

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1968
nik 15
vilka 4

Izdaja društvo matematikov
fizikov in astronomov SR Slovenije

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani

Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani

Cokan Aleksander, VII. gimnazija v Ljubljani

Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani

Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan« v Ljubljani

Pivk Valentin, Gimnazija v Škofji Loki

Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani

Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani

Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije

Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdaja društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujte na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din

za dijake 5 din

za ustanove in podjetja 20 din

za inozemstvo 25 din (2 \$)

posamezna številka 5 din

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko,**
Ljubljana, poštni predal 929. Tel. 55.469. Čekovni račun Obzornika št. 501 0 040/1

O NIHANJU RELATIVNE FREKVENCE DOGODKA OKROG NJEGOVE VERJETNOSTI

RAJKO JAMNIK

Denimo, da ima dogodek A v poskusu X verjetnost p ($0 < p < 1$). Če poskus n -krat ponovimo in se pri tem k -krat zgodi dogodek A , imenujemo število

$$f_n(A) = \frac{k}{n}$$

relativno frekvenco dogodka A v n ponovitvah poskusa. Količina $f_n(A)$ je funkcija števila n , in sicer taka, da prav gotovo ni konstantna na nobeni množici zaporednih naravnih števil: vselej, kadar se zgodi A , se $f_n(A)$ poveča, v vsakem drugem primeru pa se zmanjša. Kot je znano, velja za relativno frekvenco Bernoullijev zakon velikih števil: za vsako pozitivno število ε velja relacija

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_n(A) - p| < \varepsilon) = 1$$

Relativna frekvenca dogodka torej v splošnem niha okrog njegove verjetnosti. V tem sestavku bomo pokazali, kakšne zakonitosti veljajo za to nihanje. Omejili se bomo na najbolj preprost primer, ko je verjetnost dogodka $\frac{1}{2}$.

Ponavljajmo poskus X in pri vsaki ponovitvi ugotovimo, ali je v vseh že opravljenih ponovitvah relativna frekvenca $f_n(A)$ manjša ali večja od $\frac{1}{2}$. Kajpak se lahko primeri, da je pri kakšnem n relativna frekvenca ravno $\frac{1}{2}$. Da bomo imeli vse vrednosti $f_n(A)$ razdeljene le v dva razreda, se domenimo: če je

$$f_{n-1}(A) < \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad f_n(A) = \frac{1}{2}$$

bomo šteli, da je tudi $f_n(A) < \frac{1}{2}$; in prav tako nam bo $f_n(A) > \frac{1}{2}$, kadar je

$$f_{n-1}(A) > \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad f_n(A) = \frac{1}{2}$$

Po tem dogovoru je ali $f_n(A) < \frac{1}{2}$ ali $f_n(A) > \frac{1}{2}$.

Vzemimo, da smo v n ponovitvah poskusa r -krat dobili relativno frekvenco večjo od $\frac{1}{2}$. Količina

$$Q_n = \frac{r}{n} \tag{1}$$

je tedaj slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$$

Naloga, ki smo si jo zastavili, je najprej ta: poiskati porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke Q_n in limitno porazdelitev, h kateri konvergira ta porazdelitveni zakon, ko raste n čez vse meje.

Položaj, ki smo ga očrtali zgoraj, lahko opišemo tudi drugače. Vzemimo, da je na številski premici x delec v točki $x = 0$. Kadar se v poskusu X zgodi dogodek A , premaknimo delec za 1 na desno, kadar pa se zgodi dogodek $\bar{A}$, naj se koordinata delca za 1 zmanjša. Skratka, delec naj se giblje po premici x tako, kot da nanj vplivajo slučajni trki, vsak trk ga prestavi z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ za 1 na desno in z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ za 1 na levo. Tako popotovanje delca imenujemo simetrično slučajno gibanje. V tej ponazoritvi pomeni neenačba $f_n(A) > \frac{1}{2}$, da ima delec po n -tem prehodu pozitivno koordinato, neenačba $f_n(A) < \frac{1}{2}$ pa, da je koordinata delca negativna; in nazadnje je koordinata delca enaka 0, če je $f_n(A) = \frac{1}{2}$. Zaznamujmo koordinato delca po n -tem prehodu z x_n in se domenimo, da bomo šteli koordinato $x_n = 0$ za pozitivno, če je $x_{n-1} > 0$, in za negativno, če je $x_{n-1} < 0$. Ker ne more biti $x_{n-1} = x_n = 0$, so po tem dogovoru vse koordinate ali pozitivne ali negativne. Slučajna spremenljivka Q_n , kot smo jo definirali v (1), je potem delež prehodov, v katerih ima delec pozitivno koordinato.

Slučajno gibanje delca lahko ponazorimo geometrijsko. Vzemimo, da se prehodi delca dogajajo v časovnih presledkih z velikostjo 1 in da je časovna os t abscisna os, premica x pa ordinatna os v koordinatni ravnini. Mogoča stanja delca potem opisujejo točke (n, x_n) v ravnini (t, x) . Če te točke zvežemo z daljicami, dobimo poligonsko črto, ki ji bomo rekli pot delca.

Vpeljimo nekaj pojmov.

Če je $x_n = 0$, imenujemo število n **čas vrnitve** delca v točko $x = 0$. Čas vrnitve je seveda zmeraj sodo število.

Če je

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dots, x_{n-1} \neq 0, x_n = 0$$

se imenuje število n **čas prve vrnitve** v točko $x = 0$.

Če je r naravno število in

$$x_1 < r, x_2 < r, \dots, x_{n-1} < r, x_n = r$$

rečemo, da je število n **čas prvega prihoda** delca v točko $x = r$. Čas prvega prihoda v točko $x = -r$ se definira na analogen način.

Domenimo se za oznake

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$v_0 = 0 \quad v_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

Za vsako naravno število n velja relacija

$$u_{2n-2} - u_{2n} = v_{2n} \quad (4)$$

Res:

$$\begin{aligned} u_{2n-2} - u_{2n} &= \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \frac{4n^2 (2n-2)! - (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \\ &= \frac{(2n-2)! (4n^2 - 2n(2n-1))}{(n!)^2 2^{2n}} = \frac{(2n-2)! 2n}{4n^2 ((n-1)!)^2 2^{2n-2}} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}} = \\ &= \frac{1}{2n} u_{2n-2} = v_{2n} \end{aligned}$$

IZREK 1. Verjetnost za to, da je število $2n$ čas vrnitve, je

$$P(x_{2n} = 0) = u_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

Res je. Pot, ki veže točki $(0, 0)$ in $(2n, 0)$, je sestavljena iz $2n$ daljic, se pravi iz $2n$ prehodov. Ker so ti med seboj neodvisni in se pri vsakem od njih delec ali za 1 dvigne ali za eno spusti, oboje z verjetnostjo po $\frac{1}{2}$, je verjetnost vsake take poti 2^{-2n} . Nadalje je vsaka taka pot sestavljena iz n dvigov in n padcev, tako da obstaja $\binom{2n}{n}$ različnih poti iz točke $(0, 0)$ v točko $(2n, 0)$. Torej je verjetnost, da katera koli pot po $2n$ korakih privede delec spet v točko $x = 0$, enaka $\binom{2n}{n} 2^{-2n}$. To in definicija (2) pa že da formulo (5).

IZREK 2. Za vsako naravno število n je

$$P(x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{2n-1} > 0, x_{2n} = 0) = \frac{1}{2} v_{2n} \quad (6)$$

Za dokaz poštejmo, koliko izmed 2^{2n} mogočih poti, sestavljenih iz $2n$ daljic, gre iz točke $(0, 0)$ v točko $(2n, 0)$ tako, da so vsa vmesna oglišča nad osjo t . Te poti vežejo točko $(1, 1)$ s točko $(2n-1, 1)$ tako, da je $x_k \geq 1$ ($k = 2, 3, \dots, 2n-2$). Vsaka pot med tema dvema točkama je sestavljena iz $2n-2$ daljic, in sicer se mora $(n-1)$ -krat dvigniti in prav tolikokrat spustiti, da bo $x_1 = x_{2n-1} = 1$. Vseh poti med $(1, 1)$ in $(2n-1, 1)$ je torej $\binom{2n-2}{n-1}$, toda od njih ne pridejo v poštev tiste, ki kdaj zadenejo os t . Vsaki prepovedani poti lahko priredimo natanko eno novo pot takole: do prvega sečišča z osjo t naj se obe poti ujemata, od tam naprej pa sta si simetrični glede na os t . Prireditvev je očitno na obe strani enolična, tako da je novih poti prav toliko kot prepovedanih. Ker se nova pot začne v točki $(1, 1)$ in konča v točki $(2n-1, -1)$, se mora $(n-2)$ -krat dvigniti in n -krat spustiti, zato je prepovedanih poti $\binom{2n-2}{n}$, dovoljenih pa

$$\begin{aligned} \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} = \\ &= \frac{(2n-2)!(n-n+1)}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

Ker je verjetnost vsake poti, sestavljene iz $2n$ daljic, 2^{-2n} , je torej

$$\begin{aligned} P(x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{2n-1} > 0, x_{2n} = 0) &= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{(2n-2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2n} u_{2n-2} = \frac{1}{2} v_{2n} \end{aligned}$$

in relacija (6) je potrjena.

IZREK 3. Verjetnost, da je $2n$ čas prve vrnitve, je v_{2n} :

$$P(x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dots, x_{2n-1} \neq 0, x_{2n} = 0) = v_{2n} \quad (7)$$

Dogodek, da je $2n$ čas prve vrnitve, je namreč sestavljen iz dveh nezdružljivih načinov: ali je delec pred vrnitvijo v točko 0 vseskozi na pozitivni

strani ali pa je neprekinjeno na negativni strani točke $x = 0$. Verjetnost prvega načina je dana s formulo (6), prav taka pa je tudi verjetnost drugega načina, saj je gibanje simetrično. Vsota verjetnosti obeh načinov je res ravno v_{2n} .

IZREK 4. Za vsako naravno število n je

$$P(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_{2n-2} \geq 0, x_{2n-1} < 0) = v_{2n} \quad (8)$$

Dokaz. Upoštevajmo, da more biti $x_{2n-2} \geq 0$ in $x_{2n-1} < 0$ le, če je $x_{2n-2} = 0$ in $x_{2n-1} = -1$. Od poti, sestavljenih iz $2n-1$ daljic (verjetnost vsake take poti je $2^{-(2n-1)}$) so za dogodek v relaciji (8) ugodne tiste, ki vežejo točko $(0, 0)$ s točko $(2n-2, 0)$ in se ne spustijo pod os t . Tako kot v dokazu izreka 2 se ugotovi, da je teh poti

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

Torej je

$$\begin{aligned} P(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_{2n-2} \geq 0, x_{2n-1} < 0) &= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-(2n-1)} = \\ &= \frac{1}{2n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-(2n-2)} = v_{2n} \end{aligned}$$

in relacija (8) je potrjena.

Od tod bomo brž dobili

IZREK 5. Za vsako naravno število n velja relacija

$$P(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_{2n} \geq 0) = u_{2n} \quad (9)$$

Za dokaz zaznamujmo na kratko

$$D = (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_{2n} \geq 0)$$

Torej je D dogodek, da delec do trenutka $2n$ ne pride v točko $x = -1$. Naj bo $\bar{D}$ nasproten dogodek, da je delec do trenutka $2n$ vsaj enkrat v točki $x = -1$. To se lahko zgodi ali tako, da je prvič v trenutku $t = 1$, ali tako, da je prvič v trenutku $t = 3$, in tako naprej, ali tako, da je prvič v trenutku $t = 2n-1$. To so vsi mogoči načini dogodka $\bar{D}$, in očitno je, da so paroma nezdružljivi. Od tod in iz relacije (8) sledi, da je

$$P(\bar{D}) = v_2 + v_4 + \dots + v_{2n}$$

Upoštevajmo, da je $u_0 = 1$, in relacijo (4), pa dobimo

$$P(\bar{D}) = (1 - u_2) + (u_2 - u_4) + \dots + (u_{2n-2} - u_{2n}) = 1 - u_{2n}$$

Torej je

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = u_{2n}$$

tako kot smo trdili.

IZREK 6. Za vsako naravno število n je

$$u_{2n} = \sum_{s=1}^n v_{2s} u_{2n-2s} \quad (10)$$

To bomo sprevideli takole. Če se delec v trenutku $t = 2n$ vrne v točko $x = 0$, je trenutek prve vrnitve, recimo $2s$, manjši ali kvečjemu enak $2n$. Iz formule (7) sledi, da je poti, ki privedejo v točko $x = 0$ prvič po $2s$ korakih, $2^{2s} v_{2s}$. Iz formule (5) pa se vidi, da je med točkama $(2s, 0)$ in $(2n, 0)$ mogočih $2^{2n-2s} u_{2n-2s}$ različnih poti. Torej je takih poti, ki se prvič vrnejo v točko $x = 0$ v trenutku $t = 2s$ in so v času $t = 2n$ spet v točki $x = 0$,

$$2^{2s} v_{2s} \cdot 2^{2n-2s} u_{2n-2s} = 2^{2n} v_{2s} u_{2n-2s}$$

Vse poti med točkama $(0, 0)$ in $(2n, 0)$ dobimo, če upoštevamo vse s od 1 do n . Torej jih je

$$2^{2n} \sum_{s=1}^n v_{2s} u_{2n-2s}$$

Če pomnožimo to število z verjetnostjo 2^{-2n} vsake poti, sestavljene iz $2n$ daljic, dobimo verjetnost $P(x_{2n} = 0)$, ta pa je po formuli (5) ravno u_{2n} . S tem je relacija (10) potrjena.

Vzemimo zdaj, da so vse lege delca v prvih $2n$ prehodih klasificirane kot pozitivne ali negativne, tako kot smo se domenili v začetku sestavka, in dokažimo

IZREK 7. Naj bo $p_{2r, 2n}$ verjetnost dogodka, da ima delec v prvih $2n$ prehodih $2r$ -krat pozitivno koordinato in $(2n - 2r)$ -krat negativno; za to verjetnost velja relacija

$$p_{2r, 2n} = u_{2r} u_{2n-2r} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; r = 0, 1, \dots, n) \quad (11)$$

Za dokaz najprej poudarimo, da je čas, ki ga delec prebije na pozitivnem delu osi x , v sodem številu korakov gotovo sod.

Zapišimo formulo (9) v obliki

$$p_{2n, 2n} = u_{2n}$$

To je že relacija (11) za $r = n$. Ker je slučajno gibanje simetrično, je kajpak tudi

$$p_{0, 2n} = u_{2n}$$

in relacija (11) je potrjena tudi za $r = 0$. Torej jo je treba preveriti le še za $r = 1, 2, \dots, n - 1$.

Delec, ki prebije čas $2r > 0$ na pozitivnem delu osi x in čas $2n - 2r > 0$ na njeni negativni strani, gre do trenutka $t = 2n$ vsaj enkrat skozi točko $x = 0$. Vzemimo, da je $2s$ čas prve vrnitve v nič, in razdelimo vse poti delca, kar jih pride v poštev, v dva razreda. V prvi razred denimo poti, ki so v presledku $0 < t < 2s$ vseskozi na pozitivnem delu osi x , v presledku $2s < t < 2n$ pa so na pozitivnem delu natanko $2r - 2s$ korakov; pri tem je seveda $1 \leq s \leq r$. Takih poti, sestavljenih iz $2s$ daljic, ki prvič zadenejo os t v točki $t = 2s$, je (po izreku 3) $2^{2s} v_{2s}$. Od njih jih je polovica nad osjo t . Poleg tega je po definiciji verjetnosti $p_{2r, 2n}$ takih poti, sestavljenih iz $2n - 2s$ daljic, ki se začnejo v točki

$(2s, 0)$ in imajo nad osjo t natanko $2r - 2$ daljic, $2^{2n-2s} p_{2r-2s, 2n-2s}$. Potemtakem je v prvem razredu

$$\frac{1}{2} 2^{2s} v_{2s} 2^{2n-2s} p_{2r-2s, 2n-2s} = 2^{2n-1} v_{2s} p_{2r-2s, 2n-2s}$$

poti. Drugi razred sestavljajo poti, ki so v presledku $0 < t < 2s$ pod osjo t , v presledku $2s < t < 2n$ pa $2r$ korakov nad njo. Tu je $r \leq n - s$, se pravi $1 \leq s \leq n - r$, in s podobnim premislekom kot za prvi razred ugotovimo, da je v drugem razredu

$$2^{2n-1} v_{2s} p_{2r, 2n-2s}$$

poti. Vsaka pot je sestavljena iz $2n$ daljic, tako da je njena verjetnost 2^{-2n} . Ker je v prvem razredu $1 \leq s \leq r$ in v drugem $1 \leq s \leq n - r$, je za vsak r od 1 do $n - 1$

$$p_{2r, 2n} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r v_{2s} p_{2r-2s, 2n-2s} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-r} v_{2s} p_{2r, 2n-2s} \quad (12)$$

Vzemimo, da je relacija

$$p_{2r, 2m} = u_{2r} u_{2m-2r}$$

že dokazana za $m = 1, 2, \dots, n - 1$ in za vsak mogoč r . Tedaj lahko prevedemo formulo (12) v obliko

$$p_{2r, 2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2r} \sum_{s=1}^r v_{2s} u_{2r-2s} + \frac{1}{2} u_{2r} \sum_{s=1}^{n-r} v_{2s} u_{2n-2r-2s} \quad (13)$$

Zaradi (10) je

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^r v_{2s} u_{2r-2s} &= u_{2r} \\ \sum_{s=1}^{n-r} v_{2s} u_{2n-2r-2s} &= u_{2n-2r} \end{aligned}$$

Če to dvojje vstavimo v (13), dobimo

$$p_{2r, 2n} = u_{2r} u_{2n-2r}$$

Torej velja relacija (11) tudi za $m = n$, če velja za vsak $m < n$. Pri $m = 1$ je ali $r = 0$ ali $r = 1$ in formula (11) ima obliko

$$p_{0,2} = u_2 \quad \text{ali} \quad p_{2,2} = u_2$$

Kot smo se že prepričali, veljata ti dve zvezi zaradi izreka 5. Potemtakem velja relacija (11) pri vsakem naravnem številu n in za vsak cel r od 0 do n . Izrek 7 je dokazan.

Naj bo Q_n slučajna spremenljivka, definirana z (1). Zanj pomeni izrek 7:

Za vsako naravno število n je

$$P\left(Q_n = \frac{r}{n}\right) = \binom{2r}{r} \binom{2n-2r}{n-r} 2^{-2n} \quad (r = 0, 1, \dots, n) \quad (14)$$

To je torej porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke Q_n . Pri količkah velikem n je za uporabo kaj malo primeren. Pri velikih n pa si lahko pomagamo z limitno porazdelitvijo, proti kateri konvergira porazdelitev (4), ko rase n čez vse meje. Poiščimo to limitno porazdelitev.

IZREK 8. Za vsak y ($0 \leq y \leq 1$) velja relacija

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(0 \leq Q_n < y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{y} \quad (15)$$

Dokaz. Če uporabimo Stirlingovo formulo

$$s! = \sqrt{2\pi s} \left(\frac{e}{s}\right)^s e^{t_s} \quad \left(0 < t_s < \frac{1}{12s}\right)$$

ki velja za vsako naravno število s , dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} \sqrt{\pi n} = 1 \quad (16)$$

Naj raseta r in $n - r$ čez vse meje. Zaradi (16) je

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} u_{2r} \sqrt{\pi r} &= 1 \\ \lim_{n-r \rightarrow \infty} u_{2n-2r} \sqrt{\pi(n-r)} &= 1 \end{aligned}$$

To dvoje in (11) nam da

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ n-r \rightarrow \infty}} p_{2r, 2n} \pi \sqrt{r(n-r)} = 1$$

Potemtakem velja pri velikih r in $n - r$ približna formula

$$p_{2r, 2n} \approx \frac{1}{\pi \sqrt{r(n-r)}}$$

Vzemimo poljuben y med $\frac{1}{2}$ in 1. Verjetnost $P(\frac{1}{2} < Q_n < y)$ je pri velikem n zaradi (17) približno

$$P(\tfrac{1}{2} < Q_n < y) = \sum p_{2r, 2n} = \frac{1}{\pi n} \sum \left(\frac{r}{n} \left(1 - \frac{r}{n} \right) \right)^{-1/2} \quad (18)$$

V obeh vsotah (18) je treba seštevati po vseh r med $n/2$ in ny . Zadnja vsota v (18) je Riemannova vsota funkcije $\pi^{-1} (x(1-x))^{-1/2}$ za delitev intervala $\frac{1}{2} \leq x \leq y$ na podintervale, od katerih nima nobeden dolžine večje od n^{-1} . Pri $n \rightarrow \infty$ gredo torej dolžine vseh podintervalov proti 0, in ker je poleg tega funkcija zvezna, obstaja limita integralske vsote na desni strani relacije (18). Potemtakem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tfrac{1}{2} < Q_n < y) = \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^y \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{y} - \tfrac{1}{2} \quad (19)$$

Ker imamo opraviti s simetričnim slučajnim gibanjem, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n \leq \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \quad (20)$$

Iz (19) in (20) pa že sledi relacija (15), ki smo jo hoteli dokazati.

Izrek 8 je tako imenovani arkussinusni zakon. Prvi ga je odkril Paul Lévy¹ pri nekih zveznih difuzijskih procesih. Izrek je mogoče razširiti na dosti sploš-

¹ P. Lévy, Sur certains processus stochastiques homogènes, Comp. Math. 7 (1939), str. 283—339.

nejše situacije, kot jo obravnavamo v tem sestavku. Tako sta Erdős in Kac² dokazala tole: Naj bodo slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \dots$ med seboj neodvisne in naj imajo vse matematično upanje 0 in disperzijo 1, pa zanje naj velja centralni limitni izrek. Postavimo pri vsakem n

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

in naj bo Q_n delež pozitivnih števil v zaporedju $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$; pri tem štejemo $Z_k = 0$ za pozitivno, če je $Z_{k-1} > 0$, in za negativno, če je $Z_{k-1} < 0$. Za tako definirano spremenljivko Q_n velja relacija (15). Sparre-Andersen pa je ugotovil³, da velja (1) tudi v primeru, ko so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \dots$ med seboj neodvisne in vse porazdeljene po istem simetričnem porazdelitvenem zakonu, celo če nimajo končne disperzije.

Gostota porazdelitve (15)

$$p(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}}$$

ima minimum v točki $y = \frac{1}{2}$. Torej je pri velikem n najmanj verjetno, da bo relativna frekvenca dogodka približno enako dolgo večja kot manjša od njegove verjetnosti. Na prvi pogled se to ne ujema z našim pričakovanjem, natančnejši premislek pa pokaže, da mora biti tako: vrednost Q se spreminja le počasi, zato je verjetneje, da ne prekorači vrednosti $\frac{1}{2}$, kot da se to zgodi.

V tem pogledu je zanimiv še en rezultat.

IZREK 9. Slučajna spremenljivka N_{2n} naj bo število trenutkov, v katerih je v $2n$ poskusih $Q_k = \frac{1}{2}$. Pri vsakem naravnem številu n je ta spremenljivka porazdeljena po zakonu

$$w_{2n}^{(r)} = P(N_{2n} = r) = \binom{2n-r}{n} 2^{r-2n} \quad (r = 0, 1, \dots, n) \quad (21)$$

Dokaz. Ponavljanje poskusa bomo spet obravnavali kot simetrično slučajno gibanje po premici. V takem tolmačenju je slučajna spremenljivka N_{2n} število vrnitev v nič v $2n$ prehodih.

Zaznamujmo s C dogodek, da se delec v $2n$ prehodih ne vrne v nič,

$$C = (x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dots, x_{2n} \neq 0)$$

in pokažimo, da je

$$P(C) = u_{2n} \quad (22)$$

pri čemer ima u_{2n} pomen (2). V ta namen si oglejmo nasproten dogodek $\bar{C}$, da se v $2n$ prehodih delec vsaj enkrat vrne v nič. To se lahko zgodi tako, da

² P. Erdős-M. Kac, On the number of positive sums of independent random variables, Bull. Am. Math. Soc. 53 (1947), str. 1011—1020.

³ E. Sparre-Andersen, On the number of positive sums of random variables, Skand. Akturietidskrift 1949, str 27—36.

je čas prve vrnitve ali 2 ali 4 in tako naprej ali $2n$. To so vsi mogoči načini dogodka $\bar{C}$ in med seboj so paroma nezdružljivi. Po formulah (7) in (4) je

$$P(\bar{C}) = v_2 + v_4 + \dots + v_{2n} = (1 - u_2) + (u_2 - u_4) + \dots + (u_{2n-2} - u_{2n}) = 1 - u_{2n}$$

Od tod takoj sledi relacija (22), ki smo jo hoteli potrditi.

Relacija (22) in izrek 1 kažeta, da je med potmi, ki so sestavljene iz sodega števila prehodov in se začnejo v nič, prav toliko takih, ki se tudi končajo v nič, kot takih, ki se sploh ne vrnejo v nič.

Oglejmo si pot, sestavljeno iz $2n$ daljic, ki r -krat zadene abscisno os, ki se torej r -krat povrne v nič. To se lahko zgodi ali v trenutku $t = 2n$ ali pa prej. Če se to zgodi v trenutku $2n - 2k < 2n$, se mora pot nadaljevati tako, da več ne zadene abscisne osi, takih nadaljevanj pa je po prejšnjem odstavku prav toliko kot poti med točkama $(2n - 2k, 0)$ in $(2n, 0)$. Potemtakem je verjetnost dogodka, da je v $2n$ prehodih natanko r vrnitev v nič, enaka verjetnosti dogodka, da se pot, sestavljena iz $2n$ korakov, konča v točki $(2n, 0)$ in pred tem vsaj $(r - 1)$ -krat zadene abscisno os. Če zaznamujemo s $p_{2n}^{(m)}$ verjetnost dogodka, da se pot z $2n$ koraki konča v nič in pred tem natanko $(m - 1)$ -krat vrne v nič, je torej

$$w_{2n}^{(r)} = p_{2n}^{(r)} + p_{2n}^{(r+1)} + \dots + p_{2n}^{(n)} \quad (23)$$

Pokažimo, da je pri $m = 0, 1, \dots, n$

$$p_{2n}^{(m)} = \frac{m}{2n - m} \binom{2n - m}{m} 2^{m-2n} \quad (24)$$

To bomo sprevideli takole. Vzemimo si pot, ki v trenutku $t = 2n - m$ prvič doseže točko $x = m$ ($m > 0$), in ji priredimo novo pot takole: vselej, ko prvotna pot prvič doseže točko $x = s$ ($0 \leq s \leq m - 1$), napravimo korak v negativno smer. Tako dobimo iz vsake prejšnje poti natanko eno novo, ta pa je sestavljena iz $2n$ daljic, na abscisni osi ima natanko m oglišč, zadnje v točki $(2n, 0)$, sicer pa poteka vsa pod abscisno osjo.

Poštejmo, koliko je poti, po katerih je trenutek $t = 2n - m$ čas prvega prihoda v točko $x = m$ ($m > 0$). Vsaka taka pot veže točko $(0, 0)$ s točko $(2n - m - 1, m - 1)$, torej se do tod $(n - 1)$ -krat dvigne. Zato je vseh poti med točkama $(0, 0)$ in $(2n - m - 1, m - 1)$

$$\binom{2n - m - 1}{n - 1}$$

Od njih ne pridejo v poštev tiste, ki že pred trenutkom $t = 2n - m$ kdaj dosežejo točko $x = m$. Vsaki prepovedani poti lahko priredimo novo pot tako, da staro pot od točke, ko ta prvič doseže premico $x = m$, zrcalimo na tej premici. Nova pot se konča v točki $(2n - m - 1, m + 1)$ in se zato n -krat dvigne. Ker je preslikava med starimi in novimi potmi na obe strani enolična, je prepovedanih poti $\binom{2n - m - 1}{n}$, dovoljenih pa

$$\binom{2n - m - 1}{n - 1} - \binom{2n - m - 1}{n} = \frac{m}{2n - m} \binom{2n - m}{n}$$

Vsako tako pot smo v prejšnjem odstavku preslikali v natanko eno pot iz $2n$ korakov, ki je vsa pod abscisno osjo in ima na njej poleg začetne in končne točke še $m - 1$ oglišč. Taka pot razpade v m odsekov med dvema zaporednima ogliščema na abscisni osi. Če jo na kateremkoli odseku zrcalimo na abscisni osi, spet dobimo pot, ki ima med začetno in končno točko, ki sta na abscisni osi, še $m - 1$ skupnih točk z abscisno osjo. Ker je za zrcaljenja 2^m mogočih kombinacij, je torej vseh poti iz $2n$ korakov, ki se v trenutku $t = 2n$ natanko m -tič vrnejo v nič,

$$\frac{m}{2n - m} \binom{2n - m}{n} 2^m$$

Verjetnost dogodka, da je $t = 2n$ trenutek m -te vrnitve v nič, pa je potem

$$\frac{m}{2n - m} \binom{2n - m}{n} 2^{m-2n}$$

in relacija (24) je potrjena.

Verjetnost $p_{2n}^{(m)}$ je mogoče zapisati tudi takole:

$$p_{2n}^{(m)} = \frac{1}{2^{2n-m}} \binom{2n - m}{n} - \frac{1}{2^{2n-m-1}} \binom{2n - m - 1}{n} \quad (25)$$

Če vstavimo (25) v (23), dobimo (21) in izrek 9 je dokazan.

Lahek račun pokaže, da je za $r = 0, 1, \dots, n - 1$

$$w_{2n}^{(r+1)} = \frac{2n - 2r}{2n - r} w_{2n}^{(r)}$$

Od tod sledi, da je

$$w_{2n}^{(0)} = w_{2n}^{(1)} > w_{2n}^{(2)} > \dots > w_{2n}^{(n)}$$

Najverjetnejši števili vrnitev v nič (ali trenutkov, v katerih je relativna frekvenca dogodka enaka njegovi verjetnosti), sta torej 0 in 1.

Tudi za porazdelitev (21) obstaja limitni izrek. Brez dokaza povejmo, da je za vsak pozitiven y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{N_{2n}}{\sqrt{2n}} < y \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

Od tod se vidi, da je pri velikih n matematično upanje $E(N_{2n})$ slučajne spremenljivke N_{2n}

$$E(N_{2n}) \approx \sqrt{\frac{4n}{\pi}}$$

To pomeni, da postaja povprečna gostota vrnitev v nič z rastočim n vedno manjša.

DVOJNA REŽA PRI MERITVAH ZVEZDNIH PREMEROV

MARIJAN PROSEN

1. UVOD

Lastnosti zvezde podamo z določenim številom parametrov. Eden izmed njih je zvezdin premer. Ta označuje velikost zvezde in je značilen podatek za opis, ugotovitev sestava in razvojne stopnje zvezde. Merjenja zvezdnih premerov so zato pomembna naloga astrofizike.

Do sredine prejšnjega stoletja niso vedeli praktično ničesar o oddaljenosti in velikosti zvezd.* Razdalje do zvezd so do tega časa cenili prenizko. Mnogo

TABELA 1

Navidezna magnituda zvezde*	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	5 ^m	6 ^m
Astronom						
Cardano (sredina 16. st.)	480"	360"	240"	180"	120"	60"
T. Brahe (konec 16. st.)	120	90	65	45	30	20
Riccioli (sredina 17. st.)	15	10	7	6	5	4
Hevelij (konec 17. st.)	6	5	4	3	2,5	2

Ta tabela prikazuje, kako so nekateri starejši astronomi ocenili zorne kote zvezd različnih navideznih magnitud. *Cardano* in *Brahe* nista poznala daljnogleda, *Riccioli* in *Hevelij* pa sta ga že uporabljala.

* Navidezna zvezdina magnituda je mera za velikost vtisa, ki ga povzroči svetloba zvezde na mrežnici našega očesa. V starem veku so razdelili vse zvezde, vidne s prostim očesom, na šest razredov (*Ptolemej*, 2. stol. n. št.). Najsvetlejše zvezde so bile prve magnitude (razreda; 1^m), komaj vidne pa šeste magnitude (6^m). Ta razdelitev je ostala v rabi več kot poldrugo tisočletje. Po izumu daljnogleda so pozneje skalo raztegnili na obe strani. Odvisnost med zvezdino magnitudo m in osvetljenostjo, ki jo zvezda povzroči na površju Zemlje E , je podana z zvezo $\log (E/E') = -0,4(m - m')$, kjer je E' osvetljenost zvezde z magnitudo m' (*N. Pogson*, 1857). Zvezda z magnitudo $m' = -14,18^m$ osvetljuje površje Zemlje z $E' = 1 \text{ lx}$. Neposredna zveza med m in E (v luksih) je potem $\log E = -5,672 - 0,4m$ (*Ch. Fabry*, 1903).

* Prvo oddaljenost zvezde so določili v tridesetih letih preteklega stoletja, prvi premer pa po prvi svetovni vojni (glej dalje!).

starejših astronomov, ki še niso poznali daljnogleda ali pa so živeli v dobi tik po njegovem izumu in uvedbi v astronomsko prakso, je zato menilo, da bi bilo možno s prostim očesom ali s preprostim daljnogledom določiti premere zvezd. Tudi na oko se zdijo svetlejšje zvezde večje. Ni čudno, da so pripisovali najsvetlejšim zvezdam največje razsežnosti. Po opazovanju z očmi se je kot mera za velikost zvezde tako izoblikoval pojem zornega kota ali kotnega premera zvezde.

Tudi Kepler je sprva mislil, da vidimo najsvetlejšje zvezde z največjim zornim kotom (npr. zorni kot Sirija je cenil na približno štiri kotne minute*). Toda pozneje, ko je imel daljnogled, se je tej misli odrekel: »zvezde nimajo zaznavnih premerov in so popolne pike (*punctae merae*)«. Nadaljnje izkušnje z daljnogledi so pokazale, da so zorni koti zvezd zelo majhni. Hooke in Halley sta skoraj istočasno iz opazovanj ocenila, da so zorni koti zvezd pod eno kotno sekundo. W. Herschel je uporabil pri svojih »sprehodih po nébesu« zelo močne daljnogleda tudi z namenom, da bi ugotovil, če imajo zvezde merljive premere. Ko je opazil, da so interferenčne slike zvezd vse manjše, čim močnejše daljnogleda je uporabil, je menil, da se z daljnogledom ne da izmeriti zornih kotov zvezd.

Pozneje so astronomi skušali določiti premere zvezd po računski poti. Ti hipotetični izračuni pa so nenatančni, saj temeljijo na predpostavkah, da sevajo zvezde kot svetila na Zemlji. Proti koncu 19. stoletja je obravnaval ta problem E. C. Pickering, v začetku našega stoletja pa Nordmann, Wilsing in nato Hertzsprung, Eddington, Russell in drugi.

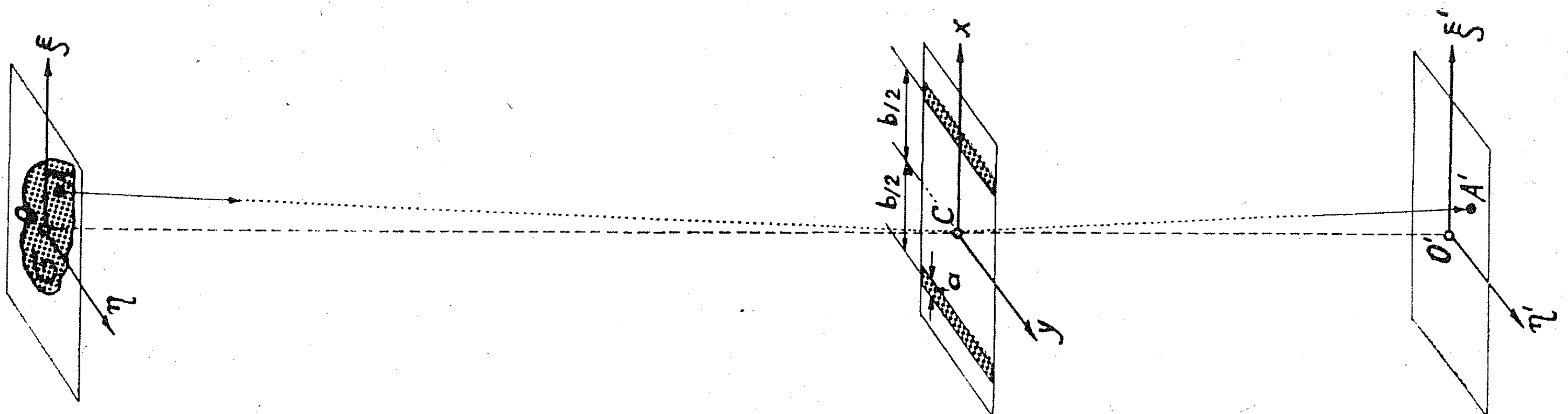
Vsi so želeli izmeriti zvezdam premere, toda ni jim uspelo. Že pred sto leti je bil znan način, po katerem bi te meritve izvedli. Čakati pa je bilo treba do 1920, da se je razvila tehnika opazovalnih meritev (glej dalje!).¹

2. TEORIJA INTERFEROMETRIČNIH MERITEV

a) Osvetljenost v goriščni ravnini objektiva

Metoda interferometričnih meritev je tako pomembna, da jo velja obravnavati nekoliko obširneje.

Zanima nas osvetljenost v interferenčni sliki svetila, katerega svetloba pada na dvojno režo, ki je tik pred objektivom daljnogleda. Vzemimo najprej



Sl. 1. Svetilo je v ravnini $\xi\eta$. V ravnini xy sta reži. Od koordinatnega središča je vsaka reža oddaljena za $b/2$. Tik pod njo je zbiralna leča, ki ima veliko goriščno razdaljo. Interferenčno sliko svetila opazujemo v ravnini $\xi'\eta'$

* Vrednost za zorni kot zvezde Sirij glej v notici »Nove meritve zvezdnih premerov« v tej številki Obzornika.

točkasto svetilo stalne svetilnosti! Svetloba točkastega svetila npr. točka A na ravnini $\xi \eta$ (sl. 1) da po prehodu skozi enaki, pravokotniški in paralelni reži (širine a in razmika b) v goriščni ravnini objektiva v ravnini $\xi' \eta'$ določeno osvetljenost. Razdalje med vsemi tremi ravninami so zelo velike, tako da velja Fraunhoferjev uklon. Upoštevajmo še, da je dolžina rež tako velika v primerjavi s širino, da ni treba misliti na odvisnost osvetljenosti od η' . Zanimale nas bodo namreč le spremembe v osvetljenosti interferenčne slike pravokotno k režama.

Po teoriji uklona dobimo s temi privzetki osvetljenost v točki A' tj. $E(\xi', \eta')$ kot kvadrat amplitude valovne funkcije v tej točki^{2, 3}, torej

$$E(\xi', \eta') = |U(\xi', \eta')|^2,$$

kjer je $U(\xi', \eta') \propto \iint_s \exp \{ -2\pi i [(\xi - \xi')x + (\eta - \eta')y]/\lambda \} dx dy$ amplituda valovne funkcije v A'. Integriramo po odprtini obeh rež. Po integriranju je⁴

$$E \propto \sin^2 [\pi a (\xi - \xi')/\lambda] \cdot \cos^2 [\pi b (\xi - \xi')/\lambda] \cdot [\pi a (\xi - \xi')/\lambda]^{-2}$$

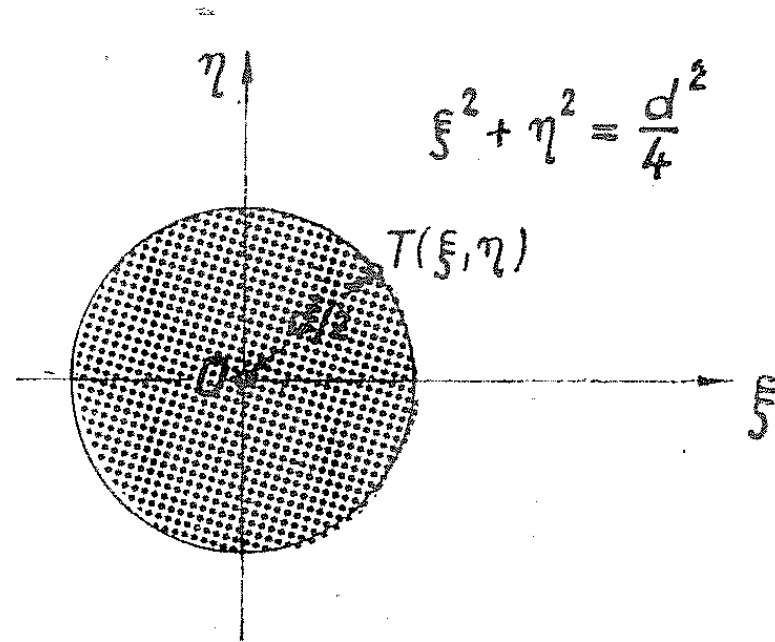
Zvezda (svetilo), ki je vidna kot svetla ploščica, pa osvetljuje točko A' z osvetljenostjo

$$E \propto \iint_\sigma \sin^2 [\pi a (\xi - \xi')/\lambda] \cdot \cos^2 [\pi b (\xi - \xi')/\lambda] \cdot [\pi a (\xi - \xi')/\lambda]^{-2} \cdot d\xi d\eta \quad (1)$$

kjer integriramo čez površino zvezdine ploskvice.

b) Enakomerno svetla okrogla zvezda

Sedaj vidimo zvezdo kot enakomerno svetlo okroglo ploščico. Naj gre zvezdnica središče interferenčne slike — središče dvojne reže tudi skozi središče



Sl. 2. Enakomerno svetla okrogla zvezdina ploskvice. Narisana je pretirano velika okrogle zvezdine ploskvice. Mejo ploskvice na ravnini $\xi \eta$ določa enačba kroga v središčni legi (sl. 2):

$$\xi^2 + \eta^2 = d^2/4$$

Integral (1) integriramo po η v mejah od $-(d^2/4 - \xi^2)^{1/2}$ do $(d^2/4 - \xi^2)^{1/2}$ in dobimo

$$E \propto \int_{-d/2}^{d/2} (d^2/4 - \xi^2)^{1/2} \cdot \sin^2 [\pi a (\xi - \xi')/\lambda] \cdot \cos^2 [\pi b (\xi - \xi')/\lambda] \cdot [\pi a (\xi - \xi')/\lambda]^{-2} \cdot d\xi$$

Vpeljemo $\xi = (d/2) \cdot z$, $\pi b d / 2 \lambda = n$ in $a/b = p$. Pri nadaljnjem računanju vzamemo, da je širina rež zelo majhna v primeri z razmikom med režama. Končno dobimo*

$$E \propto [1 + \cos(2 \pi b \xi' / \lambda) \cdot J_1(2 n) / n] \quad (2)$$

Tu je J_1 Besslova funkcija prvega reda. Zanima nas mejni primer, ko izginejo interferenčne proge in je interferenčna slika enakomerno svetla. Po enačbi (2) ugotovimo, da je slika enakomerno svetla (E je konstanta), ko je $J_1(2 n) = 0$. Prvi koren enačbe $J_1(2 n) = 0$ je $3,83/2 = 1,22 \cdot (\pi/2)$. Torej je $\pi b d / 2 \lambda = 1,22 \cdot (\pi/2)$. Iz ravnokar zapisane enakosti sledi za zorni kot svetila zveza

$$d = 1,22 \cdot \lambda / b \quad (3)$$

To je znana Michelsonova formula (1890). Pri interferometričnih meritvah zornih kotov svetil izginejo proge v interferenčni sliki svetila pri razmiku rež b , za katerega je izpolnjena zveza (3). Pri tem je λ poprečna valovna dolžina svetlobe svetila z zornim kotom d . Astronom izmeri razmik in pri znani valovni dolžini nato določi zorni kot nebesnega svetila.

V primeru, da ni izpolnjena zahteva $p \ll 1$, je H. Spencer Jones pokazal, da velja tedaj zveza⁵

$$d = 1,22 \cdot (1 + 0,765 p^2) \cdot \lambda / b$$

c) Obravnavali smo najbolj preprost primer. Predpostavili smo, da vidimo zvezdo kot okroglo ploščico enakomerne svetlosti. V splošnem ni tako. Navidezne ploščice zvezd so lahko tudi elipse (rotacija!) in niso enakomerno svetle. Svetlost na površini navidezne zvezdine ploščice lahko pada od središča k robu. Govorimo o tako imenovani *robni zatemnitvi zvezd*. Pokaže se⁵, da izginejo interferenčne proge pri meritvah zornih kotov zvezd, ki so zatemnjene proti robu, ko je

$$d > 1,22 \cdot \lambda / b.$$

3. MERJENJA

Zvezdni interferometer je instrument, s katerim določujemo zorne kote zvezd in zvezdam podobnih objektov (kakor tudi zorne kote med komponentama dvojnih zvezd), če poznamo poprečno valovno dolžino svetlobe svetila. Interferometer, ki ga upobaljšamo pri astronomskih meritvah, ima odprtini enakih oblik in velikosti. Odprtini sta pred objektivom ali daleč za objektivom v zbiralnem snopu svetlobnih žarkov nekoliko pred goriščno ravnino objektiva simetrično glede na optično os daljnogleda. Širina rež in razmik med njima sta spremenljivi. Instrument lahko tudi vrtimo okoli osi daljnogleda. Interferenčne slike nebesnih objektov v goriščni ravnini objektiva opazujemo z močnimi okularji.

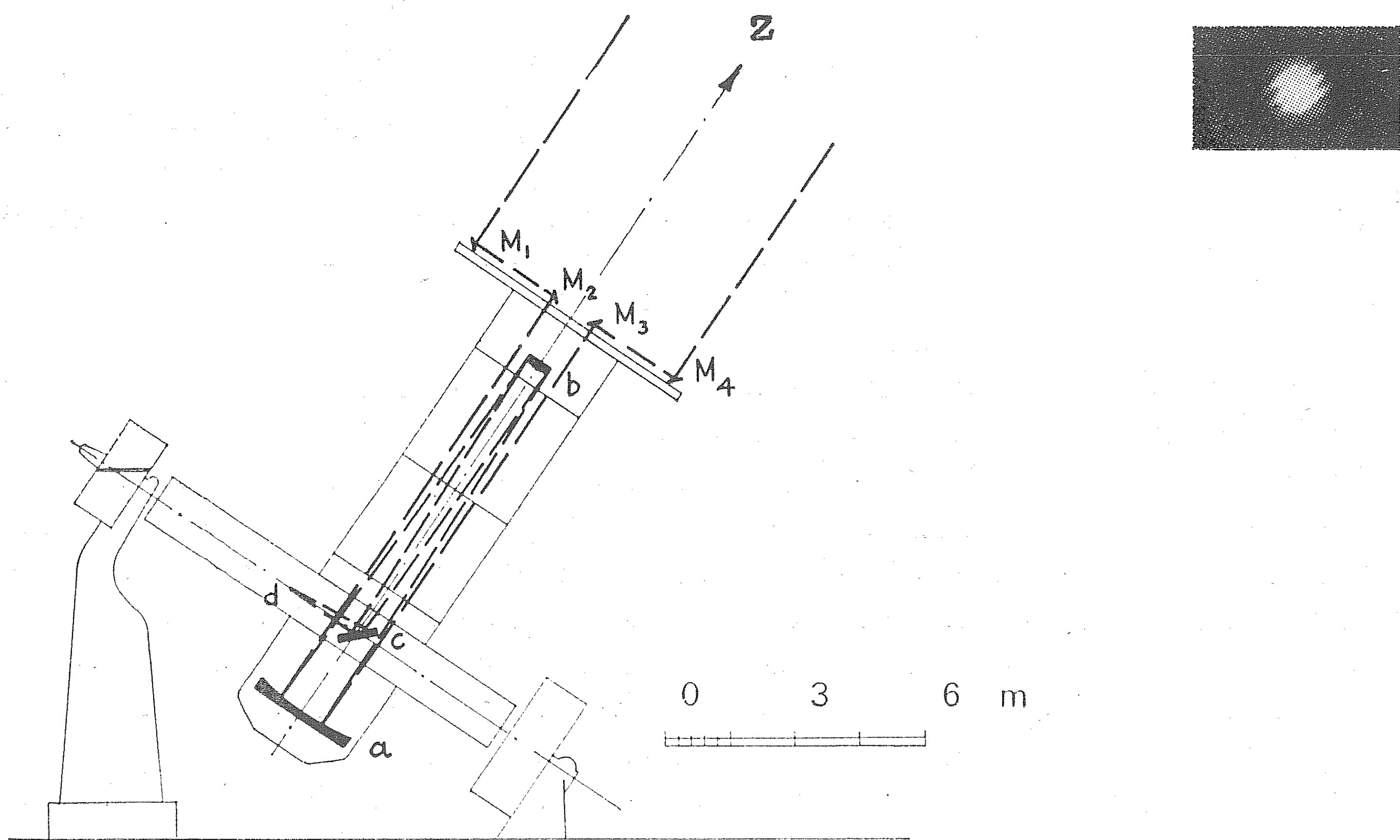
* Po substituciji je nastal integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^{1/2} \cdot \cos^2(nz - \pi b \xi' / \lambda) dz &= (1/2) \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^{1/2} [1 + \cos(2nz - 2\pi b \xi' / \lambda)] dz = \\ &= \int_0^{+1} (1 - z^2)^{1/2} [1 + \cos 2nz \cdot \cos(2\pi b \xi' / \lambda)] dz = (\pi/4) [1 + \cos(2\pi b \xi' / \lambda) \cdot J_1(2n)/n] \end{aligned}$$

Idejo za uporabo interferometra v astronomiji je prvi izrekel A. H. L. Fizeau (1868). Prvi pa je teorijo interferometričnih merenj natančno matematično obdelal za preproste primere šele A. A. Michelson (1890). Pozneje sta M. Hamy (1899 in ok. 1922) in posebno H. Spencer Jones (1922) obdelala to teorijo v splošnejši obliki, ko ne smemo zanemariti širine rež v primerjavi z njunim razmikom. Če ne vzamemo dovolj širokih rež, v praksi namreč ne bi dobili dovolj svetle interferenčne slike.^{5, 6}

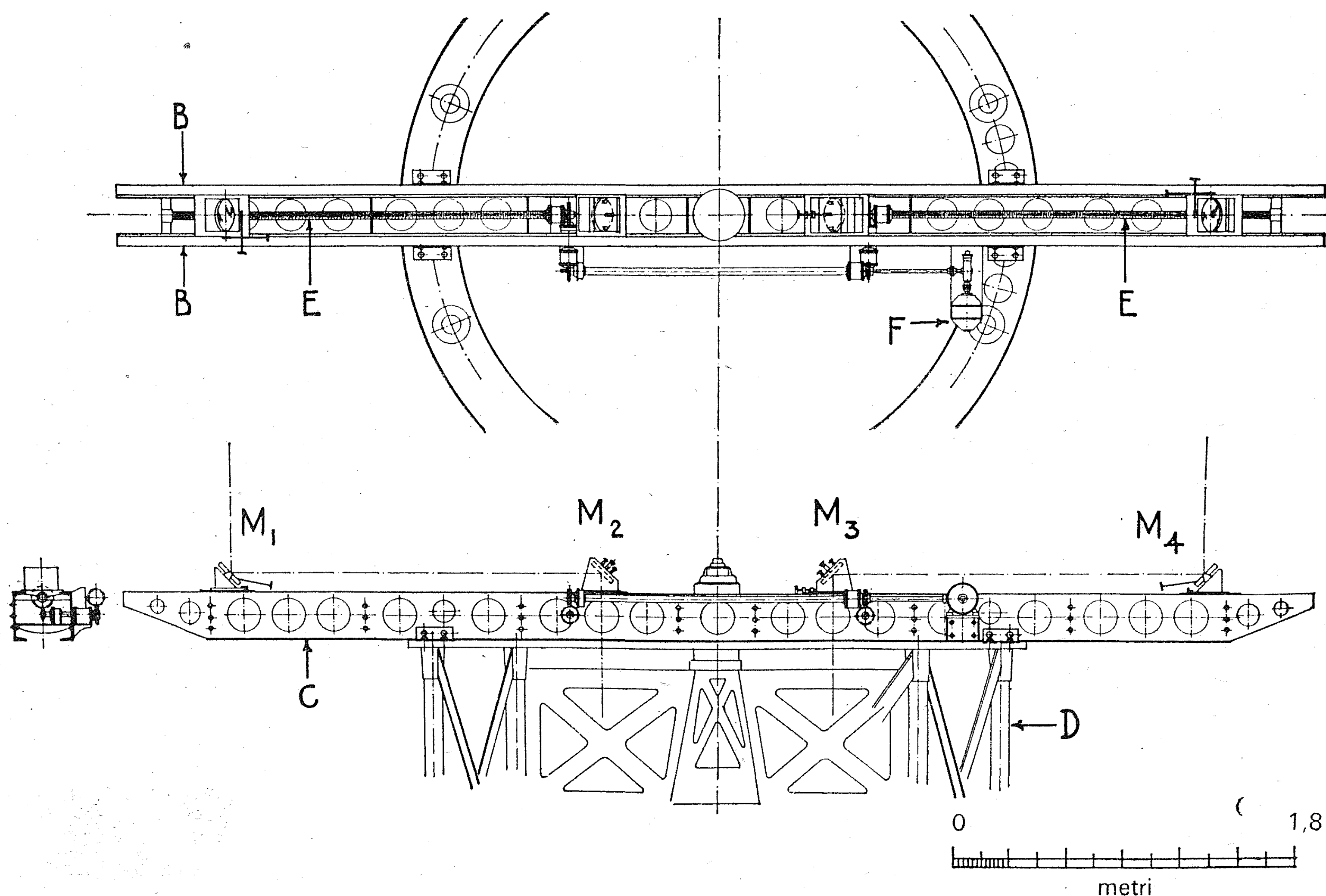
S to metodo so uspešno izmerili zorne kote velikih Jupitrovih satelitov (1891), nekaterih svetlih planetoidov in zornih kotov med komponentama dvojnih zvezd, ki jih z navadnimi daljnogledi niso mogli razločiti. Interferometrična merjenja enojnih zvezd pa tedaj zaradi pomanjkljive merske tehnike niso uspela.

Na te meritve je bilo treba čakati skoraj trideset let. Michelsonovi poskusi z zvezdnim interferometrom na 100-centimetrskem refraktorju observatorija Yerkes (avgust 1919) in na 150-centimetrskem in 250-centimetrskem reflektorju na Mount Wilsonu (september 1919) so dali že na začetku obetajoče rezultate⁷. Ob tem se je bilo treba odločiti za novo metodo meritev zornih kotov zvezd



Sl. 3. Shema šestmetrskega zvezdnega interferometra na 250-centimetrskem reflektorju observatorija Mt. Wilson. Interferometer je bil iz dveh delov, trama (sl. 4) in posebnega okularnega nastavka (sl. 5). Na jeklen interferometrični tram, ki so ga postavili pred odprtino teleskopa, so pritrdili štiri ravna zrcala premera okoli 15 cm in naklonjena k osnovnici za 45° . Notranji zrcali M_2 in M_3 sta bili razmaknjeni za okoli 115 cm in trdno spojeni k tramu, zunanji M_1 in M_4 pa so lahko premikali po drči simetrično k osi daljnogleda. Njuno medsebojno razdaljo so spreminjali od približno tri do šest metrov. Zunanji zrcali sta služili kot premični rež i. Svetloba od zvezde (z) je prišla po odboju na simetričnem sistemu štirih ravni zrcal v 250-centimetrsko parabolično zrcalo (a), nato je padla na konveksno (b), dalje na ravno (c) in končno v gorišče (d). Interferenčna slika zvezde je bila v gorišču velika okoli dve stotinki milimetra. Opazovali so jo s 1600-kratno povečavo. Zaradi neizogibnih mehaničnih nepopolnosti in za uspešno opazovanje interferenčne slike so morali izdelati še nekaj dodatnih delov

Zgoraj: Videz interferenčne slike umetne zvezde. Sliko so posneli v laboratoriju



Sl. 4. Tloris, naris in stranski ris šestmeterskega interferometričnega trama (B: žleb, C: močna jeklena podložka, E: vijaka za pomik zunanjih zrcal in F: pogonski motorček za vijake)

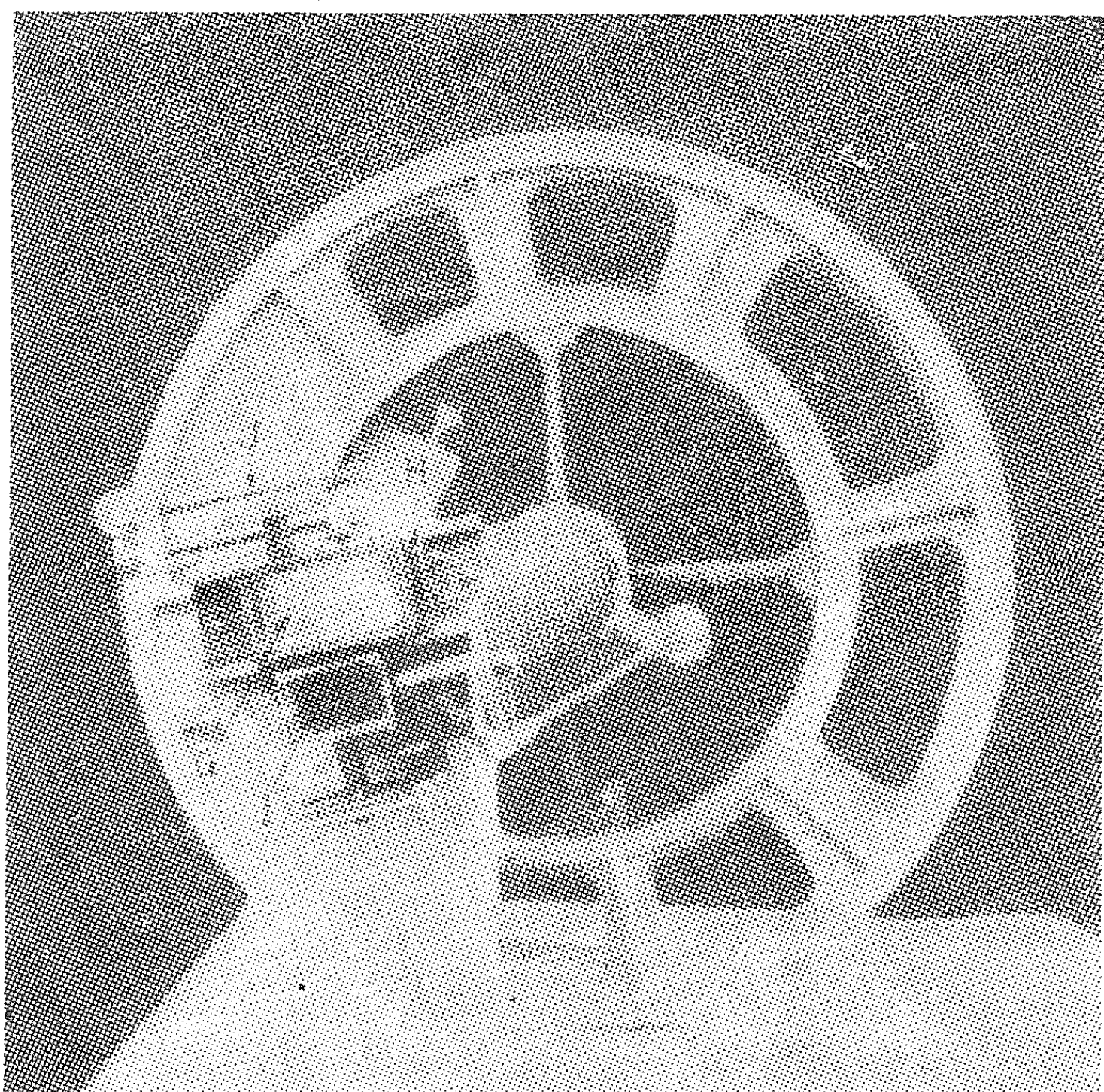
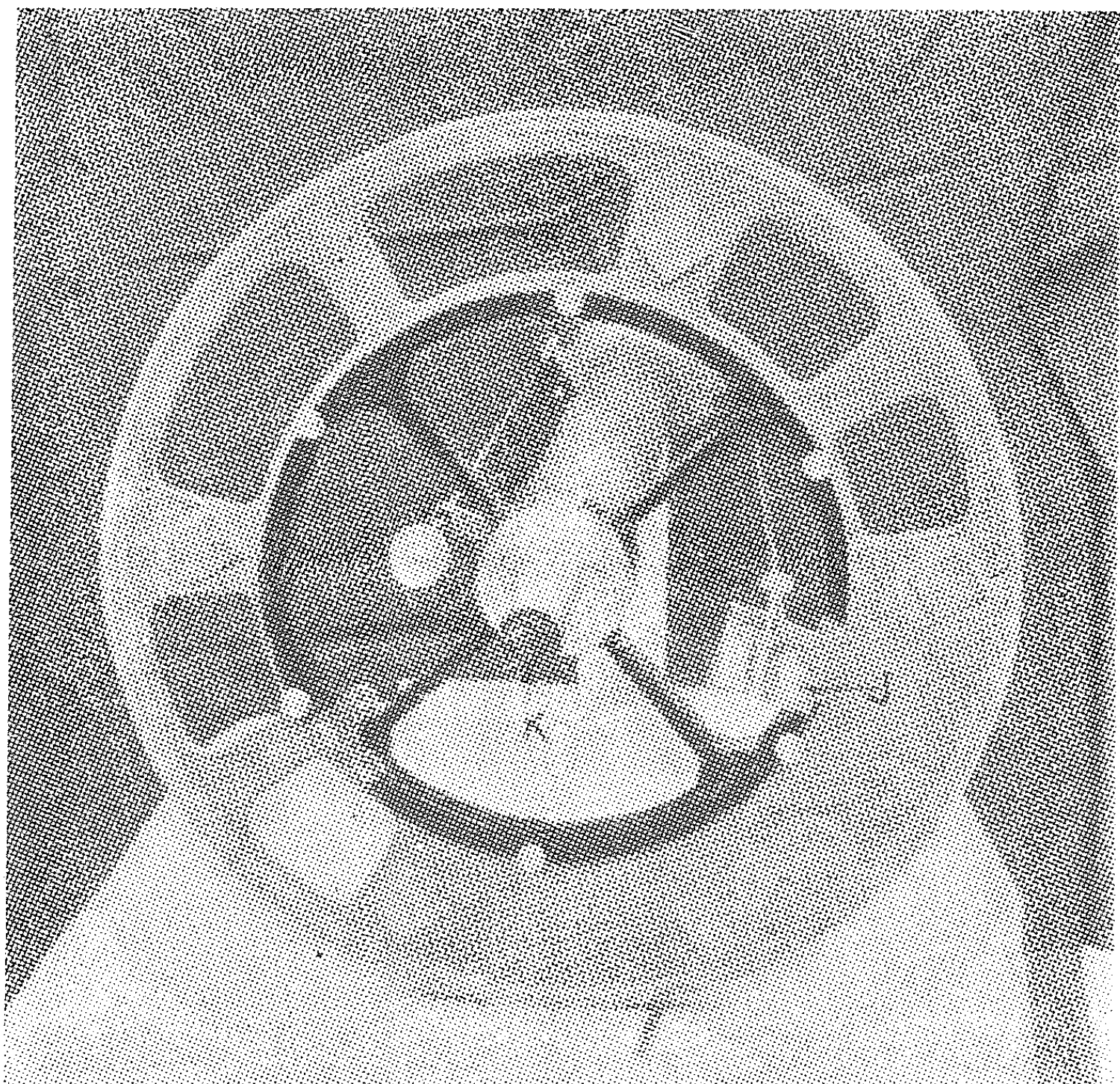
na ravnokar zgrajenem 250-centimetrskem reflektorju na observatoriju Mount Wilson. Nalogo sta rešila *Michelson* in *Pease*.

Izračunali so, da bi lahko izmerili zorni kot zvezde Betelgeuse (Alfa Orionis), če bi bili reži razmaknjeni za okoli tri metre. Ta razmik je bil za 250-centimetrski objektiv prevelik, da bi ga mogli doseči pri meritvah z enostavno metodo dveh rež. Da bi merili tolikšne ali manjše zorne kote, je bilo treba ali povečati odprtino teleskopa ali razmik rež. Prvo ni bilo izvedljivo, zato so sestavili šestmeterski zvezdni interferometer. Instrument, ki je imel periskopski nastavek, so montirali na 250-centimetrski reflektor (gl. sl. 3, sl. 4 in sl. 5!). Največji razmik zunanjih zrcal tj. 6 metrov je določal ločljivost interferometra: 0,02 kotne sekunde. Po poskusnih opazovanjih sta *Michelson* in *Pease* s tem interferometrom poleti 1920 že dobila še kar jasne in obstojne intereferenčne slike zvezd.

Dne 13. decembra 1920 zvečer je bila vidljivost zelo dobra in interferometer je bil v odličnem stanju. Instrument sta usmerila proti svetli rdeči zvezdi *Betelgeuse* v Orionu. Interferenčne proge so izginile, ko je bil razmik zunanjih zrcal $b = 307$ cm. Poprečno valovno dolžino svetlobe za *Betelgeuse* so ocenili z $\lambda = 5750 \text{ \AA}$. S temi podatki so dobili⁸:

$$d'' = 0,047$$

To je bila prva meritev zornega kota zvezde. Relativna negotovost meritve je bila okoli deset odstotkov. Pri znani paralaksi $p'' = 0,011$ so nato določili še velikost zvezde:



Sl. 5. Okularni nastavek z dodatnimi optičnimi deli interferometra

$$D_B = 460 D_{\odot}^*$$

($D_{\odot}$ je premer Sonca). Meritev je potrdila teoretične izračune, ki so dali tedaj v poprečju za kotni premer te zvezde okoli 0,"04.

S tem zvezdnim interferometrom je od 1920 do 1930 Pease izmeril zorne kote še nekaterim zvezdam, ki so bile vse velikanke ali nadvelikanke poznega spektralnega tipa kot Betelgeuse in po velikosti mnogo večje od našega Sonca¹.

Merjenja zornih kotov zvezd z zvezdnimi interferometri so opustili največ zaradi velikih težav pri povečanju ločljivosti. Težave praktičnega značaja so se pokazale predvsem pri *petnajstmetrskem zvezdnem interferometru*, ki so ga prav tako zgradili na Mount Wilsonu in uporabili na istem reflektorju in ki ni nikdar dajal zanesljivih rezultatov⁹.

Interferometrična merjenja zornih razsežnosti zvezd na Mount Wilsonu so bile velik uspeh astrofizikalne znanosti. Niso pripeljale k nekim povsem novim odkritjem. V glavnem so potrdila domneve, da so v vesolju res zvezde, ki so po linarnih dimenzijah dosti večje od Sonca. Pomembne pa so meritve zaradi uporabe fizikalnih metod v astronomiji.

Idejni vodja pri gradnji in pri meritvah z obema interferometroma je bil F. G. Pease. Po njegovi smrti (1938) so interferometrična merjenja zornih kotov zvezd opustili. Skoraj v istem času so začeli preučevati nov, modernejši in natančnejši način merjenja zvezdnih premerov. O tem pa bo Obzornik spregovoril v eni izmed prihodnjih števil.

LITERATURA

¹ M. Prosén, Ob stoletnici zamisli o interferometričnem merjenju zvezdnih premerov, Obz. mat. fiz. 15, 125 (1968).

² M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, 1959, str. 384.

* Po današnjih ocenitvah je $D_B = 1010 D_{\odot}$

³ I. Supek, Teorijska fizika i struktura materije I, Školska knjiga, Zagreb, 1951, str. 374.

⁴ J. Strnad, Uvod v fiziko, II. del, Katedra za fiziko, Ljubljana, 1968, str. 236—239.

⁵ H. Spencer Jones, The Theory of Astronomical Interferometer Measurements, M. N., Vol. 82, 513 (1922).

⁶ K. Lundmark, The Diameters of the Stars, Handbuch der Astrophysik, Bd. V/2, Springer, Berlin, 1933.

⁷ A. A. Michelson, On the Application of Interference Methods to Astronomical Measurements, Ap. J., Vol 21, 257 (1920).

⁸ A. A. Michelson and F. G. Pease, Measurements of the Diameter of α Orionis with the Interferometer, Ap. J., Vol. 53, 249 (1921).

⁹ M. Prosén, Meritve z intenzitetnim interferometrom v Avstraliji, Proteus 31, 45 (1968).

POPRAVEK K ČLANKU: O NEKATERIH PROBLEMIH NUMERIČNE LINEARNE ALGEBRE (OMF 15 (1968), 97—105).

Na strani 103 točka b) sem zagrešil napako. Pravilno je:

b) Če je A $2p + 1$ diagonalna matrika reda $n > 2p$ ($a_{ik} = 0$ za $|i - k| > p$), je

$$g(n) \leq 2^{2p-1} - (p-1)2^{p-2}$$

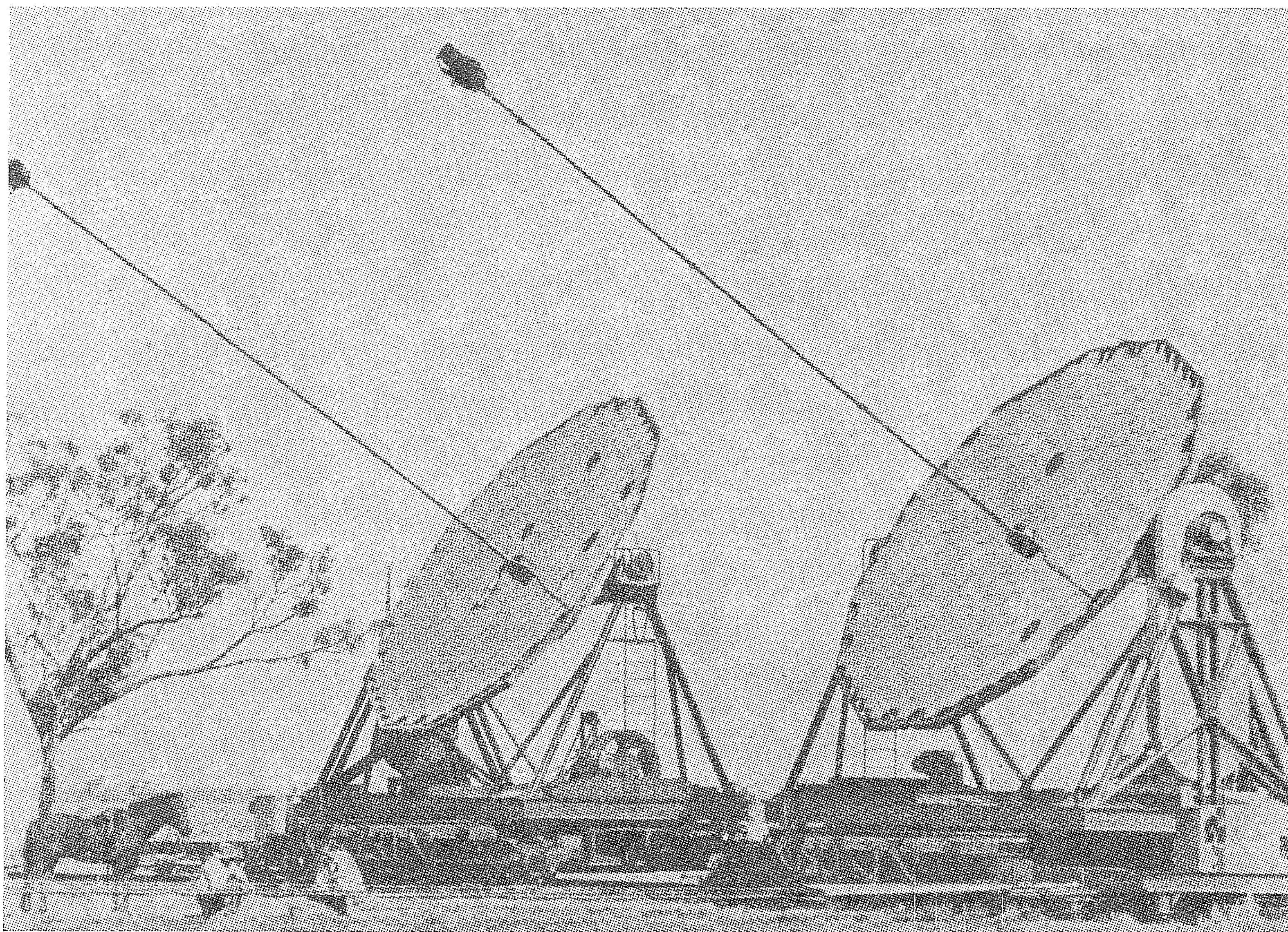
pri delnem pivotiranju.

Wilkinson [10] namreč navaja ta rezultat le v primeru $p = 1$, posplošitev pa ni tako enostavna, kot sem prvotno mislil. Dokaz presega okvir obzornega članka.

Z. Bohte

NOVE MERITVE ZVEZDNIH PREMEROV

V zadnjem času so ponovno začeli meriti premere zvezd. To je pomemben dogodek za astrofiziko, saj je od klasičnih meritev zvezdnih premerov z zvezdnim interferometrom na observatoriju Mt. Wilson minilo skoraj pol stoletja in je že kazalo, da bodo na takšne meritve pozabili. Znano je, da se je pri meritvah z velikimi zvezdnimi interferometri pojavilo niz težav, ki so zmanjševale natančnost in ločljivost teh instrumentov in ki jih ni bilo mogoče odpraviti. Naposled je Michelsonova zamisel, da bi z večjimi razmiki zrcal pri zvezdnem interferometru mogli razločiti premere vse manjših in šibkejših zvezd pripomogla k hitrejšemu napredovanju nove merilne tehnike. Sestavili so novi tip astronomskega instrumenta, tako imenovani zvezdni intenzitetni interferometer, ki je v principu podoben Michelsonovemu zvezdnemu interferometru, vendar je glede merjenja zornih kotov zvezd od njega mnogo uspešnejši. Največje zasluge pri tem imata angleška astrofizika in elektronika *R. H. Brown* in *R. Q. Twiss*, ki sta izdelala tudi zelo zahtevno teorijo novih meritev. Sestavila sta prvi intenzitetni interferometer s premerom zrcal 156 cm, goriščno razdaljo 65 cm in razmikom zrcal do 9 m ter z njim 1958 v *Jodrell Banku* izmerila premer najsvetlejše zvezde neba, *Sirija*.



Zvezdni intenzitetni interferometer na observatoriju v Narrabriju v Avstraliji.

Po tem uspehu sta se univerzi v Manchestru in v Sydneyu odločili 1959 za gradnjo novega, mnogo večjega intenzitetnega interferometra. Instrument so v celoti izdelali v Veliki Britaniji, postavili pa so ga v kraju *Narrabri* v Novem Južnem Walesu v Avstraliji. Glavni sestavni del tega interferometra sta dve veliki vbokli zrcali s premerom okoli 6,5 m. Ti nista izbrušeni kot običajna teleskopska zrcala, ampak je vsako zase sestavljeno iz okoli 250 enakih šesterkotnih aluminiziranih sferičnih zrcalc, ki pošiljajo svetlobo merjene zvezde na fotopomnoževalko. Ta spremeni vpadajoči svetlobni tok v električnega, električna tokova iz obeh fotopomnoževalk pa nato ojačijo in po kablu napeljejo v elektronski korelator. Zorne kote zvezd določajo iz korelacije fluktuacij v zvezdni svetlobi, ki jo zbereta obe zrcali pri različnih razmikih. Ker optična slika zvezde ni odločilna, smejo biti elementarna zrcalca po astronomsko-optičnih pojmi dokaj surovo izdelana, tj. nebrušena in so zato — poceni. Zrcali, ki se med opazovanjem lahko gibljeta po krožnem tiru premera okoli 180 metrov, usmerjajo in razmikajo avtomatizirano. V sredini merilnega prostora je hišica s komandno-kontrolnim delom interferometra.

Glavni namen interferometra v Narrabriju je merjenje zornih kotov zvezd in izpeljava drugih pomembnih podatkov zvezd, na primer temperature, velikosti, koeficienta robne zatemnitve itd. Ta instrument more razločiti silno majhne in dokaj šibke zvezde zelo zgodnjega spektralnega tipa. S tem na Mt. Wilsonu niso uspeli, saj so izmerili premere komaj sedmim bližnjim svetlim orjakinjam in nadorjakinjam poznega spektralnega tipa.

Prvo meritev z novim interferometrom so opravili v letu 1963 na zvezdi *Vegi*, glavno opazovalno delo pa je steklo v začetku leta 1965. Rezultati teh merenj so bili objavljeni pred letom dni:

Zvezda	d	$D/D_{\odot}$	Zvezda	d	$D/D_{\odot}$
β Ori (Rigel)	0',00269	116	γ Ori (Belatriks)	0',00076	3,1
α Car (Kanop)	686	41	α Lyr (Vega)	347	3,0
ε Ori (Alnilam)	72	31	α Gru (Al Nair)	102	2,2
β Cru (Mimoza)	73	12	α CMi (Prokion)	571	2,1
ε CMa (Adhara)	81	12	α CMa (Sirij)	612	1,8
α Eri (Ahernar)	193	9,0	α PsA (Fomalhaut)	209	1,6
α Pav (Pav)	80	6,1	α Aql (Atair)	297	1,6
α Leo (Regul)	138	3,8			

Največji zorni kot med temi 15 merjenimi zvezdami ima Kanop, druga najsvetlejša zvezda na nebu, ki pa iz naših krajev ni vidna. Vidimo jo s takšnim zornim kotom kakor okrogli Lunin krater, ki ima premer 13 metrov. Najmanjši zorni kot so namerili zvezdi Alnilam. Ta kot ne presega velikosti zornega kota, s katerim bi videli poldrugi meter širok krater na Luninem površju. Računajo, da bodo s tem interferometrom zmogli ločiti zvezde z zornim kotom okoli 0,0005 kotne sekunde, kar pomeni, da bodo merili kote, s katerimi bi videli metrske kraterčke na Luni.

Najtemeljiteje so premerili *Sirij*, za katerega so dobili premer $D = 1,76 D_{\odot} = 2,45 \cdot 10^6$ km ($D_{\odot}$ je premer Sonca). Negotovost je še $\pm 0,4 D_{\odot}$. Iz znane vrednosti za premer in izmerjene gostote izsevnega svetlobnega toka so nadalje ocenili efektivno temperaturo te zvezde: 10 380 °K, kjer je negotovost pod ± 200 °K.

V Narrabriju nadaljujejo z meritvami. Prvič v zgodovini astronomije določujejo zorne kote zvezd bolj zgodnjega spektralnega tipa od *F*. Meritve predstavljajo uspešno nadaljevanje začetega dela s tega področja na Mt. Wilsonu, kjer so merili le kotne premere zvezd spektralnega območja od *K* do *M*. Upajo, da bodo izmerili zorne velikosti približno dvestotim svetlejšim (m_v do okoli $+2,5^m$) zvezdam, vidnih iz Narrabrija.

Razdobje skoraj petdesetih let meritev premerov zvezd je prispevalo veliko novih spoznanj o zvezdnih velikostih, o katerih vemo še vedno malo. Uspeh, ki ga je astrofizika dosegla v tehniki meritev zvezdnih premerov, je velik kljub temu, da je za zdaj uspelo izmeriti premere maloštevilnih zvezd. Stalno izboljševanje natančnosti astronomskih merilnih instrumentov in elektronike pa daje slutiti, da bodo merjenja zvezd z zvezdnim intenzitetnim interferometrom verjetno dosegla veliko izpopolnjenost in dala mnoge pomembne rezultate.

M. Prosén

LITERATURA

1. R. H. Brown and R. Q. Twiss: A Test of an Intensity Interferometer on Sirius A, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 248, 222 (1958).
2. R. H. Brown, J. Davis and L. R. Allen (and J. M. Rome): The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory I (and II), *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, Vol. 137, 375 (and 393) (1967).
3. R. H. Brown: Stellar Interferometer at Narrabri Observatory, *Nature*, Vol. 218, 637 (1968).

RAČUNSKI CENTER IMFM (II)

O delovanju računskega centra inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v začetnem obdobju po ustanovitvi je v *Obzorniku* poročal že T. Skubic (*OMF XI* (1964), 145—149). Bralce *Obzornika* bo morda zanimal kratek pregled dela računskega centra po nekoliko daljšem obstajanju.

Računski center je bil ustanovljen v januarju leta 1962 na priporočilo sekretariata LRS za prosveto in kulturo. Prvi predstojnik je bil prof. dr. Alojzij Vadnal, ki ima velike zasluge zato, da je računski center zaživel. Njegov naslednik prof. dr. Tomislav Skubic pa je z njemu lastno energijo dosegel, da je računski center dobil materialno osnovo in postal v kratkem finančno najmočnejša enota inštituta.

Osnovna naloga računskega centra ob ustanovitvi je bila nabava elektronskega digitalnega računalnika za potrebe Univerze v Ljubljani in raziskovalnih inštitutov. Pozneje naj bi računski center služil pedagoškim in raziskovalnim potrebam Univerze, gojil lastno raziskovalno delo na področju numerične matematike in programiranja ter nudil usluge tudi drugim raziskovalnim in gospodarskim organizacijam. Že leta 1962 je prišlo do dogovora med IMFM in Nuklearnim inštitutom »Jožef Stefan« (NIJS) o skupni nabavi računalnika ZUSE Z-23, ki je bil v novembru 1962 instaliran v prostorih IMFM na Lepem potu 11. Poskusno obratovanje stroja je trajalo 9 mesecev. V tem času se je izučila v programiranju prva skupina matematikov in izdelali smo prve naloge za zunanje interesente. Stroj je bil kupljen leta 1963. NIJS in IMFM sta prispevala vsak polovico sredstev. Določena je bila cena strojne ure (24 000 Sdin), ki se do danes ni spremenila. NIJS izkorišča računalnik pri svojem raziskovalnem delu, računski center pa za vse ostale uporabnike.

Izkoriščanje stroja v posameznih letih je razvidno iz naslednje tabele:

Porabljene ure na Z-23

Leto	NIJS	Univerza	Drugi	Servis	Skupaj
1963	857	54	—	6010	6921
1964	882	125	54	886	1947
1965	1244	388	322	560	2514
1966	686	443	737	555	2421
1967	1293	779	1290	570	3932
1968 (I—VI)	289	454	517	274	1534
Skupaj	5251	2243	2920	8855	19269

Podatek v rubriki servis za leto 1963 obsega tudi ves pogon računalnika od izdelave do stvarnega prevzema.

Z naraščanjem dela na stroju se je računski center krepil tudi kadrovsko. V začetku smo si pomagali s honorarnimi uslužbenci in prizadevnimi študenti, pozneje pa je bilo nastavljeno tudi več rednih uslužbencev. Število zaposlenih v posameznih letih je razvidno iz naslednje tabele:

Uslužbenci računskega centra

Leto	Redni	Honorarni	Skupaj	Celih uslužbencev
1962	—	1	1	0,2
1963	—	2	2	0,3
1964	1	3	4	1,3
1965	2	3	5	2,7
1966	3	5	8	3,3
1967	4	10	14	5,0
1968	4	2	6	5,0

Ker so bili honorarni uslužbenci nastavljeni za različno število ur na dan in niso bili vsi uslužbenci nastavljeni za celo tekoče leto, je v zadnjem stolpcu izražen ekvivalent v številu rednih uslužbencev (7 ur dnevno) za celo leto. Da bi si zagotovil stalen dotok sposobnih strokovnjakov, je letos začel računski center podeljevati štipendije za študij tehniške matematike.

Oglejmo si na kratko še najvažnejše smeri strokovnega udejstvovanja računskega centra.

Pedagoško delo

Ob nabavi računalnika Z-23 je imela v učnem načrtu predmet programiranje samo skupina tehniška matematika na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Pozneje je ta predmet uvedla v redni študij le še fakulteta za elektrotehniko. Zato je računski center prevzel izvedbo programerskih tečajev za študente drugih smeri in za vse druge zainteresirane ustanove. Doslej smo organizirali 20 programerskih tečajev. V začetku smo na teh tečajih učili programiranje v internem kodu računalnika Z-23, ker drugih možnosti ni bilo. Pozneje, ko smo od firme ZUSE prejeli zadovoljive prevajalnike za simbolične jezike, smo začeli uvajati programiranje v avtokodu (Formelübersetzer) in Algolu. Na žalost je uporaba teh dveh simboličnih jezikov zaradi majhnega

spomina in počasnosti prevedenih programov zelo omejena. Operatorski izpit je opravilo prek 20 kandidatov. Imeli smo tudi specializirani tečaj o uporabi računalnika v konstrukcijski mehaniki.

Za interno izobraževanje smo imeli v računskem centru več seminarjev o numeričnih metodah. Sodelavci računskega centra so odhajali na krajša izpopolnjevanja v inozemstvo, udeleževali so se tudi raznih kongresov, simpozijev in posvetovanj. Računski center je obiskalo tudi več tujih strokovnjakov, ki so imeli predavanja in razgovore s sodelavci.

Računski center je izdal naslednje publikacije:

1. E. Zakrajšek: Programiranje v simboličnem jeziku računalnika Z-23, 1965,
2. E. Zakrajšek: Programiranje v Algolu, 1966,
3. E. Prelog: Uporaba elektronskih računalnikov v konstrukcijski mehaniki, I. del: Uporaba redukcijskega postopka v statiki, 1966,
4. D. Jurišić: Uporaba elektronskih računalnikov v konstrukcijski mehaniki, II. del: Diferenčne metode v elastomehaniki, 1966.

Raziskovalno delo

Sodelavci računskega centra so doslej izdelali 6 raziskovalnih nalog s področja numeričnih metod in izpopolnjevanja biblioteke računalnika Z-23. O teh nalogah je bilo v Obzorniku že poročano. Sodelavci so objavili tudi več znanstvenih člankov.

Delo za Univerzo

Čeprav je bil računalnik Z-23 delno namenjen tudi za potrebe Univerze v Ljubljani, dolgo časa ni bilo mogoče urediti plačevanja tega dela na stroju. Do konca leta 1965 je računalnik uporabljala predvsem fakulteta za naravoslovje in tehnologijo za pouk matematikov, v manjši meri pa tudi fakulteta za elektrotehniko in fakulteta za strojništvo. Za delo v letu 1966 je sklad za šolstvo plačal 500 strojnih ur, za lansko leto 700 in za letos 1200 strojnih ur. Tu je mišljeno samo delo v zvezi s poukom, to so predvsem programerske, seminarske, diplomske, magistrske in doktorske naloge. Računski center nudi pri teh nalogah operatorske in konzultacijske usluge, pri manjših problemih pa tudi programerske. Poraba strojnih ur za Univerzo je razvidna iz naslednje tabele:

P o r a b a u r z a U n i v e r z o

F a k u l t e t a	1963	1964	1965	1966	1967	1968 (I—VI)	Skupaj
za narav. in tehnologijo	54	125	350	343	347	111	1330
za elektrotehniko			35	45	75	56	211
za strojništvo			3	26	29	5	63
za arh., grad. in geod.				1	89	49	139
Ekonomska				17	96	107	220
Biotehniška				8	16	18	42
Pravna					3	51	54
Medicinska					61	—	61
Filozofska						—	—
Druge šole				3	63	57	123
Skupaj	54	125	388	443	779	454	2243

Z uvedbo programiranja tudi na druge študijske smeri tehniških fakultet in z dvigom matematične in numerične kulture na sploh lahko z gotovostjo predvidevamo, da se bodo potrebe Univerze kmalu še močno povečale.

Delo za ostale uporabnike

V računskem centru stalno narašča tudi delo za ostale uporabnike, ki so predvsem drugi raziskovalni zavodi iz Slovenije in drugih republik. Zelo malo ostalih uporabnikov samostojno izdeluje programe, zato računski center tudi izdeluje programe po naročilu. Mnogo praktičnih problemov zahteva dolgotrajno programiranje in to močno zavira povečanje dela na stroju. Nekatere naloge so postale že rutinske in te porabijo glavni del strojnega časa. Med najpomembnejšimi področji uporabe našega računalnika naj omenimo: linearno programiranje, statiko, statistiko in geodezijo. Pogoste so tudi posamezne tehnične ekspertize, na primer proračuni transformatorjev, turbin in električnih filtrov. Čeprav računalnik Z-23 ni primeren za poslovne izračune in masovno obdelavo statističnega materiala, se tudi takih nalog nismo branili.

Življenjska doba računalnika Z-23 se bliža koncu, pa tudi število nalog, za katere je ta stroj premajhen in prepočasen, stalno narašča. Zato se je lani IMFM v imenu vseh fakultet Univerze, NIJS in zavoda za zdravstveno varstvo prijavil na razpis zveznega fonda za znanstveno delo za nabavo novega računalnika srednje velikosti v znesku 666 mil. Sdin. Zvezni fond je ta denar odobril, vendar s pogojem, da bo z nabavo novega računalnika soglasen IS Slovenije. Ta pogoj ima za praktično posledico dejstvo, da Univerza ne bo mogla dobiti lastnega računalnika, ampak se bo morala pridružiti širši kooperaciji z industrijo (Iskra) in javno upravo (IS). Enoletna pogajanja med prizadetimi niso pripeljala do soglasja in končna odločitev bo, kot kaže, v nasprotju s prepričanjem in interesi računskega centra in Univerze.

Čeprav je računski center majhna, iz nič zrasla enota, smatram, da je z dosedanjim delom dosegla relativno velik uspeh pri uvajanju uporabe računalnikov pri nas.

Z. Bohte

PROGRAMIRAN POUK IN REFORMA POUKA MATEMATIKE

Oktoberja letos je bilo v Zagrebu medrepubliško posvetovanje o programiranem pouku in o reformi pouka matematike v osnovni šoli.

I

Prvi dan je bil posvečen programiranemu pouku. Poslušali smo predavanje dr. I. Furlana o uvajanju tega načina dela v osnovnih šolah Hrvatske ter predavanje tovarišice Zojice Levi o novih pojavih pri programiranem pouku. Dr. Furlan je orisal potek uvajanja programiranega pouka v Hrvatski od leta 1963 do danes. Predavatelj je bil mnenja, da je treba dalje popularizirati programirano učenje ter proučiti, kateri predmeti in katera poglavja bi bila najbolj primerna za programirani pouk. Drugi problem pa je, kako usposobiti učitelja za delo v zvezi s programiranim poukom. Dobro bi bilo, da bi vsaka šola imela eno učilnico, kjer bi bili vsi stroji za programirani pouk. Ne smemo ne vem kaj pričakovati s to novo obliko dela — ja zaključil predavatelj — ampak le-ta vodi učenca k samostojnemu delu, je nov pedagoški pogled in prav gotovo revolucionaren preobrat.

Tovarišiča Zojica Levi ugotavlja, da je vse novo v pedagoški praksi, kar se tiče programiranega pouka. Komaj dobrih deset let je minilo, odkar se v svetu razvija intenzivni študij o programiranem pouku. V začetku je bilo usmerjeno samo na memoriranje. V ta namen so se pojavili razni stroji, od najbolj preprostih do najbolj kompliciranih, istočasno pa se je pojavila tudi nevarnost, da se vse to preveč skomercializira. V tem je morda vzrok, da je od vseh eksperimentov le polovica dala dobre rezultate. Sicer je programirani pouk težko primerjati z drugimi oblikami dela, ker je ta osnovan na samostojnem delu. Prvi stroji so izzvali bojazen, da bo stroj zamenjal učitelja. To je bilo povsem neutemeljeno, saj je ta oblika le ena od oblik individualnega dela z učenci. In ta oblika dela ima veliko prednost v tem, ker učenec dela po svojih sposobnostih, da ima svoj tempo dela.

Predavateljica je bila mnenja, da so za programirano učenje najbolj prikladne prirodne vede in matematika. Programirano učenje ima velik razmah predvsem v industriji, kjer se velika podjetja poslužujejo te metode za dopolnjevanje znanja delavcev.

Ogledali smo si še elektronsko učilnico na pedagoški akademiji in prisostvovali uram programiranega učenja na eksperimentalni osnovni šoli Jordanovac.

Udeleženci posvetovanja so prišli do zaključka, da je uvajanje programiranega učenja važen prispevek k modernizaciji naše šole. Programirano učenje pomaga pri reševanju nekaterih aktualnih vprašanj šolskega dela. Predvsem so pri takem delu učenci neprestano aktivni, se učijo samostojno in so često seznanjeni z uspehom svojega učenja. Programirani pouk zagotavlja vsakemu učencu osvajanje bistvene snovi. Zato programirani pouk dviga šolski uspeh v celoti, a še posebej pomaga slabšim učencem. Končno programirani pouk pomaga tudi učitelju pri uresničevanju osnovne pedagoške naloge: pri razvijanju sposobnosti učencev, njihovih delovnih in organizacijskih navad. To je

omogočeno s tem, ker so učitelji pri programiranem pouku delno razbremenjeni svojega predavateljskega dela in namesto tega dajejo učencem na razpolago druge vire informacij.

Prve pozitivne izkušnje v naših šolah kažejo, da lahko pričakujemo od programiranega učenja še večjo korist, če bo prišlo do njegove širše praktične uporabe. To pa zahteva določena sistematična prizadevanja prosvetno pedagoške službe, kadrovskih šol in fakultet, pedagoško strokovnih institucij pa tudi velikega števila prosvetnih delavcev — praktikov. Med temi prizadevanji so najvažnejša:

Potrebno in koristno je nadaljevati s popularizacijo programiranega pouka, prikazati tak pouk velikemu številu učiteljev, obdelati različna vprašanja tega načina pouka v našem pedagoškem tisku. Takšno širjenje programiranega pouka mora biti predvsem strokovno, osvobodeno vsakega pretiravanja in izključnosti.

Programirani pouk moramo smatrati kot enega od mnogih načinov pri izvajanju šolskega dela. Zaradi tega je dobro, če ga kombiniramo z različnimi metodami in postopki. Tako bo programirani pouk obogatil šolsko delo in pripomogel učencem in učiteljem doseči vzgojno izobraževalne naloge naše šole.

Pri naših današnjih pogojih najbolj sprejemljiv način za izvajanje programiranega pouka v naši šoli je uporaba krajših programiranih učnih sekvenc in nato še programiranih učbenikov in priročnikov. Ta sredstva programiranega pouka so najcenejša in najbolj sprejemljiva za naše učitelje, ki so v tem pogledu šele malo poučeni. Toda poleg programiranih tekstov bi morali že danes v manjšem obsegu in v eksperimentalne namene preizkušati dostopne stroje za programirani pouk.

Na programirani pouk moramo gledati kot na važen prispevek k aktivizaciji učencev in osamostojitvi pri učenju. Zaradi tega bo ta nova učna metoda prispevala za uspešno uvajanje učencev k racionalnim metodam učenja. To bo še posebno prišlo do izraza, ako učencem pojasnimo racionalno osnovo programiranega učenja in če jih usmerimo v nekatere postopke, ki jim bodo omogočili, da sami programirajo svoje učenje (»samoprogramiranje«).

Čeprav morejo učitelji osnovnih šol v nekaterih primerih sami programirati posamezne učne enote, moramo težiti k poenotenju sestave programiranega učnega materiala. Samo na ta način lahko poskrbimo za programirani pouk visoke kvalitete in se izognemo nepotrebnega kompromitiranja te uspešne novitete v pouku. Poleg tega je tako poenotena proizvodnja programiranih tekstov tudi najcenejša.

V ta namen bi morali usposobiti primerno število programerjev, ki bi v odgovarjajočih ekipah izdelovali programirane tekste in druga programirana učna sredstva.

Programske ekipe lahko delajo samostojno ob podpori prosvetno pedagoške službe, znanstvenih in strokovnih pedagoških institucij in podjetij za izdajanje šolskih učbenikov in literature. Ako hočemo, da bo programirani pouk pravilno izveden, moramo usposobiti učitelje. Učitelje moramo usposobiti za programirani pouk že v kadrovskih šolah. Ni pa dovolj, da so o tej novi obliki dela samo informirani, doživljati jo morajo že pri svojem lastnem učenju. Pri tem bi morali v kadrovskih šolah študentom demonstrirati programirani pouk in to ne samo s pomočjo programiranih učbenikov, ampak tudi s pomočjo strojev kakor tudi v visoko mehaniziranih učilnicah.

Učitelje, ki že delajo na šolah, moramo seznaniti s programiranim poukom s pomočjo pedagoške literature, pa tudi na posvetovanjih in seminarjih, ki jih organiziramo v ta namen.

Radio in televizija moreta imeti pri popularizaciji programiranega pouka dvojno vlogo. S pomočjo teh dveh sredstev masovne komunikacije predvsem lahko damo učiteljem in širšemu krogu zainteresiranih potrebne informacije o tem novem pedagoškem dosežku. Po eni strani šolske radio oddaje in televizijske šolske oddaje lahko dajo dosti bolj strokovne nasvete pri uvajanju teh dosežkov v praksi, po drugi strani pa morejo dati delu radio-televizijskega pouka programiran karakter.

Ako hočemo olajšati delo v zvezi s širjenjem programiranega pouka, bi bilo koristno osnovati koordinacijsko telo, ki bi zbiralo informacije in dokumentacijo o vseh novostih s tega področja in v tem pogledu povezovalo osnovne in srednje šole pa tudi visokošolske ustanove. Prek tega telesa bi prišlo do smotrne porazdelitve dela med različnimi ustanovami in poedinci, ki so zainteresirani za programirani pouk. Tako koordinacijsko telo bi moralo imeti občejugoslovanski karakter.

II

Drugi dan posvetovanja je bil posvečen reformi pouka matematike v osnovni šoli.

Prvi je predaval B. Jugović o potrebi spremembe sistema pouka matematike v osnovni šoli. Predvsem nas je seznanil s poskusom, ki se izvaja na osnovni šoli »Jordanovac« v Zagrebu in nekaterih drugih šolah Hrvatske. Skupaj imajo letos 15 eksperimentalnih oddelkov prvega razreda osnovne šole, 15 oddelkov drugega razreda in 2 oddelka tretjega razreda. Pri eksperimentu so se poslužili sistema modernega pouka matematike, ki ga izvajajo v šolah NDR. Prevedli in prilagodili so nemške učbenike za potrebe naše osnovne šole.

Drugi referat je imela tovarišiča V. Brkić-Devčić o sodobnem sistemu pouka matematike v osnovni šoli. Predvsem nas je seznanila z vsebino prevedenega in adaptiranega zgoraj navedenega nemškega učbenika. Z vsem tem smo se praktično seznanili pri hospitacijah v razredih na osnovni šoli Jordanovac, kjer poteka pouk po novih metodah. Ne bi se spuščal v podrobnosti, ker bi moral opisati potek nekaj učnih enot, da bi bolje razumeli, v čem je razlika od sedanjega pouka matematike v osnovni šoli. Lahko pa rečem, da je v teh učbenikih izpuščeno to, kar je še dokajšni balast v naših osnovnih šolah, da je takšen pouk matematike prav res sodoben in prav gotovo pripomore k premostitvenim težavam, ki jih imajo učenci pri prehodu iz 4. ali 5. razreda osnovne šole v 6. razred ali težave, ki jih imajo v 1. letniku srednje šole. Po končani diskusiji in hospitacijah smo prišli do naslednjih ugotovitev:

Vse večje potrebe sodobne družbene ureditve pri nas zahtevajo tudi večjo stopnjo matematičnega znanja vsakega našega državljana. Z današnjim učnim načrtom in učbeniki za osnovno šolo nismo dosegli pri pouku matematike zadovoljivih rezultatov. To smo lahko potrdili s preverjanjem učenčevega znanja z nalogami objektivnega tipa, ki jih pri nas uvajamo že več let. Rezultati pouka matematike niso boljši niti na ostalih šolah. Zaradi tega je reforma pouka matematike eden od najvažnejših problemov, ki jih moramo rešiti. V tem smislu je sprejet eksperiment za reformo pouka matematike v osnovni šoli, ki ga izvajajo že tretje leto v SR Hrvatski. Poudarjeno je tudi

bilo, da moramo nujno uvajati modernizacijo pouka matematike tudi na višji stopnji.

Karakteristika eksperimentalnega učnega načrta matematike je, da je v skladu s sodobno matematično znanostjo in psihologijo, da temelji na teoriji množic, matematični logiki in geometrijskih transformacijah.

Preverjanje eksperimentalnega programa pouka matematike je pokazalo, da učenci obvladajo snov v znatno večji meri kot po sedanjem učnem načrtu, pa čeprav je eksperimentalni program ekstenzivni in intenzivni.

Da bi lahko ta učni načrt matematike realizirali v jugoslovanskih razmerah, bi bilo potrebno:

- da vse kadrovske šole sprejmejo koncepcijo sodobnega učnega načrta matematike in da v tem smislu izvajajo strokovno in metodično usposabljanje bodočih učiteljev,

- da se čimprej izdelata program za dodatno strokovno in metodično izpopolnjevanje učiteljev osnovnih šol,

- da se zaradi končne izdelave učnih načrtov, učbenikov in priročnikov za učitelje formira grupa jugoslovanskih strokovnjakov matematike, pedagogike in psihologije, ki bi postavila kratkoročne in dolgoročne cilje reforme pouka matematike,

- da predložimo petemu kongresu matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, da kot osrednjo temo v sekciji za osnovne šole obdela eksperiment o modernizaciji pouka matematike.

Na posvetovanju smo sprejeli tudi sklep, da ne pristopimo k izvajanju reforme pouka matematike, dokler ne obdelamo eksperimenta in izvršimo vse potrebne kadrovske in materialne priprave.

Poudarjeno je tudi bilo, da šolska televizija lahko nudi veliko pomoč pri teoretičnem in praktičnem izpopolnjevanju učiteljev za uspešno uvajanje reforme pouka matematike.

Stanko Uršič

DESETA MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Julija letos je bila v Moskvi jubilejna X. mednarodna matematična olimpiada. Udeležila se je tudi jugoslovanska ekipa pod vodstvom profesorja Franceta Križaniča. Jugoslovani smo na tem tekmovanju dobili tri tretje in eno specialno nagrado.

V ekipi sva bila tudi dva Slovenca. Najina pot na olimpiado se je začela že zgodaj, na zveznem matematičnem tekmovanju v Beogradu. Po dolgih razpravljanjih so takrat sklenili, da bodo izmed najboljših na zveznem tekmovanju izbrali sedemnajst kandidatov za matematično olimpiado. V poštev so prihajali samo dijaki tretjih in četrtih razredov.

Konec maja so nas vseh sedemnajst klicali v Beograd na izbirno tekmovanje. Imeli smo kratke priprave, nato pa dva dni trajajočo »malo olimpiado«. Ta naj bi pokazala, če smo sposobni reševati naloge olimpijskega tipa. Nekaterne naloge so bile v resnici težke. (Ena od njih je zahtevala nič več in nič manj kot dokaz Wilsonovega izreka iz teorije števil.) Teže je reči, ali so bile olimpijske, saj se snov matematičnih olimpiad iz leta v leto spreminja. Samo po rezultatih tega tekmovanja je bila potem sestavljena osemčlanska ekipa, v kateri sva bila tudi dva slovenska zastopnika, poleg treh Hrvatov in treh Srbov. To je bilo pravzaprav dobro. Slovenija je namreč na zvezno

tekmovanje smela poslati samo sedem zastopnikov, med katerimi sva bila dva iz četrtega razreda. Razmerje v udeležbi med našo in srbsko (pa tudi hrvatsko) ekipo je bilo okrog ena proti štiri, v skupini četrlih razredov pa najbrž še slabše. Pri taki množici tekmovalcev so seveda tako Srbi kot Hrvatje laže računali na uspeh kot mi. (V Beogradu in Zagrebu pa so imeli — kakor vsako leto — celo priprave na zvezno tekmovanje.)

Konec junija je morala vsa ekipa v Beograd. Pred odhodom v Moskvo smo imeli daljše priprave. Predelavali smo naloge in poslušali tudi nekaj krajših predavanj. Zanimivo je, da smo se zelo podrobno lotili Hellyjevega izreka, ki spada pravzaprav na področje topologije in je kot tak malo uporaben pri nalogah, ki se običajno pojavljajo na olimpiadah. Reševali pa smo tudi naloge, ki so bile predlagane za lanske leto matematično olimpiado, ki je bila v Jugoslaviji. Iz teh predlogov bi se dala natisniti zelo lepa knjiga, če ne drugače, vsaj v nekakšni zasilni izdaji.

Takoj po pripravi smo kar iz Beograda odšli v Moskvo. Naš vodja, prof. Križanič, je odšel na pot še pred nami, da bi sodeloval pri delu žirije. Dvodnevno potovanje — naša ekipa je praktično edina potovala z vlakom — na srečo ni bilo preveč utrujajoče. V Moskvi so nas takoj po prihodu namestili v internat oziroma matematično gimnazijo MGU (Moskovske državne univerze). Tu je bila desetega in enajstega julija tudi olimpiada. Delali smo razdeljeni v osem skupin, v vsaki je bil zastopan po en član ekipe. Za tri naloge smo imeli štiri in pol ure časa. Organizacija je bila brezhibna. Slovenska zastopnika sva dobila tekst v slovenščini, drugi v srbohrvaščini. Pred začetkom je prof. Križanič dajal pojasnila o nalogah. Te so bile dane v obliki, ki ni presegala navadnega gimnazijskega učnega načrta. Za reševanje pa je bilo seveda potrebno široko in solidno matematično znanje.

Naloge so bile takele:

Prvi dan

1. Dokaži: Eksistira natanko en trikotnik, v katerem so dolžine stranic zaporedna naravna števila, en kot pa je dvakrat tolik kot eden od drugih dveh.

2. Poišči vse cele pozitivne x , ki imajo produkt cifer (v desetiški številki) enak $x^2 - 10x - 22$.

3. Imejmo sistem enačb z neznankami $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$ax_1^2 + bx_1 + c = x_2$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = x_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$$

kjer so a, b, c realna števila, $a \neq 0$. Dokaži:

I. Sistem nima realnih rešitev, če je $(b - 1)^2 - 4ac < 0$;

II. Sistem ima natanko eno realno rešitev, če je $(b - 1)^2 - 4ac = 0$;

III. Sistem ima več kot eno realno rešitev, če je $(b - 1)^2 - 4ac > 0$.

Drugi dan

4. Dokaži: Vsak tetraeder ima tak vrh, da se da iz robov, ki se stikajo v njem, sestaviti trikotnik.

5. Naj bo $f(x)$ realna funkcija, definirana za vse realne vrednosti argumenta in naj pri vsakem x zadošča pogoju

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

kjer je a dano pozitivno število.

a) Dokaži, da je $f(x)$ periodična funkcija (eksistira $b \neq 0$, da je $f(x+b) = f(x)$ za vse x).

b) Navedi primer take funkcije (ne identično konstantne) za $a = 1$.

6. Naj bo $[x]$ celi del števila x (največje celo število, ki ne presega x). Poišči vsoto

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^\xi}{2^{\xi+1}} \right] + \dots$$

za vsak naravni n in dokaži dobljeno formulo.

Prve vesti o rezultatih naše ekipe niso bile preveč ohrabrujoče. Nazadnje pa smo le dobili tri tretje in eno specialno nagrado. Toliko bolj pa so bili fantastični rezultati drugih ekip. Petnajst udeležencev je imelo maksimalno število točk. Tako so nazadnje podelili prve nagrade samo tem in še tistim, ki so izgubili le eno točko. Vsega skupaj je bilo približno dvajset prvih nagrad. Prav toliko je bilo drugih in približno enako število tretjih nagrad. Po seštevku točk so bili na prvem mestu Vzhodni Nemci, ki so dobili pet prvih in tri druge nagrade. Rusi so bili drugi. Najboljši mož v njihovi ekipi je bil komaj petnajstletni Leningrajec, imeli pa so tudi dve tretji nagradi, ki so jih ocenjevali že kot spodrseljaj. Sledili so jim Madžari in Angleži. Ti dve ekipi sta pobrali skoraj vse specialne nagrade, ki so jih delili za najbolj originalne rešitve nalog. Med Britanci je največjo pozornost zbujal šestnajstletni Simon Norton, ki je že drugič dobil prvo nagrado. Poljaki so imeli dve prvi nagradi. Izredno so presenetili tudi Švedi. Niti eden ni ostal brez nagrade, imeli so celo eno prvo in dve drugi. Za njimi so bili Čehi in Slovaki, Bolgari in Romuni, ki so še zmeraj imeli eno prvo nagrado. Jugoslovani smo bili deseti, za nami so se znašli še Italijani in Mongoli.

Nivo nalog na olimpiadi letos najbrž ni bil višji kot prejšnja leta, nivo matematičnega znanja udeležencev olimpiade pa se je zelo dvignil. To je po eni strani posledica tega, da so nekatere države lahko poslale spet matematike, ki so se že izkazali na olimpiadah, Vsi člani ekip vzhodnih držav so bili poleg tega dijaki specializiranih gimnazij z deset do dvanajst urami matematike na teden. (Pri nas sta to prednost imela le dva Beograjčana.) Kar se tiče zahodnih držav, je za Veliko Britanijo že znano, da ima sijajno razvito šolstvo, pa tudi za Švedsko bo najbrž veljalo isto. Mi smo to poskušali nadomestiti s pospešenim delom na pripravah, ki pa nam niso prinesle mnogo koristi. Pokazalo se je, da je solidno in široko matematično znanje pogoj za uspeh na olimpiadi.

Na koncu bi pripomnil, da so bile priprave zelo nerodno postavljene v čas tik pred odhodom na olimpiado. Dobro bi jih bilo premakniti nekako v čas male olimpiade (konec maja). Dvakratno potovanje iz Ljubljane v Beograd in nazaj je zelo neprijetno in utrujajoče. Če k temu prištejemo še, da včasih (kar se dogaja tudi pri tekmovanjih) niti s prebivališčem ni vse v redu, lahko vsakdo vidi, da tak način ne prinaša mnogo koristi.

Peter Legiša

DOMAČE VESTI

STALIŠČE

Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije k »Tezam o razvoju in izpopolnjevanju sistema izobraževanja in vzgoje v SFRJ«

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije je na sestanku aktiva predavateljev matematike in fizike obravnavalo v naslovu imenovane teze. Ugotovili smo, da so te teze po svojem bistvu le nova inačica »Predloga za izpopolnjevanje izobraževalnega sistema na drugi stopnji« iz leta 1966, ki smo ga skupaj z drugimi strokovnimi društvi in prizadetimi znanstvenimi in pedagoškimi institucijami enodušno odklonili. Nove »teze« se od starega »predloga« nikakor ne razlikujejo v tem, da bi upoštevale vse upravičene vsebinske in metodološke pripombe, ki so bile izrečene, marveč le po tem, da so manj konkretne in bolj nedoločene. Zaradi takšne razlike pa ne vidimo nobenega utemeljenega razloga, da bi zavzeli do novih »tez« drugačno stališče, kot smo ga do starega »predloga« in jih zato prav tako odklanjamo. V tej zvezi naj le še omenimo, da je pedagoško-znanstveni svet filozofske fakultete v Ljubljani ponovno seznanil našo javnost z argumenti za odklonitev tez v svojih stališčih, ki so bila objavljena tudi v Delu, dne 17. in 18. decembra lani. S temi stališči se strinjamo in ne zdi se nam potrebno, da bi jim še kaj dodali.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS

ODGOVOR

ODGOVOR NA VRAŠANJE v Obz. mat. fiz. **14**, 171 (1967)

Izračunati je treba najmanjšo hitrost, s katero moramo izstreliti izstrelak proti Luni, da ravno še doseže točko, v kateri učinkujeta nanj Zemlja in Luna z enakima privlačnima silama. S kolikšno hitrostjo prileti ta izstrelak na površje Lune, če odleti proti Luni?

Odgovor na to vprašanje je poslal S. L., ki pa je pozabil upoštevati gravitacijsko polje Lune.

Potencialna energija kroglastega telesa z maso M v gravitacijskem polju drugega kroglastega telesa z maso m je $- \kappa mM/r$, pri čemer je κ gravitacijska konstanta in r razdalja med središčema obeh teles. Potencialna energija izstrelka z maso M , ki se giblje po zveznici med Zemljo in Luno, je sestavljena iz prispevkov gravitacijskih polj Zemlje in Lune

$$W_p = - \kappa M (m/r + m'/(r_0 - r)).$$

V tej enačbi je m masa Zemlje in m' masa Lune, r je razdalja izstrelka od središča Zemlje in $r_0 - r$ razdalja od središča Lune ter r_0 razdalja med središčema Zemlje in Lune. Upoštevati bi bilo treba še potencialno energijo izstrelka v gravitacijskem polju Sonca, ki ni majhna. A njena sprememba na razdalji med Zemljo in Luno je tako neznatna, da smemo prezreti ta prispevek.

Sili Zemlje in Lune na izstrelek sta v ravnovesju, ko je $-dW_p/dr = 0$. Iz te zahteve sledi enačba $m/r^{*2} = m'/(r_0 - r^*)^2$ in iz nje iskana razdalja

$$r^* = r_0/(1 + (m'/m)^{1/2}).$$

Velja $r^* = 0,9 r_0$, če upoštevamo, da je $m'/m = 0,012$.

Skupna energija izstrelka je sestavljena iz potencialne in kinetične energije. V razdalji r^* mora biti kinetična energija izstrelka enaka nič, tako da velja $W_p(r^*) = W_p(r) + W_k(r)$. V to enačbo vstavimo za r radij Zemlje R in dobimo enačbo za hitrost v izstrelka na površju Zemlje

$$-\kappa (m/r^* + m'/(r_0 - r^*)) = \frac{1}{2} v^2 - \kappa (m/R + m'/(r_0 - R))$$

ter razdaljo do površja Lune $r_0 - R'$ in dobimo enačbo za hitrost v' izstrelka na površju Lune

$$-\kappa (m/r^* + m'/(r_0 - r^*)) = \frac{1}{2} v'^2 - \kappa (m/(r_0 - R') + m'/R').$$

Pri tem ne upoštevamo vrtenja Zemlje. Po kratkem računu dobimo

$$v = v_0 (1 - R/r^* - (m'/m) R (r^* - R)/(r_0 - R)(r_0 - r^*))^{1/2}.$$

V tej enačbi je $v_0 = (2 \kappa m/R)^{1/2} = 11,2 \text{ km/s}$ ubežna hitrost izstrelka z Zemlje. Podobno je

$$v' = v_0' (1 - R'/(r_0 - r^*) - (m'/m') R' (r_0 - R' - r^*)/r^* (r_0 - R'))^{1/2},$$

pri čemer je $v_0' = (2 \kappa m'/R')^{1/2} = 2,36 \text{ km/s}$ ubežna hitrost izstrelka z Lune.

V ti enačbi vstavimo podatke — poleg že navedenih še $r_0 = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m} = 59 R$ — in ugotovimo, da je hitrost v samo za 1 % manjša kot ubežna hitrost z Zemlje in da je hitrost v' samo za 4 % manjša kot ubežna hitrost z Lune:

$$v = 11,1 \text{ km/s} \quad \text{in} \quad v' = 2,26 \text{ km/s}.$$

Naloga je poučna, ker kaže prednost računanja z izrekom o kinetični energiji. Seveda privede tudi računanje z Newtonovim zakonom do enakega rezultata, vendar je pri tem mnogo več pisanja.

* Pri podatkih v vprašanju je nastala tiskovna napaka; pravilno je $m'/m = 0,012$ in $r'/r = 0,27$ in ne obratno.

OBZORNIK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1968

LJUBLJANA

LETNIK XV

Tehnični in odgovorni urednik
Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinč Robert, FNT univerze v Ljubljani
Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani
Cokan Aleksander, VII. gimnazija v Ljubljani
Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani
Pahor Jože, Nuklearni inštitut »Jože Stefan« v Ljubljani
Pivk Valentin, Gimnazija v Škofji Loki
Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani
Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani
Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije
Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije
Natisnila tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani

VSEBINA

Članki

Osnovni pojmi geometrije števil (J. Grasselli)	1
Analogno računanje (J. Pahor)	10
Elektronski računalniki v Sloveniji (Z. Bohte, I. Kuščer, E. Zakrajšek) . .	18
O nakupu novega računalnika (M. Čopič)	33
Neelastično sipanje počasnih nevtronov (V. Dimić)	37
O numerični uporabi neke rekurzivne formule (E. Zakrajšek)	49
O preprostih diferenčnih enačbah (A. Kmet)	54
Astronomija danes (F. Dominko)	64
O nekaterih problemih numerične linearne algebre (Z. Bohte)	97
Numerično reševanje Fredholmovih integralnih enačb druge vrste (A. Suhadolc, J. Vrabec)	106
Gravitacijsko valovanje (J.; Možina)	116
O nihanju relativne frekvence dogodka okrog njegove verjetnosti (R. Jamnik)	145
Dvojna reža pri meritvah zvezdnih premerov (M. Prosen)	155

Novice

Nova dognanja o Fourierovih vrstah (J. Grasselli)	78
Nov poskus k teoriji gravitacije (J. Strnad)	79
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko (A. Suhadolc)	123
Ob stoletnici zamisli o interferometričnem merjenju zvezdnih premerov (M. Prosen)	163
Nove meritve zvezdnih premerov (M. Prosen)	163
Računski center IMFMI (II) (Z. Bohte)	165

Šola

Primer uporabe kvadratne funkcije (I. Molinaro)	84
Anizotropnost lesa za mikrovalove (M. Hribar)	84
Republiško tekmovanje mladih matematikov (F. Marinček)	87

Zvezno tekmovanje matematikov (F. Marinček)	89
Republiško tekmovanje mladih fizikov (M. Hribar)	91
Zvezno tekmovanje mladih fizikov (M. Hribar)	93
Seminarja za fiziko za učitelje osnovnih šol na Dolenjskem 1967/68	95
Programiran pouk in reforma pouka matematike (S. Uršič)	169
Deseta mednarodna matematična olimpiada (P. Legiša)	172

Domače vesti

Slovesna otvoritev na novo opremljene sobe v rojstni hiši Jurija Vega (C. Velkovrh)	173
Stališče Društva . . . k »Tezam o razvoju in izobraževanju . . .«	175

Strokovni jezik

Matematična terminologija (A. Vadnal)	140
---	-----

Vprašanja	48
----------------------------	----

Odgovori	143, 175
---------------------------	----------

OBVESTILO UPRAVE

V zadnjem času smo razposlali opomine vsem, ki še niso poravnali naročnine za starejše letnike Obzornika za matematiko in fiziko oz. članarine za letnik 1968. Ker nam mnogo članov še ni poslalo izpolnjenih prijavnic za članstvo, so morda nekateri prejeli opomin za 15 din (naročnina) namesto za 10 din, kolikor znaša članarina za leto 1968. Prosimo še enkrat, da nam vsi prizadeti pošljejo prijavnice za članstvo v Društvu, kakor je bilo objavljeno v 3.-4. številki XIV. letnika Obzornika.

Obenem obveščamo vse študente, da bodo odslej lahko prejeli Obzornik po znižani naročnini 5 din le preko poverjenika, sicer pa jih bomo smatrali kot člane in bodo morali plačati letno članarino 15 din.

FINANČNI OBRAČUN OBZORNIKA ZA LETO 1968

I. Poslovanje prek banke	din
Lanski saldo	14 949,51
Dohodki: Subvencije	37 540,00
Naročnine	11 439,56
	63 929,07
 Izdatki: Tiskarna Ljudske pravice	 33 203,50
Avtorski honorarji in davek	23 502,61
Bančni stroški	591,16
Dvig v ročno blagajno	4 300,00
	61 597,27
 Saldo ob koncu leta	 <u>2 331,80</u>
 II. Poslovanje prek ročne blagajne	
Lanski saldo	208,85
Dohodki: Dvig iz banke	4 300,00
Naročnine	1 694,10
	6 202,95
 Izdatki: Avtorski honorarji	 3 261,40
Poština, ekspedit in administrativni stroški	2 168,34
	5 429,74

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XV. LETNIK — 4. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE
LJUBLJANA, DECEMBER 1968

VSEBINA

Članki	Stran
O nihanju relativne frekvence dogodka okrog njegove verjetnosti (R. Jamnik)	145
Dvojna reža pri meritvah zvezdnih premerov (M. Prosen)	155
Novice	
Nove meritve zvezdnih premerov (M. Prosen)	163
Računski center IMFM — II (Z. Bohte)	165
Šola	
Programiran pouk in reforma pouka matematike (S. Uršič)	169
Deseta mednarodna matematična olimpiada (P. Legiša)	172
Domače vesti	
Stališče Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije k »Tezam o razvoju in izpopolnjevanju sistema izobraževanja in vzgoje v SFRJ«	175
Odgovor	175

CONTENTS

Articles	Page
On the Oscillation of the Relative Frequency of an Event around its Probability (R. Jamnik)	145
Double Slit at the Measurements of Star Diameters (M. Prosen)	155
News	
The New Measurements of Star Diameters (M. Prosen)	163
Computing Centre of IMFM — II (Z. Bohte)	165
School	169
Home News	175