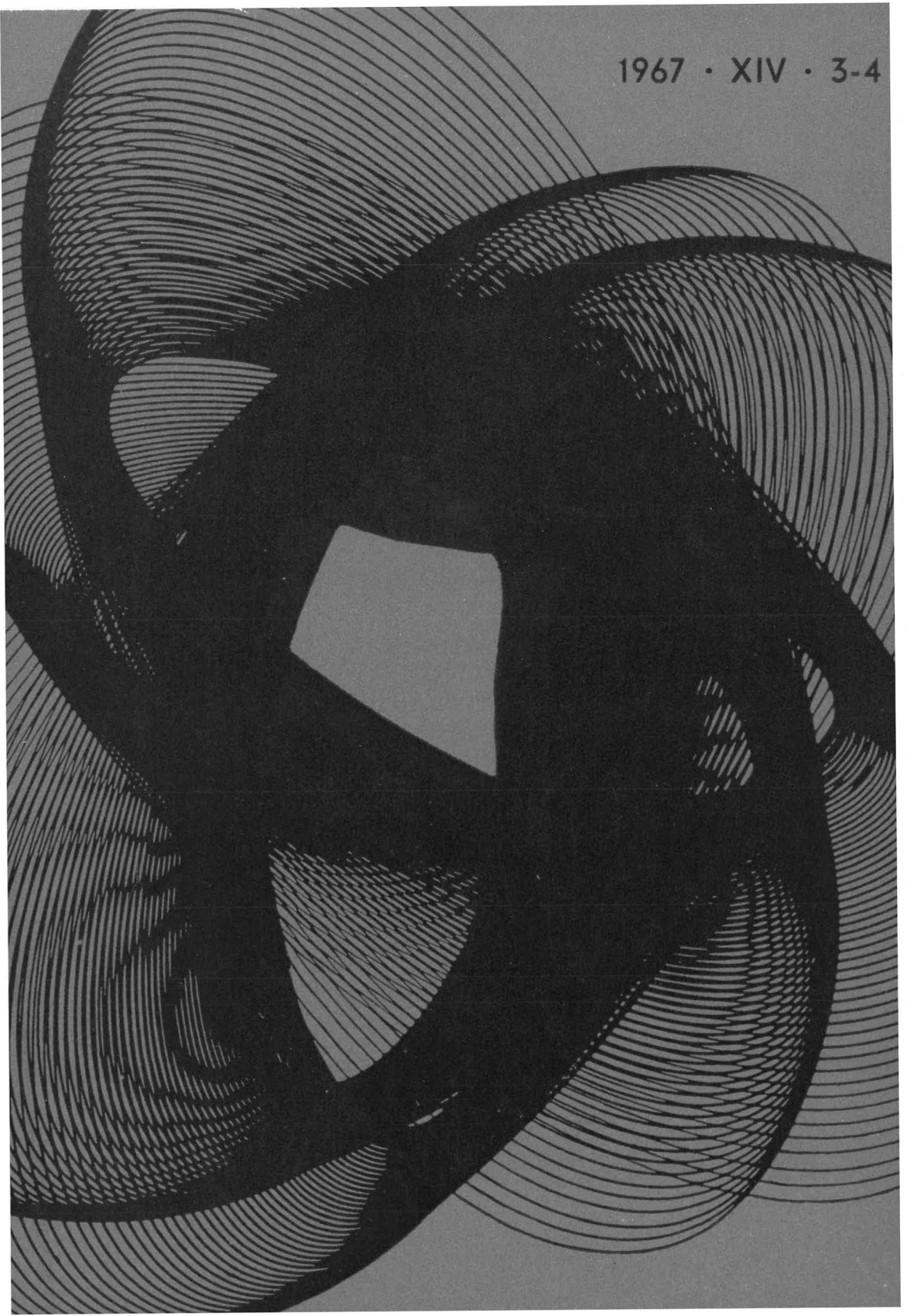
1967 · XIV · 3-4



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XIV. LETNIK — 3/4. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, DECEMBER 1967

VSEBINA

Članki Stran

O eksistenci rešitev nekaterih dvoparametričnih problemov lastnih vrednosti v Hilbertovem prostoru (Z. Bohte) 97

Posplošitev Fourierove in Laplaceove transformacije (A. Suhadolc in J. Vrabec) 104

Prikaz teorije grafov II (J. Vrabec) 107

Nova teorija gravitacije (J. Strnad) 121

Šola

Maketa za terenske meritve (F. Jakhel) 134

Fizika in matematika v francoski šolski reformi (F. Kvaternik) . . . 139

O pouku fizike in matematike v Angliji (J. Ferbar) 143

Fizika na strokovnih šolah (F. Kvaternik) 148

Domače vesti

Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS v letu 1967 (C. Velkovrh) 151

Pravila Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS 161

O IX. mednarodni matematični olimpiadi za srednješolce (T. Pisanski) 164

Odgovori 167

Vprašanja 171

CONTENTS

Articles Page

On the Existence of Solutions of Some Two-parameter Eigenvalue Problems in Hilbert Space (Z. Bohte) 97

A Generalization of Fourier and Laplace Transformations (A. Suhadolc and J. Vrabec) 104

On the Theory of Graphs II (J. Vrabec) 107

A New Theory of Gravitation (J. Strnad) 121

Shool 134

Home News 151

Answers 167

Questions 171

OBZORNIK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1967 LJUBLJANA LETNIK XIV

Uredniški odbor

Robert Blinc, Zvonimir Bohte, Jože Pahor, Valentin Pivk, Anton Moljk, Mitja Rosina, Janez Strnad, France Šušteršič, Stane Uršič, Ivan Vidav, Franc Kvaternik (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Socialistične republike Slovenije

Natisnila tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani

VSEBINA

Članki

O neomejeno deljivih in o stabilnih porazdelitvah (R. Jamnik) 4

Zlati rez (A. Vadnal) 21

Kvantna elektronika (A. M. Prokorov) 28

Diofantske aproksimacije (J. Grasselli) 49

Prikaz teorije grafov I (J. Vrabec) 58

Negativne absolutne temperature (J. Stepišnik) 72

O eksistenci rešitev nekaterih dvoparametričnih problemov lastnih vrednosti v Hilbertovem prostoru (Z. Bohte) 97

Posplošitev Fourierove in Laplaceove transformacije (A. Suhadolc in J. Vrabec) 104

Prikaz teorije grafov II (J. Vrabec) 107

Nova teorija gravitacije (J. Strnad) 121

Novice

Merjenje temperature z jedrsko kvadrupolno resonanco (M. Mali) 33

Nobelov nagrajenec za fiziko v letu 1966 — Profesor Alfred Kastler . . . 36

Šola

Konstrukcija posredne funkcije (A. Vadnal) 78

Izrek o vrtilni količini (S. Pahor) 80

Vodikov atom — klasično (J. Strnad) 81

Novinci na matematično-fizikalnem oddelku (J. Strnad, M. Hribar, A. Kodre) 83

Maketa za terenske meritve (F. Jakhel) 134

Fizika in matematika v francoski šolski reformi (F. Kvaternik) 139

O pouku fizike in matematike v Angliji (J. Ferbar) 143

Fizika na strokovnih šolah (F. Kvaternik) 148

Domače vesti

Republiško in zvezno tekmovanje mladih matematikov (J. Vrabec) . . . 38

Republiško tekmovanje srednješolcev v fiziki (M. Hribar) 43

Zvezno tekmovanje mladih fizikov (M. Hribar) 45

Seminar iz matematike (C. Velkovrh) 47

S seje odbora Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS 85

Diplome iz matematike in astronomije na univerzi v Ljubljani 85

Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS v letu 1967 (C. Velkovrh) 151

Pravila Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS 161

O IX. mednarodni matematični olimpiadi za srednješolce (T. Pisanski) . . 164

Odgovori . . . . . 89 in 167

Vprašanja . . . . . 48, 93 in 171

Nove knjige 94

O EKSISTENCI REŠITEV NEKATERIH DVOPARAMETRIČNIH PROBLEMOV LASTNIH VREDNOSTI V HILBERTOVEM PROSTORU*

ZVONIMIR BOHTE

Problem lastnih vrednosti z n parametri moremo formulirati s homogenim sistemom enačb

$$(A_k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_{ik})\, x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

kjer so A_k in C_{ik} sebi adjungirani operatorji v Hilbertovem prostoru H, λ_i pa razpoložljivi parametri. Te parametre je treba izbrati tako, da ima sistem (1) netrivialno rešitev $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v tem smislu, da je $x_k \neq 0$ za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$.

Problem moremo postaviti tudi z eno samo enačbo z n parametri v prostoru $\mathcal{H} = H \oplus H \oplus \ldots \oplus H$, ki je direktni produkt n Hilbertovih prostorov H. V prostoru $\mathcal{H}$ definirajmo operatorje A in $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tako, da je pri $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$A\xi = (A_1 x_1, A_2 x_2, \ldots, A_n x_n)$$

in

$$B_i\xi = (C_{i1} x_1, C_{i2} x_2, \ldots, C_{in} x_n)$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedaj moremo sistem (1) zapisati na kratko takole:

$$(A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i)\, \xi = 0 \tag{2}$$

Naloga pa je poiskati take vrednosti parametrov $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, da bo imela enačba (2) v prostoru $\mathcal{H}$ netrivialno rešitev, to je tako rešitev, da so vse njene komponente x_i od nič različne.

Probleme lastnih vrednosti z več parametri so doslej obravnavali SCHÄFKE, ARSCOTT in ATKINSON. Le Atkinson je obravnaval problem za $n > 2$, a samo v končno razsežnem prostoru.

Pri $n = 2$ moremo problem (1) zapisati v obliki:

$$\begin{aligned} (A_1 + \lambda B_1 + \mu C_1)\, x &= 0 \\ (A_2 + \lambda B_2 + \mu C_2)\, y &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

V dveh posebnih primerih tega sistema bomo dokazali eksistenco rešitve s perturbacijsko metodo.

* Referat na kongresu društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije v Sarajevu oktobra l. 1965. Ker ne bo izšel zbornik predavanj, ki so jih imeli udeleženci kongresa, je upravni odbor društva matematikov, fizikov in astronomov SRS predlagal, da bi se priobčila predavanja slovenskih udeležencev kongresa v OBZORNIKU ZA MATEMATIKO IN FIZIKO. To se uresničuje v tej in naslednji številki.

1. Vzemimo najprej naslednji perturbirani problem:

$$\begin{aligned} Ax + \varepsilon(\mu B_1 + C_1)x &= \lambda x \\ Ay + \varepsilon(\mu B_2 + C_2)y &= \lambda y \end{aligned} \tag{4}$$

kjer so A, B_1, B_2, C_1, C_2 sebi adjungirani operatorji v Hilbertovem prostoru H. Razen operatorja A naj bodo operatorji omejeni. Za $\varepsilon = 0$ se obe enačbi ujemata in parameter μ v njih sploh ne nastopa. Vzemimo, da je λ_0 enostavna izolirana točka spektra operatorja A z lastnim vektorjem x_0, $\| x_0 \| = 1$. Torej naj eksistira rešitev problema za $\varepsilon = 0$, pri čemer pa je μ še poljubno število.

Dokazali bomo, da eksistira rešitev problema (4) tudi v nekem dovolj majhnem krogu $|\varepsilon| < R$, če je izpolnjen pogoj:

$$1/\mathrm{d} = [(B_1 - B_2)x_0, x_0] \neq 0 \tag{5}$$

Pri dokazovanju uporabimo perturbacijsko metodo!

Predpostavimo, da se rešitve problema izražajo v obliki vrst po potencah ε:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots \\ \mu &= \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \ldots \\ x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \\ y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Pri tem velja $x_0 = y_0$. Število μ_0 na prvi pogled ni določeno, ker v sistemu (4) za $\varepsilon = 0$ μ sploh ne nastopa. V resnici pa je število μ_0 določeno z limito $\mu_0 = \lim \mu$, $\varepsilon \to 0$. Najprej bomo izračunali koeficiente v zgornjih vrstah (6) in nato ocenili, v kakšnem krogu so vse te vrste konvergentne.

Ko vstavimo vrste (6) v sistem (4) in izenačimo koeficiente pri enakih potencah ε, dobimo neskončen sistem enačb, iz katerih se dajo po vrsti izračunati vsi koeficienti v potenčnih vrstah. Z izenačenjem koeficientov pri ε^{k+1} v obeh enačbah (4) dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} Ax_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_1 x_{k-i} + C_1 x_k &= \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i x_{k-i+1} \\ Ay_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \mu_i B_2 y_{k-i} + C_2 y_k &= \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i y_{k-i+1} \end{aligned} \tag{7}$$

Če predpostavimo, da poznamo λ_i, x_i, y_i pri $i = 0, 1, \ldots, k$ in μ_i pri $i = 0, 1, \ldots, k-1$, moremo izračunati μ_k, λ_{k+1}, x_{k+1} in y_{k+1} takole:

Najprej vpeljimo pomožne količine u_k, v_k, U_k, V_k z naslednjimi enačbami:

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{i=0}^{k-1} U_i x_{k-i} - C_1 x_k \\ v_k &= \sum_{i=0}^{k-1} V_i y_{k-i} - C_2 y_k \\ U_k &= \lambda_{k+1} I - \mu_k B_1 \\ V_k &= \lambda_{k+1} I - \mu_k B_2 \\ k &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Sistem (7) moremo sedaj na kratko zapisati takole:

$$\begin{aligned} Ax_{k+1} &= \lambda_0 x_{k+1} + U_k x_0 + u_k \\ Ay_{k+1} &= \lambda_0 y_{k+1} + V_k x_0 + v_k \end{aligned} \tag{8}$$

To sta nehomogeni enačbi za x_{k+1} in y_{k+1}, pri čemer je λ_0 enostavna izolirana točka spektra operatorja A. Zato sta enačbi rešljivi, če sta vektorja $U_k x_0 + u_k$ in $V_k x_0 + v_k$ ortogonalna na x_0. Iz tega pogoja dobimo, če upoštevamo definicijo operatorjev U_k in V_k, sistem dveh linearnih enačb za μ_k in λ_{k+1}:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} - \mu_k (B_1 x_0, x_0) &= -(u_k, x_0) \\ \lambda_{k+1} - \mu_k (B_2 x_0, x_0) &= -(v_k, x_0) \end{aligned} \tag{9}$$

Pri tem smo upoštevali, da je x_0 normiran lastni vektor. Pri pogoju (5), ki ni odvisen od indeksa k, dobimo

$$\begin{aligned} \mu_k &= d\,(u_k - v_k, x_0) \\ \lambda_{k+1} &= d\,[(B_2 x_0, x_0)(u_k, x_0) - (B_1 x_0, x_0)(v_k, x_0)] \end{aligned}$$

S tako izbranima μ_k in λ_{k+1} moremo rešiti nehomogeni enačbi (8) v obliki

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_1 - \lambda_0 I)^{-1} (U_k x_0 + u_k) \\ y_{k+1} &= (A_1 - \lambda_0 I)^{-1} (V_k x_0 + v_k), \end{aligned}$$

kjer je A_1 zožitev operatorja A na ortogonalni komplement H_1 k lastnemu vektorju x_0. Operator $(A_1 - \lambda_0 I)^{-1}$ je v H_1 omejen operator

$$\| (A_1 - \lambda_0 I)^{-1} \| \leqq D$$

D je končno število, ker smo predpostavili, da je λ_0 enostavna izolirana točka spektra operatorja A, torej regularna točka operatorja A_1.

Zdaj pa moremo oceniti polmer kroga R, v katerem so vse vrste (6) konvergentne. Z vpeljavo oznak

$$\begin{aligned} &K = \max (\| B_1 \|, \| B_2 \|), \quad M_0 = \| C_1 \| + \| C_2 \|, \quad L = D\,(4 \mid d \mid K + 1), \\ &P_k = \| u_k \| + \| v_k \| \end{aligned}$$

moremo dobiti naslednje ocene:

$$\begin{aligned} &| \mu_k | \leqq | d | P_k, \quad | \lambda_{k+1} | \leqq | d | KP_k \\ &\| U_k \| \leqq 2 | d | KP_k, \quad \| V_k \| \leqq 2 | d | KP_k \\ &\| x_{k+1} \| + \| y_{k+1} \| \leqq LP_k \end{aligned} \tag{10}$$

Od tod dobimo eno samo rekurzivno oceno za P_k:

$$P_k \leqq \sum_{i=0}^{k-1} 2 \mid d \mid KLP_i P_{k-i-1} + M_0 LP_{k-1}$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$P_0 = \| u_0 \| + \| v_0 \| \leqq \| C_1 \| + \| C_2 \| = M_0$$

Če še vpeljemo

$$N = 2 \mid d \mid KL + L$$

moremo dobljeno neenačbo popraviti tako, da dobimo

$$P_k \leqq NM_0 P_{k-1} + N \sum_{i=1}^{k-1} P_i P_{k-i-1}$$

ki velja za $k = 1, 2, \ldots$ Sedaj pa rekurzivno definirajmo števila M_k, $k = 1, 2, \ldots$ z enačbo

$$M_k = N \sum_{i=0}^{k-1} M_i M_{k-i-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Pri tem je število M_0 določeno od prej. Izkaže se neposredno, da je $P_k \leqq M_k$ za vsak k.

Brez težav se da ugotoviti, da potenčna vrsta

$$M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots \tag{12}$$

konvergira v krogu s polmerom R, kjer je

$$R = 1/(4 NM_0)$$

Iz dobljenih ocen sledi, da je pri $\mid \varepsilon \mid < R$ vrsta (12) majoranta vseh vrst (6), torej nam te vrste določajo rešitev problema (4) pri $\mid \varepsilon \mid < R$.

2. Oglejmo si še naslednji splošnejši dvoparametrični problem:

$$\begin{aligned} Ax + (\lambda + \mu B + C) x &= \varepsilon (\mu B_1 + C_1) x \\ Ay + (\lambda + \mu B + C) y &= \varepsilon (\mu B_2 + C_2) y \end{aligned} \tag{13}$$

Za $\varepsilon = 0$ se obe enačbi v sistemu ujemata. Predpostavimo, da eksistira rešitev problema za $\varepsilon = 0$ v splošni obliki

$$\lambda_0 = f(\mu_0) \text{ in } x_0 = y_0 = F(\mu_0)$$

pri čemer je $\| x_0 \| = 1$ in je μ_0 še poljuben. Vsi operatorji, ki nastopajo v sistemu (13), naj bodo sebi adjungirani operatorji v Hilbertovem prostoru H in razen operatorja A tudi omejeni. Tudi sedaj se izkaže, da je μ pri $\varepsilon = 0$ določen z limito $\varepsilon \to 0$.

Dokazali bomo eksistenco rešitve problema (13) pri dovolj majhnih ε, če rešitev eksistira pri $\varepsilon = 0$, in še pri nekaterih dodatnih pogojih. Spet uporabimo perturbacijsko metodo! Rešitve iščimo v obliki potenčnih vrst (6). Če vstavimo te vrste v sistem (13) in izenačimo koeficiente pri prvi potenci ε, dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} Ax_1 + (\lambda_0 + \mu_0 B + C) x_1 &= (\mu_0 B_1 + C_1) x_0 - (\lambda_1 + \mu_1 B) x_0 \\ Ay_1 + (\lambda_0 + \mu_0 B + C) y_1 &= (\mu_0 B_2 + C_2) x_0 - (\lambda_1 + \mu_1 B) x_0 \end{aligned} \tag{14}$$

Rešitev tega nehomogenega sistema eksistira pri pogoju, da sta desni strani teh enačb ortogonalni na x_0. Pri tem suponiramo eksistenco in omejenost inverznega operatorja

$$U = [A + (\lambda_0 + \mu_0 B + C)]^{-1}$$

na podprostoru H_1, ki je ortogonalen na x_0. Ortogonalitetni pogoj nam da naslednji sistem enačb za λ_1 in μ_1:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \mu_1 (B x_0, x_0) &= \mu_0 (B_1 x_0, x_0) + (C_1 x_0, x_0) \\ \lambda_1 + \mu_1 (B x_0, x_0) &= \mu_0 (B_2 x_0, x_0) + (C_2 x_0, x_0) \end{aligned} \tag{15}$$

Ta izprijeni sistem ima rešitev le v primeru, da se tudi desni strani ujemata. Od tod dobimo nadaljnji pogoj

$$\mu_0 [(B_1 - B_2) x_0, x_0)] + [(C_1 - C_2) x_0, x_0] = 0 \tag{16}$$

ki predstavlja transcendentno enačbo za μ_0. Kot dodatno zahtevo vzemimo, da je koeficient pri μ_0 različen od nič in da ima ta enačba rešitev, ki jo imenujmo kar μ_0. Z njo so določeni potem tudi λ_0 in $x_0 = y_0$. Rešitev enačbe (16) eksistira prav gotovo v primeru, če sta C_1 in C_2 omejena operatorja, B_1 in B_2 pa taka, da velja $B_1 - B_2 > dI$, $d > 0$.

Ko je μ_0 določen, dobimo iz sistema (15) λ_1 kot linearno funkcijo argumenta μ_1:

$$\lambda_1 = \alpha - \mu_1 (Bx_0, x_0)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu_0 (B_1 x_0, x_0) + (C_1 x_0, x_0) = \\ &= \mu_0 (B_2 x_0, x_0) + (C_2 x_0, x_0) \end{aligned}$$

Te vrednosti vstavimo v sistem (14), iz katerega moremo izračunati x_1 in y_1 v linearni odvisnosti od μ_1. Pri tem moramo upoštevati, da je U linearen operator v H_1 in zato moramo vsem členom na desni strani odšteti njihove projekcije na x_0.

Splošen korak računa je naslednji: Vzemimo, da poznamo λ_i, μ_i, x_i in y_i za $i = 0, 1, \ldots, k-1$ in da imamo λ_k, x_k in y_k izražene kot linearne funkcije μ_k:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \alpha_k - \mu_k (Bx_0, x_0) \\ x_k &= \xi_k - \mu_k Uq \\ y_k &= \eta_k - \mu_k Uq \end{aligned}$$

kjer je

$$q = [B - (Bx_0, x_0) I] x_0$$

Te vrednosti vstavimo v sistem enačb, ki ga dobimo iz sistema (13) pri potenci ε^{k+1}, in tvorimo ortogonalitetni pogoj. Iz zahteve po rešljivosti dobljenega sistema dobimo enačbo za μ_k, ki se glasi:

$$m_k \mu_k + n_k = 0 \tag{17}$$

kjer je

$$\begin{aligned} m_k &= 2 (q, UDx_0) - \beta \\ D &= \mu_0 (B_2 - B_1) + (C_2 - C_1) \\ \beta &= [(B_2 - B_1) x_0, x_0] \end{aligned}$$

Število m_k očitno ni odvisno od tekočega indeksa k, zato se dajo pri enem samem pogoju

$$\delta = 2\,(q, UDx_0) - \beta \neq 0$$

izračunati μ_k iz enačb (17) pri vsakem k.

Vpeljimo oznake

$$K = \max\,(\| B_1 \|, \| B_2 \|),\ K_0 = \max\,(\| \mu_0 B_1 + C_1 \|, \| \mu_0 B_2 + C_2 \|)$$

$$u_k = \| x_k \| + \| y_k \|,\ v_k = \| \xi_k \| + \| \eta_k \|$$

$$P_k = K_0 u_{k-1} + K \sum_{i=1}^{k-1} |\mu_i|\, u_{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (|\lambda_i| + |\mu_i|\, \| B \|)\, u_{k-i}$$

Sedaj moremo vse nastopajoče količine oceniti takole:

$$|\alpha_k| \leqq \tfrac{1}{2} P_k,\ v_k \leqq \| U \|\, P_k$$

$$|\mu_k| \leqq \frac{1}{|\delta|} \left\{ K_0 v_k + \sum_{i=1}^{k-1} |\mu_i|\, u_{k-i} + |\alpha_k|\, \| U \|\, \| D \| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k-1} (|\lambda_i| + |\mu_i|\, \| B \|)\, v_{k-i+1} \right\}$$

$$|\lambda_k| \leqq |\alpha_k| + |\mu_k|\, \| B \|$$

$$u_k \leqq v_k + 2\,|\mu_k|\, \| U \|\, \| q \|$$

$$k = 2, 3, \ldots$$

Iz teh ocen moremo eliminirati vse količine razen P_k in $|\mu_k|$. Pri $k = 1$ imamo posebej

$$P_1 = u_0\,(K\,|\mu_0| + K_0)$$

$$|\mu_1| \leqq \frac{1}{|\delta|} K_0 \| U \|\, P_1 = M_1$$

Če vpeljemo še naslednje oznake:

$$K_2 = \max\,(1, \frac{1}{|\delta|} \| U \|\, (K_0 + 2 \| B \|\, M_1 + \tfrac{1}{2} P_1))$$

$$D_0 = \max\,(1, K_2 \| U \|\, (4 \| B \|\, \| q \| + 2 \| B \| + \| q \| + \tfrac{1}{2}) +$$

$$+ \frac{1}{|\delta|} \| U \|\, (2\,K \| q \| + K))$$

$$D_1 = \max\,(1, K_2 \| U \|\, (K_0 + 2\,K_0 \| q \| + K u_0))$$

$$D_2 = K_2 \| U \|\, (2\,K \| q \| + K)$$

$$D_3 = \frac{1}{|\delta|} \| U \|\, (2 \| B \| + \tfrac{1}{2})$$

in popravimo obe oceni tako, da velja ena za obe količini P_k in $|\mu_k|$ ter definiramo

$$N_1 = \max(P_1, M_1)$$
$$N_k = D_1 N_{k-1} + D_0 \sum_{i=1}^{k-1} N_i N_{k-i} + D_2 \sum_{i=1}^{k-2} N_i N_{k-i-1} + D_3 \sum_{i=2}^{k-1} N_i N_{k-i+1} \tag{18}$$

velja

$$P_k \leqq N_k \quad \text{in} \quad |\mu_k| \leqq N_k$$

Ker je D_1 večji od 1, števila N_k naraščajo; zato moremo enačbo (18) poenostaviti na en sam člen. Velja namreč, da števila R_k, $k = 1, 2, \ldots$, ki zadoščajo enačbam

$$R_1 = N_1$$
$$dR_k = R_{k-1} + \sum_{i=2}^{k-1} R_i R_{k-i+1}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

kjer je

$$1/d = \max(D_1 + D_0 N_1 + D_2 N_1, D_0 + D_2 + D_3)$$

ohranijo lastnost majorantnosti za P_k in $|\mu_k|$, saj velja

$$N_k \leqq R_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sedaj je lahko ugotoviti, da je potenčna vrsta

$$R_1 + R_2 x + R_3 x^2 + \ldots$$

konvergentna v krogu s polmerom

$$R = (\sqrt{d + R_1} - \sqrt{R_1})^2$$

ki je konvergenčni polmer tudi za vse ostale naše vrste (6).

Ugotovili smo torej, da eksistira pri naštetih pogojih neka okolica točke $\varepsilon = 0$, v kateri eksistira rešitev našega dvoparametričnega problema.

LITERATURA

1. Ahiezer N. I., Glazman I. M., Teorija linejnyh operatorov v Gil'bertovom prostranstve, Gostehizdat, 1950.

2. Arscott F. M., Two-parameter eigenvalue problems in differential equations, MRC Technical Summary Report, No. 350, 1962.

3. Atkinson F. V., Multivariate spectral theory, fotokopija.

4. Hiller F., Schmidt A., Über ein Eigenwertproblem linearer Differentialoperatoren mit zwei Parametern, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 9 (1962), 439.

5. Meixner J., Schäfke F. W., Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer-Verlag, Berlin, 1954.

6. Titchmarsh E. C., Eigenfunction expansions II, Oxford 1952.

POSPLOŠITEV FOURIEROVE IN LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE*

A. SUHADOLC in J. VRABEC

Klasična Fourierova transformacija je definirana na prostoru $L^2(-\infty, \infty)$ merljivih in s kvadratom integrabilnih funkcij s predpisom

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{itx}\, dt$$

kjer je treba razumeti konvergenco izlimitiranega integrala v kvadratičnem povprečju, to je, v smislu topologije Hilbertovega prostora $L^2(-\infty, \infty)$. Klasična Fourierova transformacija ima med drugimi tudi naslednje lastnosti, zaradi katerih je pomembno orodje uporabne matematike:

$$\begin{aligned}
&1)\quad F(tf(t)) = -i\,\frac{d}{dx}\,(F(f)) \\
&2)\quad F(f'(t)) = (-ix)\,F(f) \\
&3)\quad F(e^{ikt} f(t) = F(f)(x + k) \\
&4)\quad F(f(t-h)) = e^{ihx} F(f)
\end{aligned} \tag{1}$$

Vendar veljata formuli 1) in 2) le za nekatere funkcije v $L^2(-\infty, \infty)$, formuli 3) in 4) pa le za realne k in h.

Cilj tega dela je: posplošiti Fourierovo transformacijo na neki večji prostor, na katerem bi lastnosti 1) do 4) veljale za vse elemente novega prostora in za vsa kompleksna števila k, h. Klasična Fourierova transformacija je tudi zvezna preslikava prostora $L^2(-\infty, \infty)$ nase, njej inverzna preslikava ima pa podobne lastnosti kot Fourierova transformacija. Tudi novi razširjeni prostor moremo opremiti s tako lokalno konveksno topologijo, da je posplošena Fourierova transformacija zvezna preslikava novega prostora nase.

Ideja, na opisani način razširiti Fourierovo in tudi Laplaceovo transformacijo, ni nova. Prvi korak v tej smeri je storil J. S. Silva (1955). Razširjava že potrebuje teorijo lokalno konveksnih linearnih prostorov in teorijo Schwartzovih distribucij (L. Schwartz, 1947). Na osnovi del G. Kötheja in H. G. Tillmanna, v katerih sta povezala teorijo distribucij s teorijo analitičnih funkcij (1952 do 1961), je G. Pantelidis (1962) posplošil Laplaceovo transformacijo na precej obsežen razred, ki vsebuje tudi nekatere distribucije, pa tudi elemente, ki jih ne moremo tolmačiti kot distribucije. Naše delo je nadaljevanje omenjenih prizadevanj. Osnovna ideja temelji na dognanjih prof. H. G. Tillmanna.

Konstrukcija Fourier-Laplaceove transformacije poteka v kratkem takole: Najprej definiramo prostore $M_{k,l}$ kot prostore parov analitičnih funkcij $f(z) = (f^+(z), f^-(z))$. Funkcija f^+ naj bo analitična za $\operatorname{Im} z > k$, na premici $\operatorname{Im} z = k$

* Referat na kongresu v Sarajevu.

še zvezna in naj proti ∞ ne narašča bolj kot $e^{l|z|}$. Funkcija f^- pa naj bo analitična za $Im\, z < -k$, na premici $Im\, z = -k$ še zvezna in naj tudi ne narašča bolj kot $e^{l|z|}$. H naj bo unija prostorov $M_{k,l}$, ko pretečeta k in l vsa nenegativna števila:

$$H = \bigcup_{k,l} M_{k,l}$$

Podprostor celih funkcij, ki ne naraščajo bolj kot e^{kz} pri nekem k, označimo z G! V naslednjem bomo potrebovali še kvocientni prostor $\mathcal{H} = H/G$, kar pomeni, da para iz H, ki se razlikujeta le za celo funkcijo eksponentnega naraščanja, identificiramo.

$\mathcal{H}$ je že prostor, v katerem bomo definirali posplošeno Fourier-Laplaceovo transformacijo.

Najprej definiramo pomožne preslikave $F_{k,l}$:

$$F_{k,l}(f) = (\hat{f}^+(\xi), \hat{f}^-(\xi)), \text{ kjer je } f \in M_{k,l},\ f = (f^+, f^-)$$

$$\hat{f}^+(\zeta) = \int_{ik}^{ik+\infty} f^+(z)\, e^{iz\zeta}\, dz - \int_{-ik}^{-ik+\infty} f^-(z)\, e^{iz\zeta}\, dz \tag{2}$$

$$\hat{f}^-(\zeta) = -\int_{ik-\infty}^{ik} f^+(z)\, e^{iz\zeta}\, dz + \int_{-ik-\infty}^{-ik} f^-(z)\, e^{iz\zeta}\, dz$$

$F_{k,l}(f)$ je par analitičnih funkcij, ki ne naraščata bolj kot eksponentna funkcija, torej spet element prostora H. Hitro vidimo tudi, da se cele funkcije iz G preslikajo v element 0 prostora $\mathcal{H}$. Nato spoznamo, da moremo razširiti preslikave $F_{k,l}$ na preslikavo $\mathcal{F}$, ki preslika prostor $\mathcal{H}$ vase. Ta je definirana takole: Vzemimo element prostora $\mathcal{H}$, to je, neki razred funkcij iz H! Iz tega razreda vzamemo poljubnega zastopnika; ta je v nekem $M_{k,l}$. Poiščemo preslikavo $F_{k,l}$ tega zastopnika in tej transformiranki pripadajoči razred v H. To naj bo slika izhodnega elementa. Pri tem se moramo seveda prepričati, da je preslikava enolično definirana.

Definicija (2) preslikave $F_{k,l}$ močno spominja na Laplaceovo transformacijo, lastnosti preslikave $\mathcal{F}$ pa so podobne lastnostim klasične Fourierove transformacije. Zato imenujemo preslikavo $\mathcal{F}$ Fourier-Laplaceovo trasformacijo.

Fourier-Laplaceova transformacija $\mathcal{F}$ je definirana na vsem prostoru $\mathcal{H}$. Lastnosti (1), o katerih smo govorili v začetku, veljajo za našo transformacijo za vse elemente prostora $\mathcal{H}$ in za poljubni kompleksni števili k in h, kot se moremo prepričati s povsem elementarnim računom.

V prostor $\mathcal{H}$ vpeljemo tudi neko lokalno konveksno topologijo takole: Prostori $M_{k,l}$ so Banachovi prostori, če vpeljemo normo para $f = (f^+, f^-)$ s predpisom

$$\| f \|_{k,l} = \sup_{|Im\, z \geq k|} (|f(z)|\, e^{-l|z|})$$

Če je $k \leqq g$ in $l \leqq h$, velja $M_{k,l} \subset M_{g,h}$. Preslikava I, ki priredi paru $f \in M_{k,l}$ kar isti par v $M_{g,h}$, je linearna zvezna preslikava ter celo kompaktna. Iz splošne teorije linearno konveksnih prostorov vemo, da eksistira tedaj induktivna limita prostorov $M_{k,l}$, ki je ravno unija prostorov $M_{k,l}$, topologija v H pa je lokalno konveksna:

$$H = \liminf_{k,l} M_{k,l} = \bigcup_{k,l} M_{k,l}$$

Nato pokažemo, da je podprostor G celih funkcij eksponentnega naraščanja v topologiji induktivne limite zaprt podprostor v H. Zato je kvocientni prostor $\mathcal{H} = H/G$, opremljen s kvocientno topologijo, zopet lokalno konveksen prostor.

Sedaj že imamo topologijo v prostoru $\mathcal{H}$. Fourier-Laplaceova transformacija $\mathcal{F}$ je v tej topologiji zvezna preslikava prostora $\mathcal{H}$ vase.

Radi bi še videli, da je Fourier-Laplaceova transformacija res razširjava klasične Fourierove transformacije. Najprej pokažemo, da vsebuje prostor $\mathcal{H}$ podprostor, ki je izomorfen prostoru $L^2(-\infty, \infty)$. Topologija induktivne limite na tem podprostoru je šibkejša od topologije v $L^2(-\infty, \infty)$. Najtežji korak je dokaz, da je ta podprostor, ki je izomorfen $L^2(-\infty, \infty)$, v smislu topologije induktivne limite v $\mathcal{H}$ gost podprostor v $\mathcal{H}$. Naslednji korak je dokaz, da klasična in Fourier-Laplaceova transformacija sovpadata na elementih podprostora, ki je izomorfen $L^2(-\infty, \infty)$.

Ker klasična in Fourier-Laplaceova transformacija sovpadata na podprostoru, ki je gost v $\mathcal{H}$, moremo tolmačiti Fourier-Laplaceovo transformacijo kot razširjavo po zveznosti klasične transformacije na ves prostor $\mathcal{H}$.

Klasična Fourierova transformacija je izomorfizem v $L^2(-\infty, \infty)$. Inverzna transformacija F^{-1} je dana s predpisom

$$F^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-itx}\, dt$$

Popolnoma analogno, kot smo konstruirali Fourier-Laplaceovo transformacijo, moremo konstruirati tudi inverzno Fourier-Laplaceovo transformacijo $\mathcal{F}^{-1}$. Ta ima vse analogne lastnosti. Obe sta razširjavi po zveznosti klasičnih Fourierovih transformacij, zato tudi zanju velja, da preslikata prostor $\mathcal{H}$ enolično in obratno enolično nase, sta torej druga drugi inverzni: $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$, kjer smo z I označili identično preslikavo v prostoru $\mathcal{H}$.

Končno še dokažemo, da v prostoru $\mathcal{H}$ ni podprostora, na katerem bi imeli transformaciji $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}^{-1}$ lastnosti 1) do 4). V tem smislu je torej konstruirani prostor $\mathcal{H}$ minimalen: je najmanjša razširjava prostora $L^2(-\infty, \infty)$, taka, da veljajo za posplošeno Fourierovo transformacijo $\mathcal{F}$ lastnosti 1) do 4) brez omejitev.

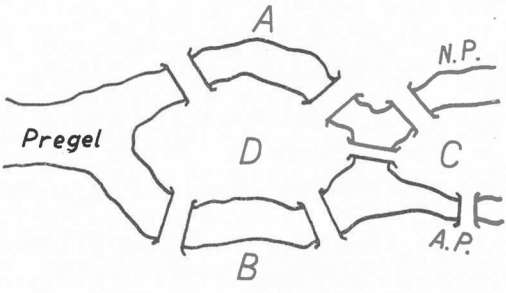
PRIKAZ TEORIJE GRAFOV II.

JOŽE VRABEC

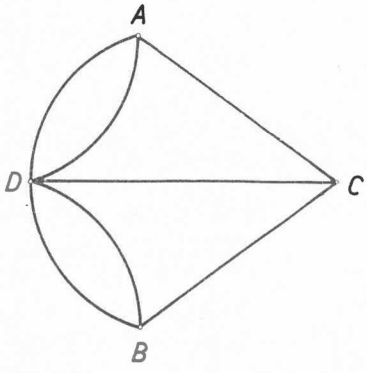
V drugem delu članka o grafih bomo poizkusili prikazati del uporabe teorije grafov. Vsi grafi in multigrafi, o katerih bomo govorili, bodo povezani, zato tega niti ne bomo posebej omenjali.

1. Eulerjeve poti

Ozemlje, na katerem je ležalo nemško mesto Königsberg v prvi polovici 18. stol., je približno táko, kot je narisano na sliki 1:



Slika 1



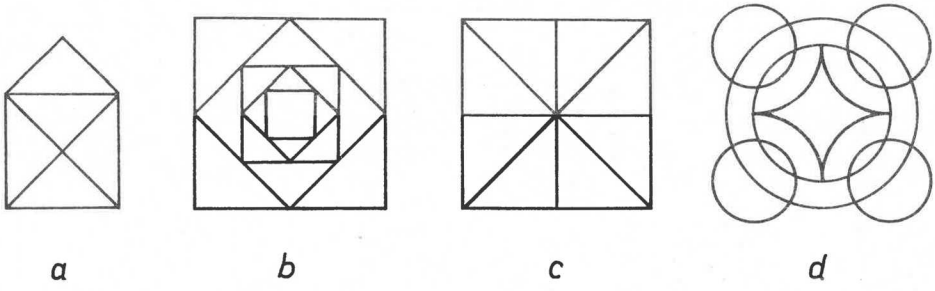
Slika 2

Reki Alter Pregel in Neuer Pregel se tu združita v Pregel in na sotočju oblivata otok Kneiphof. Königsberg leži na bregovih, ki so na sliki 1 označeni z A, B in C ter na otoku D. Tedaj je imelo mesto sedem mostov, kot je narisano. Meščani so se — za zabavo seveda — precej dolgo ubadali s problemom, ali se človek lahko sprehodi po Königsbergu tako, da gre čez vsak most natančno enkrat. Ko je pa za ta problem izvedel Leonhard *Euler*, ga je seveda hitro ugnal: dokazal je, da tak sprehod po mestu ni mogoč. Seveda pa se ni posvetil izključno problemu königsberških mostov, ampak je razvil célo majhno teorijo, ki nam pomaga rešiti še več sorodnih problemov. To svoje delo je Euler objavil leta 1736 pod naslovom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* v *Commentarii Academiae Petropolitanae* (glasilo peterburške akademije, katere član je bil Euler). Ta članek pomeni začetek teorije grafov.

Oglejmo si zdaj še mi to teorijo! Začnimo kar pri königsberškem problemu. Ker so za nas važni le mostovi, lahko sl. 1 nadomestimo z multigrafom, ki je na sl. 2. Vozlišča pomenijo bregove (oziroma otok), veje pa mostove. Sprehod po mestu, pri katerem ne gremo čez noben most več kot enkrat, pomeni pri multigrafu zvezno zaporedje vej, v katerem nastopi vsaka veja kvečjemu

enkrat. Tako zaporedje vej pa smo imenovali pot. Treba je torej poiskati pot po multigrafu na sliki 2, ki bo vsebovala vse veje multigrafa.

V zbirkah zabavnih nalog najdemo še dosti takih problemov, ki so na las podobni problemu o königsberških mostovih. V najožji zvezi s temi nalogami so še naslednje: Narišite dano figuro — npr. katero od tistih, ki so na sliki 3 — v eni potezi, to je brez prestavljanja svinčnika in ne da bi ponovno vlekli po že narisanih črtah. Najbolj znana je verjetno »svetilka« ali »uta« na sl. 3 *a*. Pri taki nalogi ni niti treba narisati ustreznega multigrafa, kot smo napravili zgoraj pri problemu königsberških mostov, ker je multigraf že figura sama.



Slika 3

Naša naloga je torej poiskati pogoje, pri katerih eksistira v danem multigrafu pot, ki vsebuje vse veje. Tako pot bomo imenovali *Eulerjeva pot.* Če je zaključena, to je, če sta začetek in konec isto vozlišče, ji pravimo tudi *Eulerjev cikel.*

Izrek 1. *V multigrafu eksistira Eulerjev cikel tedaj in le tedaj, ko ima multigraf sama soda vozlišča.*

Vozlišče imenujemo sodo, če ima sodo stopnjo, to je, če se v njem stika sodo število vej.

Dokaz: Naj v danem multigrafu eksistira Eulerjev cikel C. Dokazati moramo, da so tedaj vsa vozlišča soda. Vzemimo poljubno vozlišče u! Vsakič, ko gre C skozi u, porabi dve različni veji, eno pri vhodu in eno pri izhodu. Naj gre C n-krat skozi u ($n \geqslant 1$). Ker vsebuje C po definiciji Eulerjevega cikla vse veje, ki se stikajo v u, je stopnja tega vozlišča $d(u) = 2n$.

Dokažimo izrek še v obratni smeri! Vzemimo poljuben multigraf (V, Q), ki ima sama soda vozlišča! Konstruirati moramo cikel, ki pokriva ta multigraf. Izberimo poljubno vozlišče a_1! Sestavili bomo neko pot, ki se bo začela v a_1. Krenimo iz a_1 po poljubni veji, ki ima a_1 za krajišče! Ko pridemo v drugo krajišče te veje — imenujmo ga b — nadaljujmo pot po poljubni drugi veji, ki ima b za krajišče! Ta postopek ponavljamo. Pri vsakem koraku podaljšamo pot s poljubno vejo izmed tistih, ki se stikajo v vozlišču, v katerega smo pravkar prispeli; le na to moramo seveda paziti, da nikdar ne izberemo veje, ki smo jo že kdaj prej uporabili. Pot nadaljujemo, dokler moremo, to je, dokler ne pridemo do vozlišča — recimo mu u —, iz katerega ne izhaja nobena prosta veja več. Opravljeno pot označimo s C_1. Dokazali bomo, da je $u = a_1$.

Pa vzemimo, da je $u \neq a_1$! Recimo, da smo šli pri gibanju po poti C_1 n-krat ($n \geqslant 0$) skozi u, preden se je pot v tem vozlišču končala. Pri vsakem

obisku smo porabili dve od tistih vej, ki se stikajo v u: eno pri prihodu in eno pri odhodu. Pri n prehodih smo torej porabili $2n$ vej. Ker se po privzetku stika v u sodo število vej, je po n prehodih ostalo še sodo število vej nezasedenih. Ker je kaka veja gotovo še ostala (kajti na koncu pridemo še enkrat v u), sta ostali najmanj dve. Potem pa ni mogoče, da bi tedaj, ko naslednjič pridemo v u (in pri tem porabimo samo eno vejo), ne imeli nobene proste veje več na razpolago. To protislovje dokazuje, da je res $u = a_1$, in pot C_1 je cikel.

Mogoče je, da cikel C_1 pokriva ves multigraf (V, Q). V tem primeru je naša naloga že opravljena. V splošnem pa bo seveda ostalo v multigrafu še nekaj vej, ki jih cikel C_1 ne bo pokril. V tem primeru izrežimo veje cikla C_1 iz multigrafa. Ostane nam neki podmultigraf (V, Q_1). Ker ima vsak cikel sama soda vozlišča, kot smo že zgoraj pokazali, ostane tudi potem, ko smo izrezali C_1 iz multigrafa (V, Q), okoli vsakega vozlišča sodo število vej. Podmultigraf (V, Q_1) ima torej tudi sama soda vozlišča. Ker je multigraf (V, Q) povezan, se najmanj ena veja iz Q_1 »dotika« cikla C_1, to je: na C_1 leži neko vozlišče a_2, ki je krajišče neke veje iz Q_1. Konstruirajmo zdaj pot po multigrafu (V, Q_1), podobno kot smo prej C_1: začetek naj bo v a_2; pri vsakem koraku zvezno podaljšajmo pot s poljubno vejo iz Q_1, ki jo do tedaj še nismo porabili; ustavimo se šele tedaj, ko ni mogoče več dalje. Dobljeno pot označimo z S_2! Isti premislek kot zgoraj nam pove, da je S_2 cikel. (Podmultigraf (V, Q_1) sicer ni nujno povezan, vendar to nič ne moti.) Zdaj pa bomo cikel C_1 povečali do nekega cikla C_2 po multigrafu (V, Q): C_2 naj se začne pri a_1, naj poteka po C_1, dokler prvič ne pride v a_2; nato naj opiše cikel S_2 in potem nadaljuje po C_1 od a_2 naprej, dokler se zadnjič ne vrne v a_1. Če tudi C_2 še ni Eulerjev cikel, izrežimo zdaj C_2 iz multigrafa (V, Q)! Ostane nam neki podmultigraf (V, Q_2). V njem konstruiramo cikel S_3, ki ima s C_2 neko skupno točko a_3 (S_3 sestavimo podobno, kot smo prej S_2). Nato povečamo C_2 z S_3 do nekega cikla C_3 itd. Po nekaj korakih bomo gotovo prišli do nekega cikla, npr. C_r, ki bo pokrival ves multigraf. Izrek je tako dokazan.

Iz tega izreka sledi npr., da se dasta narisati v eni potezi figuri s sl. 3 *b* in 3 *d*. Začnemo lahko v poljubni točki; na koncu se nam svinčnik vrne v začetno točko.

Izrek 2. *V multigrafu eksistira Eulerjeva pot, katere začetek in konec sta različni vozlišči, tedaj in le tedaj, ko ima multigraf dve lihi vozlišči. Krajišči poti sta obe lihi vozlišči.*

Dokaz: Enako, kot smo zgoraj ugotovili, da ima vsak cikel sama soda vozlišča, lahko dokažemo, da sta pri poljubni poti, ki ni cikel, obe krajišči lihi vozlišči, vsa ostala njena vozlišča pa so soda. Če zdaj taka pot pokriva ves multigraf, bo pač tudi za multigraf veljalo, da so soda vsa njegova vozlišča razen tistih dveh, ki sta krajišči dane Eulerjeve poti.

Pri dokazu izreka v obratni smeri se bomo naslonili na izrek 1. Vzemimo poljuben multigraf, ki ima dve lihi vozlišči! Dodajmo mu še eno vejo, ki bo vezala obe lihi vozlišči! Dobimo večji multigraf, ki ima samo soda vozlišča. Po izreku 1. obstaja Eulerjev cikel po tem multigrafu. Če temu ciklu spet odvzamemo tisto dodatno vejo med obema lihima vozliščema prvotnega multigrafa, ostane pot, ki pokriva ves prvotni multigraf in katere krajišči sta obe lihi vozlišči.

V prvem delu članka o teoriji grafov smo že pokazali, da ima vsak multigraf sodo število lihih vozlišč. Razširitev izreka 2. je

Izrek 3. *Naj ima multigraf* $2k$ *lihih vozlišč* ($k \geqslant 1$). *Tedaj eksistira takih* k *poti po tem multigrafu, da vsaka veja multigrafa leži na eni in samo na eni od teh poti. Vsaka pot ima za krajišči dve različni lihi vozlišči in vsako liho vozlišče je krajišče ene poti. Z manj kot* k *potmi multigrafa ni mogoče pokriti.*

Dokaz je podoben kot pri prejšnjem izreku. Kot smo že omenili, ležita na vsaki poti kvečjemu dve lihi vozlišči. Če vzamemo manj kot k poti po multigrafu, ki ima $2k$ lihih vozlišč, ne morejo te poti pokriti niti vseh lihih vozlišč, kaj šele ves multigraf.

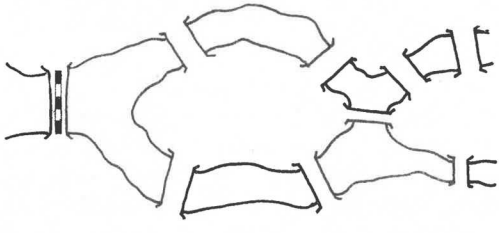
Naj ima multigraf $2k$ lihih vozlišč. Razdelimo ta vozlišča na k parov! Vsaki dve lihi vozlišči, ki sta v istem paru, zvežimo z dodatno vejo! Multigrafu dodamo tako k vej. Ta povečani multigraf ima sama soda vozlišča, zato eksistira v njem Eulerjev cikel. Če zdaj spet odvzamemo vseh k dodanih vej, razpade ta cikel na k segmentov — poti po prvotnem multigrafu —, ki ta multigraf pokrivajo. Ker so vse te poti deli cikla v povečanem multigrafu, nimata nobeni dve nobene skupne veje.

Izrek 2. nam pove npr., da je mogoče »svetilko« (sl. 3 *a*) narisati v eni potezi: začeti je treba pri enem od spodnjih dveh oglišč. Po izreku 3. pa potrebujemo za figuro na sl. 3 *c* kar štiri poteze. Dalje sledi iz tega izreka, da v multigrafu na sl. 2 ni nobene Eulerjeve poti. Kdor se je hotel sprehoditi po vsem Königsbergu, se je torej moral sprijazniti s tem, da je šel vsaj čez en most dvakrat. Bralec naj sam poizkusi ugotoviti, ali so današnji meščani Königsberga (danes se pravzaprav imenuje Kaliningrad) kaj srečnejši. Mesto je namreč dobilo še dva nova mosta: enega čez Novi Pregel in enega, ki je obenem železniški, čez Pregel (glej sl. 4).

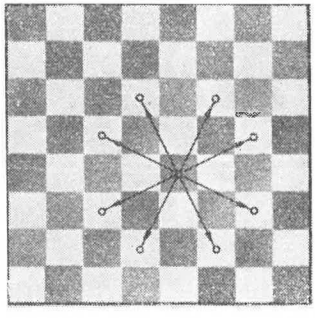
Do zdaj smo obravnavali le neusmerjene multigrafe. Podoben problem kot zgoraj pa si lahko zastavimo tudi za orientirane multigrafe. Skoraj z istimi besedami kot izrek 1. dokažemo naslednji izrek:

Izrek 4. *V usmerjenem šibko povezanem multigrafu eksistira usmerjena ciklična pot, ki vsebuje vse veje multigrafa, tedaj in le tedaj, ko ima vsako vozlišče multigrafa prav toliko vhodnih kot izhodnih vej.*

Podobno bi lahko preformulirali za usmerjene multigrafe tudi izreka 2 in 3. Kot posledico izreka 4 lahko dokažemo naslednjo trditev: *Vsaka šahovska*



Slika 4

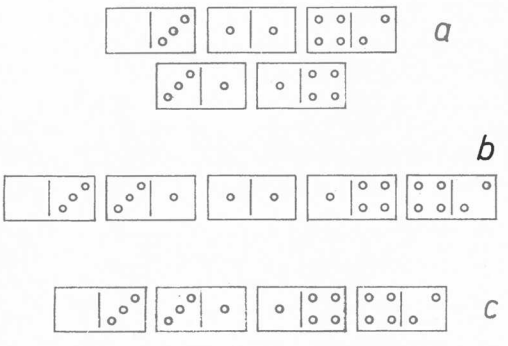


Slika 5

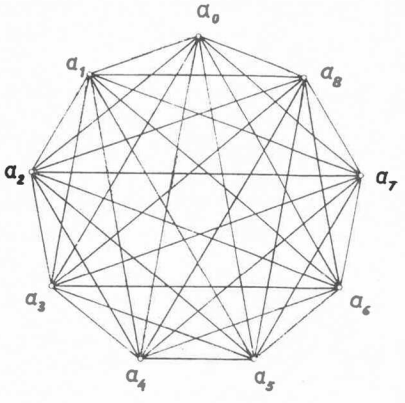
figura razen kmeta lahko prehodi krožno pot po šahovnici, pri kateri napravi vsako možno potezo natančno enkrat.

Konstruirajmo graf, katerega vozlišča bodo predstavljala polja na šahovnici, veje pa vse možne poteze izbrane figure (pri lovcu vzamemo za vozlišča samo vsa bela ali samo vsa črna polja)! Recimo, da smo izbrali konja! Vzemimo poljubno vozlišče (polje na šahovnici) u. Od u bomo potegnili veje do tistih vozlišč, ki predstavljajo polja, na katera lahko skoči konj z u v eni potezi. Vse te veje usmerimo od u navzven (glej sl. 5). Skok konja s polja u na polje v in skok z v na u namreč nista ista poteza; če naj veje predstavljajo vse možne poteze, jih je torej res treba usmeriti in naš graf bo usmerjen. Za poljubni dve vozlišči u in v v tem grafu očitno velja: ali ju ne veže nobena veja ali pa sta povezani z dvema vejama, od katerih je ena usmerjena od u k v, druga pa od v k u. Od tod očitno sledi, da je pri vsakem vozlišču ravno toliko vhodnih kot izhodnih vej. Po izreku 4 eksistira ciklična usmerjena pot po našem grafu, ki vsebuje vse veje. To pa pomeni, da lahko konj prehodi krožno pot po šahovnici, na kateri napravi vsako možno potezo natančno enkrat. Prav isti sklep velja seveda tudi za druge figure.

Oglejmo si še en primer, ki nas pripelje do problema Eulerjeve poti! Vzemimo igro domino! Kot vemo, je pri tej igri treba polagati ploščice drugo za drugo tako, da za vsaki dve sosednji ploščici v zaporedju velja: tisto polje prve ploščice in tisto polje druge, ki sta skupaj, imata isto število pik. Vprašajmo se najprej, ali je mogoče iz vseh domin, ki jih polagamo v skladu s tem pravilom, sestaviti sklenjen krog (zaradi enostavnosti si mislimo, da polagamo domine res drugo za drugo, tako kot je na sl. 6 *b*, in ne tako, kot je v navadi — sl. 6 *a*).



Slika 6



Slika 7

Najprej bomo izločili iz igre vse dvojnike, to je ploščice, ki imajo na obeh poljih isto število pik. To smemo, kajti če iz poljubnega pravilno postavljenega zaporedja domin odstranimo dvojnike, so ostale domine še vedno pravilno razporejene. Obratno pa moremo dvojnike vedno vriniti v pravilno postavljeno zaporedje drugih domin (primerjaj sl. 6 *b* in 6 *c*). Domenimo se še, kako bomo označevali domine, da jih ne bo treba risati: simbol (i, j) naj pomeni domino, ki ima na enem polju i, na drugem pa j pik. V skladu s to

definicijo je seveda $(i, j) = (j, i)$. Ko smo odstranili dvojnike, nam je ostalo $\binom{9}{2} = 36$ domin: (0, 1), (0, 2), ..., (0, 8), (1, 2), ..., (7,8). Temu sistemu domin bomo priredili neki graf. Imel bo devet vozlišč: a_0, a_1, ..., a_8. Domine bomo predstavili z vejami v tem grafu: domino (i, j) bo predstavljala veja (a_i, a_j). Očitno bo vsaki dve vozlišči vezala ena veja. To pomeni, da bomo dobili poln graf z 9 vozlišči (glej sl. 7). Vsakemu zaporedju domin priredimo ustrezno zaporedje vej grafa. Pravilno postavljenemu zaporedju domin bo tedaj ustrezala neka pot po grafu. Vprašanje, ali je mogoče vse domine pravilno razvrstiti v sklenjen krog, lahko zato izrečemo takole: Ali eksistira Eulerjev cikel v našem grafu? Ker ima vsako vozlišče stopnjo 8, je odgovor *da*.

Zdaj nam je tudi jasno, zakaj je v navadi sistem domin, ki imajo na svojih poljih od 0 do 8 pik (včasih tudi od 0 do 6 pik); nikoli pa ne vidimo sistema domin, pri katerih bi šlo število pik na poljih od 0 do 7 ali od 0 do 9. Pri takem sistemu bi namreč imeli v prirejenem grafu sama liha vozlišča. Izrek 3 nam pove, da se igra pri takem sistemu nikoli ne bi izšla; če bi domine kakorkoli polagali, bi se igra zaprla, preden bi porabili vse domine. V enakem položaju smo, če se nam nekaj domin izgubi: v multigrafu na sl. 7 postanejo nekatera vozlišča liha. Če se oborožimo s teorijo grafov, bomo pa vedno lahko našli pot iz te težave: če odstranimo še nekaj primerno izbranih domin, bodo spet vsa vozlišča v grafu postala soda. Najenostavnejša metoda je tale: Veje, ki predstavljajo izgubljene domine, je treba s čim manj dodatnimi vejami dopolniti do cikla (ali do več ločenih ciklov), nato pa odstraniti iz igre domine, ki ustrezajo dodanim vejam. Primer: Če sta se izgubili domini (0,3) in (1,6), moramo odstraniti še domini (0,1) in (3, 6) ali pa (0,6) in (1, 3).

K Eulerjevi nalogi (to je k nalogi poiskati Eulerjevo pot) je dualna *Hamiltonova naloga*: poiskati pot po danem multigrafu, ki bo šla skozi vsako vozlišče multigrafa natančno enkrat. Tako pot imenujemo *Hamiltonova pot*. Tudi za ta problem najdemo veliko uporabe pri raznih zabavnih nalogah in tudi pri bolj resnih vprašanjih. Hamiltonova naloga je znatno težja od Eulerjeve. Precej jasno je, da se smemo omejiti na navadne grafe: tudi če je med dvema vozliščema v multigrafu več vej, bo Hamiltonova pot — če eksistira — vsebovala kvečjemu eno od njih. Dosti je grafov, v katerih lahko najdemo Hamiltonovo pot; za veliko grafov je pa dokazano, da v njih take poti ni. Vendar ni za zdaj znan še noben splošen izrek, ki bi dal potreben in zadosten pogoj za to, da v poljubnem grafu eksistira Hamiltonova pot.

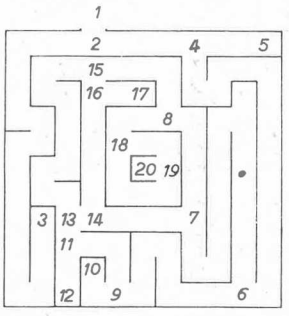
2. Iskanje poti

V tem paragrafu nas bodo zanimala tudi taka zvezna zaporedja vej multigrafa v katerih lahko nekatere veje nastopajo po večkrat. Ker nimamo drugega primernega izraza, bomo tudi ta zaporedja imenovali poti. Včasih bomo dali to besedo v narekovaje, če jo bomo rabili v tem pomenu, da se izognemo dvoumju.

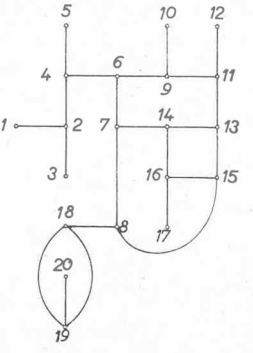
Ukvarjali se bomo z vprašanjem, kako naj v danem multigrafu poiščemo pot od enega vozlišča do drugega. Morda se zdi na prvi pogled, da je to vprašanje le poenostavitev Eulerjeve naloge iz prejšnjega paragrafa. Toda problem bo tu malo drugačen. Ne zanima nas eksistenca poti — ker je graf povezan, pot eksistira — ampak metoda, po kateri pot res poiščemo. Če imamo pred seboj multigraf narisan, navadno res ni težko kar z očmi poiskati pot od enega

vozlišča do drugega. Drugače pa je, če nimamo pregleda čez ves multigraf, ampak vidimo samo tisto vejo, po kateri se ravno gibljemo. Oglejmo si npr. problem labirinta!

Na sl. 8. je narisan namišljen labirint. Kako bi poiskali pot od vhoda, ki je označen z 1, do središča labirinta, označenega z 20, in nazaj ven? Labirintu bomo priredili neki multigraf. Označimo z zaporednimi številkami vsa razvejišča hodnikov in konce vseh slepih hodnikov! Te točke bomo vzeli za vozlišča multigrafa; veje pa bodo pomenile hodnike, ki vežejo označene točke v labirintu. Tako pridemo do multigrafa na sl. 9.



Slika 8



Slika 9

Če res hodimo po blodnjaku in nimamo pri sebi njegovega načrta, seveda ne moremo pričakovati, da bomo kar takoj našli pravo pot. Treba bo poizkušati in se po nekaterih hodnikih vračati. S samim slepim poizkušanjem pa seveda tudi ne bo nič. Kvečjemu izgubili se bomo. Eden od načinov sistematične hoje po labirintu je ta, da ves čas hodimo tik ob desni steni in neprestano zavijamo na desno; najbolj varno je, če se kar z desno roko držimo desne stene (seveda je leva stena prav tako dobra). Če se držimo tega pravila, bomo vsaj zagotovo prišli nazaj ven, če že ne bomo našli središča. Kar poglejmo! Če kar naprej hodimo in hodimo, imamo zaradi končnosti labirinta le dve možnosti: ali bomo prej ali slej prišli ven ali pa bomo kar naprej hodili po nekakšnih krožnih poteh, ne da bi kdaj prišli do izhoda (ni pa treba, da bi venomer ponavljali isto krožno pot; v principu bi lahko neperiodično menjali več različnih cikličnih poti). Toda ta drugi primer je izključen. V labirintu bi namreč tedaj eksistirale krožne poti, ki bi jih prehodili neskončnokrat, če bi res nadaljevali svojo pot v neskončno, in nekaj hodnikov, po katerih bi šli pri svojem blodenju le končno mnogokrat. Prej ali slej bi prišel trenutek, ko bi zadnjikrat šli po enem od teh hodnikov. Imenujmo ta hodnik q! Vodil bi nas na neko krožno pot, ki bi jo pri nadaljnjem blodenju prehodili še neskočnokrat. Toda, že ko bi jo prvič obhodili, bi prišli nazaj do točke, kjer se stikata ta krožna pot in hodnik q. Temu hodniku bi se zdaj približali od leve in v skladu s principom zavijanja na desno bi morali kreniti po hodniku q. To pa je v nasprotju s privzetkom, da smo prej šli zadnjikrat po q. To nam dokazuje, da nas »desno pravilo« res privede nazaj iz labirinta.

Kljub temu pa nas ta način ne zadovolji popolnoma. V blodnjaku na sl. 8 npr. nas »desno pravilo« ne bo nikoli pripeljalo do središča, kajti to leži na

»otoku«, na katerega nikoli ne pridemo, dokler hodimo samo ob stenah in ne prečkamo nobenega hodnika. Odstopati pa od desnega pravila ne smemo, če hočemo, da nam kaj pomaga; če bi na nepravem mestu zapustili desno steno in prešli k drugi steni, bi se lahko izgubili. Ko se že enkrat izgubimo, pa nam »desno pravilo« nič več ne pomaga.

Potrebujemo torej metodo, s katero bomo našli tako pot po labirintu (oziroma po multigrafu), ki bo vodila skozi vsak hodnik (po vsaki veji) najmanj enkrat. Prava pot v smislu teorije grafov to v splošnem ne bo; taka obstaja samo v primeru, da ima multigraf sama soda vozlišča. V splošnem bo torej treba iti po nekaterih vejah multigrafa večkrat. Želimo si seveda, da bi bilo čimmanj ponavljanja. Naslednji izrek nam zagotovi, da vedno obstaja vsaj taka pot, ki gre po vsaki veji samo dvakrat. Seveda s tem ni rečeno, da bolj »ekonomične« poti ni.

Izrek 5. *V vsakem multigrafu eksistira »pot«, ki gre po vsaki veji dvakrat: enkrat v eni in drugič v drugi smeri.*

Dokaz: Razcepimo vsako vejo v danem multigrafu na dvoje; to je: konstruirajmo multigraf, ki bo imel ista vozlišča kot prvotni, vsako vejo prvotnega multigrafa pa zamenjajmo z dvema paralelnima vejama! Nato pa vsaki dve taki veji, ki ustrezata eni sami v prvotnem multigrafu, usmerimo eno nasproti drugi! Dobimo orientiran multigraf, ki ima pri vsakem vozlišču prav toliko vhodnih kot izhodnih vej. Po izreku 4 obstaja v tem multigrafu usmerjena ciklična pot, ki vsebuje vse veje. V prvotnem multigrafu pa tej usmerjeni poti ustreza »pot«, ki gre po vsaki veji enkrat v eni in drugič v nasprotni smeri.

Drugo vprašanje pa je, kako tako pot res najdemo. *Tarry* je našel neko dovolj preprosto metodo. Upoštevati je treba naslednji navodili:

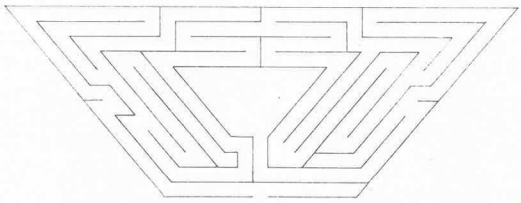
1. Med gibanjem po multigrafu moramo vsakič, kadar krenemo iz kakega vozlišča po kaki veji, to vejo in to smer označiti, tako da bomo kasneje lahko spoznali, da smo vejo v tej smeri že uporabili. Poleg tega pa je treba še posebej označiti vsako vejo, ki nas pripelje v vozlišče, v katerem še nismo bili.

2. Začnemo lahko v poljubnem vozlišču (če začetek ni predpisan). Kadarkoli pridemo med gibanjem po multigrafu v kako vozlišče, si lahko izberemo nadaljevanje precej poljubno, le naslednji dve zahtevi moramo ubogati: nikoli ne smemo kreniti po veji, ki smo jo v tisti smeri že uporabili; dokler je še kaj drugih neuporabljenih izhodov iz vozlišča, ne smemo izbrati veje, po kateri smo prvič prišli v tisto vozlišče.

Pot nadaljujemo, dokler moremo. *Če res sledimo zgornjima navodiloma, opiše pot vsako vejo multigrafa dvakrat — po enkrat v vsaki smeri — in se konča v vozlišču, v katerem smo začeli.*

Dokaz: Začetno vozlišče označimo z u! Podobno kot pri izreku 1 dokažemo, da se pot ne more končati drugje kot v u. Pri vsakem vozlišču imamo namreč prav toliko izhodov kot vhodov. Ko se nam enkrat primeri, da v neko vozlišče pridemo, ven pa ne moremo več, smo gotovo v u, kajti le pri tem vozlišču porabimo vsakič najprej en izhod in šele nato en vhod. Če smo se držali pravila 2, smo gotovo prešli vsako vejo v vsaki smeri kvečjemu enkrat. Treba je le še dokazati, da ne ostane nobena veja, ki ni bila prehojena v obeh smereh. Najprej vidimo tole: ko je enkrat konec poti, smo porabili pri vsakem vozlišču prav toliko vhodnih smeri kot izhodnih, zato nam tudi ostane pri vsakem vozlišču

enako mnogo vhodnih in izhodnih smeri. Pri vozlišču u gotovo ne ostane neprehojena nobena izhodna smer (saj bi sicer poti ne bilo konec), zato ne ostane tudi nobena vhodna smer. Naj bo v vozlišče, v katerega smo prišli iz u pri prvem koraku, to je čisto na začetku poti. Če bi na koncu ostala pri v še kaka izhodna smer nezasedena, bi zaradi pravila 2 ostala neprehojena tudi tista veja (v smeri od v k u), po kateri smo pri prvem koraku prišli iz u v v. To pa ni mogoče, saj smo že ugotovili, da pri u ne ostane nobena vhodna smer neuporabljena. Čisto podobno dokažemo s popolno indukcijo, da porabi naša pot pri vsakem vozlišču, v katerega sploh kdaj dospe, vse veje v vhodni in izhodni smeri. Od tod pa sledi, da pot dospe v vsako vozlišče, torej porabi okoli vsakega vozlišča v multigrafu vse veje v obeh smereh. S tem je pravilnost Tarryjeve metode dokazana. Bralec pa lahko sam preizkusi njeno uporabnost pri labirintu na sl. 8 ali pa pri tistem na sl. 10. Ta labirint pa res eksistira; napravljen je v parku v Hampton Courtu v Angliji.



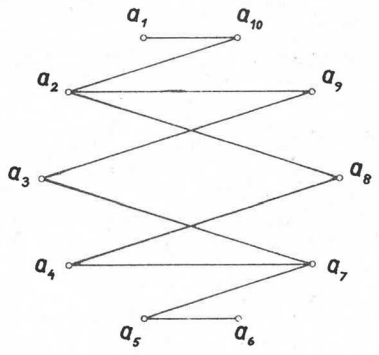
Slika 10

Vsak problem, pri katerem je treba dano situacijo prevesti z nekaj potezami v določeno drugo, se da izraziti kot naloga najti pot med dvema vozliščema v multigrafu, katerega vozlišča predstavljajo vse možne situacije, veje pa vse možne poteze. Veliko zabavnih nalog — morda kar tretjina — se da izraziti v tej obliki. Seveda ni pri teh nalogah navadno prav nič težko najti pot, ko multigraf že enkrat imamo. Najbolj znana je najbrž naloga o pastirju, volku, kozi in zeljnati glavi. Pastir mora vse skupaj spraviti prek reke. Pri tem ima na voljo le čolnič, v katerem lahko prepelje le po eno od treh stvari, ki jih ima s seboj. Paziti pa mora, da ne pride ob kozo ali ob zelje. Označimo pastirja s P, volka z V, kozo s K, zelje z Z, reko pa z navpično črto $|$! Če pastir noče zaupati koze volku ali zelja kozi, sme dopustiti le naslednje situacije:

a_1:	$PVKZ$ |		a_6 :		| $PVKZ$
a_2:	PVZ	| K	a_7 :	K	| PVZ
a_3:	PVK	| Z	a_8 :	Z	| PVK
a_4:	PKZ	| V	a_9 :	V	| PKZ
a_5:	PK	| VZ	a_{10}:	VZ	| PK

Na sl. 11 imamo graf, katerega vozlišča pomenijo ravno vse te položaje, vsaka veja pa povezuje taka dva položaja, ki lahko preideta eden v drugega v eni potezi, to je pri eni vožnji čez reko. Vidimo, da vodita od začetne situacije a_1 do končne a_6 dve enako dolgi poti.

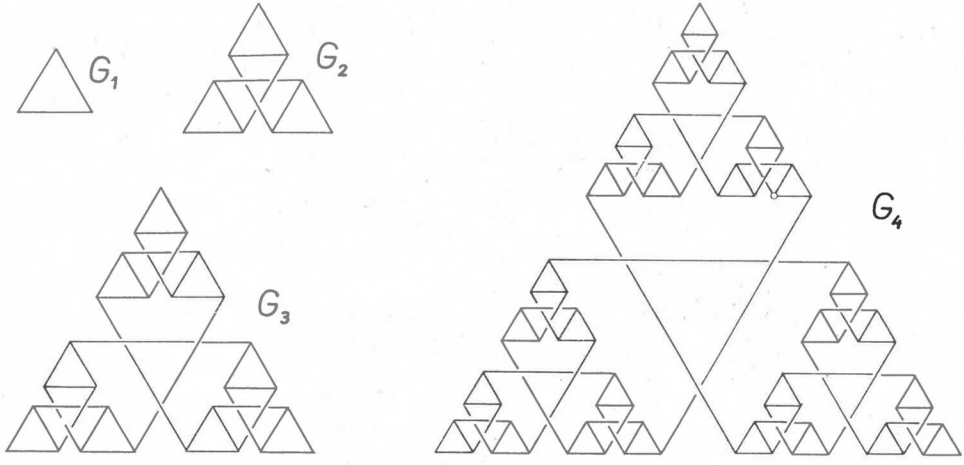
Eden težjih problemov te vrste je igra s *hanojskim stolpom.* Imamo n krožnih ploščic, ki so vse različnih velikosti. Poleg tega imamo deščico, skozi katero so zabiti trije žeblji. Deščico položimo na mizo tako, da štrle žeblji navzgor. Vsaka ploščica ima v sredi luknjo, tako da jo lahko natikamo na žeblje. Na prvi žebelj nataknemo najprej največjo ploščico, nanjo položimo



Slika 11

drugo največjo itd., na koncu najmanjšo. Ta stavba se imenuje hanojski stolp. Naloga zahteva, da prenesemo stolp na enega od drugih dveh žebljev. Pri tem smemo ploščice le natikati na vse tri žeblje, drugam jih ne smemo odlagati. Pri vsaki potezi smemo prenesti le eno ploščico; poleg tega ne smemo nikdar položiti večje ploščice na manjšo.

Multigraf (pravzaprav je navaden graf), ki ustreza igri z n ploščicami, označimo z G_n! G_1 je očitno kar trikotnik. S popolno indukcijo lahko dokažemo, da je naloga rešljiva za vsak n. Obenem ugotovimo, da dobimo G_n tako, da v G_{n-1} nadomestimo vsako vozlišče z grafom G_1 (ali pa tako, da v G_1 nadomestimo vsako vozlišče z G_{n-1}) in potem vozlišča pravilno zvežemo. Prve štiri grafe imamo na sl. 12.



Slika 12

Lahko je tudi ugotoviti, katero stanje igre pomeni določeno vozlišče v G_n. Naj pomeni npr. levo spodaj prvi žebelj, desno spodaj drugi in zgoraj tretji žebelj. Véliki trikotnik naj pomeni največjo ploščico, drugi največji drugo največjo ploščco itd. Vozlišče, ki je v G_4 označeno s krožcem, leži v vélikem trikotniku zgoraj, v drugem največjem trikotniku desno spodaj, v tretjem tudi desno spodaj in v najmanjšem trikotniku levo spodaj. To vozlišče pomeni torej takole razporeditev: največja ploščica na tretjem žeblju, druga in tretja na drugem in najmanjša ploščica na prvem žeblju.

Graf G_n lahko narišemo tudi v nekoliko enostavnejši obliki. Vendar pri kakem drugem prikazu ne bi bilo tako lahko ugotoviti, kateri položaj pomeni dano vozlišče.

3. Najkrajša pot med dvema vozliščema

Dolžina poti v multigrafu navadno pomeni število vej, ki jih pot vsebuje. Vzeli bomo nekoliko splošnejšo definicijo. Naj bo vsaki veji q v multigrafu prirejeno neko pozitivno število $l(q)$, ki ga bomo imenovali *dolžina* veje q. V konkretnih primerih lahko l predstavlja najrazličnejše količine. Že če veje res pomenijo odseke poti (pri multigrafih, ki predstavljajo mreže teh ali onih prometnih zvez), je lahko l prava dolžina veje, čas, ki ga porabimo, da prevozimo ali prehodimo vejo, cena prevoza in podobno; če veje pomenijo poteze pri kaki igri, je lahko l merilo za tveganje pri potezi itd. Za poljubno pot $S = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$ lahko definiramo dolžino takole: $l(S) = \sum_{k=1}^{r} l(q_k)$. Definicija dolžine poti, ki smo jo navedli v začetku, je poseben primer te: če za vsako vejo q vzamemo $l(q) = 1$, je dolžina poti res kar število vej, ki jih pot vsebuje. Obravnavali bomo naslednjo nalogo:

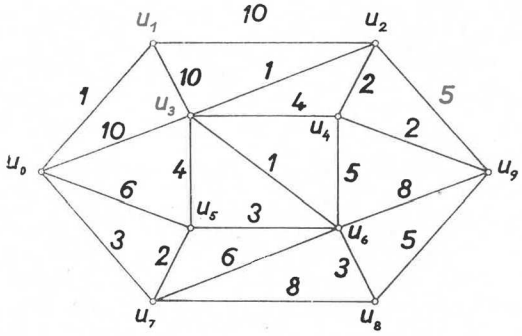
V danem multigrafu je vsaki veji q prirejena pozitivna dolžina $l(q)$. Poišči najkrajšo pot od danega vozlišča u do danega vozlišča v!

Zdi se, da je ta naloga posplošitev tiste, ki smo jo reševali v prejšnjem paragrafu. Vendar ne bo čisto tako. Pri prejšnji nalogi je bilo treba poiskati pot po neznanem multigrafu, tu pa bomo vzeli, da multigraf natančno poznamo. Zato je naša naloga v principu čisto enostavna: treba je le poiskati vse možne poti med u in v ter med njimi izbrati najkrajšo. Praktično pa naloge tako ne moremo rešiti, vsaj pri obsežnejših multigrafih ne. Dovolj težko bi že bilo najti metodo, po kateri bi poiskali res vse poti med danima vozliščema. Poleg tega pa je število poti kaj kmalu tako veliko, da tak preprost in zamuden postopek ne pride v poštev. Treba bo najti primernejšo metodo. Graf na sl. 13 npr. je dovolj majhen in enostaven, pa vseeno ne bomo kar precej našli najkrajše poti med u_0 in u_9 (številke ob vejah pomenijo dolžine vej).

Prav isto nalogo kot zgoraj si lahko zastavimo tudi za usmerjene multigrafe. Tu bomo iskali najkrajšo *usmerjeno* pot od u do v. Seveda mora voditi od u do v najmanj ena usmerjena pot, da je naloga smiselna. Pravzaprav lahko privzamemo, da vodi vsaj po ena pot od u do vsakega vozlišča v multigrafu. Če bi ne bilo nobene usmerjene poti npr. od u do v', bi lahko brez škode za našo nalogo izločili iz multigrafa vozlišče v' z vsemi njegovimi vhodnimi in izhodnimi vejami, saj prek tega vozlišča in teh vej ne more voditi nobena pot od u do v.

Problema najkrajše poti nam ni treba obravnavati posebej za usmerjene in neusmerjene multigrafe. Zadostuje, če obravnavamo usmerjene, saj lahko

iz neusmerjenega multigrafa napravimo usmerjenega tako, da vsako vejo razcepimo na dve in ti dve usmerimo eno nasproti drugi. Dalje je očitno, da smemo namesto multigrafov obravnavati kar navadne grafe: če vodi iz kakega vozlišča x v drugo vozlišče y več vej, lahko brez škode izpustimo vse razen najkrajše. V navadnem grafu (oziroma usmerjenem grafu) pa je veja točno



Slika 13

določena z obema krajiščema (oziroma z začetnim in končnim vozliščem). Zato bomo pisali kar $l(x, y)$ namesto $l(q)$, če vodi veja q od vozlišča x do vozlišča y. Razložili bomo *Fordovo* metodo za reševanje naloge o najkrajši poti. Metoda je zelo enostavna in jo lahko mehaniziramo, tako da je primerna za računalnik.

Graf (V, Q) naj ima vozlišča $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Vsaj po ena pot naj vodi od u_0 do vsakega drugega vozlišča u_i (nič nismo rekli, ali je graf usmerjen ali ne; Fordova metoda se namreč opiše z istimi besedami za usmerjene in neusmerjene grafe). Vsaki veji $(u_i, u_j) \in Q$ naj bo prirejena pozitivna dolžina $l(u_i, u_j)$. Če hočemo, lahko definiramo $l(u_i, u_j)$ tudi za tiste pare vozlišč (u_i, u_j), ki niso veje: če $(u_i, u_j) \notin Q$, naj bo $l(u_i, u_j) = \infty$ za $i \neq j$ in $l(u_i, u_j) = 0$ za $i = j$. Treba je poiskati najkrajšo pot od u_0 do u_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$.

Vsakemu vozlišču u_i bomo priredili neko število h_i, ki ga bomo imenovali *višino* vozlišča u_i. Do pravih vrednosti h_i bomo prišli šele v nekaj korakih. V začetku naj bo $h_0 = 0$ in $h_i = \infty$ za $i > 0$. Nato pa vrednosti $h_1, h_2, \ldots, h_n$ postopoma popravljamo tako, da ponavljamo naslednji proces:

(*A*) Za $i = 1$ primerjamo višino h_i zaporedoma z vsemi števili $h_j + l(u_j, u_i)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Kadarkoli pridemo do takega j, da je trenutna vrednost h_i večja kot $h_j + l(u_j, u_i)$, zmanjšamo h_i na $h_j + l(u_j, u_i)$. Ko opravimo z $i = 1$, ponovimo isti postopek za $i = 2$, nato za $i = 3$ itd. in končno še za $i = n$.

Trdimo: *Ko postopek (A) nekajkrat ponovimo, se* $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *ne spreminjajo več. Te stacionarne vrednosti (skupaj s* $h_0 = 0$*) vzamemo za dokončne vrednosti višin vozlišč. Zdaj eksistira najmanj eno tako zaporedje* $k_0 = m, k_1, k_2, \ldots$, *da za vsak* s $(s = 1, 2, \ldots)$ velja $h_{k_{s-1}} - h_{k_s} = l(u_{k_s}, u_{k_{s-1}})$. *Za neki indeks* r *je* $k_{r+1} = 0$. *Pot, ki gre po vrsti skozi vozlišča* $u_0, u_{k_r}, \ldots, u_{k_1}, u_m$, *je ena od najkrajših poti od* u_0 *do* u_m. *Njena dolžina je* h_m.

Dokaz: Privzemimo, da bi bilo treba ponavljati postopek (*A*) brez konca, ker bi nikdar ne dosegli dokončnih vrednosti višin! Izberimo si poljuben i $(1 \leqslant i \leqslant n)$! Vse vrednosti, ki jih višina h_i zavzame med ponavljanjem po-

stopka (A), sestavljajo monotono nenaraščajoče zaporedje. Ker je to navzdol omejeno z 0, konvergira. Limito označimo z g_i! Nekatera vozlišča dosežejo morda te svoje limite že po nekaj korakih. Naj višine vseh teh vozlišč zavzamejo svoje dokončne vrednosti po M ponovitvah postopka (A). Po našem privzetku nekaj višin nikdar ne pride do svojih dokončnih vrednosti. Naj ima med temi višinami h_s najmanjšo limitno vrednost g_s. Za vsa vozlišča u_i, katerih višine se spreminjajo brez konca, velja torej stalno $h_i > g_s$. Dolžino najkrajše veje v grafu označimo z λ! Vzemimo tako veliko naravno število $N \geqslant M + 2$, da po N ponovitvah postopka (A) velja $h_s < g_s + \lambda$. Hitro bomo videli, da se od N-tega koraka dalje višina h_s ne more več spremeniti. Zmanjšanje višine h_s more namreč povzročiti le tako vozlišče, ki je samo spremenilo svojo višino pri istem ali pri prejšnjem koraku, torej nobeno od tistih vozlišč, ki so dosegla svoje dokončne višine že po M korakih. Po drugi strani pa se lahko višina h_s spremeni le zaradi takega vozlišča u_i, za katerega je $h_s > h_i + l(u_i, u_s) > g_s + \lambda$. Ker pa po N ponovitvah postopka (A) že velja $h_s < g_s + \lambda$, se h_s res ne more več spreminjati. To pa je v nasprotju s privzetkom, da je u_s eno od tistih vozlišč, ki spreminjajo svoje višine brez konca.

Vse višine h_i torej res zavzamejo dokončne vrednosti po nekaj korakih. Če je S poljubna pot, ki veže u_0 in u_i — najmanj ena taka pot obstaja — potem je očitno $h_i \leqslant l(S)$. Vse višine so torej končne, zato se je pri ponavljanju postopka (A) vsaka vsaj enkrat spremenila (razen h_0 seveda). Za vsako vozlišče u_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) eksistira torej vozlišče u_j, ki je zadnje povzročilo spremembo višine h_i; očitno velja $h_i - h_j = l(u_j, u_i)$. Zato res lahko konstruiramo tako zaporedje $u_m, u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots$ (ki ga lahko nadaljujemo, dokler ne pridemo do u_0: npr. $k_{r+1} = 0$), tako, da bo $h_m - h_{k_1} = l(u_{k_1}, u_m)$, $h_{k_1} - h_{k_2} = l(u_{k_2}, u_{k_1}), \ldots$, $h_{k_r} - h_0 = l(u_0, u_{k_r})$. Če vse te enačbe seštejemo, dobimo, da ima pot T, ki gre po vrsti skozi vozlišča $u_0, u_{k_r}, \ldots, u_{k_1}, u_m$, dolžino $h_m - h_0 = h_m$. Ker za vsako drugo pot S, ki gre od u_0 do u_m, velja $h_m \leqslant l(S)$, kot smo že omenili, je res T ena od najkrajših poti od u_0 do u_m.

Pri grafu na sl. 13 imajo vozlišča naslednje višine: $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, $h_2 = 10$, $h_3 = 9$, $h_4 = 12$, $h_5 = 5$, $h_6 = 8$, $h_7 = 3$, $h_8 = 11$, $h_9 = 14$. Najkrajša pot od u_0 do u_9 gre prek vozlišč $u_0, u_7, u_5, u_6, u_3, u_2, u_4, u_9$.

Oglejmo si še en primer! Vzemimo, da moramo v vojni pripeljati konvoj iz enega pristanišča v drugo, precej oddaljeno! Med potovanjem se lahko ustavljamo tudi v vmesnih pristaniščih, kjer je konvoj varen pred podmornicami. Za vsako pot med dvema pristaniščema imamo dano (npr. statistično ugotovljeno) verjetnost, da jo na tisti poti srečno odnesemo. Privzemimo, da je ta verjetnost odvisna samo od tega kosa poti, nič pa od tega, kje smo se prej vozili! Treba je poiskati najvarnejšo pot od začetnega do končnega pristanišča.

Seveda bomo tudi to situacijo ponazorili z grafom. Pristanišča se bodo spremenila v vozlišča grafa, plovne poti pa v veje. Pravzaprav bomo vzeli za veje le tiste poti, za katere je verjetnost, da je na njih ne bomo izkupili, večja od 0. Označimo s $p(q)$ verjetnost, da jo bomo na veji q srečno odnesli. Pri naši supoziciji, da je verjetnost $p(q)$ odvisna res samo od q, nič pa od poti, ki smo jo morda prevozili že pred vejo q, je verjetnost, da bomo pot $S = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ prevozili brez nesreče, enaka $p(S) = p(q_1)\, p(q_2) \ldots p(q_m)$. Če vzamemo za dolžino veje izraz $l(q) = -\log p(q)$, se naš problem spremeni v problem najkrajše poti po grafu.

Bolje pa bi resnici ustrezal privzetek, da verjetnost $p(q)$ ni odvisna samo od veje q, ampak tudi od poti, ki smo jo prepluli pred to vejo: če je konvoj predolgo na poti, je nevarnost, da ga sovražnik izsledi in potopi, vse večja, čeprav so posamezni kosi poti sami za sebe zelo varni. Pri tem privzetku bi za pot $S = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ veljala tale formula:

$$p(S) = p(q_1)\, p(q_2/q_1) \ldots p(q_m/q_1, q_2, \ldots, q_{m-1})$$

Pri tem pomeni $p(q_r/q_1, q_2, \ldots, q_{r-1})$ verjetnost, da se bo pot po veji q_r srečno končala, če smo prej prepluli že pot $(q_1, q_2, \ldots, q_{r-1})$. Zdaj bi nas naš problem pripeljal do naslednje naloge v teoriji grafov: Imamo multigraf (usmerjen ali neusmerjen) in predpis, ki vsaki poti S po multigrafu priredi neko pozitivno število $l(S)$ — dolžino poti. Treba je poiskati najkrajšo pot od vozlišča u do vozlišča v (pri pogoju, da najmanj ena taka pot eksistira). Ta naloga bi bila posplošitev tiste, ki smo jo reševali zgoraj. S tem posplošenim problemom pa se ne bomo ukvarjali.

LITERATURA

1. Applied combinatorial mathematics, ed. E. D. Beckenbach, New York—London—Sydney, 1964.
2. B. H. Arnold, Intuitive concepts in elementary topology, Englewood Cliffs, 1962.
3. C. Berge, Théorie des graphes et ses applications, Paris, 1958.
4. D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.
5. W. Lietzmann, Anschauliche Topologie, München, 1955.
6. O. Ore, Theory of graphs, Providence, 1962.

NOVA TEORIJA GRAVITACIJE

(Dvomi v splošno teorijo relativnosti)

J. STRNAD

Teorija gravitacijskega polja ni med najpomembnejšimi območji sodobne fizike. Gravitacijska sila je prešibka, da bi se zanjo zanimali fiziki, ki preučujejo atome, atomska jedra in osnovne delce. Zaradi velikega dosega in sorazmernosti z maso je pomembna le v astronomiji. A skupaj z zanimanjem za astrofiziko v zadnjem času narašča tudi zanimanje za teorijo gravitacijskega polja. Med vsemi teorijami je imela doslej zdaleč največjo veljavo Einsteinova splošna teorija relativnosti iz leta 1916. Marsikateri fizik je živel v prepričanju, da je to edina prava teorija gravitacijskega polja in da je vsaka druga teorija že vnaprej obsojena na neuspeh. Toda zdaj se, kot kaže, kopičijo namigi o tem, da splošna teorija relativnosti ne velja. Glavna zasluga za to gre R. H. Dickeju.

Dvom se ne nanaša na specialno teorijo relativnosti, ki je vsestransko podprta z rezultati poskusov in z uspehom na njej osnovanih teorij.

V prvem delu tega sestavka bomo opisali nove merske rezultate pri pojavih, ki so veljali kot glavni dokazi za veljavnost splošne teorije relativnosti. V drugem delu bomo omenili poskus in nekaj opazovanj, ki se ne skladajo s to teorijo. V tretjem pa bomo v skopih obrisih nakazali novo teorijo.

I

Za splošno teorijo relativnosti naj bi pričali: vpliv gravitacijskega polja na frekvenco svetlobe, odklon svetlobnega curka z zvezde pri prehodu mimo Sonca in sukanje Merkurjevega perihelija.[1]

Vpliv gravitacijskega polja na frekvenco svetlobe. Nova merjenja potrjujejo napoved splošne teorije relativnosti. Toda tega ne moremo imeti za dokaz o veljavnosti teorije. Do iste napovedi pridemo namreč samo z Newtonovim gravitacijskim zakonom, energijskim zakonom, enačbo $W = h\nu$ za energijo fotona iz kvantne mehanike in zvezo $W = mc^2$ med maso in energijo iz specialne teorije relativnosti. Trdimo, da se ohrani skupna energija fotona, h kateri štejemo tudi njegovo potencialno energijo v gravitacijskem polju: $W' + W'_p = W + W_p$. Na kraju, kjer je potencialna energija W'_p, je $W' = h\nu'$ energija fotona, ki ga izseva atom ali atomsko jedro pri prehodu med stanjema z izbrano energijo. Na kraju, kjer je potencialna energija W_p, pa zaznamo foton z energijo $W = h\nu$. Za razliko frekvenc dobimo tako

$$\nu - \nu' = (W_p' - W_p)/h \qquad (1)$$

Na površju Sonca ima izsevani foton potencialno energijo $W_p' = -\varkappa mM/R = -\varkappa WM/c^2 R = -\varkappa h\nu M/c^2 R$. Tu je $R = 6{,}96.10^8$ m radij in $M = 1{,}99.10^{30}$ kg masa Sonca ter $\varkappa = 6{,}67.10^{-11}$ Nm^2/kg^2 gravitacijska konstanta.

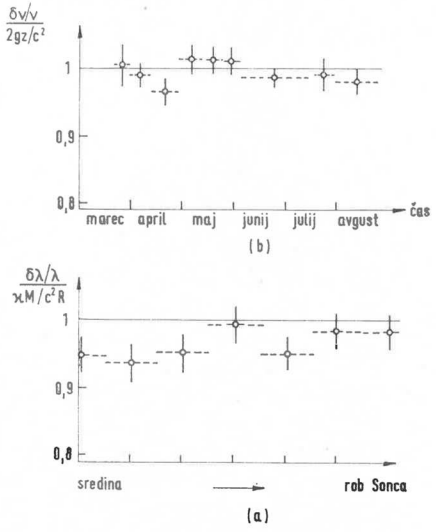
Na Zemlji, kjer foton zaznamo, je njegova potencialna energija okoli pettisočkrat manjša, tako da lahko postavimo $W_p = 0$. S tem dobimo iz enačbe (1) za relativno razliko frekvenc

$$\delta\nu/\nu = (\nu - \nu')/\nu = -\varkappa M/c^2 R \qquad (1\,a)$$

Relativna razlika valovnih dolžin je zaradi zveze $c = \lambda\nu$ enaka $\delta\lambda/\lambda = -\delta\nu/\nu$. Z zapisanimi podatki izračunamo $\delta\lambda/\lambda = 2{,}1.10^{-6}$. Ločljivost sodobnih spektrografov je precej boljša kot 10^{-6}.

Merijo valovno dolžino absorpcijskih črt, ki nastanejo ob prehodu mešane svetlobe s sončnega površja skozi nekoliko hladnejše plasti plina. Seveda so premaknjene tudi absorpcijske črte, če je relativni premik valovne dolžine enak po vsem spektru. Dolgo časa enačbe (1 a) niso mogli potrditi s poskusi. Sicer so s fotografiranjem sončnega spektra ugotovili premik črt, toda izmerjeni relativni premik $\delta\lambda/\lambda$ je bil za različne črte različen. Poleg tega je bil odvisen tudi od tega, ali je prišla svetloba z roba sončne plošče ali z njene sredine.

Potrditev je uspela šele 1962 J. Braultu.[2] Neuspeha prejšnjih merjenj so bili najbrž krivi tokovi na Soncu. Zaradi velike hitrosti plina v toku je preveč motila Dopplerjeva sprememba valovne dolžine. Brault pa je zgradil napravo, s katero je lahko opazoval poprečje za dovolj veliko območje Sonca. Omejil se je na natrijevo črto, ki nastane ob prehodu natrijevega atoma iz osnovnega stanja v prvo vzbujeno stanje, z valovno dolžino 5895,93 Å. Ta črta je zelo izrazita. Poleg tega ima natrij majhno ionizacijsko energijo. Zato v vrhnjih, vročih in hitro se gibajočih plasteh ni natrijevih atomov, da bi absorbirali to valovno dolžino in zato Dopplerjev pojav ne moti.



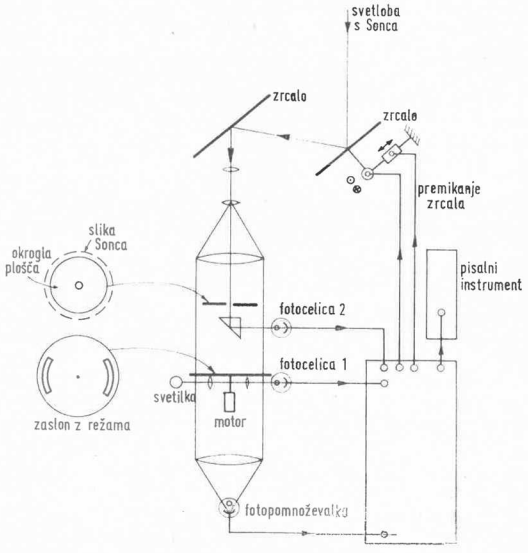
Sl. 1. (a) Relativna sprememba valovne dolžine za natrijevo črto s Sonca. Izmerjeni premik $\delta\lambda$ je okoli 0,01 Å. Ti rezultati so dobljeni za amplitudo srednje reže 0,072 Å v merilu za valovno dolžino.[2] (b) Relativna sprememba frekvence pri poskusu z Mössbauerjevim pojavom, ko je višinska razlika $z = 25$ m. Izmerjena relativna sprememba frekvence $\delta\nu/\nu$ okoli $5{,}5.10^{-15}$ priča o izredni ločljivosti[4]. Vodoravna črta je teoretična vrednost. Točke so izmerjena poprečja, navpične črtice ponazarjajo efektivne napake in vodoravne črtice širino intervalov.

Del razklonjene sončne svetlobe v neposredni okolici natrijeve črte gre skozi »mrežico« s tremi režami. Srednja od teh rež niha sinusno z majhno amplitudo v prečni smeri. Po prehodu skozi mrežico pade svetloba na fotopomnoževalko. Mirovna lega srednje reže se ujema z vrhom črte, če v ojačenem toku s fotopomnoževalke ni sinusne sestavine s frekvenco nihanja reže. Elektronska naprava krmili motor, ki potisne mrežico vselej v lego, da je izpolnjena zgornja zahteva. Naprava sproti beleži lego mrežice, iz te pa sklepajo naravnost na lego vrha črte. Naprava deluje, ko gre zaradi vrtenja Zemlje slika sončne ploščе od sredine do roba prek vstopne reže. Dobljeni diagram za odvisnost lege mrežice razdelijo na več intervalov in za vsak interval izračunajo poprečno lego mrežice. Napravo še umerijo s svetlobo iz natrijeve svetilke, pa lahko iz poprečne lege mrežice izračunajo poprečno valovno dolžino vrha črte. Merijo pri treh različnih amplitudah srednje reže, da določijo popravke zaradi asimetričnosti črte. Dobljena relativna sprememba za valovno dolžino se dobro ujema z napovedano, pri čemer je negotovost še $\pm$ 5 % (sl. 1 a).

Pri merjenjih, ki izkoriščajo Mössbauerjev pojav,[3] dobijo zaradi izredne ločljivosti merljivo razliko frekvenc že pri višinski razliki nekaj deset metrov v zemeljskem težnem polju. V tem primeru vstavimo za razliko potencialnih energij kar $W_p' - W_p = mgz = Wgz/c^2 = h\nu gz/c^2$. Tako dobimo za relativno razliko frekvenc

$$\delta\nu/\nu = gz/c^2 \qquad (1b)$$

Izvir vsebuje radioaktivni kobalt, ki razpade v železo. Nastalo jedro ^{57}Fe je v prvem vzbujenem stanju in preide v osnovno stanje z emisijo fotona z energijo 14,4 keV. Atomi železa so vgrajeni v kristalno mrežo in v nekaterih



Sl. 2. Poenostavljena shema naprave za merjenje sončne sploščenosti.[6,7] Fotocelica 1 meri osvetljenost sredine sončne slike, fotocelica 2 pa dovaja elektronski napravi sinhronizacijske signale, s katerimi je določena lega rež v zaslonu. Skupaj s signalom s fotopomnoževalke da to podatke o sončni sploščenosti. Signali iz elektronske naprave krmilijo zrcalo, da je sredina slike vedno v osi daljnogleda.

primerih prevzame odrivni sunek ob emisiji fotona kristal kot celota. Pri taki brezodrivni emisiji je energija fotona zares enaka razliki energij jedra v začetnem in končnem stanju. Pred merilnikom za žarke γ je kot absorber listič iz železa, ki je obogateno z izotopom ^{57}Fe. Nekateri fotoni se v jedrih ^{57}Fe brezodrivno absorbirajo. — Če je izvir v višini s nad absorberjem, je ob absorberju frekvenca fotonov za $\nu gz/c^2$ višja od resonančne in ne pride do najizdatnejše resonančne absorpcije. Do te pa pride, ko se obsorber s hitrostjo v oddaljuje od izvira, da zmanjšanje frekvence zaradi Dopplerjevega pojava $-\nu v/c$ izravna prirastek $\nu gz/c^2$. Obratno se mora absorber s hitrostjo v približevati izviru, ko je izvir za z niže kot absorber. Merijo kar hitrost absorberja, pri kateri se največ žarkov γ resonančno absorbira. Najprej je izvir nad absorberjem, potem pa pod njim. Ko seštejemo velikosti obeh hitrosti, pri katerih je bila absorpcija najizdatnejša, lahko naravnost izračunamo dvojno relativno spremembo frekvence $2\,\delta\nu/\nu = 2\,v/c = 2\,gz/c^2$.

R. V. Pound in G. A. Rebka sta že 1960 potrdila enačbo (1 b) pri merjenju na 25 m visokem stolpu, pri čemer je bila negotovost še $\pm$ 10 %.[3] Pozneje sta R. V. Pound in L. Snider z izpopolnjenimi napravami zmanjšala negotovost pod $\pm$ 1 % (sl. 1 b).[4] Uporabila sta boljši in močnejši izvir. Izboljšala sta kontrolo temperature ter izpopolnila elektronske naprave in naprave za krmiljenje hitrosti absorberja. Scintilacijske števce za žarke γ sta zamenjala z velikim proporcionalnim števcem, ki je imel okno s premerom 40 cm.

Odklon svetlobnega curka pri prehodu mimo Sonca. Z natančnim merjenjem odklona bi lahko podprli ali ovrgli splošno teorijo relativnosti. A dosedanja merjenja za kaj takega niso dovolj natančna. R. H. Dicke sodi, da utegnejo biti obremenjena celo s sistematsko napako do 20 %.[5] Odklon svetlobnega curka merijo ob popolnem sončnem mrku. Ob mrkih med letoma 1919 in 1952 so dobili rezultate, ki jih kaže razpredelnica (podatki so v kotnih sekundah)[5]

	Θ		Θ
1919	od 1,6 do 2,2	1936	od 1,3 do 2,7
1922	od 1,2 do 2,2	1947	od 2,0 do 2,2
1929	od 1,8 do 2,2	1952	od 1,4 do 1,7.

Poprečje teh merjenj je $1{,}9'' \pm 0{,}8''$. Splošna teorija relativnosti napove odklon

$$\Theta = 4\,\varkappa\, M/c^2\, R = 1{,}75'' \qquad (2)$$

Z Newtonovim gravitacijskim zakonom in z enačbama $W = h\nu$ in $W = mc^2$ dobimo samo polovico te vrednosti.*

* Na foton, ki leti tik ob Soncu, deluje privlačna sila $F = \varkappa mM/r^2 = \varkappa\, h\nu\, M/c^2\, r^2$ proti središču Sonca. Tu je $r = R/\sin\vartheta$ razdalja od središča Sonca in ϑ kot med vpadno smerjo fotona in zveznico proti središču. Komponenta sunka privlačne sile v prečni smeri $\int F \sin\vartheta \,.\, dt$ je enaka spremembi gibalne količine fotona v prečni smeri $mc \sin\Theta = h\nu\,\Theta/c$. Iz tega sledi zveza $\Theta = (\varkappa\, M/cR^2) \int_{-\infty}^{\infty} \sin^3\vartheta \,.\, dt =$ $= 2\,(\varkappa\, M/c^2\, R) \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \,.\, d\vartheta = 2\,\varkappa\, M/c^2\, R$. Pri tem smo upoštevali, da je razdalja fotona od točke, v kateri se najbolj približa Soncu, $x = R/\mathrm{tg}\,\vartheta$ in da velja $dx/dt = c = -(R/\sin^2\vartheta)\, d\vartheta/dt$.

H. Hill gradi napravo, s katero bo mogoče meriti odklon svetlobnega curka tudi ob času, ko ne bo popolnega sončnega mrka.

Sukanje Merkurjevega perihelija. Merkur se giblje okoli Sonca po elipsi, ki ima za 2 % daljšo véliko os od male osi. Po klasični mehaniki bi morala elipsa ohraniti svojo lego v prostoru, če ne bi poleg privlačne sile Sonca — po Newtonovem gravitacijskem zakonu $F = \varkappa m' M/r^2$ — na planet delovala nobena druga sila. Po splošni teoriji relativnosti pa elipsa ne ohrani svoje lege, četudi je zgornji pogoj izpolnjen. Po tej teoriji se velika os elipse — na tej osi je tudi *perihelij,* to je točka, v kateri je planet najbliže Soncu — počasi suče v smeri gibanja planeta. Teorija napoveduje za kotno hitrost sukanja perihelija

$$\omega = 6\,\pi\,\varkappa\, Ma/c^2\, b^2\, t_0^2 \qquad (3)$$

Tu je a velika polos in b mala polos elipse ter t_0 odhodni čas. Namesto kotne hitrosti raje navedemo zasuk perihelija v enem stoletju $\varepsilon = \omega \,.\, 100$ let. Ko vstavimo podatke za Merkurja $a = 5{,}79.10^{10}$ m, $b = 5{,}67.10^{10}$ m in $t_0 = 0{,}241$ let, dobimo

$$\varepsilon = 43''$$

Tretjino te vrednosti dobimo, če v Newtonovem gravitacijskem zakonu upoštevamo povečanje mase planeta iz specialne teorije relativnosti $m' = m_0/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Merjenje sukanja perihelija pa ni preprosto.[5] Treba je upoštevati, da opazujemo v koordinatnem sistemu, katerega os je določena s pomladiščem. Zaradi precesije zemeljske osi se pomladišče zasuče v stoletju za 5025″. V tem koordinatnem sistemu izmerijo za zasuk Merkurjevega perihelija v stoletju 5600″. Tu je vključeno še sukanje perihelija zaradi motenj sosednjih planetov. Merkurjev perihelij se v stoletju zasuče zaradi motnje Venere za 278″, zaradi motnje Zemlje za 90″, zaradi motnje Jupitra za 154″ in zaradi motnje vseh drugih planetov za 10″. Ko odštejemo od izmerjenih 5600″ zasuk koordinatnega sistema 5025″ in skupno motnjo 532″, zares preostane 43″, kot napoveduje splošna teorija relativnosti.

Tudi pri nekaterih drugih planetih je mogoče meriti presežno sukanje perihelija, le da je negotovost mnogo večja:[5]

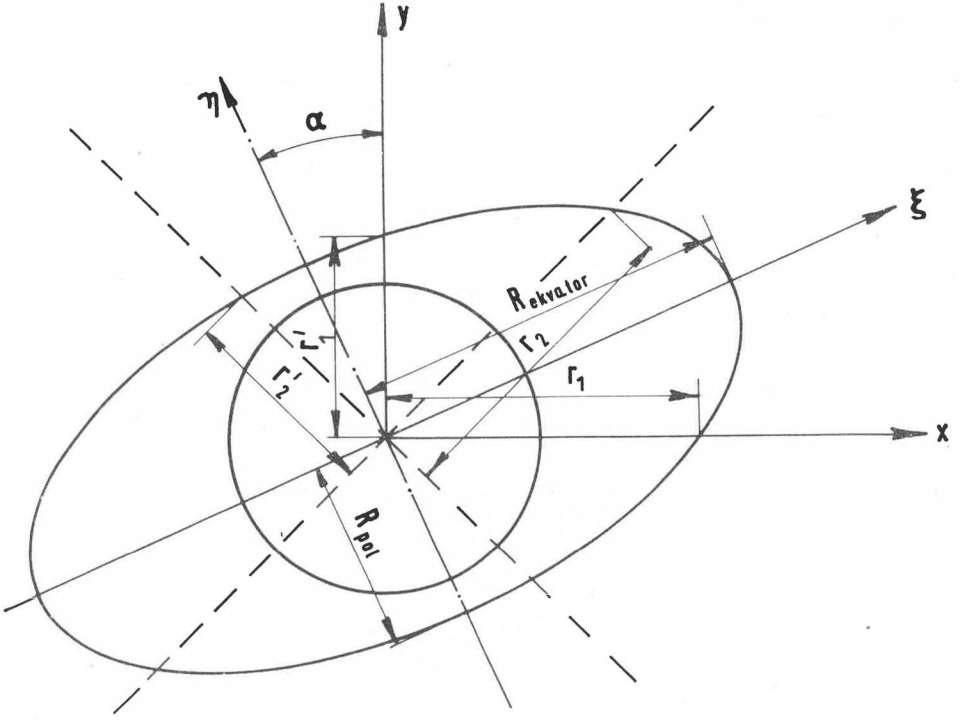
	Merkur	Venera	Zemlja
ε (izmerjeno)	$43{,}1'' \pm 0{,}5''$	$8{,}4'' \pm 4''$	$5'' \pm 1{,}2''$
ε (napoved splošne teorije relativnosti)	$43{,}0''$	$8{,}3''$	$3{,}8''$

II

Sploščenost Sonca. Od vseh odločilnih rezultatov, ki smo jih navedli v prejšnjem odstavku, se edino zasuk Merkurjevega perihelija ob majhni negotovosti ujema z napovedano vrednostjo po splošni teoriji relativnosti. Vendar temu rezultatu nekateri — med njimi R. H. Dicke — niso zaupali. Podatki, ki so jih uporabili pri računanju, niso bili vsi zanesljivi, pa tudi nekatere predpostavke niso bile popolnoma preverjene. Natančnejša določitev kakega podatka ali ugotovitev, da katera od predpostavk ni izpolnjena, bi prav lahko porušila to dobro ujemanje.

Sprva se je zdel negotov podatek za maso Venere, ki jo potrebujejo pri računanju motnje. (Venera namreč nima satelita, da bi z njim natančno določili maso.) A let Marinerja II mimo Venere je razpršil dvome o pravilnosti tega podatka. Ponovno so pretresli vse druge vzroke, ki bi utegnili vplivati na sukanje Merkurjevega perihelija: sončno korono in snov, na kateri se sipa zodiakalna svetloba, ter obstoj majhnega planeta v bližini Sonca. Vendar niso ugotovili ničesar novega: sončna korona in snov, ki sipa zodiakalno svetlobo, sta preredki, da bi lahko motili Merkurjevo gibanje, novi planet pa bi moral pokazati svoj obstoj tudi kako drugače.

Na koncu je ostala ena sama nejasnost — sploščenost Sonca. Če bi bilo Sonce sploščeno — ali kot pravimo učeno, če bi imelo (masni) kvadrupolni moment —, bi dobila gravitacijska sila k členu, ki je obratno sorazmeren s kvadratom razdalje, še majhen popravek, ki bi bil obratno sorazmeren s četrto potenco razdalje.* Vrtilna os Sonca je praktično pravokotna na ravnino Merkurjevega tira. Ta popravek bi — kot sploh vsako odstopanje od obratne kvadratne sorazmernosti — povzročil »klasično« sukanje perihelija.[2,6]



Sl. 3. Sončna slika, ki jo otipa fotopomnoževalka. Osrednji krožni del slike prestreže okrogla ploščica. (Močno pretirano in shematično.) Ker je slika podobna Soncu, so nanesene kar ustrezne količine za Sonce. Os y je v smeri sever—jug, os η pa je vrtilna os Sonca.

* To je v okviru klasične mehanike in sledi iz Newtonovega gravitacijskega zakona, ki velja v obliki $F = \varkappa m'M/r^2$ le, če sta telesi zelo majhni v primeri z razdaljo ali če sta kroglasti.

Sploščenost Sonca bi bila lahko posledica njegovega vrtenja. Dosedanji podatek, da se Sonce zavrti okoli svoje osi enkrat v približno 27 dneh, bi se utegnil nanašati samo na sončno površje in bi se lahko notranjost vrtela hitreje. Zunanje plasti ne bi sledile vrtenju notranjosti zaradi zaviralnega magnetnega polja, ki spremlja tok delcev s Sonca — tako imenovani sončni veter. Vzemimo, da bi se notranjost zavrtela enkrat v poldrugem dnevu! Zaradi centrifugalne sile bi bila sploščena notranjost Sonca, površje pa bi se prilagodilo gravitacijskemu polju notranjosti. Pri tem bi bila relativna sploščenost $\Delta R/R = (R_{\text{ekvator}} - R_{\text{pol}})/\frac{1}{2}(R_{\text{ekvator}} + R_{\text{pol}})$ okoli 10^{-4}. Temu ustreza razlika $R_{\text{ekvator}} - R_{\text{pol}}$ okoli 0,1″ v ločni meri, saj vidimo radij Sonca pod zornim kotom $0{,}27^0 = 970''$. Dosedanji način, to je opazovanje fotografij, je za merjenje tako majhne sploščenosti premalo natančen. — Če bi se sončna notranjost zares zavrtela v poldrugem dnevu, bi bila sončna vrtilna količina približno enako velika kot vrtilna količina planetov. S tem bi bilo pojasnjeno vprašanje o sončni vrtilni količini, ki je že dolgo morilo astronome.

Da bi rešili vprašanje o sončni sploščenosti, so H. Hill, M. Goldenberg in R. H. Dicke zgradili precej zapleteno napravo za merjenje sploščenosti. Lani sta M. Goldenberg in R. H. Dicke z njo napravila prvo vrsto merjenj.[6] Opišimo samo bistvo te naprave! Sončna svetloba se odbije od zrcal in vstopa v daljnogled. V ravnini vmesne slike je nameščena okrogla ploščica, ki odreže osrednji del sončne slike in prepusti samo svetlobo ozkega kolobarjastega roba na sliki. Ta svetloba pade na hitro se vrteč zaslon z režama ob robu na nasprotnih straneh. Svetloba, ki jo prepustita reži, zadene fotopomnoževalko (sl. 2). Signal s fotopomnoževalke vodijo na elektronsko napravo, ki dobiva prek prve fotocelice še podatek o legi rež na zaslonu in prek druge fotocelice še podatek o osvetljenosti sredine slike. Sestavni del elektronske naprave je fazno občutljivi ojačevalnik, katerega občutljivost se ravna po legi rež zaslona. Elektronska naprava krmili prek motorjev zrcalo, tako da je med merjenjem sredina sončne slike vedno v optični osi daljnogleda. Na elektronsko napravo je priključena digitalna enota, iz katere prihajajo kar številni podatki o širini obrobnega kolobarjastega dela sončne slike na po dveh med seboj pravokotnih premerih. Vsako merjenje ponovijo pri treh različnih širinah obeh rež v vrtečem se zaslonu. Merijo z režama, katerih širina je enaka tristotini premera sončne slike, ter z dvakrat in s trikrat širšima režama. Iz teh treh zaporednih merjenje in iz podatka o osvetljenosti sredine sončne slike ugotovijo tudi, ali je Sonce ob ekvatorju enako svetlo kot od polu. Pri merjenju sploščenosti bi morali namreč upoštevati popravek, če ne bi bilo tako.

Merili so od junija do septembra 1966 ob vsakem jasnem dnevu od devetih zjutraj do treh popoldne. Iz rezultatov so najprej razbrali, da je Sonce na polu enako svetlo kot na ekvatorju. Računajoč, da seva Sonce kot črno telo, je ustrezna razlika temperatur manjša kot 3 stopinje. Najpomembnejši rezultat merjenja so desetdnevna poprečja za količini δ_1 in δ_2. Ustrezna desetminutna poprečja posreduje neposredno digitalna enota. Količini δ_1 in δ_2 sta določeni z razsežnostmi sončne slike v smeri sever—jug in v pravokotni smeri (sl. 3)

$$\delta_1 = (r_1 - r_1')/\tfrac{1}{2}(r_1 + r_1')$$

in v smereh pod kotom 45^0 proti smeri sever—jug

$$\delta_2 = (r_2 - r_2')/\tfrac{1}{2}(r_2 + r_2') .$$

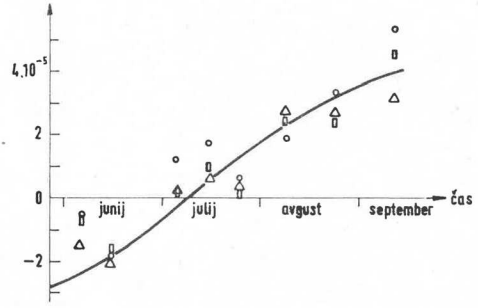
Kratek račun pokaže, da veljata zvezi*

$$\delta_1 = (\Delta R/R) \cos 2\alpha$$

in

$$\delta_2 = (\Delta R/R) \sin 2\alpha .$$

V teh zvezah je $\Delta R/R$ že definirana relativna sploščenost in α kot med sončno vrtilno osjo in smerjo sever—jug, pri čemer vzamemo, da se vrtilna os Sonca ujema z osjo sploščenosti.



Sl. 4. Merski rezultati, ki pričajo o sploščenosti Sonca.[6,7] Na ordinatno os je nanesena količina δ_2, na abscisno os pa čas. Merske točke so desetdnevna poprečja: krogi za reži s širino, ki ustreza 6,5″, kvadrati za reži s širino 12,1″ in trikotniki za reži s širino 19,1″ (v tem merilu ustreza radiju sončne slike 970″).

V času merjenja se je zaradi letnega gibanja Zemlje okoli Sonca navidez nagnila sončna os za 40° okoli ničle. Zaradi tega se je količina δ_1 v tem času le malo spremenila, medtem ko je bila sprememba δ_2 znatna.

Zares je bilo odločilno spreminjanje δ_2 s časom. Potem ko so upoštevali popravek zaradi loma v ozračju, se je izmerjeni časovni potek za δ_2 skladal s pričakovanim $\delta_2 = (\Delta R/R) \sin 2\alpha$. Za α so postavili znano časovno odvisnost za nagib sončne osi proti sever—jug in s primerjavo z merskimi rezultati dobili $\Delta R/R = 5.10^{-5}$ (sl. 4). V ločni meri je R okoli 970″, tako da sledi za razliko $R_{\text{ekvator}} - R_{\text{pol}}$ v ločni meri okoli 0,048″. Po tem je radij Sonca na ekvatorju za okoli 35 km daljši kot na polu. Naknadno so ugotovili, da se os sploščenosti zares ujema z vrtilno osjo, pri čemer je negotovost samo $\pm 2^0$.

Na drugi strani iz časovnega poteka za δ_1 ni bilo možno izluščiti nobenega zanesljivega rezultata. Delno je bila temu vzrok pričakovana sistematična napaka zaradi raztezanja prvega kremenovega zrcala. Poleg te napake pa je

* Najprej zapišemo enačbo elipse $\xi^2/R_{\text{ekvator}}^2 + \eta^2/R_{\text{pol}}^2 = 1$ in upoštevamo, da je zaradi majhne relativne sploščenosti $R_{\text{ekvator}}/R_{\text{pol}} = 1 + \Delta R/R$, tako da velja $\xi^2 + \eta^2 + 2(\Delta R/R)\eta^2 = R_{\text{ekvator}}^2$. Enačba elipse v koordinatnem sistemu, katerega os y je v smeri sever—jug, dobimo, ko vstavimo $\eta = y \cos\alpha - x \sin\alpha$. V dobljeno enačbo vstavimo najprej $y = 0$ in dobimo $x = r_1 = R_{\text{ekvator}}(1 - \Delta R \sin^2\alpha/R)$ in nato $x = 0$ in dobimo $y = r_1' = R_{\text{ekvator}}(1 - \Delta R \cos^2\alpha/R)$. Iz teh enačb dobimo gornjo zvezo za δ_1. Potem vstavimo še $x = y$ in dobimo $x = y = r_2 = [1 - (1 - \sin 2\alpha)\Delta R/2R] R_{\text{ekvator}}/\sqrt{2}$ ter $y = -x$ in dobimo $y = -x = r_2' = [1 - (1 + \sin 2\alpha)\Delta R/2R] R_{\text{ekvator}}/\sqrt{2}$. Iz teh enačb dobimo gornjo zvezo za δ_2.

nastopila še druga, nepričakovana, ki je niso mogli zanesljivo pojasniti. Morda je bila posledica mešanja toplega in hladnega zraka pri vhodu v stavbo. Zaradi simetrije nobena od teh napak ni prizadela količine δ_2.

Vsa mogoča preverjanja niso mogla ovreči rezultatov, dobljenih z δ_2. Niti izbruhi na sončnem površju niti sploščenost sončne korone ali kromosfere ali sploščenost magnetnega polja ali hitrostne porazdelitve ne more biti kriva za ugotvljeni merski rezultat. Ker so prišle napake pri merjenju δ_1 na dan po končanem poskusu, ga niso mogli ponoviti. Ponovili pa ga bodo, čim bo to izvedljivo.[6]

Dickejevi in Goldenbergovi rezultati so vzbudili veliko pozornost. Kot kaže, nihče ne dvomi v rezultat za sončno sploščenost. Nasprotno pa končni sklepi niso enotni. Dicke in Goldenberg sta trdno prepričana, da je sploščenost zvezana s kvadrupolnim momentom. Sonce tedaj s svojim kvadrupolnim momentom, skladno z Newtonovim gravitacijskim zakonom — torej popolnoma nerelativistično — zasuče Merkurjev perihelij v stoletju za okoli 3,4″. Zaradi tega ostane nepojasnjen samo presežek okoli 40″ in ne 43″. Teorija gravitacijskega polja mora pojasniti samo še zasuk za 40″ na stoletje. To pomeni, da preneha biti sukanje Merkurjevega perihelija dokaz za veljavnost splošne teorije relativnosti.

I. W. Roxburgh ugovarja, da sploščenost sončnega površja nujno še ne priča o kvadrupolnem momentu Sonca. Lahko je le posledica drugih posebnih razmer pod površjem Sonca.[8, 12] V odgovoru na njegove trditve dokazujeta Dicke in Goldenberg, da je sončno površje navzlic posebnim razmeram pod seboj ploskev konstantnega potenciala, v katerem sta upoštevana gravitacijski in vrtilni del.[9] Za podrobnosti sta izdelala s sodelavci posebno teorijo. L. N. Howard, D. W. Moore in E. A. Spiegel menijo, da bi se zaradi hidrodinamične sklopitve morali v doglednem času izenačiti kotna hitrost sredice in kotna hitrost površja Sonca. Po njihovem ni razlogov, zaradi katerih bi se mogla sredica vrteti mnogo hitreje kot površje.[10] P. A. Turrock in J. J. Gilvarry podrobno razglabljata o pojavih na sončnem površju in pod njim in menita, da za tak ali drugačen dokončen sklep še ni dovolj podatkov. Za razjasnitev predlagata nove poskuse, med njimi izstrelitev umetnega planeta z zelo sploščenim tirom.[11]

Vsekakor sta Dicke in Goldenberg s svojim merjenjem vzbudila dvome v zanesljivost edinega trdnega dokaza splošne teorije relativnosti. Vendar moramo poudariti, da je Dicke prišel na misel, da splošna teorija relativnosti ne pojasni popolnoma sukanja Merkurjevega perihelija zaradi drugih podatkov.

Spreminjanje gravitacijske konstante. Po splošni teoriji relativnosti je gravitacijska konstanta univerzalna, se pravi, da ni odvisna ne od časa in ne od kraja, kjer jo merimo. Vendar se množijo namigi, da je gravitacijska konstanta odvisna od časa, in sicer, da s časom pojema. Večina teh namigov je kvalitativnih in vsak posamezni namig je dokaj negotov, a vsem skupaj ne moremo odrekati določene dokazne moči.

Namigi o pojemanju gravitacijske konstante se tičejo Zemlje, osončja in zvezd. Prvi — to so: večanje zemeljskega radija, izvir magnetnega polja in površinska temperatura Zemlje[7, 2] — so morda še najbolj negotovi.

Sprememba gravitacijske konstante je zvezana s premembo zemeljskega radija. Po oceni, ki je skoraj neodvisna od uporabljenega modela za Zemljo,

naj bi bilo relativno povečanje radija dr_z/r_z enako desetini relativnega zmanjšanja gravitacijske konstante $d\varkappa/\varkappa$. Relativna sprememba radija okoli 3.10^{-12} v enem letu je združljiva z opazovanji, med katera sodi opazovanje višanja gladine morij. Po tem naj bi se gravitacijska konstanta v enem letu zmanjšala za 3.10^{-11} svoje vrednosti.

Zemeljsko magnetno polje izvira od tokov v zunanjem tekočem delu zemeljske sredice. Posameznosti so še prav nejasne, toda v glavnem lahko nastanek tokov pojasnijo, če privzamejo, da teče iz sredice navzven dovolj velik toplotni tok. Znatnega dela tega toplotnega toka ne morejo pojasniti drugače, kot da ga pripišejo pojavom zaradi pojemanja gravitacijske konstante približno z navedeno hitrostjo.

Svetlobni tok, ki ga oddaja Sonce, je odvisen od velikosti gravitacijske konstante (glej niže!), zemeljska površinska temperatura pa od sončnega svetlobnega toka. Zato je površinska temperatura odvisna od gravitacijske konstante (absolutna temperatura je približno sorazmerna s $\varkappa^{5/2}$). Upoštevajoč pojemanje gravitacejske konstante z navedeno hitrostjo, pridejo do časovnega poteka temperature, ki je združljiv z eksperimentalno ocenjenim potekom.

Pojemanje gravitacijske konstante vpliva tudi na gibanje planetov okoli Sonca: obhodni časi se podaljšajo in razdalje od Sonca povečajo.[5,6] Zato se podaljša obhodni čas Zemlje okoli Sonca, merjen s časom enega vrtljaja Zemlje okoli lastne osi. Obratno se skrajša čas enega vrtljaja, merjen z obhodnim časom okoli Sonca in se torej zdi vrtenje Zemlje pospešeno. Seveda je treba pri tem posebej upoštevati pojemanje frekvence zemeljskega vrtenja zaradi bibavičnega navora Lune in Sonca. Poleg tega je treba meriti poprečja čez dovolj velika razdobja, ker se frekvenca Zemlje na kratek čas neurejeno spreminja zaradi sprememb v notranjosti.

S podatki, ki so jih dobili z opazovanjem z daljnogledi v zadnjih dvesto letih, in podatki o popolnih sončnih mrkih v preteklosti določijo poprečno relativno zmanjšanje zemeljske frekvence ν_0. Razpredelnica kaže rezultate za znane popolne sončne mrke.[5]

Leto	Opazovalec	$-\nu_0^{-1}\, d\nu_0/dt$
—1062	(Babilon)	$16{,}2.10^{-11}$/leto
—647	Arhiloh	16,2
—128	Hiparh	16,1
+29	Flegon	15,6
+71	Plutarh	15,4

Poprečno relativno zmanjšanje frekvence je okoli 16.10^{-11}/leto. Z merjenjem pojemanja Lunine frekvence pri vrtenju okoli lastne osi dobijo bibavični navor Lune na Zemljo. Bibavični navor Sonca pa ocenijo po opazovanjih v zadnjih dvesto letih. S tema navoroma ugotovijo, da bi se morala zaradi bibavice zemeljska frekvenca relativno zmanjšati za 24 do 26.10^{-11}/leto. Od tega gre okoli 0,5 do 3.10^{-11}/leto na račun zvišanja gladine morij. Izmerjeno relativno pomanjšanje 16.10^{-11}/leto je treba torej primerjati z izračunanim relativnim pomanjšanjem 21 do 25.10^{-11}/leto. Nazadnje ostane relativni prirastek približno 5 do 9.10^{-11}/leto, ki ga lahko pojasnimo z relativnim pomanjšanjem gravitacijske konstante ($-\varkappa^{-1}\, d\varkappa/dt$) 2 do 4.10^{-11}/leto.

Omenili smo že, da je izsevani sončni svetlobni tok odvisen od gravitacijske konstante. To velja tudi za druge zvezde: večja gravitacijska konstanta pomeni večji tlak in višjo temperaturo v notranjosti ter hitrejše trošenje jedrskega goriva.[5,6] Ko je bilo vesolje mlado in gravitacijska konstanta večja, so zvezde sevale močneje in trošile več jedrskega goriva kot danes. Zato dobimo preveliko starost zvezd, ko jo sodimo po današnji potrošnji in po preostalih zalogah goriva. Zares izračunajo po koncentraciji helija, ki je poleg vodika najvažnejše jedrsko gorivo, z upoštevanjem današnje potrošnje, da je starost nekaterih zvezd 15 do 25 milijard let. Medtem pa je starost vesolja — to je čas od nastanka elementov ali od trenutka, ko se je začelo vesolje razširjati — manjša. Po razmerju koncentracij uranovih izotopov 235 in 238 dobijo 7 milijard let, po ekstrapolaciji iz razširjanja vesolja do 10 milijard let in po opazovanju premika spektralnih črt proti rdečemu delu 5 do 13 milijard let. To neskladje — zvezde seveda ne morejo biti starejše kot vesolje — pojasnimo, če privzamemo relativno zmanjšanje gravitacijske konstante od 1 do 2.10^{-11}/leto. Tedaj se pokaže, da so zvezde, ki naj bi bile po splošni teoriji relativnosti, računajoč z nespremenljivo gravitacijsko konstanto, stare 15 do 25 milijard let, stare komaj 6 do 8 milijard let.

III

Zaradi vseh naštetih razlogov so iskali teorijo gravitacijskega polja, v kateri bi se med drugimi počasneje sukal perihelij planetov in v kateri bi bila gravitacijska konstanta odvisna od časa. Pokaže se, da izbira ni prav velika.

Splošna teorija relativnosti sloni na Einsteinovem načelu ekvivalentnosti: Zakoni fizike in iz njih izhajajoči številski rezultati so enaki v vsakem laboratoriju, ki prosto pada, ki se ne vrti in v katerem ni elektromagnetnih sil. To načelo utegne biti preozko. Nobenega poskusa ni, ki bi nasprotoval šibkejšemu načelu ekvivalentnosti, v katerem ne bi bilo trditve o enakosti številskih rezultatov. Iz Einsteinovega načela sledi, da mora biti gravitacijsko polje tenzorsko polje z velikim dosegom.* Po šibkem načelu ekvivalentnosti pa je gravitacijsko polje lahko sestavljeno iz tenzorskega in iz skalarnega polja z velikim dosegom.* Druga polja ne morejo biti zastopana v gravitacijskem polju zaradi natančne sorazmernosti gravitacijske in vztrajnostne mase.**

Tenzorsko-skalarne teorije gravitacijskega polja, v katerih je gravitacijsko polje kombinacija tenzorskega in skalarnega polja, je uvedel P. Jordan že 1938, medtem ko so o skalarnih teorijah razmišljali že mnogo prej. Zasluga R. H. Dickeja je, da je že pred leti podrobno preučil nakopičene eksperimentalne podatke in izločil vse teorije, ki se ne skladajo z njimi.[2] Takrat sta prestali vse preskuse samo posebna oblika tenzorske teorije — splošna teorija relativnosti — in nekaj oblik tenzorske-skalarne teorije.[5] Zdaj kaže, da govorijo novejši poskusi v prid slednji.[6]

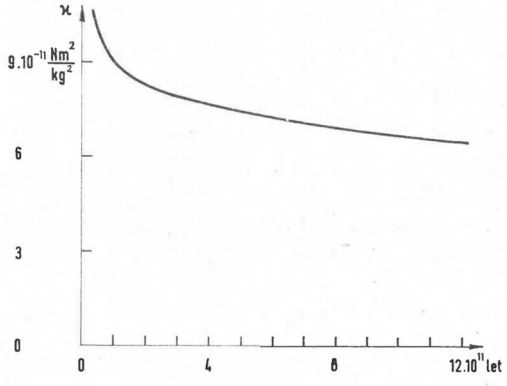
---

* Delec tenzorskega gravitacijskega polja nima mirovne mase in ima spin 2. Delec skalarnega gravitacijskega polja nima mirovne mase in ima spin 0. To navajamo zaradi pregleda. Za obe vrsti polj so obeti, da bi odkrili s kakim kvantnim pojavom delec polja, za zdaj ničevi.

** P. G. Roll, R. Krotkov in R. H. Dicke so ponovili znani Eötvösov poskus v modernizirani inačici in so zmanjšali negotovost za dve velikostni stopnji.[14] Gravitacijska (težka) in vztrajnostna masa telesa sta sorazmerni, pri čemer je relativna negotovost še $\pm 10^{-11}$.

Na kratko naštejmo samo tiste posledice tenzorsko-skalarne teorije, ki so v zvezi z omenjenimi poskusi! Glede vpliva gravitacijskega polja na frekvenco svetlobe med to teorijo in splošo teorijo relativnosti (1) ni razločka. Pri odklonu svetlobnega curka ob prehodu mimo Sonca pa je treba upoštevati, da skalarni del gravitacijskega polja ne izvaja sil na fotone. Zato je odklon po tenzorsko-skalarni teoriji za faktor $1 - s$ manjši kot v splošni teoriji relativnosti (2). Pri tem je s delež gravitacijske sile, ki odpade na interakcijo skalarnega dela gravitacijskega polja z maso telesa. Podobno se zaradi deleža skalarnega gravitacijskega polja zmanjša zasuk perihelija planetov za faktor $1 - \frac{4}{3}s$ proti vrednosti po splošni teoriji relativnosti (3). Zaradi izmerjene sončne sploščenosti je presežni zasuk Merkurjevega perihelija za okoli 8 % manjši kot po splošni teoriji relativnosti. Iz tega sklepamo, da je $\frac{4}{3}s = 0{,}08$ in da je delež gravitacijske sile, ki odpade na skalarno gravitacijsko polje, približno $s = 0{,}06$. Po tem bi pričakovali za odklon svetlobnega curka ob prehodu mimo Sonca vrednost okoli 1,65″.

Masa delca postane zaradi sodelovanja s skalarnim delom gravitacijskega polja odvisna od tega polja. Naše enote pa so definirane z lastnostmi atomov, pri čemer je po dogovoru masa atomov konstantna. Izražena z našimi enotami je tedaj masa nespremenljiva, a zato moramo privzeti spremenljivo gravitacijsko konstanto, ki veže gravitacijsko polje z maso. Izvir gravitacijskega polja je masa teles v vesolju. Zaradi razširjanja vesolja se spreminja skalarni del gravitacijskega polja in zaradi tega se gravitacijska konstanta zmanjšuje s časom. C. Brans in R. H. Dicke sta razvila model za razvoj vesolja po tenzorsko-skalarni teoriji.[15] Pojemanje gravitacijske konstante v tem modelu kaže sl. 5.



Sl. 5. Časovni potek gravitacijske konstante v modelu Bransa in Dickeja. Slika naj da samo vtis o spremenljivosti gravitacijske konstante. V podrobnosti je potek gravitacijske konstante odvisen od parametra, katerega natančne vrednosti ne poznajo.[6]

To ni prvi takšen model. O modelu za razvoj vesolja s pojemajočo gravitacijsko konstanto je razglabljal P. A. M. Dirac že l. 1938. Toda rezultati Bransovega in Dickejevega računa se vsaj okvirno skladajo z naštetimi namigi za pojemanje gravitacijske konstante.

Na koncu na kratko povzemimo. Novejša opazovanja dajejo prednost tenzorsko-skalarni teoriji gravitacijskega polja pred splošno teorijo relativnosti. Vendar se bodo morda komu zdela opazovanja preveč negotova in razlogi pre-

šibki, da bi zaradi njih že zavrgli splošno teorijo relativnosti z vso njeno matematično lepoto in s sorazmerno preprostostjo. Zato bodo imeli zadnjo besedo poskusi, ki jih pripravljajo. Sem sodijo poskus za natančnejše merjenje odklona svetlobnega curka pri prehodu mimo Sonca in še nekateri drugi poskusi, o katerih nismo govorili. Dokončen izid bo zagotovo kmalu znan.

LITERATURA

[1] S. Breskvar: Današnje stanje dokazov v prid splošni teoriji relativnosti. Obz. mat. fiz. **3**, 165 (1953).

[2] R. H. Dicke: The Theoretical Significance of Experimental Relativity. New York (Gordon & Breach), 1964.

[3] J. Strnad: Mössbauerjev pojav. Obz. mat. fiz. **7**, 161 (1961).

[4] R. V. Pound, J. L. Snider: Effect of Gravity on Gamma Radiation. Phys. Rev. **140**, B 788 (1965).

[5] R. H. Dicke: Gravitational Theory and Observation. Physics Today **20**, 55, No. 1 (1967).

[6] R. H. Dicke: Gravitation and Cosmic Physics. Am. J. Phys. **35**, 559 (1967).

[7] R. H. Dicke, H. M. Goldenberg: Solar Oblateness and General Relativity. Phys. Rev. Letters **18**, 313 (1967).

[8] I. W. Roxburgh: Implications of the Oblateness of the Sun. Nature **213**, 1077 (1967).

[9] R. H. Dicke, H. M. Goldenberg: Differential Rotation and the Solar Oblateness. Nature **214**, 1294 (1967).

[10] L. N. Howard, D. W. Moore, E. A. Spiegel: Solar Spin-down Problem. Nature **214**, 1297 (1967).

[11] P. A. Sturrock, J. J. Gilvarry: Solar Oblateness and Magnetic Field. Nature **216**, 1280 (1967); Solar Oblateness and the Perihelion Advances of Planets. Nature **216**, 1283 (1967).

[12] I. W. Roxburgh: Solar Oblateness. Nature **126**, 1286 (1967).

[13] R. H. Dicke: The Earth and Cosmology. Science **138**, 653 (1962).

[14] P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke: The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass. Ann. Phys. (N. Y.) **44**, 289 (1967).

[15] C. Brans, R. H. Dicke: Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

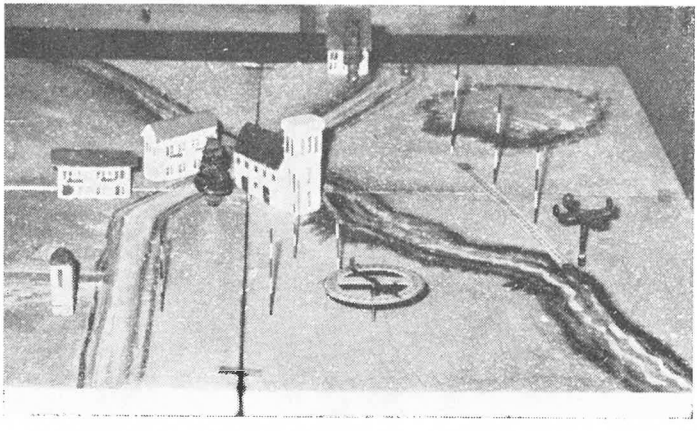
ŠOLA

MAKETA ZA TERENSKE MERITVE*

Terenske meritve so že vrsto let zasidrane v učnih načrtih za matematiko v višjih razredih osnovnih šol. Žal pa so zelo maloštevilne tiste šole, na katerih terenske meritve tudi izvajajo in se tako zamuja ena izmed lepih priložnosti za povezavo teorije s prakso pri pouku geometrije. Razlogov je več, vendar jih tukaj ne bomo analizirali! Učitelji največkrat tožijo, da priprave za terenske meritve in sama izvedba zahtevajo mnogo časa in da prav tega vedno primanjkuje. Težave so tudi pri nabavi merskih naprav in drugih pripomočkov! Naj bo tako ali drugače, ukreniti moramo nekaj, da terenske meritve dobijo svoje mesto v našem pouku geometrije in da ne ostanejo vsako leto neizpolnjeni del učnega načrta za matematiko. Približajmo jih našim učiteljem in učencem s tem, da jih vsaj v začetni fazi prenesemo v učilnico in že tam izvršimo potrebne priprave in vaje pred prvim »resničnim« odhodom na teren. Temu namenu naj služi pričujoča maketa za terenske meritve.

Opis makete

Za podlago služi 5 cm debela kvadratna plošča iz styropora ali plutovine velikosti 1 m^2. Zgornjo ploskev lahko poslikamo z barvami ter vrišemo ceste, potoke, ribnik in še kaj. To podobo »terena« še dopolnimo z miniaturnimi stavbami, drevesi in drugimi objekti. Lepa priložnost, da učenci sami izdelajo in pobarvajo razne objekte in jih uporabijo pri delu na maketi. V idealnem primeru bomo imeli v razredu 4—5 takih maket in ob njih formirali — tako kot na terenu — delovne skupine 6—8 učencev.

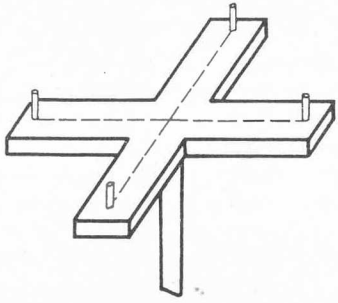


Važno mesto zavzemajo merske naprave in drugi pripomočki za izvedbo terenskih meritev. Med te sodijo:

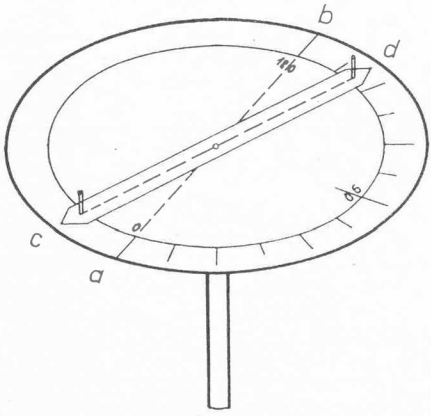
a) 10 rdeče-belo pobarvanih trasirk višine 10—12 cm (iz trde žice),

* Referat na kongresu v Sarajevu.

b) merilni trak ali ravnilo,
c) pravokotni križ (sl. 1),
č) poljski kotomer z vrtljivim kazalcem (sl. 2),
d) svinčnica in ev. libela.



Slika 1

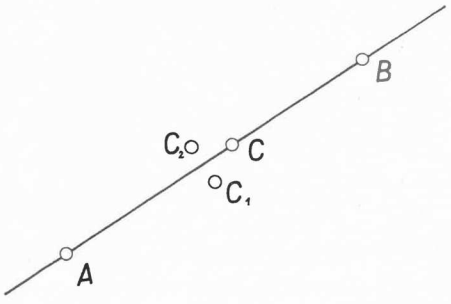


Slika 2

Vsi ti pripomočki so sicer tudi miniaturni, vendar nesorazmerno večji od ostalih objektov na »terenu« (trasirka sega do strehe enonadstropne hiše!), vendar to v tem primeru nič ne moti. Vse zgoraj naštete pripomočke — morda z izjemo kotomera — lahko izdelajo učenci pri tehničnem pouku in — ker bodo delali v skupinah — vsak izdela samo po enega ali dva pripomočka! Stroške za nabavo styropora ali plutovine pa prevzame šola, ker makete lahko služijo več let.

Vaje na maketi

1. Vnašanje točke C na premico, ki je določena s točkama A in B (sl. 3).

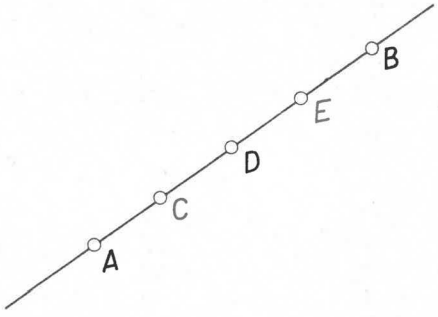


Slika 3

V točkah A in B sta postavljeni trasirki, prvi učenec pri A vizira smer AB in usmerja drugega učenca, ki s trasirko v roki preizkuša legi C_1 in C_2, dokler se trasirka ne »znajde« v točki C.

2. Trasiranje premice in merjenje razdalje med dvema točkama A in B na premici (sl. 4).

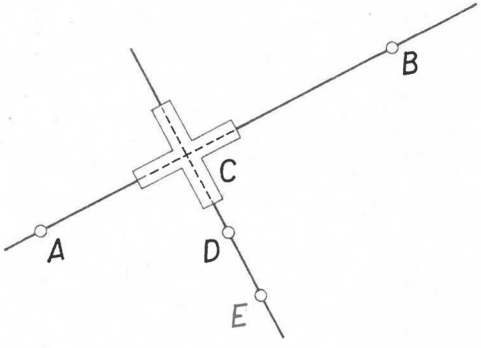
(To je potrebno v primerih, ko je razdalja AB precej večja od dolžine razpoložljivega merilnega traku.)



Slika 4

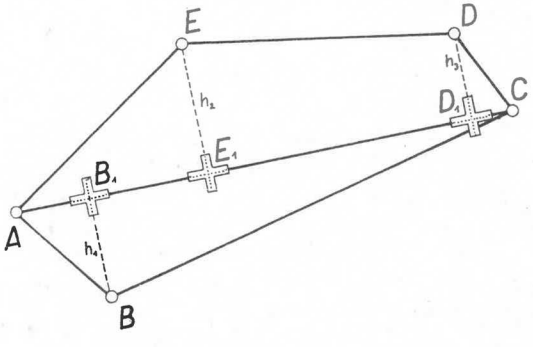
Iz točke A prvi učenec vizira v smeri AB in usmerja sošolca, ki postavlja trasirke v točkah C, D in E. Celotno razdaljo AB dobimo, ko vzdolž trase merimo razdalje od trasirke do trasirke in te razdalje seštejemo.

3. Trasiranje pravokotnice na trasirano premico AB iz poljubne točke C na tej premici (sl. 5).



Slika 5

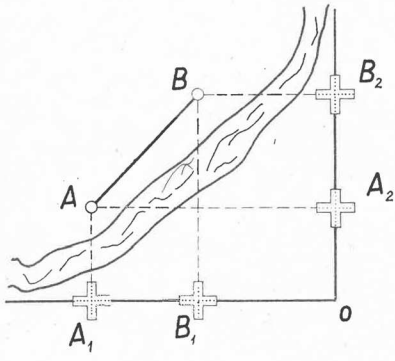
V točki C zabodemo palico, ki nosi pravokotni križ (sl. 1) in najprej srednjico ab usmerimo v smer AB, nato pa prek konic na srednjici cd viziramo in usmerjamo postavljanje trasirk v točkah D in E.



Slika 6

b) Če hočemo določiti ploščino nepravilnega mnogokotnika ABCDE, bomo najprej trasirali in izmerili diagonalo AC, nato pa s pravokotnim križem poiskali točke B_1, E_1 in D_1 ter trasirali in izmerili višine $h_{1,2,3}$ (sl. 6).

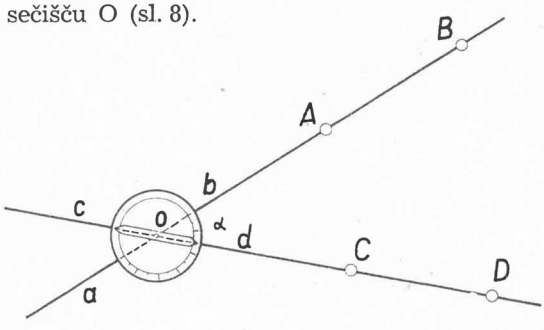
Uporabne naloge: a) Ker bomo kasneje na terenu zakoličili 1 ar in 1 hektar, bo koristno, če že na maketi rešimo podobno nalogo in ob uporabi pravokotnega križa v treh ogliščih A, B in C (za kontrolo še v D!) s trasirkami zakoličimo pravokotnik ali kvadrat z danimi stranicami.



Slika 7

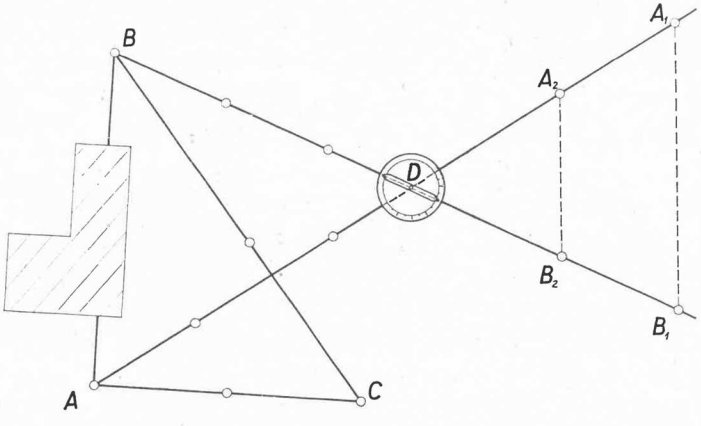
c) Če hočemo določiti razdalje med dvema »nedostopnima« točkama A in B na levi obali »reke«, bomo na desni obali iz točke O trasirali kraka pravega kota OC in OD, nato pa zopet s pravokotnim križem poiskali točke A_1 in B_1 ter A_2 in B_2, izmerili daljici A_1B_1 in A_2B_2 ter po Pitagorovem izreku izračunali razdaljo AB (sl. 7).

4. Merjenje kota med trasiranima premicama AB in CD v njunem presečišču O (sl. 8).



Slika 8

Poljski kotomer (sl. 2) pritrdimo v vrhu kota O tako, da je premer ab (0—180°) usmerjen v smer AB, nato pa zavrtimo krak cd v smer CD in na ločni skali ugotovimo kolik je kot α.



Slika 9

Uporabne naloge. Ker je takih nalog mnogo, bomo tukaj obdelali na razne načine le eno: Določiti razdaljo med točkama A in B, če je pot iz A v B neprehodna (sl. 9)!

a) S pomočjo pravokotnega trikotnika:

V točki A s pomočjo pravokotnega križa trasiramo pravokotnico AC in izmerimo razdaljo AC. Nato še trasiramo in izmerimo daljico CB in po Pitagorovem izreku izračunamo AB.

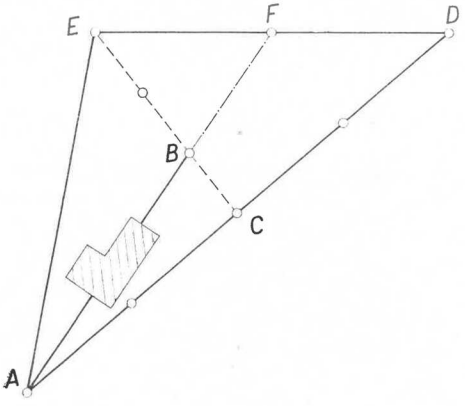
b) S pomočjo skladnih trikotnikov:

Iz točke A trasiramo premico skozi D in prav tako iz B premico skozi D. Nato izmerimo razdaljo AD ter na premico skozi D nanesemo $DA = DA_1$ in na isti način $DB = DB_1$. Rešitev: $AB = A_1B_1$.

c) S pomočjo podobnih trikotnikov:

Postopek je isti kot v primeru b), le da iz D nanesemo na premico skozi A in D polovico razdalje AD in na premico skozi B in D polovico razdalje DB. Potem je $A_2B_2 = \frac{1}{2}AB$.

č) Na osnovi lastnosti težišča trikotnika (sl. 10):



Slika 10

Iz točke A trasiramo premico skozi C in D tako, da je AC = CD. Nato iz C trasiramo premico skozi B in na njo nanesemo BE = 2 . CB. Nazadnje še trasiramo in izmerimo daljico DE in poiščemo njeno razpolovišče F. Sedaj ni težko ugotoviti, da je točka B **težišče** trikotnika ADE in da je

$BF = \frac{1}{2}AB$.

Takih in podobnih nalog je še mnogo in se lahko na maketi in ob njej prav lepo obdelajo. Ne pozabimo pa glavnega namena: Delo na maketi je samo priprava in koristna vaja pred odhodom na teren!

(Opomba: Spredaj obdelane naloge in vaje niso razvrščene tako, kot se snov vrsti v učnem načrtu! Izkušen učitelj jih bo že znal uporabiti na pravem mestu!)

Franjo Jakhel

FIZIKA IN MATEMATIKA V FRANCOSKI ŠOLSKI REFORMI

V Franciji je v teku obsežna šolska reforma, ki ne zadeva le organizacijo šolskega sistema, ampak posega prav v bistvo metodično pedagoških postopkov. Reforma se izvaja pod geslom: »Zagotoviti izbor najboljših po napredovanju vseh«. Temu namenu služi vsa organizacija šolstva, v katerem vsak učenec lahko poljubno izbira smer in intenzivnost študija v skladu s svojimi zmožnostmi in težnjami; hkrati pa se uvaja takšna pedagogika, ki mu omogoča pri tem čim večji uspeh.

Oglejmo si najprej shemo organizacije šolskega sistema!

Po končani osnovni šoli (enseignement élémentaire), ki traja 5 let, gre otrok v srednjo šolo (enseignement secondaire). Ta se deli v dva cikla: 4 + 3 leta. Prvi cikel (6., 5., 4. in 3. razred) spada še k šolski obveznosti, vendar ni enoten kot pri nas, ampak vsebuje več tipov z različno zahtevnostjo, in sicer: a) klasični tip, b) moderni tip z dvema tujima jezikoma (»dolgi« pouk) in c) moderni tip z enim tujim jezikom (»kratki« pouk).

Za vstop v srednjo šolo je potreben povoljen uspeh v osnovni šoli ali uspešno opravljen sprejemni izpit pred komisijo, sestavljeno iz članov šole, enega predstavnika okrajnega oddelka za šolsko in poklicno usmerjanje, enega zdravnika in enega zastopnika staršev.

Za učence, ki jim navedena komisija ne prizna sposobnosti za nobenega od navedenih tipov, so pripravljeni p r e h o d n i r a z r e d i, ki trajajo 2 leti in v katerih se uporablja posebna pedagogika, prikrojena nivoju učencev. Iz teh razredov je možen vstop v dvoletno z a k l j u č n o š o l o (cycle terminal), v kateri je pouk že bolj konkreten in poklicno usmerjen, ne da bi pri tem izgubil splošno izobraževalni značaj; to pa zato, da se učenci, ki pokažejo zakasnele sposobnosti, brez težav spet lahko preusmerijo v navadne razrede.

Po končanem obveznem šolanju se dijak lahko odloči ali za krajšo dvoletno zaključno šolo (podobno našim industrijskim šolam) ali za daljše triletno šolanje, ki se zaključi z maturo in vodi dalje na univerzo in visoke šole.

Dijak, ki se odloči za daljši pouk, lahko ob vstopu v prvi razred 2. cikla (»classe seconde«) izbere eno od naslednjih treh možnosti:

a) literarno smer (A) — z ali brez latinščine in osnov ekonomike,

b) naravoslovno smer (C) — z ali brez latinščine in osnov ekonomike, ali

c) tehniško smer (T) z enim živim jezikom, konstrukcijskim risanjem in delavniškim poukom.

Po končanem prvem razredu so dijaki spet pred izbiro, ki potem odloča tudi o naravi mature (baccalauréat). Tisti dijaki, ki so v prvem razredu poslušali osnove ekonomike, pa jim ta ne leži, se lahko usmerijo na literarno-jezikoslovno-filozofski pouk (A) ali pa nadaljujejo s poukom, ki ima značaj ekonomske šole (B). Dijaki naravoslovne smeri pa lahko izbirajo med eksaktno smerjo, tj. matematika s fiziko (C) in naravoslovno smerjo, tj. fizika z biologijo (D).

Končni (terminalni) razred je v bistvu poglobitveni in pripravljalni razred za maturo. Zato obsega v glavnem le tiste predmete, ki nastopajo pri maturi, druge predmete pa dijak lahko obiskuje fakultativno. Glej razpredelnico!

Kot vidimo, so možnosti za francoskega dijaka res velike, neprimerno večje kot pri nas. Dijak se lahko razvija v skladu s svojimi zmožnostmi, ne da bi ga pri tem ovirali predmeti, za katere nima veselja ali nadarjenosti.

PREDMETNIKI RAZREDOV 2. CIKLA*

Razred	Prvi (»seconde«)			Drugi (»première«)					Tretji (»terminale«)				
Smer	A	C	T	A	B	C	D	T	A	B	C	D	T
Francoščina	4	4	3	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2
Filozofija									8	5	3	3	3
Zgod.-zemlj. in drž. vzg.	4	4	2	4	4	4	4	2	4	4	3	3	
1. živ jezik	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2
Latinščina ali 2. živ j.	3	3		3	3	3	3		3	3			
Grščina ali živ jezik ali osnove ekonomike	3,5			3					3				
Matematika	3	5	5	2	4,5	7	5	6		4,5	8	6	7
Fizika	3	5	5	2	2	5	4	4			5	4	5
Ekonomske vede					4					4			
Biologija				2	2		3				2	4	
Konstr. risanje			6					8					7
Delavniški pouk			6					4					4
Telesna vzgoja	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Skupaj	25,5	26	32	25	27,5	27	27	32	26	27,5	27	26	32

Morda bi kdo očital temu sistemu, da daje potuho mladini, ki gre večinoma po poti najmanjšega odpora, to pa ima za posledico izgubo zmožnih in nadarjenih dijakov; torej je učinek ravno nasproten, kot je označeno v geslu reforme.

Vendar temu ni tako. Dijak si ne more izbirati tipa šole v prvem ciklu srednjega šolanja po svojih kapricah ali po željah svojih staršev, ampak ga pri tem usmerja šola prek tako imenovanega orientacijskega sveta. Ko vstopi učenec v 6. razred (tj. 1. razred prvega cikla), ima najprej 3 mesece poskusne dobe. Na koncu 1. tromesečja razredni svet (razredni učiteljski zbor) sporoči staršem svoje mnenje o zmožnostih učenca in jim svetuje, kateri tip šolanja njihovemu otroku najbolj ustreza. Starši lahko ta nasvet poslušajo ali ne. Toda v drugem primeru mora učenec opraviti sprejemni izpit za šolo, na katero želi vstopiti. Če izpita ne napravi, **mora** slediti priporočilu šole.

S to usmeritvijo pa njegova usoda še ni dokončna. Zakaj ves 1. cikel je doba opazovanja. Razredni učiteljski zbor se vso to dobo sestaja enkrat tedensko ali štirinajstdnevno z namenom, da se primerjajo opazovanja, ki so jih zbrali učitelji o vsakem učencu. Ta opazovanja se vpisujejo v šolske mape, ki se vodijo o vsakem učencu od vstopa v osnovno šolo dalje. Če se pri tem pokaže, da neki dijak ne more dohajati »dolgega« pouka, mora naslednje leto iti v »kratki« pouk. Lahko pa se zgodi tudi obratno, da dijaka iz »kratkega« pouka preusmerijo v »dolg« pouk. To je gotovo častno in zato dijaku ni vseeno, kako študira.

Drugo, kar pri francoskem šolskem sistemu pada v oči, je manjša obremenitev učencev, in sicer ca. 25 ur tedensko za vse razrede prvega cikla in 27 ur tedensko za drugi cikel (razen za tehniško smer z delavniškim poukom, ki ima 32 ur). Tako je dana možnost enega prostega dneva v tednu, to je četrtek, ki je določen za rekreacijo in za fakultativne predmete. Ob tem pa ni prav nič podaljšano šolsko leto, ki se začne sredi septembra in konča sredi junija. Pa tudi zimske (božične) in spomladanske (velikonočne) počitnice niso v znatnejši meri prizadete.

* Ustrezajočega naši gimnaziji.

Kako je vse to mogoče? Za naše razmere, kjer se vsaka stroka ljubosumno bori za večje število ur v osnovni in srednji šoli, kjer se upiramo prostim sobotam iz strahu, da ne bi mogli predelati vse snovi po programu in da ne bi bilo prizadeto »sveto« število 210 (delovnih dni), posebno pa zato, ker so šole financirane po opravljenem številu ur, je to popolnoma nerazumljivo.

Toda v Franciji je pojmovanje drugačno. Francoska šolska reforma je sad dvajsetletnih izkušenj v tako imenovanih »classes nouvelles«, kasneje preimenovanih v »classes pilotes«. Ti razredi so bili ustanovljeni leta 1945 po obsežni razpravi, ki se je začela že pred vojno in ki je pokazala, da tradicionalni šolski sistem ne ustreza več. *Vzrok temu je dejstvo, da smo znanost napravili za cilj, namesto da bi nam bila sredstvo vzgoje.* Pravi smoter šole pa mora biti razvoj učenčeve osebnosti: šola mu mora omogočiti, da se razvija moralno, umsko, telesno in socialno. Temu namenu morajo služiti vsa znanja in aktivnosti, ki so torej le sredstvo, ne pa cilj. To je bistvo pedagogike »novih razredov«.

Posledice takega vzgojnega pojmovanja šole so seveda mnogostranske. Naj navedem nekatere:

1. Šola mora omogočiti otroku usmeritev po njegovih zmožnostih; prisiljevanje k nečemu, za kar nima sposobnosti, ovira razvoj njegove osebnosti;

2. vsi predmeti so za oblikovanje njegove osebnosti enako važni in morajo tekmovati med seboj, da dosežejo svoj vzgojni smoter; od tod nujna stalna koordinacija predmetov in nujen prehod od individualne pedagogike k ekipni;

3. samo uporaba aktivnih metod, ko učitelj neha biti učitelj in postane usmerjevalec in navduševalec, ko razred ni le pasivni poslušalec, vodi k samostojnosti učencev;

4. nujno potrebna je aktualizacija pouka in odstranitev pregrad med šolo in življenjem; le študij okolja, v katerem živi, in seznanjanje z njegovimi problemi, omogoča pozneje otroku, da se znajde v prostoru in času;

5. med učitelji in učenci je treba ustvariti ozračje zaupanja, v katerem tudi dijaki prevzamejo del odgovornosti za lastno vzgojo.

Te ideje niso nove, pedagogi jih ponavljajo že več kot pol stoletja, toda doslej še niso bile realizirane. Ta cilj so si postavili »novi razredi«. Celih 15 let so delali na tem eksperimentu, število eksperimentalnih šol se je iz leta v leto večalo, dokler ni dozorel čas za posplošenje reforme (1959). Tako je danes »nova pedagogika« zakon za vso Francijo.

V luči gornjih idej nam postane razumljiva zapletena organizacija francoskega šolstva, pa tudi znatna redukcija predmetnika. Cilj šole ni ustvarjati specialiste, ampak posredovati splošno izobrazbo in oblikovati osebnosti. Tu pa število ur posameznega predmeta ni toliko važno; pri vsakem predmetu je marsikaj, kar se lahko izpusti, ne da bi celosten pogled na snov in njegov vzgojni smoter pri tem trpela.

Poglejmo npr., kako so pri takem pojmovanju odrezali matematika in naravoslovni predmeti!

Matematika ima v vseh razredih 1. cikla, klasičnih in modernih, po 3 ure tedensko. Fizika in kemija se poučujeta le v 3. in 4. razredu, in sicer skupaj kot en predmet, na razpolago pa imata eno samo uro tedensko za razlago in eno uro štirinajstdnevno za vaje. Razumljivo je, da je pri tako majhnem številu ur mogoče obravnavati snov le po izbranih poglavjih, kot so:

a) za tretji razred: agregatna stanja, voda, zrak, teža teles, sila, tlak, temperatura, toplota, spremembe agregatnega stanja, važnejše kisline, važnejše

baze, nevtralizacija kisline z bazo, sestava vode, kisik, razlika med fizikalnimi in kemijskimi pojavi, premog, apnenec;

b) za 4. razred pa: pojem dela, moči in energije, električni tok (osnovni pojmi, ohmov zakon, energija in moč električnega toka), magnetizem, elektromagnet, pojem soli, mehanske lastnosti kovin, najvažnejše kovine, važnejše ogljikove spojine.

V 2. ciklu je število ur matematike in fizike različno po oddelkih. Tako ima matematika v literarnih oddelkih vsega 5 ur tedensko (3 + 2), medtem ko ima v matematično naravoslovnih razredih po 20 oz. 16 ur, razdeljeno na vse tri razrede. Fizika pa je tudi v 2. ciklu združena s kemijo, pri čemer pripada obema skupaj 5 ur v literarnih razredih in 15 oz. 14 ur v matematično naravoslovih razredih.

Naj navedem na tem mestu še nekaj značilnih metod nove pedagogike, ki se uporabljajo pri matematiki in fiziki in ki so vredne posnemanja!

V okviru aktivnih metod so pri matematiki vpeljane t. i. *vodene vaje* (travaux dirigés). Take vaje so na programu *pred* ustrezno lekcijo: profesor vodi učence tako, da pridejo sami do določenih zakonitosti in jih na ta način vzgaja k samostojnemu raziskovanju.

Seveda pa vaje lahko služijo tudi za utrjevanje in poglabljanje že razložene snovi. Toda v tem primeru se vaje ne delajo na tablo, ker je pri takem načinu pogosto aktiven le en učenec, ostali pa večinoma nezainteresirano prepisujejo s table, ampak rešujejo naloge vsi učenci v klopeh, profesor pa kontrolira njihove rešitve in jih pri tem ocenjuje. (Pri ocenjevanju mu lahko pomaga tudi kateri od učencev.)

Treba je priznati, da sta obe metodi zares vzgojni, toda tudi od profesorja zahtevata veliko več napora kot tradicionalna metoda, pri kateri je en dijak pri tabli, drugi pa mu bolj ali manj samostojno sledijo.

Pri fiziki se mi zdi posebno pomemben način organizacije laboratorijskih vaj. Te se izvajajo skladno z učnim programom in služijo predvsem za razjasnitev novih pojmov. Zato delajo vsi dijaki v razredu — navadno po dva skupaj — istočasno isto vajo. Ko pridejo do pojma »gostota«, »specifične toplote«, »električnega upora« itd., si te pojme takoj z meritvami razčistijo in utrdijo. Takšna organizacija laboratorijskih vaj ima vsekakor velike metodične prednosti pred drugo varianto, ko dela cel razred istočasno tudi po 10 in več vaj, ne glede na to, ali je bila ustrezna snov že obravnavana ali ne.

Naj navedem še to, da se pri vajah iz matematike in fizike kakor tudi pri vseh drugih vajah razredi z nad 24 učenci delijo na polovico. To je nujno, saj bi bilo drugače intenzivno sodelovanje med profesorjem in dijaki pri vajah silno otežkočeno, če ne sploh nemogoče. Kljub temu pa je delo vzgojiteljev po novih načelih veliko napornejše kot v starem sistemu; saj zahteva od njih veliko več dinamike in tesnega sodelovanja z učenci. Tega so se zavedali tudi pobudniki francoske šolske reforme, ki so zaradi tega odmerili profesorjem in učiteljem manjšo učno obveznost (16 oz. 20 ur tedensko).

Ko danes pogosto slišimo očitke, da naša šola ne ustreza več, da je v njej vse preveč predmetov, ki so se izrodili v prave specializacije, zaradi česar je glavni smoter šole — vzgoja — zasenčen, dijaki pa so prikrajšani za najnujnejšo rekreacijo, in ko je pred vrati uvedba 5-dnevnega tednika, bi bilo prav, da se ozremo tudi na francoski šolski sistem. Je že preizkušen in mnogo je v njem vredno posnemanja.

Franc Kvaternik

O POUKU FIZIKE IN MATEMATIKE V ANGLIJI

Britanski šolski forumi so v avgustu letos organizirali enomesečni tečaj z naslovom: Pouk naravoslovnih ved v šolah druge stopnje. Namenjen je bil učiteljem, ki uče na srednjih šolah in imajo pri poučevanju že nekaj prakse, ter predavateljem na različnih šolah za učitelje.

Tečaja se je udeležilo 19 učiteljev iz 13 držav s štirih kontinentov. Tako je bilo mogoče tudi v prostem času zbrati v osebnih razgovorih veliko število informacij o pouku naravoslovja drugod po svetu.

Časovno je bil tečaj razdeljen na štiri približno enake dele. Prvi teden smo preživeli v učilnicah in laboratorijih reprezentativne srednje šole v Malvernu. Tu smo poslušali predavanja o novih kurzih fizike, kemije, biologije in matematike v Angliji in na Škotskem. Znaten del časa smo prebili pri eksperimentiranju in izdelovanju učnih pripomočkov.

V drugem tednu smo se pridružili angleškim in škotskim šolnikom, ki so imeli tečaj v Exetru. To so bili ljudje, ki nove metode pouka preizkušajo v šolah. Za nas tujce je bila to najlepša priložnost, da iz prve roke izvemo, kakšni so rezultati novih kurzov v šolah.

Tretji teden smo se preselili v London. Obiskali smo vrsto institucij, ki se na ta ali oni način ukvarjajo s šolstvom, ter nekaj najbolj poznanih tovarn, ki izdelujejo učila. Za konec so nas prepeljali na Škotsko. Tam se je namreč že začel pouk. Obiskovali smo različne šole in se seznanili s škotskim načinom pouka naravoslovja, ki je precej različen od angleškega.

Vsebina tečaja je bil Nuffieldov projekt pouka naravoslovnih ved. Projekt ima ime po skladu, iz katerega so ga financirali. To je Nuffieldov sklad, ki ga je za potrebe izobraževanja ustanovil mogotec angleške avtomobilske industrije Nuffield.

Ustvarjalci reformnega projekta in pobudniki same reforme pa so angleški učitelji naravoslovnih ved, organizirani v Association for Science Education. Ti so reformo začeli in upravljalce Nuffieldovega sklada zainteresirali zanjo, tako da so se ti odločili podpreti jo s četrt milijona funtov. Ta številka je do danes narasla na več milijonov funtov. Angleški učitelji so zelo ponosni na svojo reformo iz dveh razlogov, ki smo ju večkrat slišali:

1. Reformo so predlagali in izvedli sami učitelji in ne morda vlada, inšpektorji, univerze ali izpitni odbori. Še več, lahko bi skoraj trdili, da so reformo izvedli navkljub nasprotujočim se stališčem vseh naštetih institucij.

2. Vlada za izvedbo reforme ni prispevala prav nobenega denarja. Učiteljem je uspelo dobiti od Nuffieldovega sklada na vsakoletnih konkurzih tako ogromne vsote denarja, da je postala ta reforma največja v vsej zgodovini angleškega šolstva.

Do reforme je prišlo zaradi nezadovoljstva z učnimi načrti. V njih je bilo komaj mogoče čutiti znanost dvajsetega stoletja. Na prvi pogled se da ta pomanjkljivost odpraviti s spremembo učnih načrtov in zato ni potrebna nobena revolucija v celotnem načinu poučevanja. Toda če upoštevamo še tempo razvoja naravoslovja in tehnike, nam postane hitro jasno, da bodo mnoga, danes na novo odkrita dejstva že častitljiva zgodovina, ko bodo naši dijaki zapuščali šole.

Da bi se šola izognila tej nevarnosti, je morala bistveno spremeniti način pouka. Najvažnejše je postalo vprašanje: kako učiti. Šele potem pride na vrsto: kaj učiti.

Predvsem z namenom, da bi izčrpno odgovorili na vprašanje, kako učiti naravoslovne predmete, so Nuffieldovi ljudje napisali debele knjige za učitelje. Posebej so jim namenili še navodila za množično eksperimentiranje. Posneli so vrsto filmov, namenjenih učiteljem. Zanje vsako leto organizirajo tečaje, da se navajajo na novi pouk.

Osnovno vodilo celotnega kurza je: znanost za vse. Kurz naj bi nekaj koristil tako bodočim znanstvenikom kakor tudi tistim, ki si bodo izbrali druge poklice. Naravoslovne vede je treba poučevati tako, da bodo učenci spoznali, da je pametno učiti se jih. Vzgojni učinek naravoslovja naj bi segel v najbolj oddaljeno prihodnost. Še potem, ko bi ti učenci čez deset ali več let pozabili skoraj vsa dejstva ali bi se jih le še medlo spominjali, naj bi jim bil spomin na čas, ki so ga preživeli v laboratorijih, prijeten in bi znali svojim otrokom dopovedati, da je smiselno študirati naravoslovje.

Toda ti cilji so upi vseh šolnikov že od pamtiveka. Žal moramo priznati, da so često ostali samo upi. Da bi jih realizirali, so nuffieldovci napravili tele spremembe v tradicionalnem načinu poučevanja:

Opustili so enciklopedičen način poučevanja. Iz dijaka ne poskušajo napraviti živega leksikona dejstev. Pouk naj bo tak, da bodo dijaki dogajanja v naravi razumeli, pa čeprav bodo zato vedeli nekaj manj dejstev kot njihovi vrstniki iz klasične šole.

Snovi v novem kurzu je torej manj in je skrbno izbrana. Služi naj predvsem kot materija, na kateri se učenci uče znanstvenih metod dela. Na ta način se torej učitelji ognejo nevarnosti, da bodo njihovi učenci na koncu šolanja zastareli leksikoni. Ljudje, ki bodo vajeni misliti na način, ki je doma v znanosti, bodo sposobni vsak trenutek spoprijeti se s problemi, ki so aktualni.

Če pa naj učimo poti, po katerih znanstveniki iščejo dejstva, ne pa dejstev samih, je treba učbenik in učiteljevo pripovedovanje »na dobro vero« nadomestiti z laboratoriji, opremljenimi z instrumenti, ki jih uporabljajo znanstveniki.

Učiteljeve roke postanejo vsaj tako pomembne kot njegova besedna spretnost. Namesto odgovorov, ki jih učitelj v stari šoli množično servira pri »predavanjih«, učitelj zdaj postavlja vprašanja. Odgovore nanje iščejo vsi skupaj.

Prehod s klasičnega na novi način poučevanja pa je sila težak, kajti nič ni lažjega kot pripovedovati dejstva, ki jih nato dijaki sprejmejo na dobro vero in nekritično ter nam jih pri izpitih nato bolj ali manj verno reproducirajo. Na drugi strani pa je težko najti težji način poučevanja, kot je neprestano množično laboratorijsko delo. Če ima učitelj na razpolago obe možnosti, kot je to pri nas, potem ga nobena sila ne pripravi, da bi se lotil druge metode, če si je zavestno ne izbere sam.

Razen te osnovne težave pa je še vrsta drugih. Najprej draga oprema laboratorijev. V Angliji so to prilično pocenili tako, da so se šole organizirale in nastopajo kot kolektivni kupec na tržišču. Učila standardizirajo in šolniki narekujejo tovarnam, kaj naj jim izdelajo.

Skupine v laboratorijih so manjše od naših razredov. Navadno ne presežejo števila dvajset. V šole prihaja vedno več laborantov — navadno na tri učitelje eden. Te izobražujejo štiri leta v posebnih področnih centrih za teritorij, ki šteje nekaj desetin šol. Ti centri so hkrati izposojevalnica dražjih aparatur in nabavni center za najrazličnejši potrošni material. Tam goje tudi živali in rastline, ki jih rabijo pri pouku biologije.

Za učence praviloma ne pišejo učbenikov. To velja za šolo druge stopnje, ki je obvezna in traja od 11. do 15. leta. Izjema je biologija. Za kemijo izdajajo celo vrsto drobnih knjižic, ki obravnavajo posamezne izseke iz snovi, ki jo predelujejo v šoli. Knjižice so na razpolago v priročni knjižnici. Za fiziko imajo dijaki le knjigo vprašanj za vsako leto.

Toda zato ni treba misliti, da dijaki knjig sploh ne uporabljajo. V resnici je narobe res. Založbe, zlasti po reformi, izdajajo množico knjig o naravoslovju, primernih za mladino vseh starosti. Nobena od njih ni formalen učbenik za Nuffieldov projekt. Učenci se tako zgodaj navajajo uporabljati različne vire. Uniformiran učbenik za vso deželo je zastarela ideja.

Poseben problem je organizacija pouka in shranjevanje velike množice učil. Skupaj ga rešujejo šolniki in arhitekti. V starejših šolah je premalo laboratorijev. Klasične učilnice opuščajo. Dijaki ne izgledajo zato, ker nimajo »domače učilnice«, nič bolj nesrečni, kot se pogosto bojimo pri nas.

Mislim, da je v tej »angleški revoluciji« nekaj idej, ki bi jih mogli presaditi na naša tla.

Prva je množično eksperimentiranje. Brezperspektivno je organizirati vaje po istem zgledu, kot je to narejeno pri nas na univerzi. Vsakdo dela svojo vajo. Na univerzi je to morda možno, toda v srednji šoli morajo biti navodila preveč natančna in ostanejo za dijaka še kljub temu pogosto nerazumljiva. Treba je kupovati enake aparature v vsaj toliko izvodih, da dijaki delajo v parih. Ni posebno pametno s poskusi preverjati tisto, kar so učenci že davno slišali »ex cathedra« in v kar že pobožno verujejo, čisto nespametno pa se mi zdi delati vaje za nekaj tednov ali celo mesecev vnaprej in porušiti vsak logičen red stvari. Vse to se na naših šolah dogaja in to opravičujemo s pomanjkanjem denarja. Bolj načelni zagovorniki »univerzitetnega« sistema pa so simultanemu množičnemu eksperimentiranju nadeli ime »frontalno« eksperimentiranje, kar je dobro izhodišče za diskreditiranje tega sistema. Ne glede na to pa le ta način napreduje v šolstvu po vsem svetu.

Druga reč, ki jo je mogoče uvesti v naše šole, pa so zmanjšane skupine. Fizično nemogoče je za učitelja voditi skupino od 35 do 40 dijakov. Doseči je treba delitev razredov na polovico ne glede na to, ali ima šola laboranta ali ne.

Privlačna je seveda tudi ideja nekakega šolskega servisa, ki pa je najbrž čisto utopična. Saj se mi kljub prizadevanju ni posrečilo najti v naši domovinici nobene knjižnice, ki bi hotela kupiti Nuffieldovo literaturo. Centralna tehniška knjižnica je dobila le kemijski in fizikalni del. Tako žal na koncu ne morem dodati nasveta, kje bi o Nuffieldu hitro in poceni izvedeli kaj več.

Prav tako kot naravoslovne vede v šoli spreminja svoj obraz tudi šolska matematika. Toda če se je za naravoslovje dalo reči, da so vsa reformna prizadevanja skoraj docela skoncentrirana v Nuffieldovem programu, pa je pri matematiki večja pestrost. Podati pregledno shemo vsega dogajanja na tem področju, je zato teže.

Sočasno potekajo eksperimenti z različnimi učnimi programi. Vendar je za večino od teh mogoče najti vsaj nekaj skupnih potez.

Ena od značilnosti je ta, da se skušajo ogniti preveč strogo formalističnemu pristopu. Nevarnost za prehud formalizem se pojavi vselej takrat, kadar je v srednješolski kurz matematike treba presaditi kako področje, ki so ga prej izključno predavali na univerzi Prav to pa vsi novi učni programi v manjši ali večji meri poskušajo napraviti.

Da je prestrog formalizem prej škodljiv kot koristen, če ga želimo prenesti v premlade glave, so izkusili v ZDA. Knjige, ki jih je izdala School Mathematics Study Group (S. M. S. G.), bodo nanovo napisali. Kritiki so tem knjigam očitali predvsem to, da preveč poudarjajo čisto logiko in abstraktno mišljenje.

Angleži so se zadosti naučili kar na sosedovi napaki. Laže so se ji ognili tudi zato, ker imajo v svojih osnovnih šolah in tudi v neselektivnih srednjih šolah dolgoletno tradicijo v eksperimentalnem pouku matematike. Iz iskustev učenci abstrahirajo matematični model. Seveda to često ne gre brez pomoči. Vsakdo mora lastna izkustva oplajati s spoznanji velikih duhov iz preteklosti. Posrednik med matematiki in učenci je učitelj. Vendar je njegova glavna vloga vendarle vzpodbujati in usmerjati učenčevo delo. Informator je le včasih.

Večina abstraktnih teorij je zrasla iz neposrednih izkustev. Preden se postavijo pravila igre, je treba igro igrati. Pravila se ob igranju dopolnjujejo in izboljšujejo. Podobno je z matematiko. Njena aksiomatska formulacija je le najvišja stopnja v njenem razvoju.

Če naj torej otroku matematika ne bo le igranje s simboli, ki so zanj brez pomena, po pravilih, katerih se mora strogo držati, ne da bi doumel njihov globlji pomen, potem je treba matematiko učiti »eksperimentalno«.

Iz konkrentne situacije povzame dijak najprikladnejši matematični model. Konkretna situacija pa mu služi tudi za verifikacijo spoznanj, do katerih je prišel z razmišljanjem ob svojem modelu.

Ob tem mu bo seveda potrebno elementarno poznavanje logičnih dokazov. S temi ga začno seznanjati že zelo zgodaj. Preden se lotijo v šoli same aksiomatizacije, se dolgo ukvarjajo z dedukcijo. Iz večjega števila intuitivnih privzetkov z logičnim sklepanjem izvajajo zaključke, ki jih preizkušajo na resnični situaciji.

Na koncu take priprave bo učenec uvidel, da je aksiomatizacija potrebna. Če namreč nekdo napravi neki zaključek na osnovi danih podatkov in če hoče tudi druge prepričati, da je njegov sklep pravilen, potem mu bo to uspelo le, če so najprej dosegli soglasje glede definicij, privzetkov in logike.

Tak pristop k matematiki zahteva skrbno izbiro poglavij, ki naj bi jih obravnavali v srednji šoli. Večina angleških učbenikov vsebuje tole snov: množice, Boolovo algebro, evklidično geometrijo in verjetnostni račun.

Teorija množic je prikladna zaradi tega, ker je moč najti dosti realizacij, ki jo ilustrirajo tudi vizualno. Rezultate abstraktne teorije je večkrat mogoče vnaprej uganiti induktivno z raziskovanjem takih modelov. Že manjše število aksiomov omogoča konstrukcijo zanimive teorije. Zlasti je to poglavje prikladno za začetno »eksperimentalno« fazo pouka matematike.

Boolovo algebro so za šolo izbrali zato, ker je iste aksiome moč uporabiti še pri formalni logiki in pri teoriji vezij. Zraven je lahko dodati še poglavje o računalnikih.

Pouk evklidične geometrije se menda nikjer ne začne aksiomatsko. Pogosto je ravno narobe res: prav do zadnje faze ostane geometrija izkustvena veda. Strogi dokazi se zde odveč. Pogosto obvelja zmotno prepričanje, da zadošča že sama »zdrava pamet«.

Zato je didaktično več kot primerno, če ravno na tem področju otrokom omajamo zaupanje v intuitivne presoje »zdrave pameti«. To je dokaj lahko storiti že zelo zgodaj, če le otroke spomnimo, da je vsa geometrija, ki jo »delajo«, v resnici geometrija na krogli — Zemlji in ne na ravnini, kot je videti

na prvi pogled. Namesto ravnih črt imamo v resnici opravka z velikimi krogi. Le-ti predstavljajo najkrajše poti med dvema točkama. Tako definirane črte pa ne morejo biti več vzporedne. V »eksperimentalni« geometriji hitro naletimo na omejitve. Aksiomatizacija se torej pokaže kot potreba.

Šele ko je dijakom potrebnost aksiomatske obravnave zares jasna, se je lotimo. Vendar jih zdaj ne peljemo le po Evklidovi poti, temveč pokažemo, da je aksiom o vzporednicah križišče, ki vodi v tri različne geometrije. Za vsako od njih je mogoče najti realen model.

Verjetnostni račun je primeren za srednjo šolo zaradi tega, ker je z njim mogoče pokazati moč aksiomatske obravnave in čisto deduktivnega mišljenja, ki ni nič »zamazano« z znanimi interpretacijami. Dijaki so sicer o verjetnosti že slišali, toda njihovi pojmi o tem so navadno tako pomanjkljivi, da nam ne bodo mogli »pobegniti« z mislimi s splošnega na konkretno. Jasno je, da je to poglavje za najzrelejše dijake in da bomo še kljub temu morali čisto deduktivno verigo kmalu prekiniti in jo »kontaminirati« z interpretacijami, če bomo hoteli zadržati zanimanje učencev.

Na začetku sem že dejal, da v Angliji poskušajo organizirati več matematičnih kurzov hkrati. Vsaj nekatere od njih bom omenil.

Skoraj tri leta star je Nuffield Mathematics Teaching Project. Namenjen je otrokom od 5. do 13. leta starosti. Prvo leto so pisali učbenike ter navodila za učitelje in jih v majhnem merilu sproti preizkušali. V drugem letu so v poskus zajeli večje število učiteljev in učencev. Letos je vključenih že okoli 7000 učiteljev. Do junija letos sta izšli že dve od desetih knjig, ki bodo vsebovale navodila za učitelje. Ostali material je še v poskusni fazi in ga še ni mogoče kupiti. Bilten, ki ga izdajajo vsakega četrt leta, prinaša najnovejše informacije o projektu.

School Mathematics Project je namenjen učencem od 11. do 18. leta. Njegova rojstna letnica je 1961. Spočetka so nameravali napraviti le kurz za 25 % mladine z nadpovprečnimi sposobnostmi, ki se šola v grammar schools. Ta načrt je že skoraj izpolnjen. Za dijake je izšlo okoli 15 knjig, nekaj samo v poskusni obliki, večina pa že tudi v korigirani končni izdaji. Le nekaj manjše je število knjig za učitelja. Zdaj so se lotili še kurza za ostalo mladino v drugih srednjh šolah. Prvi od osmih učbenikov bodo izšli na pomlad. Organizirajo tečaje za specialno usposabljanje učiteljev za ta kurz matematike. Posebne tečaje prirejajo za neangleške udeležence.

Midland Mathematics Experiment so začeli tudi leta 1961. Cilj eksperimenta je bil kurz za dijake v grammar school od 11. do 18. leta. Lani je bilo v poskus vključenih okoli 6000 dijakov. V učni načrt so vključili mnogo sodobne matematike in matematike, uporabne za industrijo in znanost. Posebno pozornost so načrtovalci programa in učnih metod posvetili temu, da so ga sestavili v skladu z dosežki pedagogike v zadnjih 30 letih. Matematika naj ne bi v dijakih ustvarila občutka, da je na tem področju že vse znano in odkrito. Zato je poleg stereotipnih nalog vključenih tudi precej takih, kjer imajo učenci priložnost poiskati vsaj delno originalno rešitev.

Izšlo je okoli 10 knjig za dijake in učitelje. Razen tega pa so posebno skrbno izdelali tudi učila za matematiko.

Na Škotskem je The Scottish Mathematics Group, v kateri je bilo prvotno 17 predstojnikov matematičnih oddelkov na srednjih šolah, izdelala program, imenovan Modern Mathematics for Schools. Preskušali so ga s 7000 učenci

na 60 šolah. Kot rezultat tega dela bo izšlo 7 knjig za učence in učitelje. Večina snovi je že objavljene.

Posebno pozornost zasluži tudi sicer manjši projekt, imenovan Mathematics in Education and Industry, ki se predvsem ukvarja z matematiko, uporabno v industriji. Namenjen je učencem od 11. do 18. leta. Knjig še ni mogoče kupiti. Pri nas bi nekaj podobnega rabili za razne poklicne in tehniške šole.

Vsi našteti projekti dajejo enako težo izbiri snovi kot metodiki posredovanja. To je mogoče videti že iz tega, da zraven učbenikov za učence izhajajo tudi spremne knjige za učitelje.

Obstaja pa še poseben projekt, ki ima za cilj študij razvoja matematičnih koncepcij pri učencih. Imenuje se The Psychology and Mathematics Project. Izšlo je devet knjig za učence in učitelje.

To kar sem naštel, seveda še ni vse. Opravičujem se, ker nisem navedel organizatorjev posameznih projektov in založb, ki izdajajo knjige. Če bo kdo želel detajlnejše podatke, mu bom rade volje ustregel, če bom mogel.

Še mnogo bolj vesel bi bil, če bi kdo odkril kako knjižnico, ki bi vsaj nekaj te literature kupila.

Janez Ferbar

FIZIKA NA STROKOVNIH ŠOLAH*

Fizika je veda, ki proučuje zakone, po katerih se dogajajo naravni pojavi, in jih potem izroča uporabnim znanostim (tehniki, medicini, kemiji, agronomiji . . .), da jh uporabijo v korist in blagostanje človeštva. Če se danes postavljamo z visoko razvito civilizacijo, potem je to v veliki meri zasluga neštetih fizikov, ki so dve tisočletji neutrudno vrtali in odgrinjali skrivnosti narave iz nesebične težnje po spoznanju zakonitosti, ki vladajo v njej, ne da bi se pogosto spraševali, ali bodo dobljeni izsledki komu koristili ali ne. Spomnimo se samo izuma parnega stroja, ki je sledil temeljitemu proučevanju mehanskih in toplotnih pojavov fizikov 17. in 18. stoletja; ali pa naglega razvoja elektro- in radiotehnike, ki je sledil pionirskemu delu Faradaya, Maxwella in Hertza! Nadalje, kaj pomenijo za medicino, tehniko, kemijo itd. odkritja Röntgena in zakoncev Curie? Pomislimo na atomske raziskave zadnjih 60 let, ki danes žanjemo njihove sadove in ki obetajo že v skorajšnji bodočnosti dati tehniki neomejene možnosti razvoja in pripraviti človeštvu nesluten dvig življenjske ravni! Fizika je torej tista osnovna veda, na kateri sloni vsa današnja tehnika in druge praktične in teoretične znanosti, ki se poslužujejo fizikalnih sredstev.

Kar pa je fizika kot znanost za tehniko, to mora biti tudi kot predmet za tehniške strokovne šole. Fizika je poleg matematike predmet, ki služi za osnovo strokovnim predmetom. Njena glavna naloga je, vcepiti učencem osnovne pojme, ki so podlaga tehniškega študija. To pa še ni vse: fizika mora dati učencem več kot golo strokovno znanje. Vzgajati mora v mladih tehnikih čut opazovanja, iznajdljivosti in ustvarjalne domišljije, ki ga morda kdaj izoblikuje za več kot navadnega rokodelca; naučiti mora dijaka povezovati na videz različne pojave tako, da ne bo gledal le posameznosti, ampak celotno sliko sveta, da ne bo živel le v ožini svoje stroke, ampak bo široko razgledan, kar ga bo šele usposobilo, da v polni meri razvije svoje zmožnosti v poklicu. Razen

* Izvleček iz poročila na kongresu društev mat., fiz. in astr. v Sarajevu.

tega pa mora fizika dati dijaku kritičen odnos do sveta in mu oblikovati znanstveno pravilen svetovni nazor.

Toda če kritično premotrimo današnje stanje fizikalnega pouka na strokovnih šolah, pridemo do spoznanja, da še daleč ne ustreza navedenim smotrom. Analizirajmo vzroke tega stanja in skušajmo najti pot k izboljšanju!

1. *Fizika zaradi nerazumevanja mnogih predavateljev strokovnih predmetov nima na strokovnih šolah mesta, ki ji po naravi in smotru predmeta pripada.*

Medtem ko ima fizika v gimnaziji 9 ur tedensko, so ji na strokovnih šolah dodelili po 2 (strojna), 4 (geodetska), 5 (metalurška), 6 (lesnoindustrijska smer) itd. z motivom, da se del fizikalnega gradiva predava že pri strokovnih predmetih (mehanika, termodinamika, elektrotehnika . . .) in da se naj pri fiziki obdela le tisti del snovi, ki je dijaki ne slišijo pri nobenem drugem predmetu. Toda vedeti je treba, da fizika ni vsota mehanike, akustike, elektrike, optike itd. Izločiti iz predavanj cela poglavja, npr. elektriko, kaloriko itd., pomeni, odreči se smotru fizikalnega pouka, ki je študij narave kot celote, proučevanje raznovrstnih pojavov ter sprememb energije v naravi. Tako se npr. učenec pri elektrotehniki uči Ohmovega zakona in velikega števila konkretnih primerov uporabe, v fiziki pa mora dijak uvideti, da velja prav takšna zakonitost za poljubno stacionarno pretakanje elektrike, vode, plina ali česarkoli že. In podobno bi lahko navedli še mnogo drugih primerov. Povezovati na videz različne pojave in formulirati splošne zakonitosti, to je naloga fizike in v tem ne konkurira nobenemu strokovnemu predmetu, ampak jim je samo v oporo. Zato so šole, ki so fiziko reducirale na »izbrana poglavja«, napravile sebi zelo slabo uslugo.

2. *Pouk fizike se še vedno mnogokje vrši po metodah teoretične fizike s kredo na tabli.* Nekatere strokovne šole sploh nimajo fizikalne predavalnice niti potrebnih učil, kaj šele fizikalnega laboratorija, v katerem bi učenci sami izvajali poskuse; ne poslužujejo se sodobnih pripomočkov (filma, diapozitivov, modelov itd.). Taka fizika je nezanimiva in dolgočasna in ne dosega smotrov, ki so ji postavljeni.

3. *Neusklajen pouk fizike in sorodnih predmetov je nadaljnji vzrok zmede in pomanjkljivega uspeha fizikalnega pouka na srednjih strokovnih šolah.*

Matematika, fizika, mehanika, termodinamika, strojni elementi, osnove elektrotehnike in vrsta drugih poglavij so med seboj ozko povezani. Učenec, ki istočasno posluša te predmete, se mora zgubiti v labirintu znakov in enot, če vsak predavatelj uporablja drugačne simbole za iste stvari in enake količine drugače meri.

To je nekaj najvažnejših momentov, ki v današnji strokovni šoli igrajo znatno vlogo in vplivajo na uspeh fizikalnega pouka. Toda sama ugotovitev in analiza ne bi imeli smisla, če ne bi poskušali najti poti za izboljšanje. Zato navajam nekaj konkretnih napotkov, ki bi lahko znatno dvignili kvaliteto fizikalnega pouka na strokovnih šolah, če bi se izvedli.

1. *Za vse strokovne šole — diferencirane po tipih — je treba čimprej izdelati okvirni predmetnik, ki ga šole ne smejo samovoljno spreminjati. V tem predmetniku mora biti fizika zastopana s tolikšnim številom ur, kolikor ustreza njenemu pomenu v strokovnem in splošno izobraževalnem smislu.* O številu ur bi morali odločati na pristojnem forumu, pri čemer bi bilo treba upoštevati mnenje Društva matematikov, fizikov in aktronomov.

2. *Pouk fizike in strokovnih predmetov je treba uskladiti* tako, da strokovni predmeti ne bodo ponavljali snovi, ki jo učenci slišijo že pri fiziki, ampak da to snov aplicirajo na stroko.

3. *Vsaka šola mora imeti posebno predavalnico za pouk fizike in po možnosti laboratorij za praktične vaje učencev.* Pri pouku fizike je treba uporabljati eksperimentiranje, laboratorijske vaje, film, diapozitive, skratka vsa moderna sredstva. Zato mora imeti vsaka strokovna šola potrebno opremo in učila.

4. *Fizika na srednji strokovni šoli nikakor ne sme biti izključno opisovalni predmet.* Matematično izraženi zakoni kakor tudi računski primeri uporabe teh zakonov so nujen del fizikalnega pouka. Iz tega razloga se morajo učenci neprestano vaditi v reševanju računskih nalog, ki služijo ponavljanju in poglabljanju snovi, pomagajo k razumevanju funkcionalne odvisnosti med fizikalnimi količinami in navajajo učence k samostojnemu delu. Štirikrat letno pa je treba pisati tudi šolsko nalogo iz fizike.

5. *Nujno potrebno je uskladiti simboliko v fiziki in sorodnih predmetih in uvesti enoten merski sistem, to je mednarodnega,* ki ga je uzakonila tudi Jugoslovanska standardizacijska komisija in ki ima za osnovne enote meter, kilogram, sekundo, stopinjo, kandelo in amper. Za druge enote, ki se še vedno uporabljajo v vsakdanjem življenju in v tehniki (npr. atmosfera, kilopond, konjska moč, gauss itd.) pa naj se samo navedejo pretvorniki glede na enote mednarodnega merskega sistema.

To so po mojem mnenju elementi uspešnega pouka fizike v srednjih strokovnih šolah. O tem se govori že vrsto let, toda brez uspeha, ker je vsaka strokovna šola bolj ali manj svobodna v spreminjanju predmetnika in v določanju števila ur posameznim predmetom ter je vse odvisno od zavzetosti posameznih predavateljev fizike, predvsem pa od razumevanja direktorja. Zato mislim, da je velika naloga tega kongresa, da izposluje fiziki na strokovnih šolah mesto, ki ji pripada. Samo tako bo fizikalni pouk dosegal smotre, ki so mu že od nekdaj postavljeni, a zanje na večini srednjih strokovnih šol doslej ni bilo objektivnih pogojev za realizacijo.

Franc Kvaternik

DOMAČE VESTI

OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV V LETU 1967

Največkrat je bil občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije v matematični predavalnici v Ljubljani, Trg revolucije 11. Tam smo tudi letos 16. XII. 1967 podajali obračun za poslovno leto 1966-67. 63 zborovalcev je napolnilo prostor. Želeli smo si še večji obisk, saj smo poslali skoraj 400 vabil našim članom, raznim ustanovam in po več vabil na vse slovenske srednje šole, večje in bližnje osnovne šole ter višje šole. Objavili smo tudi krajša poročila o delu društva v zadnjem obdobju v časopisih »Delo« in »Prosvetnem delavcu« ter med radijskimi poročili, vsakokrat z vabilom na občni zbor. Od vseh udeležencev jih je bilo le 14 izven Ljubljane in le 2 iz osnovnih šol ter 7 iz srednjih šol. Vsi vabljeni pa so dobili tudi kratek opis dela društva od zadnjega občnega zbora.

Po pozdravu navzočih je tov. predsednik predlagal v delovno predsedstvo naslednje kolege: dr. Nika Prijatlja, Aleksandra Kregarja in Franceta Račiča; zapisnik je vodil Stane Pirnat.

Pred nadaljevanjem občnega zbora smo s kratkim molkom počastili spomin na umrle člane našega društva v preteklem letu: prof. dr. Josipa Plemlja, Marijo Rogelj in Jožeta Ulčarja.

Prvi je govoril tov. predsednik. Prisotne je na kratko seznanil z razširjeno dejavnostjo našega društva in z njegovimi uspehi in neuspehi. Z obžalovanjem je ugotovil, da je zelo slabo sodelovanje Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije s posameznimi republiškimi društvi ter da je težko pridobiti nove člane za delo v društvu, predvsem med srednješolskimi profesorji, in da je z njimi tudi sicer slaba povezava. Tudi poznejši govorniki so bili mnenja, da so za povezavo odgovorni v enaki meri člani sami. Čeprav naše društvo letos ni bilo brez finančnih sredstev, je vseeno neprijetno to, da nikdar ne vemo, kdo bo v prihodnje financiral našo dejavnost. Tov. predsednik je tudi povedal, da se je upravni odbor odločil nagraditi tiste ljudi, ki imajo pri organizaciji veliko dela. V imenu društva smo jeseni predlagali Mestnemu svetu, naj eno od večjih ulic v novih ljubljanskih naseljih imenuje po pokojnem častnem članu našega društva prof. dr. Josipu Plemlju.

Iz tajnikovega poročila smo ugotovili, da je število prejetih in odposlanih pošiljk močno naraslo, saj jih je bilo 449. To povečanje ni samo zaradi podaljšane poslovne dobe za tri mesece, temveč tudi zaradi večje aktivnosti društva in tesnejšega sodelovanja s posamezniki in ustanovami. Ob tem smo hoteli prav vse registrirati. Upravni odbor je imel 12 sej, ki so bile redno vsak mesec. Sklepe sej in maksimalni plan, ki si ga je društvo na začetku zastavilo, smo lahko skoraj v celoti izvršili ne le zato, ker smo dobili dovolj finančnih sredstev, ampak tudi zato, ker so bili člani odbora pripravljeni to delo organizirati, ostali naši člani pa pomagati pri konkretnih akcijah z delom in dragocenimi nasveti.

Knjižna zbirka Sigma obsega že 15 knjig. V lanskem letu je izšla le N. Prijatelja Matematične strukture II. Zato pa je v pripravi več nadaljnjih rokopisov. Rokopis Janeza Strnada, Kvantna mehanika za začetnike, je v tiskarni.

To bo prva knjiga iz fizike. Tako bo naša zbirka res postala zbirka društva matematikov in fizikov. V kratkem bosta končana še naslednja rokopisa: Ivan Pucelj, Nevklidične geometrije ter Alojzij Vadnal in France Lebedinec, Funkcije II. Z avtorji smo v dogovoru tudi še za naslednje knjige, ki naj bi izšle v letu 1969: Matematične strukture III, Relativnost in Linearno programiranje. Ko pa bomo dobili še izredno subvencijo, bomo izdali tudi ponatis Funkcij I., ki so bile razprodane v zelo kratkem času in je zanje veliko zanimanje.

V matematični knjižnici smo organizirali v okviru društvene dejavnosti prodajo srbskih in hrvaških zbirk nalog za srednješolce ter prodajo s posebnim popustom nadaljnjih 613 knjig Sigme. Sredstva za ta popust je delno odobrila Mladinska knjiga, ki je založnik za naše knjige ter društvo. Društvo je prevzelo tudi celotno uredništvo zbirke Sigma, za katero mora preskrbeti ustrezno subvencijo v višini honorarjev, ki jih tudi samo izplačuje.

Delo z dijaki je bilo letos bolje organizirano, saj je bilo predvsem več ur predavanj. V prvem semestru lanskega šolskega leta so predavali v Ljubljani:

Za 1. razred:

N. Prijatelj: O množicah;
J. Vrabec: Linearni grafi, Dve igri, Geometrijske transformacije;
J. Grasselli: Kolobar ostankov po modelu n;
T. Skubic: Binarna aritmetika;
C. Velkovrh: Nekatere vsote celih števil.

Za 2. in 3. razred je imel A. Vadnal dvomesečni tečaj linearnega programiranja.

Za 4. razred pa so predavali:

A. Suhadolc: Vsako naravno število je vsota štirih kvadratov;
F. Križanič: O kibernetični teoriji delovanja možganov;
I. Vidav: Funkcionalne enačbe in O problemu prostornine;
J. Vrabec: Verižni ulomki;
R. Jamnik: Konveksne množice;
Marija Vencelj: Diofontske enačbe;
S. Indihar: Vrste.

Zaradi slabšega obiska smo v drugem semestru organizirali predavanja za 1. in 2. razred skupaj, za 3. in 4. pa skupaj. Za nižjo skupino so bila naslednja predavanja:

G. Tomšič: Pitagorejske trojice;
F. Lebedinec: Konstrukcije samo s šestilom;
M. Ziegler: Princip nedoločnih koeficientov;
S. Indihar: O trikotniku.

Za višjo skupino pa je imel J. Vrabec trimesečni tečaj z naslovom Algol in numerično računanje.

V jeseni letošnjega leta smo oživeli matematično šolo, v kateri dijaki poslušajo ves semester predavanja z isto temo in to vsak razred posebej. Nekatera predavanja, ki so bila skrbno pripravljena, so se zaradi slabega sodelovanja s predavatelji na srednjih šolah prekmalu končala. Začetni obisk je na vseh predavanjih zelo dober, pozneje pa zelo hitro upade, morda tudi zaradi preobremenjenosti dijakov. Letošnji program v matematični šoli je bil tale:

Za 1. razred: J. Vrabec: Kombinatorna topologija.

Za 2. razred: F. Lebedinec: Geometrijske konstrukcije samo s šestilom in ravnilom.

Za 3. razred: I. Pucelj: Interpretacija geometrij.

Za 4. razred: R. Jamnik: Verjetnosti račun.

Četrtošolci so imeli po končanem predavanju interno tekmovanje; trije najboljši so prejeli knjižne nagrade.

Pohvaliti pa moramo prizadevanje, da so bila podobna predavanja tudi po nekaterih drugih šolah v Sloveniji. Tamkajšnjim predavateljem gre zasluga, da so ta predavanja izredno dobro obiskana in da je zanimanje za nova vedno veliko. Želijo si tudi predavanj iz fizike in astronomije. V zadnjih treh semestrih so predavali v Novi Gorici:

I. Vidav: Simetrija,
A. Suhadolc: Diferenčne enačbe,
J. Vrabec: Linearni grafi.

V Celju:
J. Vrabec: Linearni grafi,
A. Suhadolc: Diferenčne enačbe,
F. Lebedinec: Konstrukcije samo s šestilom.

V Novem mestu:
J. Vrabec: Linearni grafi,
J. Grasselli: Fibonaccijeva števila,
S. Indihar: Manj znane lastnosti trikotnika,
F. Dominko: Zakon gravitacije in gibanje umetnih satelitov,
N. Prijatelj: Nekaj o kardinalnih številih,
J. Vrabec: Problem najmanjše poti.

V Kranju:
T. Skubic: Binarni sistem,
R. Jamnik: Konveksne množice.

V Kopru:
A. Sahadolc: Verižni ulomki,
J. Vrabec: Linearni grafi,
G. Tomšič: Pitagorejske trojice.

Na Jesenicah:
A. Suhadolc: Fibonaccijeva števila,
G. Tomšič: Fermatov problem.

V Mariboru so pred letom dni ustanovili podružnico našega društva z imenom »Aktiv matematikov in fizikov« v Mariboru. Na ustanovnem sestanku, kjer so bili navzoči člani iz Maribora, Ptuja, Ljutomera, Murske Sobote in Raven, so izvolili za predsednika Franceta Bezjaka, prof. na višji tehnični šoli v Mariboru, za tajnika pa Marijo Munda, profesorico na gimnaziji Maribor-Tabor; Emil Jakhel pa bo povezoval društvo s prosvetno pedagoško službo. Podružnica je takoj pričela z delom in organizirala do danes naslednja enomesečna predavanja za dijake mariborskih šol:

M. Kac: Matrični račun,
F. Bezjak: Osnove vektorskega računa,

I. Brecelj: Geometrijske konstrukcije,
J. Lep: Kompleksna števila,
I. Burger: Osnove statistike,
F. Bezjak: Osnove vektorske algebre,
M. Kac: Osnove linearnega programiranja.

Tudi na nekaterih drugih šolah v Sloveniji so krožki za dijake, ki potekajo bolj ali manj redno, kot na primer:

I. in II. gimnazija v Ljubljani,
gimnazija v Kranju,
gimnazija v Novem mestu,
učiteljišče v Mariboru
in morda še kje.

Ciklus predavanj iz fizike, ki jih prireja društvo vsako leto spomladi, je bil letos posebno dobro obiskan; na vsako predavanje se je iz Idrije pripeljalo z avtobusom večje število dijakov in profesorjev, za kar zaslužijo posebno priznanje. Nuklearni inštitut J. Štefan jim je zato omogočil obisk in ogled inštituta in jedrskega reaktorja v Podgorici.

Letos so poslušali predavanja iz naslednjih tem:

J. Strnad: Gravitacija,
J. Pahor: Določanje starosti z radioaktivnimi izotopi,
P. Gosar: Elektroni o kovinah,
R. Blinc: Laserji in življenje zvezd,
A. Moljk: Mössbauerjev efekt.

Tudi letos je društvo izdalo zbirki matematičnih (1000 izvodov) in fizikalnih nalog (500 izvodov). Ker so naloge pisane v slovenskem jeziku, je zanimanje zanje zelo veliko, tako da smo morali matematično zbirko, čeprav ne preobsežno, še ponatisniti.

Ob koncu šolskega leta je bilo republiško in zvezno tekmovanje mladih matematikov in fizikov ter matematična olimpiada. Poročila o teh in o šolskem tekmovanju matematikov na II. gimnaziji v Ljubljani je že bilo objavljeno v naši reviji.

Dolžni smo še napisati kratko poročilo o podelitvi nagrad in pohval ter o sodelovanju z gibanjem »Znanost mladini«. Večletna nesoglasja so se popolnoma zravnala. Sklenili smo, da organiziramo posamezna republiška tekmovanja tako kot doslej. Tekmovanje v hitrem in spretnem numeričnem reševanju nalog iz fizike in matematike bo še v naprej organiziralo naše društvo. Tekmovanje v astronomiji, biologiji, kemiji in izdelavi fizikalnih aparatur pa bo ohranilo gibanje »Znanost mladini«. Pri tem bo naše društvo imenovalo izpitno komisijo pri fiziki in astronomiji. Vsako leto se moramo tudi pravočasno sporazumeti za tekmovalne dneve in za enotno nagrajevanje. Letos je gibanje imelo veliko število praktičnih nagrad, katere so darovali po zaslugi izredno prizadevnega sekretarja gibanja T. Kreutzerja razna podjetja in ustanove. Le te so odstopili v skupni nagradni fond za tekmovalce vseh šestih tekmovalnih skupin, naše društvo pa je prispevalo večji del finančnih sredstev. Ker je republiški sekretar za prosveto in kulturo, Tomo Martelanc, podelil nagrade vsem tekmovalcem na skupni svečanosti v zbornični dvorani univerze, lahko rečemo, da je bilo sodelovanje popolno.

Delo matematično-fizikalnih aktivov se je s formiranjem posebne komisije pod vodstvom Marije Jemec zelo razširilo.

Aktivi so bili skoraj vsak mesec v glavnem posvečeni šolam druge stopnje in to gimnazijam. Na več aktivih so namreč udeleženci sami izrazili želje za vsebino predavanj, želje pa so bile le s strani profesorjev na gimnaziji. Udeležba na aktivih je bila različna, od 15—150 udeležencev.

V kratkem bomo navedli teme in eventualne predloge ter sklepe, ki so bili predlagani v diskusijah.

Na aktivu, kjer je bilo predavanje o delu in položaju predavateljev pri eksperimentalnem pouku fizike, je bil postavljen sklep, da se pošlje republiškemu sekretariatu za prosveto in kulturo ter drugim odgovornim forumom predlog za zmanjšanje učne obveznosti predavateljem fizike, ki imajo eksperimentalni pouk. Odgovora nismo prejeli niti od Zavoda za šolstvo.

Decembra leta 1966 so profesorji podrobno analizirali uporabnost učnih knjig — Aritmetiko, algebro in analizo za I., II. in III. razred gimnazij, ter Geometrijo za I. razred gimnazije. Rezultat aktiva je bil v tem, da je društvo v 200 izvodih izdalo predlog podrobnega učnega načrta glede na obstoječe knjige. (V delu je že predlog podrobnega učnega načrta za III. razred gimnazije.)

Republiškemu sekretariatu za prosveto in kulturo (komisiji za učbenike) je bil poslan predlog, naj ponovno razpiše natečaj za pisanje učbenika za IV. razred gimnazije. Omenjena komisija je ta učbenik razpisala, dr. F. Križanič se je razpisu odzval.

Udeleženci aktiva so izrazili željo po zbirki nalog kot priročniku k obstoječim učbenikom. Vabilu k sodelovanju za pripravo te zbirke nalog sta se do danes odzvala le dva predavatelja.

Lani februarja je predaval dr. I. Vidav: Zveza med matematiko v srednji šoli in med matematiko kot znanostjo v sedanji fazi.

V mesecu marcu je bil aktiv v glavnem namenjen učiteljem matematike višjih razredov osnovne šole. Profesorji, ki poučujejo dijake prvih letnikov srednjih šol, so poročali o rezultatih sprejemnih izpitov in prestopnih težavah učencev na šoli II. stopnje.

Na tem aktivu je bil sprejet sklep, da se pošlje vsem odgovornim predlog za ukinitev 39. člena zakona o osnovni šoli, ki govori o napredovanju učencev z nezadostno oceno v višji razred. Republiški sekretariat za prosveto in kulturo nas je obvestil, da bo ta predlog proučen ob splošnem predlogu za spremembo obstoječih predpisov, ki ga bosta pripravila Zavod za šolstvo in Pedagoški inštitut.

Na tem aktivu se je tudi veliko diskutiralo o posledicah pouka v osnovni šoli z ozirom na to, da imamo za vse učence, ne glede na njihovo zmogljivost in pripravljenost do nadaljnjega šolanja, enotno osnovno šolo. Saj zakon o osnovni šoli zahteva dodatno delo s slabšimi in boljšimi učenci, vendar je realizacija tega večkrat nemogoča — ne bi naštevali vzroke, ki jih poznamo.

V aprilu smo poslušali predavanja R. Korbarja o planarni tehniki pri izdelavi tranzistorjev, katerega smo zaključili z ogledom proizvodnega postopka na Zavodu za avtomatizacijo.

Od februarja do maja je bil nadaljevalni tečaj iz astronomije za profesorje IV. razredov gimnazije. V skrajšani obliki je bilo predavanje v Mariboru. Dr. Do-

minko je obljubil, da bo v kratkem napisal skripta s teh predavanj, katera bo izdalo društvo v sodelovanju z astronomsko-geofizikalnim observatorijem, kar pa nam do danes še ni uspelo.

V mesecu oktobru smo poslušali predavanje Franca Kvaternika o sodobnem srednješolskem pouku v Franciji s posebnim opisom pouka matematike in fizike, čez mesec dni pa je imel enako temo o pouku v Angliji Janez Ferbar. Na tem aktivu je bila podana tudi analiza ankete o novem učnem načrtu za matematiko v gimnazijah (Stanko Uršič).

V začetku meseca decembra pa smo poslušali predavanje N. Prijatelja, O konvergencah.

Poročilo o seminarju za profesorje matematike na srednjih šolah je bilo že objavljeno v naši reviji.

Sekcija za matematično terminologijo je pri pripravi matematičnih terminov pregledala že vse knjige pokojnega prof. J. Plemlja, vse knjige zbirke Sigma in druge slovenske matematične knjige. Do izida slovenskega matematičnega slovarja bo potrebno še veliko dela.

Upravni odbor je sprejel tudi sklep o ustanovitvi sekcije za astronomsko terminologijo.

Biografsko-bibliografska sekcija je pripravila novo opremo za sobo v rojstni hiši Jurija Vege v Zagorici, kakor tudi razstavni material.

Društvena revija Obzornik za matematiko in fiziko se je v zadnjem letu borila predvsem s pomanjkanjem rokopisov. Številka 2-3 za leto 1966, ki je izšla zelo pozno v letu 1967, je bila dvojna, da bi laže dohiteli čas. Enako nameravamo storiti s 3. in 4. številko letošnjega letnika, če ne bo dovolj rokopisov. Večkrat smo slišali kritiko, češ da Obzornik prinaša premalo za srednjo šolo. Zdi se nam, da danes ta očitek ni več na mestu, saj je z izjemo treh ali štirih člankov dovolj branja za srednjo šolo. Lahko pa bi bilo tega še več, če bi bilo več prispevkov prav iz vrst srednješolskih profesorjev matematike in fizike. V srednji šoli je veliko problemov, ki jih je vredno opisati in objaviti v naši reviji. Spomnimo se samo sestankov aktivov na šolah, pedagoških zavodih in tistih, ki jih prireja naše društvo ter problemov eksperimentalnega pouka fizike. Manj skrbi pa smo imeli s financami, saj smo prejeli izredno dotacijo Sklada Borisa Kidriča, pričakujemo pa še pomoč Nuklearnega inštituta J. Štefan in inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, ki naj bi plačala del tiskarskih stroškov člankov, katere so napisali njihovi člani. Prav tako pa moramo izterjati še nad pol milijona neplačanih naročnin. Vse to bo zadostovalo za kritje stroškov vseh štirih številk 14. letnika.

Izdelati moramo še novo kartoteko naročnikov.

Po končanih poročilih odbornikov se je razvila zelo živahna debata, kakršno smo pogrešali že več let. Posamezniki so opozarjali na podrobnosti, ki jih bo moralo društvo in njen upravni odbor v prihodnje upoštevati. Društvo se bo moralo še bolj povezati s srednjimi in osnovnimi šolami ter s sorodnimi društvi v Jugoslaviji in drugih državah. Večji stik bi bil potreben tudi z drugimi strokovnimi društvi. Še prav posebno slabo pa je sodelovanje z Zvezo društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije. Po nekaterih informacijah zveza nima sredstev za bolj aktivno delo in sodelovanje, kar pa bi se moralo z malo dobre volje in želje do sodelovanja na nek način urediti. Po mnenju F. Dominka bi morali več storiti za masovno matematično in fizikalno izobrazbo ter za njen vpliv na celoten program izobraževanja.

Prof. Fran Dominko je povedal približno tele misli:

Društvo je uspešno opravilo celo vrsto nalog, člani odbora zaslužijo zato priznanje in pohvalo. Prepričan sem, da v Ljubljani ni strokovnega društva, ki bi lahko pokazalo tako bogato žetev. Hkrati pa moram poudariti, da se društvo še ni lotilo številnih zadev in problemov, do katerih bi morali imeti mi vsi jasno izoblikovana stališča, saj bi le tako bila razvojna pot znanosti pri nas tudi jasno začrtana. Ignoriranje »pomembnih« vprašanj je pri vseh naših strokovnih društvih postalo že normalen pojav (številni primeri so na dlani), to pa pomeni, da njihovo tekoče delo ne posega v živ razvoj stroke. Poleg tega naj bi bilo društvo tisto mesto, kjer se razčiščujejo tudi najbolj delikatna vprašanja v odnosih med zavodi in posamezniki. V Sloveniji imamo večje število samostojnih institucij, kjer gojimo naše znanosti. O odnosih med njimi nikoli in nikjer ni govora. Na matematično-fizikalnem oddelku na primer ne razpravljajo o inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko; koeksistirata formalno ločeno, čeprav so povsod isti ljudje. Že dalj časa govorijo o prehodu inštituta J. Štefana pod proračun naše republike. V reviji Proteus je celo pisalo, da bo republika prevzela vzdrževanje jedrskega reaktorja. Če se to uresniči, bomo precejšnje posledice občutili tudi mi vsi v drugih zavodih. Ali ni prav društvo najbolj poklicano, da pripravi vsaj osnutek neke bolj načrtne reorganizacije? Na sejah oddelka slišimo samo o vedno novih predlogih za honorarne obveze naših članov zdaj pri tem, zdaj pri drugem inštitutu, a nikoli ni jasno, če ima ta politika tudi bolj premišljene cilje kot samo zvečanje dohodka nekaterim.

Tudi šolski problemi so. Učna skupina »pedagoške fizike« je skoraj brez študentov. To so slabi izgledi za to, da bi si v primernem času vzgojili za srednje šolstvo zadostno število učiteljev. V prvih letih študija je osip še vedno izredno visok. Navada je, da zvračamo krivdo za to na srednjo šolo. Ali pa ni morda del krivde tudi pri nas? Že dalj časa se menimo o potrebi uvajanja matičnih katedr za matematiko in fiziko kot o nadomestku za funkcije, ki jih je prej med tehničnimi fakultetati opravljal splošni oddelek. Tudi tu naj bi priskočilo na pomoč naše društva, saj so v njem zbrani vsi strokovnjaki iz posameznih zavodov, institucij in šol.

Vrsto problemov imajo naši kolegi v gimnazijah. Na občnem zboru v Idriji smo sklenili, da bomo proučevali stanje in spremljali gibanja v srednjem šolstvu. Pregledali bomo zasedbo mest po strokovnosti, ugotovili potrebe po kadrih itd. Večina kolegov je s predavanji in poukom močno obremenjena: predavajo tudi po več kot 36 ur tedensko. Na natečaje se novi kandidati ne prijavljajo. Kako moremo v teh okoliščinah pričakovati, da bi bilo njihovo delo uspešno, da bi učitelji spremljali razvoj svoje stroke in se spopolnjevali? Ali ne bi društvo tudi nekaj storilo, da bi bili v gimnazijah honorirani tudi po strokovni in pedagoški sposobnosti in ne samo po urah?

Nimamo več ministrstva za prosveto ali podobne upravne institucije. Njihove funkcije, kolikor se nanašajo na mesto naših strok v šolstvu in na skrb za strokovno rast profesorjev mora zato prevzeti naše društvo.

V svojem znanem pismu je centralni komite že pred leti poudaril izreden pomen naših strok za splošni razvoj gospodarstva. Posledice so bile mnogovrstne: v vseh učnih načrtih in programih je bil poudarjen pomen naših strok, zvečano je bilo število štipendij za mlade matematike in fizike, po vsej državi so zgradili nove institute za matematiko in fiziko. Tudi naše društvo je bilo po tem pismu deležno večje pozornosti in pomoči. Kot odgovor na to pa verjetno

pričakujejo, da bomo mi s poučevanjem, prepričevanjem in zgledom načrtno omogočili, da se bo uveljavila matematika v procesu modernizacije našega gospodarstva. V tem pogledu društvo ni bilo dovolj aktivno in na primer poljudnoznanstvenih predavanj za starejše že več let nismo zasledili niti v društvu niti v radiu ali televiziji.

Nazadnje pa ima naše društvo še nalogo, da zastopa matematično-fizikalno znanost in njene gojitelje pred drugimi društvi v državi in v tujini, in da najde primerne oblike plodnega sodelovanja. Danes še ne bi mogli trditi, da je to nalogo znalo zadovoljivo opraviti.

Prisotni so bili enotnega mnenja, da vlada dokajšnja anarhija v financiranju izobraževanja z razdelitvijo na več izobraževalnih skupnosti in premajhno intervencijsko vlogo republiške izobrževalne skupnosti. Zborovalci so predlagali, naj se z zakonom uravnajo osebni in materialni dohodki na vseh šolah v Sloveniji, ker so razlike odločno prevelike. Urediti moramo tudi vprašanje honoriranja nadur, ki so v veliki večini prenizke. Sklep šolskega kolektiva o ceni nadure še ni garancija za pravičnost, če je jasno, da je šola dobila za vsako uro mnogo več sredstev. V prihodnosti moramo organizirati poseben seminar za koordiniranje dela pri praktičnem pouku fizike. Predavatelji matematike in fizike, k jih še vedno primanjkuje, imajo veliko število nadur. Tako preobremenjeni niso zmožni delovati na strokovnem in pedagoškem področju ter izvenšolskem delu z dijaki. Le malokje najdejo dovolj časa za povezavo s sorodnimi šolami oz. osnovnimi šolami. Premajhna je tudi povezava posameznih članov z društvom. Društvo je napredovalo v svojem delu, a je to delo prepuščeno v veliki meri samo odboru. V prihodnjih letih naj vsak član prispeva k delu društva nekaj ur strokovnega dela s predavanji, prispevki v društveni reviji, pismenimi predlogi za delo ali kako drugače.

Tov. predsednik je na kratko seznanil prisotne člane o sklepu upravnega odbora na eni izmed zadnjih sej. Z dijaki je bilo opravljenega v dobi več let veliko izvenšolskega dela. Slovenski srednješolci so se tudi zavidljivo lepo uvrščali na zveznem tekmovanju in na matematičnih olimpiadah. To delo in uspehi so imeli prav gotovo velik vpliv na kvalitetni dvig naših študentov, za kar gre zasluga vsem tistim, ki so se z njimi ukvarjali.

Upravni odbor se je na predlog posebne komisije (dr. Ivan Vidav, Stanko Uršič, Jože Vrabec in France Ahlin) odločil, da se nagrade naslednji srednješolski profesorji:

BOGOMILA KOLENKO, profesorica matematike na gimnaziji v Kopru. Po njenem prihodu v Koper je vsako leto sodelovalo na republiškem tekmovanju večje število dijakov, izmed katerih je bilo tudi več nagrajenih.

FRANCE PERNE, profesor matematike in fizike na gimnaziji v Novi Gorici. Že vrsto let vzpodbuja dijake k dopolnilnemu študiju matematike in fizike, organizira razne krožke na šoli in pripelje vedno večje število dijakov na republiška tekmovanja.

MARIJA PILGRAM, profesorica matematike in fizike na gimnaziji Ljubljana-Vič. Dolga leta je požrtvovalno vodila svoje dijake pri pripravah na tekmovanja, med katerimi je bilo mnogo nagrajenih na raznih tekmovanjih.

IVAN ŠTALEC, profesor matematike in fizike na I. gimnaziji v Ljubljani. Vsa leta vodi svoje dijake pri pripravah na tekmovanja, katerih se vedno udeleži več dijakov ter mnogi med njimi dosežejo tudi najboljša mesta.

Skromna priznanja za večletno delo je tov. predsednik izročil nagrajencem ob navdušenem ploskanju navzočih.

Navzoči so prejeli ob začetku občnega zbora poleg finančnega poročila tudi predlog o spremenjenem pravilniku društva. Pomembnejši spremembi sta le dve:

1. Uvedba članarine (za leto 1968 bo 10,— N-din).

2. Seje posameznih sekcij sklicujejo njihovi vodje in ne tajnik. S tem se povečajo tudi njihove obveznosti.

Občni zbor je sprejel predloženi predlog z dodatnim predlogom o formiranju sekcije za znanstveno dejavnost.

V imenu nadzornega odbora je poročal I. Štalec, da je bilo finančno poslovanje društva v letu 1966-67 v najlepšem redu, da je bil odbor zelo deloven in da predlaga staremu odboru razrešnico s pohvalo. Občni zbor je razrešnico sprejel s ploskanjem.

Tako je delovni predsednik lahko preskočil glasovanje o razrešnici in takoj predlagal v imenu starega odbora novi odbor. V tem odboru pa manjkajo še vodja sekcije za tekmovanja iz matematike, vodja terminološke sekcije za astronomijo in vodja sekcije za znanstveno dejavnost. Novi odbor, ki ga je izvolil občni zbor, je naslednji:

predsednik:
dr. Jože Grasselli, docent na katedri za matematiko FNT,
podpredsednik:
dr. Anton Suhadolc, docent na katedri za matematiko FNT,
tajnik:
Ciril Velkovrh, bibliotekar v matematični knjižnici,
blagajnik:
Janez Markelj, profesor matematike na gimn. Ljubljana-Vič,
urednik Obzornika za matematiko in fiziko:
France Kvaternik, profesor fizike na gimn. Ljubljana-Poljane,
uredniški odbor: dr. Robert Blinc, Z. Bohte, dr. A. Moljk, dr. J. Pahor, dr. M. Rosina, dr. J. Strnad, S. Uršič, dr. I. Vidav ter V. Pivk, profesor fizike na gimnaziji v Škofji Loki, urednik fizikalnih člankov za srednjo šolo ter Aleksander Cokan, profesor matematike na gimnaziji Ljubljana-Vič, urednik matematičnih člankov za srednjo šolo,
vodja sekcije za matematično-fizikalne aktive:
Marjan Opeka, profesor fizike na tehniški šoli elektro stroke v Ljubljani,
člani sekcije: F. Avsec, F. Čemažar, Marija Jemec, S. Kregar, Sonja Križanič, J. Povšič in S. Uršič,
vodja sekcije za popularizacijo matematike (predavanja):
Josip Globevnik, študent tehniške matematike,
vodja sekcije za popularizacijo fizike:
Marjan Hribar, asistent na katedri za fiziko FNT,
urednik knjižnice Sigma:
Ciril Velkovrh,
uredniški odbor: dr. F. Križanič, dr. N. Prijatelj, dr. M. Rosina, dr. J. Strnad, dr. A. Vadnal in dr. I. Vidav,
vodja bibliografske in biografske sekcije:
Jože Povšič, pomočnik direktorja na tehniški šoli za kemijsko, metalurško in lesno stroko v Ljubljani,
vodja terminološke sekcije za matematiko:
dr. A. Vadnal, profesor matematike na ekonomski fakulteti,
člani sekcije: dr. R. Jamnik, dr. F. Križanič, J. Povšič, dr. N. Prijatelj in O. Sajovic,
zastopnik društva v fakultetnem svetu FNT:
France Čemažar, strokovni svetovalec na ZPPS Ljubljana I.,

zastopnika društva pri gibanju »Znanost mladini«:
France Plevnik (za fiziko)), profesor fizike na PA v Ljubljani in
Marjan Prosen (za astronomijo), strokovni sodelavec na AGO na Golovcu,
zastopnik društva pri Prirodoslovnem društvu:
dr. Alojzij Vadnal,
zastopniki iz večjih krajev Slovenije:
Nika Šilc, profesor na gimnaziji v Celju,
Bogomila Kolenko, profesor na gimnaziji v Kopru,
France Avsec, profesor na gimnaziji v Kranju,
France Perne, profesor na gimnaziji v Novi Gorici,
Dušan Modic, profesor na gimnaziji v Novem mestu,
France Prelog, profesor na gimnaziji Trbovlje,
Franc Bezjak, profesor na višji tehniški šoli v Mariboru (predsednik),
Marija Munda, profesorica na gimnaziji Maribor-Tabor (tajnik) podružnice v Mariboru,
člani plenuma Zveze društev so:
dr. Fran Dominko (kot podpredsednik zveze),
Jože Grasselli (kot predsednik društva) ter Jože Povšič,
nadzorni odbor: Lojze Bernik, France Plevnik, Viljem Sladič,
častno razsodišče:
France Ahlin, višji predavatelj na katedri za fiziko FNT,
France Bezjak, profesor na višji tehniški šoli v Mariboru in
dr. I. Vidav, profesor na katedri za matematiko FNT.

(Tekmovanje iz matematike bo vodil Franci Marinček, asistent na katedri za matematiko FNT, sekcijo za astronomsko terminologijo Marjan Prosen, znanstveni sodelavec na astronomsko-geofizikalnem observatoriju, sekcijo za znanstveno dejavnost pa dr. Anton Moljk, profesor na katedri za fiziko FNT).

Ciril Velkovrh

PRAVILA DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

Člen 1. Ime društva: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Člen 2. Društvo je pravna oseba, ki jo zastopata, podpisujeta in sprejemata zanj obveznosti predsednik in tajnik, v njuni odsotnosti pa podpredsednik.

Člen 3. Pečat društva je okrogel in ima napis: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije — Ljubljana.

Člen 4. Društvo deluje na območju SR Slovenije. Sedež društva je v Ljubljani. Svoje podružnice ima v krajih Slovenije, kjer so za to dani pogoji.

Člen 5. Namen društva je naslednji:

a) prispevati k napredku matematičnih, fizikalnih in astronomskih znanosti in jih popularizirati.

b) po svojih močeh skrbeti za povezavo matematičnih, fizikalnih in astronomskih znanosti s proizvodnjo,

c) podpirati znanstvena raziskovanja na področju matematike, fizike in astronomije,

d) vzpodbujati svoje člane k strokovnemu delu,

e) baviti se z vprašanji pouka matematike in fizike na univerzi, višjih, srednjih, strokovnih in drugih šolah in nuditi podporo Zavodu za šolstvo pri dviganju kvalitete pouka,

f) zbirati literaturo iz matematike, fizike, astronomije in sorodnih znanosti in organizirati strokovno knjižnico.

Člen 6. Svoj namen bo društvo doseglo:

a) s seminarji in predavanji na aktivih,

b) z rednimi sestanki, na katerih bodo člani poročali o pedagoškem delu in o današnjih problemih matematike, fizike in astronomije,

c) z izdajanjem časopisa in drugih publikacij,

d) s sodelovanjem z znanstvenimi ustanovami za matematiko, fiziko, astronomijo in sorodne znanosti,

e) s sodelovanjem z zavodi in ustanovami pri reševanju strokovnih in znanstvenih problemov na področju matematike, fizike in astronomije,

f) s sodelovanjem s sindikalnimi organizacijami, študentskimi društvi in srednješolskimi aktivi učiteljev matematike, fizike in astronomije.

h) z razpravljanjem članov o predlogih, ki koristijo razvoju matematike, fizike in astronomije ter uresničevanju teh.

Člen 7. Člani društva so redni in častni. Redni član je lahko vsak občan SFR Jugoslavije, ki je diplomiral iz matematike, fizike, astronomije ali tehniške znanosti na univerzah, visokih šolah ali pedagoških akademijah. Redni član lahko postane tudi vsak drug občan SFRJ, če se bavi z matematiko, fiziko ali astronomijo, ko ga sprejme upravni odbor na predlog dveh članov društva. Redni člani so lahko pod ustreznimi pogoji tudi tuji državljani.

Častni člani društva so lahko oni občani SFRJ in oni priznani tuji znanstveniki, ki jih izbere letni občni zbor na predlog upravnega odbora.

Člen 8. Člani društva so dolžni, da sodelujejo pri izvrševanju nalog društva in da izvršujejo odločbe društvenih organov. Članarina je 10,— N-din.

Člen 9. Člani društva imajo pravico prisostvovati vsem sejam in sestankom društvenih organov. Imajo aktivno in pasivno volilno pravico. Imajo pravico sodelovati pri delu društva in do brezplačnega izvoda društvene revije.

Člen 10. Članstvo preneha:

a) s smrtjo,

b) z izstopom,

c) z izključitvijo.

Izključitev izreče občni zbor po presoji častnega razsodišča na predlog upravnega odbora iz važnih razlogov. Do odločbe o izključitvi lahko upravni odbor člane odstrani.

Člen 11. Viri materialnih sredstev društva so:

dohodki od publikacij, predavanj in podobno, rednih in izrednih dotacij in subvencij, republiških in občinskih organov ter zavodov in ustanov, darila in volila.

Člen 12. Organi društva so:

občni zbor,

upravni odbor,

nadzorni odbor,

častno razsodišče,

sekcije: sekcije za dvig strokovnih kadrov, sekcije za popularizacijo matematike, fizike in astronomije, uredniški odbor društvene revije, uredniški odbor drugih društvenih publikacij, sekcije za terminologijo, sekcije za bibliografijo, sekcija za znanstveno dejavnost in druge sekcije, ki so potrebne.

Člen 13. Delo društva je javno. Upravni in nadzorni odbor morata vsaj enkrat letno na občnem zboru in v društvenem ali drugem javnem glasilu objaviti delovno poročilo.

Člen 14. Redni občni zbor odloča o poročilih upravnega in nadzornega odbora, voli upravni in nadzorni odbor, voli častno razsodišče, voli častne člane, odloča o predlogih za izmenjavo in izpopolnitev društvenih pravil, o nalogah članstva, določa osnovne smernice dela društva v naslednjem letu ter odloča o predlogih in pritožbah članov.

Upravni odbor mora vsaj 14 dni pred občnim zborom obvestiti člane o sklicanju občnega zbora in jim sporočiti dnevni red. Občni zbor je sklepčen, če je prisotna vsaj polovica članov. V nasprotnem primeru je po pol-urnem čakanju sklepčen pri vsakem številu članov.

Člen 15. Redni občni zbor začenja predsednik društva. Po izvolitvi vodi občni zbor delovno predsedstvo.

Člen 16. Izredni občni zbor lahko skliče upravni odbor ali po potrebi ali na pismeno utemeljeno zahtevo vsaj tretjine članstva. Tak občni zbor odloča samo o onih vprašanjih, zaradi katerih je bil sklican. Vodi ga predsednik društva.

O izrednem občnem zboru morajo biti člani obveščeni 8 dni prej. V ostalem veljajo iste določbe kot za redni občni zbor.

Člen 17. V upravnem odboru so: predsednik, podpredsednik, tajnik, blagajnik in vodje posameznih stalnih sekcij.

Upravni odbor upravlja delo društva ter izvršuje obveznosti, sprejete na občnem zboru. Upravni odbor je sklepčen, če je prisotnih več kot polovica članov.

Člen 18. Seje odbora sklicuje tajnik po dogovoru s predsednikom.

Sestanke društvenih sekcij sklicuje njihov vodja.

Člen 19. Nadzorni odbor je sestavljen iz treh članov. Nadzira vse poslovanje društva in o tem predloži občnemu zboru pismeno poročilo. Člani nadzornega odbora volijo izmed sebe predsednika.

Člen 20. Častno razsodišče je sestavljeno iz treh članov, ki izmed sebe volijo predsednika. Častno razsodišče odloča o sporih v okviru članskih odnosov ali na zahtevo zainteresiranih, ali na zahtevo upravnega odbora, pa tudi v primerih, navedenih v členu 10, točke c).

Glasovanja so tajna. Razsodišče mora svojo odločbo sporočiti pismeno v petnajstih dneh.

Člen 21. Društvo preneha z delom po sklepu rednega ali izrednega občnega zbora. Če društvo preneha, se njegova imovina preda Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani. Ta jo preda ustanovi, ki bi bila ustanovljena z istim ali podobnim namenom, kakršnega ima Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Tajnik: Predsednik:

Ciril Velkovrh l. r. *doc. dr. Jože Grasselli* l. r.

O IX. MEDNARODNI MATEMATIČNI OLIMPIADI ZA SREDNJEŠOLCE

Mladi matematiki iz raznih držav so se letos julija že devetič pomerili v znanju in spretnosti pri reševanju nalog iz matematike. Tokrat je Jugoslavija prvič prevzela organizacijo tradicionalnega tekmovanja za mlade matematike — IX. mednarodne olimpiade; pač pa je za naše srednješolce to leto že peto po vrsti, ko sodelujejo na olimpiadah. Prizorišče letošnje olimpiade je bilo Cetinje, nekdanja prestolnica Črne gore. Način tekmovanja se ni razlikoval od prejšnjih. Tekmovalci so v dveh dneh reševali 6 nalog, za tri naloge so imeli štiri ure časa. Naloge prvega dne so bile:

1. V paralelogramu ABCD je trikotnik ABD ostrokoten in stranica $AD = 1$; označimo $AB = a$ in $\sphericalangle DAB = \alpha$.

Dokaži: potrebni in zadostni pogoj, da štirje krogi K_A, K_B, K_C, K_D z radijem 1, katerih središča so zaporedoma v temenih A, B, C, D, prekrijejo paralelogram ABCD, je:

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

2. Če je natanko en rob tetraedra večji od 1, dokaži, da prostornina tetraedra ni večja od 1/8.

3. Naj bodo k, m, n pozitivna cela števila, $m + k + 1$ praštevilo, večje od $n + 1$ in $C_s = s(s + 1)$.

Dokaži, da je produkt

$$\prod_{r=1}^{n} (C_{m+r} - C_k)$$

deljiv s produktom

$$\prod_{r=1}^{n} C_r$$

Drugi dan pa so bile naslednje naloge:

4. Dana sta ostrokotna trikotnika $A_0B_0C_0$ in $A'B'C'$. Konstruiraj enega od trikotnikov ABC, ki so podobni trikotniku $A'B'C'$ in so opisani trikotniku $A_0B_0C_0$ tako, da gre AB skozi C_0, BC skozi A_0, CA skozi B_0 in vrhovi A, B, C ustrezajo zaporedoma vrhovom A', B', C'.

Konstruiraj od trikovnikov ABC tistega, ki ima maksimalno ploščino.

5. Oglej si zaporedje $\{c_n\}$:

$$c_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_8$$
$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_8$ realna števila, ki niso vsa enaka nič. Najdi vse tiste vrednosti n, pri katerih mora biti $c_n = 0$, če veš, da je med členi zaporedja neskončno členov enakih nič.

6. Na športnem tekmovanju, ki je trajalo n ($n > 1$) dni, so podelili m medalj. Prvega dne so podelili 1 medaljo in 1/7 vseh preostalih $m - 1$ medalj; drugega dne so podelili 2 medalji in 1/7 medalj, ki so do tedaj preostale; in tako naprej. Zadnji dan so podelili točno n medalj, ki so še preostale. Koliko dni je trajalo tekmovanje in koliko medalj je bilo skupno podeljenih?

Olimpiado bi lahko primerjali z lanskoletno, ki je bila v Sofiji. Naloge so bile po splošnem mnenju letos težje, kriterij ocenjevanja strožji, zato pa je bilo število točk, ki jih je moral tekmovalec zbrati, da je dobil nagrado, manjše kot lansko leto v Bolgariji (tabela 1).

TABELA I

	Sofija	Cetinje
Število točk za prvo nagrado	39—40	38—42
Število točk za drugo nagrado	34—38	30—37
Število točk za tretjo nagrado	31—34	22—29
Število udeležencev	72	99

Jugoslovani so lani dobili: Dugošija Đorđe 30 točk, Pisanski Tomo 16, Polajner Jernej 33, Primc Mirko 27, Simić Slobodan 16, Stefanović Mihajlo 27, Torgašev Aleksandar 37 in Vukmirović Jovan 38 točk. Letos pa: Gojković Radoslav 13 točk, Ivić Aleksandar 18, Kolarić Zvonko 11, Obradović Milutin 18, Pisanski Tomo 26, Popović Slobodan 22, Simić Slobodan 6 in Slivnik Tomaž 22 točk.

Tudi letošnja matematična olimpiada je potrdila že tradicionalno premoč Sovjetske zveze, ki je z 275 točkami od 336 možnih ponovno zmagala, tokrat pred NDR (257). Le-ta dosega vedno boljše uspehe. Tretja je bila Madžarska (251), četrta pa presenetljivo Velika Britanija (231), ki je letos prvič sodelovala na olimpiadi. Sledile so: Romunija (214), Bolgarija (159), ČSSR (159), Jugoslavija (136), Švedska (135), Italija (110), Poljska (101), Mongolija (87) in Francija (41). Pripomniti je treba, da ekipi Italije in Francije nista šteli po 8 članov kot druge ekipe, ampak je bilo Italijanov šest, Francozi pa so poslali samo štiri predstavnike, pa še ti so reševali samo zadnje tri naloge.

Oglejmo si še nekaj podatkov o petih olimpiadah, na katerih je sodelovala tudi Jugoslavija:

TABELA II

Leto Kraj	1963 Wroclaw	1964 Moskva	1965 Berlin	1966 Sofija	1967 Cetinje
Število držav udeleženk	8	9	10	9	13
Uvrstitev Jugoslavije	4. mesto	9.	7.—8.	7.	8.
Število doseženih točk YU	162	155	143	224	136
Razlika od najboljše	109	114	138	69	139
Imena do sedaj nagrajenih Jugoslovanov (arabske številke pomenijo točke, rimske pa nagrado)	Dacar* 39/I Bolevski 31/II Petek* 29/II Mršević 27/III	Urumov 31/II Vrščaj* 29/III	Bole* 27/III Ašić 22/III	Vukmirović 38/II Torgašev 37/II Polajner* 33/III	Pisanski* 26/III Slivnik* 22/III Popović 22/III

Iz tabele II je poleg drugih podatkov moč razbrati, da smo imeli do zdaj 14 nagrajencev, od tega 7 Slovencev (v tabeli so označeni z *). Vse neverjetne hipoteze, ki se nam morejo poroditi ob tem dejstvu, češ da smo Slovenci pač zelo »brihten« narod, ali, da je naš šolski sistem boljši od ostalih, ali pa da je pri nas več mladih entuziastov kot v drugih republikah, so nesprejemljive. Zato morda ni napačna trditev, da je psihična napetost tekmovalcev odločilnega pomena.

Leta 1963 so bili Jugoslovani brez mednarodnih izkušenj, pa so dosegli do zdaj najboljše rezultate — četrto mesto, štiri nagrade ter dejstvo, da med posamezniki nihče ni bil boljši od takrat 16-letnega Dacarja. V olimpijsko ekipo so se uvrstili nagrajenci z zveznega tekmovanja, na katerem so tekmovali najboljši iz vsake republike. Po dveh tekmovanjih je bilo torej možno priti med »olimpijce«. Danes pa je drugače. V Srbiji, vzemimo, imajo tale selekcijski sistem: dijaki začno na šolskih tekmovanjih, od koder gredo najboljši na občinsko, mestno, republiško, zvezno tekmovanje, od tu izberejo 16 najboljših, ki gredo na priprave. Po dveh selekcijah se število zmanjša na 8, le-ti pa sestavljajo olimpijsko ekipo. Tako mora dijak uspeti na sedmih preizkušnjah, kjer je uspeh na eni od teh potrebni pogoj za sodelovanje na naslednji. To vsekakor vodi do vedno večje psihične napetosti pri tekmovalcu, ki se lahko sprosti pred odločilnim tekmovanjem in — razočaranje je tu. Pri nas v Sloveniji se selekcija začne šele z republiškim tekmovanjem, pa je navadno takrat prestroga. Na zvezno tekmovanje nikoli ne pošljemo več kot osem tekmovalcev, medtem ko je število Srbov navadno vsaj štirikrat večje, Hrvati pa so na primer letos imeli 21 predstavnikov.

Cetinjska olimpiada je do sedaj pritegnila največ držav, saj so vse štiri nesocialistične države sodelovale prvič. Tako se je začel uresničevati načrt, da bi matematične olimpiade prerasle dosedanje okvire in postale svetovne manifestacije. Ob tem pa naletimo na velik problem: na smisel olimpiad in matematičnih tekmovanj na splošno! Tekmovanja so izredno koristna pri popularizaciji matematike, zato morajo zajeti čimvečjo plast mladine. Tekmovanj ne smemo jemati preveč športno, nikakor pa ne smejo biti sebi namen. Pri matematiki ni bistvo tekmovati proti sotekmovalcem, ampak z matematiko proti nerešenim nalogam. V tem smislu bi se dalo tekmovanja razširiti tudi na univerzo. Seveda bi morali tedaj omejiti čas reševanja problemov ne z urami, ampak z dnevi ali tedni; morda bi bilo zanimivo tudi kolektivno delo ... To so pač le ideje ...

Mislim, da so tekmovanja zanimiva in koristna, le sistem tekmovanj trenutno ni najboljši. Osnovni namen tekmovanj bodi: množično kvalitetno udeležbo je mogoče doseči le z mnogimi tekmovanji in pripravami, ki pa ne smejo temeljiti na selekciji.

OPOMBA: Rešitve nalog bodo objavljene v eni izmed naslednjih številk. (Pošljite jih uredništvu!)

Tomo Pisanski

ODGOVORI

ODGOVOR NA VPRAŠANJE v Obz. mat. fiz. **14**, 48 (1967)

Postavljeno je bilo tole vprašanje: Vodoravna lesena palica z maso 500 g in dolžino 0,5 m je vrtljiva okoli pravokotne osi skozi sredino, pri čemer je os navpična. Izstrelek z maso 15 g zadene krajišče palice s hitrostjo 200 m/s pravokotno na palico in pravokotno na os. Izračunaj začetno kotno hitrost, ki jo ima palica, če izstrelek v njej obtiči! Dodana je bila napačna rešitev. Bralci naj bi utemeljili, zakaj je rešitev napačna in izračunali pravo rešitev.

Navedena rešitev ($\omega = (2\,v/l)\,(1 + M/3\,m)^{-\frac{1}{2}} = 230\ \mathrm{s}^{-1}$) je napačna* zaradi sklepa, da se pri trku ohrani kinetična energija. Izstrelek obtiči v palici in po trku se vrtita izstrelek in palica z enako kotno hitrostjo. Tak trk je neprožen in se pri njem ne ohrani skupna kinetična energija, ampak se ohrani skupna vrtilna količina. Zapišemo, da je vrtilna količina izstrelka (glede na nepremično os skozi sredino palice) pred trkom enaka skupni vrtilni količine palice in izstrelka (glede na isto os) po trku:

$$\tfrac{1}{2}\,lmv = J\omega\,.$$

m je masa izstrelka, v njegova hitrost in l dolžina palice. Vztrajnostni moment palice in izstrelka po trku je

$$J = m\,(\tfrac{1}{2}\,l)^2 + Ml^2/12\,,$$

pri čemer je M masa palice. S tem dobimo za kotno hitrost

$$\omega = 2\,v/l)/(1 + M/3\,m).$$

Z zapisanimi podatki sledi $\omega = 66\ \mathrm{s}^{-1}$.

Skupna kinetična energija se pri trku zmanjša za

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 - \tfrac{1}{2}\,J\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\,mv^2/(1 + 3\,m/M)\,.$$

V našem primeru je to zmanjšanje znatno, okoli 275 J, to je kar 92 % začetne kinetične energije. Razlika kinetičnih energij se porabi za segretje palice in izstrelka, če sta toplotno izolirana, ali pa jo palica in izstrelek oddasta okolici v obliki toplote, če nista toplotno izolirana.

K. Šmigoc

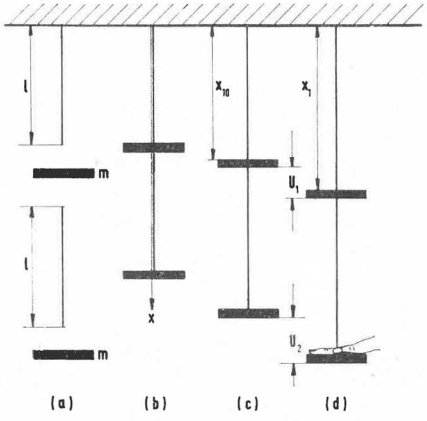
ODGOVOR NA VPRAŠANJE v Obz. mat. fiz. **14**, 93 (1967)

V navedenem Obzorniku je bilo objavljeno vprašanje: Prvo krajišče prve vrvice pritrdimo na strop in obesimo na drugo krajišče prvo utež. Na dno te uteži pritrdimo prvo krajišče druge vrvice in obesimo na drugo krajišče drugo utež. Kolikšno vrednost mora preseči dodatna sila, s katero začnemo vleči drugo utež navpično navzdol, da se bo pretrgala spodnja vrvica. Uteži sta enako težki —

* To je še en zgled za zlorabo izreka o kinetični energiji. Primerjaj tudi Obz. mat. fiz. **14**, 80 (1967)! — V novi izdaji knjige, iz katere je bil vzet zgled z napačno rešitvijo, je rešitev že popravljena. (Op. ur.)

masa ene je $m = 2$ kg — vrvici pa enako dolgi. Dodatna sila je spočetka nič potem pa v trenutku naraste na končno konstantno vrednost. Za vrvici naj velja Hookov zakon vse do meje natezne trdnosti. Vsaka od obeh vrvic se pretrga, ko doseže natezna sila 4,05 kp.

Os x usmerimo navpično navzdol in postavimo njen začetek v pritrdišče zgornje vrvice na strop. Vzamemo, da sta uteži ploščati in da ima vsaka od obeh vrvic v nenapetem stanju dolžino l (glej sliko!).



Vrvici in uteži preden ju obesimo (a), obešeni, a nenapeti (b), napeti v ravnovesnem stanju (c) in ko ju napenjamo z dodatno zunanjo silo navpično navzdol (d).

Za vsako od obeh uteži velja Newtonov zakon. Na zgornjo utež delujejo tele zunanje sile: sila zgornje vrvice F' navpično navzgor ter sila teže mg in sila spodnje vrvice F'' navpično navzdol. Na spodnjo utež delujejo tele zunanje sile: sila spodnje vrvice F'' navpično navzgor (po zakonu o vzajemnem učinku) ter teža mg in dodatna sila F navpično navzdol:

$$F'' + mg - F' = m\ddot{x}_1, \quad F + mg - F'' = m\ddot{x}_2 . \tag{1}$$

Pospešek prve uteži $\ddot{x}_1$ in pospešek druge uteži $\ddot{x}_2$ sta oba usmerjena navpično navzdol. (Pika pomeni odvod po času.)

Po Hookovem zakonu je sila vrvice sorazmerna z njenim podaljškom

$$F' = k\,(x_1 - l)\,, \qquad F'' = k\,(x_2 - x_1 - l)\,, \tag{2}$$

pri čemer je $k = ES/l$ koeficient vrvice s presekom S in s prožnostnim modulom E. Iz enačb (1) in (2) dobimo

$$kx_2 - kx_1 + mg = m\ddot{x}_1\,, \quad F - kx_2 + kx_1 + kl + mg = m\ddot{x}_2\,.$$

Na začetku ni dodatne sile in sta uteži pri miru: $F = 0$, $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$. Tedaj velja $kx_2 - 2\,kx_1 + mg = 0$ in $kx_2 + kx_1 + kl + mg = 0$. Iz tega izračunamo začetni legi uteži

$$x_{01} = l + 2\,mg/k, \qquad x_{02} = 2\,l + 3\,mg/k\,.$$

Vpeljemo novi spremenljivki $u_1 = x_1 - x_{01}$, $u_2 = x_2 - x_{02}$, pa dobimo sistem dveh navadnih diferencialnih enačb drugega reda, ki sta linearni in nehomogeni

$$ku_2 - 2\,ku_1 = m\ddot{u}_1, \quad F + ku_1 - ku_2 = m\ddot{u}_2 . \tag{3}$$

Dodatna sila F je do trenutka $t = 0$ enaka nič in je pozneje konstantna

$$F = 0,\ t < 0\,; \qquad F = \text{konst.},\ t \geqq 0 .$$

Začetni pogoji so $u_1(t = 0) = u_2(0) = \dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$ ter $\ddot{u}_1(0) = 0$ in $\ddot{u}_2(0) = F/m$.

Do trenutka, ko se ena od vrvic pretrga, se uteži le malo premakneta. V prvem približku zato zanemarimo premika pri računanju pospeška spodnje uteži: $F = m\ddot{u}_2$. To enačbo integriramo in dobimo v prvem približku

$$u_2 = \tfrac{1}{2} Ft^2/m .$$

Odmik zgornje uteži narašča spočetka počasneje kot odmik spodnje uteži. Zato pri računanju pospeška zgornje uteži v prvem približku zanemarimo u_1 v primeri z u_2: $ku_2 = \frac{1}{2} kFt^2/m = m\ddot{u}_2$. To enačbo integriramo in dobimo v prvem približku

$$u_1 = kFt^4/24\,m^2 .$$

Sili, ki napenjata vrvico, sta po Hookovem zakonu

$$F' = 2\,mg + ku_1 , \qquad F'' = mg + k\,(u_2 - u_1) \tag{4}$$

V ti enačbi vstavimo dobljena približna za u_1 in u_2, pri čemer v drugi enačbi zopet zanemarimo u_1 v primeri z u_2:

$$F_0 = 2\,mg + k^2\,Ft_1^4/24\,m^2, \quad F_0 = mg + kFt_2^2/2\,m .$$

Naj bo F_0 natezna sila, pri kateri se vrvica pretrga:

$$F_0 = 2\,mg + k^2\,Ft_1^4/24\,mm^2 , \quad F_0 = mg + kFt_2^2/2\,m .$$

Iz tega izračunamo

$$t_1^4 = 24\,m^2\,(F_0 - 2\,mg)/k^2\,F \quad \text{in} \quad t_2^2 = 2\,m\,(F_0 - mg)/kF .$$

Prva vrvica se pretrga, če je $t_1 < t_2$ in druga, če je $t_2 > t_1$. V mejnem primeru, ko je $t_1 = t_2 = t_m$,

$$t_m = [12\,m\,(F_0 - 2\,mg)/k\,(F_0 - mg)]^{1/2} ,$$

je sila F enaka

$$F_m = (F_0 - mg)^2/6\,(F_0 - 2\,mg) .$$

Prva vrvica se torej pretrga, če je

$$F < F_m$$

in druga, če je

$$F > F_m .$$

Ta rezultat je samo prvi približek. Boljši rezultat dobimo, če prvi približek za u_2 vstavimo v levo stran enačbe $F - ku_2 = m\ddot{u}_2$. Tako dobimo drugi približek za u_2

$$u_2 = (Ft^2/2\,m)\,(1 - kt^2/12\,m) .$$

To vstavimo v levo stran prve enačbe (4) skupaj s prvim približkom za u_1 in dobimo drugi približek za u_1

$$u_1 = (kFt^4/24\,m^2)\,(1 - kt^2/10\,m)\,.$$

Po enakem računu kot zgoraj dobimo v mejnem primeru

$$F_m = [(F_0 - mg)^2/6\,(F_0 - 2\,mg)]\,(1 + 7\,kt_m^2/30\,m)\,.$$

Tu vstavimo kar prejšnji rezultat za t_m.

Pri naši nalogi je masa posamezne uteži $m = 2$ kg in natezna sila, pri kateri se vrvica pretrga, $F_0 = 4{,}05$ kp. V prvem približku je $F_m = 2{,}05^2$ kp^2/6.0,05 kp $= 14$ kp. V drugem približku je treba upoštevati še popravek $7\,kt_m^2/30\,m = 7.12\,(F_0 - 2\,mg)/30\,(F_0 - mg) = 0{,}07$. Tako dobimo v drugem približku $F_m = 14$ kp $(1 + 0{,}07) = 15$ kp. S tem rezultatom se zadovoljimo, če dopuščamo nenatančnost na nekaj odstotkov.

Za večje vrednosti $(F_0 - 2\,mg)/(F_0 - mg)$ pa je tudi drugi približek preslab in je treba vključiti nadaljnje člene, kar nalogo močno zaplete. Upoštevati moramo še, da v resnici sila ne naraste trenutno do končne konstantne vrednosti in da za snovi (če izvzamemo steklo in nekatere druge snovi) Hookov zakon ne velja do meje natezne trdnosti. Zaradi tega velja naš račun samo za poenostavljen model poskusa, ki ga kažemo v šoli. A če bi hoteli vse to upoštevati, rezultat ne bi imel tako preproste oblike.

Poiščimo na koncu na hitro še natančni rešitvi enačb (3)! V prvo enačbo (1) vstavimo u_1 iz druge enačbe in v drugo u_2 iz prve enačbe. Namesto sistema dveh enačb drugega reda imamo po tem dve enačbi četrtega reda:

$$u_1^{IV} + 3\,\beta^2\,\ddot{u} + \beta^4\,u_1 = kF/m^2, \quad u_2^{IV} + 3\,\beta^2\,\ddot{u}_2 + \beta^4\,u_2 = 2\,kF/m^2\,.$$

Tu je $\beta^2 = k/m$ in se začetni pogoj glasi $u_1(0) = \ddot{u}_1(0) = \ddot{u}_1(0) = \dddot{u}_1(0)$ ter $u_2(0) = \dot{u}_2(0) = \ddot{u}_2(0) = 0$, $\ddot{u}_2 = F/m$. Splošna rešitev vsake od obeh nehomogenih enačb je vsota splošne rešitve ustrezne homogene enačbe in kake partikularne rešitve nehomogene enačbe:

$$u_1 = a_1 \cos \omega_1 t + a_1' \sin \omega_1 t + b_1 \cos \omega_2 t + b_2' \sin \omega_2 t + F/k\,,$$

$$u_2 = a_2 \cos \omega_1 t + a_2' \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_2 t + b_2' \sin \omega_2 t + 2\,F/k\,.$$

ω_1^2 in ω_2^2 sta korena enačbe $\omega^4 - 3\,\beta^2\,\omega^2 + \beta^4 = 0$

$$\omega_1 = (3 - \sqrt{5})^{1/2}\,\beta/\sqrt{2}\,, \quad \omega_2 = (3 + \sqrt{5})^{1/2}\,\beta/\sqrt{2}\,.$$

Z začetnim pogojem določimo vrednosti konstant. Najprej se pokaže, da je $a_1' = b_1' = a_2' = b_2' = 0$ in nato, da je $a_1 = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\,F/\sqrt{5}\,k$, $b_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\,F/\sqrt{5}\,k$, $a_2 = -(2 + \sqrt{5})\,F/\sqrt{5}\,k$ in $b_2 = (2 - \sqrt{5})\,F/\sqrt{5}\,k$. S tem že lahko zapišemo rešitvi za naš primer. Če razvijemo kosinuse v Taylorove vrste, pri čemer upoštevamo v u_1 še člena, ki vsebujeta t^6, in v u_2 še člena, ki vsebujeta t^4, dobimo zapisana približka.

J. S.

VPRAŠANJI

1. Kolikšno relativno napako napravimo pri računu obhodnega časa umetnega satelita, ki se giblje okrog Zemlje po krožnem tiru z danim radijem, če računamo, kot da ima Zemlja obliko krogle?*

V prvem približku je Zemlja sploščen rotacijski elipsoid, pri katerem se radija na ekvatorju in na polu razlikujeta za $\frac{1}{3}$ %. Računaj, da je gostota Zemlje konstantna!

Nasvet: Razdaljo R od središča Zemlje do površja v odvisnosti od zemljepisne širine razvij po $\Delta R/R$ in upoštevaj samo linearni člen.

A. Kodre

2. S kolikšno najmanjšo hitrostjo moramo izstreliti izstrelek s površja Zemlje proti Luni, da ravno še doseže točko, v kateri učinkujeta nanj Zemlja in Luna z enako velikima privlačnima silama? S kolikšno hitrostjo bi v tem primeru priletel izstrelek na površje Lune, če bi odletel dalje proti Luni? Zračnega upora in vrtenja Zemlje ni treba upoštevati. Radij Zemlje je 6400 km, njena masa 6.10^{24} kg, Luna ima 0,27 Zemljinih mas in 0,012-kratni Zemljin radij, njena poprečna razdalja od Zemlje je $3{,}8.10^{8}$ m. Gravitacijska konstanta je $6{,}7.10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

K. Šmigoc

* To vprašanje je povezano s klasičnim sukanjem Merkurjevega perihelija zaradi kvadrupolnega momenta Sonca, le da pri Soncu ne moremo računati s konstantno gostoto. (Glej članek: »Nova teorija gravitacije« v tej številki Obzornika!) (Op. ur.)

SPOROČILO UPRAVE OBZORNIKA

Na občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS je bilo sklenjeno, da se v društvu vpelje članarina 10.— N din. Vsi člani društva dobe Obzornik za matematiko in fiziko zastonj. Kjer sta v družini dva člana društva, je članarina enojna in prejmeta oba en sam izvod revije. Za nečlane je letna naročnina 15.— N din, za dijake 5.— N din, za ustanove in podjetja 20.— N din, za inozemstvo pa 25.— N din (2 $).

Članarina je vpeljana s 1. januarjem 1968, nove cene revije pa veljajo začenši z letnikom XV, to je z naslednjo številko. Članarino je treba nakazovati po položnici Obzorniku kot doslej naročnino. Ker želimo urediti kartoteko članov našega društva, prosimo vse prizadete, da izpolnijo obrazec v tej številki in ga pošljejo na naslov: Obzornik za matematiko in fiziko, pp. 227. V nasprotnem primeru bodo morali plačati naročnino 15.— N din.

Da ne bi bilo nejasnosti, kdo je lahko član Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS, je objavljen v tej številki pravilnik društva.

F. Kvaternik

PRIJAVNICA

Prosim, da me vpišete v seznam članov Društva matematikov, fizikov in astronomov.

Priimek ..... ime .....

Zadnja šolska izobrazba .....

Natančen naslov .....

V službi sem na (pri) .....

v ..... na delovnem mestu .....

.....

V ....., dne .....

Podpis.

36. Memorias de la Facultad de ciencias. Ser. matematica. Habana. 1966, vol. 1, No. 4, F. 4—5.
37. Naučni trudove. Plovdiv. 1966, T. 4, knj. 1, 2, 3.
38. Poročila Nuklearnega inštituta J. Štefan. Ljubljana. 1967, Nos 200, 201, 202, 203.
39. Osaka Journal of Mathematics. Osaka. 1966, vol. 3, No. 2. K; 1967, vol. 4, No. 1.
40. Physics today. Washington. 1967, vol. 20, No. 2.
41. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. Praga. 1964, r. 9. K; 1965, r. 10. K; 1966, r. 11. K.
42. Proceedings of the Faculty of science of Tokai University. Tokio. 1967, vol. 2, No. 1—2. K.
43. Proceeding of the Mathematical and Physical Society of U. A. R. Kairo. 1964, No. 28. K.
44. Proteus. Ljubljana. 1967/68, leto 30, št. 2, 3, 4, 5.
45. Publications de l'institute mathematique. Beograd. 1967, T. 7. K.
46. Publikacije elektrotehničkog fakulteta. Beograd. 1966, Nos 171 do 173. K; 1967, Nos 174 do 199.
47. Revista Matematica Hispano-Americana. Madrid. 1966, T. 26, Nu. 5—6. K; 1967, T. 27, Nos 1, 2, 3, 4.
48. Revista de la Union matematica Argentina y de la Asociacion fisica Argentina. Buenos Aires. 1966/1967, Nd. 23, Nu. 1, 2.
49. Revue Roumaine de mathematiques pures et appliques. Bucarest. 1966, T. 11, No. 10. K; 1967, T. 12, Nos 1—10. K.
50. Rozhledy matematicko-fizikalni. Praha. 1966, r. 45. K; 1967, r. 46, br. 1, 2.
51. Studia universitatum Babes-Bolyai. Ser. mat., phys. Cluj. 1966, T. 11, F. 2. K; 1967, T. 12, F. 1, 2. K.
52. Sodobna pedagogika. Ljubljana. 1967, leto 18, št. 7—10.
53. Studii si cercetarii matematice. Bucaresti. 1966, T. 18, Nr. 10. K; 1967, T. 19, Nr. 1—10. K.
54. Učenye zapiski Tartuskogo gosudarstvennogo universiteta. Trudy po matematike i mehanike. Tartu. 1966, vyp. 192, T. 6. K.
55. Ukrainskij matematičeskij žurnal. Kiev. 1967, T. 19. K.
56. Uspehi matematičeskih nauk. Moskva. 1967, T. 22. K.
57. Varilna tehnika. Ljubljana. 1967, leto 16, št. 2, 3, 4.
58. Vestnik Leningradskogo universiteta. Ser.: Fizika, himija, Leningrad. 1967, T. 2, No. 10, 16, 22.
59. Vestnik moskovskogo universiteta. Ser.: fiziko-matematičeskih i estestvennyh nauk. Moskva. 1967, K.
60. Zdravstveni vestnik, Ljubljana. 1967, leto 36, št. 7—12.

Ciril Velkovrh

»K« pomeni: imamo kompleten letnik.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejajo ga: R. Blinc, Z. Bohte, J. Pahor, V. Pivk, A. Moljk, M. Rosina, J. Strnad, F. Šušteršič, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 4 N-din, za zasebnike 5 N-din, za šole 10 N-din, za ustanove in podjetja 20 N-din in za inozemstvo 2 dolarja. Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.

V LETOŠNJEM LETU SMO PREJELI NASLEDNJE REVIJE V ZAMENO ZA OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1. Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et physica. Praha. 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1966.
2. Algebra i logika — seminar. Novosibirsk. 1966, T. 5, vyp. 3, 4, 5. K; 1967, T. 6, vyp. 1, 2, 3.
3. Analele stiintifico ale universitatii »Al. I. Cuza« din Iasi. (ser. nuoa) sectiunea I. a. Matematica. Iasi. 1966, T. 12. K; 1967, T. 13, F. 1.
4. Analele universitatii Bucarest. Ser.: mat., mec. Bucaresta. 1966, a. 15. K.
5. Analele universitatii din Timisoara. Ser.: mat., fiz. Timisoara. 1965, (F.) 3. K; 1966, (F.) 4. K.
6. Annales Academiae scientiarum Fennicae. Ser. A. Mathematica. Helsinki. 1966, Nos. 394, 395. K; 1967, Nos. 396 do 410.
7. Arkiv for Mathematik. Stockholm. 1966, Bd. 6, H. 6. K; 1967, Bd. 7, H. 1, 2, 3.
8. Bilten. Sarajevo. 1964, br. 7, 1967, br. 9.
9. Bilten na društvato na matematičarite i fizičarite od narodna (socialistička) republika Makedonija. Skopje. Od 1950 do 1965, T. od 1 do 16.
10. Boletin de la academie de ciencias fisicas, matematicas y naturales. Caracas. 1966, Anno 26, No, 71, 72, 73. K; 1967, Anno 27, No. 74.
11. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. Ser. 2. Mexico. 1965, vol. 10, Nu. 1, 2.
12. Bonner mathematische Schriften. Bonn. 1967, Nr. 26, 27, 28.
13. Bulletin de l'academie Polonaise des sciences. Serie des sciences mathematiques, astronomiques et physiques. Varsovie. 1966, vol. 14, Nu. 11, 12. K; 1967, vol. 15, Nu. 1, 2, 3, 4, 5.
14. Bulletin of the Boris Kidrič Institute of Nuclear science. Beograd. Ser. Physics. 1967, vol. 18, No. 1, 2, 3, 4, 5, K; Ser. Nuclear engineering 1967, vol. 18, No. 1, 2. K.
15. Bulletin of the Calcuta Mathematical Society. Calcuta, 1965, vol. 57, Nu. 4.
16. Bulletin scientifique. Zagreb. 1967, T. 12. Nos. 1—12. K.
17. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. Praga. 1967, T. 8, No. 1, 2. 3.
18. Československy časopis pro fiziku. Praga. 1967, T. 17, sv. 3, 4, 5, 6.
19. Differencialnye uravnenija. Minsk. 1966, T. 2, vyp. 3, 5, 6, 7, 11, 12. K; 1967, T. 3, vyp. 1—11.
20. Dissertationes mathematicae. Warszawa. 1967, T. 52, 53, 54, 55, 56.
21. Elektrotehniški vestnik. Ljubljana. 1967, leto 34, št. od 3 do 8.
22. Farmacevtski vestnik. Ljubljana, 1967, leto 18, št. 5 do 12.
23. Fotokemijska industrija. Zagreb. 1967, g. 14, br. 2, 3, 4.
24. Glasnik matematički. Zagreb. 1966, T. 21, No. 1; 1967, T. 22, No. 2.
25. Godišen zbornik. Sek. A.: Matematika, fizika i hemija. Skopje. 1965, g. 16. K.
26. Godišnjak filozofskog fakulteta u Novom Sadu. Novi Sad. 1966, knj. 9. K.
27. Idrijski razgledi. Idrija. 1967, leto 12, št. 3, 4.
28. Informationen. Inhalt und Methodik des Physikunterrichtes. Köln. 1967, Bd. 2, H. 6, 7, 8, 9, 10, 11.
29. Internationale mathematische Nachrichten. Wien. 1967, Nr. 85, 86, 87. K.
30. Izvestija na matematičeskaja institut. Sofija. 1966, T. 9.
31. Journal of the Franklin Institute. Phyladelphia. 1966, vol. 282, Nu. 6. K; 1967, vol. 283. K; vol. 284, Nu. 1, 2, 3, 4, 5.
32. The Journal of the Indian Mathematical Society. Madras. 1966, vol. 30, No. 1, 2, 3, 4. K.
33. Journal of Science of the Hiroshima University. Ser. A—I.: Mathematica. Hiroshima. 1966, vol. 30, Nu. 2. K; 1967, vol. 31, Nu. 1.
34. Matematičeskij vestnik — nova ser. Beograd. 1967, knj. 4, br. 1, 2, 3.
35. The Mathematical Gazette. London. 1967, vol. 51, Nos 375, 376, 377.