \geq r_{m+1}$

$$(c) \quad a_m \leq a_{m+1} < x_p < b_{m+1} \leq b_m$$

Od tod neposredno vidimo, da je  $\{[a_m, b_m]; \quad m \in N - \{0\}\}$  zaporedje zaprtih vloženih intervalov. Na podlagi (6) eksistira potemtakem vsaj eno realno število  $L$  tako, da je

$$(d) \quad L \in \bigcap_{m \in N - \{0\}} [a_m, b_m]$$

Zaradi tega in pa (b) je očitno za vsak od nič različen  $m \in N$

$$(e) \quad x_{n_m} - 1/m \leq a_m \leq L \leq b_m \leq x_{n_m} + 1/m$$

in seveda velja za vsako naravno število  $p$  tudi sklep

$$(f) \quad p \geq n_m \Rightarrow x_{n_m} - 1/m < x_p < x_{n_m} + 1/m$$

Iz (e) in (f) pa dobimo takoj, da je za vsak  $m \in N - \{0\}$  in vsako naravno število  $p$  dovoljeno sklepati

$$(g) \quad p \geq n_m \Rightarrow |x_p - L| \leq 2/m$$

Naj bo zdaj dan poljuben  $\varepsilon > 0$  iz  $R$ ! Ker je po (6) obseg  $R$  Arhimedov, gotovo eksistira tako naravno število  $m_\varepsilon$ , da je  $m_\varepsilon \cdot \varepsilon > 2$ , se pravi  $2/m_\varepsilon < \varepsilon$ . Za ta  $m_\varepsilon$  pa dobimo iz (g) takoj

$$p \geq n_{m_\varepsilon} \Rightarrow |x_p - L| < \varepsilon$$

To pa pomeni, da je zaporedje  $(x_n)$  konvergentno in da je  $\lim x_n = L$ .

Spoznali smo torej, da je vsako Cauchyjevo zaporedje v  $R$  konvergentno. Zaradi te lepe lastnosti pravimo, da je obseg realnih števil poln.

Potemtakem lahko izjavimo:

**(7) Obseg  $R$  je Arhimedov in poln.**

Sklenimo naposled še to »verigo« izrekov v »ekvivalenčni krog«, s tem da iz (7) dokažemo (1).

Naj bo torej  $E$  kakšna neprazna navzgor omejena podmnožica v  $R$ ! Izberimo si kak element  $a \in E$  in zgornjo mejo  $b$  podmnožice  $E$  tako, da je  $b - a > 0$ ! Ker je obseg  $R$  Arhimedov, eksistira k vsakemu od nič različnemu  $n \in N$  tak  $m \in N$ , da je  $m \cdot 1/n > b - a$ , torej  $a + m/n > b$ . Potemtakem je  $a + m/n$  tudi zgornja meja podmnožice  $E$ . Če priredimo torej vsakemu  $n \in N - \{0\}$  množico

$$M_n = \{m; m \in N \text{ in } a + m/n \text{ je zgornja meja podmnožice } E\}$$

je  $M_n$  gotovo neprazna podmnožica naravnih števil. Ker pa so naravna števila dobro urejena, eksistira v  $M_n$  neko najmanjše naravno število  $m_n$ . To pomeni, da je za vsak  $n \in N - \{0\}$

$$(a) \quad y_n = a + m_n/n \text{ zgornja meja podmnožice } E$$

$$(\beta) \quad x_n = a + (m_n - 1)/n = y_n - 1/n \text{ manjši od vsaj enega števila iz } E.$$

Ako sta torej  $p$  in  $r$  poljubni naravni števili, različni od nič, je zaradi (a) in (β):

$$x_p < y_r \quad \text{in} \quad x_r < y_p$$

in zato

$$x_p - x_r < y_r - x_r = 1/r \quad \text{in} \quad x_r - x_p < y_p - x_p = 1/p$$

Od tod pa vidimo, da je

$$(h) \quad |x_p - x_r| < \sup \{1/p, 1/r\}$$

za poljubna  $p, r$  iz  $N - \{0\}$ . Ker je obseg  $R$  Arhimedov, lahko najdemo k vsakemu  $\varepsilon > 0$  iz  $R$  tak  $n_\varepsilon \in N$ , da je  $n_\varepsilon \cdot \varepsilon > 1$ , torej  $1/n_\varepsilon < \varepsilon$ . Potem pa vidimo iz (h), da velja sklep

$$p, r \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_p - x_r| < \varepsilon$$

se pravi, da je zaporedje  $(x_n)$  Cauchyjevo. In ker je obseg  $R$  poln, ima zaporedje  $(x_n)$  neko limito  $L$  v  $R$ . Zdaj pa se prepričajmo, da je

$$L = \sup E$$

Ugotovimo najprej, da je  $L$  zgornja meja podmnožice  $E$ . V nasprotnem primeru bi moral biti namreč  $L$  manjši od vsaj enega števila z podmnožice  $E$ . Potem

bi bilo  $(z - L)/2 > 0$  in zaradi Arhimedove lastnosti bi lahko našli tak  $n \in N$ , da bi bilo  $n \cdot (z - L)/2 > 1$ , torej  $1/n < (z - L)/2$ . Zaradi  $\lim x_n = L$  pa je gotovo tudi tak  $m \in N$ , da je  $|x_p - L| < (z - L)/2$  brž ko je  $p \geq m$ . Za  $r = \sup \{ n, m \}$  velja potemtakem hkrati

$$(i) \quad x_r - L \leq |x_r - L| < (z - L)/2 \quad \text{in} \quad 1/r < (z - L)/2$$

Potem pa bi imeli zaradi  $(\beta)$  in  $(i)$

$$y_r = x_r + 1/r < (L + (z - L)/2) + (z - L)/2 = z \in E$$

To pa ni mogoče, saj je po  $(\alpha)$   $y_r$  zgornja meja podmnožice  $E$ . Toda  $L$  je tudi najmanjša zgornja meja podmnožice  $E$ , saj nobeno realno število  $u < L$  ne more biti zgornja meja te podmnožice. Ker je v tem primeru namreč  $L - u > 0$  in je  $\lim x_n = L$ , lahko spet najdemo tak  $n \in N$ , da je  $L - x_n \leq |L - x_n| < L - u$ , se pravi  $u < x_n$ . Po  $(\beta)$  pa je vsak  $x_n$  manjši od vsaj enega števila iz podmnožice  $E$ ; zato velja ta lastnost tudi za  $u$ .

Končno naj še poudarimo, da je zahteva pri  $(6)$  in  $(7)$ , da bodi obseg  $R$  Arhimedov, potrebna. Arhimedove lastnosti namreč ni mogoče deducirati niti iz lastnosti nepraznega preseka zaporedja zaprtih vloženih intervalov, niti iz lastnosti polnosti. Konstruirati je namreč mogoče take urejene obsege, ki imajo lastnost nepraznega preseka zaporedja zaprtih vloženih intervalov, oziroma, ki so polni, ne da bi bili Arhimedovi. Prav tako eksistira tudi tak urejen obseg, ki je poln, pa nima lastnosti nepraznega preseka zaporedja zaprtih vloženih intervalov. To nam pove, da tudi lastnost polnosti in lastnost nepraznega preseka zaporedja zaprtih vloženih intervalov nista logično ekvivalentni.

Pri tem razmišljanju smo predpostavili eksistenco obsega realnih števil. Znano je, da je mogoče ugotoviti njegovo formalno eksistenco s konstrukcijo, ki izhaja iz urejenega komutativnega obsega racionalnih števil  $(Q, +, \cdot, <)$ , katerega obstoj je zajamčen z aksiomi teorije množic. To konstrukcijo izvedemo navadno na Dedekindov ali na Cantorjev način. Pri prvem imamo za cilj karakteristično lastnost  $(2)$ , pri drugem pa karakteristično lastnost  $(7)$  realnih števil.

#### Literatura:

L. W. Cohen — G. Ehrlich: The Structure of the Real Number System, D. van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1963.

## O ODVODU V LINEARNIH TOPOLOŠKIH PROSTORIH

JOŽE GRASSELLI

Pojmi matematične analize so se v veliki meri izkristalizirali pri študiju funkcij ene spremenljivke, ki sta jim domena in zaloga vrednosti intervala realnih števil. Definicija, ki jo poznamo za te funkcije, se je dala zelo posplošiti, ko je bil vpeljan v matematiko pojem množice. Naj bosta namreč  $X$  in  $Y$  množici s poljubnimi elementi! Funkcija  $f$  z domeno  $X$  in zalogo vrednosti v  $Y$  je pač predpis, ki prireja vsakemu elementu  $a \in X$  po en element  $f(a) \in Y$  kot sliko. Zadnja desetletja je močno živo vprašanje, kako bi se prenesli na te splošnejše funkcije razni pojmi, znani iz infinitezimalnega računa navadnih funkcij. Tu si hočemo nekoliko ogledati, kaj je bilo pri tem doseženo glede odvoda.

Pri navadnih funkcijah je odvod limita diferenčnega kvocienta

$$\lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (1)$$

ko streli  $h$  proti nič. V tej definiciji so uporabljene različne lastnosti realnih števil: da je razlika realnih števil  $f(a+h) - f(a)$  realno število, da je kvocient realnih števil  $f(a+h) - f(a)$  in  $h \neq 0$  realno število, da ima smisel limitiranje.

V primeru, ko sta  $X$  in  $Y$  abstraktni množici, na njunih elementih sama po sebi nobena od teh operacij ni opredeljena. Vpeljava odvoda postane možna šele, ko vtisnemo množicam  $X$  in  $Y$  primerne operacije. Pri tem nas spremljata želja, naj bodo lastnosti, ki jih množicama  $X$  in  $Y$  predpišemo, čim preprostejše, in zahteva, da je uveden odvod takšen, da dobimo običajni odvod, kadar sta  $X$  in  $Y$  množici realnih števil. Definicij, ki v opisanem smislu posplošujejo odvod, je bilo doslej postavljenih prek dvajset. Do te pestrosti je prišlo, ker so razni avtorji izhajali iz drugačnih lastnosti množic  $X$  in  $Y$ . Nedavno pa sta V. I. Averbuh in O. G. Smoljanov opredelila odvod v tako splošni obliki, da zaobjema vse znane definicije odvoda, vsaj kolikor se nanašajo na linearne topološke prostore. Njuno opredelitev bomo v naslednjem opisali.

Ko se ukvarjamo s posplošitvijo odvoda, definicija (1) ni najbolj primerno izhodišče, ker v njej nastopa deljenje, ki že pri razmeroma preprostih množicah ne obstaja; še večja težava pa je, da je v kvocientu izraza (1) števec element iz  $Y$ , imenovalec pa element iz  $X$  in je zato v splošnem ta izraz brez smisla. Kot je znano, dopušča definicija (1) enakovredni zapis:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h) \quad (2)$$

pri čemer je  $r(h)$  funkcija, za katero velja  $r(h)/h \rightarrow 0$ , ko teče  $h \rightarrow 0$ . Iz te enačbe vidimo, da lahko pri navadni odvedljivi funkciji razliko  $f(a+h) - f(a)$  za majhne  $h$  aproksimiramo s številom  $f'(a)h$ , ki se enostavno izraža z od-

vodom funkcije. Sam produkt  $f'(a)h$  je določen za vse  $h$  in preslika realna števila vase. Pri tem je za poljubna števila  $h, h_1$  in  $c$

$$\begin{aligned} f'(a)(h + h_1) &= f'(a)h + f'(a)h_1 \\ f'(a)(ch) &= cf'(a)h \end{aligned}$$

kar kaže, da gre za linearno preslikavo.

Enačba (2), v kateri je odvod tolmačen kot linearna preslikava, služi za izhodišče pri posplošitvi odvoda. Preden o tem kaj več povemo, se spomnimo, kaj je linearni topološki prostor. Opozorili bomo le na tiste njegove lastnosti, ki jih bomo v nadaljnjem potrebovali. Natančnih definicij ne bomo navajali.

Če je množica nekih elementov vektorski prostor, dobimo pri seštevanju in odštevanju elementov ter pri množenju elementov s številami spet elemente iz te množice. V vektorskem prostoru je torej zagotovljena neomejena izvršljivost omenjenih algebrskih operacij.

Če je množica nekih elementov topološki prostor, je za vsak element poznano, kaj so njegove okolice, tj. kateri elementi okolice sestavljajo. Okolice so pač neke podmnožice prostora. V topoloških prostorih je mogoče govoriti o zveznosti funkcij. Ravnamo prav podobno kot pri navadnih funkcijah. Naj bo  $f$  funkcija, ki ima za domeno topološki prostor  $X$ , njena zaloga vrednosti pa leži v topološkem prostoru  $Y$ ! Za  $a \in X$  je  $f(a)$  element iz  $Y$ . Element  $f(a)$  ima razne okolice v  $Y$ , element  $a$  pa okolice v  $X$ . Funkcija  $f$  je v točki  $a$  zvezna, če za vsako okolico  $V(f(a))$  elementa  $f(a)$  obstaja takšna okolica  $U(a)$  elementa  $a$ , da ima vsak element  $x \in U(a)$  sliko v  $V(f(a))$ . Vse povedano velja tudi tedaj, če je  $X = Y$  in upodablja funkcija  $f$  prostor  $X$  vase.

Množica  $X$  je linearni topološki prostor, če izpolnjuje tri zahteve: 1.  $X$  je vektorski prostor. 2.  $X$  je topološki prostor. 3. Algebrske operacije, ki jih ima  $X$  kot vektorski prostor, so zvezne, če jih gledamo s stališča, da je  $X$  topološki prostor.

Imejmo zdaj linearna topološka prostora  $X$  in  $Y$ ! Poleg njiju naj bosta dani množica  $\mathcal{A}$ , ki ima za elemente neke preslikave prostora  $X$  v  $Y$ , in še množica  $\mathcal{R}$ , katere elementi so prav tako preslikave iz  $X$  v  $Y$ , vendar v splošnem druge kot so v  $\mathcal{A}$ ! Če je torej  $A \in \mathcal{A}$  in  $r \in \mathcal{R}$ , sta  $A(h)$  in  $r(h)$  elementa iz  $Y$  za vsak  $h \in X$ .

Vzemimo funkcijo  $f$  z domeno  $X$  in zalogo vrednosti v  $Y$ ! Ker  $X$  in  $Y$  ustrezata 1. zahtevi, je za vsak par  $a, h \in X$  tudi element  $a + h \in X$  in enako je razlika  $f(a + h) - f(a)$  element iz  $Y$ .

Funkcija  $f$  je v točki  $a \in X$  odvedljiva, če se dasta dobiti takšni preslikavi  $A \in \mathcal{A}$  in  $r \in \mathcal{R}$ , da je za vsak  $h \in X$  izpolnjena enačba

$$f(a + h) - f(a) = A(h) + r(h) \quad (3)$$

V primeru odvedljivosti v točki  $a$  se torej da element  $f(a + h) - f(a)$  pri vsakem  $h$  izraziti kot vsota slik  $A(h)$  in  $r(h)$ . Preslikavo  $A$  imenujemo odvod funkcije  $f$  v točki  $a$  in jo označujemo pogosto kar z  $f'(a)$ . Če ima funkcija  $f$  odvod v vsaki točki prostora  $X$ , pišemo zanj  $f'$ . Tedaj prireja  $f'$  vsakemu elementu  $x \in X$  svojo preslikavo  $A$  iz  $\mathcal{A}$ .

Ponazorimo definicijo odvoda z zgledoma!

Naj bosta  $X$  in  $Y$  normirana prostora. Množico  $\mathcal{A}$  naj sestavljajo vse zvezne linearne preslikave  $A : X \rightarrow Y$ , množico  $\mathcal{R}$  pa vse tiste preslikave  $r : X \rightarrow Y$ , pri

katerih teži za  $h \in X$  pri  $\|h\| \rightarrow 0$  količnik  $\|r(h)\|/\|h\| \rightarrow 0$ ! Iz definicije (3) dobimo tu kar odvod, kakor ga je za normirane prostore uvedel M. Fréchet. (Razne primere in uporabe za ta odvod najde bralec v knjigi Vektorska in tenzorska analiza prof. dr. F. Križaniča.)

Prehajamo k drugemu zgledu.  $X$  in  $Y$  sta linearna topološka prostora. Množica  $\mathcal{A}$  so vse zvezne linearne preslikave  $A: X \rightarrow Y$ . V množici  $\mathcal{R}$  so vse preslikave  $r: X \rightarrow Y$ , ki imajo naslednjo lastnost: za vsako okolico  $V(0)$  elementa nič v  $Y$  obstaja takšna okolica  $U(0)$  elementa nič v  $X$ , da se s številom  $t$  pomnoženi elementi  $x \in U(0)$  s preslikavo  $r$  preslikajo v množico  $o(t)V(0)$ . Pri tem je  $o(t)$  taka realna funkcija, da streži  $o(t)/t \rightarrow 0$  pri  $t \rightarrow 0$ . V tej obliki je vpeljal odvod S. Lang.

Odvod, kakor smo ga spoznali, je tesno povezan z množicama  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{R}$ . Če ju spremenimo, dobimo navadno drugačen odvod. Običajno vzamejo za  $\mathcal{A}$  množico vseh zveznih linearnih preslikav iz  $X$  v  $Y$ . V tem je tudi razlog za privzetek, da sta  $X$  in  $Y$  linearna topološka prostora. Množico  $\mathcal{R}$  največkrat izberejo tako, da je vektorski prostor in ima samo element 0 skupen z množico  $\mathcal{A}$ . Ta predpis seveda množice  $\mathcal{R}$  ne določa enolično.

Če množici  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{R}$  podvržemo omenjenim in še nekim drugim omejitvam, dobi odvod, podan z enačbo (3), podobne lastnosti, kakor veljajo za odvod navadnih funkcij. Ugotovi se, da je pri danih  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{R}$  odvod en sam, če obstaja. Nadalje se najde, da je odvod linearna zvezna preslikava in da je vsaka linearna zvezna preslikava povsod odvedljiva ter enaka svojemu odvodu. Izkaže se tudi, da je linearna kombinacija v neki točki odvedljivih funkcij odvedljiva v tej točki, njen odvod je linearna kombinacija odvodov. Tudi pravilo o odvajanju posrednih funkcij se prenese na zdajšnji splošni primer.

#### Literatura:

V. I. Averbuh, O. G. Smoljanov: Teorija diferencirovanja v lin. top. pr. Uspehi mat. nauk. XXII, 6, 1967.

V. I. Averbuh, O. G. Smoljanov: Različnye opredelenija proizvodnoj v lin. top. pr. Uspehi mat. nauk. XXIII, 4, 1968.

S. Lang: Introduction to differentiable manifolds. 1962.

## DO SCHRÖDINGERJEVE ENAČBE — PO FEYNMANOVO

JANEZ STRNAD

Osnovni zakoni, ki jih obravnavajo uvodni ali nekoliko zahtevnejši učbeniki za fiziko, so dobro znani že vrsto let in preskušeni z množico merjenj. Vendar sodijo vpeljave osnovnih zakonov med nehvaležne odlomke učbenikov. Vsak osnovni zakon dodaja namreč k prejšnjemu znanju nekaj čisto novega in ga zato ni mogoče izpeljati iz že obdelanih enačb. Metodika uči, da sta za vpeljavo novih zakonov na voljo dve poti. Pri *dedukciji* naj bi vzeli za osnovo skupino aksiomov. Aksiomov, v katerih nastopa poleg že znanih še več ne-definiranih količin, ne moremo utemeljiti neposredno. Iz njih bi izpeljali enačbe, s katerimi bi definirali neznane količine, in enačbe, ki bi jih preverili s poskusi. Tako bi aksiome utemeljili posredno. Pri *indukciji* naj bi vzeli za osnovo skupino zakonov, od katerih bi bil vsak zase utemeljen s poskusi. Nato bi definirali nove količine tako, da bi dobili iz zakonov še druge uporabne enačbe. Za zahtevnejše učbenike naj bi bila priporočljiva prva pot, ki je krajša, uvodnim učbenikom pa naj bi bolj ustrezala druga pot.\*

Toda pri vpeljavi osnovnih zakonov v fiziki navadno ne moremo brez ovinkov po eni izmed obeh poti. Glavna težava je v tem, da zakoni niso popolnoma neodvisni drug od drugega in potrdimo s poskusi vso skupino zakonov hkrati, ne pa posameznega zakona. Druga, sicer postranska težava pa je ta, da bi morala biti imena enačb ali trditev, na primer *aksiom*, *zakon*, *izrek*, *načelo*, odvisna od tega, katero izmed obeh poti bi ubrali. To bi še povečalo neubranost v rabi teh imen, ki jih fiziki že itak uporabljamo dokaj netankovestno. Prehudo prizadevanje po metodični doslednosti bi šlo v škodo uporabnosti učbenika za učenje. Odločiti se je treba pač za pravo mero, ki je odvisna od tega, komu je učbenik namenjen, in od njegovega obsega.\*\* Zato pri vpeljavi osnovnih zakonov pogosto ubiramo dokaj zavite poti, na katerih kdaj pa kdaj namen posvečuje sredstva in na katerih se zavestno ali prikrito opiramo na ustaljene izkušnje.

*Schrödingerjevo enačbo*, ki je ena izmed oblik osnovnega zakona nerelativistične kvantne mehanike, vpeljejo skoraj v vseh uvodnih učbenikih in uče-

---

\* Pri dedukciji zakonov nerelativistične mehanike vzamemo za osnovo tri *Newtonove aksiome*. Pri indukciji moramo vzeti za osnovo *zakon o sodelovanju (interakciji)* z dostavkom *o aditivnosti mas in sil*. Ta zakon povemo takole: pospeška dveh teles, ki sta daleč od preostalih teles in ki delujeta drugo na drugo, sta v poljubnem inercialnem sistemu v konstantnem razmerju in imata nasprotno smer.<sup>1</sup>

Pri dedukciji zakonov elektrodinamike vzamemo za osnovo *Maxwellove aksiome*. Pri indukciji pa vzamemo za osnovo *Coulombov zakon* in *zakon o relativnosti* z dostavkom *o invariantnosti naboja*. Z zadnjim zakonom mislimo na spoznanje, da povezuje dolžine in čase v različnih inercialnih sistemih Lorentzova transformacija.<sup>2</sup>

\*\* Zavedajoč se teh težav, manjših nedoslednosti učbenikom sploh ne štejemo v zlo. Med zgleda za bolj očitne nedoslednosti te vrste sodijo vnaprejšnji privzetki o aditivnosti mas ali sil ali enakosti vztrajne in težke mase pri vpeljavi zakonov mehanike po poti, ki naj bi bila induktivna.

nikih za sodobno fiziko in za kvantno mehaniko kot *Schrödingerjev aksiom*. Začetna razmišljanja naj pri tem samo omilijo nezaupanje bralca do novosti. Toda to niso izpeljave, saj se Schrödingerjeve enačbe ne da utemeljiti neposredno.\*

Le poredko naletimo v učbenikih na poskus induktivne vpeljave Schrödingerjeve enačbe. Tako pot je nakazal P. A. M. Dirac.<sup>3</sup> Za uvodni učbenik pa jo je prilagodil R. P. Feynman. Njegova pot je tako zanimiva in poučna, da jo kaže ponovno prehoditi v nekoliko skrajšani inačici. Ob tem spoznamo tudi nove poglede na celotno kvantno mehaniko v uvodnih učbenikih za univerzo.\*\*

Na poti do Schrödingerjeve enačbe obravnavamo več idealiziranih preprostih poskusov. Za opis teh poskusov moramo uvesti nove količine in zveze med njimi. Tako pridemo do zasnove za osnovne zakone kvantne mehanike, ki jih potem brez obotavljanja posplošimo na najbolj zapletene poskuse. Nekateri koraki pri razmišljanju opravimo precej na hitro. Pri tem nam daje pogum dejstvo, da je veljavnost *nerelativistične kvantne mehanike* priznana: njene napovedi se v celoti skladajo z izidi poskusov.

**Interferenčni poskusi s curki delcev.** Samo površno obdelamo interferenčne poskuse s curki delcev. Pri Youngovem poskusu s curkom elektronov izvirajo elektroni iz drobne katode, gredo skozi dve reži in zadenejo oddaljeni merilnik za elektrone. Odvisnost števila elektronov, ki jih zazna merilnik v časovni enoti, od lege merilnika kaže značilne interferenčne vrhove in doline. Po izkušnjah z valovanji v klasični mehaniki vpeljemo za opis interferenčnega poskusa z delci *amplitudo*. Amplituda je kompleksno število, ki ga po Diracovo zapišemo kot

$$A = \langle \text{konec} | \text{začetek} \rangle. \quad (1)$$

Desni del določa razmere na začetku, ko je elektron ob katodi, in levi del razmere na koncu, ko je elektron ob merilniku v izbrani legi. Verjetnost, da zadene elektron merilnik v izbrani legi, je sorazmerna s kvadratom absolutne vrednosti amplitude

$$\text{verjetnost} \propto |A|^2 = AA^*. \quad (2)$$

Z zvezdico smo zaznamovali konjugirano kompleksno vrednost.

Izida interferenčnega poskusa ni težko pojasniti, če je amplituda za prehod elektrona od katode do merilnika vsota amplitude za prehod od katode

---

\* Pri iskanju poti do Schrödingerjeve enačbe za knjigo *Kvantna fizika*, ki je med tem izšla v knjižnici Sigma pri Mladinski knjigi, sem se moral odločiti za to pot. Feynmanova pot ima pred njo nekaj prednosti, terja pa drugačno zasnovo in je zahtevnejša. Za bralce *Kvantne fizike* pa bo zelo koristno, če se bodo seznanili tudi s Feynmanovo potjo. Pri tem jim bodo v pomoč podrobnejši opisi poskusov in drugi podatki iz *Kvantne fizike*.

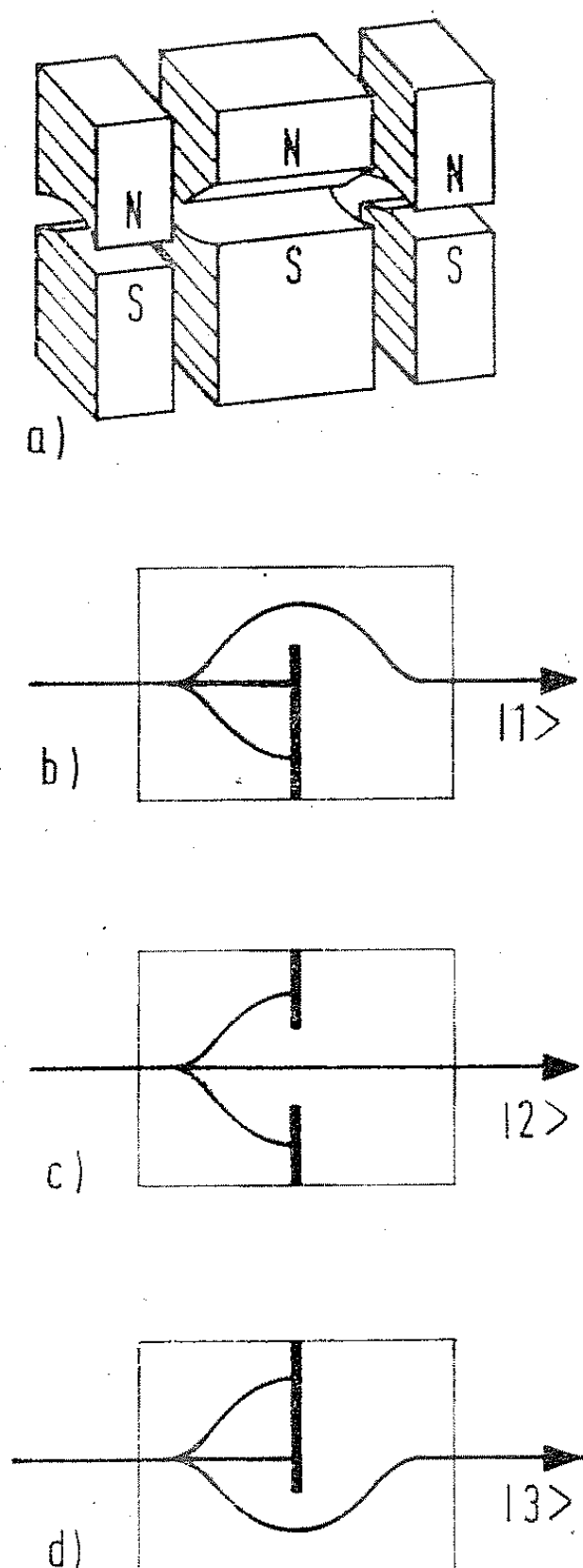
\*\* Feynmanova predavanja o kvantni mehaniki so bila zamišljena kot poskus o novi zasnovi kvantne mehanike. Kaže, da je ta poskus uspel. V dveletnem uvodnem predavanju profesorja Feynmana na Kalifornijskem tehnološkem inštitutu v letih 1961 do 1963 je prišla kvantna mehanika na vrsto proti koncu drugega leta. Ker je zmanjkalo časa, so bila predavanja končana šele v naslednjem šolskem letu. Nekoliko predelana in v spremenjenem vrstnem redu so izšla ta predavanja kot tretji del Feynmanovih predavanj iz fizike. — Seveda naša ponovitev ne more odtehtati originala. Bralcu, ki bo prebral tretji del Feynmanovih predavanj, ne bo žal za vložen trud.

do merilnika skozi levo režo in ustrezne amplitude za prehod skozi desno režo. Prvo zapišemo kot produkt amplitude za prehod elektrona od katode do leve reže  $\langle \text{leva} | \text{začetek} \rangle$  in amplitude za prehod od reže do merilnika  $\langle \text{konec} | \text{leva} \rangle$ . Podobno zapišemo amplitudo za prehod skozi desno režo. Amplituda za prehod elektrona od katode do merilnika v izbrani legi je po tem

$$A = \langle \text{konec} | \text{leva} \rangle \langle \text{leva} | \text{začetek} \rangle + \langle \text{konec} | \text{desna} \rangle \langle \text{desna} | \text{začetek} \rangle.$$

Ustrezna verjetnost je sorazmerna z  $|A|^2 = AA^*$ .

**Poskusi s curki atomov.** Po poskusih z atomskimi curki podrobneje izoblikujemo dosedanja spoznanja. Izberemo curek atomov, ki se v nehomogenem magnetnem polju razcepi v tri delne curke. Napravo, s katero delamo poskuse, sestavljajo trije magneti z nehomogenimi polji, ki imajo navpično smer (sl. 1a). V napravi se curek najprej razcepi v tri delne curke. Vsak od



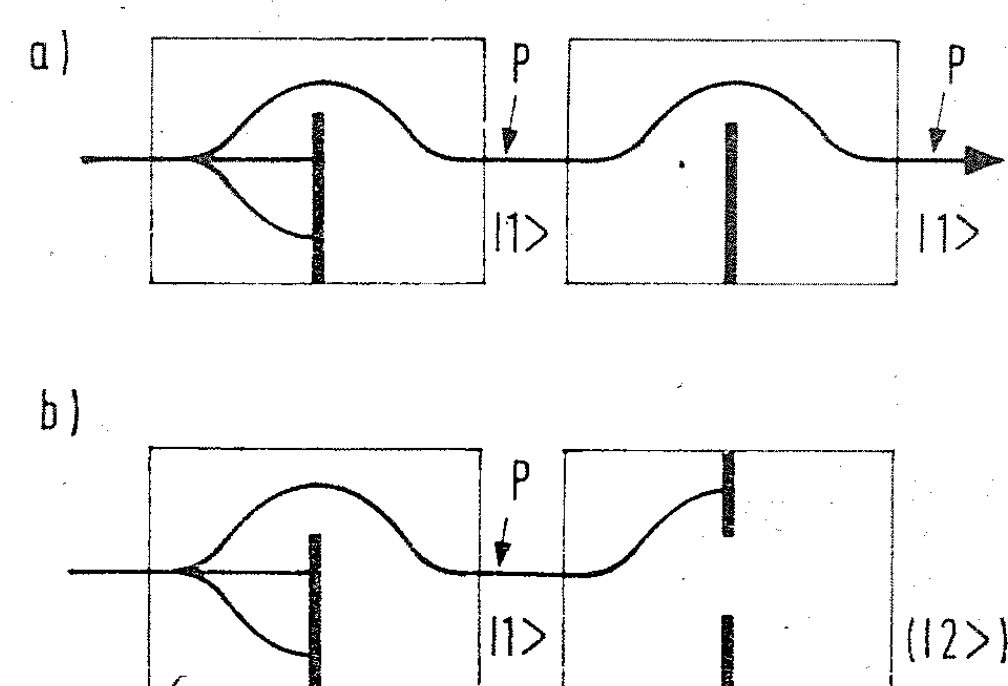
Sl. 1. Poenostavljena risba naprave za poskus s curkom atomov (a). Z vstavljanjem zaslonk dobimo iz nje curek atomov v enem od čistih stanj 1 (b), 2 (c) ali 3 (d).

njih ustreza drugemu *energijskemu stanju*. Taka stanja z izbrano energijo spoznamo tudi na primer pri preučevanju sevanja atomov. Stanje atomov v zgornjem delnem curku označimo z 1, stanje atomov v srednjem delnem curku z 2 in stanje atomov v spodnjem delnem curku s 3.\* Preden zapustijo

\* Atomi, katerih curek naj bi se v nehomogenem magnetnem polju razcepil v tri delne curke, bi morali imeti *spin* 1. V stanju 1 je spin »vzporeden«, v stanju 2 pravokoten in v stanju 3 »nasprotno vzporeden« s smerjo magnetnega polja. Toda atom nobenega elementa nima v osnovnem stanju spina 1. V curku se pojavijo v nekaterih primerih atomi v dolgoživih vzbujenih stanjih s spinom 1 (v curku atomov kisika so na primer poleg atomov v osnovnem stanju s spinom 2 tudi atomi v vzbujenih stanjih s spinom 1 in 0). A teh atomov ne moremo brez nadaljnjih zapletov izločiti, da bi napravili z njimi Stern-Gerlachov poskus. Poskusi, ki jih opisujemo, so zato samo miselni. Pri atomih s spinom 1 vztrajamo, ker nam ustreza število stanj (tri). O izidu teh poskusov sklepamo po izidih podobnih poskusov z drugimi atomi.

napravo, se vsi trije delni curki zopet združijo. Z zaslonkami, ki jih vstavljamo v napravo, prestrežemo dva izmed treh delnih curkov. Tako so v curku atomov, ki izhaja iz naprave samo atomi v enem izmed stanj 1 ali 2 ali 3. S to napravo si pripravimo curek atomov v *čistem stanju* (sl. 1 b, c, d).

Za prvo napravo namestimo še drugo enako napravo, ki je enako postavljena in ima prav tako navpična magnetna polja. Tudi v drugi napravi z vstavljanjem zaslonk prestrežemo dva izmed treh delnih curkov. Curek atomov spustimo najprej skozi prvo napravo in nato še skozi drugo. Prvo naravnamo tako, da prepusti curek atomov v stanju 1. Če naravnamo drugo napravo tako, da prepusti curek atomov v stanju 1, prepusti vse atome, ki priletijo do nje (sl. 2a). Če pa naravnamo drugo napravo tako, da bi prepustila



Sl. 2. Poskus s curkom atomov, ki gre skozi enaki in enako postavljeni napravi z navpičnima magnetnima poljema.

samo curek atomov v stanju 2, ne prepusti nobenega atoma (sl. 2b). V tem primeru je verjetnost, da naletimo na koncu, to je po prehodu skozi drugo napravo, na atom v stanju 2 enaka nič, če je na začetku, to je pred vstopom v drugo napravo, atom v stanju 1. Ista ugotovitev velja, če je druga naprava naravnana tako, da prepusti samo atome v stanju 3. Zaradi tega morata biti enaki nič amplitudi  $\langle 2 | 1 \rangle$  in  $\langle 3 | 1 \rangle$ . Nasprotno je verjetnost, da naletimo na koncu na atom v stanju 1 enaka ena, če je atom na začetku v stanju 1. Zaradi tega je amplituda  $\langle 1 | 1 \rangle$  enaka 1 (zagotovo vemo le, da je amplituda enaka  $e^{i\delta}$ ). Vendar izvajanja ne postanejo manj splošna, če postavimo  $\delta = 0$ .

V tem primeru in v podobnih primerih smemo vzeti, da je verjetnost **enaka** kvadratu absolutne vrednosti amplitude

$$\text{verjetnost} = |A|^2 = AA^*. \quad (2')$$

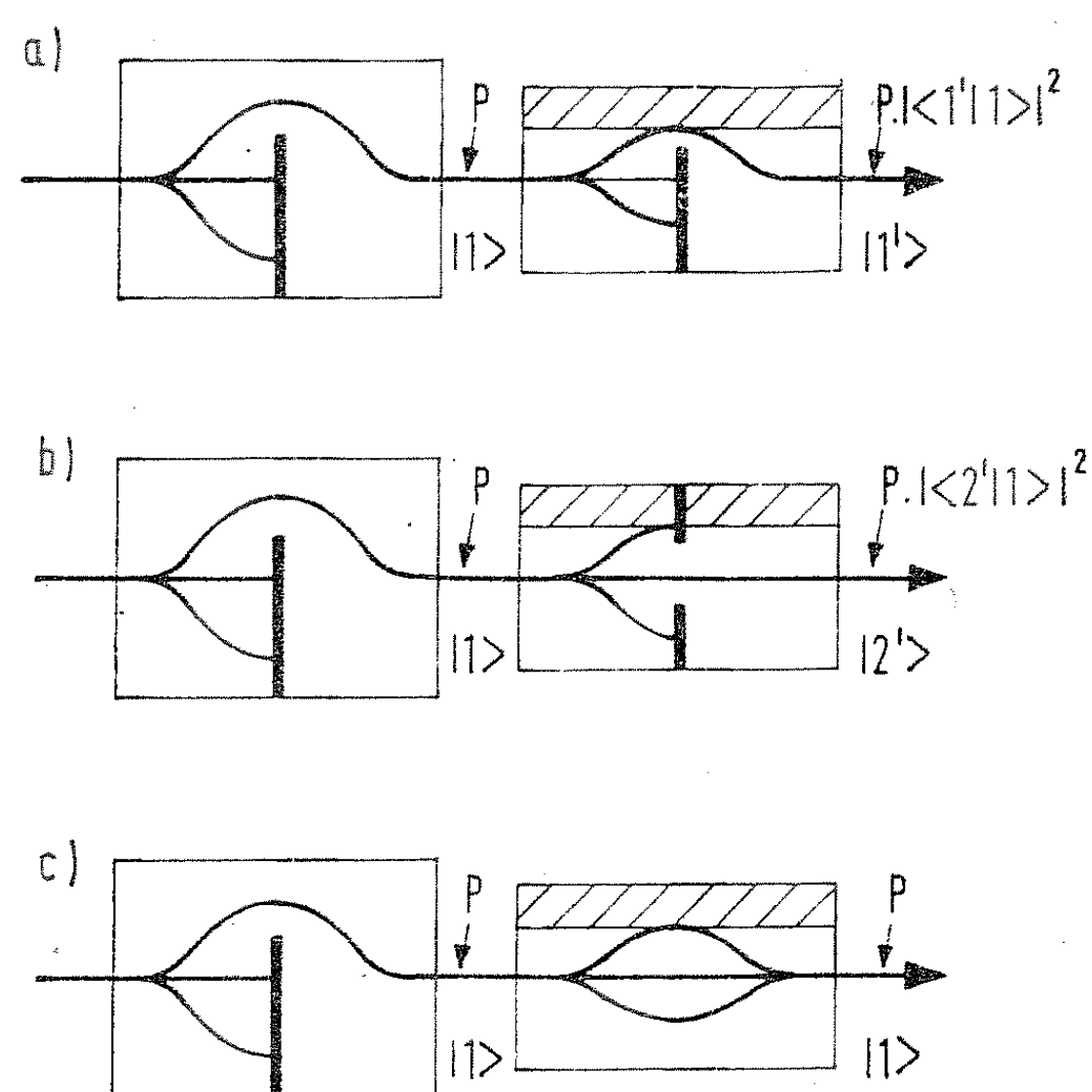
Pri tem smo upoštevali, da mora biti skupna verjetnost, to je vsota vseh treh verjetnosti  $|\langle 1 | 1 \rangle|^2$ ,  $|\langle 2 | 1 \rangle|^2$  in  $|\langle 3 | 1 \rangle|^2$ , enaka 1, saj je atom na koncu zagotovo v enem od treh stanj.

Podobni so izidi poskusov, če prepusti prva naprava curek atomov v stanju 2 ali v stanju 3. Devet amplitud, ki nastopijo pri teh poskusih, uredimo v matriko

| stanje<br>na<br>koncu | stanje na začetku       |                         |                         |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|                       | 1                       | 2                       | 3                       |
| 1                     | $\langle 1   1 \rangle$ | $\langle 1   2 \rangle$ | $\langle 1   3 \rangle$ |
| 2                     | $\langle 2   1 \rangle$ | $\langle 2   2 \rangle$ | $\langle 2   3 \rangle$ |
| 3                     | $\langle 3   1 \rangle$ | $\langle 3   2 \rangle$ | $\langle 3   3 \rangle$ |

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V novi vrsti poskusov zasučemo drugo napravo za oster kot okoli smeri curka, tako da njena magnetna polja niso več navpična kot v prvi napravi. Z drugo napravo samo bi sedaj pripravili curke atomov v čistih stanjih  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ . Zopet spustimo atomski curek skozi prvo in nato še skozi drugo napravo. Najprej naravnamo prvo napravo tako, da prepusti curek atomov v stanju  $1$ , in drugo napravo tako, da prepusti curek atomov v stanju  $1'$ . Merimo razmerje med tokom atomov  $P$  v curku na koncu — po izstopu iz druge naprave — in tokom atomov na začetku — pred vstopom v drugo napravo. Razmerje obeh tokov določa verjetnost  $|\langle 1' | 1 \rangle|^2$  (sl. 3a). Potem



Sl. 3. Poskusa s curkom atomov, ki gre skozi enaki napravi, le da je druga naprava zasukana za oster kot okoli smeri curka in njena magnetna polja niso navpična, kot so v prvi napravi.

naravnamo drugo napravo tako, da prepusti samo curek atomov v stanju  $2'$  in ponovimo merjenje (sl. 3b). Z merjenjem nadaljujemo, dokler ne pridejo na vrsto vsa mogoča začetna in končna stanja. Izid poskusa navedemo z verjetnostmi, ki jih izračunamo z devetimi amplitudami

$$\begin{pmatrix} \langle 1' | 1 \rangle & \langle 1' | 2 \rangle & \langle 1' | 3 \rangle \\ \langle 2' | 1 \rangle & \langle 2' | 2 \rangle & \langle 2' | 3 \rangle \\ \langle 3' | 1 \rangle & \langle 3' | 2 \rangle & \langle 3' | 3 \rangle \end{pmatrix}$$

Nobena izmed njih ni enaka nič ali ena. Njihove vrednosti so odvisne še od zasuka druge naprave.

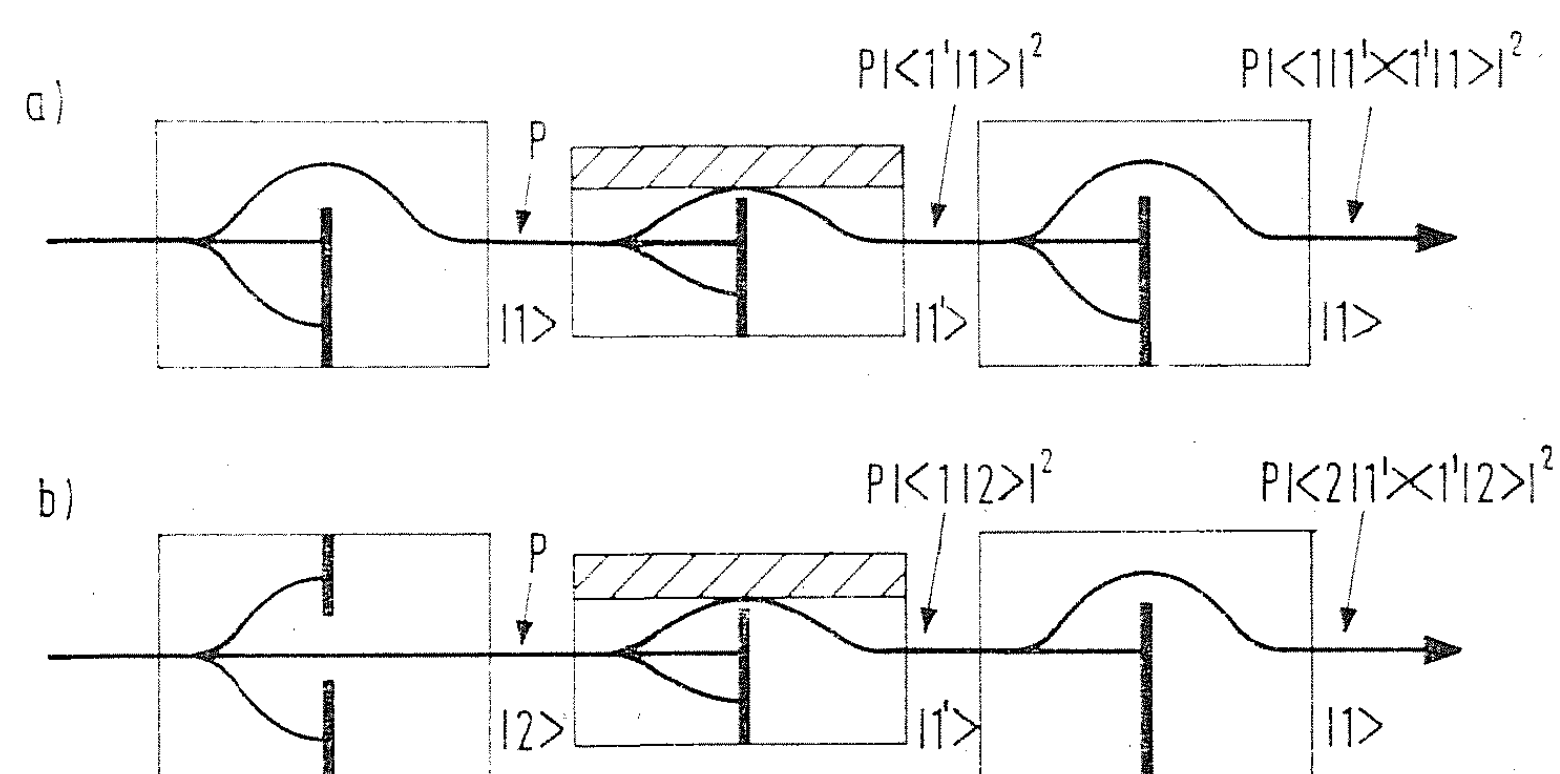
A nekaj splošnega ugotovimo, ne da bi morali poznati zamotano odvisnost amplitud od zasuka. Druga naprava prepusti vse atome, ki dospejo do nje, če odstranimo iz nje vse zaslone. Ustrezna verjetnost je torej enaka 1 in amplituda tudi. Če je prva naprava prepustila atome v stanju  $1$ , je tedaj

$$\langle 1' | 1 \rangle \langle 1' | 1 \rangle^* + \langle 2' | 1 \rangle \langle 2' | 1 \rangle^* + \langle 3' | 1 \rangle \langle 3' | 1 \rangle^* = 1. \quad (3)$$

V primeru, da prepusti prva naprava curek atomov v stanju  $2$  ali v stanju  $3$ , veljata podobni enačbi, le da je v njiju povsod  $2$  ali  $3$  namesto  $1$ .

**Bazična stanja.** Pri novi vrsti poskusov uporabimo še tretjo napravo, ki je enaka prvi in enako postavljena in ima navpična magnetna polja. Druga naprava je še naprej zasukana proti prvi, kot je bila pri prejšnjih poskusih. Prvo napravo naravnamo tako, da prepusti curek atomov v stanju  $1$ , drugo

tako, da prepusti curek atomov v stanju  $1'$ , in tretjo tako, da prepusti curek atomov v stanju  $1$  (sl. 4a). Tretja naprava prepusti  $|\langle 1|1'\rangle \langle 1'|1\rangle|^2$ -ti del toka atomov  $P$ , ki prihaja iz prve naprave. Seveda velja  $|\langle 1|1'\rangle \langle 1'|1\rangle|^2 = |\langle 1|1'\rangle|^2 \cdot |\langle 1'|1\rangle|^2$ . Prej smo ugotovili, da prepusti druga naprava  $|\langle 1'|1\rangle|^2$ -ti del toka atomov, ki prihaja iz prve naprave. Iz tega sledi, da prepusti tretja naprava  $|\langle 1|1'\rangle|^2$ -ti del toka atomov, ki vpada nanjo iz druge naprave. Nato samo premaknemo zaslonko v prvi napravi tako, da prepusti ta naprava curek atomov v stanju  $2$  (sl. 4b). Kot prej sklepamo, da prepusti tretja naprava  $|\langle 1|1'\rangle \langle 1'|2\rangle|^2$ -ti del toka atomov, ki prihaja iz prve naprave. Druga naprava prepusti  $|\langle 1'|2\rangle|^2$ -ti del toka atomov, ki prihaja iz prve naprave. Tretja naprava prepusti zopet  $|\langle 1'|1\rangle|^2$ -ti del toka atomov, ki vpada nanjo iz druge naprave. Razmerje med tokom atomov, ki ga prepusti tretja naprava, in tokom atomov, ki vpada nanjo, je torej neodvisno od tega, kako je naravnana prva naprava.

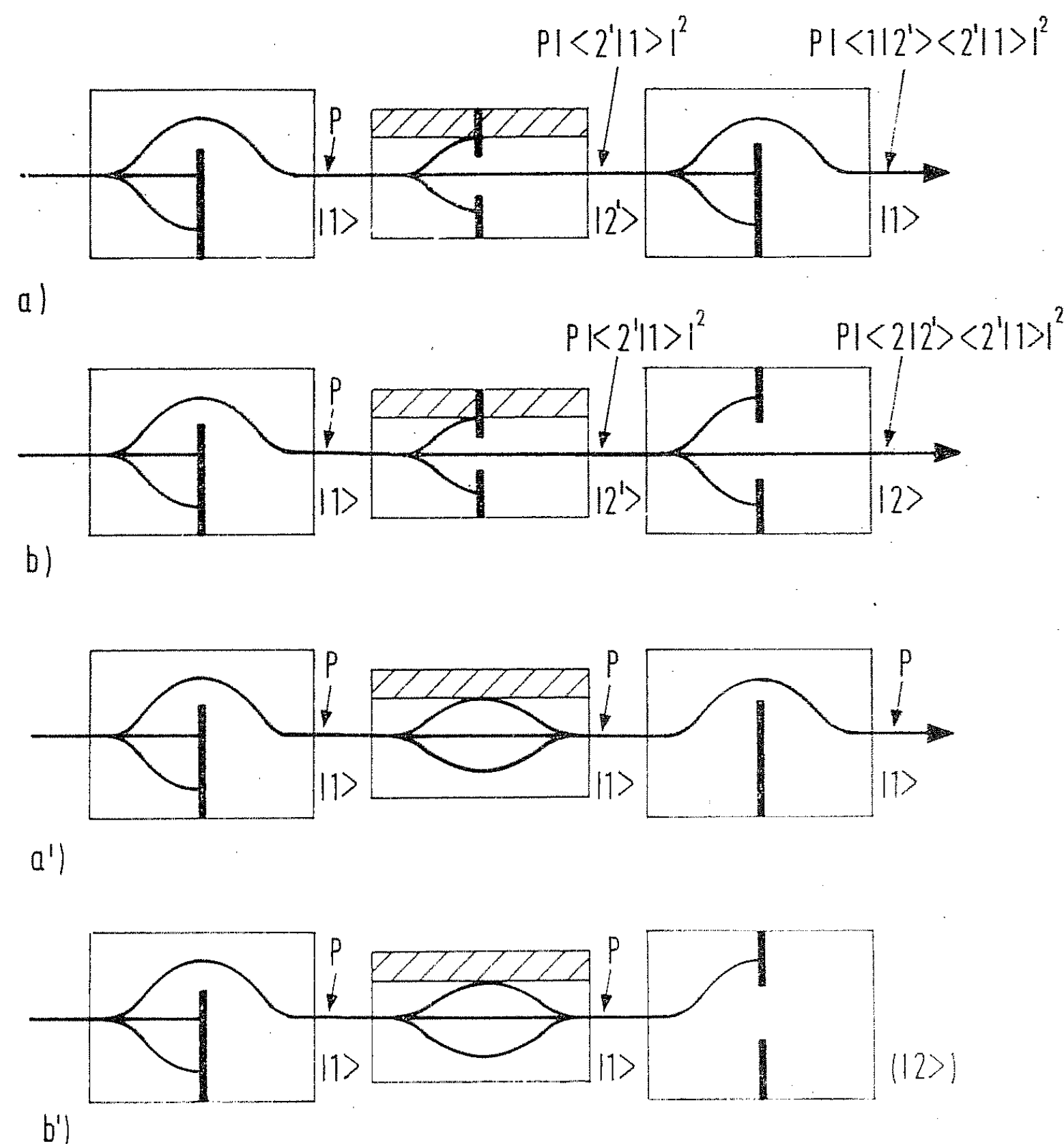


Sl. 4. Poskusa s curkom atomov, ki gre skozi tri enake naprave. Magnetna polja v prvi in tretji napravi so navpična, druga naprava pa je zasukana okoli smeri curka kot pri poskusih na sl. 3.

Izid poskusa s curkom atomov v katerem od čistih stanj torej ni odvisen od tega, kaj se je poprej dogajalo z atomi. Pri poskusu, pri katerem prepusti prva naprava curek atomov v stanju  $1$  in druga naprava curek atomov v stanju  $1'$ , se atomi v stanju  $1'$  ne »spominjajo«, da so bili poprej v stanju  $1$ . To nas prepriča o pomenu čistih stanj. Skupnost čistih stanj, ki zadostuje za popoln opis (ta opis pa je lahko približen) kvantnomehanskega sistema, imenujemo *bazična stanja*. Pri poskusih smo določili bazična stanja z merilno napravo, ki razdeli nepripravljeni curek atomov na curke z atomi v čistih stanjih.

Nadaljujemo poskuse s tremi napravami. Pri prvem poskusu naj prepusti prva naprava curek atomov v stanju  $1$ , druga curek atomov v stanju  $2'$  in tretja curek atomov v stanju  $1$  (sl. 5a). Druga naprava prepusti  $|\langle 2'|1\rangle|^2$ -ti del toka atomov iz prve naprave in tretja  $|\langle 1|2'\rangle \langle 2'|1\rangle|^2$ -ti del toka atomov iz prve naprave. Pri drugem poskusu samo premestimo zaslonko v tretji napravi, tako da prepusti ta curek atomov v stanju  $2$  (sl. 5b). Tedaj prepusti tretja naprava  $|\langle 2|2'\rangle \langle 2'|1\rangle|^2$ -ti del toka atomov iz prve naprave. Zdaj ponovimo oba poskusa, a poprej odstranimo vse zaslonke iz druge naprave, tako da prepusti ta naprava nemoteno vse tri delne curke. Pri prvem poskusu (sl. 5a') prepusti druga naprava ves tok atomov v stanju  $1$  in ves ta tok gre neoviran tudi skozi tretjo napravo, saj je  $\langle 1|1\rangle = 1$ . Pri drugem poskusu (sl. 5b') pridejo do tretje naprave prav tako vsi atomi v stanju  $1$ , ki jih je prepustila prva

naprava. Toda tretja naprava ne prepusti nobenega od teh atomov, saj je  $\langle 2 | 1 \rangle = 0$ .



Sl. 5. Poskus, ki prepričljivo pokaže interferenco amplitud. Naprave so razporejene kot pri poskusu na sl. 4. Pri zadnjih dveh poskusih (a' in b') odstranimo zaslonke iz druge naprave. V prvem primeru (a') dobimo izdatnejši curek atomov, v drugem (b') pa šibkejšega kot pri ustreznih poskusih na začetku (a in b).

Presenetljivo je, da izhaja pri ponovljenem drugem poskusu (5 b') iz tretje naprave manj atomov, čeprav jih nanjo pade več kot pri prvotnem poskusu (5 b). To je posledica interference amplitud. Iz zadnjih poskusov izluščimo za vsoto amplitud tile enačbi

$$\langle 1 | 1' \rangle \langle 1' | 1 \rangle + \langle 2 | 2' \rangle \langle 2' | 1 \rangle + \langle 1 | 3' \rangle \langle 3' | 1 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle = 1, \quad (4)$$

$$\langle 2 | 1' \rangle \langle 1' | 1 \rangle + \langle 1 | 2' \rangle \langle 2' | 1 \rangle + \langle 2 | 3' \rangle \langle 3' | 1 \rangle = \langle 2 | 1 \rangle = 0. \quad (4')$$

Četudi bi bila tretja naprava zasukana proti prvi in proti drugi in bi bila glede nanjo bazična stanja  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ , bi bili amplitudi pri obeh poskusih, pri katerih prepusti druga naprave nemotene vse tri delne curke, taki, kot da sploh ne bi bilo druge naprave; na primer

$$\langle 1'' | 1' \rangle \langle 1' | 1 \rangle + \langle 1'' | 2' \rangle \langle 2' | 1 \rangle + \langle 1'' | 3' \rangle \langle 3' | 1 \rangle = \langle 1'' | 1 \rangle. \quad (2'')$$

Podobni enačbi dobimo, če zamenjamo  $1''$  z  $2''$  ali s  $3''$ .

**Enačbe za osnovne zakone kvantne mehanike.** Sistem, ki je na začetku v katerem od bazičnih stanj in ki ga med poskusom ne zmotimo, je v istem stanju tudi na koncu. Ustrezna amplituda je enaka 1:

$$\langle i | i \rangle = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

če zaznamujemo z  $i$  katerokoli od bazičnih stanj. V tem primeru sistem na koncu ne more biti v kakem drugem bazičnem stanju in je ustrezna amplituda enaka 0:

$$\langle j | i \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Obe enačbi zapišemo kot eno

$$\langle j|i \rangle = \delta_{ji} \quad (5)$$

s Kroneckerjevim delta  $\delta_{ji}$ , ki je enak ena, če sta indeksa enaka, in nič, če sta indeksa različna.

Enačbe (4), (4') in (4'') in podobne enačbe zapišemo zgoščeno z enačbo

$$\langle \beta|\alpha \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \beta|i \rangle \langle i|\alpha \rangle. \quad (6)$$

V njej sta  $\alpha$  in  $\beta$  izbrani bazični stanji ali poljubno začetno in končno stanje. Enačbi (5) in (6) nista popolnoma neodvisni. Postavimo v drugo  $\beta = j$  in uporabimo prvo, pa dobimo  $\langle j|\alpha \rangle = \sum_i \langle j|i \rangle \langle i|\alpha \rangle = \sum_i \delta_{ji} \langle i|\alpha \rangle = \langle j|\alpha \rangle$ .

Enačbi (1) in (2) bi si nasprotovali, če ne bi veljale zveze  $\langle 1'|1 \rangle = \langle 1|1' \rangle^*$ ,  $\langle 1'|2 \rangle = \langle 2|1' \rangle^*$ , ... V splošnem mora torej veljati

$$\langle \alpha|\beta \rangle^* = \langle \beta|\alpha \rangle. \quad (7)$$

Verjetnost, da je sistem na koncu v stanju  $\beta$ , če je bil na začetku v stanju  $\alpha$  in če ga med poskusom nič ne zmotimo, je po enačbi (2')

$$\text{verjetnost} = |\langle \beta|\alpha \rangle|^2. \quad (8)$$

Doslej smo pri vseh enačbah mislili na sistem s tremi bazičnimi stanji. Vendar veljajo take enačbe za sistem s poljubnim številom bazičnih stanj, le v vsotah moramo sešteti vedno prek vseh bazičnih stanj. Enačbe (5), (6), (7) in (8) imajo vlogo *osnovnih zakonov kvantne mehanike*. Dodati je treba še, da je izid poskusa s sistemom v čistem stanju neodvisen od tega, kaj se je poprej dogajalo s sistemom.

Uporabnost teh enačb pokažemo pri temle razmišljanju. Na začetku naj bo sistem v stanju  $\alpha$ , a naprava prepusti ali kako drugače izbere samo sistem v stanju  $\beta$ . Zanima nas verjetnost  $|\langle \beta|\alpha \rangle|^2$ . Amplitudo izračunamo z enačbo (5). Po njej popolnoma opišemo napravo z amplitudami  $\langle \beta|i \rangle$  in začetno stanje z amplitudami  $\langle i|\alpha \rangle$ .

Razmišljanje razširimo na bolj zapletene poskuse. Prva naprava naj pripravi sistem v stanju  $\alpha$ , zadnja naprava pa izbere sistem v stanju  $\beta$ . Med prvo in zadnjo napravo so še druge zamotane naprave, ki delujejo na sistem. Amplitudo za ta primer zapišemo kot  $\langle \beta|O|\alpha \rangle$ . Delovanje vseh zamotanih naprav med prvo in zadnjo opišemo simbolično z  $O$ . Zdaj v mislih vrinemo po prvi in pred zadnjo napravo še dve med seboj enaki dodatni napravi, ki razvrstita sisteme po bazičnih stanjih. Če prepusti druga naprava samo sisteme v bazičnem stanju  $i$  in predzadnja naprava sisteme v bazičnem stanju  $j$ , je amplituda  $\langle \beta|j \rangle \langle j|O|i \rangle \langle i|\alpha \rangle$ . Če pa prepustita druga in predzadnja naprava brez motenj sisteme v vseh bazičnih stanjih, je izid poskusa enak, kot če obeh dodatnih naprav sploh ne bi bilo:

$$\langle \beta|O|\alpha \rangle = \sum_i \sum_j \langle \beta|j \rangle \langle j|O|i \rangle \langle i|\alpha \rangle. \quad (9)$$

V tem primeru opišemo torej prvo napravo ali začetno stanje z amplitudami  $\langle i|\alpha \rangle$  in zadnjo napravo ali končno stanje z amplitudami  $\langle \beta|j \rangle$ . Zamotane naprave med prvo in zadnjo pa opišemo z amplitudami  $O_{ji} = \langle j|O|i \rangle$ , ki jih lahko uredimo v matriko.

**Podobnost z enačbami za vektorje v trirazsežnem prostoru.** Nekatere izmed zapisanih enačb spominjajo na enačbe med trirazsežnimi vektorji. Enačbi (5) ustreza enačba

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3$$

med trirazsežnimi enotnimi vektorji  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  in  $\mathbf{e}_3$ . (Indeks 1 nadomešča indeks  $x$ , 2 nadomešča indeks  $y$  in 3 nadomešča indeks  $z$ .) Zares imajo ti vektorji velikost enote:  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$  in so drug na drugega pravokotni:  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = 0$  za  $i \neq j$ . Enačbi (6) ustreza enačba

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}). \quad (10)$$

Zares je skalarni produkt vektorjev  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  vsota produktov komponent  $b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$ . Med trirazsežnimi vektorji pa ni enačbe, ki bi bila podobna enačbi (7)  $\langle \alpha | \beta \rangle^* = \langle \beta | \alpha \rangle$ . Skalarni produkt  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  je namreč realen in komutativen  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . Tudi enačba (9) nima podobne med trirazsežnimi vektorji. Po tem ustrezajo enotni vektorji bazičnim stanjem. Komponente vektorjev, to je projekcije na koordinatne osi, ustrezajo amplitudam  $\langle i | \alpha \rangle$  in  $\langle \beta | j \rangle$ ; zato imenujemo te amplitude tudi projekcije stanja  $\alpha$  in  $\beta$  na bazični stanji  $i$  in  $j$ . Skalarni produkt dveh vektorjev pa ustreza amplitudi\*  $\langle \beta | \alpha \rangle$ .

Podobnost poskušamo zasledovati še dalje. Iz enačbe (10) za skalarni produkt dobimo drugi vektor, če na obeh straneh enačaja spustimo prvi vektor. Podobno dobimo prvi vektor, če na obeh straneh enačaja spustimo drugi vektor:

$$\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}), \quad \mathbf{b} = \sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

Tudi v ustrezni enačbi (6) lahko spustimo  $\beta$  na obeh straneh enačaja ali  $\alpha$  na obeh straneh enačaja:

$$|\alpha\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i | \alpha \rangle, \quad \langle \beta | = \sum_i \langle \beta | i \rangle \langle i |. \quad (11)$$

Ta izraza ustrezata trirazsežnim vektorjem; zato jima pravimo *vektorja stanja*. Končni rezultat računa izrazimo z amplitudo, a vektorja stanja sta nekakšna nedokončana izraza. (Tudi končni rezultat računa s trirazsežnimi vektorji izrazimo s skalarnimi produkti ali s komponentami vektorjev). To je imel v mislih Dirac, ko je vzdol vektorjem stanja  $|\alpha\rangle$  ime *ket* in vektorjem stanja  $\langle \beta |$  ime *bra*. Končni rezultat računa je amplituda — *bracket* (angl. oklepaj).

Do vektorjev stanja smo prišli s sklicevanjem na podobnost enačb. Teh vektorjev si ne moremo predstavljati kot usmerjene daljice, kakor si predstavljamo vektorje v trirazsežnem prostoru. A v prostorih z večjim številom razsežnosti si vektorjev itak ne moremo predstavljati tako nazorno. To velja tudi za vektorje stanja, ki jih s pridom uporabljamo v računih. V izbranem

\* Upoštevajmo, da so amplitude kompleksna števila in jih zaznamujemo z  $A_i = \langle i | \alpha \rangle$  in  $B_j = \langle j | \beta \rangle$ . Po tem je  $|\alpha\rangle = \sum_i |i\rangle A_i$  in  $\langle \beta | = \sum_j \langle j | B_j$  in zaradi  $\langle \beta | j \rangle = \langle j | \beta \rangle^* = B_j^*$  še  $\langle \beta | = \sum_j B_j^* \langle j |$ . Za amplitudo dobimo s tem enačbo

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_i \sum_j B_j^* \langle j | i \rangle A_i = \sum_i \sum_j \delta_{ji} B_j^* A_i = \sum_i B_i^* A_i,$$

ki močno spominja na enačbo za skalarni produkt trirazsežnih vektorjev.

primeru najprej izberemo bazična stanja, ali, kot pravimo zdaj, *vektorje bazičnih stanj* (kratko *bazične vektorje*). Vsi drugi vektorji so določeni s projekcijami na te bazične vektorje in te projekcije so kompleksna števila.

Tako kot prosto izberemo koordinatni sistem in z njim enotne vektorje, je tudi izbira bazičnih vektorjev pri računanju še prosta. (Seveda naj bo izbira takšna, da je račun čim preprostejši.) Koordinatna transformacija posreduje prehod od izbranega koordinatnega sistema k drugemu koordinatnemu sistemu, torej od izbrane trojice enotnih vektorjev k drugi. Podobno posreduje transformacija, katere matrike ni težko poiskati, med izbranimi bazičnimi vektorji in drugimi bazičnimi vektorji.

Enačbi (11) veljata za vsako stanje  $\alpha$  in za vsako stanje  $\beta$ ; tako da lahko spustimo še  $\alpha$  ali  $\beta$  in dobimo

$$| = \sum_i |i\rangle \langle i|.$$

To je stenografska oblika osnovnega zakona (6). Navpična črtica ima podobno vlogo kot faktor 1. Vrinemo jo lahko na vsako mesto v katerem koli izrazu, ne da bi s tem spremenili končni rezultat.

Podobno kot smo ravnali z amplitudo  $\langle \beta | \alpha \rangle$ , ravnamo tudi z amplitudo  $\langle \beta | O | \alpha \rangle$ . V enačbi (9) spustimo na levi in na desni strani enačaja  $\beta$  ali  $\alpha$  in dobimo

$$O | \alpha \rangle = \sum_i \sum_j |j\rangle \langle j | O | i \rangle \langle i | \alpha \rangle; \quad \langle \beta | O = \sum_i \sum_j \langle \beta | j \rangle \langle j | O | i \rangle \langle i |. \quad (12)$$

$O$  ni niti vektor stanja niti amplituda, ampak *operator*. Ko deluje z leve na ket  $| \alpha \rangle$ , nastane nov ket  $O | \alpha \rangle$ . Ko deluje z desne na bra  $\langle \beta |$ , nastane nov bra  $\langle \beta | O$ . Amplitudo  $\langle \beta | O | \alpha \rangle$  dobimo, ko ta bra ali ket dopolnimo z drugim ketom ali brajem.

**Časovni razvoj.** Vlogo pomembnega operatorja igra *čakanje*. V nerelativistični kvantni mehaniki zadostuje, če preučimo operator, ki ustreza čakanju za infinitezimalen čas.\* Ta operator zaznamujemo z  $U(t + dt, t)$ . Iz začetnega vektorja stanja  $|\Psi(t)\rangle$  dobimo po delovanju tega operatorja nov vektor stanja v trenutku  $t + dt$

$$|\Psi(t + dt)\rangle = U(t + dt, t) |\Psi(t)\rangle.$$

Začetno in končno stanje smo označili s  $\Psi$  in navedli čas kot argument. Projekcije začetnega stanja na bazična stanja so amplitude  $\langle i | \Psi(t) \rangle = A_i(t)$  in projekcije končnega stanja so amplitude  $\langle j | \Psi(t + dt) \rangle = A_j(t + dt)$ . Z njimi zapišemo zgornjo enačbo v obliki

$$\langle j | \Psi(t + dt) \rangle = \langle j | U(t + dt, t) | \Psi(t) \rangle = \sum_i \langle j | U(t + dt, t) | i \rangle \langle i | \Psi(t) \rangle$$

ali krajše

$$A_j(t + dt) = \sum_i U_{ji} A_i(t).$$

Operator  $U(t + dt, t)$  je popolnoma določen z amplitudami  $U_{ji} = \langle j | U(t + dt, t) | i \rangle$ , ki jih uredimo v matriko.

---

\* V fiziki visokih energij pa igra pomembno vlogo operator  $U(t_2, t_1)$ , če gre  $t_1$  proti  $-\infty$  in  $t_2$  proti  $\infty$ . Amplitude  $\langle j | U(t_2, t_1) | i \rangle$  za ta primer so elementi matrike  $S$ .

Najprej upoštevamo, da je sistem za  $dt = 0$  v začetnem stanju. Tedaj mora biti  $U_{ii} = 1$  in  $U_{ji} = 0$  za  $i \neq j$ . Po tem razvijemo matrični element:

$$U_{ji} = \delta_{ji} + K_{ji} dt.$$

S to enačbo smo vpeljali matrične elemente  $K_{ji}$ , ki nastopajo s prirastkom časa. Za časovni potek amplitud dobimo  $A_j(t + dt) = \sum_i (\delta_{ji} + K_{ji} dt) A_i(t) dt = A_j(t) + \sum_i K_{ji} A_i(t) dt$ . Če upoštevamo, da je  $[A_j(t + dt) - A_j(t)]/dt$  odvod  $dA_j(t)/dt$ , sledi

$$dA_j(t)/dt = \sum_i K_{ji} A_i(t). \quad (13)$$

S časovnim potekom amplitud  $A_i(t) = \langle i | \Psi(t) \rangle$  je določen časovni razvoj stanja  $|\Psi(t)\rangle$ . Časovni odvod amplitude v kakem bazičnem stanju je odvisen od trenutnih vrednosti amplitud v vseh bazičnih stanjih. Zvezo posredujejo matrični elementi  $K_{ji}$ . Časovni razvoj kvantnomehanskega sistema obvladamo, če poznamo njegove matrične elemente  $K_{ji}$ .

Za vsak sistem je treba najprej določiti matrične elemente\*  $K_{ji}$ . V splošnem pričakujemo, da so odvisni od časa. Edino, če se zunanje okoliščine nič ne spreminjajo s časom, so tudi elementi  $K_{ji}$  neodvisni od časa. Za zdaj se omejimo samo na take primere. Najpreprostejši je sistem z enim samim stanjem. Mislimo na primer na osamljen in nemoten atom vodika v osnovnem stanju. Tak sistem je ves čas v edinem bazičnem stanju in ima konstantno energijo  $W_0$ . V tem primeru je enačba za časovno spreminjanje amplitude zelo preprosta

$$dA_1/dt = K_{11}A_1$$

in je ni težko integrirati

$$A_1 = \text{konstanta} \cdot e^{K_{11}t}.$$

Ker je sistem ves čas v edinem bazičnem stanju, mora biti verjetnost  $A_1A_1^*$  konstantna. To je izpolnjeno samo, če je eksponent čisto imaginaren:  $A_1 = \text{konstanta} \cdot e^{-iK_{11}'t}$ , pri tem je  $K_{11}'$  realen, i je imaginarna enota, negativni znak pred njo pa smo izbrali po ustaljenem dogovoru.

\* Nasploh pa lahko ugotovimo neko lastnost teh elementov, če zahtevamo, da se ohrani skupna verjetnost  $\sum_j A_jA_j^*$ . To moramo storiti, če delci ne nastajajo in ne izginjajo. Konjugirano kompleksno enačbo (13) pomnožimo z  $A_j$  in nato še enačbo (13) s konjugirano kompleksno amplitudo  $A_j^*$ . Obe enačbi seštejemo in izračunamo vsoto po vseh bazičnih stanjih  $j$ :

$$\begin{aligned} \sum_j (A_j dA_j^*/dt + A_j^* dA_j/dt) &= \sum_j d(A_jA_j^*)/dt = d(\sum_j A_jA_j^*)/dt = \\ &= \sum_i \sum_j K_{ji}^* A_i^* A_j + \sum_i \sum_j K_{ji} A_i A_j^*. \end{aligned}$$

Seštevanje po bazičnih stanjih ne prizade ne odvajanja po času, zato smemo zamenjati vrstni red seštevanja in odvajanja. Zaradi zahteve po konstantnosti vsote  $\sum_j A_jA_j^*$ , je njen odvod enak nič. Iz zahteve, da je desna stran enačbe enaka nič, sledi, če še zamenjamo indeksa  $i$  in  $j$  v drugem členu:

$$K_{ji}^* = -K_{ij}.$$

Kaj več o konstanti  $K_{11}'$  ugotovimo po primerjavi z enačbami, ki veljajo za fotone. Vemo, da je energija fotona dana z enačbo

$$W = h\nu = \hbar\omega.$$

To enačbo dobimo na primer pri preučevanju fotoefekta. V njej je  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Js Planckova konstanta in  $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Js;  $\nu$  je frekvenca in  $\omega = 2\pi\nu$  krožna frekvenca svetlobe. Nihanje elektromagnetnega polja v izbrani točki prostora opišemo z enačbo, v kateri nastopa tudi faktor  $e^{-i\omega t} = e^{-iWt/\hbar}$ . Domnevamo, da nastopa podoben faktor v amplitudi za sistem z enim samim stanjem; da je torej

$$K_{11} = -iW_0/\hbar.$$

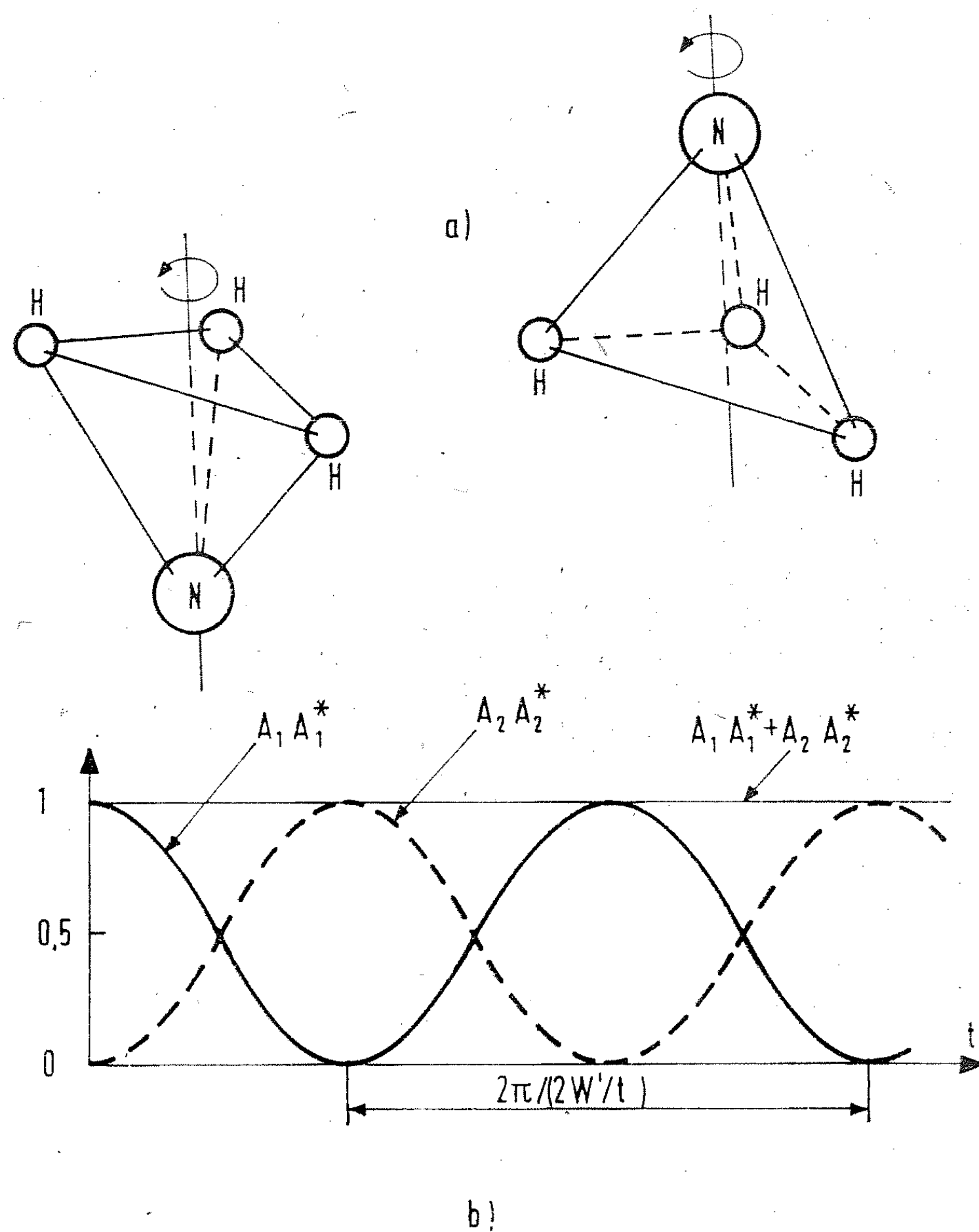
Ta domneva, ki bi jo lahko bolje utemeljili\*, se pokaže pozneje kot upravičena. Rezultat posplošimo: uvedemo nove matrične elemente

$$K_{ji} = -iH_{ij}/\hbar. \quad (13')$$

Matriki, ki jo sestavljajo elementi  $H_{ji}$ , pravimo *Hamiltonova matrika*, kratko *hamiltonka*, ali *energijska matrika*\*\*. Zadnje ime se zdi umestno, saj je pri sistemu z enim samim stanjem  $H_{11} = W_0$ .

Z enačbama (13) in (13') dobimo enačbo, ki določa časovni razvoj kvantno-mehanskega sistema:

$$i\hbar dA_j(t)/dt = \sum_i H_{ji} A_i(t). \quad (14)$$



Sl. 6. Bazični stanji pri poenostavljenem opisu amonijakove molekule (a) in časovni potek kvadratov absolutnih vrednosti amplitud (b).

\* Mislimo na razglabljanje L. de Broglieja, ki pa ne sodi v našo razpravo.

\*\* Iz zveze  $K_{ji}^* = -K_{ij}$  sledi, da je hamiltonka *hermitska matrika*, saj velja za njene elemente (13')

$$H_{ji}^* = H_{ij}.$$

**Molekula amonijaka.** Zdaj se lotimo sistema z dvema bazičnima stanjema. Zgled za tak sistem je nemotena molekula amonijaka. Molekula  $\text{NH}_3$  ima obliko pravilne tristranične piramide z atomi vodika v ogliščih osnovne ploskve in z atomom dušika v vrhu (sl. 6). Težišče molekule naj miruje in atomi naj ne nihajo drug proti drugemu, molekula pa se vrti s konstantno kotno hitrostjo okoli geometrijske osi. V tako poenostavljenem primeru zadostujeta za površen opis molekule dve bazični stanji. Za prvo izberemo stanje  $|1\rangle$ , v katerem je atom dušika »nad« osnovno ploskvijo in za drugo stanje  $|2\rangle$ , v katerem je atom dušika »pod« njo. Poljubno stanje amonijakove molekule, v katerem je dušikov atom zdaj nad osnovno ploskvijo, zdaj pod njo, sestavimo iz bazičnih stanj

$$|\Psi\rangle = |1\rangle\langle 1|\Psi\rangle + |2\rangle\langle 2|\Psi\rangle = |1\rangle A_1 + |2\rangle A_2. \quad (15)$$

Pravimo, da razvijemo stanje  $\Psi$  po obeh bazičnih stanjih.

Časovni potek obeh amplitud je določen z enačbama (14)

$$\begin{aligned} i\hbar dA_1/dt &= H_{11}A_1 + H_{12}A_2, \\ i\hbar dA_2/dt &= H_{21}A_1 + H_{22}A_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Rešitvi teh enačb nista tako preprosti kot rešitev za sistem z enim stanjem. Edino, če bi bila elementa  $H_{12}$  in  $H_{21}$  oba enaka nič, bi molekula vztrajala v stanju  $|1\rangle$  z energijo  $H_{11}$ , če bi bila na začetku v tem stanju, in v stanju  $|2\rangle$  z energijo  $H_{22}$ , če bi bila na začetku v tem stanju. Obe stanji sta popolnoma enakopravni in ni razloga, da bi se njuni energiji razlikovali, tako da smemo postaviti  $H_{11} = H_{22} = W_0$ . Vendar ne smemo vzeti, da sta  $H_{12}$  in  $H_{21}$  enaka nič. Ta matrična elementa sta v zvezi z verjetnostjo, da preide atom dušika zaradi tunelskega pojava s prve strani na drugo stran osnovne ploskve. Zaradi enakopravnosti obeh stanj vzamemo tudi za ta matrična elementa, da sta enaka:  $H_{12} = H_{21} = -W'$ . Zdaj pa molekula ne vztraja v stanju  $|1\rangle$  ali v stanju  $|2\rangle$ , četudi je na začetku v enem od obeh stanj.

Najprej seštejemo enačbi (16) in nato drugo odštejemo od prve:

$$\begin{aligned} i\hbar d(A_1 + A_2)/dt &= (W_0 - W')(A_1 + A_2), \\ i\hbar d(A_1 - A_2)/dt &= (W_0 + W')(A_1 - A_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Rešitvi teh enačb sta

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \text{konstanta} \cdot e^{-i(W_0 - W')t/\hbar}, \\ A_1 - A_2 &= \text{konstanta} \cdot e^{-i(W_0 + W')t/\hbar}. \end{aligned} \quad (17')$$

Amplitudi sta torej

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{1}{2} e^{iW't/\hbar} + \frac{1}{2} e^{-iW't/\hbar}\right) e^{-iW_0t/\hbar} = \cos(W't/\hbar) e^{-iW_0t/\hbar} \\ A_2 &= \left(\frac{1}{2}i e^{iW't/\hbar} - \frac{1}{2}i e^{-iW't/\hbar}\right) e^{-iW_0t/\hbar} = \sin(W't/\hbar) e^{-iW_0t/\hbar} \end{aligned} \quad (18)$$

Kvadrata absolutnih vrednosti sta  $A_1A_1^* = \cos^2 W't/\hbar$  in  $A_2A_2^* = \sin^2 W't/\hbar$ . Konstanti smo izbrali tako, da je vsota  $A_1A_1^* + A_2A_2^*$  enaka ena, kolikor mora biti skupna verjetnost, saj je molekula vsekakor v enem od obeh stanj.

Če je molekula na začetku v stanju  $|1\rangle$ , preide pozneje v stanje  $|2\rangle$ . Na začetku je verjetnost  $A_1A_1^*$ , da je molekula v stanju  $|1\rangle$  enaka ena, a s časom pojema. Medtem narašča verjetnost  $A_2A_2^*$ , da je molekula v stanju  $|2\rangle$  in naraste do ena, ko pade prva na nič.

Izbrani bazični stanji vsekakor nista stacionarni stanji z določeno energijo. Določeno energijo imata novi bazični stanji, ki ju sestavimo iz prvih dveh. Po enačbah (17') sklepamo, da sta to stanji, v katerih z enako verjetnostjo naletimo na molekulo v stanju  $|1\rangle$  in v stanju  $|2\rangle$ , le da imata amplitudi pri prvem enak in pri drugem nasprotni znak:  $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$  in  $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$ . To sta pač dve izmed stanj (15). V prvem ima molekula energijo  $W_0 - W'$  in v drugem energijo  $W_0 + W'$ . Konstante so izbrane tako, da je tudi za novi stanji izpolnjena enačba (5).

Dobljene enačbe spominjajo na enačbe za utripanje dveh sklopljenih nihali.<sup>5</sup> Stanju  $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$  ustreza prvo lastno (sinusno) nihanje s krožno frekvenco  $(W_0 - W')/\hbar$  in stanju  $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$  drugo lastno nihanje s krožno frekvenco  $(W_0 + W')/\hbar$ . Stanju  $|1\rangle$  pa ustreza gibanje prvega nihala in stanju  $|2\rangle$  gibanje drugega nihala pri utripanju s krožno frekvenco utripanja  $2W'/\hbar$ .

**Elektron v vrsti atomov.** Po sistemu z dvema bazičnima stanjema se posvetimo sistemu z neskočnim številom bazičnih stanj. V mislih imamo po premici razporejene atome v enakih razmikih  $a$ , in elektron, ki prehaja od atoma do atoma. Atom označimo z zaporedno številko  $n$  ali s koordinato  $z_n$ . Zanima nas samo, pri katerem atomu je elektron v izbranem trenutku, zato uvedemo bazična stanja:  $\dots|n-1\rangle$  ali  $|z_{n-1}\rangle$  je stanje, v katerem je elektron pri  $n-1$ -vem atomu,  $|n\rangle$  ali  $|z_n\rangle$  je stanje, v katerem je elektron pri  $n$ -tem atomu,  $|n+1\rangle$  ali  $|z_{n+1}\rangle$  je stanje, v katerem je elektron pri  $n+1$ -vem atomu... Takih stanj je neskončno.

Poljubno stanje, v katerem ugotovimo elektron zdaj pri tem, zdaj pri drugem, potem spet pri tretjem... atomu, sestavimo iz takih bazičnih stanj:

$$|\Psi\rangle = \dots + |n-1\rangle\langle n-1|\Psi\rangle + |n\rangle\langle n|\Psi\rangle + |n+1\rangle\langle n+1|\Psi\rangle + \dots$$

in ga opišemo z amplitudami  $\dots A_{n-1} = \langle n-1|\Psi\rangle$ ,  $A_n = \langle n|\Psi\rangle$ ,  $A_{n+1} = \langle n+1|\Psi\rangle$ . Če bi ostal elektron ves čas pri  $n$ -tem atomu, bi veljale za amplitudo enačbe  $i\hbar dA_n/dt = H_{nn}A_n$  z rešitvami  $A_n = \text{konstanta} \cdot e^{-iW_0 t/\hbar}$ , kjer smo postavili  $H_{nn} = W_0$ . Toda zaradi tunelskega pojava lahko preide elektron od  $n$ -tega atoma k  $n-1$ -vemu ali k  $n+1$ -vemu atomu. Matričnih elementov  $H_{n-1,n}$  in  $H_{n+1,n}$  torej ne smemo izenačiti z nič. Zaradi simetrije pa vzamemo, da sta enaka:  $H_{n-1,n} = H_{n+1,n} = -W'$ . S tem dobimo sistem neskončnega števila linearnih diferencialnih enačb

$$\dots, i\hbar dA_n/dt = W_0 A_n - W' A_{n-1} - W' A_{n+1}, \dots \quad (19)$$

Rešiti ga poskusimo z nastavkom  $A_n = \gamma_n e^{-iWt/\hbar}$ , s katerim dobimo amplitude za stanja z določeno energijo  $W$ . Tako pridemo do sistema neskončnega števila linearnih algebrskih enačb, v katerih ni več časovne odvisnosti:

$$\dots, W \gamma_n = W_0 \gamma_n - W' \gamma_{n-1} - W' \gamma_{n+1}, \dots \quad (20)$$

Od časa neodvisni deli amplitud so odvisni še od koordinat ustreznih atomov:  $\dots \gamma_{n-1} = \gamma(z_n - a)$ ,  $\gamma_n = \gamma(z_n)$ ,  $\gamma_{n+1} = \gamma(z_n + a)$ ,... Pri tem smo upoštevali, da je  $z_{n-1} = z_n - a$ ,  $z_{n+1} = z_n + a$ ,... Enačbe

$$\dots, W \gamma(z_n) = W_0 \gamma(z_n) - W' \gamma(z_n - a) - W' \gamma(z_n + a), \dots \quad (20')$$

ki jih dobimo, poskušamo rešiti s podobnim eksponentnim nastavkom kot prej:  $\gamma(z_n) = e^{ikz_n}$ . (Koeficient v eksponentu mora biti čisto imaginaren, ker bi pri realnem eksponentu  $\gamma_n$  narastel za  $n \rightarrow \infty$  ali za  $n \rightarrow -\infty$  prek vsake meje.)

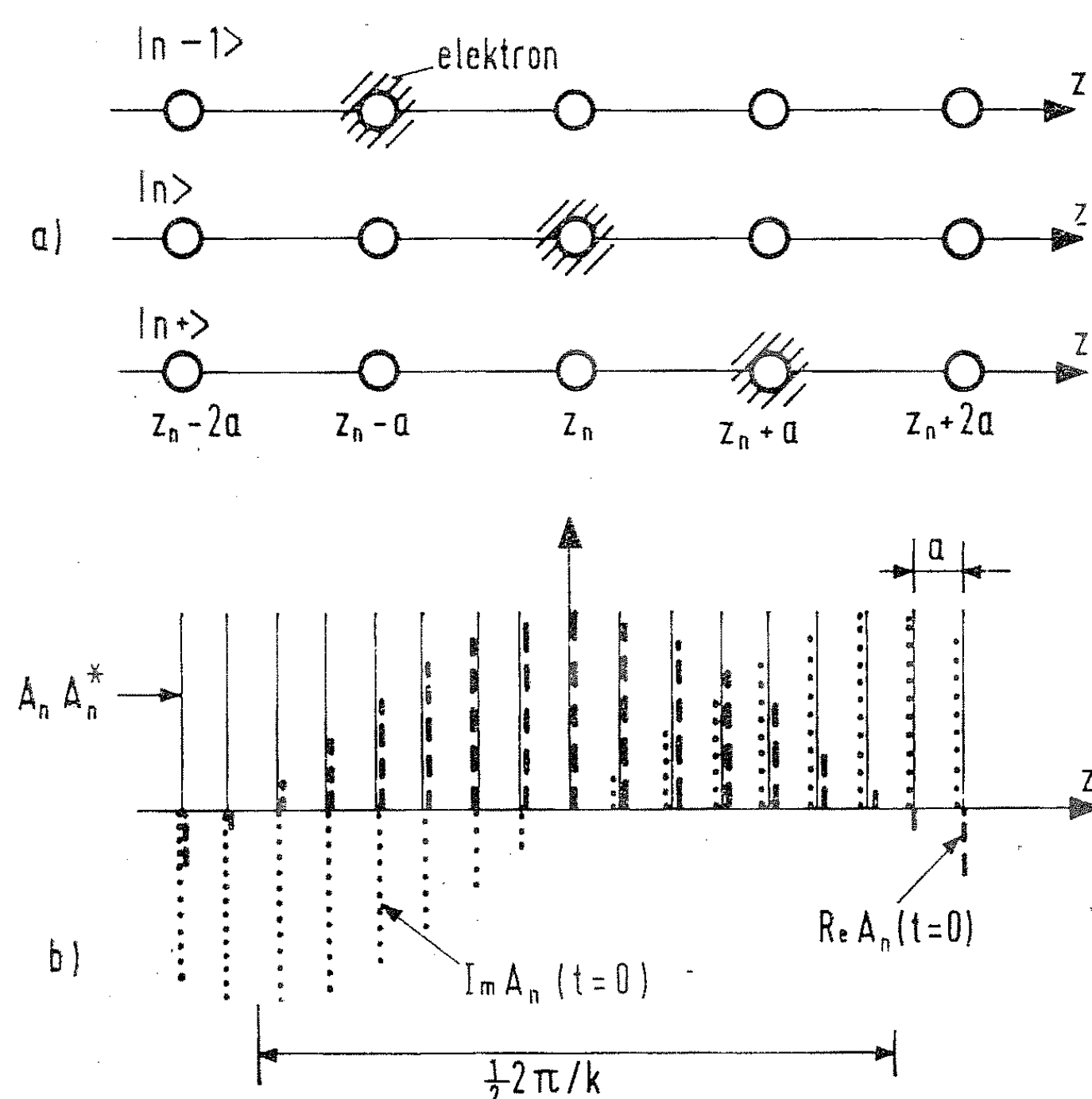
Tako dobimo zvezo

$$W = W_0 - W' (e^{iak} + e^{-iak}) = W_0 - 2 W' \cos ak.$$

Konstanta  $k$  je še poljubna, vsaki vrednosti  $k$  pa ustreza rešitev z energijo  $W$  in z amplitudo

$$A_n = e^{ikz_n - iWt/\hbar}.$$

Amplituda je seveda določena samo za izbrane vrednosti koordinate:  $z_n \pm$  cel mnogokratnik  $a$ . Trenutne vrednosti realnega in imaginarnega dela amplitude ovijata sinusni krivulji, ki sta premaknjeni druga proti drugi. Oba dela potujeta kot valovanji proti levi ( $k < 0$ ) ali proti desni ( $k > 0$ ). Kvadrat absolutne vrednosti amplitude  $A_n A_n^*$  je konstanten za vse atome. Elektron je torej z enako verjetnostjo pri katerem koli atomu v vrsti.



Sl. 7. Tri izmed bazičnih stanj pri poenostavljenem opisu prehajanja elektrona med atomi v vrsti atomov (a) in trenutni sliki realnega in imaginarnega dela amplitude pri izbrani vrednosti  $k$  (b).

Produkt  $ak$  je mnogo manjši kot 1, če je »valovna dolžina« realnega ali imaginarnega dela amplitude  $2\pi/k$  velika v primeri z  $a$ . Tedaj razvijemo  $\cos ak$  v vrsto  $\cos ak = 1 - \frac{1}{2} a^2 k^2 + \dots$  in dobimo za energijo

$$W = W_0 - 2 W' + W' a^2 k^2 - \dots$$

Ničlo energije lahko izberemo tako, da je  $W_0 - 2 W' = 0$  ali  $W_0 = 2 W'$ . To storimo z namenom, da je v prvem približku energija elektrona (energija atomov ostane nespremenjena) dana s podobno enačbo

$$W = W' a^2 k^2$$

kot energija prosto gibajočega se delca. Zanj velja namreč  $W = W_k = G^2/2m = (\hbar k)^2/2m$ , če upoštevamo za gibalno količino enačbo  $G = \hbar/\lambda = \hbar k$ .

S to enačbo je določena gibalna količina fotona. O tem nas prepričata na primer Comptonov pojav ali svetlobni tlak. Da velja ta enačba tudi za delce, se pokaže pri interferenčnih poskusih s curki delcev. Po zgledu  $W = \hbar^2 k^2/2m$  zapišemo energijo elektrona pri prehajanju med atomi kot

$$W = \hbar^2 k^2/2m'. \quad (21)$$

Efektivna masa elektrona  $m'$ , za katero smo postavili  $m' = \hbar^2/2a^2 W'$ , se navadno precej razlikuje od mase prostega elektrona.

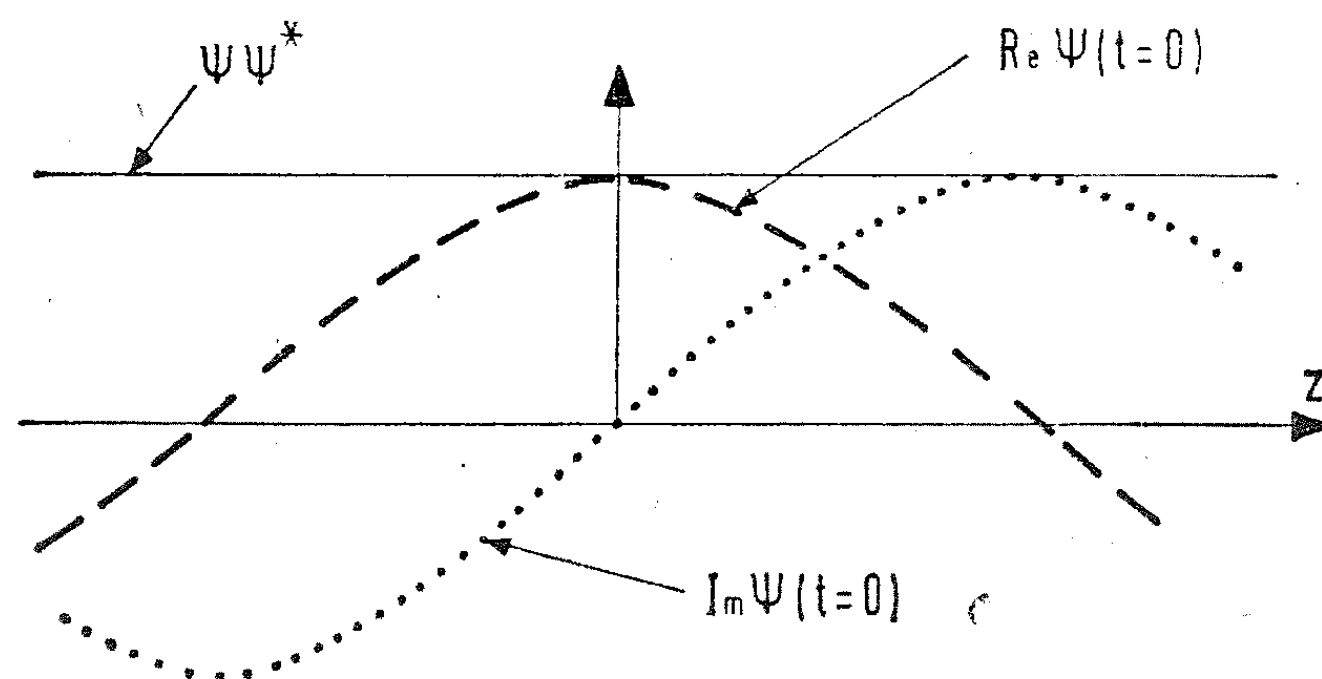
**Gibanje delca po premici.** Priznati moramo, da smo doslej ostali pri zelo grobih približkih. Pri interferenčnih poskusih nismo obravnavali odvisnosti toka elektronov na zaslonu od lege merilnika. Pri amonijakovi molekuli smo dopustili samo dve legi dušikovega atoma in pri enorazsežnem kristalu samo možnost, da je elektron pri tem ali drugem atomu. Razmere smo poenostavili, da težave že spčetka niso bili prevelike. Vendar se ne moremo še naprej izogibati podrobnejšemu obravnavanju teh in drugih pojavov. Pri interferenčnih poskusih je treba preučiti, kako se spreminja tok elektronov v odvisnosti od lege merilnika. Pri dušikovi molekuli moramo dopustiti, da ima dušikov atom poljubno vmesno lego. Enako velja za elektron v enorazsežnem kristalu. Premisliti moramo torej, kako se spreminjajo amplitude v odvisnosti od kraja.

Delo si olajšamo, če za zdaj ostanemo pri gibanju delca v eni razsežnosti. V tem primeru bi bile uporabne kar enačbe za enorazsežni kristal, če bi bila lahko v njih koordinata  $z$  poljubna in ne bi bila omejena le na izbrane vrednosti. To dosežemo, če si mislimo, da gre razmik med atomi  $a$  proti nič. Hkrati se večja verjetnost za prehod elektrona k sosednjima atomoma zaradi tunelskega pojava in narašča  $W'$  prek vsake meje. Efektivna masa elektrona in z njo produkt  $a^2 W'$  pa morata ostati končna. Enačba (21) ostane v veljavi, saj je izpolnjena zahteva, da je  $2\pi/k$  mnogo večje kot  $a$ . Najprej preuredimo enačbo (19):

$$i\hbar dA(z_n)/dt = (W_0 - 2W')A(z_n) + W'[2A(z_n) - A(z_n - a) - A(z_n + a)]$$

in upoštevamo, da je prvi člen na desni strani zaradi posebne izbire ničle za energijo enak nič. Drugi člen razvijemo v Taylorovo vrsto okoli  $z_n$ :

$$2A(z_n) - A(z_n - a) - A(z_n + a) = (dA/dz)a - \frac{1}{2}(d^2A/dz^2)a^2 + \dots = -a^2(d^2A/dz^2) + \dots$$



Sl. 8. Trenutni sliki realnega in imaginarnega dela amplitude (valovne funkcije) pri gibanju prostega delca z izbrano gibalno količino  $G = \hbar k$  po premici. Dejstvo, da je verjetnostna gostota  $AA^*$  konstantna, se sklada z načelom nedoločenosti: lega mora biti popolnoma nedoločena, če je gibalna količina določena natančno.

in dobimo končno

$$i\hbar \partial A / \partial t = - (\hbar^2 / 2m) \partial^2 A / \partial z^2. \quad (22)$$

V tej enačbi smo nadomestili navadna odvoda s parcialnima, saj je zdaj amplituda tudi zvezna funkcija koordinate  $z$ . Namesto  $a^2 W'$  smo vstavili  $\hbar^2 / 2m$ , kjer je  $m$  masa prostega elektrona.

Rešitev te enačbe za prosto se gibajoči delec je

$$A = \text{konstanta} \cdot e^{ikz - iWt/\hbar},$$

če je gibalna količina delca  $G = \hbar k$  in njegova energija  $W = W_k = G^2 / 2m$ . Trenutni vrednosti imaginarnega in realnega dela amplitude sta sinusni krivulji, ki sta premaknjeni druga proti drugi. Oba dela potujeta kot valovanji proti levi ( $k < 0$ ) ali proti desni ( $k > 0$ ). Kvadrat absolutne vrednosti amplitude  $AA^*$  je konstanten.

**Nova definicija verjetnosti in preoblikovanje enačb.** Premisliti moramo še, kako je z bazičnimi stanji za delec, ki se giblje po premici. Po mejnem prehodu  $a \rightarrow 0$  dobimo iz bazičnih stanj  $|z_n\rangle$  stanja  $|z\rangle$ , v katerih so za koordinato dopuščene vse vrednosti. Poljubno stanje  $|\Psi\rangle$  razvijemo po teh stanjih. Z amplitudami  $\langle z | \Psi \rangle$ , v katerih je vrednost  $z$  poljubna, je stanje  $|\Psi\rangle$  popolnoma določeno. Po tem je amplituda  $\langle z | \Psi \rangle$  zvezna funkcija  $z$ . Njena oblika je seveda odvisna od stanja, ki ga razvijemo. Da je to očitno, zaznamujemo amplitudo z  $A_\psi = \langle z | \Psi \rangle$ . Navadno celo spustimo simbol za amplitudo:

$$\Psi(z) = A_\psi = \langle z | \Psi \rangle. \quad (23)$$

Pri tem ne smemo pozabiti, da ima simbol  $\Psi$  na levi strani drugačen značaj kot na desni. Na levi je funkcija, ki se pri vsaki vrednosti koordinate ujema s takajšnjo amplitudo, na desni pa oznaka za stanje delca.

Pričakujemo, da je tako kot prej, kvadrat absolutne vrednosti amplitude  $|\langle z | \Psi \rangle|^2$  v zvezi z verjetnostjo, da je delec pri izbrani koordinati  $z$ . Toda verjetnost, da ima koordinata delca, ki se giblje po premici, natančno določeno vrednost, je enaka nič. Zato si pomagamo z *verjetnostno gostoto*. Ta korak je istoveten s prehodom od črtnih spektrov tona ali zvena k zveznemu spektru šuma.<sup>5</sup> Pri prvem nanesimo na ordinatno os jakost zvoka  $j$ , pri drugem pa jakost zvoka  $dj$  na intervalu krožne frekvence med  $\omega - \frac{1}{2}d\omega$  in  $\omega + \frac{1}{2}d\omega$ , deljen s tem intervalom:  $dj/d\omega$ . Enako računamo namesto verjetnosti, da je delec pri izbrani koordinati, verjetnost, da je delec na intervalu med  $z - \frac{1}{2}dz$  in  $z + \frac{1}{2}dz$ . Ta verjetnost pa je sorazmerna s kvadratom absolutne vrednosti amplitude in s širino intervala, če je interval dovolj ozek:

$$\text{verjetnost} = |\langle z | \Psi \rangle|^2 dz = |\Psi(z)|^2 dz. \quad (24)$$

Zaradi nove definicije verjetnosti je treba prilagoditi nekatere od enačb, ki veljajo za diskretni (črtni) primer. V osnovni zakon (6) moramo namesto amplitud  $\langle i | a \rangle$  in  $\langle \beta | i \rangle$  vstaviti amplitudi  $\langle z | \Psi \rangle$  in  $\langle \Phi | z \rangle$ , če označujeta  $\Phi$  končno in  $\Psi$  začetno stanje, in nadomestiti vsoto prek vseh bazičnih stanj z integralom po  $z$  od  $-\infty$  do  $\infty$ :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \langle \Phi | z \rangle \langle z | \Psi \rangle dz = \int \Phi(z)^* \Psi(z) dz. \quad (25)$$

Tu pomeni skladno s (23)  $\Phi(z) = \langle z | \Phi \rangle$  in  $\Psi(z) = \langle z | \Psi \rangle$  in je po enačbi (7)

$$\Phi(z)^* = \langle z | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | z \rangle.$$

Tudi osnovni zakon (5) ne more obdržati prejšnje oblike. Namesto amplitude  $\langle j | i \rangle$  nastopa v njem amplituda  $\langle z' | z \rangle$ . Če vstavimo v enačbo (25) za  $\langle \Phi |$  bazično stanje  $\langle z' |$ , dobimo namreč

$$\langle z' | \Psi \rangle = \Psi(z') = \int \langle z' | z \rangle \Psi(z) dz. \quad (26')$$

Po tej enačbi je integral funkcije, pomnožene z nekim izrazom, ista funkcija, le pri drugi vrednosti argumenta. Ta izraz ne more biti Kroneckerjev delta. Izraz z zahtevanimi lastnostmi bi zamen iskali tudi med funkcijami. Matematiki pa poznajo *distribucijo* z zahtevano lastnostjo<sup>6</sup>. To je *Diracov delta*  $\delta(z)$ . Zanj veljajo enačbe

$$\int \delta(z) dz = 1, \quad \int f(z) \delta(z) dz = f(0), \quad \int f(z) \delta(z - z') dz = f(z').$$

Diracov delta dobimo kot limito zveznih funkcij. Predstavljajmo si na primer vrsto pokončnih pravokotnikov s simetralami pri  $x$  v diagramu  $y, x$ ! Pravokotniki postajajo vse ožji in vse višji, a njihova ploščina ostane ves čas enaka 1. Ko to funkcijo pomnožimo z drugo funkcijo, recimo z  $f(x)$ , je integral produkta tem boljši približek za  $f(x')$ , čim ožji in čim višji je pravokotnik.

Za bazična stanja na premici moramo osnovni zakon (5) zapisati z Diracovim delta

$$\langle z' | z \rangle = \delta(z - z'), \quad (27)$$

pa je izpolnjena enačba (26).

**Schrödingerjeva enačba.** Enačbi za gibanje delca po premici moramo dati še končno obliko. V ta namen najprej preoblikujemo enačbo (14)  $i\hbar d\langle j | \Psi \rangle / dt = \sum \langle j | H | i \rangle \langle i | \Psi \rangle$  za amplitudo  $A_j = \langle j | \Psi \rangle$ . Bazična stanja so zdaj  $|z\rangle$ . Poleg tega moramo vsoto nadomestiti z integralom in navadni odvod s parcialnim. Namesto matričnega elementa  $H_{ji} = \langle j | H | i \rangle$  nastopa izraz  $\langle z' | H | z \rangle$ , ki je funkcija  $z'$  in  $z$ :

$$\langle z' | H | z \rangle = H(z', z).$$

Tako dobimo enačbo

$$i\hbar \partial \Psi(z') / \partial t = \int H(z', z) \Psi(z) dz. \quad (25)$$

Vanjo je treba za vsak posamezni primer vstaviti ustrezno funkcijo  $H(z', z)$  in jo rešiti. To težavno nalogo opravimo z enim zamahom, če se spomnimo na enačbo (22). Po tej enačbi sklepamo, da je za prosti delec vsa desna stran enačbe (25) enaka

$$\int H(z', z) \Psi(z) dz = -(\hbar^2/2m) \partial^2 \Psi(z') / \partial t^2. \quad (26)$$

S tem pridemo do *Schrödingerjeve enačbe za prosti delec, ki se giblje v smeri osi z*:

$$i\hbar \partial \Psi / \partial t = -(\hbar^2/2m) \partial^2 \Psi / \partial z^2. \quad (27)$$

Pri našem izvajanju bi morali imeti v tem primeru za *osnovni zakon zvezo*

$$H(z', z) = -(\hbar^2/2m) (\partial^2 / \partial z^2) \delta(z - z'), \quad (28)$$

Potrebni sta še dve dopolnitvi. V praznem prostoru so vse tri koordinatne osi enakopravne. Zato moramo namesto odvoda  $\partial^2/\partial z^2$  upoštevati vsoto odvodov  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \nabla^2$ . Za delec, ki se prosto giblje, a mu poleg kinetične energije pripišemo konstantno potencialno energijo  $W_p$ , moramo poleg člena  $-(\hbar^2/2m)\nabla^2\Psi$  upoštevati še člen  $W_p\Psi$ . Le tedaj je skupna energija delca dana z enačbo  $W = W_k + W_p = \hbar^2 k^2/2m + W_p$ . Če se potencialna energija spreminja s krajem, če se torej delec giblje v polju sile, ki jo opišemo s skalar-nim potencialom  $V(\mathbf{r}) = W_p(\mathbf{r})$ , je treba namesto člena  $W_p\Psi$  pač upoštevati člen  $V(\mathbf{r})\Psi$ . Tako dobimo končno obliko *Schrödingerjeve enačbe*

$$i\hbar\partial\Psi/\partial t = -(\hbar^2/2m)\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\Psi. \quad (28)$$

Tej enačbi je treba dodati še začetni in robni pogoj za  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , če jo želimo rešiti za poseben primer.

Osnovni zakon (27), iz katerega sledi ta enačba, ima obliko

$$H(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = [-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V(\mathbf{r})]\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z').$$

Pot do Schrödingerjeve enačbe ni ne kratka ne lahka. Marsikatero težavno mesto smo obšli ali smo ga samo bežno pojasnili. A zanimivo je bilo videti nekatere znane stvari z novega gledišča. Ena izmed prednosti te poti pa je nedvomno v tem, da pridemo do *valovne funkcije*  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , ne da bi se morali zateči k eni od običajnih goljufij. Ob strani smo morali pustiti mnogo zanimivih podrobnosti. Vendar slike ni težko dopolnjevati, če so osnove jasne.

#### Literatura

<sup>1</sup> W. H. Westphal: Grundlagen der Dynamik und Newtons 2. Axiom, Phys. Blätter 23, 558 (1967).

<sup>2</sup> Na primer F. W. Sears, M. W. Zemansky: University Physics, Reading, Mass. (Addison-Wesley), 1964, str. 672 ali W. G. V. Rosser: Classical Electromagnetism via Relativity, London (Butterworths), 1968.

<sup>3</sup> P. A. M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics, Oxford (University Press), 1930.

<sup>4</sup> R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, Reading, Mass. (Addison-Wesley), 1965, III. del.

<sup>5</sup> Na primer J. Strnad: Uvod v fiziko, Ljubljana (Univerzitetna založba), 1969, str. 206—208.

<sup>6</sup> L. Schwartz-I. Vidav: O distribucijah, Obz. mat. fiz. 1, 46 (1951).

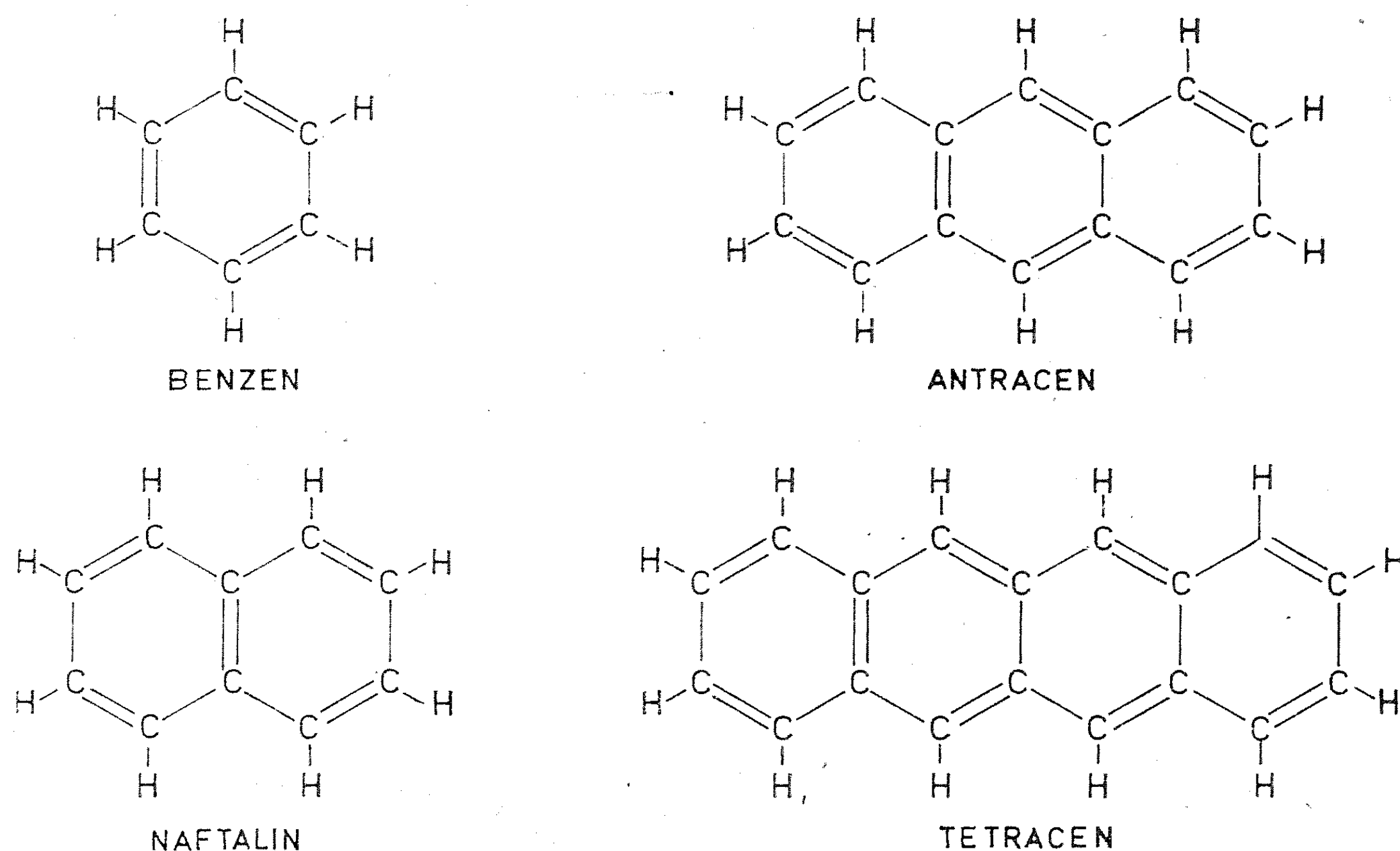
# GIBLJIVOST ELEKTRONOV V ORGANSKIH POLPREVODNIKIH\*

PETER GOSAR

## Uvod

Zanimanje za polprevodnike stalno raste v zadnjih dvajsetih letih. To predvsem zaradi izrednih lastnosti nekaterih anorganskih polprevodnikov, kot sta na primer Si in Ge, in s tem povezane tehnološke revolucije v elektroniki, ki jo vsi doživljamo in občutimo. Velika uporabnost diod, tranzistorjev in drugih polprevodniških sestavnih elementov je bila vzpodbuda za iskanje in študij še novih polprevodniških snovi. Raziskave so se razširile tudi na organske spojine.<sup>(1)</sup> O elektronskih procesih v organskih snoveh, na primer o električni prevodnosti, vemo danes še razmeroma malo. Raziskave takih procesov so med drugim pomembne tudi za biofiziko, ker gibanje elektronov pogosto povzroča ali spremlja osnovna dogajanja v živi materiji.

Trdne organske snovi so običajno izolatorji ali polprevodniki. Dober izolator je na primer polietilen, katerega specifična prevodnost je samo  $10^{-16} \text{ ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$  v primerjavi s specifično prevodnostjo bakra okoli  $10^6 \text{ ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ . Pri polprevodnikih se bomo omejili le na nekatere najbolj raziskane in enostavne organske polprevodnike. To so kristali konjugiranih aromatskih ogljikovodikov, naftalina ( $\text{C}_{10}\text{H}_8$ ), antracena ( $\text{C}_{14}\text{H}_{10}$ ) in tetracena ( $\text{C}_{18}\text{H}_{12}$ ). Največ je znanega o antracenu.

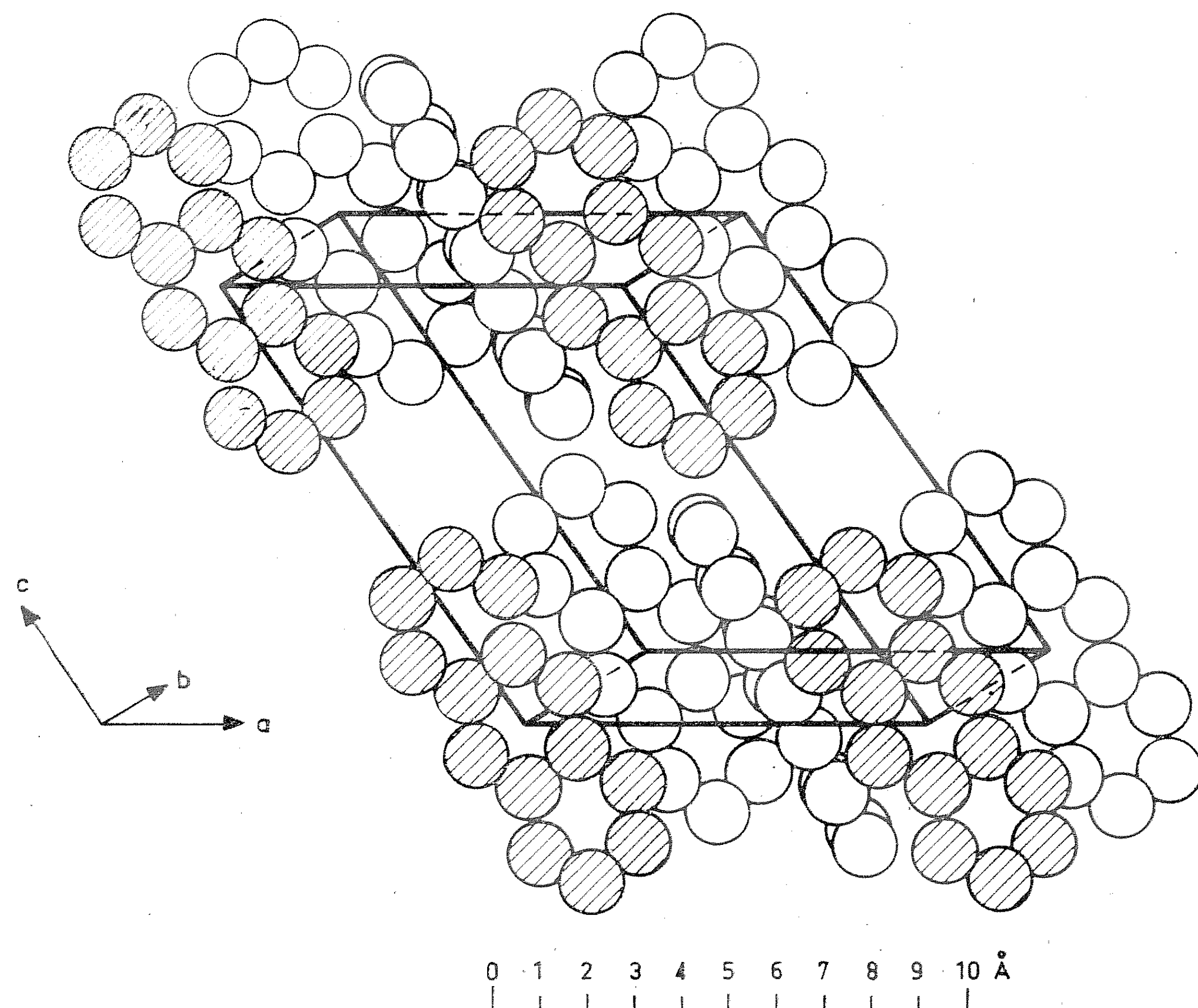


Sl. 1. Struktura molekul konjugiranih aromatskih ogljikovodikov

Struktura molekul konjugiranih aromatskih ogljikovodikov je razvidna s sl. 1. Molekule so ploščate. To se odraža tudi v kristalni strukturi. Kristali so narejeni iz plasti. V posamezni plasti se molekule tesno dotikajo ena druge,

\* Povzeto po predavanjih 15. II. 1969 na IJS in 2. IV. 1969 na SAZU.

tako da je čim manj vmesnega prostora. Antracen in naftalin kristalizirata monoklinsko. Glej prikaz primitivne celice antracena na sl. 2. V primitivni celici sta dve molekuli. Razdalja med težiščema najbližjih molekul je pri antracenu 5,2 Å.



Sl. 2. Primitivna celica antracena

Antracen je pravzaprav izolator s približno isto specifično prevodnostjo kot jo ima polietilen. Pri močni osvetlitvi z ultravijetno svetlobo pa upornost antracena pade za več velikostnih razredov, lahko tudi za faktor  $10^8$ . Razen tega moremo s primerno izbiro elektrod vbrizgavati v kristal elektrone ali vrzeli in tako na umeten način zmanjšati upornost kristala. Zato prištevamo antracen med polprevodnike. Podobne lastnosti imata naftalin in tetracen.

### Elektronski nivoji antracena

Za polprevodnike je značilna prisotnost dveh vrst prostih nosilcev električnega naboja v kristalu. To so elektroni v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu. Pri antracenu je energijska razlika med spodnjim robom prevodnega pasu in gornjim robom valenčnega pasu  $E_g = 3.7$  eV, kar je mnogo več kot na primer pri siliciju z  $E_g = 1.1$  eV. Energija  $E_g$  je energija, ki je potrebna za ionizacijo antracenovih molekul v kristalu. To se pravi, da potrebujemo 3.7 eV za odtrganje enega valenčnega elektrona iz izbrane molekule in premestitev na drugo zelo oddaljeno molekulo. Tako dobimo pozitiven molekulski ion ali vrzel v valenčnem pasu na mestu manjkajočega elektrona in negativen molekulski ion ali elektron v prevodnem pasu na mestu oddaljene molekule. Vrzel in elektron lahko v kristalu potujeta s preskakovanjem od molekule do molekule, kot je to običajno pri vseh polprevodnikih. Vendar je to potovanje v antracenu dosti bolj počasno v primerjavi s hitrostjo elektronov in vrzeli v germaniju ali siliciju. Valenčni in prevodni pas sta namreč pri antracenu izredno ozka, verjetno je njihova širina pod 0.1 eV. Pri nor-

malnih polprevodnikov pa je širina teh pasov tudi nad 10 eV. Razlog za tako majhno širino pasov je v sami naravi kristala. Antracen spada v kategorijo molekulskih kristalov. Molekule so le šibko medsebojno vezane z Van der Waalsovimi silami. Prost elektron, na primer, zasede najnižjo prosto orbito  $\pi$  elektronov v molekuli antracena. Znano je, da se elektroni na takih nivojih lahko in hitro gibljejo po celotnem področju molekule. Težave nastopijo pri prehodu elektrona z ene molekule na sosednjo. V vmesnem področju je gostota elektronov zelo majhna, kar pomeni, da imajo elektroni tam veliko potencialno energijo. To preprečuje lahko oziroma hitro preskakovanje elektrona od molekule do molekule. Frekvenca preskakovanja elektrona je okoli  $10^{13} \text{ s}^{-1}$  in maksimalna hitrost samo okoli  $10^4 \text{ m s}^{-1}$  ali še manj v primerjavi s hitrostjo  $10^5 \text{ m s}^{-1}$  za nosilce toka v običajnih polprevodnikih in s hitrostjo  $10^6 \text{ m s}^{-1}$  za elektrone v kovinah.

Matematično popišemo gibajoč se elektron z valovno funkcijo  $|\mathbf{k}\rangle$ , ki ima v kristalu obliko amplitudno moduliranega ravnega valovanja<sup>(2)</sup>

$$|\mathbf{k}\rangle = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (1)$$

kjer je  $\mathbf{k}$  valovni vektor valovanja in  $\mathbf{r}$  krajevni vektor.  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  je periodična funkcija s periodo primitivne celice kristala. V ekvivaletnih točkah primitivnih celic ima ta funkcija isto vrednost. V bližini molekul se  $|\mathbf{k}\rangle$  ne razlikuje mnogo od običajnih molekulskih valovnih funkcij. Eksponentni faktor v (1) skrbi predvsem za pravilno fazo valovne funkcije na posamezni molekuli v kristalu.

Valovna dolžina elektrona je v kristalu omejena približno na interval  $(2a, \infty)$ , kjer je  $a$  najmanjša razdalja med težišči sosednjih molekul. Odvisnost energije elektrona  $\varepsilon(\mathbf{k})$  v ozkem pasu od valovnega vektorja je precej komplicirana funkcija. Zato bomo tu privzeli poenostavljeno sliko enodimenzionalnega kristala oziroma verige molekul, kjer lahko zapišemo  $\varepsilon(\mathbf{k})$  v obliki

$$\varepsilon(k) = \frac{W}{2} [1 - \cos(ka)]. \quad (2)$$

Tu je  $W$  širina pasu in  $k$  leži v intervalu  $-(\pi/a) \leq k \leq (\pi/a)$ . Širina pasu je tudi merilo za frekvenco preskakovanja elektrona med sosednjimi molekulami. Hitrost elektrona v energijskem stanju  $|k\rangle$  je podana s skupinsko hitrostjo

$$v = \frac{d\varepsilon}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{d\varepsilon(k)}{dk} = \frac{Wa}{2} \sin(ka), \quad (3)$$

kjer je  $\hbar = h/(2\pi)$  in  $h$  Planckova konstanta. Vidimo, da se najhitreje gibljejo elektroni v sredini pasu, kjer je  $k = \pi/(2a)$ . Ker so te hitrosti majhne, so enegijski pasovi, s katerimi popisujemo gibajoče se elektrone, ozki.

Hitrost elektronov v različnih smereh v kristalu ni ista. Posebno lahko preskakuje elektron od molekule do molekule v smeri osi  $\mathbf{b}$  in v smereh diagonal osnovne ploskve primitivne celice, kjer so razdalje med molekulami najmanjše. Prehodi v smeri pravokotno na osnovno ploskev, to je v smeri  $\mathbf{c}'$ , so bolj težavni. Še najlažje preskoči elektron v smeri od levega sprednjega ogljišča spodnje osnovne ploskve do sredine gornje ploskve primitivne celice kristala.

Gornja razmišljanja in ugotovitve veljajo v polni meri tudi za vrzeli, ki predstavljajo nezasedena stanja v normalno zasedenih  $\pi$  orbitah. Tudi

v bodoče se bomo, zaradi enostavnejšega izražanja, omejili predvsem na razpravljanje o elektronih.

Ozek pas pomeni tudi veliko navidezno maso elektrona. V zunanjem električnem polju se elektroni v antracenu mnogo težje pospešujejo kakor prosti elektroni zaradi potencialnih ovir med molekulami. Navidezno se zdi, kot da bi bil elektron težji delec. Njegova navidezna masa je okoli desetkrat večja od mase prostega elektrona.

### Gibljivost elektronov in vrzeli

Spoznali smo nekaj osnovnih lastnosti elektronov in vrzeli v antracenu. Pri opisu električnih lastnosti polprevodnikov predstavlja važen podatek tudi gibljivost nosilcev naboja. V tabeli I so navedene eksperimentalne vrednosti za gibljivost elektronov in vrzeli v antracenu in naftalinu.

TABELA I

Gibljivost elektronov in vrzeli v antracenu in naftalinu v  $\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$  (3, 4)

| Smer v kristalu | Antracen |       | Naftalin |       |
|-----------------|----------|-------|----------|-------|
|                 | elektron | vrzel | elektron | vrzel |
| a               | 1.7      | 1.0   | 0.7      | 0.9   |
| b               | 1.0      | 2.0   | 0.7      | 1.4   |
| c'              | 0.4      | 0.8   | 0.4      | 0.4   |

Gibljivost ni izotropna. Je precej odvisna od smeri električnega polja v kristalu. To je v skladu z anizotropnostjo hitrosti elektronov in vrzeli, o kateri smo zgoraj govorili. Gibljivosti so v organskih polprevodnikih zelo majhne. Za primerjavo glej tabelo gibljivosti v nekaterih znanih polprevodnikih in kovinah.

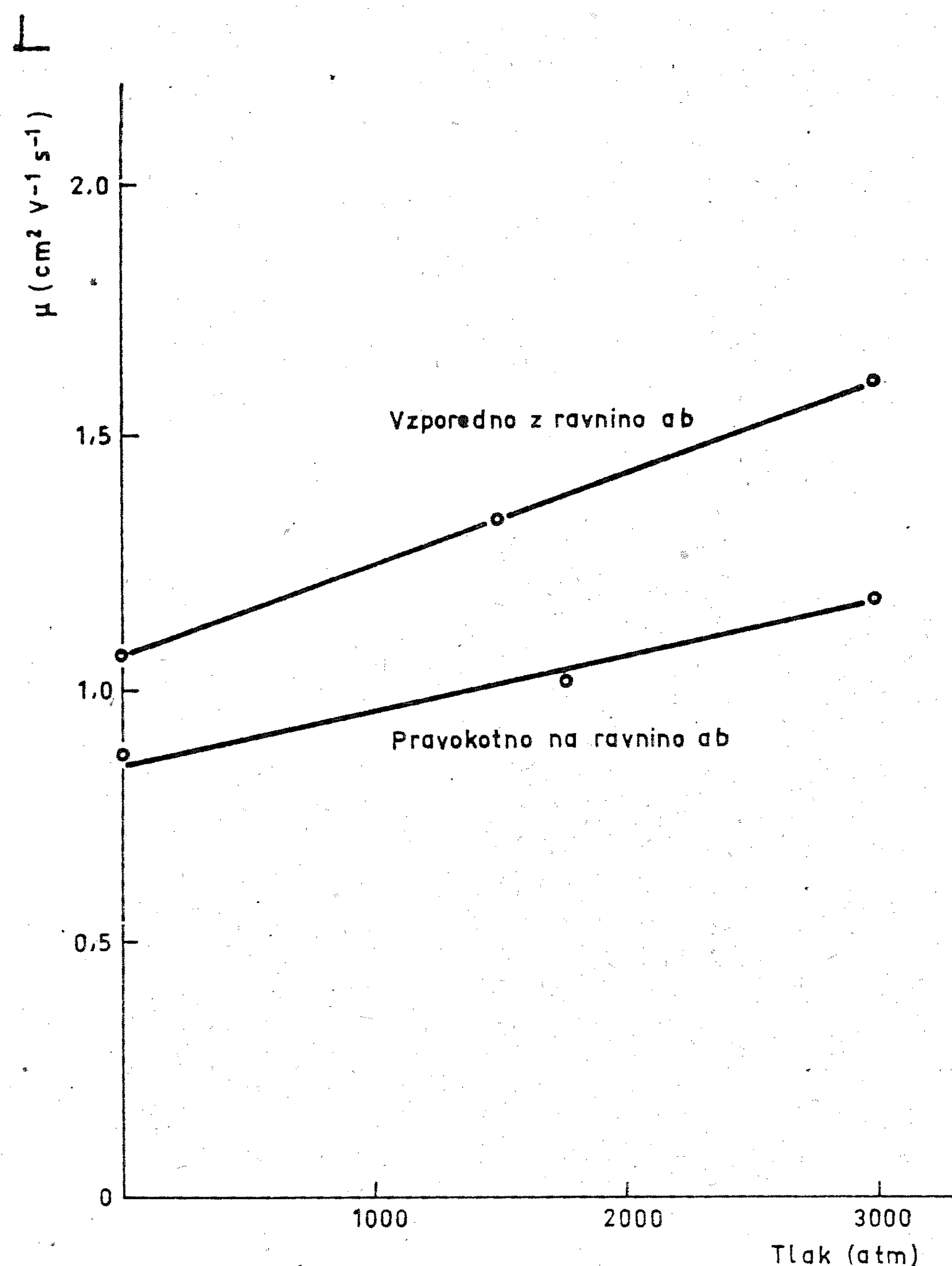
TABELA II

Gibljivost elektronov in vrzeli v nekaterih polprevodnikih in kovinah v  $\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$

| Kristal | elektron | vrzel |
|---------|----------|-------|
| InSb    | 70 000   | 1 000 |
| InAs    | 30 000   | 240   |
| GaAs    | 8 500    | 400   |
| Ge      | 3 800    | 1 800 |
| Si      | 1 900    | 480   |
| Cu      | 30       | —     |
| Ag      | 50       | —     |

V nadaljnjem bomo poskušali najti fizikalno razlago za tako majhne gibljivosti. Pri tem se bomo seznanili z nekaterimi fizikalnimi pojavi, ki so značilni za organske polprevodnike in močno vplivajo na gibljivost nosilcev toka. Jasno

je, da je majhna gibljivost predvsem posledica majhnih hitrosti delcev v ozkem valenčnem in prevodnem pasu. Pri pasovih, ki so precej širši kot  $k_B T$  ( $k_B$  je Boltzmannova konstanta;  $T$  je absolutna temperatura) velja za gibljivost  $\mu$  znan izraz



Sl. 3. Gibljivost vrzeli v antracenu v odvisnosti od tlaka <sup>(3)</sup>

$$\mu = \frac{e \tau}{m^*}, \quad (4)$$

kjer je  $e$  naboj in  $m^*$  navidezna masa delcev;  $\tau$  pa je transportni relaksacijski čas. Čas  $\tau$  pomeni v bistvu čas, v katerem se delec prosto pospešuje v kristalu pod vplivom zunanjega električnega polja. Formula (4) postane sama po sebi razumljiva, če se spomnimo, da je po definiciji za gibljivost povprečna usmerjena hitrost  $u$  delcev v električnem polju  $E$  enaka

$$u = \mu E. \quad (5)$$

Vidimo, da velika masa elektronov in vrzeli v organskih polprevodnikih močno zmanjšuje gibljivost. Vendar to še ni dovolj za popolno razlago zmanjšanja gibljivosti tudi za več velikostnih razredov glede na gibljivosti v anorganskih polprevodnikih. Sklepamo, da morajo biti relaksacijski procesi, ki določajo čas  $\tau$ , v organskih polprevodnikih drugačni. Relaksacijski čas je tu krajši. Pri siliciju in germaniju je transportni relaksacijski čas  $10^{-12} - 10^{-13}$  s pri sobni temperaturi. Številčni podatki o relaksacijskih časih sami po sebi malo povedo.

Bolj nazorna količina je prosta pot, ki jo dobimo, če pomnožimo čas  $\tau$  z absolutno hitrostjo  $v$  delcev. Prosta pot je pri anorganskih polprevodnikih in kovinah dolga več sto ali celo tisoč angströmov. Pri antracenu in naftalinu pa je prosta pot zelo majhna, le nekaj angströmov, in morda niti ne večja od medmolekulske razdalje  $a$ .

Če pomnožimo v formuli (4) števec in imenovalec s hitrostjo  $v$  in upoštevamo, da sta gibalna količina delca  $m^*v$  in njegova valovna dolžina  $\lambda$  povezani z De Brogliejevo relacijo  $m^*v = h/\lambda$ , dobimo

$$\mu = \frac{e}{h} \lambda l = (2.4 \times 10^{14} \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}) \lambda l. \quad (6)$$

O prostem gibanju delcev lahko govorimo, le kolikor je prosta pot  $l$ , ki jo lahko izračunamo iz (6), če poznamo gibljivost  $\mu$  in hitrost  $v$  oziroma  $\lambda$ , daljša od valovne dolžine  $\lambda$ . Na drugi strani pa je tudi valovna dolžina nujno daljša od medmolekulske razdalje  $a$ . Vidimo torej, da v tej teoriji obstaja neka spodnja meja za gibljivost, ki jo dobimo, če vstavimo v (6) recimo  $l = \lambda = 2a$ . Pri  $a = 5 \text{ \AA}$  je spodnja meja za gibljivost  $\mu \approx 2.4 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Takšne ocene so seveda zelo grobe. Posebno pri pasovih, ki so ožji kot  $k_B T$ , je potrebna bolj skrbna analiza. V takih primerih je spodnja meja nekaj nižja. Te omejitve kažejo, da so organski polprevodniki ravno na meji, ko začne predstava o prostem gibanju nosilcev toka izgubljati veljavo.

### Interakcije med elektroni in mrežnimi nihanji

Kaj povzroča sipanje in relaksacijo, na primer elektronov, v organskih polprevodnikih? Eden izmed morda najvažnejših povzročiteljev sipanja so fluktuacije energije. Pod tem pojmom razumemo naslednje. Razdalje med nosilci toka so v organskih polprevodnikih vedno zelo velike zaradi majhne koncentracije. Ti delci se med seboj nič ne motijo. Tako se elektron v kristalu nahaja v okolju, kjer ni drugih električnih nabojev v bližini. Električno polje  $E$  elektrona polarizira sosednje molekule. Inducirani dipolni moment posamezne molekule je po velikosti enak  $\alpha E$ , kjer  $\alpha$  pomeni polarizirnost molekule. Zapišimo še izraz za polarizacijsko energijo. Ta je negativna in enaka  $1/2$  produkta električnega polja in dipolnega momenta, to je  $-(1/2) \alpha E^2$ . Faktor  $1/2$  nastopa v izrazu zato, ker imamo popravek z induciranimi dipoli. Polarizacijska energija je seveda negativna, ker se pri polarizaciji energija sistema elektron — molekula zmanjša. Sedaj lahko zapišemo celotno polarizacijsko energijo  $E_p$  kristala z enim elektronom s tem, da seštejemo prispevke posameznih molekul k polarizacijski energiji:

$$E_p = - \frac{e^2 \alpha^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \sum_i \frac{1}{r_i^4}, \quad (7)$$

kjer  $r_i$  pomeni razdaljo med molekulo  $i$  in molekulo, na kateri je elektron. Tu je  $\epsilon_0$  influenčna konstanta  $\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1}$ . Do izraza (7) pridemo, če upoštevamo, da je električno polje na mestu molekule  $i$  enako  $e/(4\pi \epsilon_0 r_i^2)$ . Polarizirnosti organskih molekul so zelo velike zaradi velikega števila ne preveč močno vezanih elektronov v njih. Polarizirnost antracenove molekule je  $\alpha = (4\pi \epsilon_0) 25.3 \text{ \AA}^3$ . Prispevek molekul k polarizacijski energiji zelo hitro

pojema z razdaljo  $r_i$ . Večino te energije prispevajo le neposredne sosede molekule, na kateri je elektron. Polarizacijska energija pri antracenu je  $-1.74$  eV, torej mnogo več kot je širina valenčnega ali prevodnega pasu.

Čeprav je polarizacijska energija zelo velika, to še ne bi moglo motiti gibanja elektrona skozi kristal, ker je ta energija neodvisna od lege molekule, na kateri je elektron. Kristal ima translacijsko simetrijo. V resnici je gornja trditev le približno res. Molekule v realnem kristalu niso pri miru, ampak nihajo okoli svojih mirovnih leg. Opraviti imamo s toplotnimi translacijskimi mrežnimi nihanji. Amplituda nihanj z rastočo temperaturo raste. Pri  $300$  °K je amplituda teh nihanj v antracenu  $0.17$  Å. Nihanja porušijo translacijsko simetrijo kristala in elektron ne vidi več enake okolice na različnih mestih v kristalu. Torej se tudi polarizacijska energija spreminja od molekule do molekule. Te spremembe ali fluktuacije čuti elektron pri gibanju kot krajevno in časovno spremenljiv potencial, ki seveda povzroča stalne motnje v sicer premočrtnem gibanju elektrona. Velikost fluktuacij lahko hitro ocenimo, če upoštevamo, da v izrazu (7) prispevajo k polarizacijski energiji predvsem molekule v neposredni bližini elektrona. Razdalja teh molekul od elektrona je približno  $a$  in je zato fluktuacija polarizacijske energije  $\Delta E_p$  okoli

$$\Delta E_p \approx 4|E_p|(\Delta a/a), \quad (8)$$

kjer je fluktuacija medmolekulske razdalje  $\Delta a$  podana v bistvu z amplitudo mrežnih nihanj. Pri  $E_p = -1.74$  eV,  $\Delta a = 0.17$  Å in  $a = 5.2$  Å za antracen dobimo  $\Delta E_p = 0.23$  eV. Vidimo, da imamo opraviti s fluktuacijami, ki so večje od širine energijskih pasov. To je vzrok, zakaj imajo elektroni in vrzeli tako majhno prosto pot. Kinetična energija nosilcev toka, merilo za katero je širina pasov, v povprečju ne zadošča za prosto gibanje delcev zaradi prevelikih ovir, ki jih predstavljajo fluktuacije polarizacijske energije.

Opisana interakcija med nosilci naboja in mrežnimi nihanji ni edina. Močan vpliv na gibanje delcev imajo tudi krajevne fluktuacije njihove hitrosti. Do teh fluktuacij pride zato, ker razdalje med sosednjimi molekulami v nihajočem kristalu niso povsod popolnoma enake. Toplotna nihanja porušijo sicer idealno periodičnost kristala. Kjer je medmolekulska razdalja manjša, elektron lažje preskakuje od molekule do molekule in je zato njegova hitrost večja. Obratno velja za področja, kjer se medmolekulske razdalje povečajo. Vpliv medmolekulske razdalje  $a$  na frekvenco preskakovanja ali hitrost je pri organskih polprevodnikih izredno velik. Pri teorijskem obravnavanju prehoda elektrona od ene molekule na drugo govorimo, namesto o frekvenci  $\nu$ , o matričnem elementu  $w(a) = h\nu$  za prehod. Matrični element je tem večji, čim večja je gostota elektronov v vmesnem prostoru med obema molekulama, ker to pomeni nizko potencialno oviro. V molekulskih kristalih je ta gostota majhna in elektronska valovna funkcija pojema v tem področju približno eksponentno z razdaljo od ustreznih molekul. Zato velja dokaj dobro nastavek

$$w(a) = w_0 \exp(-\eta a), \quad (9)$$

kjer je  $\eta = 3 - 6$  Å<sup>-1</sup> za antracen. Relativna fluktuacija matričnega elementa je torej

$$\frac{\Delta w(a)}{w(a)} = \eta \Delta a. \quad (10)$$

Pri  $\eta = 4 \text{ \AA}^{-1}$  in  $\Delta a = 0.17 \text{ \AA}$  dobimo  $\Delta w(a)/w(a) = 0.68$ , kar predstavlja izredno veliko fluktuacijo. Da je hitrost elektronov in vrzeli zelo odvisna od medmolekulske razdalje, sklepamo tudi iz rezultatov meritev gibljivosti v odvisnosti od tlaka. Pri stiskanju kristala gibljivost hitro raste. Glej sl. 3. Vzrok za povečanje gibljivosti je seveda le večja hitrost delcev.

Fluktuacije hitrosti povzročajo sipanje elektronov. Razlog je podoben kot pri sipanju svetlobe v sredstvu s krajevno spremenljivim lomnim koeficientom, na primer v gosti megli. Hitrost svetlobe v vodnih kapljicah, ki tvorijo meglo, je manjša od hitrosti v vmesnem zraku. Zato se svetlobno valovanje lomi na površini kapljic in pride tako do močnega razprševanja svetlobe. Numerične ocene kažejo, da je verjetno sipanje elektronov zaradi fluktuacij polarizacijske energije močnejše kot sipanje zaradi fluktuacij hitrosti. Če je to res, te fluktuacije ne bi odločilno vplivale na vrednost transportnega relaksacijskega časa.

Fluktuacije hitrosti igrajo še drugo vlogo v mehanizmu električnega prevajanja. To bo razvidno iz izraza za gibljivost, ki ga sedaj zapišemo v obliki

$$\mu = \frac{e\tau}{3k_B T} \langle v^2 \rangle, \quad (11)$$

kjer  $\langle v^2 \rangle$  pomeni povprečen kvadrat hitrosti elektronov v pasu. Formula (11) eksplicitno kaže odvisnost gibljivosti od hitrosti elektronov in je boljša od (4). Oba izraza sta ekvivalentna, če se elektroni obnašajo kot prosti delci. Tedaj velja

$$\frac{m^* \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} k_B T \quad (12)$$

in identičnost izrazov postane očitna. Naj omenim, da tako v (4) kot v (11) privzamemo, da je transportni relaksacijski čas  $\tau$  neodvisen od hitrosti elektronov. To pa seveda ni res in zato obe formuli predstavljata le precej grob približek za gibljivost.

Če se hitrosti elektronov krajevno ali časovno spreminjajo je treba izraz (11) povprečiti še po kraju ali času. Naj bo krajevna ali časovna fluktuacija hitrosti označena z  $\Delta v$ . Tedaj je krajevno ali časovno povprečje kvadrata hitrosti enako

$$\overline{(v + \Delta v)^2} = v^2 + \overline{(\Delta v)^2}. \quad (13)$$

Povprečje je označeno z vodoravno črto nad kvadrati hitrosti. Vidimo, da je zaradi fluktuacij povprečni kvadrat hitrosti večji od siceršnje vrednosti  $v^2$ . Fluktuacije hitrosti torej tu prispevajo k povečanju gibljivosti. To je zelo zanimiv in na prvi pogled prav presenetljiv rezultat.

Povečanje gibljivosti zaradi fluktuacij hitrosti je pri antracenu precej veliko. Ocena za fluktuacijo matričnega elementa  $w(a)$  pod formulo (10) velja tudi za fluktuacijo hitrosti. Z uporabo te ocene dobimo iz (13) in (11), da je ustrezno povečanje gibljivosti  $\Delta\mu = 0.46 \mu$ .

Seznani smo se z mehanizmom električnega prevajanja v nekaterih organskih polprevodnikih. Ves opis je bil osnovan na običajni predstavi prosto se gibajočih nosilcev toka, ki se v kristalu sipljejo zaradi raznih motenj. Spoznali smo nekatere nove pojave, ki so karakteristični za organske polprevodnike. Pri tem smo pa ugotovili, da običajne teorije prevodnosti začno

tu izgubljeni veljavnost zaradi majhnih prostih poti. Problem prevodnosti se da formulirati tudi na drugačen način tako, da se izognemo ne popolnoma upravičeni predstavi o prostih delcih. Tak način, ki je izpeljan iz splošne teorije linearne odziva, pa je matematično preveč kompliciran, da bi ga na tem mestu obravnavali, in ne da bistveno drugačnih rezultatov.

#### Literatura

<sup>(1)</sup> J. J. Brophy and J. W. Buttrely: Organic Semiconductors, The Macmillan Company, New York 1962.

M. Pope, Sci. Am. **216**, 86 (1967).

J. L. Katz, S. A. Rice, S. I. Choi, and J. Jortner, J. Chem. Phys. **39**, 1683 (1963).

P. Gosar and S. I. Choi, Phys. Rev. **150**, 529 (1966).

<sup>(2)</sup> Glej na primer: P. Gosar, OMF VII, 116 (1960).

<sup>(3)</sup> R. G. Kepler, Phys. Rev. **119**, 1226 (1960).

<sup>(4)</sup> M. Silver, J. R. Rho, D. Olness, and R. C. Jarnagin, J. Chem. Phys. **38**, 3030 (1963).

# NOVICA

---

## NOVO PRI ENOTAH

O enotah ne kaže razpravljati, ker igra pri njih vlogo veliko stvari, ki so zunaj fizike. Večina fizikov presoja razpravljanje o enotah s tega vidika. To je najbrž vzrok za dejstvo, da Obzornik že dolgo ni pisal o enotah.<sup>1</sup> Zdaj pa je napočil čas, ko ne more škoditi, če poročamo o nekaterih novostih.

Medtem se je iz sestava enot MKSA (Giorgijevega sestava enot) razvil mednarodni sistem enot (sestav SI, po kratici v francoščini). Nad njim bdi Generalna konferenca za uteži in mere (ustanovljena že 1875), ki se v zadnjem času sestaja približno vsaka tri ali štiri leta. Njeno delo pripravlja Mednarodni komite za uteži in mere, njen Mednarodni urad za uteži in mere pa je v Sèvresu blizu Pariza. Obstaja še mednarodna organizacija, ki pomaga usklajati državam zakonodajo s priporočili generalne konference. Mednarodna organizacija za standardizacijo pa skrbi v glavnem za enote zunaj sestava SI. Te organizacije delujejo v povezavi z državnimi ustanovami za mere, uteži in za standardizacijo in z ustreznima komisijama mednarodnih strokovnih združenj (komisija za simbole, enote in poimenovanje Mednarodnega združenja za čisto in uporabno fiziko IUPAP in Mednarodnega združenja za čisto in uporabno kemijo IUPAC). Kot vidimo, so enote v dobrih rokah.

Mednarodni sestav enot privrženci posebno v zadnjem času vneto označajo.<sup>2,3,4</sup> Za nas utegne biti bolj sprejemljivo mnenje R. G. Chambersa.<sup>5</sup> Zagotovo je bolje meriti dolžino z metri kot z jardi (Anglija bo prešla na metrski sestav enot). Toda v okviru merjenja z metri je še več narečij in ni treba, da bi vsi fiziki govorili eno in isto narečje. Če bi imel sestav SI zares prednosti, ki mu jih pripisujejo, bi se že zdavnaj uveljavil sam od sebe. Zdi pa se, da ga fiziki v znanstvenih člankih, na primer v Physical Review, ne uporabljajo nič pogostejše, kot so ga uporabljali pred leti. Da to ni posledica konservativnosti fizikov, pričajo druge enote, ki so se zelo hitro udomačile (na primer nekatere posebne enote v atomski fiziki in v fiziki visokih energij).

Med osnovnimi enotami mednarodnega sestava enot so še vedno meter, kilogram, sekunda, amper. Meter in sekunda sta se v zadnjem času zasidrala z definicijama v svetu atomov. 1 m je definiran kot 1 650 763,73 valovnih dolžin v vakuumu oranžno rdeče svetlobe, ki jo sevajo nemoteni atomi kriptona <sup>86</sup>Kr. 1 s je definirana kot 9 191 631 770 nihajnih časov elektromagnetnega valovanja, ki ga sevajo nemoteni atomi cezija <sup>133</sup>Cs (gre za prehod med stanjema, ki nastaneta s hiperfino razcepitvijo osnovnega stanja). Kilogram je definiran še po starem kot masa telesa, ki ga hranijo v Mednarodnem uradu za uteži in mere (prakilograma).\* Tudi za amper je v veljavi še stara definicija: po dveh zelo dolgih vodnikih v razmiku 1 m teče enak tok 1 A, če deluje drugi vodnik na 1 m dolg odsek prvega vodnika s silo  $2 \cdot 10^{-7}$  N.

---

\* Definicija za kilogram zagotovo ni več posebno posrečena. Težnja, da bi to enoto zasidrali z definicijo v svetu atomov najbrž ni pretirana. Druga stvar je trditev, da je zgrešeno tudi ime enote, češ da bi po njem sodili, da je to desetiški mnogokratnik osnovne enote gram in da je težko delati z njo nove desetiške mnogokratnike, na primer kilokilogram (za tono). Najbolj vneti želijo kilogram preimenoovati v giorgi G.

V zadnjem času je prešlo v navado, da med osnovnimi količinami poleg dolžine, mase, časa in električnega toka navajajo še temperaturo. Enota za temperaturo je kelvin K (in ne več stopinja Kelvina  $^{\circ}\text{K}$ ). 1 K je definiran kot 273,16-ti del temperature trojnega stanja vode. Razmerje dveh temperatur pa je definirano termodinamično s Carnotovo krožno spremembo, a ta definicija se sklada z definicijo s plinskim termometrom. Po novem je na primer enota za entropijo J/K, enota za specifično toploto J/kgK, enota za toplotno prevodnost W/mK.

Druga nova navada je v tem, da štejejo med osnovne količine celo svetilnost v fiziološkem merilu.\* Enota kandela cd je definirana takole: 1 cd je 1/60 svetilnosti v pravokotni smeri  $1\text{ cm}^2$  črnega telesa pri tališču platine pri navadnem tlaku ( $101\,325\text{ N/m}^2$ ). S tem je definirano fiziološko merilo v optiki, za katerega večina fizikov meni, da ni zelo pomembno.

Navedimo še nekaj novih okrajšav za nekatere enote: C za coulomb (As, naboj), H za henry (Vs/A, induktivnost), T za tesla (Vs/m<sup>2</sup>, gostota magnetnega polja).\*\*

Za naše pojme nezaželena novost je mol (angleško mole, enota mol). Ta novost na srečo še ni sprejeta, a primeri se lahko, da bo kmalu. Količina mol je definirana kot množina snovi. Definicija za enoto mol pa je: 1 mol je množina snovi, ki ima tolikšno število gradnikov kot ima 12 gramov ogljika  $^{12}\text{C}$  atomov. Z gradniki so mišljeni atomi, molekule, ioni, elektroni ali atomske skupine. Zaradi tega naj bi uporabljali mol namesto dosedanjih gramatoma, gramekvivalenta ali gramiona. Veliko vprašanje je seveda, zakaj se raje ne zedinijo za tisočkrat večjo enoto (kilomol ali kiloatom). Vse to še ne bi bilo tako nerodno, če ne bi vseboval predlog zahteve, da se enota mol zapiše v enačbah in v enotah. Tako naj bi po novem pisali na primer Avogadrovo število  $6,0 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$ , splošno plinsko konstanto  $8,3\text{ J/molK}$ , Faradayev naboj  $9,6 \cdot 10^4\text{ C/mol}$  itd.

Zadnjemu predlogu se nikakor ne moremo pridružiti. Še naprej bomo definirali kilomol (kiloatom) kot maso snovi, v kateri je tolikšno število molekul (atomov) kot je atomov v 12 kg ogljika  $^{12}\text{C}$ . Ustrezno temu je enota za kilomol (kiloatom) kg, na primer kilomol za vodo je 18 kg. Seveda kilomola v enačbah in v enotah ne bomo zapisali.

Janez Strnad

#### Literatura

- <sup>1</sup> F. Avčin: O vpeljavi Giorgijevega merskega sistema, Obz. mat. fiz. **2**, 50 (1952).
- <sup>2</sup> M. L. McGlashan: Units, Particularly SI Units, Physics Education **4**, 1 (1969), (No. 1).
- <sup>3</sup> C. B. Spurgin: SI Units in School Physics, Physics Education **4**, 12 (1969), (No. 1).
- <sup>4</sup> H. Barrell: Thirteenth General Conference of Weight and Measure, Physics Bulletin **20**, 61 (1969), (No. 2).
- <sup>5</sup> The Use of SI Units in Physics, Physics Bulletin **20**, 58 (1969), (No. 2).

\* Kot pomožne osnovne količine navaja seznam v sestavu enot SI še kot z enoto radian in prostorski kot z enoto steradian.

\*\* Vneti urejevalci predlagajo še uzakonitev enot za tlak pascal P ( $1\text{ P} = 1\text{ N/m}^2$ ) in za električno prevodnost siemens S ( $S = 1/\text{ohm} = 1\text{ »mho«}$ ).

# ŠOLA

## NEKAJ UPORABNE MATEMATIKE ZA SREDNJO ŠOLO

Pri laboratorijskih vajah iz fizike v srednji šoli moramo večkrat poiskati premico ali pa parabolo, ki se najbolje prilega dani množici točk. To naredimo ponavadi kar na oko. Namen naslednjih vrstic je, da nam pokaže, kako bi zastavljeno nalogo opravili kvalitetneje in ne s preveč truda.

Premica je določena z dvema točkama, prav tako pa tudi njena enačba. Če pa imamo več točk, ki vse ne leže točno na isti premici, je seveda vprašanje, kateri par izmed teh točk bi vzeli, da bi napisali enačbo premice, ki se točkam najbolje prilega. Parabola, katere os je vzporedna z ordinatno osjo, je določena s tremi točkami in v primeru, da imamo na razpolago več kot tri točke, ne vemo, katero trojico naj vzamemo, da se bo pripadajoča parabola omenjenim točkam kar najbolje prilegala.

V spomin si pokličimo tole lastnost linearne funkcije: ako tabeliramo linearno funkcijo s korakom stalne širine in izračunamo prve difference funkcije, opazimo, da so le-te konstantne. Velja pa tudi obratno: to lastnost ima le linearna funkcija. Podobno lahko spoznamo, da so pri kvadratni funkciji druge difference konstantne in od nič različne. In analogno kot prej: funkcija, pri kateri so druge difference konstantne in različne od nič, je polinom druge stopnje. Ta spoznanja bi mogli še razširiti na polinome tretje in višjih stopenj.

Očitno je torej, da bo neko funkcijo, ki je dana tabelarično, pametno analitično predstaviti z linearno funkcijo le takrat, kadar so njene prve difference praktično konstantne, s polinomom druge stopnje pa, če so njene druge difference v mejah natančnosti podatkov konstantne ... Kako to storimo, pa si bomo ogledali na naslednjem primeru.

Z meritvijo smo dobili naslednjo tabelo odvisnosti površinske napetosti  $\alpha$  od temperature  $T$ :

| $T/^{\circ}\text{C}$            | 5    | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\alpha/\text{Nm}^{-1} 10^{-3}$ | 74,9 | 74,1 | 73,4 | 72,7 | 72,0 | 71,2 |
| $\Delta$                        | 0,8  | 0,7  | 0,8  | 0,7  | 0,7  |      |

Iz nje spoznamo, da so prve difference praktično konstantne in bo dobro to funkcijo aproksimirati z linearno funkcijo:  $\alpha' = k T + n$ . Vsi zgornji pari vrednosti pa tej linearni zvezi ne morejo zadoščati, zato imamo:

$$\begin{aligned} 74,9 - k \cdot 5 - n &= E_1 \\ 74,1 - k \cdot 10 - n &= E_2 \\ 73,4 - k \cdot 15 - n &= E_3 \\ 72,7 - k \cdot 20 - n &= E_4 \\ 72,0 - k \cdot 25 - n &= E_5 \\ 71,2 - k \cdot 30 - n &= E_6 \end{aligned} \tag{1}$$

kjer so  $E_1, E_2, \dots, E_6$  odkloni meritev od linearne aproksimacije. Razbijmo zgornjo skupino enačb v dve podskupini ter konstanti  $k$  in  $n$  tako določimo, da bo vsota odklonov v prvi in tudi drugi skupini enaka nič,  $k$  in  $n$  sta torej rešitvi enačb:

$$222,4 - 30k - 3n = 0$$

$$215,9 - 75k - 3n = 0$$

ki nam za  $k$  in  $n$  dasta naslednji vrednosti:  $k = -0,14$ ;  $n = 75,6$  in iskana linearna zveza se sedaj glasi:

$$\alpha' = (-0,14 \text{ st } T + 75,6) \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$$

Podobno postopamo, kadar so šele druge difference funkcije  $y = y(x)$ , ki je dana tabelarično, praktično konstantne. V tem primeru bomo iskali funkcijsko zvezo v obliki polinoma druge stopnje:  $y' = ax^2 + bx + c$ . Sistem enačb (1) se sedaj glasi:

$$y_1 - ax_1^2 - bx_1 - c = E_1 \quad (1')$$

kjer je  $y_1 = y(x_1), \dots$

Enačbe (1') bomo v tem primeru razbili v tri skupine, iskane koeficiente pa določili tako, da bo vsota odklonov v vsaki skupini enaka nič. Tako bomo dobili enačbe za tri neznanke  $a$ ,  $b$  in  $c$ . Več v srednji šoli ne pride v poštev, čeprav je razširitev na polinome višjih stopenj očitna. V rabi so, kot je znano, še druge boljše metode, zdi pa se, da je zgornji način najprimernejši za to stopnjo, saj ne zahteva mnogo truda, da se ga dijak nauči, pa tudi pri obdelavi podatkov ne zahteva preveč dela.

Lastnosti, ki smo jih spoznali, moremo prenesti tudi na zaporedja, saj so to funkcije, ki so definirane na množici naravnih števil. Torej moremo  $n$ -ti člen zaporedja  $s_1, s_2, \dots$ , v katerem so  $k$ -te difference konstantne, zapisati v obliki polinoma  $n$   $k$ -te stopnje. Oglejmo si naslednji primer:  $s_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ . Izračunajmo prve, druge in tretje difference te funkcije:

|           | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| $s_{n-1}$ | $n^2$      |            |            |
| $s_n$     | $(n+1)^2$  | $2n+1$     |            |
| $s_{n+1}$ | $(n+2)^2$  | $2n+3$     | 2          |
| $s_{n+2}$ |            |            |            |

Tretje difference so konstantne in od nič različne, zato moremo  $s_n$  zapisati v obliki:  $s_n = an^3 + bn^2 + cn$ , saj je  $d = 0$ , ker je  $s_0 = 0$ . Koeficienta  $a$ ,  $b$  in pa  $c$  moremo določiti iz enačb:  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 5$  in  $s_3 = 14$ , tj.:

$$a + b + c = 1$$

$$8a + 4b + 2c = 5$$

$$27a + 9b + 3c = 14$$

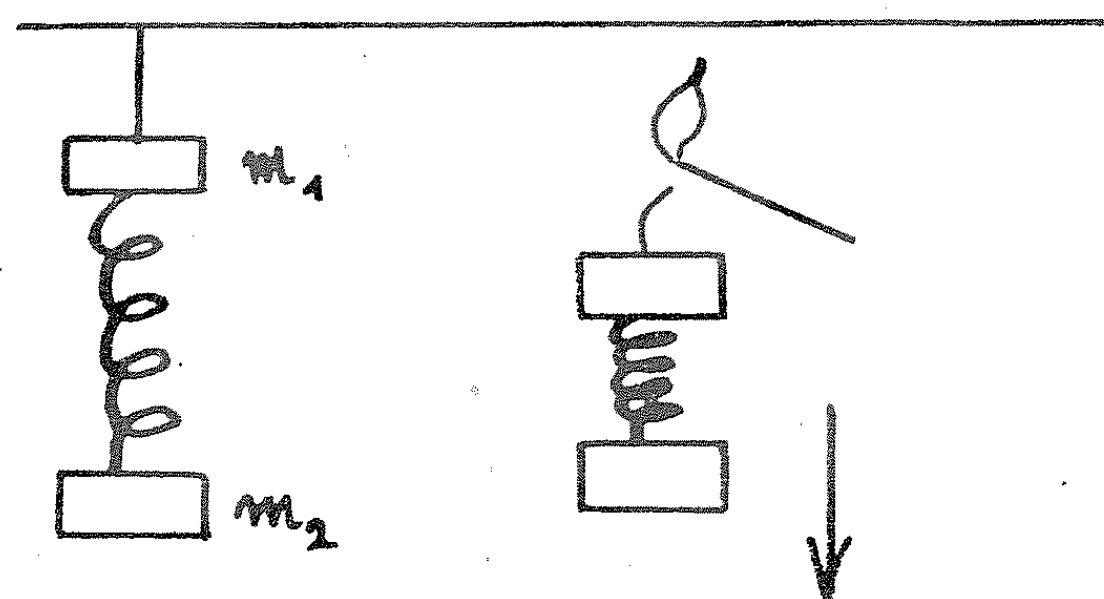
iz česar sledi:  $a = \frac{1}{6}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  in  $c = \frac{1}{3}$  ali  $s_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$ . Podobno lahko izračunamo še vsote:  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  ali pa  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n$ , itd. Če pa matematičnih osnov gornjih postopkov nismo dovolj dobro obdelali, pa lahko dobljene rezultate potrdimo z matematično indukcijo.

*Franč Avsec*

## BREZTEŽNOSTNO STANJE

V javnosti pa tudi med srednješolci vse prepogosto opažamo napačno predstavo o pojmu: breztežnostno stanje. Zdi se mi potrebno, da temu terminu v srednji šoli posvetimo malo več pozornosti. Najprimernejši trenutek, ko naj bi ga obravnavali, bi bil po poglavju, v katerem obravnavamo inercialne sisteme (glej F. Kvaternik, Fizika I, str. 105). Nikakor naj ne bi tega pojma odpravili z eno samo definicijo, z enim samim stavkom, saj od njega v mladih ne ostane prav nič. Ogledati bi si morali predvsem dva neinercialna sistema: prosti pad in enakomerno kroženje okoli Zemlje.

Najprej nekaj besed o sistemu, ki prosto pada. V takem sistemu se pojavlja zaradi pospešenega gibanja sistema vztrajnostna sila. Kako jo opazimo? Zaradi nazornosti opazujemo naslednji poskus: vzmet, na katere koncih se nahajata dve uteži, obesimo z vrvico na stojalo (sl. 1). Vzmet se zaradi teže



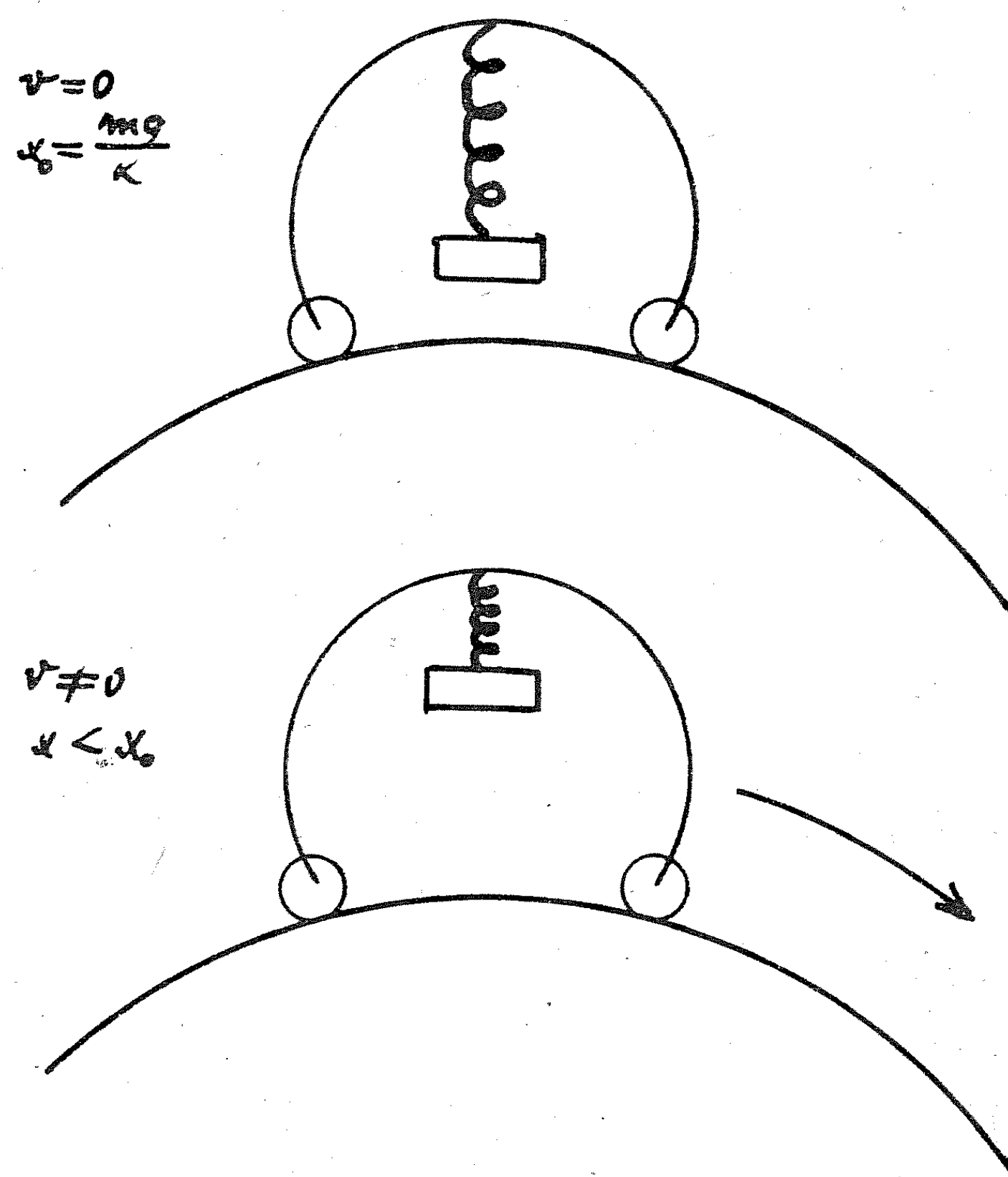
Sl. 1

uteži  $m_2$ , pa tudi zaradi svoje lastne teže deformira, če pa vrvico, na kateri je privezan ta sistem, prežgemo, bo pričel le-ta padati. Opazili bomo, da je deformacija vzmeti med padanjem izginila. V tem sistemu, ki prosto pada, so torej izginile deformacije, ki jih je v mirujočem sistemu povzročala sila teže. Pravimo, da se telesa v sistemu, ki prosto pada, nahajajo v »breztežnostnem stanju«. Opazovalec, ki je zunaj sistema, si to kaj lahko razloži. V začetnem trenutku, ko sta uteži in vzmet z vrvico privezani na stropu, je sistem v ravnotežju: elastični sili vrvice in vzmeti držita ravnotežje s težami uteži, vrvice in vzmeti. Ko pa vrvico prežgemo, pa v prvem trenutku na obe masi  $m_1$  in  $m_2$  deluje poleg sile teže še elastična sila vzmeti, ki deluje na zgornjo maso navpično navzdol, zato se to telo prične gibati s pospeškom, ki je večji od pospeška prostega pada, na spodnjo maso pa deluje elastična sila navzgor, zato pada ta masa s pospeškom, ki je manjši od pospeška prostega pada. Zgornja masa bo dohitevala spodnjo vse dotlej, dokler se ne bo vzmet skrčila do normalne dolžine, po tem trenutku se bosta gibali obe masi naprej z enakim pospeškom, vzmet sama pa se bo nahajala v nedeformiranem stanju.

Oglejmo si še že omenjeni drugi primer. V mislih si predstavljajmo vozilo, ki se enakomerno giblje po glavnem krogelnem krogu okoli Zemlje (glej sl. 2). Na vozičku je na vzmeti s karakteristično konstanto  $k$  obešena masa  $m$ . Ko vagonček miruje, deluje na maso sila teže  $mg$ , ki drži ravnotežje z elastično silo  $kx$ , kjer je  $x$  raztezek vzmeti. Pri enakomernem kroženju pa je elastičnost enaka:

$$kx = mg - m \frac{v^2}{r},$$

kjer je  $r$  radij Zemlje,  $v$  pa hitrost, s katero se giblje voziček. Čim hitreje se bo gibal voziček, tem manjša bo elastična sila vzmeti, za tem manj se bo vzmet raztegnila. Ko bo  $v^2/r = g$  bo izginila na vzmeti deformacija, ki jo je v mirujočem vozičku povzročala sila teže. Sopotnik tega sistema bo potem,



Sl. 2.

ko bo opazil učinke vztrajnostne sile lahko zopet zaključil, da se nahajajo telesa okoli njega v »breztežnostnem stanju«. S posebnim modelom je mogoče prikazati delno zmanjšanje deformacij, vendar ne tako efektno kot v prejšnjem primeru. S te vrste breztežnostnim stanjem se srečamo v umetnih satelitih.

V normalnih pogojih se nahajajo organi našega telesa zaradi sile teže v deformiranem stanju. Pri skoku v vodo, ali pa pri skoku iz aviona, pri vračanju kozmonavtov iz vesolja, pri kroženju kozmonavtov v umetnih satelitih nebesnih teles pa te deformacije izginejo. Izginotje deformacij, na katere smo že navajeni, pa izziva posebno počutje človeka, ki ga imenujemo »občutek breztežnosti«.

Vse prepogosto si otroci pa tudi starejši ljudje pod pojmom »breztežnosti« predstavljajo le stanje teles v nekem breztežnostnem polju, zato se mi zdi potrebno, da te pojme v današnjem času v šoli podrobneje osvetlimo.

*Franc Avsec*

## UTRINEK

**Entropija** ... v termodinamičnem sistemu: veličina energije, ki se ne more spremeniti v mehansko delo, eden izmed osnovnih pojmov klasične fizike.

*F. Verbinc: Slovar tujk, Ljubljana (Cankarjeva založba), 1968*

# DOMAČA VEST

---

## LEP PRIMER SODELOVANJA

V ljubljanski Tovarni aparatov in instrumentov VEGA so nedavno podpisali pogodbo o dolgoročnem sodelovanju z Zavodom za avtomatizacijo pri Združenem podjetju ISKRA ter Institutom za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani.

Sporazum o skupnem raziskovalnem in razvojnem delu na področju optike in elektrooptike so sklenili z namenom, da dosežejo na omenjenih področjih pospešeno ustvarjalnost in s tem nove znanstvene, tehnične in proizvodne rezultate. Sopogodbениki so ustanovili tričlanski strokovni kolegij, ki bo vodil in koordiniral skupno delo ter pripravljал letne programe.

Perspektivni program znanstvenih in raziskovalnih dejavnosti vključuje tudi vzgojo potrebnih strokovnjakov ter njihovo usmeritev v optično in elektrooptično smer v obliki seminarskih nalog in diplomskih del ter samo prilagoditev učnega načrta univerzitetnega študija. Prav tako bo Institut za matematiko, fiziko in mehaniko diplomiranim inženirjem fizike nudil občasne tečaje in organiziral podiplomski študij.

Pri družbeno pomembnejših raziskavah bodo vsi trije partnerji skupno nastopali pri skladih za financiranje, medtem ko bosta Zavod za avtomatizacijo in tovarna VEGA podpirala finančno in materialno predvsem študijsko usmeritev fizikov.

Neslutene možnosti razvoja teh področij ob vedno hitrejšem napredku sodobne tehnike so tudi pri nas postavile pogoj, da si pri uresničevanju zahtevnih nalog znanost in industrija krepko sežeta v roke. Opisani primer zato ne more biti le dogovor na papirju. V vedno daljši vrsti podobnih dogovorov pričale o novi, pravočasni in pravilni odločitvi industrijskega podjetja, da pri načrtovanju gospodarske politike do največje mere izkoristi dosežke znanosti.

*Miro Tozon*

# VPRAŠANJA

1. V raznih zbirkah nalog dobimo formule:

$$S = \sum_k \binom{n}{3k} = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$S = \sum_k \binom{n}{4k+1} = \frac{1}{2} \left( 2^{n-1} + 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \right) \quad \text{itd.}$$

Poskusi rešiti nalogo splošno in sumiraj vrsto:

$$S = \sum_k \binom{n}{kp+m} \quad n, m, p \in \mathbb{N}$$

2. Sumiraj vrste:

$$S(n, k) = \sum_i \binom{n-i}{i} k^i \quad C(n, k) = \sum_i \binom{n}{2i+1} k^i$$

$$Z(n, k) = \sum_i \binom{n}{2i} k^i$$

3. Na neskončni šahovski deski stoji konj. Na koliko različnih polj lahko pride v največ  $n$  skokih?

4. Ali obstaja na šahovski deski  $4 \times 4 = 16$  polj — taka začetna pozicija, da more konj, ki začne v njej, skakati tako, da skoči na vsako polje natanko enkrat?

Vse štiri naloge imajo dokaj elegantne elementarne rešitve.

*Vladimir Batagelj*

5. Dne 31. maja letos je bil planet Mars v opoziciji s Soncem. Od Zemlje je bil oddaljen 0,4867 a. e. (1 a. e. =  $149,6 \cdot 10^4$  m) in je svetil kot zvezda — 2,00 magnitude. Kolikšen je bil tedaj njegov navidezni, tj. kotni polmer? Predpostavi, da vidiš planet kot enakomerno svetlo okroglo ploščico, za katero velja Lambertov zakon. Albedo navidezne Marsove ploščice je 0,10, svetilnost Sonca pa  $3,07 \cdot 10^{27}$  cd.

Med magnitudo nebesnega telesa  $m$  in osvetljenostjo  $E$ , ki jo to telo povzroči na površju Zemlje, velja zveza  $\log E/E' = -0,4(m - m')$ , pri čemer je  $E$  osvetljenost v luksih. Nebesno telo z magnitudo  $-14,18^m$  osvetljuje torej površje Zemlje z enim luksom.

*Marjan Prosen*

# NOVE KNJIGE

---

**J. Strnad: Kvantna fizika.** Mladinska knjiga 1969. 248 str.

Po dolgi vrsti knjižic iz matematike se je v zbirki Sigma pojavila prva knjiga iz fizike. Obenem je to tudi prvi obsežnejši tekst pri nas, ki prikazuje v zaokroženi obliki osnove kvantne fizike.

Kot navaja avtor v uvodu, je knjiga med poljudnim čtivom in učbenikom. Zahteva znanje srednješolske matematike in dobro poznavanje klasične fizike. Večina knjige je posvečena opisovanju in razlagi pojavov, ki nas privedejo do spoznanja, da s klasično fiziko ne moremo v svet mikrododelcev. Na osnovi interferenčnih poskusov s curki delcev in z valovanjem postane verjetnostna amplituda edini način za opisovanje gibanja mikrododelcev. Načelo nedoločenosti, ki sledi iz tega, je avtorju osnova za marsikatero razlago. Posebno poglavje je namenjeno atomom in zgradbi periodnega sistema. Pri tem bralec bežno spozna posledice neločljivosti delcev in izključitveno načelo. V zadnjem poglavju je po analogiji z valovno enačbo izpeljana Schrödingerjeva enačba in dodan še kratek uvod v formalno zgradbo valovne mehanike. Razlago povsod poživljajo lepe in pregledne skice. Velika vrednost so tudi po vsem tekstu smiselno porazdeljeni citati tvorcev kvantne mehanike in drugih znanih fizikov, ki kažejo na vzdušje v času, ko je kvantna mehanika nastajala. Tekst je živahen in lepo tekoč.

Knjigo toplo priporočamo vsem. Učiteljem na srednjih šolah bo lahko koristen pripomoček pri pouku, študentom pa je knjižica namenjena kot dopolnilno branje.

*Marjan Hribar*

**Nastava matematike i fizike.** Serija B: Nastava u srednjim i višim školama i na univerzitetu. Beograd, DMFA SR Srbije.

Zadnja številka te revije je izšla leta 1963. Pred kratkim pa smo prejeli dvojni letnik XIII/XIV za leti 1964 in 1965. Po obvestilu uredništva revije [dr. Đ. Kurepa, dr. M. Ilić-Dajović (glavni in odgovorni urednik), M. Živković] so v tiskarni oz. v pripravi že vsi nadaljni letniki serije A in B do leta 1969. Tako bo Nastava matematike i fizike z obema serijama v letu 1970 lahko pričela redno izhajati.

Vsebina dvojnega letnika, ki obsega 150 strani, je naslednja:

Kolmogorov, A. H.: O poklicu matematika (Za dotok novih številnih in talentiranih mladih kadrov sovjetskih matematikov; Nekaj pripomb k delu matematikov-raziskovalcev; O matematični sposobnosti; Matematični krožki, matematične olimpiade, samostojno čitanje matematične literature, priprave za sprejemne izpite na univerzo; Elementarna in višja matematika; Sodobna numerična matematika in kibernetika).

Dajović, V.: Pomen matematike in njena splošnoizobrazbena vrednost.

Atanasijević, I.: O študentskih praktičnih delih iz astronomije.

Smolec, I.: Vloga učnih načrtov za matematiko pri pouku.

Topolac, Ž. in J. Savić: O mednarodnem sistemu enot.

Stojaković, M.: Uporaba tabel na srednji stopnji pouka matematike.

Ilić-Dajović, M.: O dokazu v matematiki.

Mićić, R.: Aberacije pri leči.

Andžić, N.: Konstrukcija grafa funkcije s pomočjo podobnosti.

Rakić, O.: O neki definiciji konveksne krivulje.

Malešević, J.: Pravilno ortogonalni vektorji trikotnika in nekatere njihove uporabe.

Platiša, M.: Eksperimentalni pouk fizike po PSSC programu.

Čirković, Lj.: Razni načini demonstracije Brownovega gibanja.

Madić, P., N. Parezanović in J. Petrić: Nekateri izkušnje pri delu z diferencialnim analizatorjem Inštituta za nuklearne znanosti »Boris Kidrič«.

Na koncu revije je objavljena bibliografija knjig in revij iz matematike, fizike in astronomije, izdane v tekočem letu.

Revijo lahko naročite na naslov »Nastava matematike i fizike«, Beograd, p. p. 791, naročnino za dvojno številko 10 N-din pa nakažete na ŽR 608-8-1433-10.

*Ciril Velkovich*

**Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques (1966).** Vol. I. Zal. UNESCO, Paris 1967. Obseg: 438 strani, 21 × 27 cm. Broširano 21 F.

V želji, da bi učinkovito pomagali pri reševanju perečih in kočljivih problemov sodobnega pouka fundamentalnih znanosti, so se v UNESCO namenili izdajati dvoletno periodično publikacijo »POUK OSNOVNIH ZNANOSTI«, ki naj bi v posebnih zvezkih obravnavala pouk fizike, kemije, biologije in matematike. Prvi »matematični« zvezek je izšel leta 1966 in je zajetna knjiga z naslovom »NOVI CILJI MATEMATIČNEGA POUKA«, ki jo je pripravila Mednarodna komisija za pouk matematike v tesnem sodelovanju z istoimensko komisijo Mednarodne matematične zveze. Namenjen je učiteljem matematike na visokih in srednjih šolah pa tudi študentom matematike, posebno pedagoške smeri.

V tem zvezku najdemo, za načelnimi uvodnimi mislimi znamenitega francoskega matematika ANDRE-ja LICHNEROWICZ-a, številne prispevke znanih in manj znanih matematikov, poročila komisij za modernizacijo šolske matematike in pregled kongresov, sestankov in seminarjev na mednarodni ravni, ki so se ukvarjali s problemom pouka matematike, v letih 1964 in 1965. Naposled je dodan še pregled središč in periodike, ki se s to problematiko intenzivno zaposlujejo. Izmed prispevkov, ki so bodisi originalni članki ali ponatisi, bodisi referati s kongresov, naj jih omenim le nekaj, ki so po moji sodbi posebno pomembni:

A. DELESSERT: KAJ PRIČAKUJE OD UNIVERZE UČITELJ MATEMATIKE NA SREDNJI ŠOLI?

H. F. FEHR: POUK MATEMATIKE,

CH. PISOT: VPOLJAVNA POJMOV GRUPE, KOLOBARJA IN OBSEGA NA OSNOVI TEORIJE ŠTEVIL,

W. SERVAIS: USKLADITEV POUKA MATEMATIKE IN FIZIKE NA SREDNJI ŠOLI,

G. PAPY: GEOMETRIJA V SODOBNEM MATEMATIČNEM POUKU.

Narava tega zapisa ne dovoljuje podrobnejšega prikaza bogate vsebine publikacije. Vsekakor pa bi bilo zelo prav, če bi se z njo neposredno seznanil čimvečji krog naših učiteljev matematike, saj posreduje tehtna mnenja in dragocene izkušnje iz vsega sveta v zvezi s problemi, ki so tudi pri nas že nekaj časa izredno aktualni. S tem bi bil tudi dejansko dosežen »dober namen«, ki ga ima UNESCO pri izdajanju te vrste dokumentacije.

*Niko Prijatelj*

## OBVESTILO UPRAVE

Tej številki so priložene položnice. Člani Društva matematikov, fizikov astronomov SRS plačajo na tek. račun Obzornika za matematiko in fiziko članarino 10,— din za leto 1969 (Obzornik dobe zastonj!), nečlani pa plačajo naročnino 15,— din za XVI. letnik Obzornika. Za morebitne zaostanke bodo prejeli opomin. Ustanovam in podjetjem bomo poslali račune.

### V LETU 1968 SMO PREJELI NASLEDNJE REVIJE V ZAMENO ZA OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

- Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et physica. Praha 1967, K; 1968, K
- Anale stiintifice ale universitatii »Al. I. Cuza« din Iasi (ser. noua) sec. I. a. Matematica. Iasi 1967, T. 13. F. 2. K; 1968, T. 14. F. 1.
- Analele universitatii Bucuresti. Ser.: mat., mec. Bucurest 1967, a. 16. K
- Analele universitatii din Timisoara. Ser.: mat., fiz. Timisoara 1967. (F.) 5. K
- Annales Academiae scientiarum Fennicae. Ser. A. Mahtematica. Helsinki 1967, Nos 411 do 417. K.; 1968, Nos 418 do 422, 425 do 430, 432, 433.
- Arkiv för Matematik. Stockholm 1968, Bd 7. H. 4, 5.
- Bilten. Sarajevo 1967, br. 10. K; 1968, br. 11. K
- Bilten za društvo na matematičarite i fizičarite od narodna (socialistička) republika Makedonija. Skopje 1966, T. 17. K
- Boletin de la academie de ciencias físicas, matematicas y naturales. Caracas 1967, Anno 27. Nos 75, 76, 77. K; 1968, Anno 28. No. 78.
- Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. Ser 2. Mexico 1966, vol. 11. Nu. 1, 2. K
- Bonner mathematische Schriften. Bonn 1967, Nr. 29. K; 1968, Nr. 30 do 34.
- Bulletin de l'academie Polonaise des sciences. Ser. des sciences mathematiques, astronomiques et physiques. Varsovie 1968, vol. 16. Nus 7, 8, 9, 10, 11, 12.
- Bulletin scientifique. Zagreb 1968, T. 13. Nos 3 do 12.
- Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. Praha 1967, T. 8. No. 4. K; 1968, T. 9. Nos 1, 2, 3.
- Dissertationes mathematicae. Warszawa 1968, T. 57, 58.
- Differencialnye uravnenija. Minsk 1967, T. 3. Vyp. 12. K; 1968, T. 4. Vyp. 1 do 4, 6 do 12.
- Economic computation and economic cybernetics studies and research. Bucaresta 1967, T. 3, 4; 1968 T. 1, 2, 3.
- Elektrotehniški vestnik. Ljubljana 1967, leto 34, št. 9-12. K; 1968, leto 35, št. 1-10. K
- Farmaceutski vestnik. Ljubljana 1968, leto 19, št. 1-12. K
- Fizika. Zagreb 1968, vol. 1. Nu. 1, 2.
- Fotokemijska industrija. Zagreb 1968, g. 15. br. 1, 2, 3, 4. K
- Geologija. Razprave in poročila. Ljubljana 1967. 10. knj. K
- Glasnik matematički. Zagreb 1968, T. 3. K
- Godišen zbornik. Sek. A.: Matematika, fizika i hemija. Skopje 1967, knj. 1.
- Godišnjak filozofskog fakulteta u Novom Sadu. Novi Sad 1967, knj. 10. K
- Idrijski razgledi. Idrija 1968, leto 13. št. 1, 2, 3, 4. K
- Internationale mathematische Nachrichten. Wien 1968, Nr. 88, 89, 90. K
- Journal of the Franklin Institute. Phyladelphia 1967, vol. 284. Nu. 6. K; 1968, vol. 285. Nu. 1, 2, 3, 4, 5, 6. K; vol. 286, Nu. 1, 2, 3, 4.
- The Journal of the Indian Mathematical Society. Madras 1967, Vol. 31. Nos 1, 2, 3, 4. K
- Journal of science of the Hiroshima University. Ser. A. I. Mathematica. Hiroshima 1967, vol. 31. Nu. 2. K; 1968, Vol. 32. Nu. 1.
- Matematički list za učenike osnovne škole. Beograd 1967/1968, g. 2. br. 1, 2, 3, 4, 5. K
- Matematički vesnik — nova serija. Beograd 1967, knj. 4. sv. 4. K; 1968, knj. 5. sv. 1, 2, 3, 4. K.

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XVI. LETNIK — 2. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE  
LJUBLJANA, JUNIJ 1969

---

## VSEBINA

| Članki                                                                | Stran |
|-----------------------------------------------------------------------|-------|
| O realnih številih (N. Prijatelj) . . . . .                           | 49    |
| O odvodu v linearnih topoloških prostorih (J. Grasselli) . . . . .    | 56    |
| Do Schrödingerjeve enačbe — po Feynmanovo (J. Strnad) . . . . .       | 59    |
| Gibljivost elektronov v organskih polprevodnikih (P. Gosar) . . . . . | 78    |
| Novica                                                                |       |
| Novo pri enotah (J. Strnad) . . . . .                                 | 87    |
| Šola                                                                  |       |
| Nekaj uporabne matematike za srednjo šolo (F. Avsec) . . . . .        | 89    |
| Breztežnostno stanje (F. Avsec) . . . . .                             | 91    |
| Utrinek . . . . .                                                     | 92    |
| Domača vest                                                           |       |
| Lep primer sodelovanja (M. Tozon) . . . . .                           | 93    |
| Vprašanja . . . . .                                                   | 94    |
| Nove knjige . . . . .                                                 | 95    |

## CONTENTS

| Articles                                                             | Page |
|----------------------------------------------------------------------|------|
| On Real Numbers (N. Prijatelj) . . . . .                             | 49   |
| Derivation in Linear Topological Spaces (J. Grasselli) . . . . .     | 56   |
| To Schrödinger Equation — after Feynman (J. Strnad) . . . . .        | 59   |
| Mobility of Electrons in Organic Semiconductors (P. Gosar) . . . . . | 78   |
| News                                                                 |      |
| Novelty in Units (J. Strnad) . . . . .                               | 87   |
| School . . . . .                                                     | 89   |
| Home News . . . . .                                                  | 93   |
| Questions . . . . .                                                  | 94   |