

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1968

Letnik 15

Številka 1

Izdaja društvo matematikov
fizikov in astronomov SR Slovenije

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Tehnični in odgovorni urednik

Kvaternik Franc, Gimnazija Poljane, Ljubljana

Uredniški odbor

Blinč Robert, FNT univerze v Ljubljani

Bohte Zvonimir, FNT univerze v Ljubljani

Cokan Aleksander, VII. gimnazija v Ljubljani

Moljk Anton, FNT univerze v Ljubljani

Pahor Jože, Nuklearni inštitut »J. Štefan« v Ljubljani

Pivk Valentin, Gimnazija v Škofji Loki

Rosina Mitja, FNT univerze v Ljubljani

Strnad Janez, FNT univerze v Ljubljani

Uršič Stanko, Zavod za šolstvo SR Slovenije

Vidav Ivan, FNT univerze v Ljubljani

Izdaja društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 4-krat letno. Članarina je 10 din in jo nakazujete na čekovni račun Obzornika. Člani društva prejemajo Obzornik za matematiko in fiziko zastonj.

Naročnina je

za nečlane 15 din

za dijake 5 din

za ustanove in podjetja 20 din

za inozemstvo 25 din (2 \$)

posamezna številka 5 din

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227. Tel. 55-468.** Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

✓ OSNOVNI POJMI GEOMETRIJE ŠTEVIL

JOŽE GRASSELLI

1. Znani matematik Herman Minkowski (1864—1909) je odkril, da se dajo iz precéj očitnih lastnosti primernih geometričnih figur izpeljati razne za teorijo števil važne ugotovitve. Figure, ki se pri tem uporabljajo, so preproste množice točk v n -dimenzionalnem evklidičnem prostoru. V glavnem gre za konveksne množice in za nekatere njihove posplošitve. Matematično panogo, ki tako z geometričnimi pripomočki prihaja do številskoteoretičnih izsledkov, je Minkowski imenoval *geometrijo števil*. Pozneje je dobil ta termin nekoliko širšo vsebino. Danes pomeni geometrija števil predvsem študij konveksnih in sorodnih množic glede na mreže v prostoru. Izsledki geometrije števil najdejo uporabo v teoriji števil, v raznih drugih vejah matematike, v kristalografiji itd.

Podlaga vsej geometriji števil je pojem mreže. Za opis mreže si prikličimo v spomin nekaj lastnosti n -dimenzionalnega realnega evklidičnega prostora R_n .

Kot je znano, je prostor R_n posplošitev evklidičnega prostora treh dimenzij R_3 . Točke prostora R_n so n -torice realnih števil, prav tako so s takimi n -toricami podani vektorji iz R_n . Vsak vektor $\mathbf{a} \in R_n$ se torej zapiše v obliki

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

pri čemer so realna števila $a_1, a_2, \dots, a_n$ komponente vektorja $\mathbf{a}$. Vektor, ki ima vse komponente nič, je vektor nič, v znakih $\mathbf{0}$. Vektorja sta enaka natančno tedaj, če se ujemata v vsaki od komponent. Produkt vektorja $\mathbf{a}$ z realnim številom c je vektor $c\mathbf{a}$, njegove komponente so s c pomnožene komponente vektorja $\mathbf{a}$. Torej je

$$c\mathbf{a} = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$$

Vsota dveh vektorjev je vektor, ki ima za komponente vsote komponent obeh vektorjev. Če je

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

je vsota $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

Če opredelimo razliko vektorjev $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ na način

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b}$$

je to vektor, katerega komponente so razlike komponent vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$. Skalarni produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ je realno število, ki je prirejeno paru vektorjev $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R_n$ s predpisom

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Za dolžino vektorja $\mathbf{a}$ pišemo $|\mathbf{a}|$ in je

$$|\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$$

Naj bodo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ dani vektorji iz R_n . Za vsako izbiro realnih števil $c_1, c_2, \dots, c_s$ je

vektor iz R_n . Ta vektor je 0 , če so vsa števila $c_1, c_2, \dots, c_s$ enaka 0 . Vektorji $a_1, a_2, \dots, a_s$ so linearno neodvisni, če je vektor (1) od nič različen vektor, kakor hitro ni vsak c enak 0 . Če pa je mogoče v (1) dobiti vektor nič tudi tako, da niso vsa števila $c_1, \dots, c_s$ enaka nič, so vektorji $a_1, a_2, \dots, a_s$ linearno odvisni. Hitro se vidi, da v prostoru R_n število linearno neodvisnih vektorjev ne more presegati n in da je še na najrazličnejše načine mogoče dobiti po n vektorjev, ki so linearno neodvisni. Preprost zgled n linearno neodvisnih vektorjev v R_n imamo v vektorjih

Zdaj že moremo povedati, kaj je mreža. Imejmo v R_n n linearno neodvisnih vektorjev $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Vse točke $\mathbf{x}$ prostora R_n , ki jih dobimo, ko se v izrazu

spreminjajo $c_1, c_2, \dots, c_n$ na vse možne načine po celih številih, sestavljajo v R_n mrežo A z bazo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Omenimo nekaj zgledov! Na obe strani brezkraken niz točk na premici, ki si slede v enakih razdaljah, je mreža v R_1 . Če vzamemo v ravnini družino ekvidistantnih premic in jo sekamo z drugo družino ekvidistantnih premic, tvorijo dobljena presečišča mrežo v ravnini R_2 . V trodimenzionalnem prostoru R_3 sestavljajo neko mrežo vse točke, katerih koordinate so cela števila.

Komponente baznih vektorjev določajo determinanto $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, ki je zaradi linearne neodvisnosti baznih vektorjev različna od 0. Njena absolutna vrednost se imenuje *determinanta mreže*. Če označimo determinanto mreže Δ z $d(\Delta)$, je torej

Za mrežo z bazo (2) je npr. $d(1) = 1$.

Geometrično gledano je v ravnini R_2 determinanta mreže ploščina paralelograma, ki ga tvorita bazna vektorja. Podobno je $d(A)$ v R_n volumen n -dimenzionalnega paralelepipeda, napetega na bazne vektorje.

V zvezi z determinanto mreže naj povemo še tole: Mreža je množica točk, določena na opisani način z osnovnimi točkami, ki so dane v bazi. Toda ista mreža ima različne baze, ki jo generirajo. Tako npr. ustvarja mrežo točk v ravnini, katerih koordinate so cela števila, baza $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1)$, pa tudi baza $\mathbf{b}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1)$. Ni pa težko ugotoviti, da so absolutne vrednosti determinant vseh baz iste mreže enake. Determinanta mreže je torej neodvisna od tega, s katero bazo smo mrežo opisali.

2. Naj bo zdaj Λ določena mreža v prostoru R_n , S pa kaka množica točk iz istega prostora! Kakšna mora biti množica S , da ima skupne točke z mrežo Λ ? To je poenostavljeno orisano vprašanje, ki se v geometriji števil srečuje pod najrazličnejšimi oblikami. Seveda ne iščemo kriterijev, ki bi veljali za vsakršno množico S . Saj so množice točk prostora R_n tako raznovrstne, da takšnega splošnega kriterija pač ni. Po drugi strani pa vidimo, da imajo npr. krogi v R_2 z mrežo skupne točke, če so zadosti veliki v primeri s ploščino paralelograma na baznih vektorjih, tj. v primeri z mrežno determinanto. Ta odgovor se da precizirati in strogo utemeljiti tudi za splošen primer. O tem je govor v nadaljevanju tega razdelka.

Vzemimo, da je množica S iz R_n takšna, da ima volumen (mero)! Ker to ne drži za vsako množico točk, smo s to zahtevo izbiro množice S zelo omejili. Volumen $V(S)$ množice točk S je pozitivno število ali ∞ , če dopuščamo tudi množice, katerih volumen ni končen. Neko zvezo med točkami množice in mreže na eni strani in volumnom množice ter mrežno determinanto na drugi strani odkriva naslednji Blichfeldtov izrek:

Naj bo m naravno število, $d(\Lambda)$ determinanta mreže Λ in volumen množice točk S večji od $md(\Lambda)$

$$V(S) > md(\Lambda) \quad (4)$$

V množici S je tedaj $m + 1$ različnih točk $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m+1}$, katerih vse razlike $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ so v mreži Λ .

O resničnosti Blichfeldtovega izreka za prostor R_2 se hitro prepričamo. Če sta namreč $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ bazna vektorja mreže Λ , je ploščina paralelograma na teh vektorjih $d(\Lambda)$, eno njegovo oglišče pa je v izhodišču koordinatnega sistema. Štejmo k paralelogramu vse notranje točke, izhodišče in še točke na obeh stranicah iz izhodišča razen krajišč; ploščina paralelograma se s tem ne spremeni. Imenujmo ta paralelogram osnovni! Mreža Λ razdeli ravnino R_2 na paralelograme, ki so osnovnemu paralelogramu kongruentni in se nikjer ne prekrivajo. Po teh paralelogramih je tudi množica S razkosana. Vsak paralelogram, ki vsebuje kaj točk množice S , premaknimo zdaj vzporedno tako, da pokrije osnovni paralelogram! Vso množico S imamo s tem zbrano v osnovnem paralelogramu; seveda se kosi množice S , ki so bili prej narazen, zdaj deloma prekrivajo. Trdimo, da je vsaj ena točka $\mathbf{v}_0$ iz osnovnega paralelograma, ki jo pokriva $m + 1$ kosov množice S . Če to ne bi bilo res, bi kosi množice S kvečjemu m -krat pokrili vsako točko osnovnega paralelograma in bi zato ploščina množice S bila kvečjemu enaka $md(\Lambda)$. To pa je v nasprotju s predpostavko $V(S) > md(\Lambda)$.

Naj bodo $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m+1}$ vektorji do spodnjih levih oglišč tistih paralelogramov, v katerih so pred premikom kosi množice S , ki pokrijejo po premiku točko $\mathbf{v}_0$. Jasno je, da so ti vektorji vsi iz mreže Λ in različni. Točke

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_{m+1} \quad (5)$$

so iz množice S . Ker so $u_1, \dots, u_{m+1}$ različni vektorji iz mreže Δ , dobimo iz (5), da je za indekse i, j ležeče med 1 in $m + 1$

$$x_i - x_j = u_i - u_j \in \Delta$$

S tem pa je Blichfeldtov izrek za R_2 dokazan. Za prostor R_n poteka dokaz čisto enako.

Povrnimo se k pogoju (4)! Ali ostane izrek še v veljavi, ako namesto večje postavimo enačaj? Ako vzamemo za S osnovni paralelogram, že vidimo, da izrek več ne drži. V tem primeru je namreč $V(S) = d(\Delta)$, toda za nobeni različni točki x_1, x_2 iz osnovnega paralelograma ni vektor $x_1 - x_2$ iz mreže Δ . Moremo pa izrek ohraniti, če zahtevamo, da je množica S kompaktna. Naj spomnimo, da je množica S kompaktna, če vsako zaporedje vektorjev iz S vsebuje konvergentno podzaporedje z limito v S . Možno je dokazati, da je v prostoru R_n množica S kompaktna natanko tedaj, kadar je omejena in zaprta; torej, če dolžine vektorjev iz S ne presežejo nekega fiksnega števila in če ima vsako konvergentno zaporedje vektorjev iz S za limito vektor, ki je v S . Blichfeldt je namreč dopolnil gori omenjeni izrek z naslednjim dostavkom:

Če je m naravno število, $d(\Delta)$ determinanta mreže Δ in velja za volumen kompaktne množice S

$$V(S) = md(\Delta) \quad (6)$$

je v S $m + 1$ takih različnih točk $x_1, \dots, x_{m+1}$, da je vsaka od njihovih razlik $x_i - x_j$ vsebovana v mreži Δ .

V dokazu vzemimo zaradi enostavnosti $m = 1$. Naj bo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ monotonno padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0. Dalje naj pomeni $S_r = (1 + \varepsilon_r)S$ množico vseh z $1 + \varepsilon_r$ pomnoženih vektorjev oz. točk iz S . Ker je zaradi kompaktnosti množica S omejena, je volumen $V(S)$ končno število. Če je množica S iz prostora R_n , je volumen $V(S_r)$ množice S_r v takile zvezi z volumenom $V(S)$ množice S

$$V(S_r) = (1 + \varepsilon_r)^n V(S) > V(S) = d(\Delta)$$

Pri tem smo upoštevali pogoj $V(S) = d(\Delta)$. Po že dokazanem izreku sta v S_r gotovo takšni točki

$$x_{1r}, x_{2r} \quad (7)$$

da je njuna razlika v Δ ; torej

$$u_r = x_{1r} - x_{2r} \in \Delta \quad (8)$$

Ko narašča indeks $r = 1, 2, 3, \dots$ proti ∞ , dobimo iz (7) zaporedji (x_{1r}) in (x_{2r}) . Obe sta omejeni, saj so njuni členi iz omejenih množic S_r , ki so vse obsežene v omejeni množici S_1 . Zato obstaja v zaporedju (x_{1r}) konvergentno podzaporedje (x_{1s}) z limito x_1' . Prav tako se da iz omejenega podzaporedja (x_{2s}) dobiti konvergentno podzaporedje (x_{2t}) , njegova limita je npr. x_2' . Vsak vektor iz S_t je enak produktu števila $1 + \varepsilon_t$ z nekim vektorjem iz S . Ker gredo pri $t \rightarrow \infty$ števila $\varepsilon_t \rightarrow 0$, se v vsaki okolici vektorjev x_{1t} in x_{2t} nahajajo vektorji iz S , če je le t dovolj velik. Točki x_1', x_2' sta zato tudi limiti zaporedij točk iz S . Ker pa je S zaprta množica, vsebuje x_1' in x_2' .

Če upoštevamo izražavo (8), lahko pišemo

$$\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}_2' = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}_t, \quad (9)$$

Iz (8) sklepamo, da je vsak vektor $\mathbf{u}_t$ iz mreže Λ . Mreža Λ pa sestoji iz samih izoliranih točk, tj. vsaka točka $\mathbf{u}$ iz mreže ima takšno okolico, v kateri razen $\mathbf{u}$ ni nobene druge točke iz mreže. Zaradi tega je zaporedje točk iz mreže konvergentno le takrat, kadar se od nekega indeksa naprej kot člen zaporedja ponavlja vedno ista točka mreže. Ker je po (9) zaporedje točk $\mathbf{u}_t$ iz mreže konvergentno, je to mogoče le tako, da so vsi $\mathbf{u}_t$ od zadosti poznega indeksa naprej enaki vektorju $\mathbf{u}_{t_0} \in \Lambda$. Za $m = 1$ je tako izrek dokazan. Za $m > 1$ je dokaz čisto enak.

Blichfeldtova izreka odpirata pot do raznih važnih ugotovitev. Za zgled izpeljimo znameniti izrek, ki ga navadno imenujejo po Minkowskem. Ponovimo najprej dve definiciji! Množica S točk v prostoru R_n je *simetrična*, če je za vsak $\mathbf{x}$ iz S tudi točka $-\mathbf{x}$ v S . Množica S je *konveksna*, če je za vsaki točki $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ iz S tudi njuna zveznica vsebovana v S : če je torej $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ in λ realno število iz intervala $0 \leq \lambda \leq 1$, je tudi $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S$. Zapišimo zdaj izrek Minkowskega!

Naj bo S simetrična konveksna množica točk prostora R_n z volumnom $V(S)$ (ki je lahko tudi neskočen), m naravno število in Λ mreža z determinanto $d(\Lambda)$. Če je

$$V(S) > 2^n m d(\Lambda) \quad (10)$$

vsebuje množica S vsaj m parov točk $\pm \mathbf{u}_1, \pm \mathbf{u}_2, \dots, \pm \mathbf{u}_m$, ki so vse iz mreže Λ , med sabo različne in različne od 0. V primeru, ko je

$$V(S) = 2^n m d(\Lambda) \quad (11)$$

izrek še drži, če je množica S kompaktna, simetrična in konveksna.

Pri dokazu izhajamo iz množice $\frac{1}{2}S$. To množico sestavljajo vse točke $\frac{1}{2}\mathbf{x}$, pri čemer je $\mathbf{x}$ iz S , njen volumen je $2^{-n} V(S)$. Iz (10) oz. (11) vidimo, da izpolnjuje množica $\frac{1}{2}S$ pogoja (4) oz. (6) Blichfeldtovega izreka. V množici $\frac{1}{2}S$ obstaja zato $m + 1$ različnih točk

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_1, \frac{1}{2}\mathbf{x}_2, \dots, \frac{1}{2}\mathbf{x}_{m+1} \quad (12)$$

ki so takšne, da je vsaka razlika po dveh od teh točk v Λ

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\mathbf{x}_j \in \Lambda, \quad 1 \leq i, j \leq m + 1$$

Uredimo vektorje (12) takole: Vektor $\frac{1}{2}\mathbf{x}_i$ naj bo pred vektorjem $\frac{1}{2}\mathbf{x}_j$, če je v vektorju $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ prva od nič različna komponenta pozitivna. Denimo, da so v (12) vektorji že tako urejeni. Tvorimo vektorje

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{2}\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\mathbf{x}_{m+1}; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Iz urejenosti in različnosti vektorjev (12) sledi, da so

$$\pm \mathbf{u}_1, \pm \mathbf{u}_2, \dots, \pm \mathbf{u}_m$$

sami različni vektorji in nobeden ni nič. Takoj tudi vidimo, da so vsi ti vektorji v S . Ker je množica S simetrična in je $\mathbf{x}_{m-1} \in S$, je tudi $-\mathbf{x}_{m-1} \in S$. Zaradi konveksnosti množice S iz $\mathbf{x}_j \in S$, $-\mathbf{x}_{m-1} \in S$ sledi $\mathbf{u}_j = \frac{1}{2} \mathbf{x}_j + \frac{1}{2} (-\mathbf{x}_{m-1}) \in S$. Končno dobimo iz simetričnosti množice S še $-\mathbf{u}_j \in S$. Tako je izrek Minkowskega dokazan.

3. Pokažimo nekaj uporab za izrek Minkowskega v teoriji števil!

Če je p praštevilo, ki pušča pri delitvi s 4 ostanek 1, je -1 kvadrat za p . Kongruenca

$$x^2 \equiv -1 (p) \quad \text{oz.} \quad x^2 + 1 \equiv 0 (p) \quad (13)$$

je zato rešljiva, njena korena n , $-n$ sta različni celi števili. Oglejmo si vse pare $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ celih števil, ki ustrezajo kongruenci

$$v_2 \equiv n v_1 (p) \quad (14)$$

(ne da bi jih reducirali modulo p). Zaznamujmo množico vseh točk $\mathbf{v}$ z Δ ! Kongruenca (13) ostane veljavna, če obe strani množimo s celim številom c . Če je torej $\mathbf{v} \in \Delta$, je tudi $c\mathbf{v} \in \Delta$. Naj bo $\mathbf{v}' = (v_1', v_2')$ kakšna od $\mathbf{v}$ različna rešitev kongruence (14). Potem je

$$v_2' \equiv n v_1' (p)$$

in zato

$$v_2 + v_2' \equiv n(v_1 + v_1') (p) \quad \text{oz.} \quad v_2 - v_2' \equiv n(v_1 - v_1') (p)$$

Dobljeni kongruenci povesta, da je obenem z $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \Delta$ tudi $\mathbf{v} + \mathbf{v}' \in \Delta$ in $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \Delta$. Spodaj bomo videli, da sta $\mathbf{v} \in \Delta$ dva linearno neodvisna vektorja. Jasno je tudi, da je od točk $\mathbf{v}$ krogli $|\mathbf{x}| < 1$ edino $\mathbf{0}$ iz Δ . Odtod se da dokazati, da je množica Δ vseh rešitev kongruence (14) mreža v ravnini.

Z vstavitvijo ugotovimo, da točki $\mathbf{v} = (1, n)$, $\mathbf{v}' = (1, n + p)$ ustrezata kongruenci (14). Mreža, ki jo ta dva vektorja napenjata, ima determinanto

$$\det(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & n + p \end{vmatrix} = p \quad (15)$$

Denimo, da sta $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ bazna vektorja mreže Δ . Ker sta vektorja $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ iz Δ , obstajajo taka cela števila c_1, c_2, c_3, c_4 , da je $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}$, $\mathbf{v}' = c_3 \mathbf{a} + c_4 \mathbf{b}$. Od tod sledi enačba

$$\det(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \det(c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}, c_3 \mathbf{a} + c_4 \mathbf{b}) = (c_1 c_4 - c_2 c_3) \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

ki jo lahko z upoštevanjem enačbe (15) in mrežne determinante $d(\Delta)$ zapišemo tudi v obliki

$$p = |c_1 c_4 - c_2 c_3| d(\Delta)$$

Faktor pri $d(\Delta)$ je pozitivno celo število. Zato velja za mrežno determinanto ocena

$$d(\Delta) \leq p \quad (16)$$

Krožna plošča $x_1^2 + x_2^2 < 2p$ je konveksna, simetrična množica v R_2 in ima ploščino $2p\pi > 2^2 d(\Delta)$. Po izreku Minkowskega leži znotraj plošče vsaj ena od $\mathbf{0}$ različna točka $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ mreže Δ . Za to točko je torej

$$u_2 \equiv nu_1 \pmod{p}$$

$$u_1^2 + u_2^2 < 2p$$

in u_1, u_2 nista oba 0. Če upoštevamo, da je n koren kongruence (13), sledi

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv u_1^2 (1 + n^2) \equiv 0 \pmod{p}$$

Število na levi je torej večkratnik od p in celo pozitivno. Vemo pa že, da je manjše od $2p$. Mora torej biti $u_1^2 + u_2^2 = p$. Tako smo dokazali, da je vsako praštevilo oblike $4l + 1$ vsota dveh kvadratov celih števil. Da izrek za praštevila oblike $4l + 3$ ne velja, kaže že primer praštevila 3. Pač pa je možno vsako praštevilo zapisati kot vsoto štirih kvadratov celih števil. Tako je npr. $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ in je jasno, da v tem primeru ne moremo izhajati z manj ko štirimi kvadrati. Dokaz, da štirje kvadrati zadoščajo za izražavo vsakega praštevila, je možno spet nasloniti na izrek Minkowskega.

Naj bo p poljubno praštevilo! Prepričajmo se najprej, da je vedno mogoče dobiti nenegativni celi števili a, b , manjši od $p/2$, ki izpolnjujeta kongruenco

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (17)$$

Če je $p = 2$, je $a = 1, b = 0$ tak par. Vzemimo zdaj $p > 2$! Oglejmo si števila

$$a^2, -1 - b^2 \quad (18)$$

ko se spreminjata a in b po celih številih $0, 1$ itd. vključno do $(p-1)/2$. Ker je $(p+1)/2$ možnosti za a , dobimo $(p+1)/2$ vrednosti a^2 . Te so modulo p vse različne med sabo. V nasprotnem primeru bi namreč imeli

$$a^2 \equiv a'^2 \pmod{p}$$

in od tod

$$a^2 - a'^2 \equiv (a - a')(a + a') \equiv 0 \pmod{p}$$

To pa je nemogoče. Ker sta a in a' med 0 in $(p-1)/2$ in različna, je $0 < a + a' < p$ in zato ne $a - a'$, ne $a + a'$ ni večkratnik praštevila p . V (18) dobimo tudi $(p+1)/2$ števil $-1 - b^2$, ki so iz istega razloga vsa različna modulo p . Po modulu p razpadejo vsa cela števila na p razredov; vendar pa smo videli, da so v (18) dobljena števila a^2 v različnih razredih, prav tako pa nobeni števili $-1 - b^2$ iz (18) nista v istem razredu. Ker je v (18) $p+1$ števil, morata vsaj dve od njih pasti v isti razred. Ker dve števili a^2 iz (18) nikdar nista v istem razredu in prav tako dve različni števili $-1 - b^2$ iz (18) nikdar ne padeta v isti razred, mora od obeh števil, ki padeta v isti razred, biti eno a^2 in drugo $-1 - b^2$. Za ti dve števili je $a^2 \equiv -1 - b^2 \pmod{p}$ in z njima je torej izpolnjena kongruenca (17).

Tvorimo zdaj s številoma a, b , ki ustrezata kongruenci (17), sistem

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv au_3 + bu_4 \pmod{p} \\ u_2 &\equiv bu_3 - au_4 \pmod{p} \end{aligned} \quad (19)$$

Zaznamujmo z Λ množico vseh celoštevilčnih rešitev $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ sistema (19)! S podobnim premislekom kot prej se prepričamo, da je Λ mreža. Preizkus pokaže, da točke

Če točka $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ustreza sistemu (22), je jasno, da mu ustreza tudi točka $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$. Torej je S simetrična množica. Naj bo še $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ kakšna rešitev za (22), λ realno število med 0 in 1 in $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$. Če vstavimo koordinate točke $\mathbf{z}$ v levo stran prve neenačbe (22) in upoštevamo, da $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ izpolnita sistem, dobimo

$$|a_{11}z_1 + \dots + a_{1n}z_n| \leq \lambda |a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n| + \\ + (1 - \lambda) |a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n| < \lambda c_1 + (1 - \lambda) c_1 = c_1$$

Poiščimo z integriranjem še volumen množice S . Vpeljimo nove spremenljivke

[illegible]

$$V(S) = \int \int \dots \int |\det(a_{ij})|^{-1} du_1 du_2 \dots du_n = 2^n |\det(a_{ij})|^{-1} c_1 c_2 \dots c_n$$
$$V(S) = 2^n |\det(a_{ij})|^{-1} c_1 \dots c_n > 2^n \quad (23)$$
$$c_1 \dots c_n > |\det(a_{ij})| \quad (24)$$

Prišli smo do zaključka: če je

$$c_1 \dots c_n \geq |\det(a_{ij})|$$

LITERATURA

9

✓ ANALOGNO RAČUNANJE

J. PAHOR,

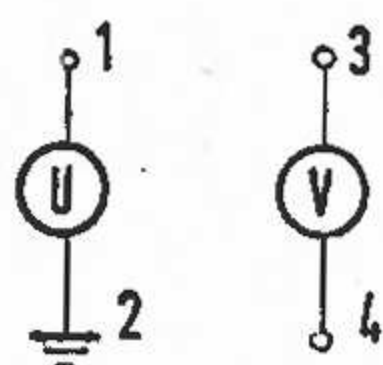
Nuklearni inštitut Jožef Stefan

Pri analognem računanju so matematične funkcije predstavljene z električnimi napetostmi, ki so tem funkcijam sorazmerne. Napetosti nastopajo v vezjih, ki so sestavljena tako, da veljajo med posameznimi napetostmi analogne relacije kot med matematičnimi funkcijami. Tedaj pomeni registracija časovnega poteka napetosti med določeno točko vezja in med zemljo isto kot rešitev pripadajočega matematičnega problema. Tako na primer lahko dobimo rešitev preproste diferencialne enačbe $\dot{x} = -x/\tau$ z registracijo napetosti U na kondenzatorju C , ki se prazni skozi upor R , če je konstanta τ enaka produktu RC .

Za reševanje bolj zahtevnih nalog analognega električnega vezja ponavadi ne moremo uganiti. Zato je umestno, če se seznanimo z osnovnimi računskimi operacijami v analogni tehniki.

Analogno seštevanje in odštevanje

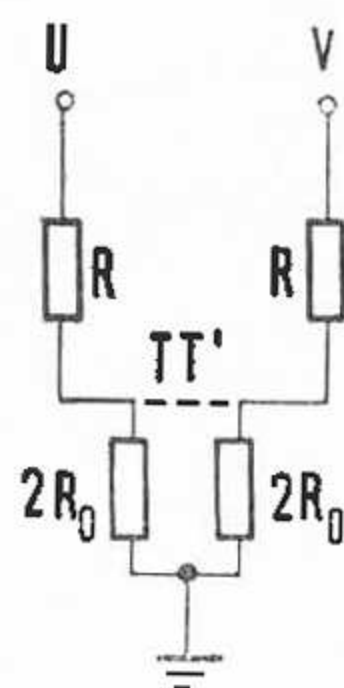
Dve napetosti se lahko preprosto seštevata le tedaj, če vsaj ena od njiju ni ozemljena. Vsoto napetosti $U(t)$ in $V(t)$ dobimo med zemljo in sponko 3 (sl. 1),



Sl. 1. Seštevanje napetosti U in V

ko zvežemo sponki 1 in 4, razliko napetosti $U(t) - V(t)$ pa dobimo med zemljo in sponko 4 pri spoju sponk 1 in 3.

Ponavadi so napetosti, ki naj se seštevajo, že enostransko ozemljene. Tedaj uporabimo vezje, ki seštevata tokove (sl. 2). Napetost $U(t)$ žene tok I_U skozi

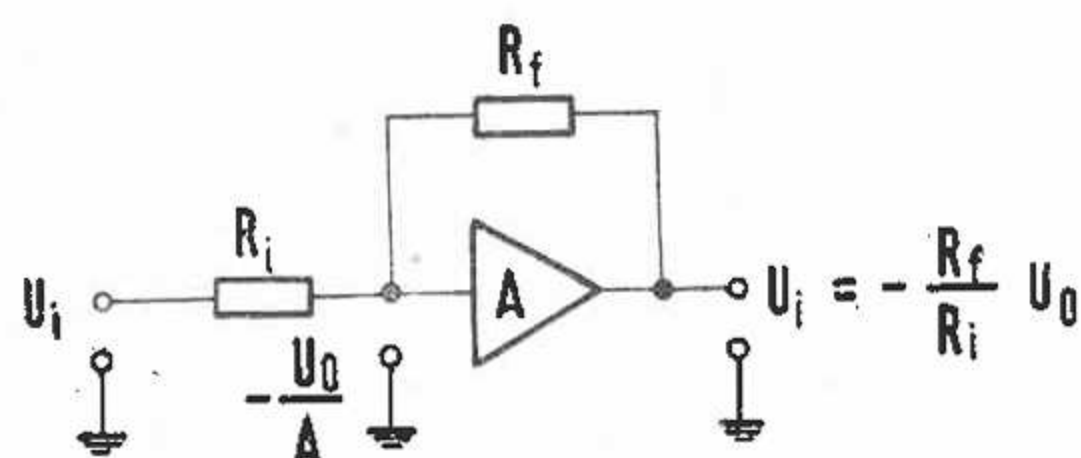


Sl. 2. Seštevanje ozemljenih napetosti U in V

zaporedna upora R in $2R_0$ v zemljo. Upor $2R_0$ je mnogo manjši od upora R , tako da je napetost točke T proti zemlji neznatna. Isto velja za vejo, kjer poganja napetost $V(t)$ tok I_V . Ko zvežemo točki T in T' , med katerima je le majhna napetostna razlika, teče prek spoja zanemarljiv tok in se toka I_U in I_V praktično ne spremenita. Če nadomestimo paralelno spojena upora z nadomestnim uporom R_0 , lahko zapišemo napetost spojne točke proti zemlji pri predpostavki, da je $R_0 \ll R$ kot $U_T = (I_U + I_V) R = (R_0/R) (U + V)$. Napetost točke T proti zemlji je torej sorazmerna vsoti obeh napetosti U in V . Majhen izhodni signal U_T je zaželeno ojačiti za faktor oslabitve R_0/R , tako da je izhodna napetost kar vsota obeh vhodnih napetosti.

Z uporabo ojačevalnika pa se zelo razširijo možnosti analognega računanja, saj je mogoče obravnavati poleg seštevanja in odštevanja podobno tudi odvajanje in integriranje električnih napetosti.

Uporabili bomo vezje, kjer se vhodni signal vodi na ojačevalnik prek upora R_i , del ojačenega signala pa se prek upora v povratni zanki vrača nazaj na vhod (sl. 3). Ojačevalnik naj ima veliko ojačenje ($A > 10^3$) v širokem fre-



Sl. 3. Množilnik s konstantnim faktorjem $-R_f/R_i$

kvenčnem območju ($0 \leq \omega \leq 10^6$ Hz), pri ozemljenem vhodu naj bo tudi izhod na istem potencialu in pri ojačenju naj se spremeni predznak vhodnemu signalu! Tak ojačevalnik imenujemo operacijski ojačevalnik.

Poglejmo, kolikšna je izhodna napetost celotnega vezja U_o pri dani vhodni napetosti U_i ! Napetost na vhodu ojačevalnika je očitno $-A$ -krat manjša od izhodne, torej $-U_o/A$. Če ima ojačevalnik dovolj visoko vhodno upornost, vanj ne teče tok. Tedaj je tok skozi upor R_i , ki ga poganja napetost $U_i - (U_o/A)$, enak toku skozi upor R_f , ki ga poganja napetost $-(U_o/A) - U_o$.

$$(1/R_i) \left(U_i - \frac{U_o}{A} \right) = - (1/R_f) \left(\frac{U_o}{A} + U_o \right) \quad (1)$$

Od tod dobimo za izhodno napetost U_o

$$U_o = - (R_f/R_i) \frac{1}{1 + (1/A) [(R_f/R_i) + 1]} U_i \quad (2)$$

Pri velikem ojačenju ($A \rightarrow \infty$) se enačba (2) poenostavi v

$$U_o = - (R_f/R_i) U_i \quad (3)$$

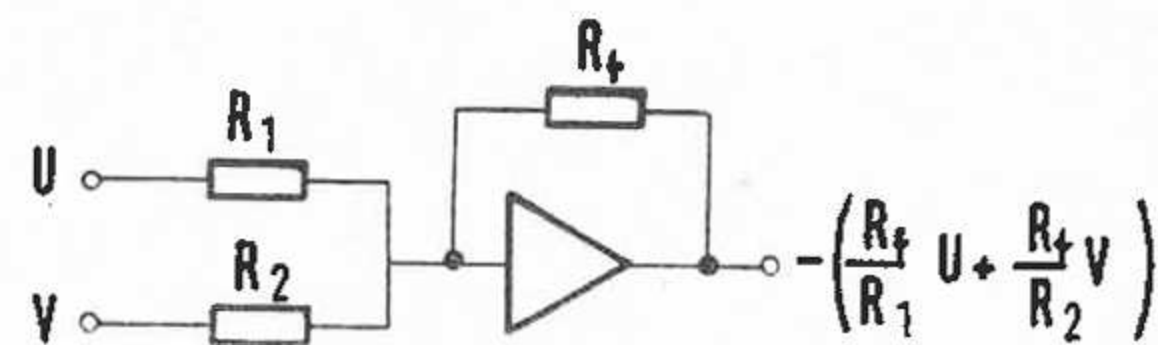
tako da je odvisen izhodni signal samo od razmerja upornosti R_f v povratni zanki in upornosti R_i na vhodu.

V posebnem primeru, ko je $R_f = R_i$, ta enota signalov ne ojačuje, ampak jim le zamenja predznak. Takemu vezju pravimo inverter.

Iz enačbe (2) lahko ocenimo, kako veliko mora biti ojačenje A , da je uporaba poenostavljene enačbe (3) namesto enačbe (2) upravičena. Obe enačbi se razlikujeta poljubno malo, če je $(1/A) [(R_f/R_i) + 1] \ll 1$. Iz tega pogoja pa sledi $R_f/R_i \ll A$. Tako na primer lahko dosežemo z ojačevalnikom, ki ojačuje tisočkrat, kvečjemu desetkratno ojačenje vhodnega signala, če naj velja enačba (3) na procent natančno. Za enako dober inverter pa zadošča ojačenje 10^2 .

Nadalje pojasnjuje enačba (2), zakaj je potreben ojačevalnik, ki spreminja predznak signala. Če bi imeli ojačevalnik s pozitivnim ojačevalnim faktorjem, bi zvezo med vhodno in izhodno napetostjo popisala enačba (2) z A -jem nasprotnega znaka. Ker raste izhodni signal prek vseh meja, kadar je $(R_f/R_i) + 1 = A$, namesto da bi ostal sorazmeren vходу, enota ni uporabna. Nekontrolirano velikemu izhodu pa se ni mogoče izogniti, saj ojačenje vsakega ojačevalnika, ki je normalno mnogo večje od razmerja R_f/R_i , pade pri zelo visokih frekvencah.

Z opisanim vezjem lahko seštevamo dve enostransko ozemljeni napetosti U in V , če ju priključimo prek dveh uporov R_1 in R_2 na vhod operacijskega ojačevalnika, ki ima v povratni zanki upor R_f (sl. 4). Izhodno napetost spet



Sl. 4. Linearna kombinacija napetosti U in V

izračunamo pri predpostavki, da odtekata oba vhodna toka skozi upor v povratni zanki in da imamo ojačevalnik z zelo velikim ojačenjem, tako da je napetost med vhomom in zemljo praktično nič. Iz očitvidne zveze

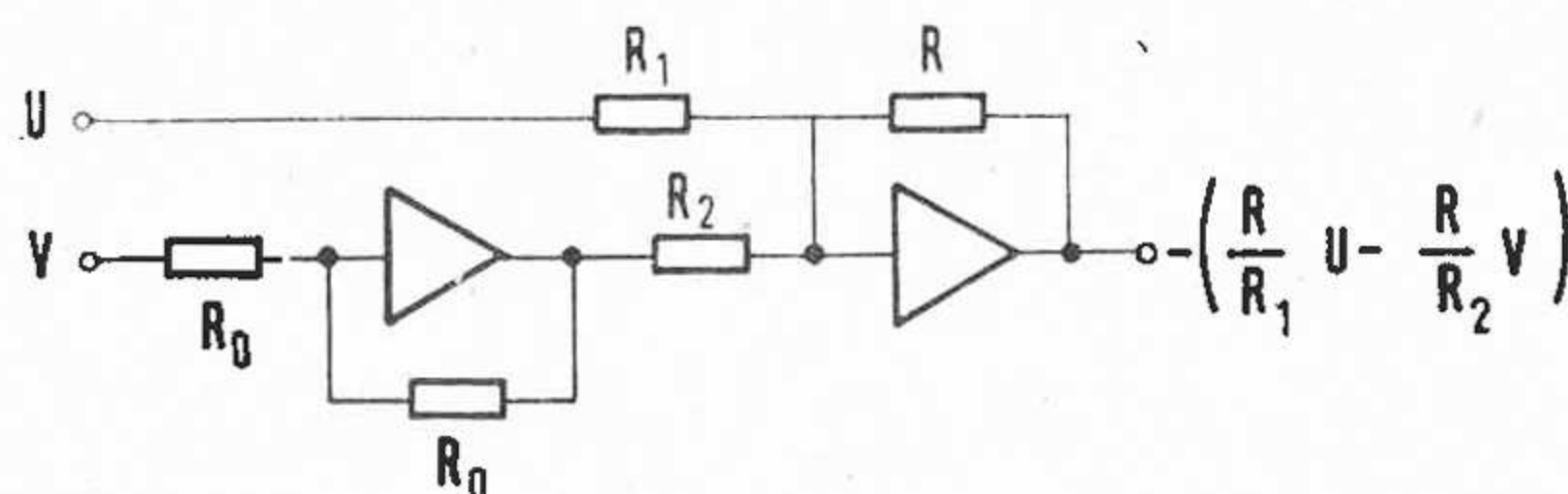
$$U/R_1 + V/R_2 = -U_o/R_f \quad (4)$$

dobimo izhodno napetost kot

$$U_o = -[(R_f/R_1) U + (R_f/R_2) V] \quad (5)$$

Z opisanim vezjem lahko torej s poljubno natančnostjo tvorimo linearno kombinacijo dveh funkcij s pozitivnima koeficientoma, ki sta dosti manjša od ojačevalnega faktorja A . Kadar so vsi upori med seboj enaki, je izhodna napetost vsota obeh vhodnih napetosti. Seštevanje razširimo na poljubno število sumandov, če dodajamo upore, po katerih vodimo posamezne signale na vhod ojačevalnika.

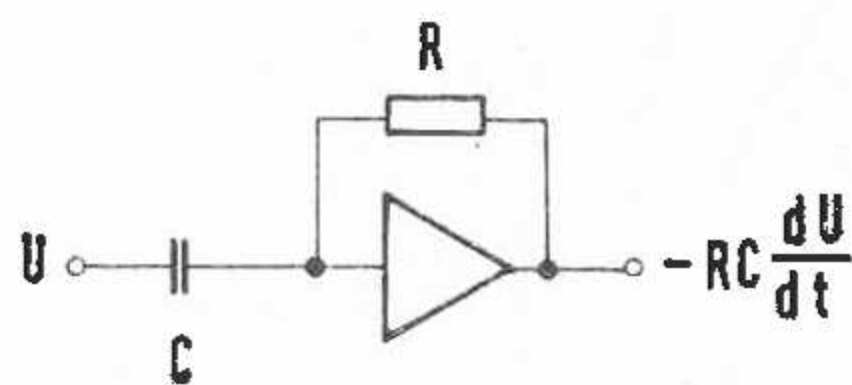
Razliko dveh funkcij U in V dobimo, če priključimo napetost U naravnost na enega od vhodov sumatorja, funkcijo V pa prek inverterja, da ji spremeni predznak (sl. 5).



Sl. 5. Linearna kombinacija funkcij U in V s koeficientoma različnih predznakov

Analogno odvajanje in integriranje

Nadomestimo vhodni upor R_i s kondenzatorjem (sl. 6) in pogledimo odgovor vezja na harmonično nihajoč signal $U = U_0 e^{i\omega t}$. Iz enakosti tokov skozi vhodno



Sl. 6. Diferenciator

vejo in vejo povratne zanke sklepamo podobno kot prej, le da nadomestimo upornosti z impedancami

$$U_o = -(Z_f/Z_i) U_i \quad (6)$$

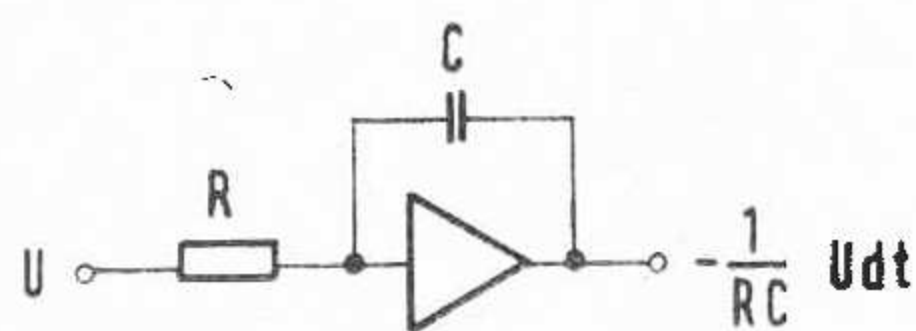
V primeru, ki ga kaže sl. 6, je za izbrani signal zveza med vhodno napetostjo U_i in izhodno napetostjo U_o

$$U_o = -i\omega RC U_i = -RC \frac{dU_i}{dt} \quad (7)$$

Vezje torej odvaja to funkcijo. Ugotovitev pa lahko razširimo na poljubne periodične funkcije, ki se zapišejo s Fourierovo vrsto $U_i = \sum A_n e^{i\omega_n t}$. Za vsako harmonično komponento dobimo pri prehodu skozi opisano vezje odvod komponente in tako torej odvod funkcije. Tako vezje pa odvaja tudi druge funkcije, kar se lahko pokaže, če zapišemo funkcijo s Fourierovim integralom. Z vezjem na sliki 6 dobimo torej časovni odvod poljubne funkcije.

Potrebno pa je omeniti, da so pri praktični izvedbi odvajanja omejitve. Kadar so osnovnemu nizkofrekvenčnemu signalu primešani šumi višjih frekvenc, so lahko odvodi šumov večji od odvoda osnovne komponente, ki se tako izgubi. Ker ima funkcija $\sum A_n e^{i\omega_n t}$ odvod $\sum \omega_n A_n e^{i\omega_n t}$, dajo harmonične komponente z dovolj visoko frekvenco zelo velik doprinos izhodnemu signalu. V takih primerih uporabljamo za odvajanje vezje, ki odvaja le signale z nizkimi frekvencami, šumov višjih frekvenc pa ne.

S formulo (6) lahko raziščemo delovanje vezja, ki ima v povratni zanki kondenzator, na vhodu pa upor (sl. 7)



Sl. 7. Integrator

$$U_o = (Z_f/Z_i) U_i = -(1/i\omega RC) U_i \quad (8)$$

Zvezo med vhodno napetostjo U_i in izhodno napetostjo U_o dobimo pregledneje, če tolmačimo časovni odvod dU/dt kot produkt operatorja za časovno

odvajanje d/dt , ki ga označujemo s p , in funkcije U . Ker postanejo s tem izrazi d/dt , $i\omega$ in p med seboj ekvivalentni, lahko enačbo (8) napišemo

$$U_o = -(1/RC) p^{-1} U_i \quad (9)$$

Zvezo med vhodno napetostjo U_i in izhodno napetostjo U_o določa operator p^{-1} , čigar pomen dobimo iz operatorske relacije $p \cdot p^{-1} = 1$. Ker pomeni množenje z 1 ohranjanje funkcije, ki ji sledi, mora pomeniti p^{-1} inverzno operacijo od tiste, ki jo zahteva operator p , torej integriranje. Zato lahko zapišemo izhodni signal, ki ga daje enota na sl. 7

$$U_o = -(1/RC) \int U_i dt \quad (10)$$

Reševanje diferencialnih enačb

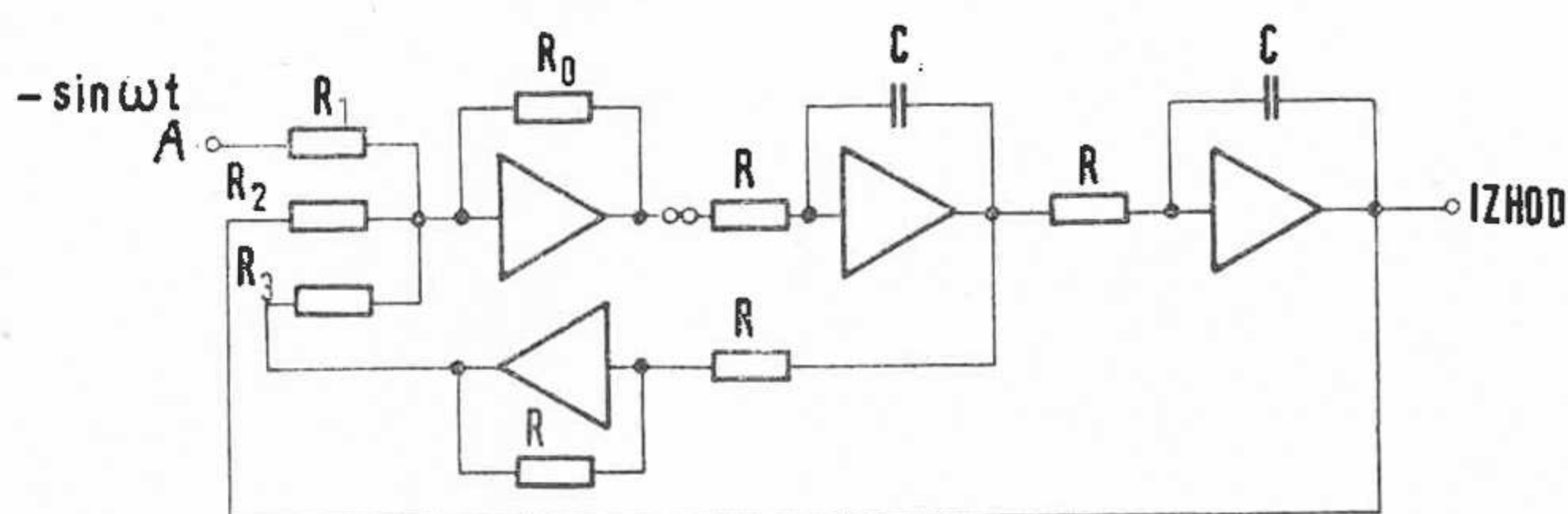
Z doslej opisanimi osnovnimi vezji lahko sestavimo računalnik, ki rešuje linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Za primer vzemimo diferencialno enačbo za vsiljeno nihanje elastično vezanega telesa z maso m pri upoštevanju dušenja

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_o \sin \omega t \quad (11)$$

Brezdimenzijsko obliko dobimo, če delimo obe strani s konstanto elastične vezi k ter s statičnim odklonom x_o , to je s tisto vrednostjo odklona x , ki jo povzroči sila F_o . Uvedimo $x/x_o = u$ in nadomestimo razmerje m/k s kvadratom krožne frekvence ω_o^2 , pripadajoče opisanemu sistemu brez sile dušenja $-\beta\dot{x}$

$$\ddot{u}/\omega_o^2 = -u - (\beta/k) \dot{u} + \sin \omega t \quad (12)$$

Da sestavimo vezje za reševanje te diferencialne enačbe, spojimo zaporedoma dva integratorja, kot kaže sl. 8, in vzemimo, da je na vhodu prvega



Sl. 8. Vezje za reševanje diferencialne enačbe vsiljenega nihanja

integratorja napetost sorazmerna $\ddot{u}/\omega_o^2$. Na izhodu integratorja dobimo napetost, sorazmerno $-(1/\omega_o^2 RC) \dot{u}$, na izhodu drugega pa $(1/\omega_o^2 R^2 C^2) u$. Enačba (12) zahteva enakost med $\ddot{u}/\omega_o^2$ in vsoto funkcije u , njenega utežnega prvega odvoda $-(\beta/k) \dot{u}$ ter harmonično nihajoče motnje $\sin \omega t$. Vse tri prispevke seštejemo s sumatorjem, ki je priključen pred prvi integrator. Zaradi spremembe predznaka v sumatorju morata biti vhodna prispevka funkcije in odvoda pozitivna, harmonična sila pa negativna. Izhod drugega integratorja daje prek sumatorja prispevek s pravilnim predznakom $-(R_o/R_2) (1/\omega_o^2 R^2 C^2) u$. Pravilen predznak

prispevka — $(\beta/k) \dot{u}$ zagotavlja inverter, vstavljen med izhod prvega integratorja in vhod sumatorja, ki daje signal — $(R_0/R_3) (1/\omega^2 R C) \dot{u}$. Harmonično nihajoči člen $\sin \omega t$ se dobi iz sinusnega generatorja. S primerjavo koeficientov dobimo pogoja, pri katerih se električno vezje vede enako kot opisani nihajni krog

$$\beta/k = (R_0/R_3) (1/\omega_0^2 R C), (R_0/R_2) = \omega_0^2 R^2 C^2 \quad (13)$$

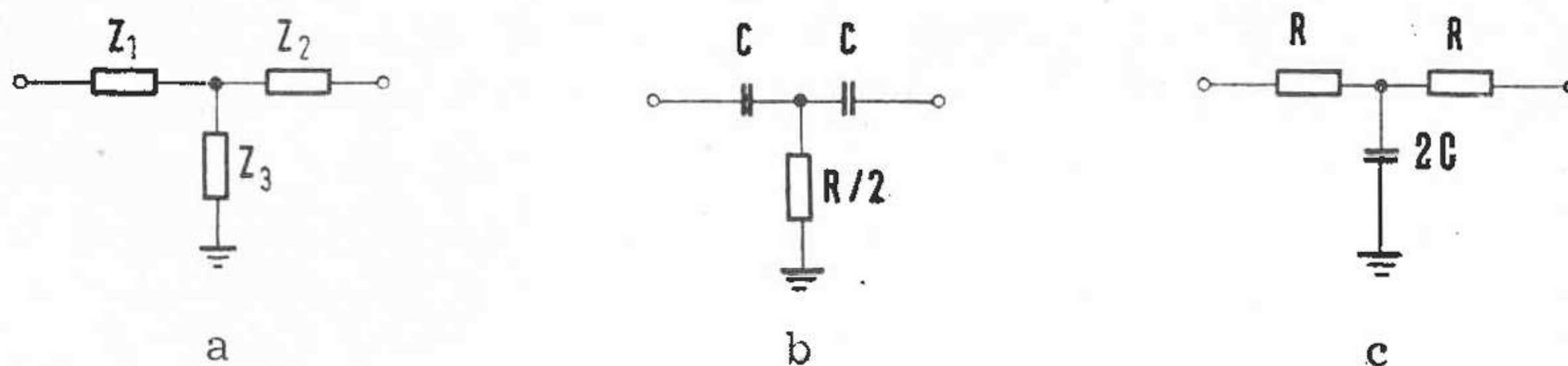
Integratorji v računalnikih imajo stalne časovne konstante RC , ki so na primer 0,1 sek ali 1 sek. Tako preostane le izbira razmerij uporov R_0/R_2 in R_0/R_3 . Zato pa je treba dostikrat pred obdelavo diferencialno enačbo prilagoditi lastnostim računalnika. Če bi bila na primer frekvenca ω_0 mnogo višja od inverzne časovne konstante $1/RC$, bi dajal integrator zelo majhno izhodno napetost in bi bilo potrebno veliko ojačenje v sumatorju. Na drugi strani pa ojačenje ne sme biti preveliko, če naj bo določeno z razmerjem upornosti v povratni zanki in v vhodnem krogu. Pri frekvenci ω_0 , mnogo nižji od inverzne časovne konstante $1/RC$, bi bilo ojačenje v integratorju veliko in integrator ne bi več natančno integriral. Zato je delovanje računalnika najbolj smotrno tedaj, ko je ω_0 velikostnega reda inverzne časovne konstante $1/RC$. Kadar torej ta pogoj ni izpolnjen, raziskujemo nihanje šele po uvedbi novega časa $t_1 = at$ s takim a , ki izpolnjuje pogoj.

Aktivni filter

Vezja, ki jih sestavimo za reševanje diferencialnih enačb, pa je mogoče često uporabiti tudi v drugačne namene. Če na primer odključimo sinusni signalni generator z vezja, ki smo ga rabili za reševanje nihajne enačbe, lahko obravnavamo preostalo vezje kot enoto z vhodom v točki A (sl. 8) in izhodom na mestu, kjer smo prej registrirali rešitev funkcije x . Ker prepušča ta enota le nihanja določene frekvence enako kot običajni nihajni krog, jo lahko uporabimo v enak namen.

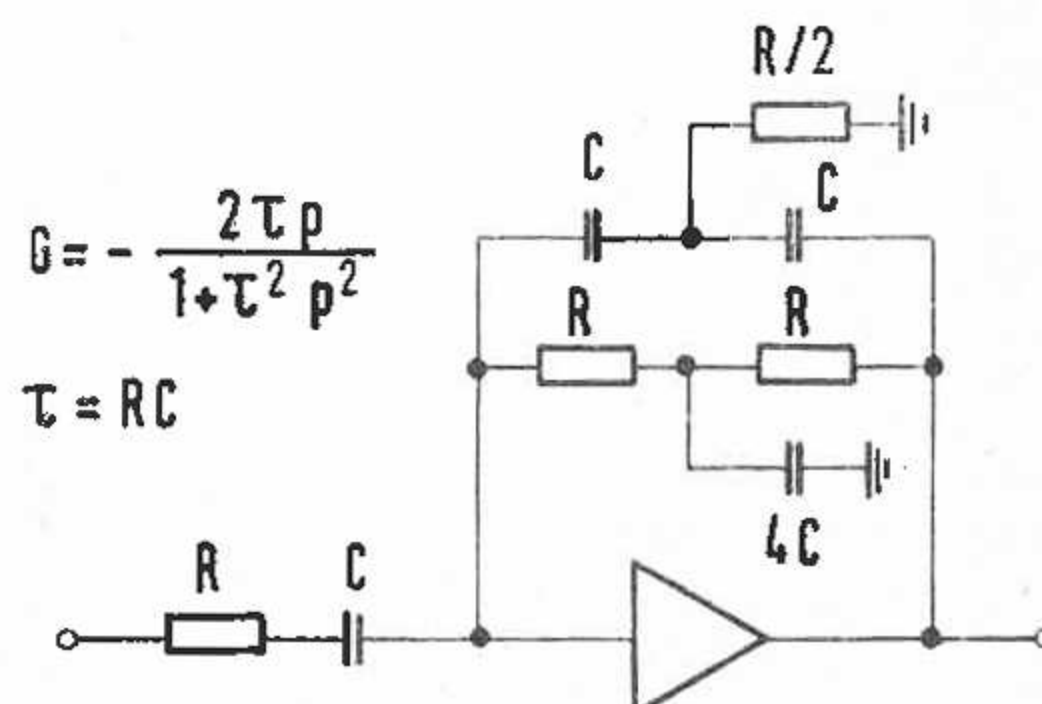
Ponavadi analogni krog ne pride v poštev, ker je običajni nihajni krog enostavnejši in cenejši. Ker pa je v območju nizkih frekvenc pod 10^3 Hz zaradi lastnega upora tuljav težko napraviti nihajne kroge z ozko resonančno krivuljo, ima tu prednost analogno vezje, s katerim je mogoče poljubno uravnavati širino resonančne krivulje. Seveda pa je za uporabo važno, kako tako vezje najceneje sestavimo. Varčevati moramo z operacijskimi ojačevalniki, ki so najdražji sestavni element, in zagotoviti zahtevane lastnosti vezja z več pasivnimi elementi: upori in kondenzatorji.

Vezje, ki lahko povsem nadomesti nihajni krog, pa je mogoče realizirati z enim samim operacijskim ojačevalnikom. V ta namen poiščemo impedanco T -člena (sl. 9 a). Impedanca Z , ki jo definiramo kot razmerje med vhodno



Sl. 9. T -členi

napetostjo U_i in kratkostičnim tokom na izhodu I , je za T -člen $Z = (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)/Z_3$. Če postavimo v T -člen za $Z_1 = Z_2 = 1/pC$ in za $Z_3 = R/2$ (sl. 9 b), dobimo impedanco $Z = 2R(1 + \tau p)/\tau^2 p^2$, kjer je $\tau = RC$. Podoben T -člen, kjer je vloga uporov in kondenzatorjev zamenjana ($Z_1 = Z_2 = R$, $Z_3 = 1/2 pC$) (sl. 9 c), pa ima impedanco $Z = 2R(1 + \tau p)$. Impedanca obeh paralelno spojenih T -členov $Z = 2R(1 + \tau p)/(1 + \tau^2 p^2)$ kaže uporabno lastnost za sestavo nihajnega kroga: pri $\omega_0 = 1/RC$ raste prek vseh meja. Vključimo dobljeno vezje v povratno zanko operacijskega ojačevalnika in delno kompenzirajmo nezaželeni faktor v števcu $1 + \tau p$ z zaporedno spojenim uporom



Sl. 10. Vezje aktivnega filtra

in kondenzatorjem C , vezanim na vhod z impedanco $R(1 + \tau p)/p$ (sl. 10)! Razmerje med izhodno napetostjo U_o in vsiljeno napetostjo U_i

$$U_o/U_i = - \frac{2\tau p}{1 + \tau^2 p^2} = - \frac{2i\omega\tau}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (14)$$

pove, da enota dobro prepušča le nihanje s frekvenco ω_0 , kar pomeni filter.

Vezje, ki samo od sebe daje pri frekvenci ω_0 izhodni signal, ki raste prek vseh meja, bi bilo seveda nestabilno in neuporabno. Lahko pa se pokaže, da porušitev simetrije v dvojnem T -členu prispeva dodatni dušilni člen v imenovalcu.

Prenosna funkcija

Delovanje množilnika s konstantnim faktorjem, inverterja, diferenciatorja, integratorja ter aktivnega filtra je določeno z razmerjem med izhodnim signalom in vhodnim signalom U_o/U_i . V navadi je, da se to razmerje imenuje prenosna funkcija enote. Tako je na primer prenosna funkcija množilnika s konstantnim faktorjem $-(R_f/R_i)$ inverterja -1 , diferenciatorja $-RCp$ in integratorja $-(1/RC)p^{-1}$.

Zanima nas, kako tolmačimo prenosne funkcije bolj splošnih oblik, na primer prenosno funkcijo $G = a + bp^{-1}$. Enota s tako funkcijo da na izhodu vhodno funkcijo, pomnoženo z a , ki ji prišteje njen časovni integral, pomnožen z b . Podobno dobimo na izhodu enote s prenosno funkcijo $G = a + bp^2$ s konstanto a pomnoženo vhodno funkcijo, superponirano na njenem drugem odvodu, pomnoženem s konstanto b . Podobno lahko tolmačimo vse prenosne funkcije, sestavljene s poljubno linearno kombinacijo vseh celoštevilčnih potenc p -ja. Opisano tolmačenje pa odpove, če je prenosna funkcija splošne oblike:

$G = (\sum_n a_n p^n) / (\sum_m b_m p^m)$. Taka prenosna funkcija pomeni, da je izhodna napetost

U_o rešitev diferencialne enačbe $\sum b_m p^m U_o = \sum a_n p^n U_i$. V tem primeru izhodne funkcije U_i ne moremo več sestaviti iz linearne kombinacije vhodne funkcije U_i ter končnega števila njenih odvodov in integralov. Pač pa dobimo neko informacijo o vedenju sistema, če v prenosni funkciji G nadomestimo operator p z $i\omega$. Dobljeni izraz $G(i\omega)$, imenovan frekvenčna prenosna funkcija, pove kompleksno amplitudo harmoničnega nihanja s frekvenco ω na izhodu enote kot odgovor na vstopno harmonično nihanje iste frekvence z amplitudo 1. Tako se na primer preprosta prenosna funkcija $G(p) = 1/(1 + \tau p)$ zapiše v frekvenčni obliki $G(i\omega) = 1/(1 + i\omega\tau)$, iz česar razberemo, da prenaša enota zelo počasi spreminjajoče se signale ($\omega \sim 0$) nepopačeno. To velja do tem višjih frekvenc, čim manjša je konstanta τ , ki ima dimenzijo časa. Pri zelo visokih frekvencah, kjer je $\omega\tau \gg 1$, pa enota vhodni signal integrira. Pri tem pada amplituda izhodne napetosti pri harmonično nihajočem vходу kot $1/\omega$, izhodna napetost pa je premaknjena proti vhodni napetosti za fazni kot $\varphi = -\pi/2$, kar je razvidno iz relacije $1/i\omega\tau = -i/\omega\tau = -(1/\omega\tau) e^{i\pi/2}$.

Poznamo več upodobitev frekvenčne prenosne funkcije. Zelo nazorno sliko o vedenju sistema daje upodobitev, kjer se nanašata modul $M = |G(i\omega)|$ in fazni kot φ izhodnega signala v odvisnosti od frekvence ω enoto velikega harmonično nihajočega vhodnega signala. Za naš primer je:

$$M = |G(i\omega)| = 1/\sqrt{(1 - i\omega\tau)(1 + i\omega\tau)} = 1/\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} G(i\omega)}{\operatorname{Re} G(i\omega)} = -\omega\tau; \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \omega\tau$$

Z novim tolmačenjem lastnosti prenosne funkcije $G(i\omega) = a - b\omega^2$ zvemo, da je izhod enote pri frekvenci $\omega_0 = a/b$ enak nič, fazni kot pa je nič za vse frekvence, manjše od ω_0 ter π za vse frekvence, večje od ω_0 . Enota s to prenosno funkcijo je torej filter, ki prepušča nihanja vseh frekvenc razen ω_0 .

Že iz navedenih primerov je razvidna uporabnost analogne računske tehnike povsod, kjer se zadovoljimo z natančnostjo nekaj procentov. Izhodne napetosti operacijskih ojačevalnikov nihajo namreč okoli ničle tudi pri ozemljenem vrodu, kar se prenaša na naslednje stopnje. Lezenje ničel je sicer mogoče zmanjšati, vendar postane potem bolj kritična izbira uporov in kondenzatorjev, ki običajno niso točnejši od procenta, za vhodno vejo in vejo povratne zanke.

Pričakovati pa je še nadaljnjo razširitev uporabe, ker je pri današnji tehnologiji, ki dela cela vezja na ploskvah nekaj kvadratnih milimetrov z napajanjem tankih plasti na silicijev monokristal, dostopnih vedno več vrst operacijskih ojačevalnikov. Najmanjši od teh ojačevalnikov zavzemajo le $0,1 \text{ cm}^3$ prostora in trošijo od 10 do 150 mW moči. Pri tej velikosti, porabi energije in ceni okoli 10 dolarjev se z vgradnjo nekaj operacijskih ojačevalnikov merilne naprave niti ne povečajo, niti bistveno ne podražijo, lahko pa mnogo pridobe na uporabnosti.

✓ELEKTRONSKI RAČUNALNIKI V SLOVENIJI

ZVONIMIR BOHTE, IVAN KUŠČER, EGON ZAKRAJŠEK

Po mnogih letih zakasnitve je bilo v zadnjem času pri nas investiranih nepričakovano veliko sredstev v moderne elektronske računalnike. Namesto prejšnjega očitka, da prepočasi sprejemamo nove tehnične pridobitve, se zdaj oglašča zahteva, da bi bilo treba nadaljnje investiranje na tem področju bolje planirati.

Da bi lahko presodili upravičenost takšne zahteve, je treba poznati dejansko stanje. V ta namen so v naslednjem prikazane potrebe po računalnikih ter pregled dosedanjih investicij in nadaljnjih načrtov na tem področju. Posebej je na koncu obravnavan predlog, da naj dobijo Univerza in druge raziskovalne organizacije skupaj svoj računalnik matematičnega tipa, ter alternativni predlog za nabavo splošno uporabnega računalnika v še širši kooperaciji.

Prikaz se opira na podatke iz literature, na izkušnje, ki jih je prineslo delo v Računskem centru Univerze, in na informacije, ki smo jih dobili tam, kjer so že ali kjer bodo nabavili računalnike. Vsem, ki so dali te informacije, gre iskrena zahvala.

1. UVOD

1.1. Čemu potrebujemo računalnike

Elektronski računalniki so pri nas potrebni predvsem za naslednja področja dela:

1. Poslovno delo gospodarskih organizacij: knjigovodski in računovodski posli, evidenca zalog, nabav in prodaje, priprava dela in terminiranje (časovni razpored dela), planiranje na osnovi ažurne in zanesljive evidence, kontrola in optimizacija proizvodnje, analiza trga, statistična obdelava podatkov, delo bank in zavarovalnic.

2. Delo organov javne uprave: evidenca, sortiranje in statistična obdelava raznih podatkov (notranje zadeve, statistična služba, socialno zavarovanje, zdravstvena služba, davčna uprava, sodstvo, kataster itd.).

Delo te vrste je očitno podobno prejšnjemu, ker imamo obakrat opravka z velikim številom podatkov in rezultatov, medtem ko so računi razmeroma preprosti. Zaradi lažje razprave bomo v nadaljnjem v obeh primerih rabili izraz *poslovno delo*.

3. Matematični izračuni v zvezi s tehničnimi in znanstveno raziskovalnimi problemi (univerza, raziskovalne ustanove, industrija). Sem je šteti tudi pouk programiranja, kolikor je usmerjen k reševanju tehničnih in znanstvenih problemov. Pri delu te vrste, ki ga bomo zaznamovali z izrazom *matematični računi*, ni veliko podatkov in rezultatov, pač pa je dosti zahtevnega računanja.

Poslovno delo opravljamo pri nas še večinoma ročno. Vendar prihajajo zlasti v večjih gospodarskih organizacijah bolj in bolj do prepričanja, da bodo potrebovali računalnike. Že pri samem knjigovodstvu in računovodstvu lahko

računalnik prihrani veliko kvalificirane delovne sile. Zares rentabilen pa postane računalnik šele, ko ga vključimo v planiranje proizvodnje in trgovine ter v kontrolo in optimizacijo delovnega procesa. V velikem trgovskem podjetju se šele z uporabo računalnika da doseči dnevna evidenca zalog, nabave in prodaje ter tako opreti planiranje na ažurne, namesto na zastarele podatke. To omogoča, da podjetje znatno zmanjša zaloge, ne da bi trpela poslovnost. Pri zalogah, katerih vrednost sega v milijarde, prihranek lahko odtehta ceno računalnika.

Pri delu organov javne uprave ekonomski moment ni tako odločilen kakor dejstvo, da tega potrebnega dela včasih zaradi njegove obsežnosti brez računalnikov ni mogoče dovolj hitro in dovolj zanesljivo opravljati. Kot primera lahko omenimo statistike ob popisih prebivalstva ter evidenco in iskanje podatkov v kriminalistični službi, kjer je hitrost odločilnega pomena.

Zopet drugačni kriteriji veljajo za uporabo računalnika pri reševanju tehničnih in znanstvenih problemov. Pomen računalnika je tu predvsem, da omogoča izračune, ki jih prej zaradi njihove obsežnosti nihče ni zmoget. Na vseh raziskovalnih področjih danes uporabljajo računalnike in v mnogih vejah znanosti in tehnike brez tega pripomočka ni več mogoče slediti napredku. Korist računalnika se tu meri z vrednostjo rešenih problemov, ki pa se ne da vedno izraziti v denarju. Če stoji tak računalnik na univerzi, ima še dodatni pomen za pouk. Saj je univerza tisti center, ki mora v svojem okolju stalno uvajati nove pripomočke in nove metode.

1.2. Vrste elektronskih računskih strojev

Pri poslovnem delu so se sprva uveljavili tako imenovani *klasični* elektronski stroji za obdelavo podatkov. To so razmeroma preprosti stroji, narejeni po vzorcu starejših mehaničnih in elektromehaničnih naprav, ki opravljajo vsak svojo ozko omejeno nalogo. Po navadi je potrebna garnitura več takih strojev: eden za sortiranje podatkov, drugi za seštevanje in za izpisovanje tabel itd. Pravi elektronski *računalniki* pa so pravzaprav sistemi elektronskih strojev, ki so med seboj povezani in si drug drugemu podajajo podatke in ukaze, ne da bi bil za delne naloge potreben vsakokratni poseg človeka. Razlika med klasičnimi stroji in računalniki je torej podobna razliki med obrtniško delavnico in moderno tovarno z avtomatiziranim tekočim trakom.

Napredek se kaže tudi v podrobnostih. Klasičnim strojem je treba dajati ukaze ročno s pretikanjem žic, kot v kaki ročni telefonski centrali. Računalniki pa omogočajo *interno programiranje*. To se pravi: računalniku damo na papirnih karticah ali trakovih poleg podatkov tudi *program*, to je serijo ukazov. Ukazi ostanejo zapisani v spominu stroja in stroj potem po njih obdela sprejete podatke.

Klasični stroji za obdelavo podatkov izginjajo, ker jih izpodrivajo računalniki. Majhen računalnik je namreč le malo dražji kot garnitura klasičnih strojev, nudi pa neprimerno več. V naslednjem bodo klasični stroji omenjeni samo mimogrede (v poglavju 2.1), medtem ko bo v splošnem govor samo o pravih računalnikih.

Na svetu je okrog 50 tvrdk, ki izdelujejo kakih 300 različnih vrst računalnikov. Le-ti se ločijo ne le po zmogljivosti, ampak dostikrat tudi po namenu, za katerega so zgrajeni. Vsako leto prihajajo na trg hitrejši in bolj zmogljivi stroji. Napredek se kaže tudi v cenah, saj za enak denar lahko kupimo danes dosti boljši računalnik kot pred leti.

Kot najbolj grobo merilo za klasifikacijo računalnikov glede njihove zmogljivosti lahko služi njihova cena, toda le, če primerjamo stroje iz iste dobe. Cene sodobnih majhnih računalnikov se gibljejo od nekaj deset tisoč do kakih dvesto tisoč dolarjev. Stroji, ki jih uvrščajo med srednje velike, veljajo po več sto tisoč \$, veliki računalniki pa po milijon ali po več milijonov \$.

Skoraj vsak tip računalnika dopušča še izbiro različnih konfiguracij, vendar v določenih mejah. Kupec se lahko odloči npr. za večji ali manjši notranji (hitri) spomin. Dodatki, ki so na izbiro, pa so: manjši ali večji zunanji (počasni) spomin, in sicer bodisi z magnetnimi trakovi ali z magnetnimi ploščami, nadalje naprava za »plavajočo« (tj. avtomatično premakljivo) decimalno vejico, naprava za obdelavo poslovnih podatkov itd. Potem so še enote, ki predstavljajo vhod in izhod stroja: čitalnik kartic (ali papirnega traku), vrstični tiskalnik ter lahko še risalna in druge naprave. Med pomožne enote pa spadajo npr. naprave za luknjanje, kontrolo in sortiranje kartic.

Mnogi računalniki so specializirani za določen namen. Kupec lahko izbere konfiguracijo, ki je še posebej prilagojena njegovim potrebam.

Pri poslovnem delu sta branje podatkov in tiskanje rezultatov po navadi ozki grli. Zato mora imeti računalnik, ki je specializiran za ta namen, hitre vhodne in izhodne naprave, medtem ko glede notranjega spomina in logičnih zmogljivosti ter hitrosti centralne enote stroja ni velikih zahtev.

Nasprotno pa se pri strojih za matematične račune za čitanje in tiskanje porabi razmeroma malo časa. Vhodne in izhodne naprave so lahko zato počasnejše in s tem cenejše, medtem ko so zahteve glede notranjega spomina in možnosti logičnih kombinacij dostikrat prav hude. Matematični računi zahtevajo obsežnejši notranji spomin in napravo za plavajočo decimalno vejico, kar pri poslovnem delu po navadi ni potrebno.

Dobijo se tudi računalniki z vsestranskimi konfiguracijami, ki so uporabni za oba namena: za poslovno delo in za matematične račune. Vendar je vsestranost upravičena le pri večjih strojih, medtem ko so manjši bolj racionalni, če so specializirani.

1.3. En velik računalnik ali več manjših?

Dosti razprav je bilo o dilemi, ali je pravilneje, da ima vsak interesent svoj računalnik primerne velikosti, ali pa so bolj umestni večji računalniki, ki oskrbujejo vsak po več interesentov. Na splošno velja, da skrajnosti tu niso upravičene in da gre razvoj tako na poslovnem kot na znanstveno tehničnem področju po srednji poti.

Oglejmo si najprej poslovno področje! S pretirano drobitvijo bi tu prišli do velikega števila majhnih strojev, ki ne bi bili polno izkoriščeni ali pa niti ne bi bili primerni za vse zahtevane naloge. Tako je npr. stroj brez zunanjega spomina preokoren za količkanje bolj komplicirane račune z večjo množico podatkov. Če interesent sam nima zadostnih sredstev za nabavo primernega računalnika in zadosti dela zanj, je pametno, da skupaj s sorodnimi interesi nabavi dovolj zmogljiv stroj. V Sloveniji imamo že šest primerov takšne kooperacije. Najpomembnejši med njimi je poslovno združenje »Mehanografski center« v Ljubljani, ki povezuje 12 podjetij in drugih interesentov s skupno okrog 10 000 delavci.

Po drugi strani prinaša pretirana centralizacija zopet svoje težave, predvsem pa veliko manj prihrankov, kot bi se zdelo na prvi pogled. Dveh računal-

nikov ne moremo kar tako nadomestiti z enim samim, ki bi zmogel dvakrat toliko, kajti pri poslovnem delu je zmogljivost odvisna predvsem od hitrosti vhodnih in izhodnih naprav. Če že imamo najhitrejšo garnituro teh naprav, lahko podvojimo zmogljivost le tako, da garnituro podvojimo. Izdatek za to lahko znaša tretjino cene srednje velikega računalnika. Izdati pa moramo še precej več, ker srednje velik računalnik ni sposoben, da bi hkrati delal z dvojno garnituro vhodnih in izhodnih naprav, ampak je za takšno delo potreben večji in dražji stroj. To bi se splačalo šele, če bi večje število interesentov združilo svoja sredstva za nabavo zares velikega računalnika, ki bi bil lahko tudi na večje razdalje povezan z vhodnimi in izhodnimi napravami. Organizacija dela v takem velikem centru pa bi bila dokaj težavna.

Težave povzročajo tudi dnevne in mesečne konice, ko se nakopiči dosti dela, ki naj bi bilo čimprej opravljeno. Velika podjetja v takih okoliščinah nočejo trpeti takega čakanja v izmenah.

Marsikatera velika firma v razvitih državah ima *mrežo računalnikov*, in sicer ima vsak večji obrat svoj stroj, ki pa je povezan z večjim centralnim računalnikom, kjer se obdelujejo podatki »na višji ravni« za firmo kot celoto. Pričakovati smemo, da bo tudi pri nas razvoj sčasoma pripeljal do podobne organizacije, torej, da bomo poleg računalnikov v večjih tovarnah imeli še centralne računalnike, ki bodo povezovali večje gospodarske komplekse. Vendar bo to šele druga stopnja razvoja, ki ne more prehiteti prve: uvajanja srednje velikih računalnikov za posamezna večja podjetja ali za skupine manjših.

Za primerjavo lahko služi podatek, da imajo ZDA blizu 50 000 računalnikov, od tega pa samo 2400 takšnih po milijon dolarjev ali več.

Tudi pri računalnikih, ki naj služijo za reševanje znanstvenih in tehničnih problemov, je treba misliti na povezavo sorodnih interesentov, zato da se omogoči nabava dovolj zmogljivih strojev. Povsod v svetu opazamo, da se povezujejo interesenti znotraj posamezne univerze, zato da se nabavi vsaj srednje velik stroj, ki potem služi vsej univerzi. Kot svarilna primera nesmiselne drobitve lahko omejimo, da na univerzah v Zagrebu in Beogradu posamezne fakultete nabavljajo majhne lastne računalnike.

Po drugi strani se marsikje v svetu oglašajo želja po še bolj zmogljivih računalnikih, ki so potrebni za reševanje posebno težavnih problemov, na primer v fiziki, pri projektiranju reaktorjev in pri vesoljskih poletih. Ali naj se torej univerze odpovedo svojim lastnim računalnikom, zato da bi po več univerz skupaj lahko nabavilo računalnike največje zmogljivosti? — Očitno je, da taka rešitev ne bi bila pripravna za vsakodnevne bolj skromne računske probleme, še manj pa za pouk. Rešitev je zopet v mreži računalnikov. Lep primer bo po načrtu britanske vlade kmalu realiziran na Škotskem, kjer bo Regionalni računski center v Edinburghu opremljen z zelo velikim računalnikom English Electric 4/75. Več škotskih univerz pa bo dobilo vsaka svoj nekoliko manjši računalnik.

2. SEDANJE STANJE V SLOVENIJI

2.1. Klasični stroji

Že okrog leta 1950 so bili v Sloveniji uvedeni prvi klasični elektronski stroji za poslovno delo in šele v zadnjih letih, torej razmeroma pozno, so jih začeli izpodrivati računalniki. V našem okolju so klasični stroji še vedno ko-

ristni. Pod njihovim vplivom se je marsikje sistematično uvedla tehnika poslovanja, kakršna je potrebna za strojno obdelavo podatkov. Razen tega se je ob njih izvežbal kader, ki bo znal delati tudi na računalnikih.

V Sloveniji je sedaj 12 garnitur klasičnih strojev, kot je razvidno iz spodnje tabele. (Podobne podatke za vso Jugoslavijo najdemo v Biltenu Koordinacionog odbora korisnika mašina za obradu podataka, ki podaja pregled v majski številki 1967 ter komentar v junijski.)

Tabela 1

Organizacija	Dobavitelj stroja	Garnitura stavljenav pogon
Zavod za statistiko (Ljubljana)	IBM (v najemu do 1963)	1950
	Bull	1964
Litostroj	IBM (v najemu)	1954
TAM (Maribor)	IBM	1955
Železarna Jesenice	IBM	1955
Mehanografski center (Ljubljana)	IBM	1958
Tomos (Koper)	Univac	1958
Iskra (Kranj)	Univac	1961
Republiški sekretariat za notranje zadeve	IBM	1962
Stol, Titan (Kamnik) in Induplati, skupaj	IBM	1963
LTH, Jelovica in Gorenjska predilnica (Škofja Loka), skupaj	IBM	1963
RTV (Ljubljana)	Bull	1963
EMO in Kovinotehna (Celje), Železarna Štore, Kovaška industrija (Zreče), skupaj	IBM (v najemu)	1966

2.2. Računalniki

Še pred nekaj meseci smo imeli v Sloveniji samo 5 majhnih računalnikov in enega srednje velikega (TAM-ov IBM 1401), ki pa so skoraj vsi že nekoliko zastareli. Letos smo dobili prva dva sodobna računalnika, naročenih pa jih je še 11 (tabela 2).

Skoraj vsi navedeni stroji so narejeni in namenjeni za poslovno rabo, dasi se v nekaterih primerih predvideva tudi uporaba za tehnične proračune. Samo za matematične račune pa služi stroj Zuse Z-23, medtem ko naj bi stroja CDC 3300 in IBM 1130 služila obojnemu namenu.

Cene malih računalnikov Bull Gamma 10, IBM 360/20 in IBM 1130 se gibljejo med 100 000 in 200 000 \$ (v odvisnosti od konfiguracije), skupaj s carino in drugimi stroški pa od kakih 200 milijonov S-din navzgor. Starejši Univac 1004 in NCR 390 staneta vsak le pol toliko, domači Cer 200, ki je zelo skromen, pa še manj. Na drugi strani imamo srednje velike računalnike IBM 360/30, ki stanejo v poprečju po 400 000 \$, ali v celoti po 700 milijonov S-din. Približno

Tabela 2

Že instalirani računalniki

Organizacija	Tip stroja	Stavljen v pogon
Univerza in NIJS, skupaj	Zuse Z-23	1963
Zavod za statistiko (Ljubljana)	Univac 1004 II	1964
SDK (Ljubljana)	Univac 1004	1965
TAM (Maribor)	IBM 1401	1965
Tovarna dušika (Ruše), Marles (Limbuš) ter Metalna in Ekonomski center (Maribor), skupaj	Bull Gamma 10	1965
Splošna plovba (Piran)	NCR 390	1966
DES (Ljubljana)	IBM 360/30	jan. 1968
Mehanografski center (Ljubljana)	IBM 360/20	febr. 1968
Planika (Kranj)	Cer 200	1968

Naročeni računalniki

ZP Iskra	CDC 2100 (začasno)	junij 1968
ZP Iskra, skupaj z Izvršnim svetom SRS ter morda še z Univerzo, Nuklearnim inštitutom in Zavodom SRS za zdravstveno varstvo	CDC 3300 (?)	okt. 1968
Saturnus (Ljubljana)	IBM 360/20	okt. 1968
Gorenje (Velenje)	IBM 360/20	okt. 1968
Železarna Jesenice	IBM 360/30	nov. 1968
Prehrana (Ljubljana)	IBM 360/20	dec. 1968
Metalka (Ljubljana)	IBM 360/30	jan. 1969
Agrokombinat Emona	IBM 360/30	jun. 1969
EMO in Kovinotehna (Celje), Železarna Štore, Kovaška industrija Zreče (skupaj)	IBM 360/25 (začasno IBM 1401 v najem)	jul. 1969 (jun. 1968)
Železniško transportno podjetje (Ljubljana)	IBM 360/30	jul. 1969
Slovenija ceste	IBM 1130	okt. 1969
Zavod za napredek gospodinjstva in Tovarna perila »Toper« (Celje) ter Tovarna nogavic (Polzela), skupaj	IBM 360/20	jan. 1970

toliko staneta tudi IBM 1401 ter CDC 2100, ki predstavlja za malenkost počasnejšo verzijo bolj znanega stroja CDC 3100. Še vsaj za 50 % dražji je CDC 3300. S temi površnimi podatki lahko približno presodimo, da se celotna vrednost investicij v navedenih 20 računalnikih bliža 8 milijardam S-din, od česar je za 4 do 5 milijonov \$ deviz.

Odgovorni strokovnjaki v podjetjih, kjer so že ali kjer bodo nabavili elektronske računalnike, so navedli prepričljive argumente za takšno investicijo: obsežnost poslovnega dela, ki ga brez stroja ni mogoče več dohajati, potreba po vsakodnevni zanesljivi evidenci kot osnovi realnega planiranja, kontrola proizvodnje in trgovske mreže. Zlasti tam, kjer že imajo večletne izkušnje s klasičnimi stroji, so na nove računalnike dobro pripravljeni in vedo oceniti, kako močno bodo zasedeni. Kjer ni teh izkušenj, je slika včasih manj jasna.

Na vprašanje, zakaj v večini primerov ni prišlo do kooperacije z drugimi interesenti, se odgovor po navadi glasi, da bo stroj tako ali tako kmalu dovolj zaseden in da bi kooperacija ovirala poslovnost. Nekateri pa vendarle predvidevajo oddajanje prostih kapacitet stroja (pri strojih 360/30 po ca. 100 000 S-din na uro ali nekaj manj).

3. PERSPEKTIVE NA POSLOVNEM PODROČJU

3.1. Predvidene nadaljnje nabave

Interesenti, ki nameravajo kmalu nabaviti elektronske računalnike, so naštetih v spodnji tabeli. Naveden je tudi tip stroja, ki bo predvidoma nabavljen, dasi v mnogih primerih še ni dokončne odločitve.

Tabela 3

Organizacija	Tip stroja	Predvideni začetek dela
Tomos, Mehanotehnika, Luka in Inter-evropa (Koper), skupaj	IBM 360/25	1969
Kreditna banka (Ljubljana)	predvidoma IBM 360/30	jan. 1970
Stol (Duplica), Titan (Kamnik) in Industrija (Jarše), skupaj	IBM 360/20	1970 (?)
LTH, Gor. predilnica, Jelovica (Škofja Loka), Sava (Kranj), Peko (Tržič), skupaj	IBM 360/20	1970
GIPOSS (posl. združenje gradb. podjetij, Ljubljana)	IBM 360/25	1970
Republ. sekretariat za notranje zadeve Iskra (Kranj)	predvidoma IBM 360/40 srednje velik stroj, morda CDC 2100	
Litostroj	predvidoma IBM 360/30	

Potrebe v Sloveniji s tem še niso izčrpane. Računati moramo, da bodo zlasti večja podjetja (takšna s po več tisoč delavci) potrebovala svoje računalnike ali pa bo več podjetij nabavilo računalnike v kooperaciji. Prišteti je treba večje občinske uprave ali raje skupnosti po več občin. Že v bližnji prihodnosti bo najbrž treba obseg zadnje tabele podvojiti. Tako bi celotno število elektronskih računalnikov v Sloveniji (brez upoštevanja klasičnih strojev) naraslo na prek 30, torej na ca. 20 na milijon prebivalcev. S tem bi še vedno zaostajali

za faktor 3 za zahodnoevropskimi državami, kjer imajo poprečno po 60 računalnikov na milijon prebivalcev, in še bolj za ZDA, kjer jih imajo po 250. Zanimivo pa je, da je poprečna cena posameznega računalnika v ZDA (280 000 \$) le malo večja kot pri nas, kar kaže, da glede tega vsaj v poprečju še nismo zašli v ekstreme.

3.2. Načela za nadaljnje nabave

Vsekakor je razveseljivo, da z nabavljanjem računalnikov sedaj hitro napredujemo, in to na dokaj široki fronti. Vendar se zdi hitrost včasih že kar prevelika. Kadar ni lastnih izkušenj in če tudi ni časa za iskanje nepristranskih nasvetov, odločitve niso vselej do kraja premišljene. Bolj kot kupci odločajo v takih primerih s svojimi nasveti strokovnjaki, ki jih rade pošiljajo firme — proizvajalke računalnikov.

Koristno bi bilo, če bi pri nabavljanju nadaljnjih računalnikov upoštevali naslednja načela:

1. V vsakem primeru je treba temeljito pretehtati, kakšne in kolikšne so dejanske potrebe, ter na tej osnovi izbrati računalnik primerne zmogljivosti. Posvet s strokovnjaki, ki so neodvisni od dobaviteljev, predvsem s tistimi, ki pri nas vodijo delo na že instaliranih računalnikih ali na klasičnih strojih, tu lahko veliko pomaga. Tudi sodelavci Računskega centra Univerze (na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko) so voljni pri tem sodelovati.

2. Nabavo računalnika je treba utemeljiti s koristjo, ki jo od njega pričakujemo. Pri računalniku, ki naj služi kaki gospodarski organizaciji v poslovne namene, se da finančni efekt te koristi vsaj grobo oceniti ter tako opravičiti investicijo. Če takega opravičila ni, je bolje z nabavo lastnega računalnika še počakati.

3. Oceniti je treba, kako močno bo računalnik zaseden, ko bo delo steklo. Pri premajhni zasedenosti, recimo manj kot eno izmeno (to je po 8 ur na dan ali 2000 ur na leto) bi bilo treba v interesu štednje pretehtati možnosti kooperacije s sorodnimi interesenti v bližini ali vsaj možnosti prodajanja prostih kapacitet stroja. Ako pa se zdi, da bo stroj že kmalu premočno zaseden (npr. v 2 izmenah ali več), je treba preudariti, ali ne kaže nabaviti hitrejših naprav.

4. Istorodni ali hierarhično med seboj povezani interesenti naj bi nabavili čim bolj sorodne računalnike, tako da bi bila omogočena ne le izmenjava programov, ampak tudi neoviran prenos podatkov v obliki kartic ter magnetnih trakov in plošč. V takšnem medsebojnem odnosu so podjetja iste gospodarske panoge, na področju javne uprave pa organi zveze in ustrezni organi republik.

5. Vsaj eno leto, preden bo računalnik montiran, je že treba pričeti s šolanjem kadra in s pripravljanjem takšne organizacije dela, ki bo zagotovila stalen dotok vseh podatkov računalniku ter sprotno izkoriščanje njegovih rezultatov.

6. Interesenti, ki z računalniki še nimajo izkušenj, naj si jih pridobijo na enem izmed bližnjih že instaliranih strojev, kjer plačajo delo od ure. To utegne biti dosti ceneje kot izguba zaradi prenačrtane investicije.

7. Pri izbiranju dobaviteljev bi bil potreben smiseln dogovor v zveznem merilu. Sedanje stanje je čudno, kajti po eni strani ima firma IBM na jugoslovanskem trgu premoč (če upoštevamo tudi vsa naročila), po drugi pa so bili računalniki nabavljeni ali naročeni še od 10 drugih firm. To so: Bull-GE, CAE, CDC, NCR, RR-Univac, English Electric, Elliot, Zuse, Aritma (ČSSR)

ter končno naš Institut Mihajlo Pupin s stroji tipa Cer. Pojavljajo se še ICT, Honeywell in Siemens. Medtem ko monopol gotovo ni zaželen, je 14 firm le malo preveč. Predvsem je nespametno, da smo od nekaterih firm nabavili samo po en ali dva stroja, tako da lahko pričakujemo težave pri servisu in pri oskrbi z rezervnimi deli.

8. Vsak kupec bo seveda še vedno iskal ponudbe z raznih strani in skrbno primerjal ne samo cene ter zmogljivosti in zanesljivost strojev, skupaj s pripadajočimi vodilnimi programi in prevajalniki, ampak tudi programske biblioteke in druge usluge, ki jih nudijo dobavitelji.

4. PROBLEM REPUBLIŠKEGA RAČUNSKEGA CENTRA

4.1. Potrebe univerze in raziskovalnih ustanov

Medtem ko je v Sloveniji instaliranih že več računalnikov za poslovno delo, imamo za matematične račune en sam stroj, namreč mali računalnik Zuse Z-23. Tega sta pred leti skupaj nabavila Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko univerze ter Nuklearni inštitut Jožefa Stefana. Izbira je bila pogojena s takratno kooperacijsko pogodbo Iskre in firme Zuse. Stroj je sedaj zastarel in bo verjetno kmalu izrabljen, saj je tekel že prek 18 000 ur. Zaradi izredne počasnosti in dosti premajhnega spomina za težje naloge ni uporaben. Tudi za pouk ni pripraven, ker ne dovoljuje obširnejše rabe simboličnih jezikov za sestavljanje programov.

Ob upoštevanju tega stanja sta se imenovana inštituta, skupaj z Zavodom SRS za zdravstveno varstvo in v dogovoru z vsemi fakultetami univerze, odločila za nabavo novega srednje velikega računalnika. Računalnik bo služil ne le lastnim potrebam neposrednih investitorjev, ampak tudi vsem fakultetam tako pri pouku kot pri raziskovalnem delu, ter na slednjem področju še drugim raziskovalnim zavodom v okolici in ostalim interesentom. Nabava bo financirana deloma s posojili zveznega fonda za financiranje znanstvene dejavnosti, Sklada Borisa Kidriča in Republiške izobraževalne skupnosti, deloma pa z lastnimi sredstvi navedenih treh ustanov.

Pri preliminarni izbiri tipa stroja so prišli v poštev naslednji: IBM 360/44, CDC 3100, Elliot 4100, PDP 10-50, Bull Gamma 60, DDP 224, CAE 90-80 (= SDS 9300). Že pri prvi selekciji je odpadlo zadnjih pet računalnikov, ker nekateri niso ustrezali zahtevam, medtem ko pri drugih vprašanje servisa ni bilo rešeno.

Tako sta prišla v končno konkurenco samo stroja IBM 360/44 in CDC 3100. Obe firmi sta znani, da izdelujeta dobre stroje in da nudita obsežno biblioteko programov. Obe imata zastopstvo v Jugoslaviji in garantiran servis z rezervnimi deli za dinarje (CDC prek Iskre). Plačilni pogoji so pri obeh firmah podobni in obe dajeta univerzam popust.

Dejstvo, da je že več strojev IBM v okolici, in nekatere tehnične prednosti so vodile k zaključku, da naj se nabavi stroj te firme. Tedaj je prišel predlog, da bi nabavili stroj skupaj z Združenim podjetjem Iskro, in sicer od firme CDC (glede na kooperacijsko pogodbo Iskre s to firmo). Preliminarni razgovori so pokazali, da bi to lahko bil še nekoliko večji stroj CDC 3300. Ker pa ni pravočasno prišlo do dokončne odločitve, sta bili v predlogu Zveznemu fondu navedeni obe varianti:

1. IMFM, NIJS in ZZV naj nabavijo za potrebe univerze in raziskovalnih zavodov računalnik matematičnega tipa IBM 360/44, in sicer s podvojenim notranjim spominom (32 000 besed po 32 bitov, to je binarnih števil) ter z magnetnimi trakovi in 2 ploščama kot zunanji spominom. Vrednost celotne investicije bi znašala 666 milijonov S-din.

2. Imenovani zavodi naj nabavijo v širši kooperaciji z ZP Iskro računalnik CDC 3300, in sicer v konfiguraciji, ki bi bila primerna tako za matematične račune kot za poslovno delo. Stroj naj bi imel enoto za plavajočo vejico, posebno enoto za obdelavo poslovnih podatkov, notranji spomin v obsegu 32 000 besed po 24 bitov, zunanji spomin z magnetnimi trakovi in ploščami ter hitre vhodne in izhodne naprave. V celoti bi bilo treba investirati 1120 milijonov S-din.

Za to kooperacijo se je zanimal tudi Izvršni svet SRS, ki bi se s svojimi organi javne uprave pridružil kot nadaljnji soinvestitor. Tako je nastala zamisel »Republiškega računskega centra« (RRC), v katerem bi s po eno tretjino dolžnosti in pravic participirali ZP Iskra, Izvršni svet ter kot tretji partner skupaj IMFM, NIJS in ZZV.

RRC je bil zamišljen samo kot operativni center, katerega edina skrb bi bila pogon računalnika po naročilih ustanoviteljev centra. RRC se ne bi ukvarjal z izdelavo programov, ampak bi vsak ustanovitelj za to delo imel svoje lastne programerske skupine.

Doslej še ni prišlo do nikakršnega dokončnega dogovora o ustanovitvi RRC in s tem tudi ne do odločitve med obema navedenima variantama. Izvršni svet se je sicer na seji 14. septembra 1967 odločil za sofinanciranje RRC, vendar brez soglasja vseh predvidenih partnerjev.

Potem ko se večmesečna pogajanja med Iskro in IMFM niso premaknila z mrtve točke, je Izvršni svet imenoval komisijo, ki naj prouči organizacijske, pravne, finančne in druge probleme predvidenega RRC ter naj da Izvršnemu svetu predloge. Komisija je sicer v glavnem dosegla soglasje med zastopniki partnerjev glede osnovnih organizacijskih načel RRC, pravnih in drugih problemov pa še ni uspela rešiti.

Pri presoji obeh variant je treba upoštevati, da je CDC 3300 dražji predvsem zato, ker je vsestranski, torej, ker ima dražje vhodne in izhodne enote ter več dodatkov. (Nekaj pa doprinese tudi carina, ki je pri nabavi stroja samo za raziskovalne in učne namene ne bi bilo treba plačati.) Za matematično rabo sta oba računalnika približno enako zmogljiva. Vsak ima pred drugim svoje drobne prednosti, ki pa se v celoti več ali manj odtehtajo. Po drugi strani je za večino poslovnega dela CDC 3300 praktično enako zmogljiv kot npr. CDC 2100 ali IBM 360/30, ki sta v primerni konfiguraciji za tretjino cenejša.

Z vidika univerze in raziskovalnih ustanov je torej razlika med obema variantama ta, da bi imeli v enem primeru stroj zase, v drugem pa za 56 % istega denarja samo tretjino enakovrednega stroja. Takoj razberemo, da je odločitev bistveno odvisna od stopnje zasedenosti, s katero računamo pri enem ali drugem stroju. Če bo ta zadostna, je 56 % denarja za 33 % pravic kaj slaba kupčija; v nasprotnem primeru pa je združitev sredstev smiselna.

Enaki argumenti veljajo tudi za Iskro in Izvršni svet, če izbiramo npr. med CDC 3300 in 2100. Poudariti je treba, da vsestranost stroja CDC 3300 sama po sebi nikakor ne dokazuje, da bi bila izbira tega računalnika bolj racionalna kot nabava dveh specializiranih, npr. IBM 360/44 in CDC 2100. Pri

vsakršnem delu bi bil namreč izkoriščen samo del univerzalnega stroja. Tako pri matematičnih računih niso dovolj izkoriščene drage hitre vhodne in izhodne naprave, medtem ko sta pri poslovnem delu velik del notranjega spomina ter enota za plavajočo vejico nepotrebna. Racionalnost te ali one izbire se da dokazati edinole z analizo zasedenosti za oba primera.

Ocenjena letna zasedba stroja s strani univerze in raziskovalnih ustanov je razčlenjena v naslednji tabeli, in sicer veljajo podatki za drugo polovico leta 1969 in prvo 1970, ob predpostavki, da bo stroj začel z delom januarja 1969.

Tabela 4

Vrsta dela	Število ur na leto na stroju IBM 360/44 ali CDC 3300
I. Pouk	
Pouk programiranja za ca. 450 do 600 študentov tehniških in Ekonomske fakultete, poprečno po 10 minut za študenta	75 do 100
100 tehničnih programov in seminarskih nalog na leto, vsak poprečno po 15 minut	25
50 takšnih diplomskih del, ki potrebujejo pomoč računalnika, poprečno po 30 minut	25
magistrska in doktorska dela	25
delo univerznih učiteljev in asistentov v zvezi s poukom	50
tečaji za univerzne učitelje in asistente	25 do 50
tečaji za zunanje interesente	25
Skupaj pouk	250 do 300 ur
II. Znanstveno in tehnično delo IMFM, fakultet ter NIJS	
Obseg dela po izkušnjah na stroju Z-23 z upoštevanjem prirastka 40 % na leto in ca. 10-krat večje hitrosti novega stroja*	500
Težje naloge, ki jih Z-23 ne zmore:	
IMFM in fakultete, skupaj	150 do 200
NIJS	150 do 200
Geodetski zavod	50 do 100
Znanstveno in tehnično delo skupaj	850 do 1000 ur
III. Delo ZZV	300 do 500 ur
Vse skupaj	1400 do 1800 ur

Tudi če upoštevamo rahlo negotovost posameznih podatkov, končni rezultat kaže, da bo z delom univerze, NIJS in ZZV ena izmena pri stroju že skoraj zasedena. Pričakovati moramo, da bo v kasnejših letih zasedenost hitro

* Za različne naloge je ta faktor lahko zelo različen. Primer: sistem 50 linearnih enačb s 50 neznankami je računalnik IBM 360/44 rešil v 2 minutah, če je bil program napisan v jeziku Fortran; isto nalogo je stroj Z-23, s programom v strojnem jeziku, opravil v 40 minutah. Pri tej tipični in pogosti nalogi imamo torej faktor 20. Računati pa moramo, da je pri preizkušanju programov, ki zasede znaten del strojnega časa, faktor dosti manjši. Če štejemo tudi neizogibne presledke, ko stroj stoji, lahko v poprečju pričakujemo faktor, ki najbrž ni dosti večji kot 10.

rastla, ker se bo ob tečajih za programiranje v simboličnih jezikih hitro povečal krog strokovnjakov, ki bodo sami pripravljali svoje programe.

Tudi po finančni plati se zdi zgornja ocena realna. Po preliminarjem proračunu na osnovi navedene zasedbe in z upoštevanjem vseh stroškov (vštevši amortizacijo ter anuitete od celotne investicije) bi ura na stroju IBM 360/44 veljala okrog 100 000 S-din. K letnim stroškom naj bi prispevala Republiška izobraževalna skupnost 30 milijonov S-din za 300 ur pouka, drugi koristniki pa do 150 milijonov. To je skupaj le malo več kot dvakratna cena 81 milijonov za 3369 ur dela na stroju Z-23 (ura po 24 000 S-din) v letu 1967, od česar je Republiška izobraževalna skupnost prispevala 16,8 milijona.

4.2. Potrebe Iskre in organov republiške uprave

Izmed organov republiške uprave sta najmočnejša interesenta za računalnik Republiški sekretariat za notranje zadeve in Zavod za statistiko. RSNZ potrebuje svoj lastni stroj, ker ga lahko sam dovolj zasede in ker potrebuje neposreden dostop do stroja ob poljubnem času. Ostane torej zaenkrat predvsem le Zavod za statistiko, ki pa je že sam močan potrošnik. Pri CDC 3300 bi namreč že takoj porabil 1300 ur na leto. Če bo k temu prišel v letu 1969/70 še popis kmetijstva in v letu 1970 popis prebivalstva za SRS, se bo število ur približno podvojilo.

Ko dodamo še podatek ZP Iskre, pridemo do naslednje skupne letne zasedbe stroja CDC 3300 v obdobju julij 1969 — junij 1970:

Univerza, NIJS, ZZV	najmanj	1400 ur
Zavod za statistiko	najmanj	1300 ur
ZP Iskra		<u>1000 ur</u>
Skupaj najmanj		3700 ur

4.3. Razlogi za in proti RRC

Z namenom, da bi se olajšala dokončna odločitev, so v naslednjem zbrani vsi argumenti, ki govorijo za ustanovitev RRC ali proti njej.

Razlogi za

1. Nabava skupnega stroja bi do neke mere finančno razbremenila vse tri partnerje.

2. Del kredita, ki ga je zagotovil Zvezni fond, bi se pri tej rešitvi morda lahko izkoristil za nabavo dodatne računalniške opreme (to je želja NIJS).

3. Ako bi se po več letih zaradi prezasedenosti stroja odločili za razformiranje RRC in za nabavo separatnih računalnikov, bi lahko nabavili stroje, ki bi bili takrat moderni.

4. Medsebojna pomoč programerjev bi bila olajšana, če bi bili vsi navezani na isti stroj.

5. Iskra je s firmo CDC že oktobra 1967 podpisala pogodbo o nabavi stroja CDC 3300, zanašajoč se na sklep Izvršnega sveta od 14. septembra. Preklic pogodbe bi bil neprijeten, kljub temu da v njej ni predviden penale.

1. Univerza, NIJS in ZZV bodo računalnik dovolj zasedli, tako da je utemeljena nabava lastnega stroja, posebno če upoštevamo pričakovani hitri porast v kasnejših letih. Finančno je taka investicija izvedljiva in tudi predvideni letni stroški so v okviru realnih možnosti.

2. Po drugi strani je predvidena zasedba skupnega stroja CDC 3300 tolikšna, da ne moremo računati na daljše sožitje. Že ob koncu leta 1970 bi bil stroj zaseden v več kot dveh izmenah in bi se ob konicah pojavljale težave. Tako bi torej ustanovili RRC samo za dve leti. To je odločno prekratka doba, če upoštevamo težavnost pripravljalnih pogajanj, ki trajajo sedaj že 11 mesecev, in če računamo na podobne napore tudi pri razformiranju RRC. Prišteti je treba še dodatno delo, ki bi ga imeli programerji ob morebitnem prehodu na drugačne tipe strojev.

Pripomniti je treba, da bi se življenje RRC dalo podaljšati z uvedbo tako imenovanega *multiprogramiranja*, s čimer bi se povečala zmogljivost računalnika. Ob primernem kombiniranju programov, po enega poslovnega in enega matematičnega, bi namreč stroj tedaj lahko hkrati obdeloval po dve nalogi. Toda v ta namen bi bila potrebna dodatna investicija kakih 200.000 dolarjev. Čez nekaj let, ko bodo na razpolago spet boljši in cenejši računalniki, bo takšno investicijo težko opravičiti.

3. Primerne organizacijske oblike za RRC še ni uspelo najti. Dosedanji predlogi pravnikov niso zadovoljili nobenega izmed partnerjev. Poslovno združenje, ki bi bilo morda zadovoljiva rešitev, pa ne prihaja v poštev, ker republiškim upravnim organom zakon ne dovoli, da bi bili člani takšnega združenja.

4. Upravljanje RRC bi bilo bolj zamotano in tudi dražje kot upravljanje internega računskega centra po vzoru tega, kar imata sedaj IMF in NIJS.

5. Povezava treh partnerjev z bistveno različnimi interesi in potrebami lahko pripelje do težav, tudi če obstajajo najboljši odnosi in najboljša volja. Da ta bojazen ni čisto brez podlage, lahko sklepamo iz dolgosti dosedanjih pogajanj. Le redki računski centri v svetu so osnovani na tako heterogeni osnovi.

6. Dokončen dogovor o ustanovitvi RRC ni mogoč, preden niso rešeni vsi osnovni problemi takšne kooperacije. Pogajanja o tem lahko še dolgo trajajo in še nadalje zavlečejo nabavo računalnika — na škodo vseh zainteresiranih.

7. Za stroj IBM 360/44 bi bil prostor na razpolago bodisi v stavbi IMF, ki se zida, ali na fakulteti za elektrotehniko, kjer bi bile potrebne le manjše adaptacije. Za CDC 3300 pa bi bilo verjetno treba posebej zgraditi paviljon.

8. Za univerzo bi bil stroj IBM 360/44 ugodnejši, ker kupuje Matematični institut v Beogradu enak stroj, tako da bi bila ne le olajšana izmenjava izkušenj in programov, ampak tudi omogočena medsebojna pomoč v primerih izpadov ali občasnega kopičenja nalog. Pri CDC 3300, ki bo za sedaj edini ali kvečjemu eden izmed dveh strojev te firme v Jugoslaviji, ne bo takih možnosti.

V zgornjem spisku niso upoštevani navidezni argumenti, ki so v resnici le nekakšna gesla. Mednje spada krilatica, češ, univerza »brez dvoma« zasluži, da bi imela svoj matematični stroj za slabih 700 milijonov, če znašajo investicije SRS v druge računalnike že 8 milijard. Na drugi strani imamo aprioristično trditev, da je »brez dvoma« bolje nabaviti en večji stroj kot dva manjša. Da to

ni tako brez dvoma, je bilo že prej pojasnjeno. Slišimo tudi, da je skupen stroj potreben zato, da bo univerza bolj sodelovala z industrijo. Skupna posest stroja ali česar koli in tudi organiziranje skupnega RRC namreč samo po sebi še ni nobeno sodelovanje.

Razpravljanje o drobnih tehničnih prednostih, ki jih ima vsak izmed obeh računalnikov, ne more doprinesti k rešitvi dileme, ker ne vpliva na splošno sodbo, da sta oba stroja odlična in da sta v predlagani konfiguraciji za matematično tehnične potrebe enakovredna. Podobno je s *prevajalniki* (compilers) simboličnih jezikov ter z *vodilnimi programi* (operating systems — to so programi, ki vodijo delo računalnika), pri katerih najdemo na vsaki strani nekaj prednosti, ki pa se med seboj približno odtehtajo.

Trditve, da ima ena ali druga firma boljšo programsko biblioteko za matematične račune, ni mogoče na hitro preveriti, ampak bi preizkušnja zahtevala več mesecev dela na obeh strojih. Dalje slišimo, da ima IBM cenejši servis ter da je njegov stroj zaradi sodobnejše tehnologije bolj kompakten in rabi zato manj prostora, manj električne energije in manj hlajenja. Vse to je sicer res, razlika pa se pri celotnih stroških obratovanja ne pozna dosti.

Med zgoraj naštetimi argumenti je nekaj novih, ki izvirajo iz prej nepoznatih podatkov in ki so občutno spremenili dosedanje sliko o problemu. Nujno je zato treba te argumente preveriti in pretehtati ter na tej osnovi presoditi, ali je ideja Republiškega računskega centra sploh še smiselna. Ne glede na že sprejete sklepe bi morali vsi prizadeti na novo preučiti vse možnosti in koordinirati potrebe sorodnih interesentov.

V primeru, da ne bi prišlo do ustanovitve tega centra, naj bi univerza in pridružene ustanove nabavile računalnik IBM 360/44, kot je bilo prvotno planirano. Za Iskro bi bilo verjetno ugodneje, da bi v takem primeru preklicala naročilo stroja CDC 3300 in namesto tega obdržala CDC 2100, ki ga je sicer po dobavi stroja 3300 nameravala prodati ali vrniti.

S finančnega vidika je taki rešitvi komaj mogoče ugovarjati, ker bi bila skupna investicija v stroja IBM in CDC 2100 (po predračunih IMF in Iskre, z upoštevanjem dejanskega stanja glede carine in raznih olajšav), samo za 25 % višja kot v stroj CDC 3300. Ko bosta oba stroja primerno zasedena, pa bo korist malodane podvojena. Ker pri večini poslovnega dela zmogljivost stroja CDC 2100 praktično ne zaostaja za 3300, se dajo sedanje potrebe organov republiške uprave (razen RSNZ) zadovoljiti tudi na tem stroju.

LITERATURA

Periodične publikacije

Praksa, bilten elektronske obrade podataka. Prej Bilten Koordinacionog odbora korisnika mašina za obradu podataka (Beograd). Mesečnik.

Elektronische Rechenanlagen (München). Mesečnik.

Computer Survey (London). Dvomeseknik, prinaša pregled o britanskih računskih strojih in računskih centrih.

Computers and Automation. Objavlja Monthly Computer Census, to je mesečni pregled o številu posameznih tipov ameriških računalnikov.

Computer Characteristics Quarterly (Adams Associates, Cambridge, Mass). Četrletna publikacija s tehničnimi podatki o posameznih tipih računalnikov.

Datamation (Los Angeles). Mesečnik.

Obzornik za matematiko in fiziko. Več člankov v 4. številki 11. letnika (1964).

Knjige

- F. Križanič: Elektronski aritmetični računalniki. Mladinska knjiga, 1960.
- G. A. Maley, E. J. Skiko: Modern Digital Computers. Prentice-Hall, 1964.
- W. H. Desmonde: Computers and their Uses. Prentice-Hall, 1964.
- H. Sackman: Computers, System Science, and Evolving Society. J. Wiley & Sons, 1967.
- M. Klerer, G. A. Korn: Digital Computer User's Handbook, McGraw-Hill, New York, 1967.
- A Report of a Joint Working Group on Computers for Research. H. M. Stationery Office, London 1967.
- C. H. Davidson and E. C. Koenig: Computers. J. Wiley & Sons, New York 1967.

✓ O NAKUPU NOVEGA RAČUNALNIKA

M. ČOPIČ

Nuklearni inštitut »Jožef Stefan«

Ob priliki javne razprave o nakupu novega računalnika smatrajo sodelavci Nuklearnega inštituta »Jožef Stefan« za potrebno, da navedejo razloge in motive, ki jih upoštevajo pri svojih odločitvah. Iz širšega elaborata so tu povzeti le važnejši odstavki, ki jim je dodano nekaj komentarja za boljše razumevanje.*

»Obstajata dve varianti, kako naj se zadosti potrebam univerze ter inštitutov po novem, zmogljivejšem računalniku:

I. varianta: Univerza v Ljubljani (to je Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko s fakultetami, Nuklearni inštitut »Jožef Stefan« in Zavod za zdravstveno varstvo) naj bi kupila stroj IBM 360/44 samo za svoje znanstveno tehnične ter znanstveno ekonomske probleme in za pouk.

II. varianta: trije partnerji, Univerza (Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko s fakultetami, NIJS, ZZV), ZP Iskra ter Izvršni svet (Zavod za statistiko, javna uprava, itd.) naj bi kupili za potrebe vseh treh skupen stroj CDC 3300. Ustanovljen naj bi bil operativen center, ki bi skrbel za nemoteno izvrševanje dela za vse tri ustanovitelje. Poleg tega naj bi imel vsak partner svoj programerski center za svoje potrebe.

Ta naš elaborat obravnava le tiste aspekte, ki so najpomembnejši za odločitev, katera varianta je boljša. To so:

- ocena ekonomičnosti uporabljanja strojev z oceno zasedenosti in
- tehnična primerjava zmogljivosti obeh strojev.

Elaborat ne obravnava vrste problemov, ki nastopajo pri eni ali drugi varianti, kot so na primer:

- pravni problemi,
- problemi v zvezi z enakopravnostjo partnerjev,
- težave pri sodelovanju partnerjev z različnimi interesi,
- težave z razdelitvijo delovnih področij med partnerji,
- kadrovske težave pri ustanovitvi računskih centrov,
- problem servisa,
- vpliv odločitve za samostojen ali skupen center za odnos Univerza — okolica,
- čas, ki bo potekel do popolne izrabe stroja, v primerjavi s časom, ko stroj zastari,
- itd.

* Citirani odstavki so vzeti iz elaborata M. Čopič, M. Mihailović in C. Trampuž »Ekonomska ocena poslovanja in primerjava tehničnih značilnosti IBM 360/44 in CDC 3300«, april 1968.

Povzetek važnejših ugotovitev

Celotna investicija, ki jo mora nositi univerzitetni partner za stroj IBM 360/44 oz. CDC 3300 znaša 7393 oz. 3603 tisoč din.

Letni stroški, ki jih mora nositi univerzitetni partner za stroj IBM 360/44 oz. CDC 3300, znašajo 2656 oz. 1327 tisoč din.

Univerzitetni partner si zagotovi v primeru skupnega stroja okoli 2000 delovnih ur letno, ki so zaradi večje hitrosti stroja CDC 3300 bolj učinkovite kot pri stroju IBM 360/44. Po naših ocenah to število ur zadostuje za potrebe univerzitetnega partnerja v naslednjih 4—5 letih.

Glede na sedanje potrebe sta po tehničnih značilnostih oba stroja skoraj enakovredna, IBM 360/44 ima prednost zaradi daljše besede, CDC 3300 pa zaradi hitrejših perifernih enot.

Glede operativnega sistema je CDC 3300 zaradi tako imenovane tehnike background-foreground boljši. Ima tudi večje možnosti razširitve (MASTER).

Organizacijo dela na skupnem stroju je možno izvesti tako, da se računi za vse partnerje opravljajo sproti.

Težnja Nuklearnega inštituta »Jožef Stefan«, da si zagotovi možnost dela na čim bolj sodobnem stroju pri kolikor mogoče nizkih stroških, predvsem investicijskih, nas nujno vodi v iskanje širokega sodelovanja, ki bi omogočilo manjše investicije vsakega partnerja in boljšo izkoriščenost stroja. Gledano samo s finančne strani je II. varianta gotovo ugodnejša, saj je za univerzitetnega partnerja polovico cenejša in tudi letne obveznosti so za polovico manjše.

»Sredstva, ki jih mora priskrbeti NIJS sam letno za vzdrževanje svojega dela stroja, znašajo:

IBM 360/44	CDC 3300	CDC 3300 (razširjena konfiguracija)
885	442	528

Za NIJS je ugodnejša varianta s skupnim strojem, ki zahteva le dvakratno povečanje stroškov za delo na stroju (v primerjavi z dosedanjim povprečjem). Štirikratno povečanje stroškov, ki bi jih morali kriti v primeru nakupa stroja IBM samo za univerzo, bi bilo za NIJS najbrž več, kot lahko prenese pri predvidenem obsegu dela in financiranja.

Pri odločitvi za I. ali II. varianto pa igrata poleg finančnih obveznosti zelo vlogo tudi primerjava sposobnosti enega in drugega stroja ter ocena zasedenosti stroja v eni ali drugi kombinaciji partnerjev. Sedaj uporabljamo na Univerzi že pet let računalnik ZUSE Z-23 in lahko naše ocene naslonimo na izkušnje, pridobljene na njem.

Zasedenost stroja

»a) Za znanstveno tehnične probleme je bilo na računskem stroju ZUSE Z-23 v zadnjem letu porabljenih približno 3000 ur (NIJS in IMFM). Z upoštevanjem 1000-krat večje hitrosti računskih operacij in od 30 do 200-krat večje hitrosti vhodno-izhodnih enot novega stroja v primerjavi z ZUSE Z-23 ter potrebnega časa za prevajanje in testiranje programov cenimo, da je novi stroj za znanstvene probleme približno 50-krat hitrejši od ZUSE Z-23. Za današnji obseg dela bi torej porabili na novem stroju 60 ur. Z uporabo simboličnih jezikov se sposobnost profesionalnih programerjev poveča za faktor 5 do 10, poleg tega pa je omogočeno programiranje širšemu krogu strokov-

njakov. Na teh osnovah ocenjujemo, da je univerzitetni partner sposoben zasesti stroj z lastnimi programi za približno 800 ur v drugem letu obratovanja. To pomeni, da se bo učinkoviti obseg dela lahko povečal za 12-krat.

b) Po dosedanjih ocenah je za potrebe pouka predvidenih na novem stroju 250—300 ur letno. Do sedaj je bilo porabljenih 600 ur letno za ZUSE Z-23.

c) Če upoštevamo, da je za znanstvene probleme pri povprečno 50-kratni večji hitrosti novega stroja predvidenih 230—300 ur letno in za potrebe pouka (zaradi drobnejših problemov samo pri 10-krat večji hitrosti stroja) 250—300 ur letno, dobimo oceno, da bo novi stroj po prvem letu obratovanja zaseden 480—600 ur letno.«

Pri predpostavki, da se bo obseg dela za znanstvene probleme podvojil vsaki dve leti, sledi zaključek, da bodo vsi trije univerzitetni partnerji porabili letno 2000 ur na novem stroju šele po 4 do 5 letih. To pa je doba, ko bo moral biti računalnik že amortiziran in ko bomo morali misliti na nabavo modernejšega, sposobnejšega in cenejšega računalnika.

Oceno zasedenosti skupnega računalnika z republiškim Izvršnim svetom in ZP Iskra je veliko težje dobiti.

»Načrt delovnega procesa v skupnem operativnem centru doslej še ni bil narejen. Za podrobno načrtovanje namreč manjkajo podatki o tipu in obsegu predvidenega dela posameznih partnerjev in je zato nemogoče oceniti zasedenost posameznih enot v predlaganih konfiguracijah enega ali drugega stroja.«

Zato je težko oceniti, kdaj bo skupen stroj tako zaseden, da bo potrebno delati v dveh ali celo treh izmenah. Vendar smatramo na osnovi naših izkušenj, splošnega pomanjkanja izvežbanih programerjev in potrebnega časa za uvajanje novih poslovnih metod z uporabo sodobnega računalnika, da tudi ostala dva partnerja, IS in Iskra, ne bosta prej kot v 4 ali 5 letih zasedla več kot po 2000 ur letno na računalniku. Pri tem upoštevamo, da je stroj CDC 3300 že v sedaj predvideni konfiguraciji nekaj hitrejši in torej sposobnejši.

»(1) Centralna računska enota je pri CDC nekoliko hitrejša kot pri IBM, razmerje povprečnih računskih časov za matematične programe je 3,6 : 4,6.

(2) Spomin ima pri IBM 32-bitne besede, medtem ko so pri CDC le 24-bitne besede. To ima za posledico, da vsi podatki v plavajoči vejici pri CDC 3300 zavzamejo po dve besedi v spominu, kar učinkovito zmanjša hitri spomin. Zato bi bilo nujno, ako želimo brez predelav uporabljati večje tuje programe, da dokupimo še 32 tisoč besed spomina pri CDC.

(3) Predvidene periferne enote pri CDC so hitrejše kot pri IBM, pri čemer je razmerje hitrosti I/O od 1,6 do 4.

(4) Pri CDC je predvidena risalna enota.

(5) Pri CDC je predvidena enota za obdelavo komercialnih podatkov.«

V primeru hitrejšega naraščanja potreb vseh treh partnerjev lahko podvojimo sposobnost računalnika CDC z dodatno investicijo okoli 2,5 milijona N-din. Potrebne so naslednje dodatne enote: enota za multiprogramiranje, dodatni hitri spomin z 32 tisoč besedami in hitri vrstični tiskalec. Večja možnost razširitve CDC 3300 v primerjavi z IBM 360/44 ni pomembna samo za komercialne uporabnike stroja, temveč ima prednosti tudi za Univerzo in raziskovalne organizacije. Ne samo da je v razširjeni konfiguraciji računalnik CDC 3300 znatno hitrejši, temveč je bolj pomembno dejstvo, da je tudi ekonomičnejši, ker dela pod nadzorom operativnega programa, ki skrbi za optimalno izkoriščanje vseh komponent računskega sistema. Obdeluje istočasno do osem programov ter pri tem dovoljuje še istočasen dostop z večih delovnih mest. Tako je mogoč konverzijski način komuniciranja uporabnikov z računalnikom.

Zaradi naših omejenih izkušenj, ki smo jih dobili na primitivnih računalnikih prve generacije, si le težko predstavljamo sposobnosti sodobnih računalnikov, ki ne opravljajo samo računskih operacij in čitajo ter pišejo podatke, pri čemer štetejo čas v mikrosekundah, temveč opravljajo sami tudi velik delež organizacije dela, saj je človek prepočasen, da bi jih upravljal. Temu primerno mora biti urejena tudi organizacija sodobnega računskega centra, če hočemo, da bo stroj racionalno izkoriščen. Smatramo, da je možna in smotrna organizacija računskega centra, ki zadosti vsem potrebam tudi tako različnih partnerjev, kot so ZP Iskra, Statistični zavod in Univerza.

✓ NEELASTIČNO SIPANJE POČASNIH NEVTRONOV

V. DIMIC

Nuklearni inštitut »Jožef Stefan«

1. UVOD

Številne raziskave v zadnjih 15 letih so pokazale, da so nevtroni z energijo manjšo od 1 eV, zelo primerni za raziskave dinamičnih in strukturnih lastnosti trdnih snovi, tekočin in plinov. Nevtroni pri interakciji z atomi ali molekulami namreč pridobijo ali izgubijo na energiji. Meritve neelastičnega sipanja nevtronov nam torej dajo podatke o nihanju mreže, molekularnih ter magnetnih energijskih nivojih, difuziji in še o drugih podobnih lastnostih, pri katerih je gibanje važen pojav. Omenjene pojave lahko raziskujemo z nevtroni zato, ker imajo ti delci naslednje lastnosti:

a) Nevtroni, ki se gibljejo s hitrostjo v ozir. energijo E , imajo de Broglijevo valovno dolžino

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

kjer je h Planckova konstanta, m pa masa nevtrona.

Termični nevtroni, ki izhajajo iz reaktorja, imajo energijo v območju od 0,001 do 0,2 eV. Energijo teh nevtronov lahko primerjamo z energijo molekul v trdnih snoveh in tekočinah. Tem energijam pripadajo valovne dolžine v območju od 10 do 0,5 Å, kar so ravno vrednosti poprečnih razdalj med posameznimi delci v snovi. Takšnih idealnih lastnosti seveda nima elektromagnetno valovanje, ki ima lahko primerno valovno dolžino, a je pri tem energija daleč prevelika za energijske meritve s primerno ločljivostjo in obratno: lahko izberemo ugodno energijo, pa je zanjo predolga valovna dolžina.

b) Podobno kot drugi elementarni delci imajo tudi nevtroni magnetni moment, ki je povezan z nevtronskim spinom. Zato pride do interakcije med nevtronskim magnetnim momentom in magnetnim momentom atomov v snovi. Ta interakcija privede do magnetnega sipanja nevtronov, s katerim se pa v tem pregledu ne bomo ukvarjali.

Primerna valovna dolžina in energija nevtronov ter njihov magnetni moment so torej tiste lastnosti teh delcev, zaradi katerih jih zelo koristno uporabljamo pri različnih raziskavah.

2. NEELASTIČNO SIPANJE NEVTRONOV

Fluktuacijske pojave v trdnih snoveh in tekočinah označimo s korelacijskim območjem R_0 (velikostnega reda 10^{-8} cm) in korelacijskim časom τ_0 (velikostnega reda 10^{-13} sek). Časovne spremembe fluktuacijskih pojavov vplivajo na energijo in kotno porazdelitev sipanih nevtronov, če le-ti ostanejo v ko-

relacijskem območju vsaj toliko časa, kot je čas τ_0 . Počasni nevtroni imajo hitrosti, ki so enakega velikostnega reda kot so hitrosti atomov in zato ostanejo zadosti dolgo časa v interakcijskem območju. Tako »vidijo« spremembe, ki se zgodijo. Hitri nevtroni podrobnosti sprememb ne morejo opaziti zaradi prevelikih hitrosti. Pri raziskavah s sipanjem nevtronov moramo torej izbrati počasne nevtrone, tj. nevtrone z valovno dolžino od približno 1 do 10 Å. S temi nevtroni lahko opazujemo različna gibanja v trdnih snoveh in tekočinah na časovni skali, ki je krajša v primerjavi s časovnimi skalami, dosegljivimi z drugimi metodami v fiziki trdnih snovi. Poglejmo si sedaj bolj podrobno, kakšna je ta časovna skala in opazovalno območje nevtronov.

Pri neelastičnem sipanju se nevtronu spremenita gibalna količina in energija. Sprememba gibalne količine je enaka

$$\Delta p = \hbar |Q| \quad (1)$$

kjer je Q

$$|Q| = |k - k_0| \quad (2)$$

k in k_0 sta valovna vektorja sipanega in vpadnega nevtrona z vrednostjo $k = 2\pi/\lambda$ in $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

S pomočjo nedoločnostnega principa sedaj izračunamo območje Δx , v katerem nevtron lahko opazi spremembo gibanja atoma ali molekule

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1}{|Q|} \quad (3)$$

Iz enačbe (3) vidimo, da je območje interakcije nevtrona ali opazovalno območje obratno sorazmerno vrednosti vektorja Q . Če k_0 primerno izberemo, tedaj Q pri eksperimentu spreminjamo tako, da ima opazovalno območje vrednost $\Delta x \sim 10^{-8}$ cm (od $3 \cdot 10^{-8}$ do $3 \cdot 10^{-9}$ cm pri običajnih eksperimentih).

Pri sipanju je sprememba energije nevtrona enaka

$$\Delta E = E_0 - E = \hbar\omega \quad (4)$$

Iz nedoločnostnega principa spet dobimo izraz za čas t , ki je potreben, da nevtron opazi spremembe v gibanju delca

$$t \geq \frac{1}{\omega} \quad (5)$$

Energijske spremembe, ki jih lahko merimo pri sipanju nevtronov, so takšne, da ima ω vrednosti od 10^{13} (sek) $^{-1}$ do 10^{11} (sek) $^{-1}$, torej opazovalni čas t leži v mejah $10^{-13} < t < 10^{-11}$ sek.

Z merjenjem energijskih porazdelitev sipanih nevtronov dobimo sliko poprečnega gibanja delca. V tem pogledu lahko te eksperimente primerjamo z opazovanji, ki jih napravimo z mikroskopom. Pri sipanju nevtronov opazujemo območje z linearnimi dimenzijami reda velikosti Q^{-1} , kar je analogno opazovanemu polju v mikroskopu. Ko opazujemo energijske spremembe, imamo opravka s časi reda velikosti ω^{-1} , kar je spet analogno časom, ki jih »preživijo« sipani delci znotraj polja mikroskopa.

Za primer si oglejmo še razmere pri tekočinah. Iz enostavne fluktuacijske teorije za tekočine vemo, da v času t delec preide razdaljo Δx , ki je enaka: $(\Delta x)^2 = 2Dt$, kjer je D difuzijski koeficient molekule v tekočini. Iz enačbe (3) dobimo opazovalni čas nevtronov t , ki je potreben za to, da občutijo gibanje delca na razdalji Δx . Ta čas je

$$t \geq \frac{1}{2DQ^2}$$

Če je $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sek}$ in $0,1 < Q^2 < 10 \text{ \AA}^{-2}$, potem leži t v mejah $5 \cdot 10^{-11} > t > 5 \cdot 10^{-13} \text{ sek}$. Nevtroni tako vidijo difuzijsko gibanje in zaradi tega se ostra črta nevtronov, ki padejo na vzorec tekočine, razširi. Govorimo o *kvazi-elastičnem* sipanju nevtronov. Pri molekularnih tekočinah (in tudi trdnih snoveh) razdelimo namreč energijsko porazdelitev sipanih nevtronov na 2 dela: na neelastični in kvazi-elastični del. Neelastično sipanje nevtronov ustreza krajšim časom. Ti časi so enakega velikostnega reda, kot so periode vezanih nihanj atomov ali molekul (ali še krajši). Kvazi-elastično sipanje nevtronov, ki nam da podatke o difuziji protonov in molekul, pa ustreza daljšim časom (10^{-12} do 10^{-11} sek) oziroma manjšim energijskim spremembam. Zaradi teh majhnih energijskih sprememb se pri sipanju vpadla monokromatska črta nevtronov razširi — tako dobimo kvazi-elastični vrh sipanih nevtronov, ki so ga najprej opazili na vodi⁽¹⁾. To sipanje ni značilno le za tekočine, temveč se pojavi tudi pri trdnih snoveh, in sicer takrat, ko proton »difundira« iz ene mirovne lege v drugo.

3. OSNOVE TEORIJE NEELASTIČNEGA SIPANJA NEVTRONOV

Že leta 1944 je Weinstock⁽²⁾ izpeljal teoretične osnove za sipanje nevtronov in nekaj let kasneje je Cassels⁽³⁾ opozoril na potencialne možnosti nevtronov pri raziskavah gibanj mreže. Do poskusov pa ni prišlo zaradi preslabotnih izvorov nevtronov. Leta 1954 je Van Hove⁽⁴⁾ pokazal, da obstaja velika podobnost med difrakcijo žarkov X in sipanjem počasnih nevtronov. Pri difrakciji žarkov X opazujemo trenuten položaj atoma in tako izmerimo časovno neodvisno korelacijsko funkcijo $g(r)$, saj je intenziteta sipanih žarkov enostavno prostorska Fourierova transformacija te funkcije. Iz intenzitete sipanih nevtronov pa lahko določimo časovno korelacijsko funkcijo v trdnih snoveh in tekočinah, ker je sipanje določeno s štiridimenzionalno Fourierovo transformacijo te korelacijske funkcije v prostoru in času. Spremenljivki sta sprememba gibalne količine nevtrona $\hbar Q$ in sprememba energije nevtrona $\hbar \omega$. Sipanje torej popolnoma popiše sta spremenljivki Q in ω ter je po Van Hovu diferencialni sipalni nevtronski presek enak

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega dE} = \frac{k}{k_0} S(Q, \omega) \quad (6)$$

kjer je $d\Omega$ enotni prostorski kot in dE enota spremembe energije.

$S(Q, \omega)$ se imenuje sipalna funkcija. Vsebuje vse lastnosti vzorca, ki vplivajo na sipanje. Če sipalni sistem obravnavamo klasično, potem lahko rečemo, da ji sipalna funkcija $S(Q, \omega)$ le generalizacija strukturnega faktorja, ki je poznan iz teorije elastičnega sipanja. Pri elastičnem sipanju je strukturni faktor enak

$$|F(Q)|^2 = N \{ (\langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2) + \langle b \rangle^2 [1 + \int g(r) \exp(iQr) dr] \} \quad (7)$$

kjer je b sipalna amplituda sipalnega delca, N število delcev in $g(r)$ časovno neodvisna parna korelacijska funkcija. Predstavlja verjetnost, da najdemo delec znotraj enotnega volumna na mestu r , če je bil neki delec v istem času na mestu $r = 0$.

Pri neelastičnem sipanju doživi nevtron spremembo energije, spremni se torej kotna frekvenca ω sipanega nevtronskega vala, saj je bil nevtron v interakciji s sipalnim sistemom neki določen čas in je zato nanj vplivala sprememba položaja delca.

Za strukturni faktor dobimo izraz (po analogiji z enačbo 7)

$$|F(Q, \omega)|^2 = N \{ (\langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2) \int G_s(r, t) \exp[i(Qr - \omega t)] dr dt + \langle b \rangle^2 \int G(r, t) \exp[iQr - \omega t] dr dt \} \quad (8)$$

Enačba za $F(Q, \omega)$ je izraz, ki ga je podal Van Hove za sipalno funkcijo sistema.

Po analogiji s funkcijo $g(r)$ se imenuje funkcija $G(r, t)$ časovno odvisna dvodelčna korelacijska funkcija. Za klasičen sistem predstavlja verjetnost, da najdemo delec v enoti volumna na mestu r in v času t , če je v času $t = 0$ na mestu $r = 0$ poljuben delec. G_s je »avto« korelacijska funkcija, ki predstavlja verjetnost, da najdemo znotraj enotnega volumna na mestu r in v času t isti delec, kot je bil na mestu $r = 0$ in v času $t = 0$.

Ker poznamo sedaj sipalno funkcijo $S(Q, \omega)$, lahko zapišemo tudi izraza za diferencialni presek

$$\frac{d^2 \sigma^{\text{koh}}}{d\Omega dE} = \frac{\langle b \rangle^2 N k}{2\pi \hbar k_0} \int G(r, t) \exp[i(Qr - \omega t)] dr dt \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \sigma^{\text{necoh}}}{d\Omega dE} = \frac{(\langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2) N k}{2\pi \hbar k_0} \int G_s(r, t) \exp[i(Qr - \omega t)] dr dt \quad (10)$$

Diferencialni sipalni presek za sistem N -atomov smo tako razdelili v koherentno in nekoherentno sipanje. Člena $\langle b \rangle^2$ in $(\langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2)$ sta kvadrata koherentne in nekoherentne sipalne dolžine, saj so interferenčni efekti, zaradi katerih dobimo koherentni presek, odvisni le od poprečnih sipalnih dolžin jeder, poprečni kvadrat odmika od tega poprečja pa prispeva k nekoherentnemu sipanju. Velja namreč: $(b - \langle b \rangle)^2 = \langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2$. Ta deviacija nastopi zaradi neurejenih jedrskih spinov in zaradi prisotnosti izotopov v snovi.

Nekoherentno sipanje torej popiše »avto« korelacijska funkcija, koherentno sipanje pa dvodelčna korelacijska funkcija. Zato z eksperimenti, kjer imamo opravka z nekoherentnim sipalcem, dobivamo podatke o gibanju posameznih delcev, pri koherentnem sipalcu pa podatke o korelaciji med gibanji različnih delcev.

4. FIZIKALNI PROBLEMI

Koherentno in nekoherentno sipanje počasnih nevtronov nam torej da informacije o dinamičnih lastnostih trdnih snovi in tekočin. Te podatke dobimo z naslednjimi opazovanji:

4.1. Koherentno sipanje in fononska disperzijska relacija

Pri koherentnem sipanju opazimo vrsto diskretnih frekvenc pri določeni spremembi gibalne količine $\hbar\mathbf{Q}$. Iz teh meritev določimo disperzijsko relacijo normalnih nihanj kristalov.

Kristal, ki vsebuje N -atomov, lahko opišemo (v harmonični aproksimaciji) s sistemom $3N$ neodvisnih oscilatorjev in vsak oscilator ustreza le enemu načinu vibracij. Odmik jedra od ravnovesne lege opišemo z ravnim valom frekvence ν in valovnim vektorjem $\mathbf{q}$. Posamezne valove pa ustvarijo le valovni vektorji, ki so v enotni celici. Če je torej n število atomov v enotni celici, imamo $3n$ načinov vibracij za vsako vrednost valovnega vektorja $\mathbf{q}$. Vsaki vibraciji tako pripada karakteristična frekvenca ν_j in polarizacijski vektor $\xi_{j,k}$, ki nam pove smer in amplitudo gibanja k -tega atoma v celici. Povezavo med ν in $\mathbf{q}$ nam pa podaja disperzijska relacija: $\nu = \nu_j(\mathbf{q})$.

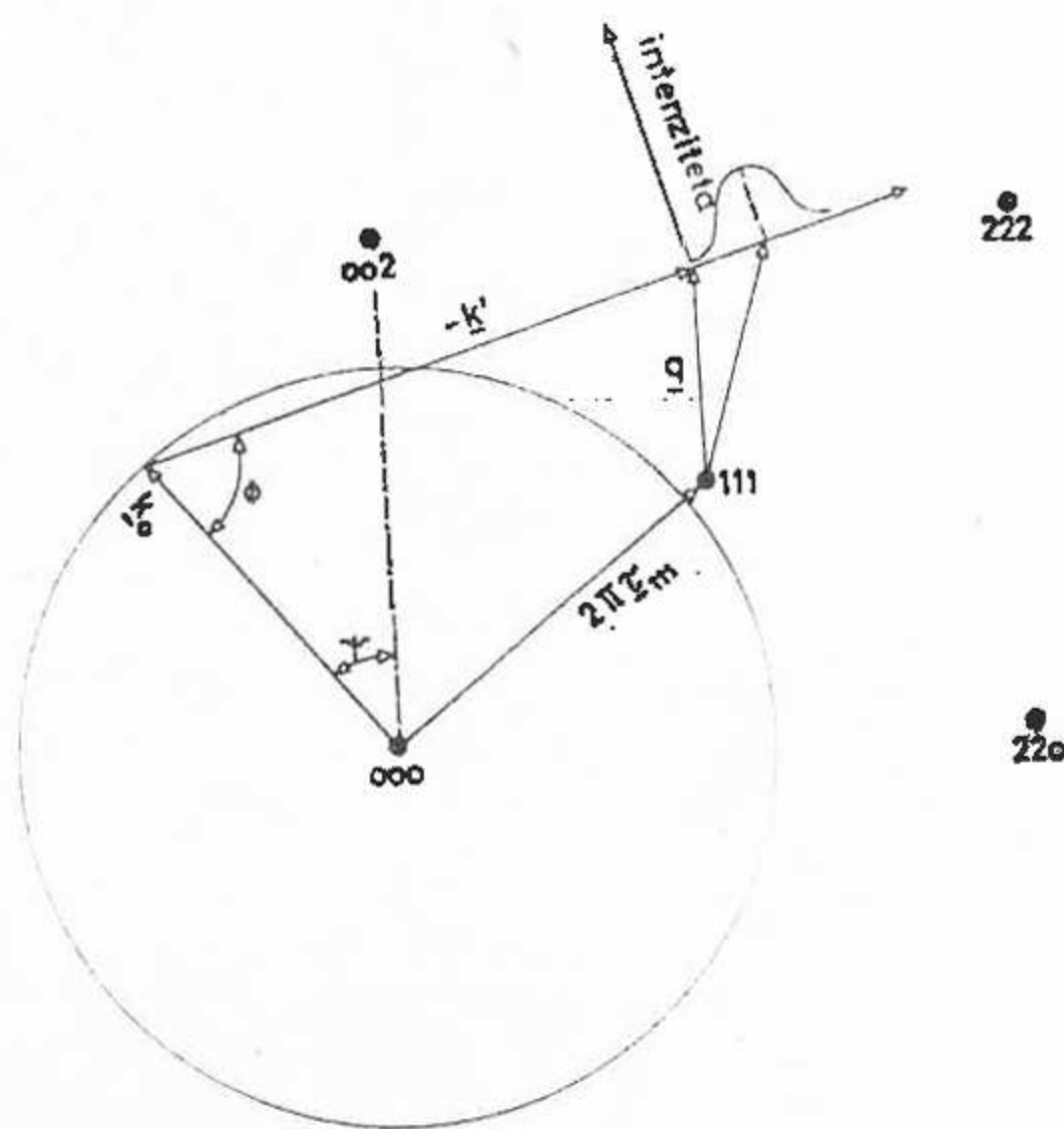
Placzek in Van Hove⁽⁵⁾ sta prva opozorila, da že enofononsko koherentno sipanje nevtronov, ko nevtron uniči ali ustvari oscilator z energijo $h\nu$, da podatke o disperzijski relaciji. Pri enofononskem koherentnem sipalnem procesu morata namreč biti izpolnjena pogoja o ohranitvi gibalne količine (zaradi interference sipalnih valov) in energije

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{k}_0 - \mathbf{k} = 2\pi\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q} \quad (11)$$

in

$$E_0 - E = \frac{\hbar}{2m} (k_0^2 - k^2) = \pm h\nu \quad (12)$$

kjer je $\boldsymbol{\tau}$ recipročni mrežni vektor (sl. 1). V primeru, ko imamo elastično sipanje,



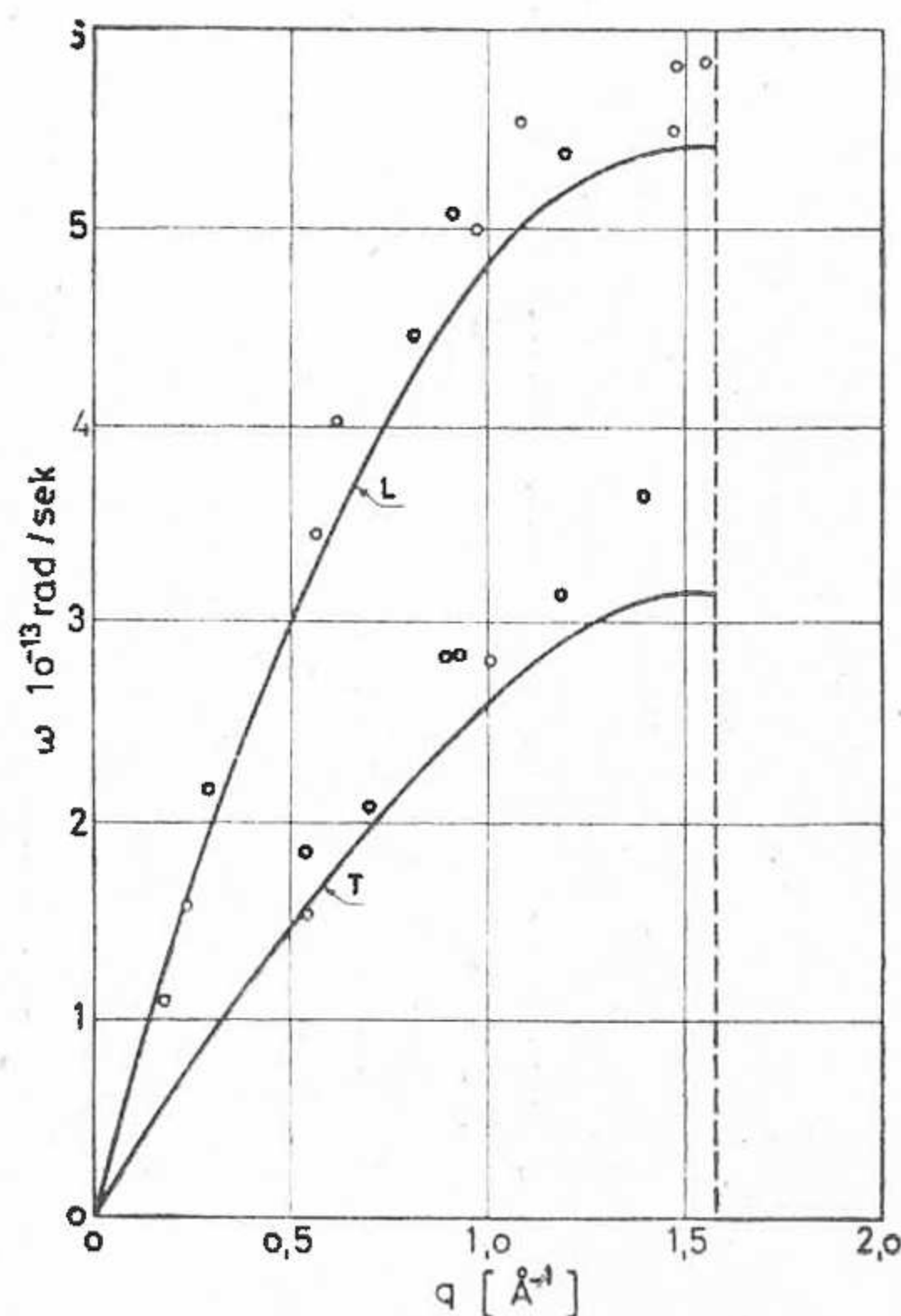
Sl. 1. Grafični prikaz zakona o ohranitvi gibalne količine

se enačba (11) reducira v $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k} = 2\pi\boldsymbol{\tau}$, ki predstavlja Braggov sipalni pogoj. Izraz $2\pi\hbar\boldsymbol{\tau}$ je gibalna količina, ki jo pri interakciji z nevtroni dobi kristal.

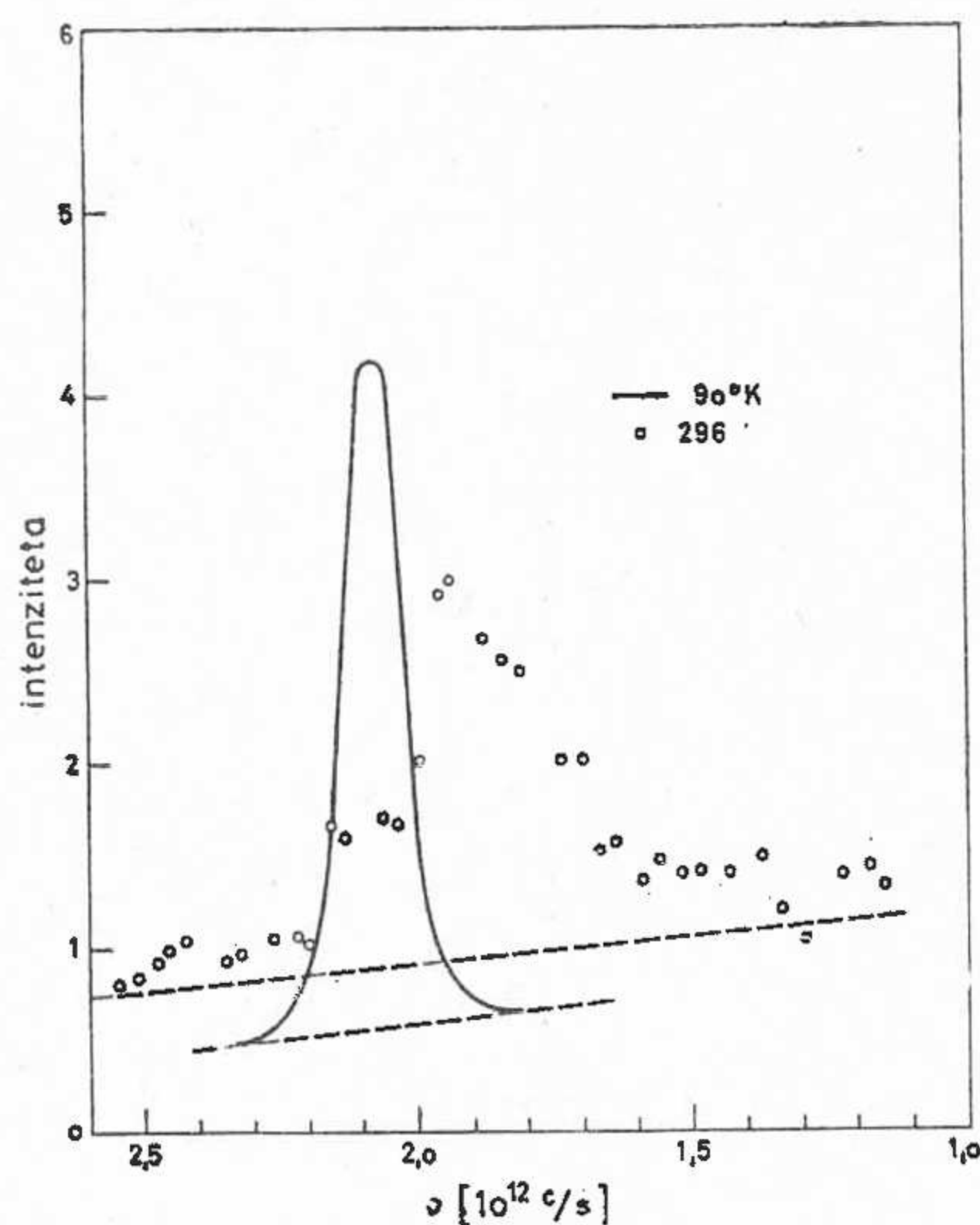
Prav enostavno lahko z eksperimentom določimo disperzijsko relacijo $\nu = \nu(\mathbf{q})$, in sicer z enačbama (11) in (12). Monoenergetski snop nevtronov naj pade na kristal! Če je koherentni sipalni presek kristala velik, potem se bo pojavil v porazdelitvi sipalnih nevtronov pod določenim kotom Φ izrazit vrh. Vrh se pojavi pri takih vrednostih za $|\mathbf{k}|$, ki je rešitev enačb (11) in (12). Iz

vrednosti za energijo E nevtronov na mestu središča vrha izračunamo energijo $h\nu$ fonona (enačba 12), iz znanega sipalnega kota Φ in orientacije kristala ψ (sl. 1) pa še valovni vektor fonona q (iz enačbe 11). S spreminjanjem vpadne energije E_0 ali sipalnega kota ali orientacije kristala dobimo še druge vrednosti za ν in q ter s tem disperzijsko relacijo. Slika 2 prikazuje disperzijsko relacijo za kristal aluminijskega v smeri (100)⁽⁶⁾.

Iz intenzitete nevtronskih vrhov določimo smer polarizacijskega vektorja $\xi_{j,k}$, ker je koherentni sipalni presek sorazmeren skalarnemu produktu Q in $\xi_{j,k}$ ⁽⁷⁾.



Sl. 2. Disperzijska relacija za aluminij



Sl. 3. Nevtronski vrh, izmerjen na natriju, ki se pojavi zaradi enofononske eksitacije

Nevtronski vrhovi, ki jih dobimo pri koherentnem sipanju, imajo določeno širino, ki je odvisna od temperature. To se lepo vidi na sliki 3. Ta širina se pojavi deloma zaradi ločljivosti instrumenta, deloma pa zaradi življenjskega časa τ eksitacije, ki jo nevtroni vzbude. Vzrok za končno življenjsko dobo eksitacij so namreč interakcije med posameznimi eksitacijami (med fononi ali pa med fononi in elektroni). Iz meritev širin posameznih vrhov v odvisnosti od temperature dobimo življenjske čase fononov. Pri interakciji fonon — fonon širina in frekvenčna premaknitev naraščata linearno s temperaturo^(8,9).

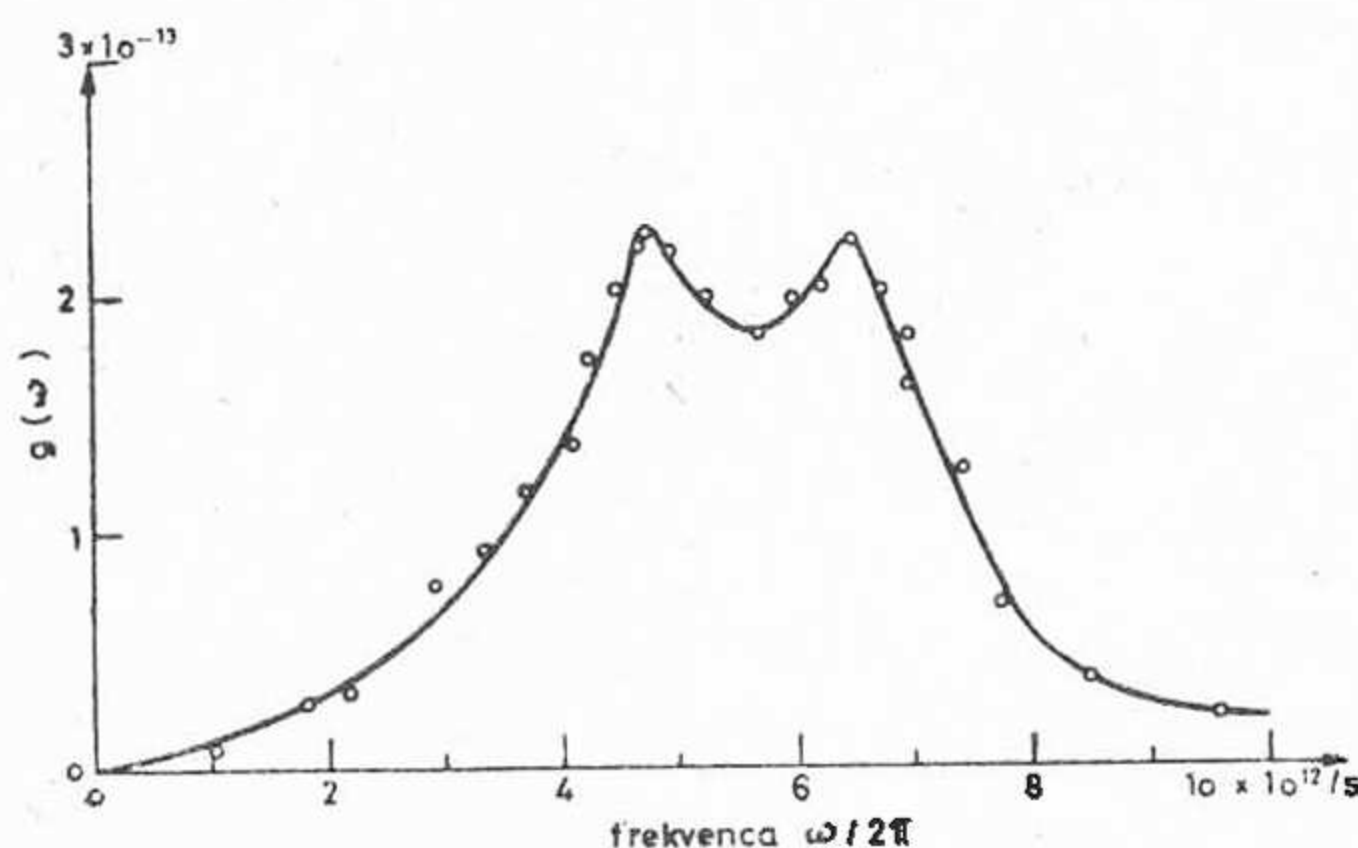
4.2. Nekoherentno sipanje in frekvenčna porazdelitev

Vodik in vanadij sta edina naravna elementa, ki imata velik nekoherentni sipalni presek. Energijska porazdelitev nekoherentno sipanih nevtronov zato odraža gibanje posameznih atomov, to se pravi, da je odvisna od porazdelitve frekvenc v vzorcu. Placzek in Van Hove⁽⁵⁾ sta pokazala, da je presek za enofononsko sipanje na kubičnem polikristalu, ki ima en atom na enotno celico, sorazmeren frekvenčni porazdelitvi $g(\omega)$

$$\frac{d^2 \sigma^{\text{necoh}}}{d\Omega d\omega} = [\langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2] \frac{k}{k_0} e^{-2W} \frac{\hbar Q^2}{4M} \left(\coth \frac{\hbar \omega}{2K_B T} \mp 1 \right) \frac{g(\omega)}{\omega} \quad (13)$$

kjer je M masa sipalnega delca in e^{-2W} Debye-Wallerjev faktor. Znak $\mp$ pomeni uničenje ali ustvarjanje fonona. Pri nekoherentnem sipanju je frekvenčna porazdelitev neodvisna od Q -ja, kar pomeni, da se energijska porazdelitev ne menja s spreminjanjem sipalnega kota. Pri nekoherentnem sipanju namreč velja le zakon o ohranitvi energije: $E_0 - E = \pm \hbar \nu$.

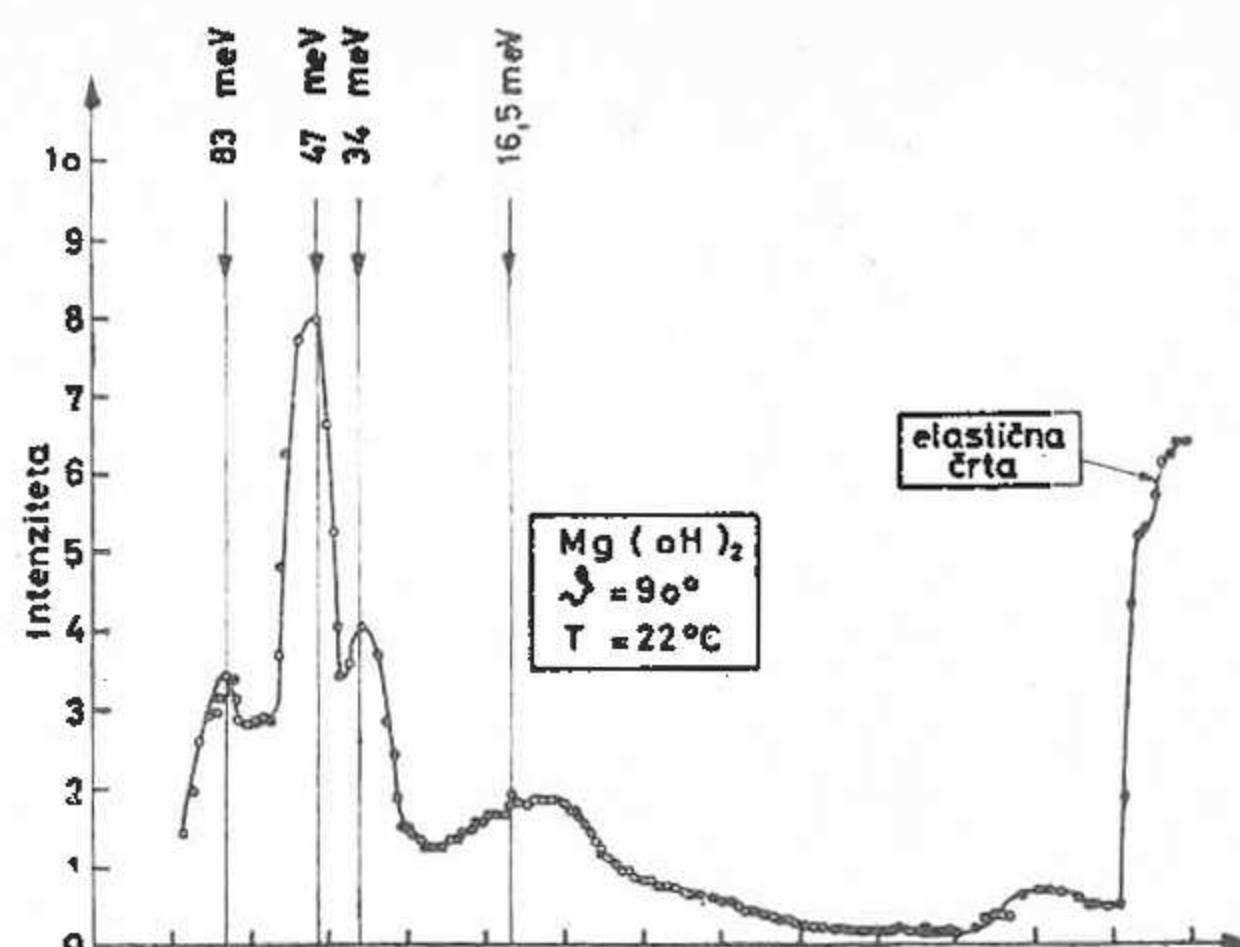
Slika 4 kaže intenziteto nekoherentno sipanih nevtronov na vanadiju⁽¹⁰⁾, ki predstavlja danes že standardni sipalec.



Sl. 4. Intenziteta neelastično in nekoherentno sipanih nevtronov na vanadiju

Za raziskave so najprimernejši molekularni kristali, ki vsebujejo vodik. Lep eksperimentalni rezultat vidimo na sliki 5, ki kaže sipalno intenziteto za $Mg(OH)_2$.

Podobno kot pri trdnih snoveh nam da tudi neelastično, nekoherentno sipanje nevtronov na tekočinah frekvenčno porazdelitev. Pri tekočinah seveda ne moremo reči za vsa gibanja, ki prispevajo k spektru, da so to frekvence v običajnem pomenu besede. V splošnem torej ne moremo interpretirati fre-

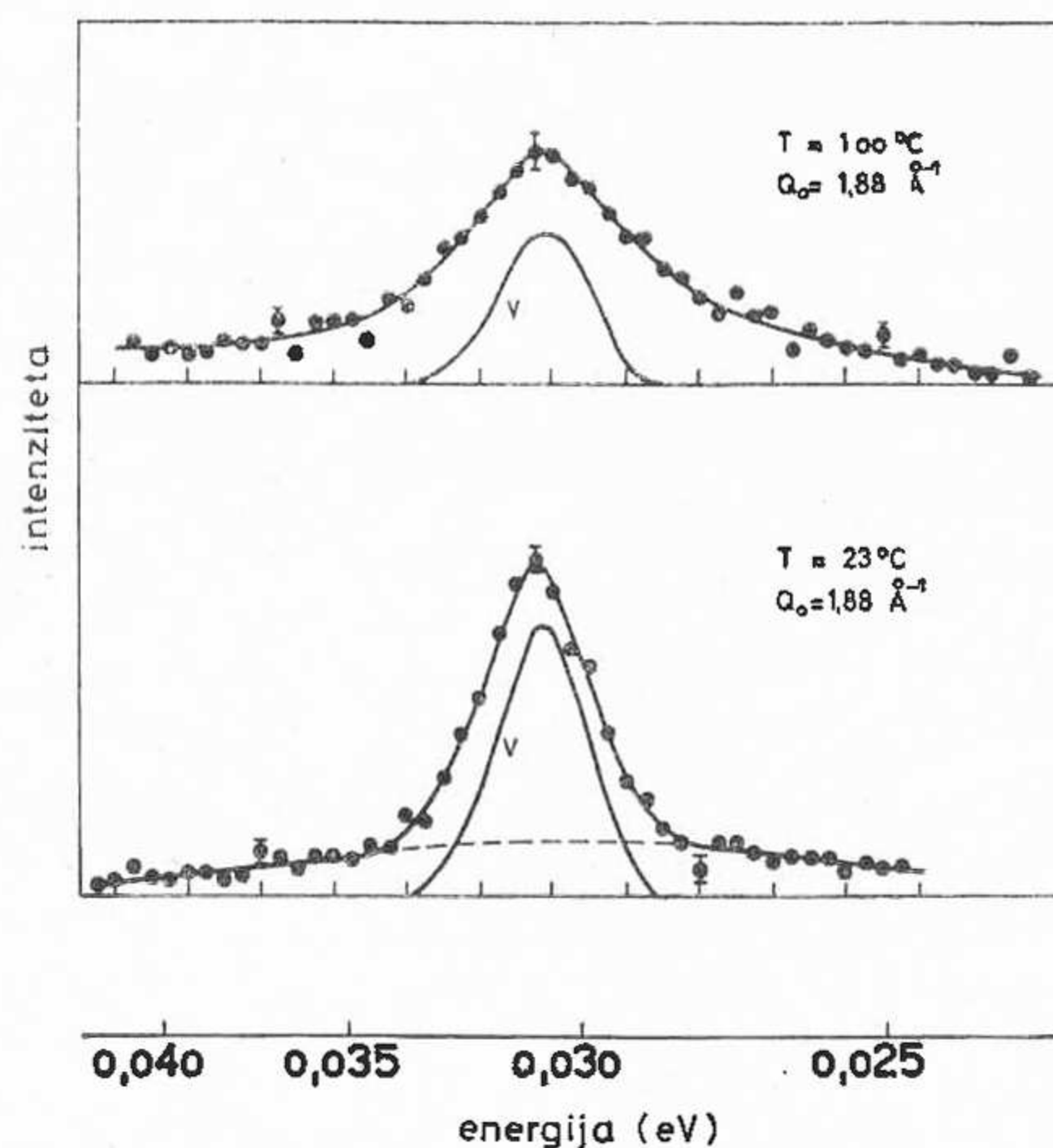


Sl. 5. Intenziteta sipanih nevtronov na $Mg(OH)_2$

kvenčne porazdelitve, ki jo izmerimo pri tekočinah, s pomočjo periodičnih gibanj, čeprav imamo nekaj eksperimentalnih dokazov za takšna gibanja. Larsson in Dahlborg⁽¹²⁾ sta namreč izmerila popolnoma enaki frekvenčni porazdelitvi za vodo pri $+2^\circ C$ in za led pri $-3^\circ C$.

4.3. Nekoherentno sipanje pri tekočinah

Za trdne snovi vemo, da obstajajo atomska gibanja v obliki vibracij okoli ravnotežne lege, ker lahko zanemarimo translacijska gibanja, če je temperatura snovi daleč stran od tališča. Pri tekočinah in trdnih snoveh s temperaturo blizu tališča se pojavi poleg vibracij še translatorno gibanje ali elementaren difuzijski proces. Z neelastičnim sipanjem nevtronov pa lahko opazujemo obe vrsti atomskih gibanj, saj smo videli, da se razteza opazovalni čas nevtronov od zelo kratkih časov (skoraj 0) do 10^{-11} sek. To je časovno območje, v katerem se pojavijo vibracije in difuzija. Tako je sipalni presek sestavljen iz 2 delov, kar



Sl. 6. Kvazi-elastična porazdelitev nevtronov sipanih na vodi. Krivulja, označena z V, predstavlja resolucijo instrumenta

smo že omenili v pogl. 2. Prvi del odgovarja daljšim časom in popiše elastični ali kvazi-elastični vrh, drugi del pa ustreza krajšim časom in popiše širok, neelastično sipani spekter.

Pri tekočinah nas zanima predvsem kvazi-elastični del, saj lahko iz razširitve elastične komponente sklepamo, kakšen efekt ima difuzija na sipanje nevtronov. Primer razširitve elastične črte vidimo na sliki 6, ki kaže kvazi-elastično porazdelitev nevtronov, sipanih na vodi.⁽¹³⁾

Z različnimi modeli so poskušali izračunati povezavo med širino črte pri polovični višini ΔE in faktorji, ki nastopajo pri difuziji. Oglejmo si dva limitna modela!

a) V primeru enostavne difuzije se molekule v tekočini neprestano translatorno gibljejo zaradi neprenehnih trkov s sosedi. V tem primeru je poprečni kvadrat premika v času t podan z enačbo

$$\overline{(r)^2} = 6 Dt \quad (14)$$

Iz te Einsteinove formulacije ni jasno, do kakšnih časov ta formula velja. Ali velja tudi do $t = 10^{-12}$ sek? To brez težav preverimo s sipanjem nevtronov. Če upoštevamo enačbo (14) in predpostavko, da je G_s v enačbi (10) rešitev navadne makroskopske difuzijske enačbe, dobimo za širino kvazi-elastične črte

$$\Delta E = 2 \hbar D Q^2 \quad (15)$$

V diagramu $(\Delta E/Q^2)$ dobimo v tem primeru premico. Meritve Brockhousa⁽¹³⁾, Larssona⁽¹⁴⁾ in drugih pa so pokazale, da je razširitev črte manjša, kot bi pričakovali, če bi veljala enačba (15), kar vidimo na sliki 7.⁽¹⁴⁾ Pri vodi je razširitev pri kotu 90° ($Q^2 = 5 \text{ \AA}^{-2}$) za pol manjša, kot predvideva enačba (15). Torej na časovni skali okoli 10^{-12} sek zvezni difuzijski model ne velja. Meritve pa kažejo, da se pri višjih temperaturah precej približamo temu modelu.

b) Gornje meritve so Brockhousa⁽¹³⁾ pripeljale do sklepa, da atom najprej niha s periodo $\sim 10^{-13}$ sek v relativno fiksnem položaju, preden prične difundirati. Singwi in Sjölander⁽¹⁵⁾ sta tako postavila na osnovi Brockhousove ideje nov model, ki domneva, da ima tekočina zelo podobne lastnosti, kot jih najdemo v trdnih snoveh. Domnevala sta namreč, da atom ali molekula difundirata le čas τ_1 , nato pa delec niha τ_0 sek. ($\tau_0 = \sim 10^{-12}$ sek). To je difuzijski model s skoki: atom ali molekula najprej nihata τ_0 sek, nato skočita v drugo ravnotežno lego itd. Če delec skoraj ves čas samo niha, je v tem primeru izpolnjen pogoj $\tau_1 \ll \tau_0$. Izraz za širino črte je tako podan z naslednjo enačbo¹⁵

$$\Delta E = \frac{2 \hbar}{\tau_0} \left(1 - \frac{e^{-2W}}{1 + Q^2 D \tau_0} \right) \quad (16)$$

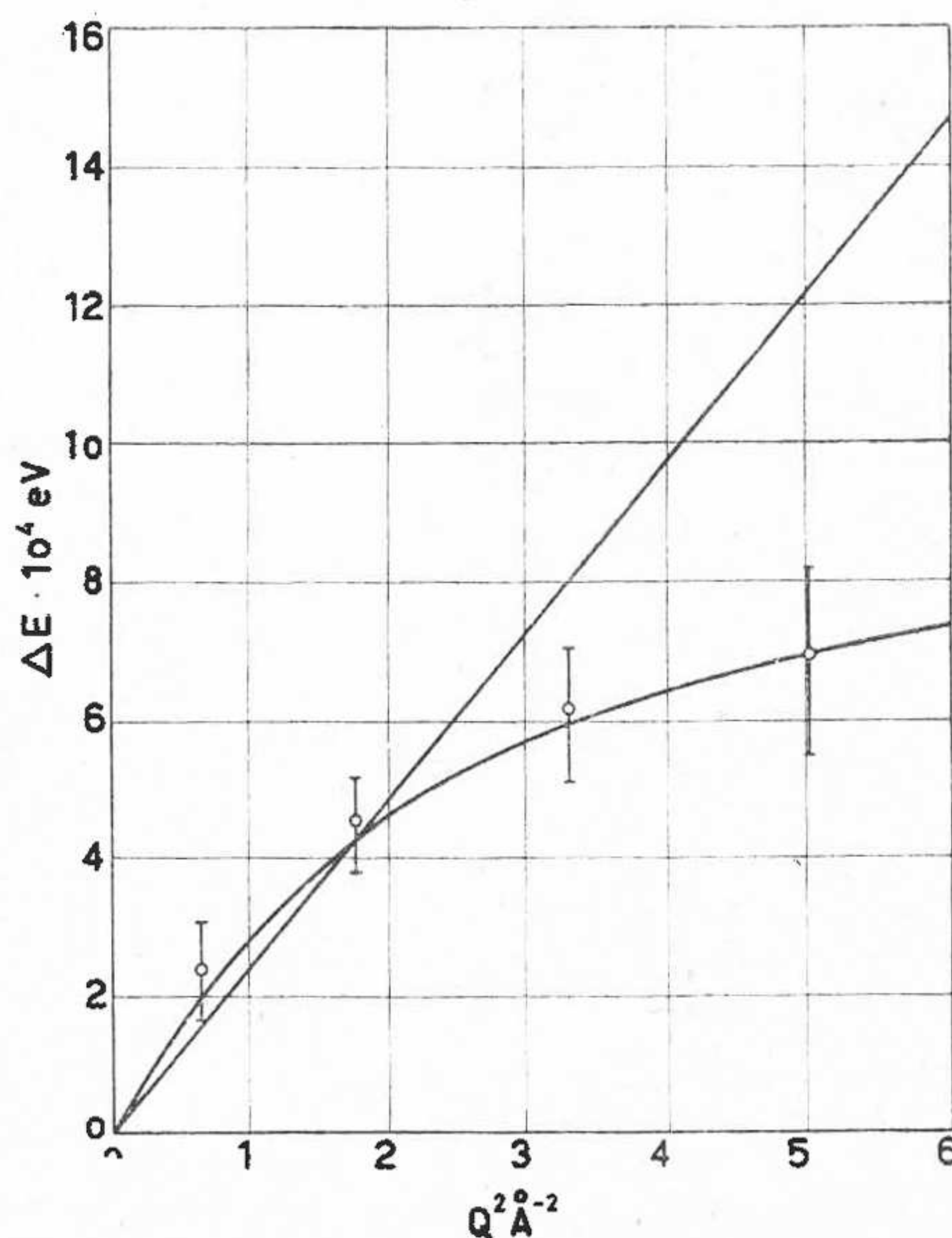
kjer je e^{-2W} Debye-Wallerjev faktor, D pa difuzijski koeficient. $2W$ ima naslednjo vrednost: $2W = \frac{1}{2} \langle r^2 \rangle Q^2$, kjer je $\langle r^2 \rangle$ poprečni kvadrat odmika delca, ki niha okoli ravnovesne lege. V primeru torej, da Q^2 narašča, vrednost za ΔE limitira k vrednosti

$$\Delta E = \frac{2 \hbar}{\tau_0} \quad (17)$$

Ce se pa Q^2 približuje vrednosti $Q^2 = 0$, dobimo za ΔE enačbo

$$\Delta E = 2 \hbar D Q^2 \quad (18)$$

ki je značilna za model, ki upošteva le enostavno difuzijo (enačba 15).



Sl. 7. Širina črte v odvisnosti od Q^2 pri kvazi-elastičnem sipanju na vodi. Premica popisuje razširitev, če bi veljal zvezni difuzijski model

Mnogi eksperimentalni podatki na različnih tekočinah,⁽¹⁶⁾ ki vsebujejo vodik, so pokazali, da difuzijski model s skoki precej dobro popiše obliko krivulje ΔE v odvisnosti od Q^2 , kar vidimo tudi na sliki 7, kjer nepretrgana krivulja čez eksperimentalne točke podaja odvisnost ΔE , kot jo podaja enačba 16. Pri teh rezultatih je zanimivo omeniti še to, da so opazili kvazi-elastično razširitev še celo v trdni fazi.⁽¹⁶⁾

Difuzijski koeficient za molekule v trdni fazi je gotovo zelo majhen, zato razširitve ne bi smeli opaziti, če bi bila dinamična enota molekula. Iz tega sledi, da je glavni sipalec proton, ki se giblje dosti bolj prosto kot molekula. Ta gibanja so lahko poleg difuzije še nizkofrekvenčna rotacijska ali vibracijska gibanja.

Iz podobnih podatkov za širino črte torej lahko dobimo vrednosti za efektivni difuzijski koeficient D za sipalni center enostavno tako, da potegnemo tangento na krivuljo ($\Delta E/Q^2$) pri zelo majhnih vrednostih za Q^2 . Nagib te krivulje je $2 \hbar D Q^2$ (enačba 18). Krivulje ponavadi kažejo pri velikih vrednostih za Q^2 nasičenje. Iz te vrednosti potem izračunamo še vrednost za τ_0 iz enačbe 17. Iz relacije $1/l^2 = 6 D \tau_0$ določimo še dolžino skoka l protona ali molekule.

Brockhouse je pokazal⁽¹³⁾, da se intenziteta kvazi-elastične črte spreminja v odvisnosti od kota sipanja. To odvisnost popiše Debye-Wallerjev faktor e^{-2W} . Z merjenjem kotne porazdelitve sipanih nevtronov lahko določimo ta faktor.

5. ZAKLJUČEK

Neelastično sipanje počasnih nevtronov je uspešna metoda za raziskave dinamičnih lastnosti trdnih snovi in tekočin, podobno kot je elastično sipanje počasnih nevtronov zelo koristno pri strukturnih raziskavah snovi. Zato smo ob reaktorju TRIGA v Ljubljani postavili nevtronski spektrometer (sprektrometer na čas preleta nevtronov), s katerim že opravljamo raziskave dinamičnih lastnosti različnih kristalov in drugih snovi z neelastičnim sipanjem počasnih nevtronov. Poleg tega pripravljamo tudi nevtronski difraktometer, ki bo služil za strukturne raziskave. Nevtroni iz ljubljanskega reaktorja torej že več ali manj uspešno pomagajo pri različnih raziskavah.

LITERATURA

- (1) B. N. Brockhouse, Phys. Rev. Letters 2 (1959), 287.
- (2) R. Weinstock, Phys. Rev. 65 (1944), 1.
- (3) J. M. Cassels, Progress in Nucl. Physics, 1 (1950), 185.
- (4) L. Van Hove, Phys. Rev. 95 (1954), 249.
- (5) G. Placzek, L. Van Hove, Phys. Rev. 93 (1954), 1207.
- (6) K. E. Larsson, S. Holmryd, Inelastic Scattering of Neutrons IAEA (1961), 587.
- (7) Brockhouse, Inelastic Scattering of Neutrons, IAEA (1963), 2, 23.
- (8) H. Hahn, Inelastic Scattering of Neutrons, IAEA (1963), 1, 37.
- (9) K. E. Larsson, Inelastic Scattering of Neutrons, IAEA (1961), 587.
- (10) R. Hass, W. Krebs, Inelastic Scattering of Neutrons, IAEA (1963), 1, 145.
- (11) G. Safford, V. Brajovic, Phys. Chem. Solids, 24 (1963), 771.
- (12) K. E. Larsson, U. Dahlborg, Inelastic Scattering of Neutrons, IAEA (1963), 1, 317.
- (13) B. N. Brockhouse, Phys. Rev. Letters, 2 (1959), 287.
- (14) K. E. Larsson, U. Dahlborg, Ark. Fys., 17 (1960), 369.
- (15) K. S. Singwi, A. Sjölander, Phys. Rev. 119 (1960), 863.
- (16) Thermal Neutron Scattering, ed. P. A. Egelstaff, Academic Press, (1965), 347—409.

VPRAŠANJA

1.* Kateri potreben in zadosten pogoj mora zadovoljevati naravno število n , da bo vsak binomski koeficient iz razvoja izraza $(a + b)^n$ tuj zadanemu praveštevilo p ?

2. Naj bo

$$S_n^m = \sum_{v=1}^n (-1)^v \binom{n}{v} v^m \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Dokaži rekurijsko formulo

$$S_{n+1}^m = - \sum_{\mu=n}^{m-1} \binom{m}{\mu} S_n^\mu \quad (m \geq n+1)$$

in pokaži, da je

$$S_n^m = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ (-1)^n n! & (m = n). \end{cases}$$

Jože Vrečko

3. Lastno nihanje neenakomerno debelih strun obravnavamo največkrat z aproksimativnimi metodami za reševanje diferencialnih enačb (Glej Obz. mat. fiz. 4, 138 (1955)!). Nekateri preprosti primeri pa so rešljivi tudi z znanimi funkcijami. Med take primere sodi struna, katere presek se spreminja po enačbi

$$S = S_0 / (1 + \alpha x/l)^2.$$

S_0 je presek na prvem krajišču, x vzdolžna koordinata, merjena od tega krajišča, l dolžina strune in α parameter, ki meri neenakomernost in je običajno majhen (a zadostuje, da je $\alpha > 1$). Določi spektrum lastnih frekvenc za tako struno! Kako je v limitnem primeru, ko gre α proti nič, se pravi, da postane presek strune enakomeren?

4. Obzornik je že objavil odgovor na vprašanje o lastnem nihanju vrvic, ki je obešena za prvo krajišče in ki ima na drugem krajišču majhno utež (Obz. mat. fiz. 5, 90 (1956)). Podoben in tudi z znanimi funkcijami rešljiv je primer enakomerno debele vrvic, ki se vrti enakomerno okoli prvega krajišča, medtem ko je drugo krajišče prosto (brez uteži). Kotna hitrost je dovolj velika, da lahko težo zanemarimo. Izračunaj za ta primer spektrum lastnih frekvenc, če zanihamo vrvico tako, da so odmiki vzporedni z vrtilno osjo!

A. Kodre

* Problem z rešitvijo je objavljen v Glasniku mat. fiz. i astr., Zagreb, T. 20 (1965), No. 1—2, toda rešitev ni elementarna.

NEKAJ NOVIH DOSTOPNEJŠIH KNJIG V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

1. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita za srednje škole i takmičenja mladih matematičara. Beograd, Naučna knjiga 1967. 169 str.
2. Zbirka rešenih zadataka iz matematike II. Beograd, Naučna knjiga 1967. 239 str.
3. Bertolino M.: Matematika II. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije 1967. 375 str.
4. Berman G. M.: Zbirka zadataka iz matematičke analize. Beograd, Naučna knjiga 1967. 458 str.
5. Matematičke olimpiade srednjoškolaca u Čehoslovačkoj, Madjarskoj i Rumuniji. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SRS 1967. 151 str. Matematička biblioteka, knj. 32.
6. Popadić M. S.: Priručnik za takmičenja srednjoškolaca u matematici. III. Kongruencije. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SRS 1967. 103 str. Matematička biblioteka, knj. 33.
7. Prešić S. B.: Elementi matematičke logike. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika 1968. 144 str. Matematička biblioteka, knj. 34.
8. Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita na fakultetima. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SRS 1968. 144 str. Matematička biblioteka, knj. 37.
9. Radić M.: Sistemi linearnih jednačbi i linearno programiranje. Zagreb, Školska knjiga 1967. 248 str. Materija i broj, br. 17.
10. Prijatelj N.: Matematične strukture II. Ljubljana, Mladinska knjiga 1967. 311 str. Knjižnica Sigma, d. 15.
11. Havlíček K.: Prostory o čtyřech a více rozměrech. Praga, Vydal uv matematicke olympiady a uv ČSM v nakladatelství Mlada fronta 1965. 88 str.
12. Šedivý J.: Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách. Praga, Mlada fronta 1962. 76 str.
13. Desátý ročník matematyscké olympiády. Praga, Státní pedagogické nakladatelství 1962. 188 str.
14. Grebenikov E. A., Ju. A. Rjabov: Čto takoe nebesnaja mehanika. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. 112 str. (cir.) Populjarnye lekci po astronomii, vyp. 14.
15. Fomin S. V.: Sistemy sčislenija. Moskva, Izd-vo Nauka 1964. 42 str. (cir.) Populjarnye lekci po matematike, vyp. 40.
16. Uspenskij V. A.: Treugol'nik Paskalja. Moskva. Izd-vo Nauka 1966. 36 str. (cir.) Populjarnye lekci po matematike, vyp. 43.
17. Bakel'man I. Ja.: Inversija. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. 80 str. (cir.) Populjarnye lekci po matematike, vyp. 44.
18. Šahno K. U.: Kak gotovitsja k priemnym ekzamenam v vuz po matematike. Minsk, Izd-vo Vyšejšaja škola 1967. 328 str. (cir.)
19. Zajdel, A. N.: Elementarnye ocenki ošibok izmerenij. Leningrad, Izd-vo Nauka 1967. 88 str. (cir.)
20. Efimov N. V.: Kvadratičnye formy i matricy. Moskva, Izd-vo Nauka 1967. 160 str. (cir.)
21. Boltjanskij V. G., N. Ja. Vilenkin: Simmetrija v algebre. Moskva, Izdatel'stvo Nauka 1967. 284 str. (cir.)
22. Zubelevič G. I.: Sbornik zadač moskovskih matematičeskih olimpiad. Moskva, Izd-vo Prosveščenie 1967. 232 str. (cir.)
23. Šedivý J.: O podobnosti v geometrii. Praga, Mlada fronta 1963. 79 str.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

15. LETNIK — 1. ŠTEVILKA

LJUBLJANA, JUNIJ 1968

VSEBINA

Članki

Stran

J. Grasselli: Osnovni pojmi geometrije števil	1
J. Pahor: Analogno računanje	10
Z. Bohte, I. Kuščer, E. Zakrajšek: Elektronski računalniki v Sloveniji .	18
M. Čopič: O nakupu novega računalnika	33
V. Dimic: Neelastično sipanje počasnih nevtronov	37

Vprašanja	48
---------------------	----

CONTENTS

Articles

Page

J. Grasselli: Elementary Concepts of the Geometry of Numbers	1
J. Pahor: Analog Computing	10
Z. Bohte, I. Kuščer, E. Zakrajšek: Electronic Computers in Slovenia .	18
M. Čopič: On the Purchase of a New Computer	33
V. Dimic: Inelastic Scattering of Slow Neutrons	37

Questions	48
---------------------	----