OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1968
Letnik 15
Številka 3

Izdaja društvo matematikov
fizikov in astronomov SR Slovenije

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinc Robert, FNT univerze v Ljubljani
Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani
Cokan Aleksander, VII. gimnazija v Ljubljani
Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani
Pahor Jože, Nuklearni institut »J. Štefan« v Ljubljani
Pivk Valentin, Gimnazija v Škofji Loki
Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani
Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani
Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije
Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdaja društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujte na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din
za dijake 5 din
za ustanove in podjetja 20 din
za inozemstvo 25 din (2 $)
posamezna številka 5 din

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227. Tel. 55-468.** Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

O NEKATERIH PROBLEMIH NUMERIČNE LINEARNE ALGEBRE

ZVONIMIR BOHTE

1. Uvod

V zadnjem desetletju je bil dosežen velik napredek na področju numeričnih metod linearne algebre. Večina problemov s tega področja je že dolgo znanih. Toda šele v zadnjem času so se pojavile popolnoma nove računske metode za reševanje teh problemov. Ko so se namreč z iznajdbo avtomatičnih računalnikov odprle možnosti za numerično reševanje zahtevnejših nalog, se je izkazalo, da je večina klasičnih metod z redkimi častnimi izjemami popolnoma neuporabna. Zato so se začele pojavljati nove metode, ki so primerne predvsem za avtomatično računanje, odprla pa se je tudi vrsta problemov v zvezi s stabilnostjo računskih postopkov in z analizo napak pri numeričnih izračunih.

Računski problemi linearne algebre so v praksi zelo pogosti. Vzrok za to je prav gotovo iskati v dejstvu, da je teorija linearnih operatorjev dobro izdelana in da imamo zadovoljive numerične metode za reševanje linearnih problemov. Linearni modeli so torej raziskovalcu najdostopnejši. V praksi naletimo tudi na ustrezne naloge v neskončno razsežnem prostoru (diferencialne in integralske enačbe), a računski postopki in računalniki nam omogočajo le določitev približka za rešitev v končno razsežnem prostoru. Očitno je, da so za opisovanje problemov v uporabni matematiki nelinearni modeli bolj realistični. Nelinearne probleme navadno rešujemo tako, da rešitev postopno aproksimiramo z rešitvami bližnjih linearnih problemov. Dober primer za to je Newtonova metoda za reševanje sistemov nelinearnih enačb, kjer iterativno rešujemo bližnje sisteme linearnih enačb. Ker je reševanje nelinearnih problemov navadno povezano s hudimi težavami, je potrebno reševanje linearnih problemov čimbolj poenostaviti in obenem zagotoviti popolno zanesljivost rezultatov.

2. Pregled računskih problemov linearne algebre

Računske naloge linearne algebre se nanašajo na končne matrike in vektorje realnih števil. Ustrezne naloge v obsegu kompleksnih števil rešujemo tako, da prevedemo računanje na realni primer.

Naštejmo sedaj najpogostejše računske probleme linearne algebre!

a) Reševanje sistema linearnih enačb in inverzija matrike

Sistem linearnih enačb zapišemo na kratko v obliki

$$Ax = b$$

kjer je A dana kvadratna matrika reda n, b dani, x pa iskani vektor iz n razsežnega linearnega vektorskega prostora. Navadno suponiramo, da je $\det A \neq 0$, saj tedaj in le tedaj eksistira ena sama rešitev sistema.

V tesni zvezi z reševanjem sistema linearnih enačb je tudi določanje inverzne matrike A^{-1}.

Na reševanje sistemov linearnih enačb pogosto prevedemo reševanje linearnih diferencialnih in integralskih enačb, pa tudi reševanje mnogih problemov v zvezi z interpolacijo in aproksimacijo funkcij. Inverzno matriko potrebujemo često v statistiki.

b) Reševanje problema lastnih vrednosti

Dana je kvadratna matrika A, iščemo pa lastne vrednosti λ in lastne vektorje x $(x \neq 0)$, ki zadoščajo enačbi

$$Ax = \lambda x$$

Lastni vektorji so določeni kvečjemu do konstantnega faktorja. Včasih iščemo le lastne vrednosti, včasih samo nekatere izmed njih in ustrezne lastne vektorje.

Če je matrika A simetrična ($a_{ik} = a_{ki}$), je numerično reševanje problema lastnih vrednosti precej olajšano zaradi dodatnih lastnosti, ki jih imajo lastni sistemi. Lastne vrednosti so tedaj vse realne, ustrezne lastne vektorje pa lahko izberemo tako, da tvorijo ortonormalen sistem. Pri nesimetričnih matrikah je problem bolj kompliciran. Obstajajo lahko kompleksne lastne vrednosti in ni nujno, da ima matrika n linearno neodvisnih lastnih vektorjev. V primeru večkratnih ali skoraj večkratnih lastnih vrednosti so računske težave velike.

Pri nesimetričnih matrikah včasih iščemo tudi leve lastne vektorje, ki zadoščajo enačbi

$$y^T A = \lambda y^T$$

kjer simbol T označuje transponiranje. Vektor y je tedaj lastni vektor transponirane matrike A^T.

Na reševanje problema lastnih vrednosti naletimo pri študiju vibracij, stabilnosti ali resonance linearnih fizikalnih sistemov (na primer pri konstrukciji letal ali reaktorjev).

c) Reševanje predoločenih sistemov linearnih enačb

Naj bo A pravokotna matrika z n vrsticami in m stolpci ($n \geqq m$). Sistem enačb

$$Ax = b$$

kjer ima dani vektor b n komponent, iskani vektor x pa m komponent, v splošnem nima rešitve. Iščemo tak vektor x, ki minimizira izraz

$$\| Ax - b \|_p$$

kjer je

$$\| a \|_p = (\sum_{k=1}^{n} | a_k |^p)^{1/p} \qquad 1 \leqq p < \infty$$

in

$$\| a \|_\infty = \max_{1 \leqq k \leqq n} | a_k |$$

Navadno je p enak 1, 2 ali ∞. Pri $p = 2$ se da naloga enostavno rešiti. Rešitev x zadošča kvadratnemu sistemu

$$A^T A x = A^T b$$

Pri drugih p je reševanje precej bolj kompliciranо.

Na ta problem naletimo pri raznih tipih aproksimacije funkcij in v statistiki.

d) Reševanje problema linearnega programiranja

Naj bodo A, b in x definirani kot v c). Iščemo tak vektor x, ki zadošča sistemu neenačb

$$Ax \geqq b$$

in ki minimizira izraz

$$c^T x$$

kjer je c dani m razsežni vektor.

Problem linearnega programiranja je osrednji problem pri operacijskem raziskovanju.

V nadaljnjem si oglejmo nekaj podrobnosti v zvezi z reševanjem problemov a) in b). Problem c) pri $p = 2$ je dobro obdelan v [6], problem d) pa na primer v [1]. V [2] najdemo zbrano praktično vse znanje v zvezi z reševanjem sistemov linearnih enačb in določanjem lastnih vrednosti matrik do leta 1958. V novejši monografiji [11] so zelo podrobno obdelane novejše metode in tiste starejše, ki so se obnesle tudi v praksi na računalnikih. Knjiga ima posebno vrednost tudi zato, ker vse metode spremlja analiza napak. Izpuščene so le iterativne metode reševanja sistemov linearnih enačb, ki so obdelane v [9]. Wilkinsonova monografija [11] zaključuje obdobje, ko si je lahko amater uspešno izmišljal nove metode, saj se za boljšimi izmed znanih metod skriva že preveč trdo pridobljenih izkušenj in globokih analiz ustreznega algebraičnega procesa.

3. Gaussova eliminacijska metoda

Če izvzamemo tiste sisteme linearnih enačb, pri katerih ima matrika prevladujoče število ničel, ki nastopajo v kakem pravilnem vzorcu, in ki jih navadno rešujemo z iterativnimi metodami, lahko brez tveganja trdimo, da je najprimernejša metoda za numerično reševanje sistemov linearnih enačb klasična Gaussova eliminacijska metoda. Osnovna ideja metode je v tem, da z zaporedno eliminacijo neznank prevedemo sistem na ekvivalentni s trikotno matriko.

Prvotni sistem označimo z

$$A^{(1)} x = b^{(1)}$$

Tvorimo ekvivalentne sisteme $A^{(r)} x = b^{(r)}$, $r = 2, 3 \ldots, n$ tako, da je matrika $A^{(n)}$ zgornja trikotna matrika ($a_{ik}^{(n)} = 0$ za $i > k$). Tipična oblika matrike $A^{(r)}$ je očitna iz primera pri $n = 5$ in $r = 3$:

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Tu $\times$ označuje v splošnem od nič različen element. Matrika $A^{(r)}$ je že zgornja trikotna v prvih r vrsticah. V desnem spodnjem vogalu imamo še kvadratno matriko reda $n - r + 1$. Na tem koraku eliminacije želimo eliminirati neznanko x_r iz zadnjih $n - r$ enačb, to je doseči v r-tem stolpcu pod diagonalo same ničle. Matriko $A^{(r+1)}$ dobimo torej iz matrike $A^{(r)}$ tako, da množimo r-to vrstico z m_{ir} in jo odštejemo od i-te za $i = r + 1, \ldots, n$. Mnogokratniki m_{ir} so definirani takole:

$$m_{ir} = a_{ir}^{(r)} / a_{rr}^{(r)} \qquad i = r + 1, \ldots, n$$

Število $a_{rr}^{(r)}$ imenujemo pivot na r-tem koraku eliminacije. Formule za elemente $a_{ik}^{(r+1)}$ so torej:

$$a_{ik}^{(r+1)} = a_{ik}^{(r)} - m_{ir}\, a_{rk}^{(r)} \qquad i, k = r + 1, \ldots, n$$

Desne strani enačbe se transformirajo na podoben način:

$$b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} - m_{ir}\, b_r^{(r)} \qquad i = r + 1, \ldots, n$$

Rešitev sistema dobimo zelo enostavno iz trikotnega sistema

$$Ux = c$$

kjer je $U = A^{(n)}$ in $c = b^{(n)}$:

$$x_i = (c_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}\, x_k)/u_{ii} \qquad i = n, n - 1, \ldots, 1$$

Število množenj in deljenj je pri tej metodi enako

$$\sum_{r=1}^{n-1} [2\,(n - r) + (n - r)^2] + \sum_{i=n}^{1} (n - i + 1) = \tfrac{1}{3}\, n^3 + n^2 - \tfrac{1}{3}\, n$$

Seštevanj in odštevanj je le nekoliko manj

$$\tfrac{1}{3}\, n^3 + \tfrac{1}{2}\, n^2 + \tfrac{1}{6}\, n$$

Nedavno je bilo dokazano [3], da pri nobeni metodi, ki uporablja racionalne operacije, v splošnem ni možno shajati z manj aritmetičnimi operacijami.

Pri današnjem stanju razvoja računske tehnike je možno reševati sisteme enačb z n okrog 100 hitro in poceni, z n okrog 1000 pa je reševanje komajda še tehnično možno, če matrika nima kakih olajševalnih posebnosti.

Z Gaussovo metodo moremo izračunati tudi inverzno matriko. Rešitve sistemov

$$Ax^{(i)} = e^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

kjer je $e^{(i)}$ i-ti enotni vektor, so stolpci inverzne matrike A^{-1}. Pri računanju seveda upoštevamo, da je matrika A pri vseh sistemih ista. Število množenj in deljenj je pri tem enako n^3.

Jasno je, da opisani računski postopek odpove, brž ko je kak pivot $a_{rr}^{(r)}$ enak nič. Če je $\det A \neq 0$, se da deljenju z nič izogniti na več načinov. V navadi sta dva načina pivotiranja, to je izbire pivotov:

a) delno pivotiranje:

Na vsakem koraku eliminacije izberemo za pivot absolutno največji element v prvem stolpcu preostale kvadratne matrike. Naj velja na r-tem koraku eliminacije

$$| a_{sr}^{(r)} | = \max_{r \leqq i \leqq n} | a_{ir}^{(r)} |$$

Tedaj zamenjamo v sistemu r-to in s-to enačbo ter izvedemo eliminacijo. Če je $\det A \neq 0$, ne morejo biti vsi $a_{ir}^{(r)}$, $i = r, \ldots, n$ enaki nič, saj velja

$$\det A = a_{11}^{(1)} \ldots a_{r-1,\, r-1}^{(r-1)} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{rr}^{(r)} & \ldots & a_{rn}^{(r)} \\ \\ a_{nr}^{(r)} & \ldots & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}$$

b) kompletno pivotiranje:

Na vsakem koraku eliminacije izberemo za pivot absolutno največji element v celotni preostali matriki. Če je na r-tem koraku

$$| a_{st}^{(r)} | = \max_{r \leqq i,\, k \leqq n} | a_{ik}^{(r)} |$$

tedaj zamenjamo v sistemu r-to in s-to enačbo, ter preimenujemo r-to in t-to neznanko. Nato izvršimo eliminacijo po opisanih formulah. Če je $\det A \neq 0$, ne morejo biti vsi $a_{ik}^{(r)}$, $i, k = r, \ldots, n$ enaki nič.

Pri avtomatičnem računanju izbiranje pivota poveča število aritmetičnih operacij, a analiza napak pokaže, da je pivotiranje v splošnem potrebno. Če bi za pivot izbrali poljuben od nič različen element, bi rešitev utegnila imeti poljubno veliko napako.

V obeh primerih pivotiranja množitelji m_{ik} absolutno ne presegajo števila 1.

Edini izvor napake pri Gaussovi metodi, ki je teoretično eksaktna, so zaokrožitve pri aritmetičnih operacijah. Vzemimo, da uporabljamo računalnik, pri katerem je relativna zaokrožitvena napaka pri vseh štirih osnovnih aritmetičnih operacijah omejena s številom a. To število je odvisno od številčne osnove in števila mest pri upodobitvi števil v računalniku in od načina zaokroževanja. (Pri Z-23 je $a = 2^{-30} \doteq 10^{-9}$.)

Vzemimo, da noben element prvotne matrike absolutno ne presega 1:

$$| a_{ik} | \leqq 1, \quad i, k = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

Če z $g(n)$ označimo absolutno največji element vseh transformiranih matrik $A^{(r)}$:

$$g(n) = \max_{1 \leqq i,k,r \leqq n} | a_{ik}^{(r)} |$$

moremo izraziti eno izmed tipičnih Wilkinsonovih ocen za napako v naslednji obliki [10]:

$$\frac{\| X - A^{-1} \|}{\| A^{-1} \|} \leqq 0{\cdot}78 \,.\, a \,.\, n^{7/2} \,.\, g(n) \,.\, \| A^{-1} \|$$

Tu je X približno izračunana inverzna matrika z Gaussovo metodo s pivotiranjem. Pri tem je $\| A \| = \max [\lambda_i (A^T A)]^{1/2}$, kjer smo z $\lambda(A)$ označili lastno vrednost matrike A. Očitno je napaka tem manjša, čim manjša je osnovna zaokro-

žitvena napaka a. Velikost ocene za napako pa je odvisna tudi od ocene za $g(n)$. Če izvajamo eliminacijo brez pivotiranja, je $g(n)$ lahko poljubno veliko število. Pri delnem pivotiranju se da hitro dokazati ocena

$$g(n) \leqq 2^{n-1}$$

Eksistirajo matrike B_n reda n, pri katerih zadnji pivot res doseže to vrednost. Na primer

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pri tem je

$$B_5^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Pri kompletnem pivotiranju je zelo težko dobiti dobro oceno za $g(n)$. Wilkinson [10] je dokazal oceno

$$g(n) \leqq [n \prod_{k=2}^{n} k^{1/(k-1)}]^{1/2}$$

Enačaj velja samo pri $n = 2$, sicer pa je ocena znatno pregroba. Izboljšanje zgornje ocene je še nerešen problem. Obstaja domneva, da velja $g(n) \leqq n$, saj ni znana nobena matrika z realnimi elementi, pri kateri bi veljalo $g(n) > n$ (seveda pri pogoju (*)). Znane so matrike C_n, pri katerih je $g(n) = n$, in še to le za n oblike 2^p, na primer

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pri tem je

$$C_4^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Pri nekaterih posebnih matrikah se dajo dobiti dosti ugodnejše ocene za $g(n)$ [10]. Oglejmo si nekaj primerov:

a) Če je A pozitivno definitna matrika (to je, če je simetrična in ima vse lastne vrednosti pozitivne), je

$$g(n) \leqq 1$$

celo brez pivotiranja.

b) Če je A $2p+1$ diagonalna matrika ($a_{ik} = 0$ za $|i-k| > 2p$), je

$$g(n) \leqq 2^p$$

pri delnem pivotiranju.

c) Če je A zgornja Hessenbergova matrika ($a_{ik} = 0$ za $i > k+1$), je

$$g(n) \leqq n$$

pri delnem pivotiranju.

d) Če je A diagonalno dominantna matrika ($|a_{kk}| > \sum_{i \neq k} |a_{ik}|$ za $k = 1, 2, \ldots, n$), je

$$g(n) \leqq 2$$

celo brez pivotiranja.

Wilkinson je izdelal in analiziral tudi zelo natančen postopek za iterativno izboljšanje približne rešitve, ki jo dobimo pri Gaussovi eliminaciji. Rešitve sistemov enačb in inverzne matrike se dajo na ta način presenetljivo natančno izračunati. Napake so takšnega reda velikosti kot neodstranljive napake zaradi upodobitve matričnih elementov v mejah delovne natančnosti.

4. Lastne vrednosti simetričnih matrik

Za računanje lastnih vrednosti simetričnih matrik se od klasičnih metod v novejšem času v praksi uporablja le še Jacobijeva metoda. Zaradi svoje preprostosti in učinkovitosti je še vedno ena najbolj priljubljenih. Po tej metodi tvorimo k dani simetrični matriki $A = A^T = A_1$ zaporedje podobnih matrik

$$A_{k+1} = U_k^T A_k U_k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

kjer je U_k ortogonalna matrika, ki pomeni elementarno rotacijo v neki dvorazsežni koordinatni ravnini. V osnovni varianti Jacobijeve metode izberemo ravnino tako, da poiščemo absolutno največji izvendiagonalni element matrike A_k. Indeksa tega elementa določata ravnino, kot rotacije pa izberemo tako, da je v transformirani matriki A_{k+1} element na istem mestu enak nič. Če na ta način po vrsti anihiliramo vedno absolutno največji izvendiagonalni element, se da dokazati, da matrike A_k konvergirajo k diagonalni matriki, ki ima na diagonali lastne vrednosti matrike A [2]. Pri uporabi metode prekinemo iteracijo tedaj, ko so izvendiagonalni elementi zadnje matrike dovolj majhni. Približki za lastne vektorje pa so stolpci produkta vseh transformacijskih matrik U_k.

Konvergenca Jacobijeve metode je dokazana tudi v primeru, ko po vrsti anihiliramo vse izvendiagonalne elemente, ki so absolutno nad povprečjem vseh izvendiagonalnih elementov, pa tudi, če jih anihiliramo kar po vrsti, ne glede na velikost. Konvergenca je kvadratična, kar pomeni, da je napaka nekega približka proporcionalna kvadratu napake prejšnjega približka.

Jacobijeva metoda je osnova mnogim novejšim metodam. Givens je z $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ rotacijami prevedel matriko na tridiagonalno obliko, nato pa računal lastne vrednosti tridiagonalne matrike z metodo bisekcije. Householder je prevedbo matrike na tridiagonalno obliko še poenostavil in zmanjšal število aritmetičnih operacj na polovico. Lastne vektorje tridiagonalne matrike je dokaj enostavno računati z inverzno iteracijo. Podrobnosti o teh metodah lahko

bralec najde v [11]. Problem lastnih vrednosti za simetrične matrike je zadovoljivo rešen. Imamo zanesljive in hitre metode, ki so zelo neobčutljive za zaokrožitvene napake in večkratne ali skoraj večkratne lastne vrednosti ne povzročajo nobenih težav.

5. Lastne vrednosti nesimetričnih matrik

Skoraj vse klasične metode so težile k izračunu karakterističnega polinoma dane matrike $\det(A - \lambda I)$, saj je bilo že davno znanih dosti dobrih metod za računanje ničel polinoma [2]. Pri majhnih redih matrik ($n = 3, 4, 5$) so te metode dajale večinoma tudi dobre rezultate. Pri večjih matrikah pa se je izkazalo, da so zaradi zaokrožitvenih napak rezultati večinoma neuporabni, ker so ničle polinomov preveč občutljive na majhne spremembe v koeficientih polinoma, ki so bili nujno izračunani le kot približki. V zadnjem desetletju je bilo največ del na področju numeričnih metod linearne algebre usmerjenih prav k zadovoljivi rešitvi problema lastnih vrednosti za nesimetrične matrike. Pred tem časom je bila edina uporabna metoda potenčna metoda [11], ki jo še danes uporabljamo za računanje absolutno največje lastne vrednosti. Pravega analogona Jacobijevi metodi za nesimetrične matrike se navzlic trdovratnim poskusom ni posrečilo odkriti.

Podobno, kot se je pri simetričnih matrikah izkazalo za ugodno najprej matriko s podobnostno transformacijo prevesti na enostavnejšo (tridiagonalno) obliko, je tudi pri nesimetričnih matrikah ekonomično prevesti matriko s podobnostnimi ortogonalnimi transformacijami na Hessenbergovo obliko (na primer s Householderjevo metodo).

Hyman je odkril enostavno metodo za računanje vrednosti in odvodov karakterističnega polinoma Hessenbergove matrike tako pri realnem kot kompleksnem argumentu, ne da bi bilo treba računati koeficiente tega polinoma [11]. S tem je možno uporabiti poljubno metodo za reševanje enačb in Parlett [7], [12] je izdelal zelo zanesljiv algoritem za računanje lastnih vrednosti poljubne realne matrike tako, da je kombiniral Hymanovo in Laguerrovo metodo.

Rutishauser [8] je z odkritjem LR-algoritma odprl novo smer iskanja boljših metod. Francis [4], [5], [12] je z njegovimi idejami izdelal doslej najboljšo metodo QR-algoritem. Pri tej metodi tvorimo zaporedje matrik ($A_1 = A$):

$$A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

kjer je Q_k ortogonalna matrika, R_k pa zgornja trikotna matrika. Vse matrike A_k so si med seboj ortogonalno podobne. Izkaže se, da matrike A_k po obliki konvergirajo k »bločni« zgornji trikotni matriki. Enostavni diagonalni elementi (bloki dimenzije 1) konvergirajo k ustrezni realni lastni vrednosti, diagonalni bloki dimenzije 2 pa sicer ne konvergirajo, a njihove lastne vrednosti konvergirajo k ustreznemu paru kompleksnih lastnih vrednosti. Vsi ostali poddiagonalni elementi pa konvergirajo proti nič. Metoda je z mnogimi dodatki zelo izpopolnjena [12]. Izredno učinkovita je tudi pri simetričnih matrikah.

Računanje lastnih vektorjev nesimetričnih matrik ostaja še pereč problem. Seveda so določene težave pri tem skoraj neogibne. Lahko se zgodi, da so lastni vektorji skoraj linearno odvisni, ali pa, da neka bližnja matrika nima dovolj linearno neodvisnih lastnih vektorjev. To često nastopi, če imamo opravka s skoraj večkratnimi lastnimi vrednostmi.

Za računanje lastnih vektorjev Hessenbergove matrike se v praksi največ uporablja metoda inverzne iteracije. Tvorimo zaporedje vektorjev x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ po pravilu

$$(A - \lambda I)\, x_{k+1} = x_k$$

kjer je λ približek za lastno vrednost. Če je ustrezna lastna vrednost zadovoljivo separirana od ostalih lastnih vrednosti, zaporedje vektorjev hitro konvergira k ustreznemu lastnemu vektorju pri skoraj poljubnem začetnem vektorju x_0. V primeru skoraj enakih lastnih vrednosti so težave znatno večje. Število potrebnih iteracij se poveča, pa se tudi zgodi, da dobimo v limiti vektor, ki se komajda loči od že izračunanega lastnega vektorja.

V zadnjem času se množijo poskusi, kako zadovoljivo rešiti problem lastnih vektorjev. Kaže, da bi bilo ugodneje računati vektorje, ki popisujejo invariantne podprostore.

Prostor ne dopušča podrobnejšega opisa omenjenih metod. Bralec, ki bi ga zanimale podrobnosti, bo našel v Wilkinsonovi knjigi [11] praktično vse.

Na koncu omenimo še en odprt problem na tem področju, to je problem ekvilibracije matrik. Obstaja veliko eksperimentalnih dokazov za to, da je potrebno dano matriko pred uporabo numerične metode tako ekvivalenčno transformirati, da niso v nobeni vrstici ali v nobenem stolpcu sami majhni elementi. V nasprotnem primeru lahko dobimo katastrofalne rezultate. Ta pojav še ni v celoti pojasnjen, niti niso znane zanesljive metode za dosego takšnega cilja. Več o tem bo bralec našel v [3].

Glede na buren razvoj na tem področju smemo v kratkem pričakovati rešitve večine omenjenih problemov.

LITERATURA

[1] Dantzig G. B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[2] Faddeev D. K. i V. N. Faddeeva: Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry, Fizmatgiz, Moskva, 1960.

[3] Forsythe G. E.: Today's computational methods of linear algebra, SIAM Review 9 (1967), 489—515.

[4] Francis J. G. F.: The QR transformation; a unitary analogue to the LR transformation, Part I, Comput. J. 4 (1961), 265—271.

[5] Francis J. G. F.: The QR transformation, Part II, Comput. J. 4 (1962), 332—345.

[6] Golub G. and W. Kahan: Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix, J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal. 2 (1965), 205—224.

[7] Parlett B.: Laguerre's method applied to the matrix eigenvalue problem, Math. Comp. 18 (1964), 464—485.

[8] Rutishauser H.: Solution of eigenvalue problems with the LR-transformation, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. 49 (1958), 47—81.

[9] Varga R. S.: Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1962.

[10] Wilkinson J. H.: Error analysis of direct methods of matrix inversion, J. Assoc. Comput. Mach. 8 (1961), 281—330.

[11] Wilkinson J. H.: The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.

[12] Zakrajšek E.: Numerično računanje lastnih vrednosti nesimetričnih matrik (diplomsko delo), 1965.

NUMERIČNO REŠEVANJE FREDHOLMOVIH INTEGRALSKIH ENAČB DRUGE VRSTE*

A. SUHADOLC in J. VRABEC

Integralske enačbe so pomembno orodje v matematični analizi, prav tako jih često srečamo v uporabni matematiki.

Najprej naredimo bežen pregled teorije integralskih enačb!

Integralsko enačbo imenujemo vsako tako funkcionalno enačbo, v kateri nastopa iskana funkcija pod integralom. Posebno pomembne in dobro proučene so linearne enačbe oblike

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

kjer je $\psi(x)$ iskana funkcija, λ je dano število, $f(x)$ in $K(x, y)$ sta dani funkciji. Najbolj izdelana je teorija integralskih enačb oblike (1) v primeru, ko je jedro integralske enačbe, to je funkcija $K(x, y)$, s kvadratom integrabilna merljiva funkcija:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\, dxdy < \infty \tag{2}$$

V tem primeru definira predpis

$$g(x) = \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy, \qquad f(x) \in L^2(a, b) \tag{3}$$

linearno zvezno preslikavo Hilbertovega prostora $L^2(a, b)$ vase. Integralske enačbe s takim jedrom imenujemo Fredholmove integralske enačbe. Pri tem predpostavljamo, da je tudi desna stran, to je funkcija $f(x)$ v enačbi (1), v $L^2(a, b)$. *Če pa je* $f(x) \equiv 0$, imenujemo enačbo homogeno Fredholmovo integralsko enačbo

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0 \tag{4}$$

Ta enačba ima vedno trivialno rešitev $\varphi(x) \equiv 0$. Pri enačbi (4) iščemo take vrednosti parametra λ, pri katerih ima enačba netrivialne rešitve v $L^2(a, b)$. Take λ, če eksistirajo, imenujemo karakteristična števila. Pripadajoče netrivialne rešitve imenujemo lastne funkcije.

Teorijo Fredholmovih integralskih enačb lahko na kratko povzamemo v treh izrekih:

1. Integralska enačba (1) ima rešitev v $L^2(a, b)$ pri vsaki desni strani $f(x) \in L^2(a, b)$, če λ ni karakteristično število. Rešitev je ena sama.

2. Če je λ karakteristično število, je integralska enačba (1) rešljiva natanko tedaj, ko $f(x)$ zadošča pogoju $\int f(x)\, w(x)\, dx = 0$, kjer je $w(x)$ poljubna rešitev homogene adjungirane integralske enačbe

* Delo je financiral Sklad Borisa Kidriča.

$$w(x) - \lambda \int_a^b \overline{K(y,x)}\, w(y)\, dy = 0$$

3. Homogena integralska enačba (4) ima kvečjemu številno mnogo karakterističnih števil. Če jih je neskončno, naraščajo po absolutnih vrednostih prek vsake meje. Vsakemu karakterističnemu številu pripada le končno mnogo linearno neodvisnih lastnih funkcij.

Če je jedro hermitsko, torej če je $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, velja še dodatno:

4. Če jedro ni identično enako 0, ima homogena enačba (4) vsaj eno karakteristično število. Karakteristična števila so realna. Lastni funkciji, ki pripadata različnima karakterističnima številoma, sta ortogonalni.

Fredholmove integralske enačbe navadno delimo na dva razreda: če je integracijski interval (a,b) končen, jedro $K(x,y)$ zvezna funkcija obeh spremenljivk, desna stran $f(x)$ tudi zvezna funkcija, imenujemo integralsko enačbo nesingularno. V vseh ostalih primerih pa singularno (v ožjem smislu). Rešitev nesingularne integralske enačbe je seveda tudi zvezna funkcija.

Fredholmove integralske enačbe druge vrste delimo še po drugem vidiku. Če je jedro $K(x,y) = 0$ nad diagonalo, torej za $x < y$, imenujemo pripadajočo integralsko enačbo (1) Volterrovo. Za to velja izrek, da je rešljiva pri vsaki desni strani $f(x) \in L^2(a,b)$ pri vseh λ.

Iz izrekov 1. do 4. bi sklepali, da pri reševanju enačbe (1) ni težav; če λ ni karakteristično število, je enačba enolično rešljiva. V praksi seveda ni tako enostavno. Zelo malo integralskih enačb moremo rešiti eksplicitno in malokrat se dajo eksplicitno izračunati karakteristična števila. Pri danem λ_0 in pri dani enačbi (1) zatorej ne vemo, ali je λ_0 karakteristično število ali ne, zato tudi ne vemo, ali je dana enačba sploh rešljiva. Oglejmo si sedaj pregled najenostavnejših in najbolj znanih metod za numerično reševanje enačbe (1).

Za približen izračun rešitve Fredholmove integralske enačbe (1) in (4) imamo vrsto numeričnih metod. Odslej naprej bomo vedno predpostavili, da je enačba (1) nesingularna in da sta funkciji $K(x,y)$ in $f(x)$ realni.

Najprej si oglejmo numerične metode za reševanje enačbe (1)! Te delimo na več razredov; delitev je v veliki meri samovoljna. Napravimo jo vseeno, že zaradi preglednosti.

a) Metoda kvadraturnih formul (Nyströmova metoda).
b) Nadomestitev jedra z degeneriranim jedrom.
c) Iskanje rešitve z nastavkom.
d) Iteracijske metode.
e) Druge metode.

Opišimo na kratko osnovne ideje pri teh metodah!

a) Metoda kvadraturnih formul (Nyströmova metoda).

Pri tej nadomestimo integral v enačbi (1) s končno vsoto tako, da uporabimo kakšno kvadraturno formulo (npr. trapezno, Simpsonovo ali Gaussove). Integral $\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$ nadomestimo torej z vsoto

$$\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy \approx \sum_{j=1}^{n} A_j\, K(x,x_j)\,\varphi(x_j) \qquad (5)$$

Tu so števila A_j uteži, x_j pa vozli kvadraturne formule.

Z uporabo približka (5) za integral izpeljemo sistem linearnih enačb, s katerim nadomestimo enačbo (1):

$$\tilde{\varphi}(x_k) - \lambda \sum_{j=1}^{n} K(x_k, x_j)\, \tilde{\varphi}(x_j) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

Sistem rešimo in števila $\tilde{\varphi}(x_k)$ vzamemo za približke k vrednostim rešitve $\varphi(x)$ v točkah x_k. Pri kakem drugem x izračunamo vrednost približka s kakšno interpolacijsko formulo.

Metoda ni komplicirana. Koeficienti sistema se izražajo z vrednostmi jedra $K(x, y)$ v točkah x_k, x_j. Reševanje linearnega sistema principialno tudi ne predstavlja težav. Za Nyströmovo metodo velja izrek o konvergenci postopka: če λ ni karakteristično število, konvergirajo približne rešitve, ki jih dobimo iz sistema (6), z naraščajočim n proti rešitvi enačbe (1); to velja gotovo v primeru, ko je uporabljena kvadraturna formula trapezna, Simpsonova ali Gaussova. Principialno je mogoče dobiti tudi oceno napake, to je razliko med rešitvijo $\varphi(x)$ in približkom $\tilde{\varphi}(x_k)$: napaka $= \max \left| \varphi(x_i) - \tilde{\varphi}(x_i) \right|$. Napaka je v bistvu sorazmerna natančnosti, s katero uporabljena kvadraturna formula aproksimira integrala $\int K(x, t)\, K(t, y)\, dt$ in $\int K(x, y)\, f(y)\, dy$.

Poleg opisane osnovne izvedbe metode Nyströma poznamo še mnogo inačic. Več o teh in o konvergenčnih izrekih glej v citiranem elaboratu, kjer je navedena tudi izčrpna literatura.

b) Nadomestitev jedra z izrojenim.

Jedro $K(x, y)$ integralske enačbe (1) aproksimiramo s končno vsoto

$$K(x, y) \approx \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(y) = K_1(x, y)$$

kjer so $a_i(x)$ in $b_i(y)$ linearno neodvisne funkcije. Za konstrukcijo jedra $K_1(x, y)$, imenovano degenerirano jedro, imamo več metod.

Bistveno pri tej metodi pa je to, da je integralska enačba (1) z jedrom $K_1(x, y)$ eksaktno rešljiva. Njena rešitev je

$$\psi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_k\, a_k(x)$$

kjer so števila $c_1, c_2, \ldots, c_n$ rešitve linearnega sistema enačb

$$c_k - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\, c_j = f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

Tu pomeni: $A_{kj} = \int_a^b b_k(x)\, a_j(x)\, dx$, $f_k = \int_a^b f(x)\, b_k(x)\, dx$.

Tako kot pri Nyströmovi metodi smo tudi pri tej prevedli približno reševanje enačbe (1) na reševanje sistema linearnih enačb. Principialno se more tudi sedaj ocenit inapaka, to je izraz $\max \left| \varphi(x) - \psi(x) \right|$.

c) Iskanje rešitve v obliki nastavka.

Približek za rešitev enačbe (1) skušamo aproksimirati z vsoto

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \varphi_k(x) \tag{8}$$

kjer so c_k še števila, ki jih je treba določiti, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ pa so dane funkcije. Nastavek vstavimo v enačbo (1) in dobimo

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b K(x, y) \varphi_k(y)\, dy - f(x) = 0 \qquad (9)$$

Tej enačbi navadno ni mogoče zadostiti pri nobenih vrednostih koeficientov $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Seveda pa smemo sklepati, da je nastavek (8) tem boljši približek za rešitev $\varphi(x)$ enačbe (1), čim manjša je funkcija $r(x)$, definirana v enačbi (9). Sedaj pa imamo na voljo več kriterijev, kdaj smatramo neko funkcijo za majhno. Vzemimo dva:

1. Zahtevajmo, da naj bo $r(x) = 0$ v n točkah $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Če te zahteve izpišemo, dobimo za koeficiente c_i sistem n linearnih enačb

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x_j) - \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b K(x_j, y) \varphi_k(y)\, dy - f(x_j) = 0 \qquad (10)$$

za $j = 1, \ldots, n$. Metodo, pri kateri določimo koeficiente nastavka (8) iz tega sistema, imenujemo kolokacijo, točke $x_1, \ldots, x_n$ pa kolokacijske točke.

2. Zahtevajmo, da naj bo $r(x)$ ortogonalen na vseh funkcijah $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$! To nam da za koeficiente c_k naslednji sistem enačb:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x)\, dx - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \int_a^b K(x, y)\ \varphi_i(y) \varphi_k(x)\, dx dy - \\ - \int_a^b f(x) \varphi_k(x)\, dx = 0 \qquad (11)$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$. To varianto imenujemo Ritz-Galerkinovo metodo. Obe metodi imata skupno to, da prevedemo reševanje integralske enačbe (1) na reševanje sistema linearnih enačb (10) ali (11). Ko izračunamo števila $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *jih* vstavimo v nastavek (8) in dobimo tako približek $\psi(x)$ k rešitvi $\varphi(x)$.

Pripominjamo še, da je vsak od sistemov (6), (10), (11) bolj kompliciran od prejšnjega. Koeficienti sistema (6) so vrednosti jedra $K(x, y)$, koeficienti sistema (10) so že integrali in koeficienti sistema (11) so celo dvojni integrali.

Za obe varianti moremo dokazati, da konvergirajo približne rešitve z naraščajočim n k rešitvi enačbe (1) pri primernih dodatnih pogojih. Znane so tudi ocene napak.

d) Iteracijske metode.

Najenostavnejši zastopnik iteracijskih metod je Neumannova iteracija. Pri tej iščemo zaporedne približke k rešitvi integralske enačbe (1) po predpisu

$$\psi_0(x) = f(x), \quad \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-1}(y)\, dy$$

Približki $\varphi_n(x)$ konvergirajo proti rešitvi $\varphi(x)$ gotovo tedaj, ko je vrednost parametra λ absolutno pod $|\lambda_1|$, kjer je λ_1 po absolutni vrednosti najmanjše karakteristično število integralske enačbe. Zaporedni približki konvergirajo približno kot geometrično zaporedje s kvocientom $|\lambda| / |\lambda_1|$.

Poleg Neumannove iteracije imamo še na desetine sorodnih, bolj ali manj splošnih iteracij. Navedimo še dve, ki se močno razlikujeta od Neumannove! To sta iteraciji Položega in Čalenka ter iteracija Sokolova. Podrobneje opišimo le zadnjo!

Integralsko enačbo (1) lahko zapišemo v obliki

$$\varphi(x) = \mathrm{f}(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy - \lambda \int_a^b K(x, y)\, (\psi(y) - \varphi(y))\, dy$$

kjer je $\psi(x)$ še poljubna funkcija. Sedaj vzamemo m linearno neodvisnih funkcij $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ in tvorimo linearen podprostor, ki ga te funkcije določajo. Vanj projiciramo funkcijo $\psi - \varphi$ in to projekcijo označimo s $P[\psi(x) - \varphi(x)]$. V zgornji enačbi nadomestimo razliko $\psi(x) - \varphi(x)$ pod drugim integralom s prcjekcijo $P(\psi(x) - \varphi(x))$ ter tvorimo zaporedje približkov po predpisu

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi_{n-1}(y)\, dy + \lambda \int_a^b K(x, y)\, P[d_{n-1}(y)]\, dy \qquad (12)$$

kjer je

$$\varphi_0(x) = f(x),\ d_n(x) = \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\,.$$

Tudi za opisano metodo Sokolova so dokazani izreki o konvergenci postopka, ko gre število m prek vsake meje.

e) Druge metode.

Poleg opisanih metod imamo še več metod, ki so primerne za jedra posebne oblike (npr. konvolucijska jedra, kjer je $K(x, y) = K(x - y)$) ali pa metode, ki jih ne moremo uvrstiti v zgoraj naštete razrede metod. Primer take metcde je npr. metoda Monte Carlo. Nobena od teh ni posebno zanimiva, vsaj ne s stališča uporabe na računalniku Z-23.

Tudi metode za približno računanje rešitve homogene integralske enačbe lahko podobno razdelimo na:

a) Metodo kvadraturnih formul (Nyströmova metoda).
b) Nadomestitev jedra z izrojenim in iskanje rešitve z nastavkom.
c) Iteracijske metode.
d) Druge metode.

a) Metoda kvadraturnih formul (Nyströmova metoda).

Prav tako kot pri nehomogeni enačbi (1) tudi pri reševanju homogene enačbe (4) nadomestimo integral s kvadraturno formulo. Dobimo seveda homogen sistem. Karakteristična števila temu sistemu pripadajoče matrike vzamemo za približke k prvim n karakterističnim številom integralske enačbe (4), lastne vektorje matrike pa za približke k lastnim funkcijam enačbe (4).

b) Nadomestitev jedra z izrojenim in iskanje rešitve z nastavkom.

Pri teh metodah dobimo prav tako kot pri nehomogeni enačbi linearen sistem enačb, ki pa je sedaj homogen. Iz teh izračunamo približke h karakterističnim številom integralske enačbe kot pri prejšnji metodi. Lastni vektorji matrike pa nam dajo konstante $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ki jih moramo vstaviti v nastavek (8), od koder izračunamo približke k lastnim funkcijam za vsak $x \in (a, b)$.

Vse metode pod a) in b) so teoretično zadovoljivo obdelane: poznamo izreke, ki povedo, da postopki konvergirajo (pri primernih pogojih).

c) Iteracijske metode.

Najenostavnejša je Kellogova iteracija. Tu iščemo lastno funkcijo enačbe (4) s predpisom

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b K(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy \qquad \varphi_0(x) \text{ poljuben}$$

Približki $\varphi_n(x)$ konvergirajo (razen v izjemnih primerih, ki v praksi komaj kdaj nastopijo) proti lastnemu vektorju, ki pripada najmanjšemu karakterističnemu številu λ_1, kvocienti $\frac{\int |\varphi_{n+1}|^2\, dx}{\int |\varphi_n|^2\, dx}$ pa proti λ_1. Konvergenca karakterističnega števila je monotona, če je operator K pozitivno definiten, torej, če je $\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dxdy > 0$ za vsak $f(x) \in L^2(a, b)$.

Podobno velja za gradientno metodo, pri kateri iščemo zaporedne približke takole:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{(z_n, z_n)\,(K\varphi_n - \mu_n \varphi_n)}{(Kz_n, z_n) - \mu_n (z_n, z_n)} \qquad z_{n+1} = K\varphi_n - \mu_n \varphi_n$$

$$\mu_n = \frac{(K\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \qquad \varphi_0 \text{ je poljuben}$$

Gradientna metoda v tej varianti je uporabna le za pozitivno definitna jedra.

d) Druge metode.

Tu naj omenimo le metodo sledi. Iz jedra $K(x, y)$ tvorimo iterirana jedra po predpisu

$$K_1(x, y) = K(x, y), \quad K_{n+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t)\, K(t, y)\, dt$$

in tvorimo kvociente

$$\frac{\int_a^b K_n(x, x)\, dx}{\int_a^b K_{n-1}(x, x)\, dx} \qquad \frac{\int_a^b K_n(x, x)\, dx}{(\int_a^b K_{n-1}(x, x)\, dx)^2}$$

Prvi kvocient limitira proti $1/\lambda_1^2$, drugi pa proti mnogokratnosti tega karakterističnega števila.

Poleg metode sledi štejemo v ta razred še razne metode, ki jih ne moremo uvrstiti v prej naštete razrede, kot npr. metodo Fredholmovih determinant ali metode, primerne za posebna jedra $K(x, y)$.

Za vse opisane metode velja tale opomba. Pri vseh, razen pri metodi a), je treba računati nekaj določenih integralov danih funkcij. Ti se navadno ne dajo analitično izračunati ali pa se to ne izplača, čeprav je izračun možen. Zato je treba nastopajoče integrale računati z uporabo kakšne kvadraturne formule. Zato je pri vseh metodah uspeh metode odvisen v veliki meri od izbrane kvadraturne formule, ali od natančnosti izbrane kvadraturne formule v vsakem konkretnem primeru. Uspešnost kvadraturne formule je v glavnem odvisna od gladkosti jedra in desne strani ter od ostalih funkcij, ki med računom še morda nastopajo.

V citiranem elaboratu smo si postavili za nalogo, izmed naštetih metod izbrati tiste, za katere se zdi, da bodo za naš računalnik najbolj primerne. Ozirati smo se morali predvsem na dejstvo, da ima računalnik Z-23 majhen spomin in da je počasen.

Izbrali smo torej najprimernejše metode, napisali zanje programe v internem kodu računalnika Z-23 ali v Algolu ter jih na numeričnih zgledih preskusili. Vsakemu od teh programov smo dali svoje ime. V nadaljnjem si oglejmo kratke opise izdelanih programov!

1. Nyström, nehomogena enačba.

Program je narejen v več variantah. Osnovna se rabi za reševanje integralskih enačb z nekajkrat odvedljivim jedrom. Izračun po tem programu je navadno hitrejši kot pri vseh drugih programih, za isto točnost rezultata. Druga varianta, »Preklano jedro«, je prirejena za reševanje integralskih enačb, katerih jedro je večkrat odvedljivo povsod, razen na diagonali $x = y$, kjer napravi jedro ali kakšen njegov odvod skok. Ta varianta je med drugim primerna tudi za reševanje nekaterih Volterrovih integralskih enačb.

Nyströmovo metodo smo programirali tudi v verziji »Brakhage«. Pri tej računamo rešitev integralske enačbe (1) najprej tako, da uporabimo Simpsonovo kvadraturno formulo z n podintervali. Nato napravimo enega ali več korakov Brakhagejeve iteracije, ki ima namen, v prejšnjem delu izračunano približno rešitev izboljšati. Dobljeni približki konvergirajo proti približni rešitvi enačbe (1), ki bi jo dobili, če bi v prvotni enačbi nadomestili integral s Simpsonovo kvadraturno formulo z $2n$ podintervali. Smisel metode »Brakhage« je v tem, da bi z enim korakom iteracije dobili z manj računskimi operacijami skoraj tako točen rezultat, kot z uporabo dvakrat finejše kvadraturne formule. Računski poskus ne pokaže bistvenega prihranka na času, zato te metode ne moremo smatrati za posebno ugodno.

2. Položij.

Program za iteracijsko metodo Položega rešuje enačbo (1). Pri uporabi istih kvadraturnih formul kot pri metodi Nystöm je ta metoda približno enako točna, a računski čas je znatno večji kot pri Nyströmovi metodi. Ne zdi se nam, da bi ta metoda izkazala prednosti pred Nyströmovo.

3. Kolokacija.

Program smo napravili po teoriji, opisani pod točko c). Za kolokacijske točke smo izbrali ničle polinoma Čebiševa. Ker so koeficienti sistema, ki ga je treba rešiti, pri isti dimenziji sistema kot pri Nyströmu, navadno znatno težje izračunljivi, je kolokacija znatno počasnejša od Nyströma. Tudi iste točnosti ne dosega, razen v primerih, ko funkcije, s katerimi iščemo nastavek, izjemno dobro aproksimirajo rešitev. Tega pa vnaprej navadno ne vemo. Na primerih smo preskusili več možnosti pri izbiri funkcij $\varphi_k(x)$, ki jih uporabimo pri nastavku (8). Dobro so se obnesle potence in kotne funkcije, slabše pa funkcije oblike $\varphi_k(x) = \exp((-1)^k kx)$.

Prednost kolokacije je v tem, da je rešitev dana z vrsto, ne pa s tabelo, kot je to navadno pri Nyströmu. Vendar ta eventualna prednost ne odtehta prednosti Nyströma: večje hitrosti in večje natančnosti.

4. Elliott, nehomogena enačba.

Sprogramirali smo še eno varianto kolokacije, pri kateri iščemo rešitev kot vrsto po polinomih Čebiševa. Če vzamemo pri Nyströmu Gaussovo kvadraturno

formulo z n vozli, tu pa nastavek z $n + 1$ členi, dobimo pri Elliottu le malo manj točne rezultate kot pri Nyströmu. S tega stališča je metoda zadovoljiva. Računski čas pa je precej daljši. Toda Elliott ima vendar še eno precejšnjo odliko: Če je približek dovolj točen, se to da z veliko verjetnostjo opaziti iz rezultata: koeficienti v razvoju (8) po polinomih Čebiševa morajo tedaj padati proti nič in zadnji morajo biti že majhni (z ozirom na strojno natančnost, ki znaša pri našem računalniku 9 mest). Pri drugih metodah tako enostavne kontrole točnosti rezultatov seveda nimamo. Pri Nyströmu npr. bi se o točnosti rezultatov še najlaže prepričali tako, da bi isto enačbo reševali še s finejšo kvadraturno formulo. Ujemanje rezultatov daje možnost sklepanja na točnost rezultata.

5. Galerkin, nehomogena enačba.

Program, ki rešuje enačbo (1) po tej metodi, je po svojih lastnostih primerljiv kolokaciji. Navadno nastavitev linearnega sistema enačb zahteva še več računskega časa. Natančnost ni znatno boljša kot pri kolokaciji. Galerkin ima majhno prednost pred Nyströmom v tem, da moremo z Galerkinom reševati tudi take singularne integralske enačbe, pri katerih znamo nastopajoče integrale izračunati analitično. Te možnosti pri Nyströmu ni. Za nesingularne integralske enačbe pa Galerkin zaostaja za Nyströmom.

6. Sokolov. Metodo Sokolova štejemo med iteracijske. Pri tej in pri metodi Položega je treba reševati navadno le zelo majhne linearne sisteme enačb; tipični so od reda 3 do reda 5. Po drugi strani moremo razumeti to metodo tudi kot izboljšavo metode Galerkina.

V programu smo vzeli, da projektor P projicira v podprostor, ki ga tvorijo potence $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ (glej formulo (12)). Če vzamemo pri Nyströmu Gaussove kvadraturne formule reda n, tu pa podprostor iz prvih $n - 1$ potenc x — a, dobimo približno enake rezultate. Računski čas je verjetno pri tej metodi daljši, česar pa nismo mogli točno ugotoviti, ker je program Sokolova napisan v Algolu. Za dosego natančnosti, ki smo jo predpisali (navadno 10^{-7}), je bilo treba le nekaj korakov iteracije. Zdi se nam, da ta metoda dobro obeta, in treba bi jo bilo še natančneje praktično obdelati in napisati še nove programe.

Med vsemi omenjenimi metodami je prav gotovo v večini primerov Nyströmova najboljša. Za njo bi morda postavili metodo Sokolova, nato Položega in Elliotta, končno pa Galerkina in kolokacijo.

Omenim naj, da bi pri zadnjih dveh metodah dobili lahko že z malo členi v nastavku (8) precej točne rezultate, če bi vnaprej poznali približno obnašanje rešitve $\varphi(x)$ in bi te njene lastnosti upoštevali pri izboru funkcij $\varphi_k(x)$ v nastavku (8). Ta možnost v sedanjih verzijah programov ni dovolj predvidena.

Reševanje integralskih enačb (1) s singularnim ali posebnim jedrom smo za sedaj opustili, ker smo najprej želeli dobiti vtis o delovanju metod za enostavnejše primere integralskih enačb, to je, za nesingularne integralske enačbe.

Za reševanje homogenih integralnih enačb smo izdelali in preskusili naslednje programe.

1. Nyström, homogena enačba.

Pri uporabi kvadraturne formule z n vozli dobimo približke za prvih n karakterističnih števil. Nekaj prvih je, kot kažejo numerični zgledi, izračunanih

zadovoljivo. Natančnost za nadaljnja karakteristična števila hitro pada. Izračun lastnih funkcij po tej metodi ni zadovoljiv.

2. Galerkin, homogena enačba.

Metoda daje pri nastavku (8) z n členi približke k prvim n karakterističnim številom. Njih natančnost je skoraj ista kot pri Nyströmu istega reda. Računski čas je daljši, pač pa so lastne funkcije izračunane bolje kot pri Nyströmu, a še vedno ne povsem zadovoljivo.

3. Kellog.

4. Gradientna metoda.

Obe metodi sta iteracijski in dasta prvo karakteristično število in en pripadajoči lastni vektor. Časovno sta metodi primerljivi, čeprav je Kellog hitrejši. Točnost rezultatov je pri obeh metodah približno ista. Obe metodi imata lastnost, da je za pozitivno definitna jedra konvergenca monotona. Ko monotonosti pri karakterističnem številu ni več, je treba seveda z iteracijo prenehati. Iteracijske metode nasploh imajo to lepo lastnost, da moremo iz »konvergence« zaporednih približkov sklepati na točnost rezultata.

5. Elliott, homogena enačba.

Ta varianta kolokacije daje le karakteristična števila. Metoda je točna, a potrebuje več računskega časa kot druge metode, kar za neki večkratnik. Vse metode, obravnavane doslej, rabijo le za določitev lastnih elementov simetričnih jeder; Elliott ima to prednost, da moremo z njim računati tudi karakteristična števila poljubnih nesingularnih jeder.

6. Metoda sledi.

V izvedbi, v kateri smo metodo programirali, dobimo kot rezultat približek k prvemu karakterističnemu številu in njegovo mnogokratnost, kar je lahko precejšnja prednost te metode pred drugimi. Računsko je izredno zahtevna in kljub točnosti bi jo morali uvrstiti za dosedaj omenjene.

7. Meje za najmanjše karakteristično število.

To je metoda, pri kateri računamo karakteristično število dveh jeder: eno je večje od danega, drugo pa manjše; obe sta izrojeni. Če je prvotno jedro pozitivno: $K(x, y) \geqslant 0$, sta prvi karakteristični števili konstruiranih jeder zgornja in spodnja meja za prvo karakteristično število prvotnega jedra. Ogromna prednost te metode pred vsemi drugimi je, da je rezultat istočasno tudi ocena za napako, kar pri drugih metodah ne velja; v izvedbi, kakršno smo izdelali, je pa dala ta metoda silno grobe ocene za prvo karakteristično število, zato je ne bi mogli označiti kot uspešno.

Povzetek. Na osnovi izdelanih programov in izračunanih primerov (na voljo smo imeli le 50 ur strojnega časa na računalniku Z-23), lahko zaključimo:

a) Za reševanje nehomogene Fredholmove integralske enačbe imamo zadovoljive programe. Najbolj se je obnesel Nyström, nato morda Sokolov, slede Elliott in Položij ter Galerkin in kolokacija.

b) Za računanje karakterističnih števil simetričnih nesingularnih integralskih enačb imamo še zadovoljive metode, za določanje prve lastne funkcije tudi (Kellog in Gradientna metoda). Za izračun višjih lastnih funkcij pa niti

Nyström niti nekaj točnejši Galerkin ne ustrezata. Zato bi bilo treba poskusiti doslej obdelane metode izboljšati, če se to da, in poskusiti še druge, npr. metodo lažnih perturbacij.

c) Za reševanje singularnih integralskih enačb Fredholmovega tipa in za reševanje Volterrovih integralskih enačb bi bilo treba preskusiti druge metode.

Izdelane programe smo vključili v biblioteko podprogramov računalnika Z-23.

LITERATURA

Numerično reševanje Fredholmovih integralskih enačb na računalniku Z-23, A. Suhadolc in J. Vrabec. Poročilo za Skland Borisa Kidriča, Ljubljana 1968.

Opomba: Vse programe je izdelal ing. J. Vrabec, razen programov Elliot in Brakhage, ki jih je izdelal ing. I. Pušnik.

GRAVITACIJSKO VALOVANJE

JANEZ MOŽINA

1. Uvod

Časovno spremenljivo elektromagnetno polje se širi v obliki elektromagnetnih valov, splošna relativnostna teorija pa kot nosilce časovno spremenljivega gravitacijskega polja napoveduje gravitacijske valove. Po analogiji z elektromagnetnim poljem, kjer kot izvori nastopajo pospešeni naboji, sklepamo, da so izvori gravitacijskega valovanja pospešene mase.

Gravitacijskih valov do danes še niso eksperimentalno odkrili. Ocena pokaže, da so njihove dolžine običajno zelo velike v primerjavi z Zemljo, gostota energije pa majhna v primerjavi z energijami, ki jih lahko merimo. To sta glavni oviri pri prizadevanjih, da bi z zemeljskim eksperimentom dokazali obstoj gravitacijskih valov.* Zato bomo poizkušali odkriti gravitacijske valove v vesoljskih razmerah. Stanje spominja na merjenje svetlobne hitrosti in rdečega premika spektralnih črt: oboje je bilo prej izmerjeno v vesoljskih razmerah kot na Zemlji.

Nedavno je Winterberg[1] predlagal kot možen eksperiment za odkritje gravitacijskih valov opazovanje svetlikanja zvezd. Po njegovem mnenju je eden od vzrokov svetlikanja zvezd polje gravitacijskih valov, ki v medzvezdnem prostoru vplivajo na širjenje svetlobe. Veliko močnejše svetlikanje pa povzroča zemeljska atmosfera. Če hočemo odstraniti vpliv atmosferskega svetlikanja, moramo opazovati zvezde v brezzračnem prostoru, kar pa v času moderne vesoljske tehnike ni neizvedljiva naloga.

2. Izpeljava valovne enačbe za gravitacijsko polje

Elektromagnetno polje opišemo z vektorjema **E** in **B**, gravitacijsko polje pa z metričnim tenzorjem g_{ik}. Gravitacijsko polje namreč ni nič drugega kot sprememba prostorsko časovne metrike: zaradi vpliva izvorov polja je štiridimenzionalni prostor ukrivljen, neevklidski. Kvadrat ločnega elementa se ne da več zapisati kot vsota kvadratov posameznih komponent (kar še velja v specialni relativnostni teoriji), pač pa ima bolj splošno obliko.

$$-ds^2 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

$$x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z \qquad x^0 = ct$$

Če gravitacijskega polja ni, je metrika evklidska, metrični tenzor za evklidski prostor pa je enak

---

* O najnovejših tovrstnih eksperimentih poroča J. Weber v Phys. Rev. Letters (17 (1966), str. 1228, 18 (1967), str. 498, 18 (1967), str. 795).

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Osnovne enačbe splošne relativnostne teorije so enačbe gravitacijskega polja, ki povezujejo obliko polja z izvori. To so v splošnem nelinearne enačbe drugega reda. Zapišemo jih lahko v obliki[2]

$$R_{ik} = \frac{8\pi\varkappa}{c^4}\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik} \sum_{i,k} g^{ik}\, T_{ik}\right)$$

Pri tem je krivinski tenzor R_{ik} znana funkcija prvih in drugih odvodov metričnega tenzorja g_{ik} po koordinatah. Izvore polja predstavlja tenzor energije in gibalne količine T_{ik}

$$T_{ik} = (p + \varepsilon)\, v_i\, v_k/c^2 + p\, \delta_{ik}$$

ε je gostota energije, p tlak in v_i komponente hitrosti.

Bolj enostavno obliko dobe enačbe v primeru, ko je gravitacijsko polje šibko. Tedaj je prostor skoraj raven, kar pomeni, da je prostorsko časovna metrika skoraj evklidska. Komponente metričnega tenzorja lahko tedaj zapišemo v obliki:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik} \qquad |h_{ik}| \ll 1$$

$g_{ik}^{(0)}$ so pri tem komponente metričnega tenzorja za evklidski prostor. Če vstavimo gornji nastavek za g_{ik} v levo stran enačb polja in upoštevamo povsod le člene prvega reda v h_{ik}, dobimo[3]:

$$R_{ik} = -\tfrac{1}{2} \Box\, h_{ik}$$

kjer pomeni

$$\Box = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^{\,2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

V primeru šibkega polja pa se spremeni tudi tenzor energije in gibalne količine. Znatni ostanejo le še členi, ki vsebujejo mirovno energijo ($\varepsilon_0 = \varrho\, c^2$), ostale pa lahko zanemarimo. Tako dobimo $T_{ik} = \varrho\, v_i\, v_k$. Pri štiridimenzionalni hitrosti v_i pa lahko zanemarimo še vse prostorske člene ($i = 1, 2, 3$) in obdržimo le časovni del $v_0 = c$.

Od vseh komponent T_{ik} ostane od nič različna le še komponenta $T_{00} = \varrho\, c^2$ Sled tenzorja T_{ik} je enaka $\Sigma\, g^{ik}\, T_{ik} = -T_{00}$. Enačbe polja $R_{ik} = (8\pi\varkappa/c^4)\,[T_{ik} - -\tfrac{1}{2}\, g_{ik} \sum_{ik} g^{ik}\, T_{ik}]$ dobijo v primeru, če i in k nista oba enaka 0, obliko

$$\Box\, h_{ik} = -\frac{8\pi\varkappa\varrho}{c^2}\, g_{ik}$$

V primeru $i = k = 0$ pa dobimo

$$\Box\, h_{00} = -\frac{8\pi\varkappa\varrho}{c^2}$$

V statičnem primeru $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ je to Poissonova enačba:

$$\triangle h_{oo} = - \frac{8 \pi \varkappa}{c^2} \varrho \quad \Leftrightarrow \quad \triangle \varphi = 4 \pi \varkappa \varrho$$

Od tod lahko izračunamo zvezo med h_{oo} in Newtonovim potencialom: $\triangle h_{oo} = (-2/c^2) \triangle \varphi$. Iz enačbe sledi, da se h_{oo} in $-2 \varphi/c^2$ lahko razlikujeta le za konstanto, ki jo moremo določiti iz pogoja, da je v prostoru brez polja metrika evklidska ($\varphi = 0 \Rightarrow h_{ik} = 0 \Rightarrow$ konst. $= 0$). Tako dobimo

$$h_{oo} = - \frac{2 \varphi}{c^2} \qquad g_{oo} = g_{oo}^{(0)} + h_{oo} = -1 - \frac{2 \varphi}{c^2}$$

Iz aproksimacije za šibko polje pa sledi tudi valovna enačba za količine h_{ik}. V praznem prostoru so vse komponente tenzorja $T_{ik} = 0$. V tem primeru nam leve strani enačb polja že predstavljajo valovne enačbe

$$\Box h_{ik} = 0$$

Iz valovne enačbe sledi, da se gravitacijsko polje razširja s hitrostjo c. Da se tudi pokazati, da so gravitacijski valovi transverzalni. Energijo, ki jo sevajo gibajoča se telesa v obliki gravitacijskih valov, lahko izračunamo podobno kot v primeru elektromagnetnega sevanja. Tudi tu smemo polje razviti v vsoto polj posameznih multipolov. Dipolni člen k sevanju ne more prispevati; če bi namreč dopustili to možnost, bi moralo nihati težišče sistema, kar pa ni v skladu z zakonom o gibanju težišča. Izkaže se, da je prispevek kvadrupola prvi od nič različni člen, ki prispeva k sevanju. Moč, ki jo seva ena od komponent kvadrupola, je enaka $- dW/dt = (\varkappa/45\, c^5) \dddot{D}_{\alpha\beta}^2$ (analogna formula za električni kvadrupol: $- dW/dt = (1/720\, \pi\, \varepsilon_0\, c^5)\, \dddot{D}_{el\,.\,\alpha\beta}^2$).

3. Vpliv gravitacijskega polja na širjenje svetlobe

Znano je, da lahko širjenje žarkov in delcev skozi nehomogeno sredstvo opišemo s tenzorjem lomnega količnika (kristalna optika, sipanje nevtronov itd.). Tudi odklon svetlobe v statičnem gravitacijskem polju opišemo na isti način. Domnevamo, da moremo tako obravnavati tudi širjenje elektromagnetnih valov v časovno spremenljivem gravitacijskem polju.

Ločni element prostora v polju ravnega gravitacijskega vala, ki se širi v smeri osi z, smemo ob primerni izbiri koordinatnega sistema zapisati tako, da je $h_{22} = - h_{11}$

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - (1 + h_{11})\, dx^2 - (1 - h_{11})\, dy^2 - 2\, h_{12}\, dx\, dy - dz^2 =$$

$$= c^2\, dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - h_{11}\, (dx^2 - dy^2) - 2\, h_{12}\, dx\, dy$$

Vsako gibanje s svetlobno hitrostjo pa ustreza pogoju $d\,s = 0$. Za svetlobni žarek dobimo tedaj

$$c^2\,dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + h_{11}\,(dx^2 - dy^2) + 2\,h_{12}\,dx\,dy$$

Pomike dx, dy in dz od izbrane točke zapišemo s krogelnimi koordinatami $r\,\vartheta, \varphi$

$$dx = \sin\vartheta\cos\varphi\,dr$$
$$dy = \sin\vartheta\sin\varphi\,dr$$
$$dz = \cos\vartheta\,dr$$

$$c^2\,dt^2 = [1 + (h_{11}\cos 2\varphi + h_{12}\sin 2\varphi)\sin^2\vartheta]\,dr^2$$

Od tod definiramo lomni količnik $n\,(\vartheta, \varphi)$, ki je v dani točki odvisen še od smeri gibanja svetlobnega žarka

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{n\,(\varphi,\vartheta)}$$

$$n\,(\vartheta_i\,\varphi) = [1 + (h_{11}\cos 2\varphi + h_{12}\sin 2\varphi)\sin^2\vartheta]^{1/2} \approx 1 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,(h_{11}\cos 2\varphi + h_{12}\sin 2\varphi)\sin^2\vartheta$$

Nas zanima predvsem poprečni kvadratni odmik lomnega količnika od enote (lomni količnik je enak 1 v prostoru brez gravitacijskega polja)

$$\overline{\triangle n^2} = \frac{1}{4\,\pi}\int \triangle n^2\,(\vartheta, \varphi)\,d\Omega = \frac{1}{15}\,(h_{11}{}^2 + h_{12}{}^2)$$

Ker domnevamo, da prihajajo valovi iz vseh smeri izotropno, lahko vzamemo $\overline{h_{11}{}^2} = \overline{h_{12}{}^2} = h^2$. Gravitacijski valovi, ki izhajajo iz različnih izvorov, niso koherentni med seboj. Če upoštevamo še njihovo izotropnost, potem je »jakost« polja h in s tem tudi $\triangle n$ stohastična funkcija kraja in časa. Pri prehodu žarka skozi sredstvo, v katerem je lomni količnik stohastična funkcija kraja in časa, pa se spreminja intenziteta žarka samega. Vsakdo lahko s prostim očesom opazi, da zvezde ne svetijo enakomerno, pač pa svetlikajo. Ta pojav si razložimo s stohastičnim spreminjanjem gostote in s tem lomnega količnika v turbulentnih zgornjih plasteh atmosfere. Scheffler[4] je za ta primer izpeljal naslednjo formulo za inteziteto žarka

$$\overline{\left(\frac{\triangle I}{I_o}\right)^2} = \frac{32\sqrt{\pi}}{3}\,\overline{\left(\frac{\triangle n}{n_o}\right)^2}\,\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

Pri tem je x dolžina poti žarka v optično nehomogenem sredstvu, l pa je karakteristična razdalja med nehomogenostmi. Važen podatek je tudi karakteristični čas fluktuacij, ki je približno enak $\tau_s \approx l/v$, kjer je v hitrost širjenja motenj v danem sredstvu.

Če opazujemo zvezdo z detektorjem izven atmosfere, tedaj uporabimo prav isto formulo za račun svetlikanja v polju gravitacijskih valov; za karakteristično razdaljo l vzamemo valovno dolžino gravitacijskih valov, za v pa hitrost razširjanja valov c

$$\overline{\left(\frac{\triangle I}{I_o}\right)^2} = \frac{64\sqrt{\pi}}{45} h^2 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^3$$

Tako torej z opazovanjem svetlikanja zvezd v brezzračnem prostoru posredno opazujemo gravitacijske valove.

4. Ocena svetlikanja za nekatere izvore gravitacijskega valovanja

Gravitacijske valove lahko pričakujemo od naslednjih vesoljskih izvorov:

a) dvojnih zvezd,

b) kvazarjev,

c) ostankov prvotnega gravitacijskega valovanja.

Za vse tri primere bomo ob nekaterih predpostavkah poizkušali oceniti, kolikšno svetlikanje povzročajo in kolikšni so karakteristični časi.

a) *Dvojne zvezde*

Dvojna zvezda je izvor gravitacijskega kvadrupolnega valovanja. Z računi, ki so analogni računom pri elektromagnetnem kvadrupolnem sevanju, dobimo za ta primer naslednjo vrednost h v razdalji r od izvora

$$|h| = \frac{2^{3/2}\,\varkappa^2\,m^2}{c^4\,r_o}\,\frac{1}{r} = \frac{a}{r}$$

Pri tem je $a = 2^{3/2}\,\varkappa^2\,m^2/c^4\,r_o$ (m je masa dvojne zvezde, r_o pa razdalja med obema komponentama). Pri računu celotne »jakosti« gravitacijskega polja moramo upoštevati prispevke vseh dvojnih zvezd v naši Galaksiji. Dvojne zvezde so približno enakomerno porazdeljene po Galaksiji, torej je njihova pogostost obratno sorazmerna s poprečnim volumnom $V = R_o^3$, v katerem najdemo eno takšno zvezdo. Pri tem je R_o poprečna razdalja med dvojnimi zvezdami. Tako dobimo

$$h^2_{\text{tot}} = a^2 \int \frac{1}{R_o^3}\,\frac{dV}{r^2} = \frac{4\pi a^2 R_1}{R_o^3}$$

R_1 je pri tem polmer naše Galaksije. Vsi podatki, ki jih tu potrebujemo, so tipični za dvojne zvezde. Poznamo jih iz astronomskih opazovanj ($R_o = 30$ svetlobnih let, $R_1 = 3.10^4$ svetlobnih let, $r_o = 10^9$ metrov, $m = 4.10^{30}$ kg). Za fluktuacijo intenzitete dobimo izraz

$$\sqrt{\overline{\left(\frac{\triangle I}{I_o}\right)^2}} = \frac{16\,\pi^{3/4}\,a\,R_1^{1/2}}{3.5^{1/2}\,R_o^{3/2}} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{3/2}$$

Valovno dolžino λ določimo iz zveze $\lambda = 2\pi c/\omega$, pri čemer je ω krožna frekvenca obeh komponent dvojne zvezde in jo izračunamo po tretjem Keplerjevem zakonu $\omega^2 = \varkappa\, m/r_o^3$. Če vstavimo podatke za zvezdo, ki je oddaljena od nas 10^4 svetlobnih let, dobimo rezultat $(\triangle I/I_o)^2 = 2.10^{-5}$. Čeprav so fluktuacije izredno

majhne, bi jih lahko merili z občutljivimi fotopomnoževalkami, postavljenimi izven ozračja. Karakteristični čas teh fluktuacij je enak obhodnemu času dvojne zvezde in znaša približno 3 ure.

b) *Kvazarji*

Astronomi so pred nekaj leti začeli odkrivati v prostoru izven naše Galaksije vesoljske objekte, ki oddajajo ogromne količine elektromagnetnega valovanja radijskih frekvenc. Te objekte so imenovali kvazarje. Vidna svetloba kvazarjev je običajno zelo šibka, kaže pa zelo močan premik proti rdečemu delu spektra. Energije, ki jih sevajo kvazarji, so zelo velike v primerjavi z energijami, ki jih sevajo navadne zvezde, v katerih gori »jedrski ogenj«. Intenziteta svetlobe pa se zelo naglo in neurejeno spreminja (zraste ali pade v enem letu tudi za faktor 30). Za ta dva podatka (velika moč sevanja in spreminjanje intenzitete) do danes še niso našli zadovoljive teoretične razlage. Ogledali si bomo na kratko, kako lahko vso stvar razlagamo z gravitacijskim sevanjem.

Domnevamo, da je v jedru kvazarja masa reda velikosti 10^8 sončnih mas v procesu gravitacijskega kolapsa.* Po tej hipotezi sevajo kvazarji ogromne količine gravitacijskega valovanja in tako ustvarjajo stohastično gravitacijsko polje v intergalaktičnem prostoru. Fowler[5] je izdelal model, po katerem lahko moč sevanja kvazarja ocenimo s formulami, ki jih poznamo že od računov za sevanje dvojnih zvezd.

Valovna dolžina znaša približno 3.10^{15} m, kar ustreza karakterističnemu času fluktuacij $\tau_s = 1$ leto. Če opazujemo zvezdo, ki je v naši Galaksiji, dobimo isti red velikosti fluktuacij kot pri dvojnih zvezdah. Vendar je karakteristični čas tako velik, da teh fluktuacij ne bi mogli meriti. Povsem drugačen pa je rezultat, če opazujemo vidno svetlobo samih kvazarjev: ker je poprečni kvadratni odmik fluktuacij sorazmeren s tretjo potenco razdalje, se pri velikih razdaljah (tipična oddaljenost kvazarjev od Zemlje znaša približno 10^9 svetlobnih let) tudi fluktuacije same močno povečajo. Za velikost fluktuacij dobimo v tem primeru $\sqrt{\overline{(\triangle I/I_0)^2}} = 10$. Ta rezultat se obenem s karakterističnim časom zelo dobro ujema z eksperimentalnimi podatki.

c) *Ostanki prvotnega gravitacijskega valovanja*

Nedavno so odkrili v vesolju elektromagnetno sevanje črnega telesa s temperaturo 3 ^{0}K. Domnevamo, da je to sevanje ostanek prvobitnega stanja našega vesolja — stanja z visoko temperaturo in gostoto. Zaradi ekspanzije vesolja je od tedaj temperatura padla na sedaj opazovano vrednost. Domnevali bomo, da je že na začetku obstajalo termodinamsko ravnotežje med elektromagnetnim in gravitacijskim valovanjem in da takšno ravnotežje obstaja še danes. Tedaj je tudi temperatura gravitacijskega »črnegia telesa« enaka 3 ^{0}K. Gravitoni so bozoni brez mirovne mase, torej je spekter sevanja določen s Planckovim

---

* Pri telesih z dovolj veliko maso so gravitacijske privlačne sile tako močne, da končno stanje zvezde — ko je jedrsko gorivo izčrpano — ni niti bela pritlikavka niti nevtronska zvezda, temveč pride do katastrofe. Zaradi privlačnih gravitacijskih sil se telo močno skrči in njegova gostota poveča. Sam proces skrčevanja se imenuje gravitacijski kolaps.

zakonom. Za poprečno frekvenco dobimo $\bar{\omega} = kT/\hbar$. Če vstavimo $T = 3\,^0\mathrm{K}$, dobimo $\bar{\omega} = 4.10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}$, kar nam da valovno dolžino 0,5 cm. Tudi za ta primer lahko izračunamo fluktuacijo intenzitete; za medzvezdno razdaljo 10^4 svetlobnih let dobimo zelo močne fluktuacije 10^{-2}, vendar je frekvenca teh fluktuacij zelo velika ($10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}$). Če bomo kdaj znali meriti tudi takšne fluktuacije, bomo s tem dobili važne podatke o prvotnem stanju vesolja.

LITERATURA

(1) F. Winterberg: Detection of Gravitational Waves by Stellar Scintillation in Space Reprint Series No. 43, Desert Research Institute, University of Nevada (1967).
(2) Landau-Lifšic: Teorija polja, Beograd (1952), § 94, str. 279.
(3) ibid.: § 99, str. 301.
(4) H. Scheffler: Astron. Nachr. **285**, 156 (1960).
(5) W. A. Fowler: Rev. Mod. Physics **36**, 545 (1964).

NOVICE

RAZISKOVALNE NALOGE MATEMATIČNEGA ODDELKA INSTITUTA ZA MATEMATIKO, FIZIKO IN MEHANIKO

Pod tem naslovom je bil objavljen v OMF, letnik 13, št. 4, str. 118—123 (1966) pregled raziskovalnih nalog, ki so jih opravili člani matematičnega oddelka. Od tedaj so bile izdelane še 4 raziskovalne naloge, dve pa sta v delu.

Izražanje pozitivnih funkcionalov v involutornih algebrah z 2 n generatorji

Nosilec naloge je bil G. Tomšič. Nalogo je financiral Sklad Borisa Kidriča. Oddana je bila junija 1967. En izvod elaborata je na razpolago tudi v matematični knjižnici.

Pred nekaj leti je Vidav študiral tale problem: dana je algebra A z involucijo, ki jo generirata sebi adjungirana elementa p in q, ki zadoščata relaciji $pq - qp = -i$.

Pojasnimo, kaj je involucija! To je predpis, ki vsakemu elementu a iz algebre A priredi neki element a^* iz A, z lastnostmi

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$
2. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$, λ je kompleksno število
3. $(a b)^* = b^* a^*$
4. $(a^*)^* = a$

Element a je sebi adjungiran, če je $a^* = a$.

Zanimivi so pozitivni linearni funkcionali na algebri A; to so taki, za katere je $f(a^* a) \geqslant 0$ za vse $a \in A$. Pozitivni funkcionali nad A res vedno eksistirajo, definirati jih pa moremo npr. z integralom. Sedaj pa se pojavi vprašanje: ali moremo vsak pozitivni funkcional nad algebro A reprezentirati s takimi integrali? V članku v Mathematische Zeitschrift je Vidav podal zadostne pogoje za pritrdilen odgovor.

V raziskovalni nalogi je Tomšič pokazal, kako se dajo rezultati Vidavovega članka raztegniti tudi na primer algebre z involucijo, ki je generirana z $2n$ elementi $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, ki zadoščajo relacijam

$$p_j q_j - q_j p_j = -i \qquad p_j p_k - p_k p_j = 0$$
$$q_j q_k - q_k q_j = 0 \qquad p_j q_k - q_k p_j = 0, \; k \neq j$$

Razširjava Vidavovega rezultata na algebro z $2n$ generatorji prinaša nove težave: najtežje je vprašanje komutativnosti neomejenih linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru. Zato so tudi zadostni pogoji manj splošni kot v Vidavovem članku.

Rezultati dela bodo objavljeni v zagrebškem Glasniku.

Eksistenca in enoličnost pozitivnih rešitev transportne enačbe

Nosilca naloge sta bila I. Kuščer in I. Vidav. Nalogo je financiral Sklad Borisa Kidriča, oddana pa je bila v juniju 1968.

V delu sta avtorja obravnavala probleme iz transportne teorije nevtronov. Pobudo zanje je dal prof. Kuščer, ki je znan specialist s tega področja. Označimo

z N (**r**, **v**, t) gostoto nevtronov s hitrostjo **v** na mestu **r** v času t! Nadalje naj pomeni Σ (**r**, **v**) totalni makroskopski sipalni presek, S (**r**, **v** $\rightarrow$ **v**′) pa diferencialni makroskopski sipalni presek. Časovni potek popisuje transportna enačba:

$$\frac{\delta N}{\delta t} = - v \operatorname{grad} N - v \Sigma (\mathbf{r}, \mathbf{v}) N + \int v' S (\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') N (\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) dv'$$

Enačbi je treba dodati še primerne robne pogoje na površini telesa, v katerem pojav študiramo. Desno stran, ki je integrodiferencialni operator, označimo z A. Imenuje se Boltzmannov operator.

Eden od problemov, ki sta jih avtorja rešila, je tale: Včasih iščemo rešitve transportne enačbe, ki imajo obliko $N = N (\mathbf{r}, \mathbf{v}) e^{\lambda t}$. Izkaže se, da take rešitve eksistirajo natančno tedaj, ko je λ lastna vrednost Boltzmannovega operatorja A. Fizikalno ima pomen le taka rešitev zgornje oblike, pri kateri je N (**r**, **v**) pozitivna funkcija. V delu so dani pogoji, pri katerih pozitivna rešitev eksistira in je enolična. Metode dokazovanja so funkcionalno teoretične: gre v bistvu za študij operatorjev v primernih Banachovih prostorih.

Rezultati dela so povzeti v treh člankih, ki so bili poslani v objavo v Journal of mathematical analysis and applications. Eden od teh je že izšel: Ivan Vidav, Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunctions of the Boltzmann operator, Journ. math. anal. appl. 22 (1), 144—155, (1968).

Študij regularnih kolobarjev, ki ustrezajo dodatnemu aksiomu

Nosilec naloge je bil N. Prijatelj. Nalogo je financiral Sklad Borisa Kidriča, oddana je bila v maju 1968. En izvod elaborata je na razpolago v matematični knjižnici.

V delu študira avtor *-regularne kolobarje. Pojasnimo na kratko, kaj je *-regularni kolobar.

Kolobar K (v katerem je množenje v splošnem nekomutativno) je *-regularen, če so izpolnjene zahteve: v K je enota za množenje; k vsakemu elementu $a \in K$ eksistira tak element $x \in K$, da velja $a = axa$; v K je definirana involucija, to je preslikava kolobarja K nase z lastnostmi:

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$
2. $(ab)^* = b^* a^*$
3. $(a^*)^* = a$
4. iz $a^* a = 0$ sledi $a = 0$

Če k elementu $a \in K$ eksistira inverzni element a^{-1}, smemo seveda tega vzeti za x v zahtevi $a = axa$. Element x je torej neka posplošitev inverznega elementa.

Element $a \in K$ imenujemo hermitski (sebi adjungiran), če je $a^* = a$. Element $e \in K$ imenujemo projektor, če velja $e^* = e = e^2$.

Avtor študira lastnosti *-regularnih kolobarjev. Ena od tipičnih ugotovitev dela je npr. tale:

Element $a \in K$ je hermitski natančno tedaj, ko se da zapisati v obliki $a = axa$, kjer je $x^* = x$ in $ax = xa$ projektor.

Podroben študij *-regularnih kolobarjev je posebno zanimiv zato, ker predstavljajo taki kolobarji zvezo med algebro, geometrijo in funkcionalno analizo.

Rezultati dela bodo objavljeni v zagrebškem Glasniku.

Numerično reševanje Fredholmovih integralskih enačb na računalniku Z-23

Nalogo sta izdelala A. Suhadolc in J. Vrabec. Financiral jo je Sklad Borisa Kidriča, oddana pa je bila v juniju 1968. En izvod elaborata je tudi v matematični knjižnici.

Avtorja sta zbrala iz matematične literature večino znanih numeričnih metod reševanja nehomogenih Fredholmovih integralskih enačb

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

Tu sta $f(x)$ in $K(x, y)$ dani funkciji, $\varphi(x)$ pa iščemo. λ je dano kompleksno število. Nadalje sta zbrala numerične metode za približno reševanje homogenih Fredholmovih integralskih enačb

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

Tu je $K(x, y)$ dana funkcija, iščemo pa taka števila λ, pri katerih ima integralska enačba netrivialne (ne identično enake 0) rešitve $\varphi(x)$. Take vrednosti števila λ imenujemo karakteristična števila integralske enačbe, netrivialne rešitve $\varphi(x)$ pa lastne funkcije.

Od več deset numeričnih metod sta avtorja izbrala tiste, ki so se zdele najprimernejše za računalnik, posebno še za računalnik Z-23. Za izbrane metode so bili izdelani programi za računalnik Z-23. Programi so bili preskušeni na numeričnih primerih.

Natančnejše vsebine dela ne bomo opisovali, ker je povzetek v tej številki Obzornika za matematiko in fiziko.

Letos je oddelek za matematiko prijavil Skladu Borisa Kidriča še dve raziskovalni nalogi. Obe je Sklad odobril. To sta:

Struktura polnih regularnih involutornih kolobarjev. Nosilec naloge je I. Vidav, sodelavec N. Prijatelj.

Funkcionalno analitični problemi v transportni teoriji. Nosilec je I. Vidav, sodelavca sta J. Grasselli in A. Suhadolc.

Anton Suhadolc

OB STOLETNICI ZAMISLI O INTERFEROMETRIČNEM MERJENJU ZVEZDNIH PREMEROV

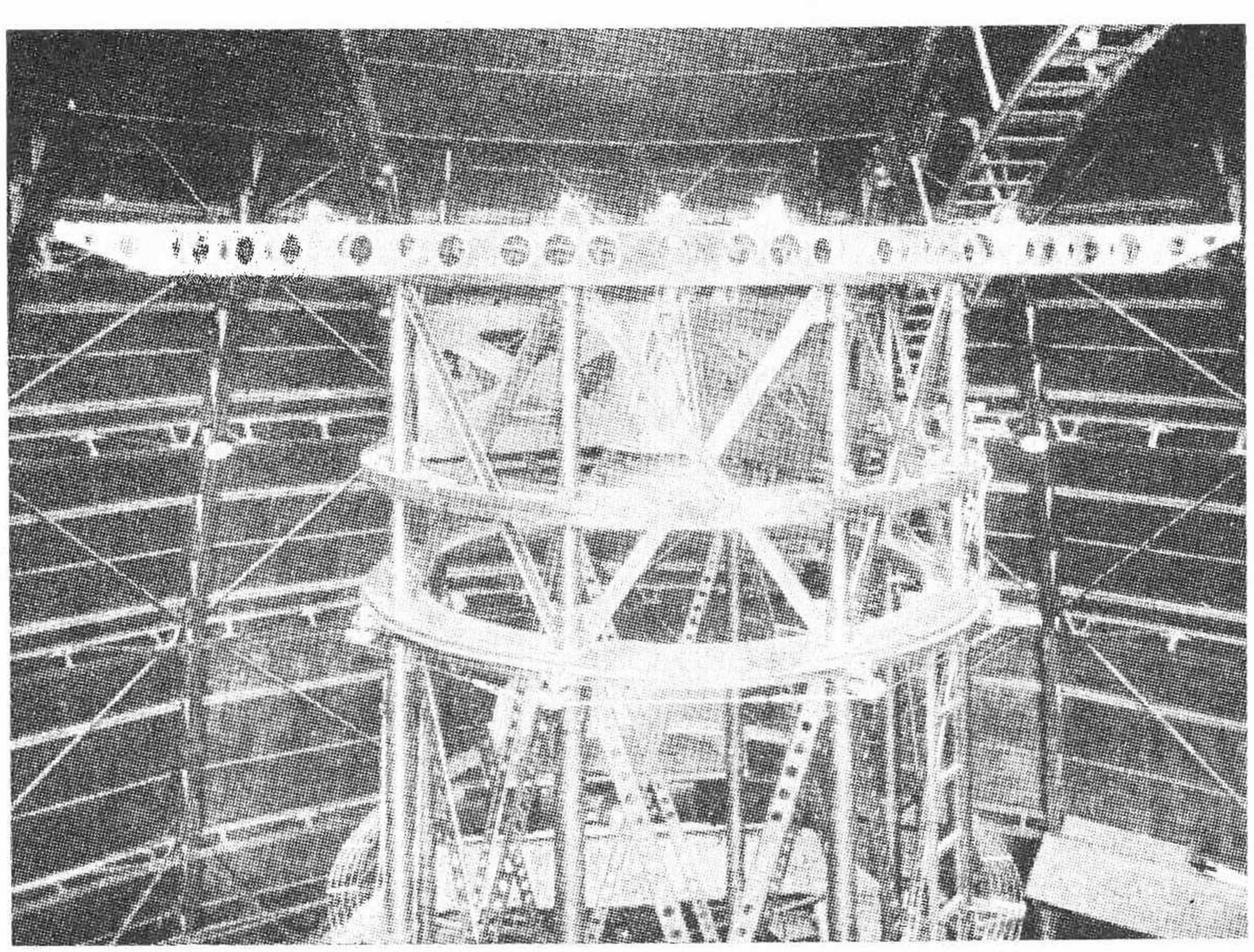
Merjenja zvezdnih premerov so pomembna naloga astrofizike. Možnost za interferometrično merjenje zornih kotov zvezd in zvezdam podobnih objektov je prvi uvidel A. Fizeau (1868), in sicer na osnovi Youngove dvojne reže[1]. Njegovi zamisli, da bi določili zorne kote nebesnih teles z dvema med seboj dokaj razmaknjenima režama pred objektivom velikega daljnogleda — tako napravo imenujemo zvezdni interferometer —, je sledil in jo natančneje izdelal ter kot prvi uporabil v astronomski praksi že pet let kasneje E. Stephan na observatoriju v Marseillu.

Pred objektiv 80-centimetrskega refraktorja je postavil neprozorni zaslon, ki je imel dve pravokotniški reži, postavljeni simetrično glede na optično os daljnogleda in razmaknjeni za okoli 60 cm. Značilne interferenčne slike ne-

besnih objektov, ki jih je dobil v goriščni ravnini objektiva, je opazoval z zelo močnimi okularji. Ločljivost njegovega interferometra je bila približno 0,2 kotne sekunde. Vse zvezde, ki jih je s tem instrumentom raziskal, so dale zelo jasno značilno interferenčno sliko. Zato je sklepal, da nobena izmed njih nima zornega kota okoli 0,2 kotne sekunde, ampak da so celo največji premeri zvezd daleč pod to vrednostjo. V meritvah ni uspel, njegova ocenitev glede kotnih razsežnosti zvezd pa je bila pravilna. Škoda, da je bilo Stephanovo delo tedaj osamljeno in ni na široko prodrlo v astronomsko javnost. Tako je mnogo kasneje A. A. Michelson (1890) neodvisno odkril, raziskal in uresničil Fizeaujevo zamisel. Michelson je pravilno sklepal, da gre pri nebesnih objektih za takšna svetila, ki so premajhna ali pa predaleč, da bi njihove kotne razsežnosti mogli določiti z navadnimi daljnogledi. Izdelal je celotno teorijo interferometričnih merjenj in z uspehom uporabil lastno metodo pri merjenju zornih kotov štirih Jupitrovih lun in nekaterih svetlih planetoidov (1891), ki imajo zorni kot približno ene kotne sekunde.

Toda poizkusi, da bi z interferometrom izmerili zorni kot zvezde, se niso posrečili. Karakteristične interferenčne zvezdne slike so bile jasne tudi pri največjih možnih razmikih rež, ki so jih uporabili na najmočnejših tedanjih daljnogledih.

Skoraj trideset let je minilo, preden je Michelson ponovno proučil možnost uporabe interferometrične metode merjenj zvezdnih premerov z novo tehniko. Skupaj s F. G. Peaseom se je odločil za gradnjo šestmetrskega zvezdnega interferometra, ki so ga uporabili na tedaj največjem zrcalnem teleskopu na svetu, na 250-centimetrskem reflektorju observatorija Mt. Wilson. Instrument so izgotovili leta 1920 in 13. XII. tega leta je Pease z njim prvič v zgodovini

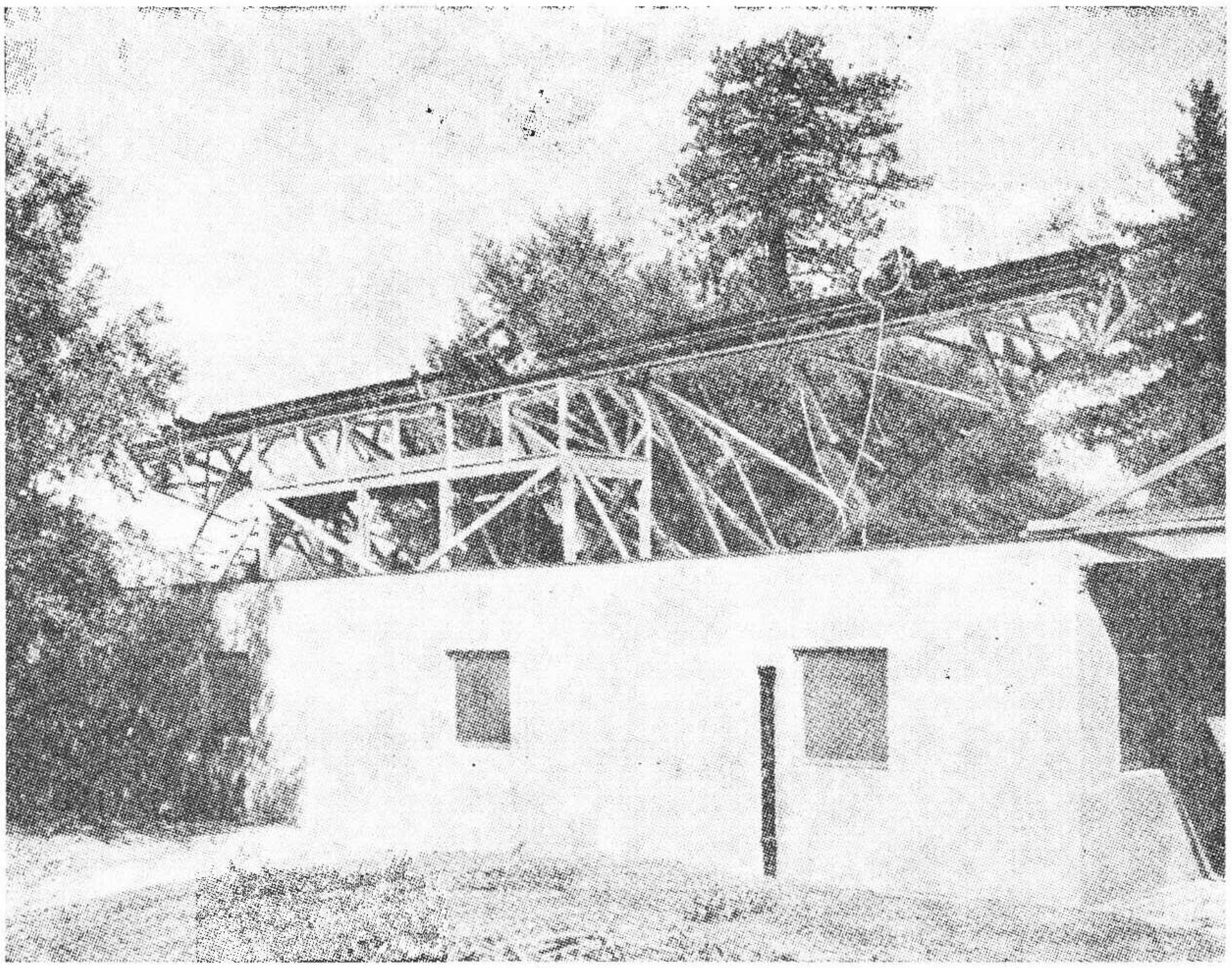


Sl. 1. Šestmetrski zvezdni interferometer na observatoriju Mt. Wilson. Ločljivost tega interferometra je bila okoli 0,02 kotne sekunde. Podana je bila z največjim možnim razmikom zunanjih zrcal (rež); tj. 6 metrov. Z njim je bilo možno meriti zorne kote zvezd, ki so bili večji ali pa vsaj enaki 0,02 kotne sekunde

astronomske znanosti izmeril zorni kot zvezde. To je bila zvezda Alfa Orionis (Betelgeuse), izmerjeni zorni kot pa je bil 0,047 kotne sekunde. Ker je bila paralaksa te zvezde znana, so astronomi lahko določili pravo velikost zvezde. Račun je pokazal, da je po linearnih dimenzijah Betelgeuse okoli petstokrat večja od našega Sonca[2]. Ta meritev je potrdila teoretični izračun nekaterih astronomov, predvsem Eddingtona in Russella, za vrednost zornega kota Betelgeuse. Istočasno je pokazala, da resnično obstajajo v vesolju zvezde, ki so po dejanskih razsežnostih mnogo večje od Sonca. Do leta 1930 je Pease s tem instrumentom izmeril zorne kote še nekaterim svetlim zvezdam, od katerih so bile vse bližnje orjakinje ali nadorjakinje poznega spektralnega tipa od K do M:

Zvezda	d''	$D/D_\odot^*$	Zvezda	d''	$D/D_\odot$
α Bootis (Arktur)	0,020	24	α Herculis (Ras Algethi)	0,030	400
α Tauri (Aldebaran)	0,020	45	o Ceti (Mira)	0,056	400
β Pegasi (Scheat)	0,021	150	α Scorpii (Antares)	0,040	720

Da bi merili premere manjših in šibkejših zvezd, so pozneje (1929) na Mt. Wilsonu zgradili večji petnajstmetrski zvezdni interferometer, ki so ga ravno tako uporabili na 250-centimetrskem reflektorju tega observatorija. Pričakovali so, da bodo z novim interferometrom merili natančneje kot s prejšnjim.



Sl. 2. Petnajstmetrski zvezdni interferometer na Mt. Wilsonu, instrument, ki je astronome razočaral

* Premer zvezde v sončnih premerih dobimo iz zveze $D/D_\odot = 107{,}5\ d''/p''$, kjer sta d'' in p'' v kotnih sekundah izražena zorni kot in paralaksa zvezde.

Toda bili so razočarani. Instrument je dajal slabe rezultate, upravljanje z njim pa je bilo mnogo težavnejše kot s šestmetrskim zvezdnim interferometrom. Edini opazovalec, ki je znal z njim operirati in je imel sploh z njim potrpljenje, je bil Pease. Razen zornega kota ene same zvezde ni Pease iz tega svojega interferometra »iztisnil« nobene pomembnejše meritve:

Zvezda	d''	$D/D_\odot$
β Andromedae (Mirach)	0,018	45

S Peaseovo smrtjo (1938) so meritve premerov zvezd z zvezdnim interferometrom utonile v pozabo.

Merjenja zvezdnih premerov na observatoriju Mt. Wilson so za tedanji čas pomenila vrhunski tehnično-astronomski dosežek. Danes predstavljajo le še preteklost. Do dandanes je tehnika astronomskih opazovalnih instrumentov tako močno napredovala, da je možno z njimi meriti mnogo manjše kote, kakor so jih meril na Mt. Wilsonu. Zorne kote zvezd merijo sedaj z novo napravo, z zvezdnim intenzitetnim interferometrom na observatoriju v Narrabriju v Avstraliji. S tem interferometrom merijo kotne razsežnosti silno majhnih in dokaj šibkih zvezd, ki jih ne bi mogel razločiti še tako zelo izpopolnjeni zvezdni interferometer.

M. Prosén

LITERATURA

[1] Lundmark Knut, The Diameters of the Stars, Handbuch der Astrophysik, Band V/2, Berlin (Springer), 1933.

[2] A. A. Michelson and F. G. Pease, Measurement of the Diameter of α Orionis with the Interferometer, Ap. J., Vol. 53, 1921.

---

[1] Mislimo si dvojno režo tik pred zbiralno lečo, svetilo v razdalji Δ pred režo in zaslon za režo, postavljen v goriščni ravnini leče. Svetloba točkastega svetila povzroči po prehodu iz dvojne reže na zaslonu sistem ostrih in jasno vidnih izmenično svetlih in temnih prog. To je značilna interferenčna slika točkastega svetila. Naj ima svetilo sedaj obliko krogle, premera D ($D \ll \Delta$). Če je zorni kot, tj. kotni premer svetila zelo majhen, so proge še vedno zelo ostre. S spreminjanjem velikosti svetila ali razmika med režama se spreminja ostrost prog. Če pri stalnem razmiku med režama narašča zorni kot svetila oz. se pri stalnem zornem kotu svetila veča razmik med režama, so proge vse manj ostre. Pri določenem zornem kotu svetila in razmiku rež proge niso več vidne in interferenčna slika svetila (ali vsaj središče te slike) je enakomerno svetla po vsej površini. Fizeau je pokazal, da obstaja tedaj med razmikom rež (A) in zornim kotom danega svetila ($D/\Delta = d = d''$. arc $1'' = d''/(2.10^5)''$) zveza $d = 1{,}22.\ \lambda/A$, kjer je λ poprečna valovna dolžina svetlobe, ki pride od svetila. Iz znanih λ in A nato določimo d oz. D pri znani Δ.

[2] Po današnjih cenitvah je Betelgeuse približno tisočkrat večja od Sonca.

ŠOLA

PRISPEVEK K RAZPRAVI O MATEMATIČNIH UČBENIKIH

Uredništvo OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO me je naprosilo, da ocenim dva nova učbenika. Oba sta izšla istočasno in z istim naslovom VIŠJA MATEMATIKA I z naslednjimi bibliografskimi podatki:

Tomislav Skubic: Višja matematika I. del, Ljubljana 1968. Izdalo in založilo Društvo varnostnih inženirjev in tehnikov, Maribor. Skripta, 8 + 340 strani, 4⁰; naklada 1 500 izvodov; dotiskano v maju 1968. Recenzent: akademik univ. prof. dr. ing. Anton Kuhelj.

Ivan Vidav: Višja matematika I. Tretja izdaja. Založila Državna založba Slovenije, Ljubljana 1968. 474 strani 8⁰.

Iz predgovorov obeh piscev se vidi, da sta oba učbenika namenjena med drugim tudi slušateljem prvega letnika tehniških visokih oziroma višjih šol.

Morda bom kdaj pozneje ugodil želji uredništva in podrobno strokovno ocenil oba učbenika, vendar sodim v tem trenutku in pri naših razmerah v šolstvu, da je bolj nujno in potrebno zapisati o naših matematičnih učbenikih nekaj bolj splošnih misli, ki naj sprožijo dobronamerno, tovariško in prepotrebno razpravo.

Uvodno poudarjam, da moja razmišljanja ne zadevajo samo zgoraj navedenih učbenikov, ampak da se nanašajo na vse mtemtične učbenike, skripta, študijske materiale itd. in na vse njihove pisce, pri čemer sebe nikakor ne izvzemam.

Pri obravnavanju vprašanj o matematičnih učbenikih izhajam iz dveh osnovnih stališč. Prvič, prepričan sem, da se pisci pri sestavljanju učbenikov trudijo vsak po svojih najboljših močeh; zato v naslednjem ni govor o piscih kot o osebah, ampak prej o njihovih različnih pojmovanjih pedagoškega dela na področju matematike. Drugič, prepričan sem, da je pri nas matematikov kljub lepim uspehom še vedno mnogo premalo in da je za vse še dovolj dela, tako da o kaki konkurenci v komercialnem smislu še ne more biti govora.

Glede pojmovanja pouka matematike srečamo bistvene razlike že na srednji stopnji pouka. Križanič skuša s svojimi učbeniki za gimnazije premakniti pouk matematike v smer modernejšega razvoja te znanosti, zlasti v smer teorije množic. Matematik, ki učno snov že pozna in jo gleda z višjega zornega kota, takemu modernejšemu pojmovanju ne more oporekati: zato so bili njegovi srednješolski učbeniki med matematiki na fakultetah sprejeti v splošnem z zadovoljstvom. Zelo deljena pa so mnenja o pedagoški dognanosti Križaničevih učbenikov. Zanimivo je, da jih nekateri pedagogi, ki jih uporabljajo, hvalijo, nekateri pa jih ostro grajajo. To je razumljivo, kajti pedagoško dognati čisto nova pojmovanja je naporno delo, ki potrebuje dolgotrajne izkušnje.

Križaničev koncept pouka matematike nehote moti Vadnalov učbenik za zaključni, četrti razred; ta je izšel prej, tako da pisec, tudi če bi želel, ne bi mogel svojega učbenika prilagoditi Križaničevim za nižje razrede. Osnovni koncept Vadnalovega učbenika temelji na funkcijski odvisnosti.

Rokopise za Križaničeve učbenike in za Vadnalov učbenik je pregledala ista strokovna komisija, katere člana sta bila priznana strokovnjaka prof.

dr. Ivan Vidav in prof. Ivan Štalec. Tej komisiji ne moremo očitati, da je rokopise pregledovala površno; sam se ji moram zahvaliti za nekaj pobud, brez katerih bi bilo v učbeniku nekaj nerazumljivih spodrsljajev; ob tej priložnosti sem ponovno občutil, kako odgovorno, kočljivo in zmotljivo je pedagoško delo. Komisija je dopustila obe sicer različni koncepciji učbenikov, saj drugega ni mogla storiti, ker je šlo v obeh primerih za resna pedagoška prizadevanja piscev.

O matematičnih učbenikih za srednje šole smo v našem društvu, zlasti v aktivu, večkrat razpravljali. Prav lahko smo se sporazumeli, da naj bi Križanič izvedel svoj koncept do konca in da naj bi sestavil podoben učbenik še za četrti razred gimnazij. Vsi smo bili vedno mnenja, da je treba poštena stremljenja razumno podpirati in jih presojati kot celoto z našim sedanjim izobraževalnim sistemom. Vsekakor pa bo treba skrbeti, da bodo absolventi naših srednjih šol dobili zadostno matematično znanje oziroma usposobljenost, da bodo lahko uspešno nadaljevali študij na visokih šolah.

Glede pouka matematike na nižjih stopnjah bi morda kazalo pogovoriti se o naslednjih težavah:

1. V koliki meri in na kak način je smotrno prilagajati učno snov in učne metode na nižjih stopnjah hitremu razvoju matematične znanosti in nastajanju njenih novih panog.

2. V koliki meri in na kak način je treba prilagajati učno snov in učne metode na nižjih stopnjah naraščajočim potrebam po matematičnih metodah v drugih dejavnostih.

3. Občutek imam, da preveč zanemarjamo vprašanja pouka matematike na strokovnih šolah in da se pretežno ukvarjamo z gimnazijami, katerih obseg in vloga sta se v našem šolstvu žal ali ne žal pravzaprav občutno zmanjšala.

4. Kdo sploh skrbi ali kdo naj skrbi za pouk matematike na nižjih stopnjah v naši samoupravni družbi ob velikem številu izobraževalnih skupnosti, pri ostrih medobčinskih mejah in pri nepregledni množici reorganizacij naših šolskih služb. V tej dinamiki vidim eno samo konstanto: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. V samoupravni družbi je prav gotovo naše društvo poklicano in še najbolj kvalificirano, da se tudi avtoritativno ukvarja s temi vprašanji.

V naslednjem prehajam na težave z matematičnimi učbeniki za visoke šole. Tudi tu se kažejo smernice po podobni modernizaciji, kakršno skušamo izvesti pri srednješolskih učbenikih, vendar s to razliko, da so ta stremljenja manj sistematična in dosledna. Pisci učbenikov sicer skušajo učno tvarino v kakem smislu modernizirati, vendar delajo to nedosledno in nedognano.

Vidav je dal v tretji izdaji svojega učbenika določen davek taki modernizaciji. V ta namen je docela predelal prvo poglavje o številih in dodal nekaj začetnih dopolnitev k drugemu, sedmemu in dvanajstemu poglavju; pri tem je ohranil ves drugi tekst nespremenjen. Ker jim ohranjeni tekst ni prilagojen, izzvene vse te spremembe in dopolnitve, kot da so nekako prisiljene in same sebi namen.

Tudi Skubic je skušal svoj učbenik modernizirati zlasti z uvajanjem logičnih simbolov. Toda tudi on je pri tem nedosleden in, če le more, zavije na pot bolj razumljive razlage v klasičnem jeziku. Zaradi tega je mnogo bolj razumljiv tam, kjer razpravlja po starem, kot pa tam, kjer razlaga v jeziku logičnih simbolov.

Ko opredeli npr. na str. 274 zveznost funkcije, jo klasično definira takole: Funkcija $f(x)$ je v točki x_0 zvezna natanko tedaj, kadar moremo najti k vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε vsaj eno tako pozitivno število δ, da je izpolnjena neenačba $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, če je le $|x - x_0| < \delta$. To definicijo napiše nato še z logičnimi simboli. Nekaj strani za tem pa opredeli na str. 277 enakomerno zveznost funkcije kratkomalo takole: Funkcija $f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna natanko tedaj, kadar moremo najti k vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε vsaj eno tako pozitivno število $\delta(\varepsilon)$, da velja implikacija:

$$|x - x'| < \delta(\varepsilon) \rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Ni tu važno, kaj misli pri tem izšolani matematik, važno je, kaj in koliko razume pri tem študent, ki se šele uči in ki se šele vživlja v težaven pojem zveznosti. Vprašanje je, ali je smotrno uporabljati zgoščeno logično pisavo že pri prvem učenju kake snovi, ki je že v vajenem jeziku zadosti težka. Podobno vprašanje velja tudi za aksiomatično metodo: Ali tudi ta ne zahteva že določene stopnje poznavanja učne snovi, da jo zares koristno lahko uporabimo?

Primerjajoč učbenike, ki obravnavajo isto učno tvarino, me je zaskrbelo dejstvo, da smo začeli matematiki govoriti v preveč različnih jezikih. Študent ali dijak, ki bo študiral po dveh učbenikih, bo zašel v hudo stisko, kajti ob poznavanju snovi po prvem učbeniku se bo še vedno težko prebijal skozi drugega.

Poleg metodološke problematike v zvezi z učbeniki višje matematike bo treba načeti tudi vprašanja o racionalizaciji in gospodarnosti njihovega izhajanja. Tisk je drag, subvencije zanj pa vedno manjše; Vidavova knjiga stane 80 (z besedami: osemdeset!) N din. Tako visoke cene študenti ne bodo zmogli in si bodo raje pomagali z vsemi mogočimi »cenenimi« skripti, študijskimi materiali itd. Tak material izhaja pogosto v slabi tehniki in majhnih nakladah, je pa prav zaradi tega sorazmerno zelo drag kljub nominalno nižji tržni ceni. Pri takih razmerah se skoraj lahko vprašamo, komu je pravzaprav namenjen vsebinsko in tehnično odličen Vidavov učbenik, če je tako drag in če pisec sam te snovi nikjer več ne predava.

Čas je, da tudi o tem odkrito spregovorimo in da začnemo s premišljeno in sistematično politiko izdajanja učbenikov za višjo matematiko. Stalen in hud pritisk študentov po pisanju skript pisce utruja in, kar je najhuje, jemlje jim dragocene moči in čas za spremljavo strokovne literature in za raziskovanje. Ob pravilni založniški politiki bi bilo mogoče razpoložljive subvencije izkoriščati mnogo bolj smotrno in znižati osnovnim učbenikom ceno tako, da bi bila znosna tudi za študente.

Glede založniške dejavnosti ima naše društvo kar bogate izkušnje in lepe uspehe zlasti s knjižno zbirko SIGMA. S SIGMO izvaja skrbno strokovno in materialno pretehtani knjižni program, katerega cilj je s časom pokriti najbolj pomembna področja matematike. Podobno sistematično založniško politiko bi bilo treba izdelati in izvajati tudi pri izdajanju učbenikov za višjo matematiko z namenom, da se kar najbolje izkoristijo razpoložljiva sredstva in se s tem zadosti potrebam učnih zavodov. Pri tem bo treba upoštevati možnosti in želje avtorjev, materialne možnosti naše družbe pa tudi posebnosti in zahteve posameznih učnih zavodov. K takemu načrtnemu delu bi bilo treba pritegniti vse predavatelje osnovnih matematičnih panog in ustrezne katedre oziroma učne

enote; pobudo za tako delo bi lahko dali ali fakulteta, ki je za matematiko matična, ali matematični oddelek Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko ali pa naše društvo.

Cilj take politike izdajanja matematičnih učbenikov bi bil med drugim morda lahko takle: za osnovna matematična področja bi dobili za vse potrebe standardne in ne preobširne učbenike, ki bi jih zaradi posebnosti posameznih učnih enot po potrebi dopolnjevali s krajšimi specializiranimi skripti ali študijskimi materiali ali pa tudi s publikacijami zbirke SIGMA kot pomožnimi učbeniki.

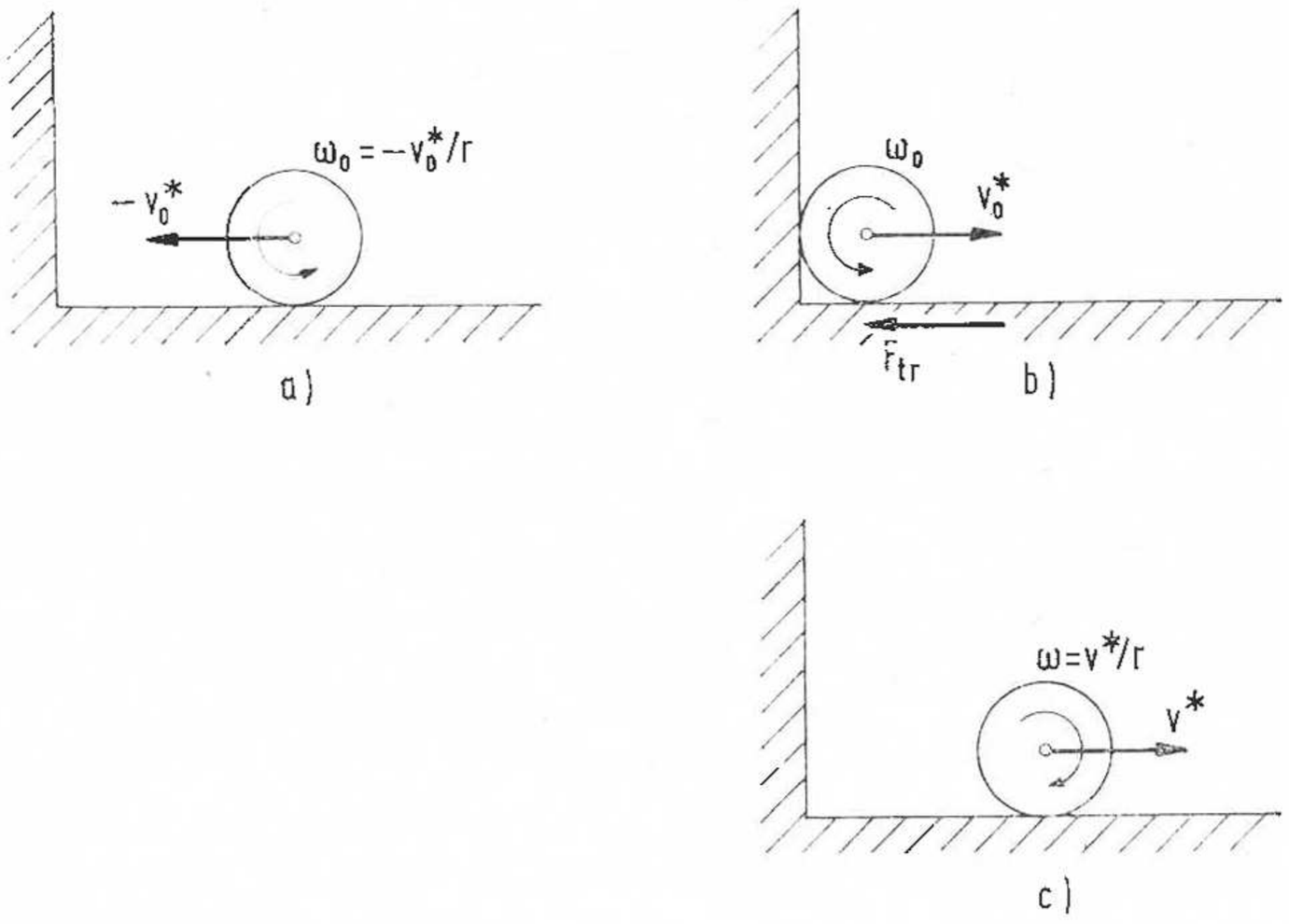
Predlagani program izdajanja matematičnih učbenikov bi bil dovolj obširen, da bi bilo dosti dela za vse; prepričan sem tudi, da bi za tak racionalen program dobili zadostne subvencije, saj se matematiki res ne moremo pritoževati, da dandanes ni razumevanja za razvoj naše stroke.

A. Vadnal

TRKI MED KOTALJENJEM

Med demonstracijskimi poskusi, ki kažejo ohranitev gibalne količine in mehanske energije, pogosto navajamo trke biljardnih krogel na mizi, kažemo odboj kotaleče se kroglice od toge stene in podobno.[1] Pri tem štejemo k sistemu obe telesi in trdimo, da je teža uravnovešena z navpično silo podlage, ter da drugih zunanjih sil ni. V resnici velja to le v trenutku, ko telesi trčita. A čas trka je prekratek, da bi lahko v njem kaj merili. Razmere, ki jih opazujemo kasneje, so močno spremenjene zaradi trenja med telesi in podlago.[2] Nekaj časa po trku telesa namreč drsijo, dokler zaradi sil trenja ne pride do kotaljenja. Med drsenjem se spremenita gibalna in vrtilna količina telesa.

Oglejmo si trk idealno prožnega, kotalečega se telesa (valja, krogle, obroča) s togo steno, ki je pravokotna na tir! Naj bosta stena in telo popolnoma gladka, tako da med trkom med njima ni trenja. Obenem naj bo trk tako kratek, da trenje s tlemi v tem času ne vpliva na gibanje. Potek trka je narisan na sl. 1. Telo se kotali proti steni, pri čemer je hitrost težišča $-v^*_0$. Kotna



Sl. 1. Potek trka med kotalečim se telesom in togo steno. Med steno in telesom pri trku ni trenja

hitrost okrog težiščne osi je $-v^*_o/r$, pri čemer je r radij telesa. Ob trku deluje stena na telo s sunkom sile $\int F\,dt$, ki spremeni gibalno količino telesa. Končna hitrost je po velikosti enaka začetni in ima nasprotno smer. Vrtilna količina ostane nespremenjena, tako da se telo neposredno po trku še vedno vrti v prvotni smeri in drsi po tleh. Čez nekaj časa se začne telo spet kotaliti, pri čemer je hitrost težišča v^*, kotna hitrost pa v^*/r. Gibanje do tega trenutka zapišemo z enačbama:[3]

$$m\,dv^*/dt = -F_{tr} \tag{1}$$

$$J^*\,d\omega/dt = rF_{tr}$$

ki dasta po integriranju:

$$m\,(v^* - v^*_o) = -F_{tr}t \tag{2}$$

$$J^*\,(\omega - \omega_o) = r\,F_{tr}t$$

Ko postavimo za $\omega = v^*/r$ in $\omega_o = -v^*_o/r$, dobimo končno hitrost:

$$v^* = v^*_o\,[1 - 2\,k/(k+1)]$$

pri čemer je $k = J^*/mr^2$.
Hitrost kroglice bi bila po trku 3/7 začetne hitrosti. Hitrost valja bi bila 1/3 začetne hitrosti. Obroč bi se ustavil.

Naj bosta sedaj stena in telo hrapava in μ koeficient trenja.[4] Ob trku deluje na telo še sunek navora $\int \mu F r\,dt = 2\,mv^*_o\,\mu r$, ki spremeni vrtilno količino telesa tako, da je neposredno po trku kotna hitrost enaka $-v^*_o/r + 2\,mv^*_o\,\mu r/J^* \leqq 0$. Enačbi (2) dasta v tem primeru za končno hitrost:

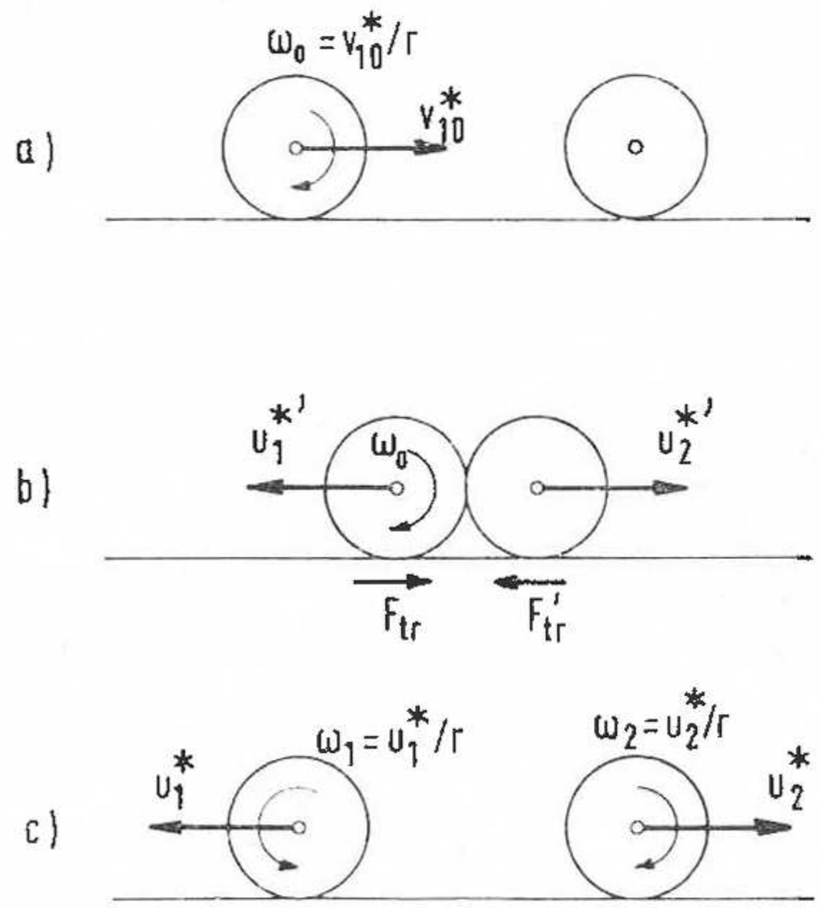
$$v^* = v^*_o\,[1 - 2\,(k-\mu)/(k+1)]$$

Sila trenja s tlemi je namreč delovala manj časa in je zato končna hitrost večja. Največjo vrednost ima hitrost, če se telo ob trku povsem preneha vrteti

$$v^*_{maks} = v^*_o/(1+k)$$

Iz tega ocenimo celotno kinetično energijo W_k po trku:

$$W_{ko}\,[(1-k)/(1+k)]^2 \leqq W_k \leqq W_{ko}\,[1/(1+k)]^2$$



Sl. 2. Potek trka dveh teles med kotaljenjem po hrapavi podlagi. Med telesoma pri trku ni trenja

$W_{ko} = (1/2)\, m v^{*}{}_{c}^{2}\,(1 + k)$ je začetna kinetična energija. Razlika med začetno in končno kinetično energijo se pretvori v notranjo energijo telesa in podlage.

Podobne so razmere pri centralnem trku dveh teles. Naj bosta najprej telesi gladki. Potek trka je narisan na sl. 2. Telo z maso m_1, vztrajnostnim momentom $J^{*}{}_{1}$ in z radijem r se s hitrostjo težišča $v^{*}{}_{o1}$ kotali proti mirujočemu telesu z maso m_2, vztrajnostnim momentom $J^{*}{}_{2}$ in z enakim radijem r. Pri trku, ki je idealno prožen, velja:

$$m_1\, v^{*}{}_{o1} = m_1\, u^{*}{}_{1} + m_2\, u^{*}{}_{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\, m_1\, v^{*}{}_{o1}{}^{2} = \tfrac{1}{2}\, m_1\, u^{*}{}_{1}{}'^{2} + \tfrac{1}{2}\, m_2\, u^{*}{}_{2}{}'^{2}$$

Hitrosti težišč neposredno po trku sta tedaj:

$$u^{*}{}_{1}{}' = (m_1 - m_2)\, v^{*}{}_{o1}/(m_1 + m_2)$$

$$u^{*2} = 2\, m_1\, v^{*}{}_{o1}/(m_1 + m_2)$$

Vrtilni količini teles ostaneta med trkom nespremenjeni, tako da se prvo telo vrti okoli težiščne osi s kotno hitrostjo $\omega_{o1} = v^{*}{}_{o1}/r$, drugo telo pa nima vrtilne količine okoli težišča. Gibanje teles pc trku opišemo z enačbama (1), ki ju integriramo pri naslednjih začetnih pogojih:

prvo telo:	$v^{*}{}_{o} = u^{*}{}_{1}{}'$	$\omega_o = v^{*}{}_{o1}/r$
drugo telo:	$v^{*}{}_{o} = u^{*}{}_{2}{}'$	$\omega_o = 0$

S tem dobimo za končni hitrosti težišč:

$$u^{*}{}_{1} = v^{*}{}_{o1}\,[1 - 2\, m_2/(m_1 + m_2)\,(1 + k_1)]$$

$$u^{*}{}_{2} = 2\, m_1\, v^{*}{}_{o1}/(m_1 + m_2)\,(1 + k_2)$$

kjer je $k_1 = J^{*}{}_{1}/m_1\, r^2$ in $k_2 = J^{*}{}_{2}/m_2\, r^2$.

Skupna gibalna količina teles G je po trku

$$G = m_1\, u^{*}{}_{1} + m_2\, u^{*}{}_{2} = m_1\, v^{*}{}_{o1}\,[1 + m_2\,(k_1 - k_2)/(m_1 + m_2)\,(1 + k_2)]$$

Če sta si telesi podobni, torej če je $k_1 = k_2$, je končna gibalna količina enaka začetni gibalni količini. Sunka sil trenja sta v tem primeru enako velika in nasprotno usmerjena in je zato skupni zunanji sunek enak nič. Kinetična energija je po trku manjša od začetne:

$$W_k = W_{ko}\left\{1 - \frac{4\, m_2}{(m_1 + m_2)\,(1 + k_1)}\left[1 - \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_1}{1 + k_2} + \frac{m_2}{1 + k_1}\right)\right]\right\}$$

Pri trku enakih krogel je končna kinetična energija približno 4/7 začetne. Pri trku enakih valjev je končna kinetična energija približno 5/9 začetne. Pri trku enakih obročev je končna kinetična energija približno $\frac{1}{2}$ začetne.

Preostane še trk dveh hrapavih teles. Naj bo μ koeficient trenja med telesoma pri drsenju. Med trkom se telesoma spremeni vrtilna količina za $-\mu\, r\, m_2\, u^{*}{}_{2}{}'$, tako da ima prvo telo po trku kotno hitrost $v^{*}{}_{o1}/r - \mu\, r\, m_2\, u^{*}{}_{2}{}'/J^{*}{}_{1}$, drugo telo pa kotno hitrost $-\mu\, r\, m_2\, u^{*\prime}{}_{2}/J^{*}{}_{2}$. Z integracijo enačb (1) dobimo v tem primeru za končni hitrosti naslednja izraza:

$$u^{*}{}_{1} = v^{*}{}_{o1}\,[1 - 2\, m_2\,(1 + \mu)/(m_1 + m_2)\,(1 + k_1)]$$

$$u^{*}{}_{2} = v^{*}{}_{o1}\,.\,2\, m_1\,(1 - \mu)/(m_1 + m_2)\,(1 + k_2)$$

Skupna gibalna količina G je tedaj:

$$G = m_1 v^*_{o1} \left[1 - \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1 + \mu}{1 + k_1} - \frac{1 - \mu}{1 + k_2}\right)\right]$$

in je tudi pri enakih telesih vedno manjša od začetne. Tudi kinetična energija se pri trku zmanjša.

M. Hribar

LITERATURA

[1] J. H. Bayes, W. T. Scott: Billiard-Ball Collision Experiment, Am. J. Phys. *31*, 197 (1963).

[2] H. L. Armstrong: Some Pitfalls in Demonstrating Conservation of Momentum, Am. J. Phys. *36*, 56 (1968).

[3] J. Strnad: Uvod v fiziko, I. del, Ljubljana (Katedra za fiziko), 1968.

[4] S. Pahor: Izrek o vrtilni količini, Obz. mat. fiz., *14*, 80 (1967).

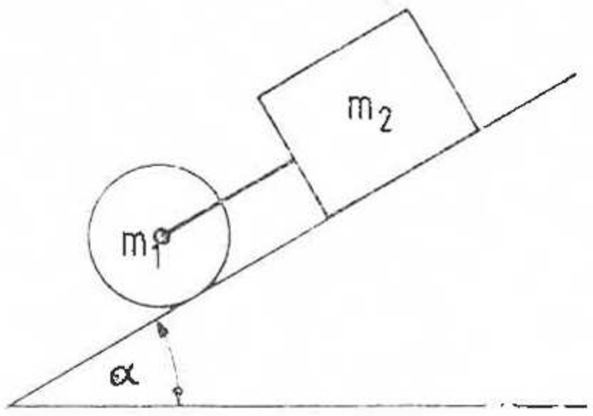
DRUGA MEDNARODNA OLIMPIADA IZ FIZIKE

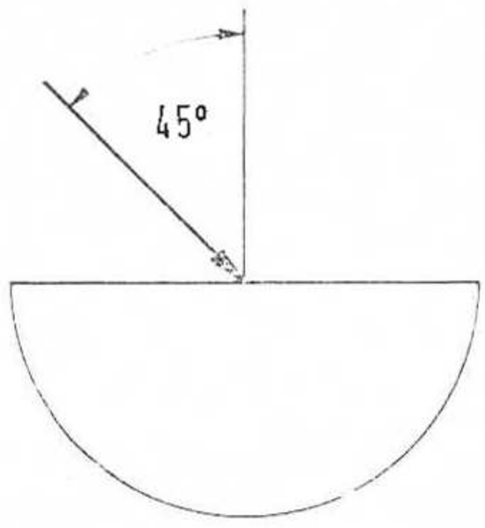
Konec junija 1968 je bila v Budimpešti II. mednarodna fizikalna olimpiada osmih socialističnih držav: Bolgarije, Češkoslovaške, DDR, Jugoslavije, Madžarske, Poljske, Romunije in Sovjetske zveze. Poleg Sovjetske zveze in Vzhodne Nemčije se je tudi Jugoslavija letos prvič udeležila tekmovanja. Vsaka država je sodelovala z ekipo, sestavljeno iz treh članov. Jugoslavijo so zastopali Miro Dorešić in Hrvoje Galić iz Zagreba in Andrej Detela iz Ljubljane.

Tekmovanje je trajalo dva dni. Prvi dan so dijaki pet ur reševali tri računske naloge, drugi dan pa so morali, prav tako v petih urah, opraviti isto eksperimentalno vajo. Ekipno so se kot lani najbolje uvrstili Madžari, med posamezniki pa sta bila najboljša Mojmír Simerský iz ČSSR in Tomasz Kreglewski iz Poljske. Jugoslavija je v ekipni razvrstitvi zasedla šesto mesto. Med posamezniki je Andrej Detela zasedel sedmo mesto in prejel četrto nagrado.

Naloge so bile naslednje:

1. Na klancu z nagibom $\alpha = 30^0$ mirujeta homogen valj z maso $m_1 = 8$ kg in s premerom 10 cm ter telo v obliki paralelopipeda z maso $m_2 = 4$ kg, povezana z neraztegljivo breztežno vrvico, ki pelje od gredi valja do telesa. S kolikšnim pospeškom se pričneta gibati telesi, ko ju spustimo? Koeficient trenja med telesom, ki je po obliki paralelopiped, in klancem je 0,2, trenje v gredi valja in trenje pri kotaljenju zanemarimo. Vztrajnostni moment homogenega valja je $J = \frac{1}{2} mr^2$.





2. V prvi posodi imamo 300 cm^3 toluola s temperaturo 0 °C, v drugi posodi pa 110 cm^3 iste tekočine pri 100 °C. Kolikšno prostornino bosta zavzemali tekočini, ko ju zmešamo? Temperaturni koeficient prostorninskega raztezka toluola je 0,001 st^{-1}. Toplotnih izgub pri mešanju ni.

3. Telo v obliki polvalja je napravljeno iz stekla z lomnim kvocientom $\sqrt{2}$. S kotom 45° proti pravokotnici vpada na ravno ploskev polvalja curek svetlobe, ki je pravokoten na os polvalja. Na katerem delu valjaste ploskve izhaja svetloba iz polvalja?

4. (Eksperimentalna vaja). Na delovnem mestu boste našli tri škatlice, ki jih ne smete odpreti. V vsaki škatlici je po en element električnega kroga. Z meritvami ugotovite, kateri elementi se nahajajo v škatlah in kakšni so njihovi električni parametri! Za rešitev naloge je na razpolago izvir izmeničnega toka s frekvenco 50 s^{-1}, izvir enosmernega toka in dva univerzalna električna instrumenta tipa Univo. Podane so notranje upornosti instrumentov pri vseh merskih obsegih. Tekmovalci dobe tudi kratka navodila za delo z instrumentoma.

Računske naloge niso bile pretirano zahtevne in jih je večina tekmovalcev pravilno rešila. Drugo nalogo so pravilno rešili vsi, nekateri so se lovili pri prvi nalogi, največ napak pa je bilo pri tretji, kjer so mnogi spregledali totalni odboj. Pri eksperimentalni vaji si je moral vsak pomagati, kakor je pač vedel in znal, vendar tudi tu ni bilo večjih spodrsljajev.

Ker naloge fizikalno niso bile težke in so jih zato napravili skoraj vsi, je komisija pri ocenjevanju močno upoštevala način izražanja, logično in pravilno sklepanje in razmišljanja o posebnih rešitvah. Tak način ocenjevanja je nekoliko vprašljiv, ker različni ljudje različno ocenjujejo različne poti, ki peljejo do rezultata. Ob zahtevnejših nalogah bi ta pomislek odpadel.

Na koncu naj napišem, da smo bili na Madžarskem zelo toplo sprejeti. Povsod smo čutili veliko zavzetost in gostoljubje, ki pri nas ob takih tekmovanjih pogosto ni v navadi.

A. Detela

DOMAČE VESTI

SLOVESNA OTVORITEV NA NOVO OPREMLJENE SOBE V ROJSTNI HIŠI JURIJA VEGE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS je v nedeljo, 23. 6. 1968, organiziralo slovesno otvoritev na novo opremljene sobe v rojstni hiši slovenskega matematika Jurija Vege. Po letu 1954, takrat smo praznovali 200-letnico njegovega rojstva, smo letos prvič počastili njegov spomin. Z materialno pomočjo skupščine občine Ljubljana Moste-Polje so postavili v sobi dva stenska panoja s sliko J. Vege oziroma s fotografijami iz njegovega življenja. V vitrini pa so razstavili osem njegovih del od prve njegove knjige do zadnjih ponatisov logaritemskih tabel, ki so izšli v ZDA in ZSSR. Prospekt z motivi Zagorice ter razglednice Wolfovega portreta J. Vege je založila Mladinska knjiga. Material za opremljeno sobo in prospekt sta pripravila prof. Jože Povšič ter ing. arch. Matija Suhadolc.

Slovesnosti, ki jo je pričel predsednik društva doc. dr. Jože Grasselli, se je udeležilo predvsem veliko domačinov. Med povabljenimi gosti so bili tudi republiški sekretar za prosveto in kulturo Tomo Martelanc, zastopnik slovenske akademije znanosti in umetnosti prof. dr. Ivan Vidav, predsednik slavističnega društva akademik dr. Bratko Kreft, zastopnik zavoda za šolstvo prof. Stanko Uršič, podpredsednik zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije prof. dr. Fran Dominko, zastopnik tovarne aparatov in instrumentov Vega Gabrijel Sfiligoj, direktor centralne tehniške knjižnice ing. Peter Keršič ter predsednik sveta za kulturo skupščine občine Ljubljana Moste-Polje Stane Možina, ki je sobo tudi odprl.

O delu in življenju Jurija Vege je govoril prof. Jože Povšič, ki pripravlja tudi izdajo njegove bibliografije. Govor je zaključil z naslednjimi besedami:

Že leta 1838 je pisec prve biografije Jurija Vege v letnem poročilu deželnega muzeja predlagal, naj bi v Ljubljani postavili Juriju Vegi javen spomenik. Ta predlog so mnogi obnavljali skoraj 100 let. Pred prvo svetovno vojno so za spomenik zbirali prispevke, kipar Ivan Zajec je izdelal osnutek, časopisi pa so objavili sliko osnutka. Vega je bil upodobljen v historičnem hipu, ko so ga našli 7. oktobra 1789 v utrdbah pred Beogradom sredi najhujšega streljanja s topovi, zaverovanega v matematične račune, na osnovi katerih je prisilil Turke, da so kapitulirali in izročili beograjsko trdnjavo. Spomenik bi moral stati zraven Valvazorja pred Narodnim muzejem. Do postavitve spomenika pa v Ljubljani ni prišlo, pač pa so daljnovidni in napredni ljudje postavili spomenika v Moravčah in v Idriji. V slovenski prestolnici sta danes edina spomina na Jurija Vego: ulica in tovarna aparatov in inštrumentov v Kotnikovi ulici.

Jurij Vega ni bil matematik, ki bi delal v ospredju matematičnih teoretičnih raziskav tedanje dobe. Oprijel se je pisanja učbenikov in predvsem preračunavanja logaritmov, področja, ki je bilo takrat aktualno. Tega dela pa se je lotil z naravnost kmečko trdovratnostjo, z neverjetno energijo, z vztrajnostjo in skrbnostjo — kar je pravzaprav naša narodnostna poteza — in je uspel v svetovnem merilu. Smemo ga šteti med tiste naše sinove, ki so z deli mednarodne veljave dokazali, da smo Slovenci del evropske celote, ki je soustvarjal in soustvaril evropsko kulturo, in da so tudi mali narodi potreben in ustvarjajoč

faktor evropske skupnosti. Jurij Vega je za nas izraz naše umske moči, ki nam daje pravico do samostojnega življenja. Jurij Vega je dokaz, da imamo Slovenci tudi resno znanstveno izročilo mednarodnega pomena. Njegovi dosežki sodijo — ne glede na tuj izrazni jezik — v našo kulturno zakladnico. Naša dolžnost je prikazati jih mladini, v kateri naj zbujajo naravno čustvo patriotičnega ponosa. Tak je naš cilj ob tej priliki, ko odpiramo na novo opremljeno sobo v Vegovem rojstnem domu.

Danes nastaja pri nas v slovenščini osnovna matematična literatura. Napori za ustvarjanje domače matematične literature uživajo vso podporo prosvetnih oblasti in doživljajo včasih prav nepričakovano topel sprejem pri naši javnosti. Tako pravzaprav nadaljujemo večstoletno tradicijo Jurija Vege in drugih starejših slovenskih avtorjev, ki pa so morali prej pisati v tujem jeziku. Šele v ugodnih kulturnih razmerah, ki jih je omogočil razpad bivše avstroogrske monarhije in ustvarila zlasti naša ljudska revolucija, je lahko slovenski matematik začel pisati v domačem jeziku.

O velikem pomenu J. Vege pa je povedal še dr. Bratko Kreft naslednje:

Zgodovina slovenskega naroda zgovorno priča, da v svetu kulture ne odloča večja ali manjša številnost nekega naroda, marveč da more maloštevilni narod roditi prav tako velike ljudi kakor številno močnejši ali večji narodi. Svetu smo dali veliko več velikih mož, kakor se nam prizna, celo toliko, da nekaterih še sami dovolj ne poznamo, še manj pa jih pozna svetovna javnost in ljudske množice, čeprav je večina izšla iz njih. Tudi Jurij Vega sodi med tiste naše velike može, ki ga še premalo poznamo in premalo spoštujemo, čeprav je v svetu matematične znanosti doma in po svetu njegovo delo dobilo nadpovprečna priznanja. Zlasti ve malokdo v velikem svetu, da je bil Vega mož slovenske krvi, rojen v preprosti kmečki hiši. Prav tako pa se tudi doma še zmeraj premalo zavedamo pomembnosti njegovega dela in veličine njegovega duha, čeprav stoji po genialnosti svojega dela vštric z dvema našima genijema 19. stoletja — Prešernom in Miklošičem, slavistom mednarodnega slovesa. Jurij Vega, čigar delo na matematičnem področju sodi v svetovno zgodovino znanosti zadnjega desetletja 18. stoletja, je v resnici prva naša genialna osebnost, prvi naš genij pred Prešernom.

Vega je znan predvsem po svojih logaritmovnikih, manj pa ga poznamo kot vojaškega strokovnjaka, kot izrednega topniškega izvedenca, ki je s svojo umnostjo in vojaško spretnostjo odločilno posegel že v bitko za Beograd l. 1789. Istega leta, ko je od njega dve leti mlajši vrstnik Anton Linhart postavil s svojima igrama temelje novejši naši dramatiki in gledališču, je Jurij Vega kot topniški častnik v vojski generala Laudona. Kot matematik je preračunal, v kakšnem kotu morajo biti usmerjeni možnarji, da bodo krogle zadele v turško trdnjavo. Pred Vegom niso dosegale zaželenega cilja, po Vegovem posegu pa so zadele v živo in Beograd je padel. Toda Vega ni bil edini Slovenec, ki se je bil pred Beogradom. Po raznih podatkih so bili med vojaki še drugi njegovi sonarodnjaki, ki so se borili za osvoboditev Beograda. Zato je spomenik na Avali tudi spomenik neznanim slovenskim vojakom, kajti tudi ti so prelivali kri za Beograd. Zato je Beograd tudi edino naše mesto, ki je omenjeno v ljudskih vojaških pesmih vseh jugoslovanskih narodov. Jurij Vega je poleg vsega še klasičen primer izrednega vojaškega talenta, ki je izšel iz preproste slovenske kmečke hiše ter se z umnostjo, hrabrostjo pa tudi z mukami priboril do visokega položaja, ki mu ga je morala priznati takratna višja

družba, ki sicer ni bila kdo ve kako naklonjena ljudem iz preprostega ljudstva. Osvobodilna vojna je dokončno pokazala, koliko izredne vojaške nadarjenosti je v našem ljudstvu, ko so mnogi partizani v bojih izpričali ne samo junaštvo, marveč se je med njimi uveljavilo tudi mnogo vojaških talentov. Prvi doslej znani vojaški strokovnjak nadpovprečne nadarjenosti pa je bil Jurij Vega. Slavistično društvo Slovenije se priključuje današnji slavnosti, ki jo je v čast in spomin temu velikemu matematiku in vojaškemu strokovnjaku priredilo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.

Še ena velika in lepa poteza je v njegovem značaju: bil je tudi velik slovenski patriot, ki do smrti ni pozabil dežele, kjer se je rodil, ki mu je bila prvi in pravi dom, čeprav je moral zgodaj po svetu. Vsako svojo knjigo je poslal v Ljubljano kot izraz svoje hvaležnosti kraju, kjer se je mlad izšolal. Tudi te Vegove ljubezni do doma ne smemo spregledati. Z vsem svojim delom in značajem bodi vzgled tudi sedanjim mladim pokolenjem, ki ne smejo pozabiti, da imamo že v preteklosti vélike može. Spoštovati in ceniti tako veliko delo, kakor ga je opravil Vega, in spoštovati tako vse veliko iz preteklosti, ni nič konservativnega, kajti pri vsakem narodu so veliki možje svetilniki, ki ne svetijo le svojemu narodu v svojem času, marveč so svetilniki za vse čase, ker svetijo tudi v prihodnost. Zato je potrebno, da dobi v prihodnjih letih Vega prav takšno monografijo o svojem pomembnem delu in življenju, kakor so jo že dobili Trubar, Prešeren in Gregorčič. Z njo moramo opozoriti za vselej dom in svet, da se je ta veliki mož rodil v slovenskem ljudstvu. Kakor vsi naši veliki možje mora biti tudi Vega svetal vzor vsem mladim ljudem, vzor pridnosti, poštenosti in vztrajnosti, kajti njegova pot nikakor ni bila lahka, kakor ni bila lahka nobenemu našemu velikemu človeku — skupaj z njegovim ljudstvom, ki ga je rodilo.

V nadaljevanju so v kulturnem programu sodelovale osnovne šole Križevska vas, Moravče in Dolsko ter domači pevski zbor pod vodstvom upraviteljice osnovne šole Križevska vas tov. Francke Tekavec z naslednjim sporedom:

Pesem o Juriju Vegi (recitacija).
Pesem dela (zborna recitacija).
Simbolični ples učencev osnovne šole Križevska vas.
Tako ni svetela še vaša dežela (recitacija).
Pastorella in Soldatski boben (pevski zbor osn. šole Moravče).
Simbolični plesi (učenci osn. šole Križevska vas).
Kdor ima srce, Tam, kjer beli so snežniki, Gor čez jezero (domači pevski zbor).
Doli v kraju sama zase, Lipa zelenela je, Zabučale gore, Plovi, plovi, Srečali smo mravljo (pevski zbor osn. šole Križevska vas).

Obisk vasi Zagorica nad Dolskim (560 m nadmorske višine) z rojstno hišo Jurija Vege toplo priporočamo za šolske in nedeljske izlete. Markirane poti vodijo od železniških postaj Laze in Jevnica ter iz Moravč. V Zagorico pa je možen dostop v lepem vremenu tudi z avtomobilom od Dolskega mimo Sv. Helene.

Ciril Velkovrh

STROKOVNI JEZIK

MATEMATIČNA TERMINOLOGIJA

Takoj ob ustanovitvi Društva matematikov in fizikov LR Slovenije se je osnovala tudi komisija za matematično terminologijo. Prvo kratko poročilo o delu te komisije je bilo objavljeno v prvi številki Obzornika za matematiko in fiziko leta 1951. Nadaljnja zelo skopa obvestila o delu komisije so bila med rednimi letnimi poročili za društvene občne zbore. Kljub tako redkobesednim poročilom pa je bilo v teh letih na področju matematične terminologije opravljeno zelo veliko in pomembno delo.

Leta 1953 je izšla pri Državni založbi Slovenije knjižica A. Vadnal: Matematična terminologija, DZS, Ljubljana. Knjižica obsega 44 strani in zajema okoli 1 500 gesel iz elementarne matematike, upošteva pa samo potrebe pouka matematike na osnovnih in srednjih šolah. V njej so zbrana gesla iz elementarne matematike iz vseh srednješolskih učbenikov, ki so izšli v slovenskem jeziku do druge svetovne vojne.

Leta 1962 so se začele pri Slovenski akademiji znanosti in umetnosti priprave za izdajo terminološkega slovarja sodobnega knjižnega jezika. K temu delu sta bila pritegnjena iz vrst matematikov dva sodelavca, in sicer Oton Sajovic za področje opisne geometrije in Alojzij Vadnal za druge matematične panoge. Pri ekscerpiranju matematične literature je bilo zbranih okoli 15 000 kartotečnih listkov, ki zajemajo vse učbenike višje matematike in knjižice zbirke SIGMA, ki so izšli do konca leta 1967. Zbrano gradivo obdelujejo sedaj stalni člani leksikološke sekcije SAZU, ki pripravljajo dokončno redakcijo terminološkega slovarja slovenskega jezika.

Leta 1968 so se začele pri SAZU priprave za izdelavo matematičnega terminološkega slovarja; priprave vodi Naravoslovna sekcija terminološke komisije SAZU. V tem slovarju bo treba na kratko pojasniti slovenske in tuje strokovne izraze iz matematike. Za opisno geometrijo je to delo prevzel Oton Sajovic, za druge panoge matematike pa Alojzij Vadnal. To delo bo predvidoma trajalo vrsto let in ga ni bilo mogoče časovno določiti.

Sestavljanje matematičnega terminološkega slovarja je sicer zamudno, toda izredno zanimivo delo. Ob njem srečamo različne posebnosti piscev, neenotnost izražanja, posrečene in ponesrečene poskuse uvajanja novih izrazov itd. Ob takem delu pa ostaja globok vtis, kako silno je porasla izrazna moč slovenskega jezika na področju matematične znanosti v zadnjih petdesetih letih.

V tem in v naslednjih nadaljevanjih bo skušal pisec opozoriti na nekatera zapažanja in zanimivosti, na katere je naletel pri zbiranju gradiva za matematični terminološki slovar. Komisija za terminologijo vabi bralce, da s kritiko, z vprašanji in s svojimi prispevki pomagajo pri tem napornem in odgovornem delu.

Abeceda

V prvotnem pomenu besede razumemo pod *abecedo* zaporedje črk, kakor so te leksikografično urejene v latinici. Ker realizira to zaporedje popolno urejenost črk, je mogoče posplošiti tako strukturo urejenosti tudi na druge pojme in ne samo na črke. V nekaterih matematičnih panogah, zlasti v algebri,

v teoriji informacij, v matematični logiki in v teoriji jezikov elektronskih računalnikov razumemo pod *abecedo* vsak popolnoma urejen sistem znakov, ne oziraje se pri tem, kakšno vsebino ali pomen imajo ti znaki.

Absoluten

Beseda *absoluten* je latinskega izvora in pomeni solutus ab omni dependentia, osvobojen vsake odvisnosti; včasih jo sicer lahko prevedemo z neodvisen, brezpogojen, sam po sebi, popoln itd.; kadar jo pa uporabljamo kot matematičen termin, je navadno ne prevajamo. Besedo najdemo v naši matematični literaturi v zelo številnih zvezah in zaradi tega tudi v zelo različnih pomenih.

Absolutni člen pomeni v vsoti oziroma vrsti člen, v katerem ne nastopa spremenljivka, ki je torej konstanten; zato ga lahko imenujemo tudi konstantni člen.

Absolutno majhen oziroma *absolutno velik* uporabljajo naši pisci namesto majhen oziroma velik po absolutni vrednosti. Podobno pomeni *absolutna razlika* dveh števil absolutno vrednost razlike teh dveh števil.

Absolutna natančnost pomeni nekaterim piscem popolna oziroma matematična natančnost.

V teoriji pogreškov je *absolutni pogrešek* razlika med izmerjeno oziroma zaokroženo vrednostjo in pravo vrednostjo.

V starejših srednješolskih učbenikih najdemo za termin (matematična) verjetnost termin *absolutna verjetnost*; take rabe ne bi priporočali. Starejši pisci so uvedli to rabo zato, da so poudarili razloček tega termina s terminom *relativna verjetnost*, ki pomeni verjetnost, da se kak dogodek zgodi prej kot kak drug dogodek. Obeh terminov v verjetnostnem računu več ne uporabljamo.

Zelo pogosto srečamo izraze *absolutno konvergirati, absolutno konvergenten, absolutna konvergenca* itd. Te izraze uporabljamo pri vrstah, ki imajo lastnost, da konvergirajo, če zamenjamo njihove člene z njihovimi absolutnimi vrednostmi. Znano je, da vrsta konvergira navadno, če konvergira absolutno; obratno pa ne velja.

Zanimive so nekatere zelo posebne rabe besede absoluten.

Absolutna geometrija je geometrija, ki temelji na aksiomih zveze, urejenosti, kongruence in zveznosti, ki pa ne upošteva znamenitega Evklidovega aksioma o vzporednicah.

Zvezo *absolutna invarianta* uporablja Plemelj (Teorija analitičnih funkcij, str. 252) za tako imenovano funkcijo J, ki prenese vsako linearno celoštevilčno substitucijo koeficienta period za determinanto + 1 ali — 1.

Zvezo *absolutni ekstrem* najdemo v dveh pomenih. Če ima realna funkcija več ekstremov, recimo maksimumov, ki niso enaki, tedaj imenujemo največjega med njimi absolutni maksimum. Plemelj (Diferencialne in integralne enačbe, str. 354) pa definira v variacijskem računu *absolutni ekstrem* kot ekstrem na ekstremali, izven katere ne eksistira noben drug ekstrem.

Vakselj (Osnove matematike I, str. 58) uvede zvezo *absolutno število* za število, ki je definirano z Dedekindovim sekom: potrebo po uvedbi take zveze čuti zaradi ostrejšega razlikovanja teh in pozneje uvedenih relativnih števil.

Absorbcija.

Manj znana je v naši matematični literaturi beseda *absorbcija*, ki jo uporablja Prijatelj (Matematične strukture II, str. 174) v zvezi *zakon absorbcije.*

Po tej definiciji sta operaciji $\cup$ in $\cap$ zvezani med seboj po zakonu absorbcije, če velja:

$$a \cap (a \cup b) = a \quad \& \quad a \cup (a \cap b) = a.$$

Aditiven.

Besedo *aditiven* srečamo v dveh pomenih. V prvem pomenu je aditivno vse, kar se da prišteti: v tej zvezi je *aditivna konstanta* konstanta, ki se lahko prišteje nedoločenemu integralu. V drugem pomenu pa pomeni *aditiven* kako lastnost, ki je kakorkoli povezana s seštevanjem. *Aditivni funkcional* je funkcional, ki ga odlikuje lastnost, da je funkcional vsote enak vsoti funkcionalov sumandov. *Aditivna funkcija območja* (Križanič: Vektorska in tenzorska analiza, str. 99) je vsaka funkcija, ki ima to lastnost, da je integral na uniji območij enak vsoti integralov na posameznih območjih. *Aditivna teorija števil* (Grasselli: Osnove teorije števil, str. 117) je tisti del teorije števil, ki se ukvarja z vsotami.

Adjungiran.

Ta izredno pogost termin uporabljajo pisci v najrazličnejših zvezah, kadar hočejo izraziti, da je nekaj privzeto ali pritegnjeno v obravnavo ali da je nekaj v kaki povsem določeni povezavi s čim drugim. Namesto *adjungiran* uporabljajo ponekod nekateri pisci tudi *konjugiran* kot sinonim.

Adjungirani element pomeni element, ki ga pritegnemo k obstoječi množici elementov tako, da z njim razširimo množico; take adjunkcije uporabljamo zlasti v algebri pri širjenju obsegov.

Adjungirano matriko imenuje Vidav (Algebra, str. 112) matriko, ki jo dobimo takole: dano matriko najprej transponiramo in nato v njej nadomestimo vse elemente z ustreznimi konjugirano kompleksnimi elementi. Vidav (Algebra, str. 115) imenuje tudi element, ki je enak svoji adjungirani vrednosti, *sebi adjungirani* ali *simetrični element.*

V vektorskem prostoru srečamo vrsto adjungiranih kategorij: *adjungirano bazo, adjungirani prostor, adjungirani trieder* ali *trirob, adjungirano transformacijo* itd.

Homogeno integralno enačbo, ki ustreza določeni nehomogeni integralni enačbi, imenuje Plemelj (Diferencialne in integralne enačbe, str. 260) tej *adjungirano integralno enačbo*; podobno uporabi istotam tudi zvezo *adjungirani problem.*

Alikvoten.

Besedo *alikvoten* uporablja Plemelj v zvezi *alikvotni del števila*; pri tem razume del števila, ki ga dobimo, če delimo število s kakim naravnim številom. Računanje alikvotnega dela je potemtakem obratno računanju mnogokratnika. Zaradi tega bi bilo namesto *alikvotni del števila* morda boljše *mera števila.*

Alterniranje.

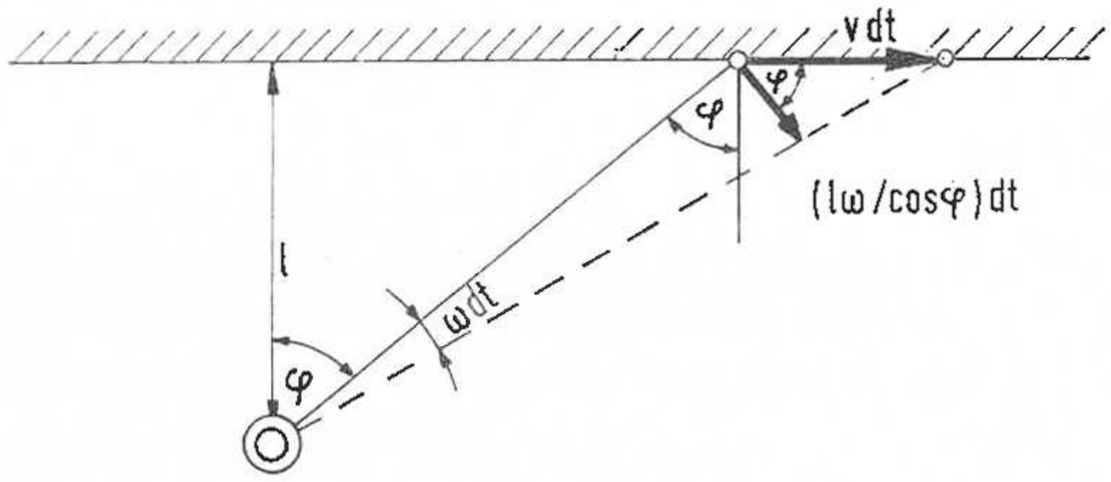
Pojav, da nastopata pri kakem procesu izmenoma pozitivni in negativni predznak oziroma pri alternativi prva in druga možnost, imenujemo *alterniranje.* Namesto ustreznega glagola *alternirati -am* uporabljajo tudi obliko *alternovati -ujem.* Za ta precej pogost pojav še nimamo dobrega slovenskega izraza. *Alterniranje* imenuje Križanič (Vektorska in tenzorska analiza, str. 303) linearni operator, v katerem nastopa simbol $\delta(p)$, ki je enak $+1$, če je p soda, in -1, če je p liha permutacija. Ne zdi se nam primerno to ime za operator, morda bi bilo bolje imenovati ga *alternator -ja, m.*

A. Vadnal

ODGOVORA

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 2, Obz. mat. fiz. **14**, 93 (1967)

Svetilo, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω, pošilja curek svetlobe na navpično steno v razdalji l. Izračunati je treba hitrost v, s katero potuje po steni svetlobna lisa.



V trenutku t meri oddaljenost lise od svetila $l/\cos\varphi$, če je $\varphi = \omega t$ kot med curkom in pravokotnico na steno. S slike je razvidno, da je krožilna hitrost $\omega l/\cos\varphi$, ki je pravokotna na svetlobni curek, projekcija hitrosti lise v na tangento kroga z radijem $l/\cos\varphi$. Tedaj velja $v\cos\varphi = \omega l/\cos\varphi$, iz česar sledi*

$$v = \omega l/\cos^2\varphi\,.$$

Trditev, ki jo vsebuje v vprašanju omenjeni račun, da je hitrost lise projekcija krožilne hitrosti na tangento, je torej očitno zgrešena.

L. Bogataj

ODGOVOR NA VPRAŠANJE v Obz. mat. fiz. **14**, 171 (1967)

Postavljeno je bilo vprašanje, kolikšno relativno napako napravimo pri računanju obhodnega časa umetnega satelita, če računamo, kot da je Zemlja krogla. V prvem približku je namreč Zemlja sploščen rotacijski elipsoid, pri katerem se radija na ekvatorju in na polu razlikujeta za $\frac{1}{3}$ %. Račun si smemo olajšati s tem, da vzamemo Zemljo za homogeno.

Odgovor na to vprašanje je poslal K. Šmigoc. Objavljamo odgovor, ki ga je pripravilo uredništvo in ki je znatno krajši od Šmigočevega.

V koordinatnem sistemu z izhodiščem v središču Zemlje je (x, y, z) krajevni vektor do majhnega dela Zemljine mase dM; $(X, 0, 0)$ pa je krajevni vektor do satelita z maso m v ekvatorski ravnini Zemlje. Potencialna energija satelita v gravitacijskem polju Zemlje je

$$W_p = -\varkappa m \int [(X - x)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}}\, dM\,.$$

---

* To je eden izmed zgledov za hitrost, ki lahko preseže hitrost svetlobe. Če sta namreč razdalja l in kotna hitrost ω dovolj veliki in vpadni kot φ dovolj blizu pravega kota, je hitrost lise poljubno velika. To ni v nasprotju s specialno teorijo relativnosti, saj je hitrost v le geometrijska hitrost. To je namreč le hitrost presečišča curka s steno in ni ne hitrost potovanja delcev, energije ali sporočil. Na vsak del stene zadene druga valovna poteza. (Op. ur.)

Izraz pod korenom razvijemo v vrsto

$$[(X - x)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2} = X^{-1}\,(1 - 2\,x/X + r^2/X^2)^{-1/2} =$$
$$= X^{-1}\,[1 + x/X - r^2/2\,X^2 + \tfrac{3}{8}(-2\,x/X + r^2/X^2) + \ldots]\,,$$

pri čemer je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Zberemo člene istega reda v koordinatah x, y, z. Prvi člen

$$W_p^{(0)} = -(\varkappa m/X) \int dM = -\varkappa m M/X$$

je potencialna energija satelita v gravitacijskem polju krogle. Drugi člen

$$W_p^{(1)} = -(\varkappa m/X^2) \int x\,dM = -\varkappa m M x^*/X^2$$

vsebuje koordinato težišča Zemlje x^* in je enak nič, ker je izhodišče v težišču Zemlje. Tretji člen

$$W_p^{(2)} = -(\varkappa\, m/X^3) \int \tfrac{1}{2}\,(3\,x^2 - r^2)\,dM$$

vsebuje kvadrupolni moment mase, ki ga izrazimo z glavnima vztrajnostnima momentoma. Pokaže se, da je linearno odvisen od relativne sploščenosti $\alpha = (a - b)/a$, pri čemer je a ekvatorski in b polarni radij Zemlje. Nadaljnji členi vsebujejo višje potence α in jih zanemarimo.

Za $W_p^{(2)}$ dobimo

$$W_p^{(2)} = -(\varkappa m \varrho/2\,X^3) \iiint (3\,x^2 - r^2)\,dx\,dy\,dz = -\varkappa m \varrho .2\,\pi\,a^2\,b\,(a^2 - b^2)/15\,X^3 =$$
$$= -\varkappa m M\,(a^2 - b^2)/10\,X^3\,.$$

Obdržimo samo člene, ki so linearno odvisni od α:

$$W_p^{(2)} = \varkappa\, m M/X)\,.\,\tfrac{1}{10}\,\alpha\,a^2/X^2\,.$$

Potem poiščemo silo, s katero privlači Zemlja satelit:

$$F = -\operatorname{grad} W_p = -d\,[W_p^{(0)} + W_p^{(2)}]/dX = -(\varkappa m M/X^2)(1 + \tfrac{3}{5}\,\alpha\,a^2/X^2)\,.$$

Sila ima radialno smer. Kvadrupolni člen ima v splošnem tudi komponento v smeri meridiana, vendar je le-ta v ekvatorski ravnini zaradi simetrije enaka nič.

Obhodni čas satelita dobimo iz zahteve, da je gravitacijska sila centripetalna sila:

$$m\omega^2 X = F = -(\varkappa m M/X^2)(1 + \tfrac{3}{5}\,\alpha a^2/X^2)\,.$$

Če bi bila Zemlja krogla, bi veljalo

$$m\omega_0^2 X = -\varkappa m M/X^2\,.$$

Iz obeh zadnjih enačb dobimo razmerje

$$(\omega/\omega_0)^2 = 1 + \tfrac{3}{5}\,\alpha a^2/X^2\,.$$

Razlika obhodnih časov

$$(t_0' - t_0)/t_0 = (2\,\pi/\omega - 2\,\pi/\omega_0)/(2\,\pi/\omega_0) = -\tfrac{3}{10}\,\alpha a^2/X^2$$

je torej največja pri satelitu, ki kroži v zelo majhni višini nad ekvatorjem Zemlje. V tem primeru je $X = a$ in je obhodni čas satelita zaradi sploščenosti Zemlje za $\frac{3}{10}\,\alpha = (3/10)\,(1/300) = 0{,}1\,\%$ manjši, kot če bi bila Zemlja zares krogla.

A. Kodre

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

15. LETNIK — 3. ŠTEVILKA

LJUBLJANA, OKTOBER 1968

VSEBINA

Članki Stran

Z. Bohte: O nekaterih problemih numerične linearne algebre 97

A. Suhadolc, J. Vrabec: Numerično reševanje Fredholmovih integralskih enačb druge vrste 106

J. Možina: Gravitacijsko valovanje 116

Novice

A. Suhadolc: Raziskovalne naloge matematičnega oddelka Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko 123

M. Prosen: Ob stoletnici zamisli o interferometričnem merjenju zvezdnih premerov 125

Šola

A. Vadnal: Prispevek k razpravi o matematičnih učbenikih 129

M. Hribar: Trki med kotaljenjem 132

A. Detela: Druga mednarodna olimpiada iz fizike 135

Domače vesti

C. Velkovrh: Slovesna otvoritev na novo opremljene sobe v rojstni hiši Jurija Vege 137

Strokovni jezik

A. Vadnal: Matematična terminologija 140

Odgovora 143

CONTENTS

Articles Page

Z. Bohte: On Some Problems of Numerical Linear Algebra 97

A. Suhadolc, J. Vrabec: Numerical Solution of Fredholm's Integral Equations of Second Kind 106

J. Možina: Gravitational Wawes 116

News

A. Suhadolc: Researching Problems of Mathematical Department at the Institute for Mathematics, Physics and Mecanics 123

M. Prosen: At One-hundreth Anniversary of the Idea about Interferometer Measurement of Diameters of Stars 125

School 129

Home News 137

Technical Language 140

Answers 143

PROFESORJI, ASISTENTI...

obsežno strokovno znanje je danes vaše bogastvo in to bo jutri bogastvo vaših učencev. Ne sprašujte se več, kako jim ga boste nazorno in razumljivo posredovali! Za to so poskrbeli naši strokovnjaki, ki so v sodelovanju z ameriško družbo American Optical Instrument Co., Buffalo, N. Y. pripravili za vas

GRAFOSKOP »APOLLO 6«

Mnogo je po svetu raznih učil in učnih pripomočkov, mnogo njih ustreza zahtevam sodobnega pouka. Toda pisalni projektor-grafoskop »APOLLO 6« je presegel vsa pričakovanja, presenetil svet in prekosil samega sebe. V predavalnicah in učilnicah je zamenjal kredo in šolsko tablo. Omogočil je neovirano in nazorno ilustriranje predavanj pri dnevni svetlobi, zagotovil pozornost poslušalcev in popoln učni uspeh. Prepričajte se o vsestranski uporabnosti, odlikah in prednostih našega novega projektorja, zato nas obiščite osebno! Prospekte ter vsa pojasnila vam pošljemo takoj in brezplačno.

vega

tovarna aparatov in instrumentov, Ljubljana, Kotnikova 18
vam nudi še:

PROJEKCIJSKO OPTIKO IN PRIBOR
TELEOPTIKO
MIKROOPTIKO
OPTIČNE MERILNE INSTRUMENTE
VARNOSTNE IN SIGNALNE NAPRAVE
LUPE IN OPTIČNE ELEMENTE
FINOMEHANIČNE IZDELKE
ŽIVOSREBRNA STIKALA
SVETLOBNE REKLAMNE NAPISE
STEKLOPIHAŠKE IZDELKE
ALKOSKOPE
KOOPERACIJSKE IN DRUGE STORITVE

NOVE IZDELKE:

— avtomatska diaprojektorja A-15 in A-16
— EPI 500
— grafoskop »Apollo 6«
— krožeči napis
— tekstilni reflektor
— oljni regulator
— zobniška črpalka
— svetlobni indikator