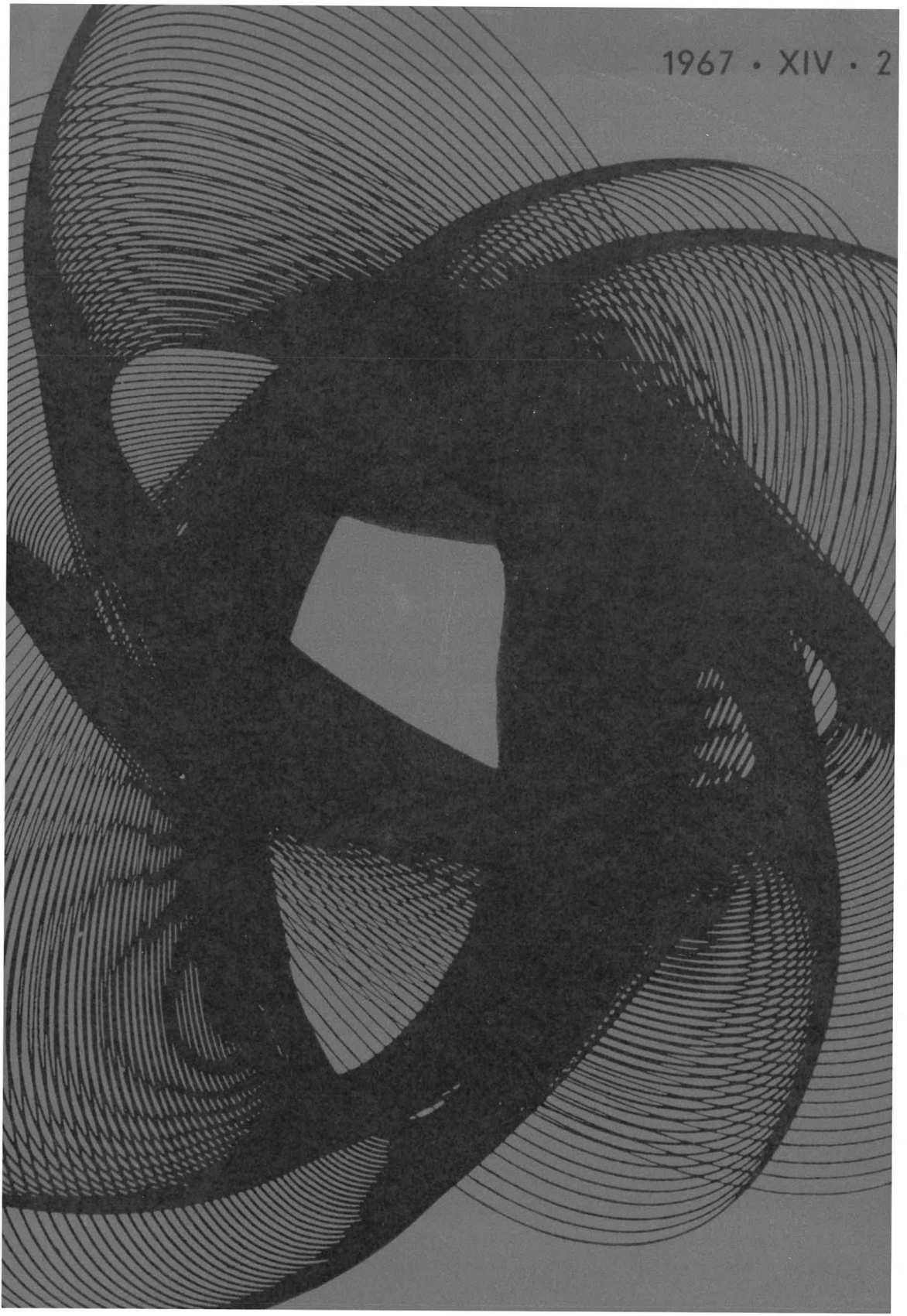
1967 • XIV • 2



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XIV. LETNIK — 2. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, DECEMBER 1967

VSEBINA

Članki Stran

Diofantske aproksimacije (J. Garsselli) 49
Prikaz teorije grafov I (J. Vrabec) 58
Negativne absolutne temperature (J. Stepišnik) 72

Šola

Konstrukcija posredne funkcije (A. Vadnal) 78
Izrek o vrtilni količini (S. Pahor) 80
Vodikov atom — klasično (J. Strnad) 81
Novinci na matematično-fizikalnem oddelku (J. Strnad, M. Hribar, A. Kodre) 83

Domače vesti

S seje odbora Društva matematikov, fizikov in astronomov 85
Diplome iz matematike in astronomije na univerzi v Ljubljani 85

Odgovori 89

Vprašanja 93

Nove knjige 94

CONTENTS

Articles Page

Diophantine Approximations (J. Grasselli) 49
On the Theory of Graphs I (J. Vrabec) 58
The Negative Absolute Temperatures (J. Stepišnik) 72

School 78

Home News 85

Answers 89

Questions 93

New Books 94

DIOFANTSKE APROKSIMACIJE

JOŽE GRASSELLI

1. Za iracionalno število α so večkratniki α, 2α, $3\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots$ iracionalna števila in zato različni od vsakega celega števila. Ali pride kateri teh večkratnikov poljubno blizu celemu številu? Če ima to vprašanje pritrdilen odgovor, morata za vsak pozitiven ε obstajati celo število a in naravno število b, za kateri je

$$|b\alpha - a| < \varepsilon \tag{1}$$

To oceno moremo pisati v obliki

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{\varepsilon}{b} \tag{2}$$

kar pomeni, da ulomek a/b približa iracionalno število α z napako ε/b. Kadar vemo, da za neki ulomek a/b, $b > 0$, velja druga neenačba, iz nje takoj sledi prva neenačba. Zato maremo gornje vprašanje tudi takole postaviti. Ali lahko za vsak pozitiven ε najdemo ulomek a/b, $b > 0$, ki izpolnjuje neenačbo (2)?

Odgovor je v izreku: *Če je α iracionalno število, je neskončno ulomkov s pozitivnim imenovalcem b, ki zadovoljuje neenačbo*

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2} \tag{3}$$

Pri $b = 1$ sta dva ulomka, ki ustrezata neenačbi (3), namreč obe celi števili, med katerima leži α. Pri fiksnem $b = b_0$, $b_0 \geqq 2$, kvečjemu en ulomek a/b_0 izpolni to neenačbo. Število α leži namreč med sosednjima ulomkoma z imenovalcem b_0, a ne na sredi. Najbližji ulomek z imenovalcem b_0 je tedaj od α oddaljen manj kot $1/2\, b_0$, za vsak drug ulomek z imenovalcem b_0 pa je ta oddaljenost $> 1/2\, b_0 \geqq 1/b_0^2$. Od ulomkov s fiksnim imenovalcem b_0 izpolni torej neenačbo (3) kvečjemu številu α najbližji ulomek. Če ta ni dober, pri izbranem b_0 neenačba (3) nima rešitve. Morda je takih izjemnih imenovalcev celo neskončno. Toda izrek zagotavlja, da, ko večamo b po naravnih številih, zmeraj spet prihajajo b, ki dajo rešitev. Imamo torej neskončno zaporedje imenovalcev $b_1 < b_2 < b_3 \ldots$ in pripadajoče jim neskončno zaporedje različnih ulomkov a_1/b_1, a_2/b_2, $a_3/b_3, \ldots$, katerih vsak izpolnjuje neenačbo (3). To je obširneje povedana vsebina izreka. Za dovolj velike b je $1/b < \varepsilon$ in iz neenačbe (3) takoj dobimo neenačbo (2). Izrek torej pove, da je za vsak pozitiven ε neskončno ulomkov a/b, ustrezajočih pogoju (2) oz. (1). S tem pa izrek daje tudi odgovor na v začetku postavljeno vprašanje. *Če je α iracionalno število, lahko za vsako pozitivno število ε dobimo neskončno takšnih naravnih števil b, da se večkratnik $b\alpha$ razlikuje od celega števila absolutno za manj kot ε.* Ko se v zaporedju α, 2α, $3\alpha, \ldots$ pomikamo k členom z vse višjim indeksom, naletimo vedno znova na člene, ki so skorajda cela števila.

Dokaz izreka, ki smo ga navedli, je preprost. Imejmo dano iracionalno število α in si izberimo kakšno naravno število n. Naj pomeni $[x]$ celi del števila x, tj. največje celo število, ki ne presega x. Števila

$$0, \alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha],\ 3\alpha - [3\alpha], \ldots, n\alpha - [n\alpha] \tag{4}$$

so vsa različna in leže na intervalu s krajiščema 0 in 1. Razdelimo ta interval na n podintervalov, vsak dolžine $1/n$. Ker je v (4) različnih števil $n+1$, podintervalov pa je n, sta vsaj na enem podintervalu dve od števil (4). Denimo, da sta to $h\alpha - [h\alpha]$, $k\alpha - [k\alpha]$. Tedaj sta h, k celi števili med 0 in n in npr. $h > k \geqq 0$. Pišimo $h - k = b$, $[h\alpha] - [k\alpha] = a$. Seveda sta a, b celi števili, razen tega je

$$0 < b \leqq n \tag{5}$$

saj je $n \geqq h > k \geqq 0$. Število $h\alpha - [h\alpha]$ je zaradi $h > 0$ iracionalno. Leži torej znotraj podintervala, na katerem se nahaja $k\alpha - [k\alpha]$ in zato je oddaljenost med obema številoma manjša od $1/n$. Tako dobimo

$$|h\alpha - [h\alpha] - (k\alpha - [k\alpha])| = |b\alpha - a| < 1/n \tag{6}$$

Če tukaj delimo obe strani z b in upoštevamo oceno (5), pridemo do neenačbe

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{nb} \leqq \frac{1}{b^2} \tag{7}$$

Tako smo ugotovili, da lahko najdemo za vsako iracionalno število α in za vsako naravno število n tak ulomek a/b s pozitivnim imenovalcem $b \leqq n$, ki ustreza pogoju (7) in s tem tudi pogoju (3). Treba je še izpeljati, da je takih ulomkov neskončno. To je hitro opravljeno. Če vzamemo, da bi jih bilo samo končno mnogo, npr. a_1/b_1, $a_2/b_2, \ldots, a_m/b_m$, moremo namreč najti od vseh teh ulomkov različen ulomek a/b, ki tudi izpolni pogoj (3). Izberimo pač tako velik naraven n, da bo $1/n$ manjši od števil

$$|\alpha - \frac{a_1}{b_1}|, \quad |\alpha - \frac{a_2}{b_2}|, \ldots, \quad |\alpha - \frac{a_m}{b_m}|$$

Pravkar smo videli, da obstaja za ta n ulomek a/b, ki izpolnjuje neenačbo (7). Očitno je ulomek a/b različen od ulomkov $a_1/b_1, \ldots, a_m/b_m$ in tudi izpolni pogoj (3). Vidimo, da vsaki končni množici različnih ulomkov, ki ustrezajo neenačbi (3), lahko pridamo nadaljnji, od vseh ulomkov množice različen ulomek, za katerega tudi velja neenačba (3). Ulomkom, ki ugode tej neenačbi, torej ni kraja. Izrek je dokazan.

Natančneje govori o aproksimaciji iracionalnih števil z ulomki naslednji izrek.

Za vsako iracionalno število α je neskončno ulomkov a/b, ki ustrezajo neenačbi

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^2} \tag{8}$$

Če nadomestimo $\sqrt{5}$ s kakšno večjo konstanto, izrek ni več resničen.

Dokaže se ta izrek, ki ga pripisujejo A. Hurwitzu, z naslonitvijo na lastnosti verižnih ulomkov ali pa se uporabijo lastnosti Fareyevih zaporedij. Tukaj dokaza ne bomo navajali. Če v neenačbi (8) zamenjamo $\sqrt{5}$ z večjim številom, že obstoje iracionalna števila, pri katerih tako poostreni pogoj (8) izpolni le končno ulomkov. Teh izjemnih iracionalnih števil je števno mnogo, če vzamemo v (8) namesto $\sqrt{5}$ kakšno število, ki je večje od $\sqrt{5}$ pa manjše od 3. Ako pa nadomestimo $\sqrt{5}$ s konstanto $\geqq 3$, je izjemnih iracionalnih števil več ko števno mnogo. Niso pa nikdar med izjemnimi vsa iracionalna števila.

Doslej smo govorili o aproksimaciji poljubnih iracionalnih števil z ulomki. Kot je znano, razpadejo iracionalna števila na algebrajska iracionalna števila in na transcendentna števila. Poglejmo nekoliko, kaj je znanega o aproksimaciji algebrajskih iracionalnih števil. Do prvih izsledkov v tej smeri je prišel J. Liouville sredi prejšnjega stoletja. Ugotovil je namreč, *da pripada vsakemu algebrajskemu številu α stopnje $n \geqq 2$ takšna pozitivna konstanta c, da ima neenačba*

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{c}{b^n} \tag{9}$$

le končno rešitev v ulomkih a/b, $b > 0$. To moremo takole spoznati. Algebrajsko število α stopnje n je koren neke enačbe stopnje n

$$f(\alpha) = 0, \quad f(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n \tag{10}$$

ki ima za koeficiente $c_0, c_1, \ldots, c_n$ cela števila in je v obsegu ulomkov nerazcepna. Zaznamujmo korene enačbe $f(x) = 0$, katerih nobeden ni racionalno število, z $\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Potem lahko pišemo

$$f(x) = c_0 (x - \alpha)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

Če postavimo za x ulomek a/b, $b > 0$, je

$$\left| f\left(\frac{a}{b}\right) \right| = |c_0| \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \left|\alpha_2 - \frac{a}{b}\right| \ldots \left|\alpha_n - \frac{a}{b}\right|$$

Če je ulomek a/b takšen, da je $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < 1$ in torej $\left|\frac{a}{b}\right| < |\alpha| + 1$, dobimo iz zadnje enačbe

$$\left| f\left(\frac{a}{b}\right) \right| < |c_0| (|\alpha| + 1 + |\alpha_2|) \ldots (|\alpha| + 1 + |\alpha_n|) \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = d^{-1} \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \tag{11}$$

Z d^{-1} smo označili produkt vseh faktorjev razen zadnjega v srednjem členu pri (11). Očitno je $d^{-1} > |c_0| \geqq 1$ in $d < 1$. Ker enačba $f(x) = 0$ nima korenov med ulomki, je število

$$b^n f\left(\frac{a}{b}\right) = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + \ldots + c_n b^n$$

od nič različno in celo. Zato je

$$\left| b^n f\left(\frac{a}{b}\right) \right| \geqq 1 \tag{12}$$

Iz (11) in (12) sledi

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| > \frac{d}{b^n}$$

Ta neenačba je izpolnjena za vsak ulomek a/b, pri katerem je $\left| \alpha - a/b \right| < 1$. Ker pa je $d < 1$, ji ustrezajo tudi vsi ulomki a/b, za katere velja $\left| \alpha - a/b \right| > 1$. S tem je Liouvillova trditev dognana, konstanta c je kar d. Za $c = d$ sploh ni ulomkov, ki bi izpolnili neenačbo (9).

Liouvillova ugotovitev je doživela več sijajnih dopolnitev. Najprej je A. Thue v začetku tega stoletja dokazal, da ima neenačba (9) za vsako pozitivno konstanto c končno mnogo rešitev v ulomkih, če je le algebrajsko število α stopnje $n \geqq 3$. Izkazalo se je torej, da konstanta c, ki igra pri Liouvillu nemajhno vlogo, za resničnost ugotovitve ni važna. Da je moral Thue izvzeti algebrajska števila stopnje $n = 2$, je takoj jasno, če se spomnimo Hurwitzevega izreka. Tam smo videli, da ima neenačba (9) pri $c \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}$ in $n = 2$ neskončno rešitev v ulomkih za vsa iracionalna števila, torej tudi za algebrajska števila stopnje 2.

Okrog leta 1920 je C. L. Siegel še z neke druge strani izboljšal Liouvillovo ugotovitev. Posrečilo se mu je precej zmanjšati eksponent n v neenačbi (9), ne da bi prizadel njeno veljavnost. Če ima algebrajsko število α stopnjo $n_0 \geqq 3$, ima neenačba (9) npr. pri $c = 1$ za $n = 2$ neskončno rešitev v ulomkih, pri $n = n_0$ pa je teh rešitev končno mnogo. Ali je število rešitev končno tudi že pri kakem n, ki je manjši od n_0? Ta problem je reševal že Thue, njegov izsledek pa je močno izboljšal Siegel, ko je našel, da Liouvillova ugotovitev še zmeraj drži, če vzamemo v neenačbi (9) za konstanto $c = 1$, v eksponentu na desni strani pa namesto stopnje n algebrajskega števila α poljubno vrednost, večjo od katerega števil

$$\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{3} + 2, \frac{n}{4} + 3, \ldots, \frac{n}{n-1} + n - 2, \frac{n}{n} + n - 1 = n \tag{13}$$

Da se sme vzeti $n/2 + 1$ je dokazal že Thue. Toda med števili (13) so takšna, ki so pri $n \geqq 7$ dosti manjša od n in od $n/2 + 1$, tako da je s Siegelovim odkritjem bil dosežen velik napredek.

Nadaljnje raziskave so zbudile misel, da je najbrž eksponent n v neenačbi (9) pri $c = 1$ sploh neodvisen od stopnje iracionalnega algebrajskega števila. Zmeraj bolj se je utrjevala domneva, da drži Liouvillov izrek pri $c = 1$ že za vsak eksponent $n > 2$. Vendar tega dolgo ni bilo mogoče dokazati. Da je domneva pravilna, je potrdil leta 1955 K. F. Roth, ko je dokazal naslednji izrek. *Če je α iracionalno algebrajsko število in δ poljubno pozitivno število, je samo končno mnogo ulomkov a/b s pozitivnim imenovalcem b, ki izpolnjujejo neenačbo*

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^{2+\delta}} \tag{14}$$

Zaradi razlogov, ki smo jih omenili, Rothov izrek pogosto imenujejo tudi Thue-Siegel-Rothov izrek. Ker ima neenačba (14) samo končno rešitev, bi bilo zanimivo vedeti, koliko je rešitev pri danem α in δ. Ocena za število rešitev je sedaj znana le za nekatere posebne primere.

Rothov izrek ima še neko posledico. Če srečamo tako iracionalno število β, da je za neskončno ulomkov a/b, $b > 0$

$$|\beta - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^n}$$

pri kakšnem $n > 2$, potem β ni algebrajsko, pač pa je transcendentno število. Vendar lahko na ta način le redko ugotovimo transcendentnost kakega danega števila. Tudi mnoga transcendentna števila imajo namreč lastnost, ki jo za iracionalna algebrajska števila opisuje Rothov izrek.

2. Če je α iracionalno število, so njegovi ulomljeni deli

$$\alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha],\ 3\alpha - [3\alpha],\ \ldots,\ n\alpha - [n\alpha],\ \ldots \tag{15}$$

sama različna števila iz intervala med 0 in 1. Kako so posejani ulomljeni deli na tem intervalu? Kje so npr. stekališča zaporedja ulomljenih delov? Odgovor na ta vprašanja zahteva nekaj priprav.

Naj bo dano zaporedje

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_n,\ \ldots \tag{16}$$

katerega člani so vsi med 0 in 1. Vzemimo zdaj na intervalu $[0, 1]$ poljuben podinterval I, njegova dolžina naj bo $\gamma(I)$. Med prvimi n členi zaporedja naj jih bo $N(I, n)$, ki leže na podintervalu I. Pravimo, da je zaporedje (16) enakomerno porazdeljeno modulo 1, če je za vsak podinterval I, ko narašča $n \to \infty$,

$$\lim \frac{N(I, n)}{n} = \gamma(I)$$

Pri zaporedju, katerega členi niso vsi med 0 in 1, govorimo o enakomerni porazdelitvi modulo 1, kadar so ulomljeni deli členov zaporedja enakomerno porazdeljeni modulo 1. Velja izrek:

Za vsako iracionalno število je zaporedje ulomljenih delov enakomerno porazdeljeno modulo 1.

Od tod je jasno, da pridejo ulomljeni deli iracionalnega števila poljubno blizu vsakemu številu intervala $[0, 1]$ in da je vsako število tega intervala stekališče zaporedja ulomljenih delov. Vendar pove izrek še več. Namreč, da so ulomljeni deli iracionalnega števila na intervalu $[0, 1]$ povsod enako gosto posejani. Za zelo velik n je $N(I,n) \approx n\gamma(I)$. Na vsak podinterval I z isto dolžino $\gamma(I)$ pade torej približno enako mnogo izmed prvih n členov zaporedja (15). Dokazati je mogoče izrek na različne načine. Posebno zanimiv je Weylov dokaz. Morda ni najkrajši in najbolj elementaren, je pa pregleden in zaradi mogočih posplošitev široko uporaben. Razen tega imamo v njem zanimiv zgled uporabe Fourierovih vrst.

Jedro dokaza tvori pomožni izrek: Realna števila $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ so enakomerno porazdeljena modulo 1, če je za vsako naravno število k

$$\lim \frac{1}{n} [\exp (2 \pi ik \beta_1) + \exp (2 \pi ik \beta_2) + \ldots + \exp (2 \pi ik \beta_n)] = 0 \qquad (17)$$

ko narašča $n \to \infty$ (i imaginarna enota). Pogoj (17) je torej zadosten za enakomerno porazdelitev števil $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ modulo 1.

Denimo, da pomožni izrek drži in izpeljimo odtod osnovni izrek. Izračunajmo izraz v oglatem oklepaju v (17) za $\beta_1 = \alpha$, $\beta_2 = 2\alpha$, $\beta_3 = 3\alpha$ itd., pri čemer je α iracionalno število. Dobimo geometrijsko vsoto, ki jo lahko ocenimo

$$| \exp (2 \pi ik \alpha) + \exp (2 \pi ik\, 2 \alpha) + \ldots + \exp (2 \pi ikn \alpha) | =$$

$$= \left| \frac{\exp (2 \pi ik (n+1) \alpha) - \exp (2 \pi ik \alpha)}{\exp (2 \pi ik \alpha) - 1} \right| \leqq \frac{2}{| \exp (2 \pi ik \alpha) - 1 |} = c (k, \alpha)$$

Število $c (k, \alpha)$ je od n neodvisno in njegov imenovalec je od 0 različen, ker je α iracionalno in k naravno število. Torej gre $c (k, \alpha)/n \to 0$, ko n nenehno narašča. Tako dobimo pri $n \to \infty$

$$\lim | \exp (2 \pi ik \alpha) + \exp (2 \pi ik\, 2 \alpha) + \ldots + \exp (2 \pi ikn \alpha) | \leqq \lim \frac{c (k, \alpha)}{n} = 0$$

Po pomožnem izreku sklepamo, da je zaporedje $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ enakomerno porazdeljeno modulo 1. Osnovni izrek je dokazan.

Oglejmo si še dokaz pomožnega izreka. Za poljubno pozitivno število γ, ki ne presega 1, naj pomeni J interval $0 \leqq x < \gamma$. Od ulomljenih delov prvih n členov zaporedja $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ ležijo morda nekateri na intervalu J. Število le-teh smo že prej označili z $N (J, n)$. Najprej hočemo ugotoviti, da iz enačbe (17) sledi

$$\lim \frac{N (J, n)}{n} = \gamma \qquad (18)$$

pri $n \to \infty$.

Če je $\gamma = 1$, je J interval $[0, 1)$ in zato (18) velja. Naj bo torej $\gamma < 1$. Vpeljimo periodično funkcijo $g (x)$, ki ima periodo 1, na intervalu $[0, 1)$ pa je definirana s predpisom

$$g (x) = \begin{cases} 1 \text{ pri } 0 \leqq x < \gamma \\ 0 \text{ pri } \gamma \leqq x < 1 \end{cases}$$

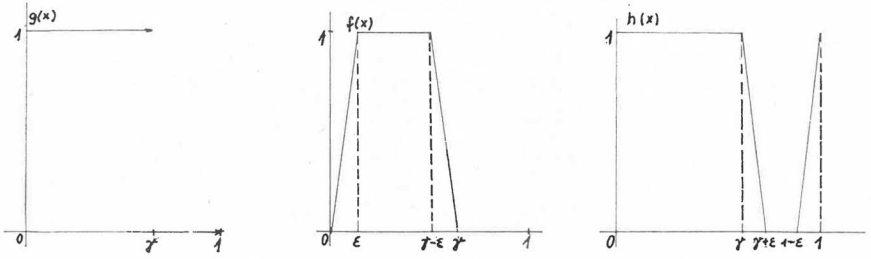
Če leži ulomljeni del števila β_j pod γ, je $g (\beta_j) = 1$, če pa je njegova vrednost $\geqq \gamma$, je $g (\beta_j) = 0$. Zato imamo

$$N (J, n) = g (\beta_1) + g (\beta_2) + \ldots + g (\beta_n) = \Sigma\, g (\beta_j) \qquad (19)$$

Da spravimo $N (J, n)$ v zvezo z dolžino intervala J, vpeljemo zvezni funkciji $f (x)$, $h (x)$, ki aproksimirata funkcijo $g (x)$, Potek obeh funkcij je viden s slike 1, za primerjavo pa je dodan še diagram funkcije $g (x)$, vse za interval od 0 do 1.

Zunaj intervala $[0, 1)$ funkciji $f(x)$ in $h(x)$ nadaljujemo periodično s periodo 1. Za vsak x velja potem

$$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x) \tag{20}$$



Slika 1

Razvijmo $f(x)$ v Fourierovo vrsto! Dobimo

$$f(x) = a_0 + \Sigma\,(a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx) \tag{21}$$

Pogled na diagram pokaže, da je

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \gamma - \varepsilon \tag{22}$$

Koeficienti z indeksom $k \geqq 1$ pa so absolutno omejeni in noben ne preseže neke vrednosti A

$$|a_k| \leqq A, \quad |b_k| \leqq A, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

Funkcija $f(x)$ ima vse lastnosti, ki zagotavljajo, da je njena Fourierova vrsta enakomerno konvergentna. Vsota členov od dovolj poznega indeksa M naprej je zato pri vseh x absolutno pod ε, torej je

$$|\Sigma\,(a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx)| < \varepsilon \tag{24}$$

ko teče indeks k od $m \geqq M$ naprej do neskončno.

Vstavimo zdaj v Fourierovo vrsto (21) $x = \beta_j$, tj. j-ti člen danega zaporedja. Dobimo

$$f(\beta_j) = a_0 + \Sigma\,(a_k \cos 2\pi k\beta_j + b_k \sin 2\pi k\beta_j)$$

Razbijmo vsoto, v kateri teče indeks k od 1 do ∞, na dva dela. V prvem delu naj bodo členi z indeksom od 1 do M, v drugem delu pa vsi nadaljnji členi. Zaradi enakomerne konvergence vemo, da je drugi del absolutno pod ε. Če upoštevamo, kar smo za a_0 izračunali v (22), in še, da je $f(x)$ nenegativna funkcija, dobimo

$$f(\beta_j) = |f(\beta_j)| \geqq (\gamma - \varepsilon) - |\Sigma\,(a_k \cos 2\pi k\beta_j + b_k \sin 2\pi k\beta_j)| - \varepsilon \tag{24}$$

Vsota se nanaša na člene z indeksom k od 1 do M.

Vzemimo zdaj $j = 1, 2, \ldots, n$. Za vsako od števil $f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_n)$ velja ocena (24) z ustreznim indeksom. Zato lahko vsoto teh števil ocenimo takole

$$\Sigma f(\beta_j) \geqq n(\gamma - \varepsilon) - \Sigma \left| \Sigma (a_k \cos 2\pi k \beta_j + b_k \sin 2\pi k \beta_j) \right| - n\varepsilon \tag{25}$$

Seštevati je treba na levi in v zunanji vsoti na desni po indeksu j od 1 do n, v notranji vsoti na desni pa na indeks k od 1 do M. Dvojna vsota na desni je torej končna in moremo v njej vrstni red seštevanja zamenjati. Potem se dvojna vsota glasi

$$\Sigma \left| a_k \Sigma \cos 2\pi k \beta_j + b_k \Sigma \sin 2\pi k \beta_j \right| \tag{26}$$

Tukaj seštevamo znotraj na j od 1 do n in nato na k od 1 do M.

Pogoja (17) do sedaj še nismo uporabili. Na tem mestu bomo z njim ocenili dvojno vsoto (26). Po Eulerjevi formuli lahko pogoj (17) zapišemo v obliki

$$\lim \frac{1}{n} \Sigma [\cos(2\pi k \beta_j) + i \sin(2\pi k \beta_j)] = 0 \tag{17}$$

pri $n \to \infty$, seštevati pa je treba pri fiksnem n po indeksu j od 1 do n. Na levi strani stoji kompleksno število, ki je 0. Torej mora biti realna in imaginarna komponenta nič. Pri že izbranih ε, M je tedaj za vsak n, ki ni manjši od nekega naravnega števila B

$$\left| \frac{1}{n} \Sigma a_k \cos 2\pi k \beta_j \right| \leqq \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{in} \quad \left| \frac{1}{n} \Sigma b_k \sin 2\pi k \beta_j \right| \leqq \frac{\varepsilon}{M} \tag{27}$$

ko seštevamo na j od 1 do $n \geqq B$.

Upoštevaje (27) lahko absolutno vrednost pod znakom vsote v (26) takole ocenimo

$$\left| a_k \Sigma \cos 2\pi k \beta_j + b_k \Sigma \sin 2\pi k \beta_j \right| \leqq |a_k| \frac{\varepsilon n}{M} + |b_k| \frac{\varepsilon n}{M} \tag{28}$$

Da dobimo oceno za vsoto (26), moramo sešteti člene iz (28) pri $k = 1, 2, \ldots, M$. Ker pa smo v (23) našli, da absolutni Fourierovi koeficienti a_k, b_k ne presegajo števila A, je dvojna vsota (26) manjša ali kvečjemu enaka $2A\varepsilon n$. Če to ugotovitev upoštevamo v enačbi (25), dobimo oceno

$$\Sigma f(\beta_j) \geqq n(\gamma - \varepsilon) - 2A\varepsilon n - n\varepsilon = n(\gamma - 2\varepsilon - 2A\varepsilon) \tag{29}$$

Funkcija $h(x)$ je po lastnostih enaka funkciji $f(x)$. Zato moremo zgornje sklepanje pri njej ponoviti in, če ocenjujemo navzgor, pridemo do neenačbe

$$\Sigma h(\beta_j) \leqq n(\gamma + 2\varepsilon + 2A\varepsilon) \tag{30}$$

Ker je po (20) funkcija $g(x)$ zmeraj med $f(x)$ in $h(x)$, sklepamo iz ocen (29) in (30), da je

$$\gamma - 2\varepsilon - 2A\varepsilon \leqq \frac{1}{n} \Sigma g(\beta_j) \leqq \gamma + \varepsilon + 2A\varepsilon \tag{31}$$

To pa lahko zapišemo zaradi (19) v obliki

$$\gamma - 2\varepsilon - 2A\varepsilon \leqq \frac{N(J, n)}{n} \leqq \gamma + 2\varepsilon + 2A\varepsilon \tag{32}$$

Najdena ocena velja za vsak pozitiven ε in dovolj velik n. Torej ima količnik v sredini limito γ. S tem smo pa dokazali, da drži enačba (18).

Zaporedje $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ je enakomerno porazdeljeno modulo 1, če za vsak podinterval I intervala $[0, 1)$ teži količnik $N(I, n)/n$ pri naraščajočem n proti dolžini $\gamma(I)$ podintervala I. Našli smo, da za podintervale, ki imajo obliko $[0, \gamma)$, $0 < \gamma < 1$, to drži. Interval J je namreč te vrste. Ker je za vsak še tako majhen pozitiven ε vedno $[0, \gamma) \subset [0, \gamma] \subset [0, \gamma + \varepsilon)$, je jasno, da velja (18) prav tako za podintervale $K = [0, \gamma]$, $0 < \gamma < 1$. Ker se da vsak podinterval I izraziti kot razlika intervalov J in K, je pomožni izrek v celoti dokazan.

V prejšnjem razdelku smo spoznali, da se nekateri izmed večkratnikov $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$, če je α iracionalno število, poljubno malo razlikujejo od celih števil. Jasno je, da ti večkratniki ne pridejo poljubno blizu vsakemu, ampak samo nekaterim celim številom. Tudi v zaporedju celih delov $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots$ niso zapopadena vsa cela števila in v splošnem tudi ne vsa pozitivna cela števila, če je α pozitiven. Ima pa zaporedje celih delov iracionalnega števila neko drugo lastnost. V njem je toliko lihih števil kakor sodih. Prav tako je v zaporedju $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots$ enako mnogo večkratnikov od 3 kot števil, ki puste pri delitvi s 3 ostanek ena, oz. onih, ki dajo ostanek 2. Natančneje povedano: *Če je v zaporedju celih delov iracionalnega števila med prvimi n členi $N(n, j, m)$ kongruentnih j modulo m, je pri $n \to \infty$*

$$\lim \frac{N(n, j, m)}{n} = \frac{1}{m}$$

za vsako naravno število m. To sledi iz enakomerne porazdeljenosti ulomljenih delov, vendar se bomo dokazu odrekli.

3. Ogledali smo si nekaj značilnih izrekov iz teorije diofantskih aproksimacij. Mnogih nič manj mikavnih izsledkov se nismo dotaknili. Ves čas smo imeli opraviti samo z realnimi števili. Ta omejitev pa ni nujna. Naj opozorimo na nekatere posplošitve.

Pojma iracionalnega in celega števila lahko prenesemo na kompleksna števila in potem v tem širšem okviru postavimo vprašanje o aproksimaciji ipd. Kompleksno število je celo, če sta realna in imaginarna komponenta navadni celi števili. Je pa iracionalno, če je vsaj ena komponent iracionalno število. Kvocient celih kompleksnih števil imenujemo racionalno kompleksno število. Namesto Hurwitzevega imamo npr. zdaj izrek: *Za vsako iracionalno kompleksno število α se da dobiti neskončno racionalnih kompleksnih števil u/v, ki izpolnjujejo pogoj*

$$\left| \alpha - \frac{u}{v} \right| < \frac{1}{\sqrt{3}\,|v|^2}$$

Če konstanto $\sqrt{3}$ zvečamo, izrek več ne drži.

Gremo pa lahko še dalje. Če je dan kak obseg, njegove algebrajske razširjave dajejo iracionalne algebrajske elemente, pa tudi absolutna vrednost elementov se da na primeren način vpeljati. Med drugim se je posrečilo dokazati, da velja v neki obliki Thue-Siegel-Rothov izrek tudi v tem splošnejšem primeru. Seveda pa formulacija izreka zdaj ni tako preprosta kot za realna števila.

PRIKAZ TEORIJE GRAFOV I

JOŽE VRABEC

1. Grafi in sorodni objekti

Teorija grafov je že precej stara matematična veja. Njen začetek predstavlja v letu 1736 objavljena Eulerjeva razprava, ki jo bomo še omenili v drugem delu tega članka. Teorija grafov pravzaprav ne spada v nobeno večje matematično področje. Pri klasifikaciji matematičnih teorij (npr. v Math. Reviews) jo sicer uvrščajo v kombinatorno analizo, vendar ima le del teorije grafov kombinatorni značaj. To, da te teorije ni mogoče uvrstiti v kako večje področje, pa seveda še ne pomeni, da je odrezana od ostale matematike. Naslanja se ne le na kombinatoriko, ki smo jo že omenili, ampak tudi na algebro, topologijo itd. Obratno, teorija grafov nam more koristiti na marsikaterem področju (v matematični logiki, linearnem programiranju, teoriji iger, teoriji informacij itd.). Zelo važna pa je uporaba te teorije v praksi, predvsem v elektrotehniki in ekonomiki.

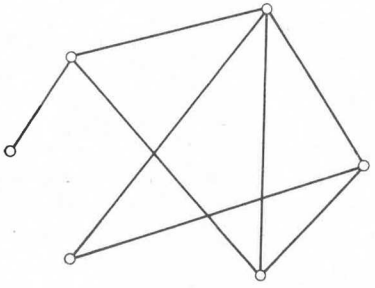
Intuitivna slika grafa je takale: danih je več točk, od katerih so nekatere po dve in dve zvezane z loki (glej sliko 1). Točke bomo imenovali *vozlišča*, loke pa *veje* grafa. Nič nas ne moti, če se pri taki sliki nekatere veje sekajo med seboj. Zavedati se moramo le, da so vozlišča samo tiste točke, ki smo jih izbrali v začetku, ne pa vsa slučajna presečišča vej.

Navedimo takoj nekaj primerov, kje pridemo v praksi do take slike. Vsak shematski načrt kateregakoli električnega vezja, vodovodne, plinovodne, naftovodne ali kanalizacijske napeljave je graf. Prav tako je graf vsak shematski zemljevid železniške ali cestne mreže, letalskih ali vodnih poti itd. Pri vseh teh primerih vidimo, da so nam daleč najvažnejši podatek *zveze* med posameznimi objekti — vozlišči. Razdalje in razporeditev vozlišč v prostoru so sekundarnega pomena ali pa nas sploh ne zanimajo. Sicer pa vozlišča in veje včasih sploh nimajo prostorskega pomena, npr. pri grafu, ki predstavlja rodovnik določene rodbine. Tudi pri idejni konstrukciji električne aparature se ne ukvarjamo s tem, kako bodo posamezni elementi razporejeni, niti nas ne zanimajo dolžine žic, ki bodo vezale te elemente.

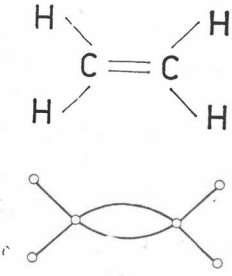
Zato tudi definicija grafa govori le o vozliščih in zvezah med njimi. Takale je ta definicija: *graf je par (V, Q), pri čemer je V poljubna neprazna množica, Q pa neka množica (lahko tudi prazna) neurejenih parov, katerih vsakega sestavljata dva različna elementa množice V. Elemente množice V imenujemo vozlišča, elemente Q pa veje grafa.*

Ko smo rekli »neurejeni pari«, smo s tem hoteli povedati, da se ne menimo za vrstni red elementov v paru: pri poljubnih dveh $u, v \in V$ parov (u, v) in (v, u) ne razlikujemo, ampak ju štejemo za isti element množice Q, to je za isto vejo. Kadar dokazujemo kako trditev o grafih, se moramo seveda sklicevati na pravkar navedeno pravo definicijo grafa. Praktično pa si graf vedno ponazorimo z diagramom: vozlišča prikažemo kot točke, veje pa kot loke.

Iz definicije grafa sledi, da sta poljubni dve vozlišči zvezani kvečjemu z eno vejo in da vsaka veja veže dve različni vozlišči. Dostikrat pa imamo opraviti tudi s takimi diagrami, v katerih nastopajo *večkratne (paralelne)* veje, to je, nekatere dvojice vozlišč so zvezane ne le z eno, ampak z več vejami.



Slika 1

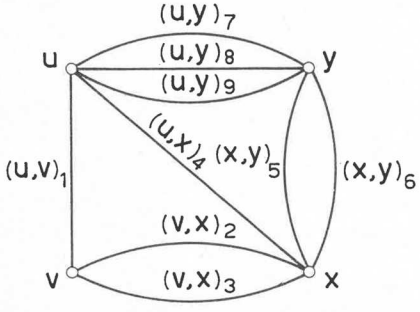


Slika 2

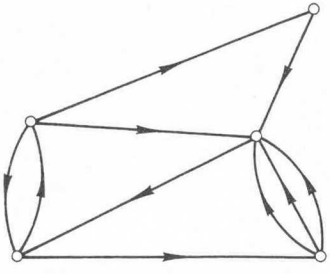
Tak diagram imenujemo *multigraf.* Vsi zgoraj navedeni »praktični« primeri grafov so v resnici dostikrat multigrafi. Tem primerom lahko dodamo še enega iz kemije. Vsako kemijsko strukturno formulo lahko izrazimo kot multigraf. Na sliki 2 imamo formulo za etilen in ustrezni multigraf.

Matematično definiramo multigraf kot dvojico (V, Q), pri čemer je V — množica vozlišč — spet poljubna neprazna množica, Q — množica vej — pa je neka *indeksirana* družina neurejenih parov različnih vozlišč: $Q = \{q_i : i \in I\}$ (I je množica indeksov; vsaka veja q_i je neki par različnih vozlišč).

To pomeni, da lahko isti par, opremljen z različnimi indeksi, nastopa večkrat kot element množice vej Q (glej sliko 3). Vsak graf je poseben primer multigrafa.



Slika 3



Slika 4

V praksi (npr. v teoriji preklopnih vezij) srečamo včasih tudi take diagrame, v katerih so nekatera vozlišča povezana direktno sama s seboj. Tak diagram imenujemo *splošni* graf.* Ta je definiran enako kot multigraf, le da

* Nazivi niso povsem enotni. Pri nekaterih avtorjih pomeni beseda graf isto, kar smo tu imenovali multigraf, ali pa tudi to, kar smo imenovali splošni graf.

v množici vej Q dovoljujemo tudi pare z enakima členoma, torej elemente oblike (u, u).

Oglejmo si še pojem *usmerjenega (orientiranega)* grafa. Usmerjeni graf (oziroma multigraf) je dan s parom (V, Q), kjer je V — množica vozlišč grafa (oziroma multigrafa) — spet poljubna množica, Q pa je neka družina (oziroma indeksirana družina) *urejenih* parov (med seboj različnih) vozlišč. Te pare imenujemo *usmerjene* veje.

Urejenost parov pomeni to, da para (u, v) in (v, u) razlikujemo, pomenita nam različni veji. Grafično si usmerjen graf ali multigraf ponazorimo z diagramom, pri katerem v vsaki veji izberemo eno od obeh smeri in jo proglasimo za pozitivno; označimo jo s puščico (glej sliko 4). Če hočemo biti natančni, pri orientiranem grafu ne smemo govoriti npr. o veji, ki veže vozlišči u in v, ampak o veji, ki gre od u k v (ali od v k u). Vse veje, ki se stikajo v danem vozlišču, se delijo na *vhodne* in *izhodne* veje. Seveda imajo lahko nekatera vozlišča samo vhodne ali samo izhodne veje, jasno pa je, da vsa vozlišča v usmerjenem multigrafu ne morejo imeti samo vhodnih ali samo izhodnih vej.

Iz vsakega usmerjenega multigrafa lahko dobimo neusmerjen multigraf, če zanemarimo orientacije vej. Ta multigraf je seveda natančno določen. Pripomniti pa je treba, da pri tem iz usmerjenega grafa v splošnem dobimo (neusmerjen) multigraf in ne navaden graf. V orientiranem grafu je namreč lahko kak par vozlišč zvezan z dvema vejama, če sta ti nasprotno usmerjeni, V ustreznem neusmerjenem multigrafu pa dobimo iz teh dveh vej paralelni veji.

Tudi iz neusmerjenega multigrafa lahko napravimo usmerjen multigraf, pač tako, da v vsaki veji izberemo poljubno orientacijo. Ta usmerjeni multigraf pa s prvotnim neusmerjenim ni več enolično določen. Če ima multigraf m vej, lahko napravimo iz njega 2^m različnih usmerjenih multigrafov.

Primerov v praksi, ki privedejo do usmerjenih grafov, je nešteto: električno vezje, ki vsebuje usmernike, prometne zveze, ki na nekaterih progah obratujejo samo v eni smeri, mreža radijskih zvez, ki ima na nekaterih mestih samo oddajnike, ponekod pa samo sprejemnike itd. Dostikrat usmerimo veje le teoretično, čeprav sta v resnici obe smeri enakovredni, to pa iz računskih razlogov (teorija električnih vezij). Seveda so pogosti tudi taki primeri, da je le v nekaterih vejah ena smer privilegirana, v drugih vejah pa sta obe smeri enakovredni. S takimi grafi se ne bomo posebej ukvarjali. Večino takih praktičnih primerov namreč lahko izrazimo z usmerjenimi grafi, v katerih tiste povezave, pri katerih sta obe smeri enakovredni, predstavimo z dvema paralelnima vejama, ki sta med seboj nasprotno usmerjeni.

Do zdaj ni bilo še nič govora o številu vozlišč in vej. Mi se bomo omejili na *končne* grafe oziroma multigrafe, to je na take, ki imajo končno mnogo vozlišč in vej.

2. Nekaj osnovnih pojmov

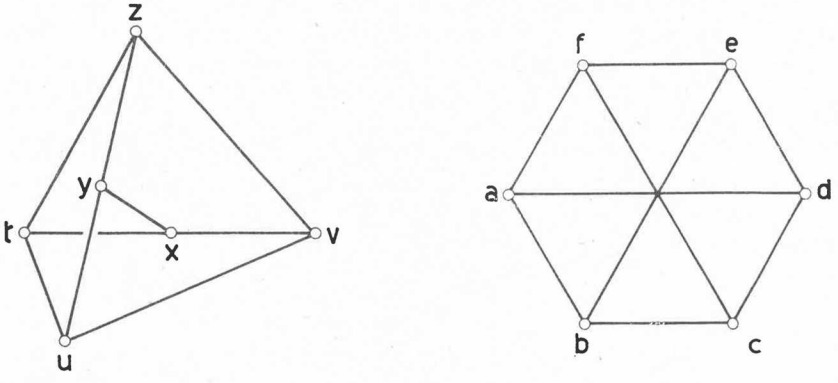
Dve *vozlišči* v multigrafu imenujemo *sosedni*, če ju veže vsaj ena veja. Dve *veji* pa sta *sosedni*, če imata vsaj eno skupno krajišče. Grafa (V, Q) in (V', Q') imenujemo *izomorfna*, če eksistira taka povratno enolična preslikava φ množice V na množico V', da sta vozlišči $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ sosedni natančno tedaj, ko sta u in v sosedni vozlišči v grafu (V, Q). Izomorfnost usmerjenih grafov je definirana podobno, le da se mora pri preslikavi φ ohranjati poleg sosednosti

vozlišč tudi usmerjenost vej. Obe definiciji izomorfnosti (za usmerjene in neusmerjene grafe) lahko združimo v eni sami formalni definiciji:

Grafa (usmerjena grafa) (V, Q) in (V', Q') sta izomorfna, če eksistira taka povratno enolična preslikava φ: $V \to V'$, da za poljubna $u, v \in V$ velja: $(\varphi(u), \varphi(v)) \in Q'$ je natančno tedaj, ko je $(u, v) \in Q$. Preslikavo φ imenujemo izomorfizem.

Analogno je definiran izomorfizem (usmerjenih) multigrafov in splošnih grafov. Za izomorfizem multigrafov zahtevamo npr., da veže vozlišči $\varphi(u)$ in $\varphi(v)$ prav toliko vej kot vozlišči u in v. Pri izomorfizmu usmerjenih multigrafov pa zahtevamo še to, da preslikava φ ohranja smer vej.

Izomorfna grafa imata seveda enako mnogo vozlišč; obratno pa ni res: če imata dva grafa isto število vozlišč, še ni gotovo, da sta izomorfna. Precej jasno je, da lahko izomorfne grafe (oziroma multigrafe) identificiramo. Reči, da sta dva grafa izomorfna, je namreč v bistvu isto, kot trditi, da je to isti graf, pri katerem pa smo označili vozlišča enkrat z enimi, drugič z drugimi črkami. Toda kljub temu je včasih tudi v najbolj enostavnih primerih težko videti na prvi pogled, da sta dva dana grafa izomorfna. Oglejmo si grafa na sliki 5. Prvi sestoji iz stranic in glavnih diagonal šesterokotnika, drugi pa iz robov tetraedra in zveznice središč dveh mimobežnih robov. Za vozlišča vzamemo obakrat samo vse označene točke (tako da pri šesterokotniku središče



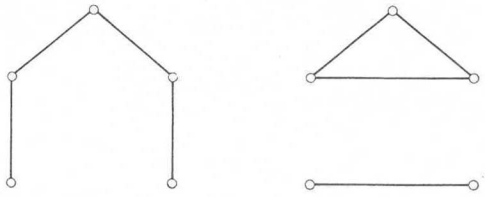
Slika 5

ni vozlišče). Ta dva grafa sta izomorfna, kar pa se gotovo ne vidi na prvi pogled. Izomorfizem φ med grafoma lahko definiramo takole: $\varphi(a) = t$, $\varphi(b) = u$, $\varphi(c) = y$, $\varphi(d) = x$, $\varphi(e) = v$, $\varphi(f) = z$ (seveda to ni edina možnost).

Graf (multigraf) (U, P) imenujemo *podgraf (podmultigraf)* grafa ali multigrafa (V, Q), če je $U \subset V$ in $P \subset Q$. Iz danega grafa ali multigrafa dobimo torej podgraf (podmultigraf) tako, da izpustimo nekatera vozlišča in veje. Seveda moramo obenem z vsakim vozliščem izpustiti tudi vse veje, ki se stikajo v tistem vozlišču. Pod(multi)graf usmerjenega (multi)grafa je definiran analogno.

Število vej, ki se stikajo v vozlišču u danega multigrafa, bomo imenovali *stopnjo* vozlišča u in ga označili z $d(u)$. Morda se na prvi pogled zazdi, da bo graf (do izomorfizma) enolično določen, če predpišemo število vozlišč in stopnje

vseh vozlišč. Vendar to ne drži niti za grafe, seveda toliko manj za multigrafe. Na sliki 6 sta dva grafa, ki imata isto število vozlišč in v istoležnih vozliščih enake stopnje, pa vseeno nista izomorfna. Pač pa lahko iz stopenj vseh vozlišč



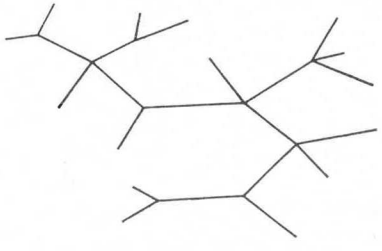
Slika 6

izračunamo število vseh vej multigrafa. Naj ima multigraf vozlišča $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in naj vsebuje m vej. Ker vsaka veja veže natančno dve vozlišči, bo očitno veljala formula:

$$m = \tfrac{1}{2}\,[d\,(a_1) + \ldots + d\,(a_n)] \qquad (1)$$

Domenimo se, da bomo vozlišča, ki imajo sodo stopnjo, kratko imenovali *soda* vozlišča, tista z liho stopnjo pa *liha* vozlišča. Iz enačbe (1) sledi, da je vsota v oglatem oklepaju na desni sodo število. To pomeni, da je v tej vsoti sodo število lihih sumandov. Tako smo ugotovili, da ima vsak multigraf sodo število lihih vozlišč.

Naj bo (V, Q) poljuben multigraf. Zaporedje $S = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$ vej tega multigrafa imenujemo *pot* po multigrafu, če so vse te veje med seboj različne in če sta vsaki dve zaporedni veji sosedni (to je, če imata skupno krajišče). Za pot S lahko torej najdemo tako zaporedje vozlišč $a_0, a_1, \ldots, a_r \in V$, da je $q_1 = (a_0, a_1)$, $q_2 = (a_1, a_2), \ldots, q_r = (a_{r-1}, a_r)$. Vozlišči a_0 in a_r imenujemo *začetek* oziroma *konec* poti S; pravimo tudi, da gre S od a_0 do a_r. Seveda pa lahko zdaj, ko veje niso usmerjene, pot vedno obrnemo, to je, tvorimo pot $(q_r, q_{r-1}, \ldots, q_1)$, ki gre od a_r do a_0. Zato navadno pravimo samo, da dana pot veže vozlišči a_0 in a_r, ne da bi povedali, katero vozlišče je začetno in katero končno. Poudariti je treba, da ne zahtevamo, da so vozlišča $a_0, \ldots, a_r$ med seboj različna, le več enakih vej ne sme pot vsebovati. Če pa so tudi vsa vozlišča med seboj različna, pravimo, da je S *enostavna pot* ali *lok*. Nazorno si torej pot predstavljamo kot zvezno krivuljo, ki poteka po lokih — vejah multigrafa; lahko sama sebe seka, ne sme pa večkrat opisati istega loka. Enostavna pot



Slika 7

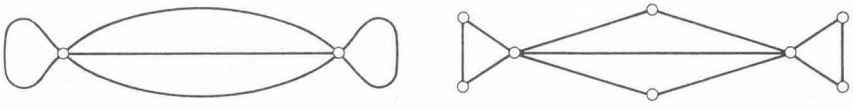
pa je prav tisto, čemur pravimo v analizi in topologiji enostavna krivulja ali lok, to je zvezna krivulja, ki ne gre skozi nobeno točko dvakrat ali večkrat.

Pot, pri kateri sta začetek in konec isto vozlišče, imenujemo *cikel*. Multigraf, ki ne vsebuje nobenega cikla, imenujemo *drevo* (glej sliko 7). Vsako drevo je seveda že kar navaden graf, saj v multigrafu dve paralelni veji že tvorita cikel. *Enostaven cikel* je tak, ki ne gre skozi nobeno vozlišče več kot enkrat.

Pri usmerjenih multigrafih ločimo *usmerjene* in *neusmerjene poti*. Neusmerjene poti so poti (kot smo jih zgoraj definirali) po neusmerjenem multigrafu, ki leži na danem usmerjenem (dobimo ga, če zanemarimo orientacije vej). Predvsem pa so pri usmerjenih multigrafih važne usmerjene poti. Intuitivno je jasno, kaj je to: usmerjene poti so take, ki po vsaki veji »potekajo« v smeri, ki jo predpisuje orientacija tiste veje. Formalna definicija pa je: usmerjena pot je tako zaporedje $S = (q_1, \ldots, q_r)$ med seboj različnih usmerjenih vej multigrafa, da je končna točka vsake veje (razen zadnje) obenem začetna točka naslednje veje v zaporedju. Tudi usmerjena pot je dana z zaporedjem (ne nujno različnih) vozlišč $a_0, \ldots, a_r$, tako da je $q_1 = (a_0, a_1), \ldots, q_r = (a_{r-1}, a_r)$.

3. Povezanost

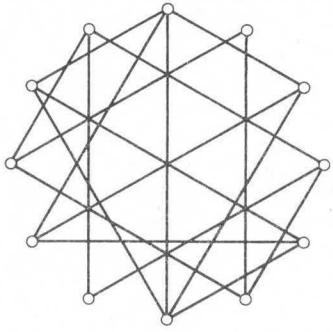
V tem in naslednjem paragrafu bomo govorili samo o navadnih grafih. Vse definicije in izreki se lahko prenesejo na multigrafe, pravzaprav se avtomatično podedujejo, kajti iz vsakega multigrafa (in tudi iz vsakega splošnega grafa) lahko napravimo graf, če dodamo nekaj vozlišč (glej sliko 8). Tudi v večini praktičnih primerov je tako dodajanje vozlišč dopustno.



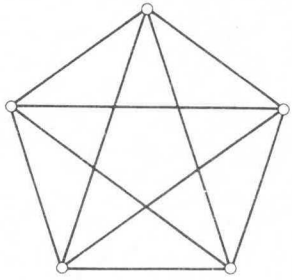
Slika 8

Graf je *povezan*, če lahko v njem vsak par vozlišč zvežemo s kako potjo. Če pa eksistirata dve taki vozlišči, ki ju ne spaja nobena pot, je graf *nepovezan*. Povezan graf se torej »drži skupaj«, nepovezan pa je sestavljen iz dveh ali več kosov. To je dovolj nazorno, vendar s tem še ni rečeno, da se danemu grafu takoj vidi, ali je povezan ali ne. Lahko nas stane precej truda, da to ugotovimo, če je graf dovolj kompliciran. Na sliki 9 imamo graf z 12 vozlišči, kar navsezadnje ni mnogo, pa se najbrž le ne da kar na oko ugotoviti, da ni povezan. Seveda pa ni treba za vsak par vozlišč preizkusiti, ali se dasta zvezati. Če za kako vozlišče u ugotovimo, da se da vsako drugo vozlišče z njim povezati s kako potjo, potem je graf povezan. Kar vzemimo dve poljubni vozlišči a in b. Naj gre npr. pot $S = (p_1, \ldots, p_s)$ od a do u, pot $T = (q_1, \ldots, q_t)$ pa od u do b. Zaporedje vej $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$ veže tedaj vozlišči a in b, vendar to zaporedje v splošnem ni pot, ker morda niso vse veje različne. Pač pa lahko iz tega zaporedja izberemo neko pot: vzemimo poljubno vejo, ki se pojavi v zaporedju večkrat; poglejmo, kje se pojavi prvič in kje zadnjič, nato pa izpustimo iz zaporedja ves vmesni del (in seveda tudi tisto vejo na enem »krajišču« tega

vmesnega dela). Če v tem preostalem zaporedju (ki je seveda še vedno »zvezno«) še kaka veja nastopa večkrat, ponovimo opisani postopek za to vejo. Po nekaj korakih reduciramo prvotno zaporedje do poti, ki veže vozlišči a in b. Graf je torej res povezan.



Slika 9



Slika 10

Posamezne »kose« grafa, to je maksimalne povezane podgrafe, imenujemo *komponente* grafa. Graf je torej povezan tedaj in le tedaj, ko ima le eno komponento. Jasno je, da dve različni komponenti nimata nobenega skupnega vozlišča. Na najslabšem je glede povezanosti *diskreten* graf, to je tak, ki nima sploh nobene veje. Tu je vsako vozlišče komponenta zase. Nasprotna skrajnost je *poln* graf (oziroma poln multigraf), v katerem sta vsaki dve vozlišči zvezani že z vejo (oziroma vsaj z eno vejo). Slika 10 prikazuje poln graf s petimi vozlišči. Očitno je poln graf (ne pa tudi multigraf) s številom vozlišč natančno določen (do izomorfizma).

Pri orientiranih grafih ločimo tri vrste povezanosti. Usmerjen graf je

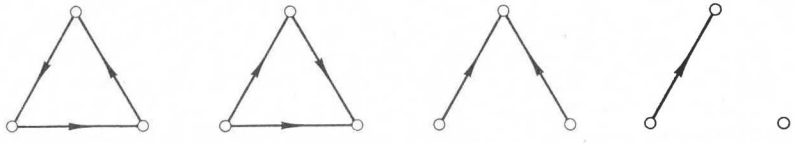
a) *krepko* povezan, če lahko za poljubni dve vozlišči u in v najdemo tako *usmerjeno* pot, ki gre od u do v;

b) *enostransko (unilateralno)* povezan, če za poljubni dve vozlišči u in v eksistira bodisi usmerjena pot od u do v bodisi usmerjena pot od v do u (ali pa obe);

c) *šibko* povezan, če lahko vsaki dve vozlišči zvežemo s kako *neusmerjeno* potjo;

d) *nepovezan,* če ni niti šibko povezan.

Primere za vse štiri možnosti imamo na sliki 11.



Slika 11

Da ne bomo kar naprej pripovedovali samih definicij, poizkusimo rešiti naslednji problem. Dan je (neusmerjen) graf. Ali je mogoče njegove veje tako usmeriti, da bomo dobili krepko povezan usmerjen graf? Na ta problem naletimo v praksi npr. pri vprašanju, kako urediti promet v mestu, v katerem je večina ulic tako ozkih, da morajo biti enosmerne. Jasno je, da je treba usmeritve izbrati tako, da bo vsaka točka v mestu dostopna od vsake druge točke. Širše ulice so dvosmerne. Vsako tako predstavimo v diagramu z dvema paralelnima vejama. Pa tudi brez tega je načrt mesta v splošnem multigraf in ne graf. Vendar zaradi tega naloga ni nič težja. Seveda je problem v praksi nekoliko bolj kompliciran, kot smo si ga mi zastavili. Ni namreč dopustna taka usmeritev cest, da bi za pot od kake točke do druge,, oddaljene npr. le za 100 m, morali prevoziti po dolgem in počez vse mesto. To pomeni, da morajo biti tudi primerno majhni deli mesta krepko povezani, ne le mesto kot celota. Vendar je vprašanje, ki smo si ga zastavili zgoraj, le osnovno.

Vzemimo poljuben (neusmerjen) graf in poljubno njegovo vejo q. Rekli bomo, da ta veja graf *separira* (ali da je q *separativna veja*), če je podgraf, ki ga dobimo, če iz grafa izpustimo vejo q, nepovezan. Edini most čez reko ali slepa ulica npr. separirata graf, ki predstavlja mrežo mestnih ulic. Jasno je, da je v nepovezanem grafu vsaka veja separativna. Zdaj bomo odgovorili na vprašanje, ki smo si ga postavili zgoraj.

Izrek 1. *Iz neusmerjenega grafa je mogoče napraviti krepko povezan usmerjen graf tedaj in le tedaj, ko nobena veja grafa ne separira.*

Dokaz: Vzemimo, da je v grafu (V, Q) kaka separativna veja $q = (u, v)$! Če to vejo izrežemo iz grafa, razpade ostanek na dve komponenti, npr. (V_1, Q_1) in (V_2, Q_2). Naj bo $u \in V_1$, $v \in V_2$. V prvotnem grafu je edina zveza med podgrafoma (V_1, Q_1) in (V_2, Q_2) veja q. Če zdaj to vejo orientiramo, npr. od u proti v, ne bo mogoče iz vozlišča v po nobeni usmerjeni poti priti do u, ker bi vsaka pot morala od V_2 do V_1 čez »most« q, ki pa je nasprotno orientiran. Zato iz danega grafa res ni mogoče napraviti usmerjenega krepko povezanega grafa.

Dokažimo zdaj izrek še v obratni smeri. Da ne bomo venomer ponavljali istih besed, se domenimo, da bomo (pa samo zdaj, v tem dokazu) graf, ki se da usmeriti tako, da dobimo krepko povezan usmerjen graf, imenovali kratko *usmerljiv* graf. Naj bo (neusmerjen) graf (V, Q) brez separativnih vej. V takem grafu je vsaka veja vsebovana v kakem ciklu. Res! Vzemimo poljubno vejo $q = (u, v) \in Q$. Ker ta veja ni separativna, je graf tudi brez te veje povezan; eksistira torej taka pot od v do u, ki ne vsebuje veje q. Če k tej poti dodamo še q, res dobimo cikel, ki vsebuje q. Ker je očitno vsak cikel usmerljiv, vsebuje naš graf (V, Q) usmerljive podgrafe.

Vzemimo poljuben usmerljiv podgraf! Če ga je mogoče povečati (to je, če eksistira kak usmerljiv podgraf, ki prvega vsebuje), ga povečajmo. Če se da tudi ta novi usmerljivi podgraf povečati, ga spet povečajmo itd. Prej ali slej pridemo do takega usmerljivega podgrafa (U, P), ki ni vsebovan v nobenem večjem usmerljivem podgrafu. Pokazali bomo, da je $(U, P) = (V, Q)$.

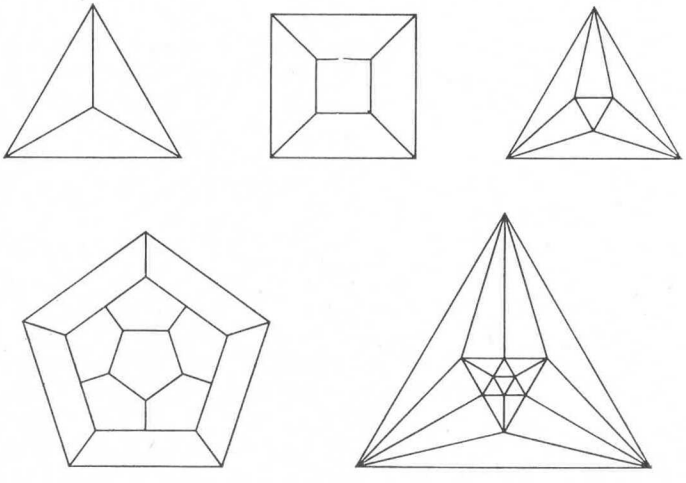
Dokazujemo s protislovjem. Recimo, da je (U, P) manjši od (V, Q). Tedaj vsebuje Q take veje, ki niso v P, in ker je graf (V, Q) povezan, se nekatere teh vej »dotikajo« podgrafa (U, P). V Q eksistira torej taka veja $q = (a, b)$, da je $a \in U$ in da $q \notin P$. Kot smo že zgoraj pokazali, je veja q vsebovana v nekem ciklu C. Pojdimo po tem ciklu od vozlišča a do b in (po potrebi) še naprej

v tej smeri, dokler prvič spet ne zadenemo podgrafa U, npr. v vozlišču c (seveda je lahko $c = b$ ali pa tudi $c = a$). Označimo z S to pot po ciklu C od a do c in jo usmerimo od a proti c! Če vzamemo zdaj graf (U, P) s poljubno tako orientacijo, da je krepko povezan, in mu dodamo še usmerjeno pot S, dobimo večji usmerjen podgraf, ki je tudi krepko povezan, kot je prav lahko dokazati. Naj bosta u in v poljubni vozlišči iz tega povečanega podgrafa. Če sta u in v oba v U, eksistira usmerjena pot od u do v po supoziciji (ker je podgraf (U, P) krepko povezan). Če je u na S in $v \in U$, pridemo od u do v takole: najprej po S od u do c in nato po poljubni usmerjeni poti po (U, P) od c do v. Če je $u \in U$ in $v \in S$, gremo najprej po poljubni usmerjeni poti po (U, P) od u do a in nato po S od a do v. Podobno lahko konstruiramo usmerjeno pot od u do v, če sta u in v na S. Tako smo res dobili usmerljiv podgraf, ki je večji od (U, P). To pa je v nasprotju s supozicijo, da je (U, P) maksimalen usmerljiv podgraf. To protislovje dokazuje, da je res $(U, P) = (V, Q)$. Graf (V, Q) je zato usmerljiv.

4. Planarni grafi

V tem paragrafu si bomo ogledali del topološke plati teorije grafov. Graf imenujemo *planaren* (*ravninski*), če lahko njegova vozlišča predstavimo kot točke v ravnini, njegove veje pa kot loke, ki te točke vežejo, vendar tako, da ležijo vsi ti loki v isti ravnini kot vozlišča in da za vsaka dva loka velja: ali imata skupno eno krajišče (če predstavljata sosedni veji) ali pa nimata nobene skupne točke. Če je graf planaren, pravimo tudi, da se *da vložiti v ravnino.*

Primerov za planarne grafe si lahko takoj dobimo, kolikor hočemo. Ali pa eksistirajo tudi neplanarni grafi? Verjetno bo vsak takoj odgovoril, da eksistirajo. Vendar pa človek postane malo manj gotov, če si ogleda sliko 12. Ta namreč pokaže, da se dajo vložiti v ravnino grafi, ki predstavljajo mreže robov tetraedra, kocke, oktaedra, dodekaedra in ikozaedra. Pa je vendar prvi vtis pravilen. Res ni vsak graf ravninski.



Slika 12

Preden pa začnemo podrobneje preučevati ta problem, se vprašajmo, ali je mogoče vložiti vsak graf v tridimenzionalni prostor. Zdi se, da bo šlo, saj končno mnogo lokov vedno lahko »napeljemo« enega mimo drugega, tako da se ne sekajo. Kljub temu bom to dokazali, deloma zato, ker se čisto podobno dokaže, da se da vsak n-dimenzionalni polieder vložiti v $(2n + 1)$-dimenzionalni evklidski prostor; n-dimenzionalni polieder je, recimo, geometrijski objekt, ki se da sestaviti iz končno mnogo simpleksov, ki so največ n-dimenzionalni; simpleksi pa so: točke (0-dimenzionalni), daljice (1-dimenzionalni), trikotniki (2-dimenzionalni), tetraedri (3-dimenzionalni) in analogna »geometrijska telesa« višjih dimenzij. Po omenjenem izreku se da torej vsak enodimenzionalni polieder, to je vsak objekt, ki ga sestavlja končno mnogo točk in daljic, vložiti v tridimenzionalni prostor, vsak dvodimenzionalni polieder (objekt, sestavljen iz končno mnogo točk, daljic in trikotnikov) v 5-dimenzionalni evklidski prostor itd.

Izrek 2. *Vsak graf se da realizirati v tridimenzionalnem evklidskem prostoru tako, da vozlišča predstavimo s točkami, veje pa z daljicami, ki vežejo sosednim vozliščem ustrezajoče točke; pri tem sta vsaki dve različni daljici ali ločeni, ali pa imata skupno eno krajišče.*

Dokaz: Naj ima graf vozlišča $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Vzemimo prostorsko krivuljo, dano z enačbama $y = x^2$, $z = x^3$. Vozlišča grafa predstavimo s točkami na tej krivulji, ki ustrezajo vrednostim $x = 1, 2, \ldots, n$. Vzeli bomo torej točke $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 4, 8), \ldots, a_n = (n, n^2, n^3)$. Potegnimo še daljice, ki ustrezajo vejam grafa. Edino, kar moramo pokazati, je, da se te daljice sekajo oziroma stikajo kvečjemu v krajiščih. Pa vzemimo, da se daljici (a_i, a_j) in (a_r, a_s) sekata v neki točki c. Naj simboli a_i, a_j, a_r, a_s, c pomenijo poleg točk tudi krajevne vektorje teh točk. Ker leži c na premici skozi a_i in a_j in na premici skozi a_r in a_s, eksistirata taki realni stevili λ in μ, da velja

$$c = a_i + \lambda (a_j - a_i) = a_r + \mu (a_s - a_r) \tag{2}$$

Če to enačbo malo preuredimo in jo zapišemo po komponentah ter dodamo še identiteto $\lambda + (1 - \lambda) = \mu + (1 - \mu)$, dobimo sistem

$$\begin{aligned} (1-\lambda) + \lambda + (\mu - 1) + (-\mu) &= 0 \\ i(1-\lambda) + j\lambda + r(\mu - 1) + s(-\mu) &= 0 \\ i^2(1-\lambda) + j^2\lambda + r^2(\mu - 1) + s^2(-\mu) &= 0 \\ i^3(1-\lambda) + j^3\lambda + r^3(\mu - 1) + s^3(-\mu) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ki ga lahko razumemo kot sistem homogenih linearnih enačb za neznanke $1 - \lambda, \lambda, \mu - 1, -\mu$. Ker vsa ta števila ne morejo imeti vrednosti 0, mora biti determinanta sistema enaka 0:

$$(j - i)(r - i)(s - i)(r - j)(s - j)(s - r) = 0$$

Med števili i, j, r, s sta torej dve enaki. Seveda je $i \neq j$ in $r \neq s$. Ker med točkama a_i in a_j ni nobene principialne razlike in prav tako ne med a_r in a_s, smemo vzeti, da je $i = r$. Enačbo (2) lahko zato zapišemo v obliki $(\mu - \lambda) a_i + \lambda a_j + (-\mu) a_s = 0$. Če to enačbo zapišemo po komponentah, dobimo homogen sistem treh linearnih enačb za $\mu - \lambda, \lambda, -\mu$. Sistem ima determinanto $ijs\,(j - i)(s - i)(s - j)$. Zdaj imamo dve možnosti: ali ima sistem samo trivialno rešitev $\lambda = \mu = 0$, ali pa je determinanta enaka 0, to je: $j = s$. V prvem primeru je $c = a_i = a_r$: daljici (a_i, a_j) in (a_r, a_s) imata skupno eno krajišče. V dru-

gem primeru pa velja $a_i = a_r$, $a_j = a_s$ in sta zato daljici identični. S tem je izrek dokazan.

Povrnimo se k prejšnjemu problemu! Planaren graf je po naši definiciji *abstrakten* graf, ki se *da* realizirati kot ravninski diagram (tako, da se veje ne sekajo), seveda na mnogo načinov. Domenimo se, da bomo z izrazom *graf v ravnini* označevali vsako realizacijo planarnega grafa, to je vsak ravninski diagram, ki sestoji iz točk in lokov, ki te točke vežejo, pri čemer sta vsaka dva loka ali ločena, ali pa imata eno skupno krajišče. Enemu abstraktnemu planarnemu grafu lahko ustreza torej več na oko različnih grafov v ravnini, ki so pa seveda vsi izomorfni (pa tudi topološko ekvivalentni, kot se hitro vidi).

Veje grafa v ravnini razrežejo ravnino na več polj (odprtih povezanih množic), od katerih je natančno eno neomejeno. To je nazorno zelo jasno, vendar še daleč ni samo po sebi razumljivo. Kdo bi npr. mogel vprašati, kako vemo, da veje grafa ne napolnijo vse ravnine, da ne morejo biti povsod goste v ravnini itd. Če bi hoteli neoporečno dokazati zgornjo trditev, bi potrebovali precej znanja iz topologije ravnine, pa tudi predaleč bi nas tako dokazovanje zavedlo. Zato se bomo zadovoljili z nazornostjo. Navedimo le en izrek iz topologije poliedrov: vsak planaren graf je mogoče realizirati v ravnini tako, da predstavimo veje s poligonskimi črtami (to je z lomljenimi črtami, sestavljenimi iz končnega števila daljic). Če vzamemo ta izrek na vero in se v nadaljnjem omejimo na poligonalne grafe v ravnini, lahko prejšnjo trditev — da veje grafa v ravnini razrežejo ravnino na več polj — brez posebnih težav dokažemo; isto velja še za nekatere trditve, ki jih bomo izrekli, pa ne dokazali, sklicujoč se na nazornost.

V nadaljnjem se bomo omejili na povezane grafe, saj je očitno, da je graf planaren tedaj in le tedaj, ko je vsaka njegova komponenta planarna. Komponente pa so povezni grafi.

Izrek 3. *Vzemimo povezan graf v ravnini, ki ima n vozlišč in m vej. Če te veje ograjajo p omejenih polj, potem velja* $n - m + p = 1$ (Eulerjeva formula).

Dokaz: Vzemimo najprej, da je $p = 0$. Naš graf je tedaj brez ciklov, torej je drevo. V notranjosti vsakega cikla bi namreč ležalo eno ali več polj (spet se sklicujemo na nazornost). Pri povezanem drevesu je pa res $n - m = 1$. To vidimo takole. Vsaka veja drevo separira. Če torej izpustimo katerokoli vejo, razpade ostanek na dve komponenti. Če izpustimo še eno vejo, bo ena od teh dveh komponent spet razpadla na dvoje, torej bodo skupaj tri komponente. Če tako postopoma odvzemamo veje, pridemo po m korakih do podgrafa, ki ima $m + 1$ komponent. V tem podgrafu pa ni nobene veje več, zato ima komponent prav toliko kot vozlišč: $n = m + 1$.

Naj bo zdaj $p > 0$. Gotovo eksistira kaka taka veja, ki je na meji natančno enega polja (take so veje na zunanjem robu grafa). Če tako vejo izpustimo, eno polje odpade. Tako dobimo nov graf, ki je še vedno povezan in ima n vozlišč, $m - 1$ vej in $p - 1$ polj. Če je tudi $p - 1 > 0$, postopek ponovimo. Po p korakih pridemo do povezanega drevesa, ki ima n vozlišč in $m - p$ vej. Kot smo malo prej ugotovili, velja $n - (m - p) = 1$. S tem je izrek dokazan.

Izrek 4. *V vsakem planarnem grafu je najmanj eno tako vozlišče u, da je njegova stopnja* $d(u) \leqslant 5$.

Prejšnji izrek velja, kot se vidi iz dokaza, tudi za multigrafe. Ta izrek pa za multigrafe očitno ne drži.

Dokaz: Vzemimo, da eksistira tak graf v ravnini, da ima vsako njegovo vozlišče stopnjo večjo od 5. Naj ima graf n vozlišč in m vej; te naj ograjajo p omejenih polj. Ker je vsako polje omejeno najmanj s tremi različnimi vejami, vsaka veja pa meji največ dve polji, velja $m \geqslant \frac{3}{2} p$. Iz enačbe (1) pa sledi $m \geqslant 3n$. Ti dve oceni nam dasta:

$$n - m + p \leqslant \tfrac{1}{3} m - m + \tfrac{2}{3} m = 0$$

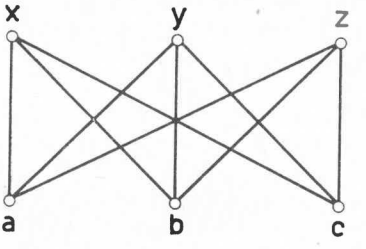
To pa je v nasprotju z izrekom 3. Zato ima res najmanj eno vozlišče ravninskega grafa stopnjo manjšo od šest.

S tem smo pravzaprav že dokazali, da vsak graf ni planaren. Prav lahko si je namreč izmisliti graf, ki bo imel v vsakem vozlišču stopnjo večjo od 5. Tak je npr. že poln graf s 7 vozlišči (vsako vozlišče ima stopnjo 6). Vendar se s tem rezultatom ne bomo zadovoljili. Izrek 4 nam namreč pove le potreben pogoj za to, da je graf planaren. Zadosten pa ta pogoj ni. Eksistirajo namreč tudi taki neplanarni grafi, ki v nobenem vozlišču nimajo stopnje večje od 5. Najprej pa dokažimo naslednjo trditev, ki je posledica izreka 4.:

Če določeno površino (ravninsko polje) kakorkoli razdelimo na parcele, bo najmanj ena od njih mejila na manj kot šest drugih parcel.

Pri tem pa štejemo dve parceli za mejni le, če imata res skupen del meje. Če se samo stikata v eni točki, nista mejni. V notranjosti vsake parcele si izberimo poljubno točko in jo imenujmo središče parcele. Če dve parceli mejita druga na drugo, lahko njuni središči zvežemo z lokom, ki poteka po notranjostih obeh parcel, le v eni točki seče njuno skupno mejo (tudi tu se sklicujemo na nazornost). Potegnimo tak lok za vsak par parcel, ki imata skupno mejo, vendar tako, da se ti loki med seboj ne bodo sekali (če sestoji skupna meja dveh parcel iz več ločenih kosov, zvežemo središči parcel vseeno samo z enim lokom). Tako dobimo neki graf v ravnini, katerega vozlišča predstavljajo parcele, veja med dvema vozliščema pa pomeni, da ustrezni parceli mejita druga na drugo na enem ali več mestih. Zdaj moramo uporabiti le še izrek 4. in naša trditev je dokazana.

Poizkusimo rešiti naslednjo nalogo (navajamo eno od mnogih inačic). Trije sosedje, Anzelj (a), Blaž (b) in Cene (c), hodijo pogosto v mlin (x), na žago (y) in, seveda, v gostilno (z). Ker so sprti med seboj, se ne želijo srečati. Kako naj si vsak izbere pot do vsakega od treh obratov, da se jim poti ne bodo križale?



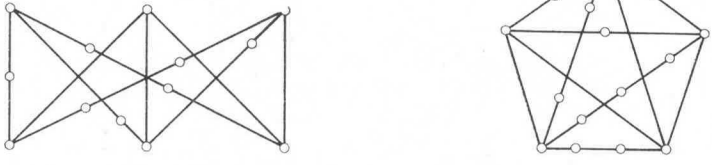
Slika 13

Vprašanje, prevedeno v jezik teorije grafov, se torej glasi: kako vložiti v ravnino graf, narisan na sliki 13. Če bo kdo poizkusil rešiti to nalogo sam, naj se nikar predolgo ne muči z njo, ker je nerešljiva. Graf na sliki 13 —

imenujmo ga $K(3, 3)$ — namreč ni planaren, kot bomo takoj pokazali. Bralec lahko sam brez posebnega truda dokaže, da je ta graf izomorfen tistima na sliki 5.

Pa privzemimo, da eksistira graf v ravnini, izomorfen $K(3, 3)$! Ta graf ima $n = 6$ vozlišč in $m = 9$ vej. Iz Eulerjeve formule (izrek 3.) izračunamo, da te veje ograjajo $p = 4$ omejena polja. Če dodamo še tisto polje, ki se razteza v neskončno, dobimo, da graf v ravnini, ki predstavlja $K(3, 3)$, razreže ravnino na 5 polj. Vsako od teh polj (tudi neomejeno) pa je ograjeno najmanj s štirimi vejami, saj v grafu $K(3, 3)$ sploh ni ciklov, ki bi imeli manj kot 4 veje. Ker je vsaka veja na meji kvečjemu dveh polj, mora biti število vej najmanj dvakrat večje od števila polj. Ta sklep nas je torej pripeljal do protislovne neenačbe $9 = m \geqslant 2(p + 1) = 10$. To protislovje dokazuje, da graf $K(3, 3)$ ni planaren.

Čisto podobno dokažemo, da poln graf s 5 vozlišči (slika 10) — imenujmo ga $K(5)$ — ni planaren. Ta graf ima $m = 10$ vej. Graf v ravnini, ki bi bil izomorfen $K(5)$, bi po Eulerjevi formuli razrezal ravnino na $p + 1 = 7$ polj. Vsako polje bi bilo ograjeno najmanj s tremi vejami, zato bi moralo biti $m \geqslant \frac{3}{2}(p + 1)$. To pa ni res.



Slika 14

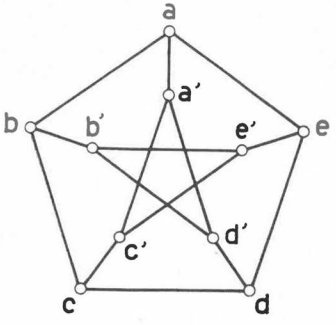
Zdaj lahko takoj dobimo celo družino neplanarnih grafov. Vsak graf, ki nastane iz $K(3, 3)$ ali $K(5)$ tako, da (nazorno govorjeno) razdelimo nekatere veje z dodatnimi vozlišči na manjše dele (glej sliko 14), je seveda še vedno neplanaren. Za tak (in seveda za vsak izomorfen) graf bomo rekli, da je *tipa* $K(3, 3)$ oziroma *tipa* $K(5)$. Ti grafi so karakteristični neplanarni grafi. Velja namreč naslednji izrek:

Izrek 5. (Kuratowski) *V ravnino se dajo vložiti vsi tisti in samo tisti grafi, ki ne vsebujejo nobenega podgrafa tipa* $K(3, 3)$ *ali* $K(5)$.

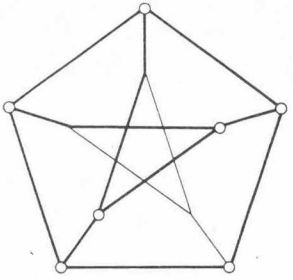
V eno smer je dokaz — po vsem, kar smo že povedali — trivialen. Kajti če se že neki del grafa ne da vložiti v ravnino, se da toliko manj cel graf. Ta del dokaza sloni torej le na izreku 3 in na zgoraj dokazanih trditvah, da sta grafa $K(3, 3)$ in $K(5)$ neplanarna. Vsi ti dokazi so bili pravzaprav zelo enostavni. Mnogo teže pa je dokazati izrek Kuratowskega v obratni smeri, namreč, da v vsakem neplanarnem grafu tiči podgraf, ki je tipa $K(3, 3)$ ali $K(5)$. Tega dokaza ne bomo napravili.

Izrek Kuratowskega podaja popoln kriterij za določevanje, ali je kak graf planaren ali ne, to je, dan je potreben in zadosten pogoj za planarnost grafa. Poleg tega je izrek zelo preprosto formuliran. Vendar s tem še ni rečeno, da ga je v konkretnem primeru zelo lahko uporabiti. V nekaterih primerih res že na prvi pogled opazimo kak podgraf tipa $K(3, 3)$ ali $K(5)$; takoj vidimo npr., da poln graf s 7 vozlišči, ki smo ga prvega navedli kot primer neplanarnega

grafa, vsebuje podgraf, izomorfen $K(5)$ (pa ne enega, ampak $\binom{7}{5} = 21$ takih podgrafov). Pri grafu na sliki 15, ki je znan pod imenom *Petersenov graf*, je pa že malo teže. Precej hitro ugotovimo, da ta graf ni planaren, npr. takole: če bi eksistiral kak izomorfen graf v ravnini, bi lahko na tem grafu zvezno »potisnili« vozlišče a vzdolž veje (a, a') v vozlišče a', podobno b v b' itd. Tako bi dobili graf v ravnini, izomorfen $K(5)$. Vemo pa, da takega grafa v ravnini ni.



Slika 15



Slika 16

Malo teže pa je najti kak podgraf tipa $K(3, 3)$ ali $K(5)$ v Petersenovem grafu. Verjetno bo marsikdo iskal v začetku kak podgraf tipa $K(5)$, in sicer zaradi optične podobnosti Petersenovega grafa s $K(5)$. Toda takega podgrafa ni. $K(5)$ ima namreč v vsakem vozlišču stopnjo 4, v Petersenovem grafu imajo pa vsa vozlišča stopnjo 3. Zato mora eksistirati podgraf tipa $K(3, 3)$ (zaradi simetrije jih je seveda več). Z malo poizkušanja ga res najdemo. Na sliki 16 je z debelejšimi črtami izvlečen tak podgraf. Vidimo, da je celo po obliki čisto podoben desnemu grafu na sliki 5.

Med topološkimi problemi v teoriji grafov je verjetno najbolj znan še vedno nerešeni *problem štirih barv*. Vzemimo poljubno ravninsko polje in ga kakorkoli razparcelirajmo. Pobarvajmo vsako parcelo z neko barvo, vendar tako, da bosta imeli vsaki dve parceli, ki imata kak skupen del meje, različni barvi. Vsaki razdelitvi na parcele priredimo, kot že prej enkrat, neki graf v ravnini: vozlišča grafa pomenijo parcele, veja med dvema vozliščema pa pomeni, da imata ustrezni parceli skupen del meje. Vsako vozlišče v tem grafu bomo torej pobarvali z neko barvo, vendar tako, da bosta vsaki dve sosedni vozlišči različnih barv. Dokazano je, da za to pri vsakem planarnem grafu zadostuje pet različnih barv. Niso pa še našli primera, ko ne bi zadostovale že štiri barve. Problem štirih barv je torej: ali konstruirati tak zemljevid, oziroma planaren graf, ki ga ne bo mogoče pobarvati s štirimi barvami, ali pa dokazati, da v vsakem primeru res zadoščajo štiri barve.

Globlje se v ta problem ne bomo spuščali. Morda se marsikomu zdi nepomemben in nezanimiv. Sam po sebi res ni kdo ve kako pomemben. Vendar ima ogromne zasluge pri razvoju teorije grafov, podobno kot Fermatov problem pri teoriji števil.

V drugem delu članka, ki bo izšel predvidoma v naslednji številki, si bomo ogledali nekaj primerov uporabe teorije grafov. Tam bo objavljen tudi seznam uporabljene literature.

NEGATIVNE ABSOLUTNE TEMPERATURE

JANEZ STEPIŠNIK

Uvod

Termodinamske količine karakterizirajo makroskopsko stanje telesa. Nekatere med njimi imajo popolnoma mehanski smisel. Taki sta energija in prostornina. Druge pa so rezultat statističnih zakonov in nimajo analogije pri nemakroskopskih sistemih: entropija in temperatura. V nadaljnjem nas bo zanimala temperatura in si zato oglejmo njeno definicijo.

Imamo dve telesi, ki sta med seboj v toplotnem ravnovesju. Predstavljata izoliran ravnovesen sistem. Drugi zakon termodinamike pravi, da je entropija izoliranega sistema maksimalna, kadar je sistem v ravnovesju. Entropija našega sistema mora torej imeti maksimalno vrednost. Energija je vsota energij obeh teles $E = E_1 + E_2$ in prav tako je entropija, ki je funkcija energije, vsota entropij obeh delov $S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2)$. Ker je $E = \text{konst}$, je entropija funkcija ene spremenljivke in zato velja naslednje:

$$\frac{dS}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2}\frac{dE_2}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} - \frac{dS_2}{dE_2} = 0$$

Sledi torej $\frac{dS_1}{dE_1} = \frac{dS_2}{dE_2}$. Odvod entropije po energiji je enak za obe telesi. To je mogoče posplošiti na poljubno število delov sistema. Količino T, ki je definirana kot $\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$ (S = entropija sistema, E = energija sistema) pa imenujemo absolutno temperaturo. Velja, da je temperatura enega dela sistema enaka temperaturi drugega dela sitema, če je sistem v toplotnem ravnovesju.

V neuravnovesnem sistemu se vzpostavlja ravnovesje in po drugem zakonu termodinamike mora biti časovni odvod entropije večji od nič $\frac{dS}{dt} > 0$

ali

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} = \frac{dS_1}{dE_1}\frac{dE_1}{dt} + \frac{dS_2}{dE_1}\frac{dE_2}{dt} > 0$$

Ker je celotna energija sistema ves čas enaka, je: $\frac{dE_1}{dt} = -\frac{dE_2}{dt}$ in $\frac{dS}{dt} =$

$$= \left(\frac{dS_1}{dE_1} - \frac{dS_2}{dE_2}\right)\frac{dE_1}{dt} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\frac{dE_1}{dt} > 0.$$

Pri tej definiciji ni nikakršnih omejitev glede predznaka temperature.

V tem članku pa bom obravnaval smiselnost uvedbe negativnih temperatur.

Negativne temperature

Sprva ideja negativnih temperatur med fiziki ni žela razumevanja. Nekateri so menili, da ni mogoče govoriti o negativnih temperaturah, če pa niti absolutna ničla ni dosegljiva. Kasneje je ta ugovor odpadel, ker so fiziki doumeli, da so negativne temperature še bolj »vroče« kot neskončna temperatura. Nastal pa je nov problem: po klasični statistiki je povprečna kinetična energija delcev $\frac{3}{2} NkT$. Torej moramo dati sistemu neskončno mnogo energije, da nam uspe doseči neskončno temperaturo. Ni pa jasno, kako ustvariti še višje temperature, to je negativne temperature. Nasprotovanje je bilo kratkotrajno in koncept je kmalu sprejela večina fizikov.

Problema se moramo lotiti pri osnovah termodinamike in statistični mehaniki. Oglejmo si energijske nivoje sistema delcev. Razmik med nivoji je E_n in verjetnost zasedenosti nivojev je po Boltzmanovi statistiki:

$$P_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{KT}}}{\sum\limits_i e^{-\frac{E}{KT}}}$$

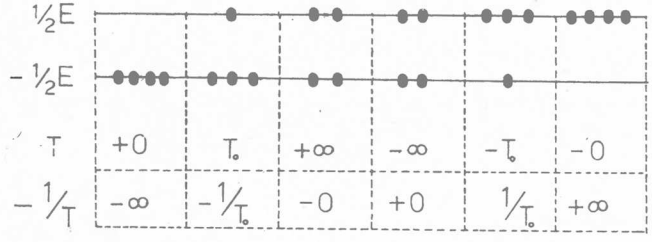
Povprečna energija sistema pa je: $\bar{E} = \sum\limits_i P_i E_i$.

Če zamenjamo pozitivne temperature z negativnimi, vrsta za $\bar{E}$ divergira. Uvedba negativnih temperatur torej ni smiselna za sistem s poljubnim številom energijskih nivojev. Smiselna je le za sistem s končnim številom nivojev, ker ostane srednja energija končna, kljub negativnim temperaturam.

Najenostavnejši je sistem dveh energijskih nivojev z razmakom E. Prvi nivo ima energijo $-\frac{E}{2}$, drugi pa $\frac{E}{2}$. Verjetnost zasedenosti je

$$P_1 = \frac{e^{\frac{E}{2KT}}}{e^{\frac{E}{2KT}} - e^{-\frac{E}{2KT}}}$$

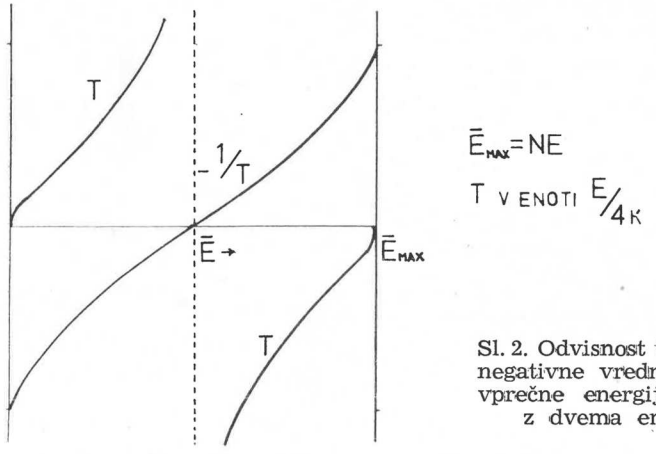
$$P_2 = \frac{e^{-\frac{E}{2KT}}}{e^{\frac{E}{2KT}} - e^{-\frac{E}{2KT}}}$$



Sl. 1. Razporeditev štirih delcev po dveh energijskih nivojih pri različnih temperaturah

Slika 1 prikazuje razporeditev štirih delcev po teh dveh nivojih pri raznih temperaturah.

Vidimo bistveno razliko med zasedenostjo pri absolutni ničli $+0$ in negativni absolutni ničli -0. Medtem ko pa ∞ in $-\infty$ temperaturi ustrezata isti zasedenosti nivojev. Odtod vidimo, da sama definicija temperature ni najboljša. Boljša je definicija, kjer kljub negativnim temperaturam, večji srednji energiji ustreza algebraično večja vrednost temperature. To lepo vidimo s slike 2, kjer je narisana $T = f_1(\bar{E})$, drugič pa $-\frac{1}{T} = f_2(\bar{E})$ za sistem dveh energijskih nivojev.

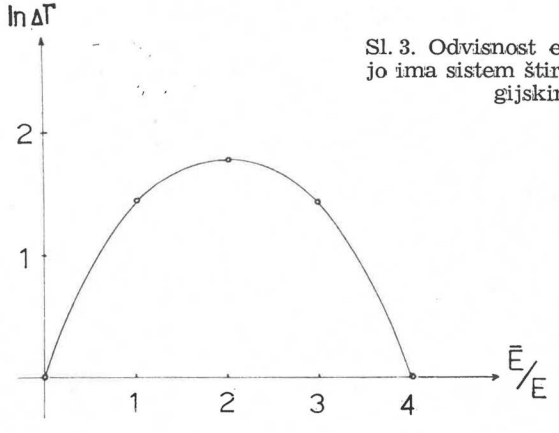


Sl. 2. Odvisnost temperature in recipročne negativne vrednosti temperature od povprečne energije sistema štirih delcev z dvema energijskima nivojema

Doslej smo delali s predpostavko, da negativne temperature obstajajo in smo iskali posledice. Pravilneje pa je, da se lotimo temperature pri njeni definiciji:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V$$

(Odvod entropije po srednji energiji pri konstantni prostornini.)



Sl. 3. Odvisnost entropije od energije, ki jo ima sistem štirih delcev z dvema energijskima nivojema

Entropija pa je definirana: $S = k \ln \Delta\Gamma$, kjer je $\Delta\Gamma$ statistična utež stanja podsistema. Za sistem dveh energijskih nivojev in štirih delcev je $\Delta\Gamma = \frac{4!}{n_1!(4-n_1)!}$ (n_1 = zasedenost prvega nivoja).

Slika 3 prikazuje entropijo kot funkcijo $\frac{\overline{E}}{E}$. Entropija ima največjo vrednost, kadar sta oba nivoja enako zasedena. Tu je odvod po srednji energiji enak 0, kar ustreza neskončni temperaturi. Z naraščanjem temperature pa entropija pada in po definiciji je v tem področju temperatura negativna.

Zanimivo bo, če si ogledamo kako je z drugim zakonom termodinamike v primeru negativnih temperatur. Po tem zakonu lahko izoliran ravnovesen sistem opravi delo $\partial R = -\partial E = -T\partial S$, kjer je ∂E sprememba energije sistema. V ravnovesnem izoliranem sistemu je pa mogoča sprememba entropije $\partial S \geqslant 0$. To pomeni, da toplote ni mogoče pretvoriti v delo, vsaj pri pozitivnih temperaturah ne, obraten proces pa je mogoč. Če pa delamo z negativnimi temperaturami pa vidimo, da je mogoče toploto pretvoriti v delo, dela pa ne v toploto.

Iz tega vidimo, da moramo nekoliko spremeniti Kelvin-Planckovo razlago drugega zakona termodinamike, ki pravi: Nemogoče je izdelati stroj, ki dela v ciklu brez drugih efektov kot da jemlje toploto iz ravnovesnega sistema in jo pretvarja v delo. To formulacijo moramo popraviti tako, da za »ravnovesnim sistemom« dodamo še »pri pozitivnih temperaturah« in pripišemo stavek »oziroma pretvarja delo v toploto in jo daje ravnovesnemu sistemu z negativno temperaturo«.

Zanima pa nas, ali je mogoče najti sistem končnega števila energijskih nivojev. V resnici je končno število nivojev le približek, ker je to le podsistem sistema z neskončnim številom energijskih nivojev. Da pa podsistem ločimo, morajo biti prehodi s podsistema na sistem in obratno prepovedani ali vsaj malo verjetni.

Toda to ni dovolj. O temperaturi lahko govorimo le, če imamo ravnovesen sistem. Vse merljive količine morajo biti časovno neodvisne (če zanemarimo fluktuacije). Oglejmo si nekaj primerov.

Sistem delcev z magnetnim spinom $\frac{1}{2}$ v magnetnem polju popišemo z

$$\psi(t) = a(t)\, e^{\frac{iEt}{2\hbar}} + b(t)\, e^{-\frac{iEt}{2\hbar}}$$

Verjetnost, da je delec v stanju 1 je $\overline{a(t)\, a^*(t)}$, kjer pomeni črtica povprečje po ensamblu. Merljive količine so tri pričakovane vrednosti spina $\overline{I}_z$, $\overline{I}_x$ in $\overline{I}_y$. Na običajen način poiščemo z gornje enačbe s pomočjo Paulijevih spinskih operatorjev:

$$I_z = \tfrac{1}{2}\left[\overline{a(t)\, a^*(t)} - \overline{b(t)\, b^*(t)}\right]$$

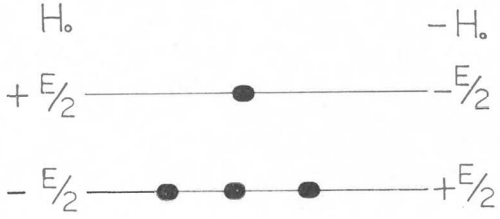
$$I_x = \tfrac{1}{2}\left[\overline{a(t)\, b^*(t)}\, e^{i\frac{Et}{\hbar}} + \overline{a^*(t)\, b(t)}\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\right]$$

$$I_y = \tfrac{1}{2}\, i\left[\overline{a(t)\, b^*(t)}\, e^{i\frac{Et}{\hbar}} + \overline{a^*(t)\, b(t)}\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\right]$$

$\overline{I_z}$ je časovno neodvisna, medtem ko pa $\overline{I_x}$ in $\overline{I_y}$ nista. Da pa je sistem v termodinamskem ravnovesju, morata biti tudi ti dve časovno neodvisne, zato mora biti $\overline{a(t)\, b^*(t)}$ enaka 0.

V kristalih je dipolna interakcija med jedrskimi spini zelo velika glede na interakcijo jeder s kristalno mrežo. Zato se v sistemu spinov zelo hitro vzpostavi ravnovesje in so relaksacijski časi za $\overline{I_x}$ in $\overline{I_y} \to 0$ reda velikosti nekaj mikro sekund. $\overline{I_z}$ zaradi interakcije z mrežo, relaksira proti ravnovesni vrednosti $\overline{I_{z0}}$ v minuti ali v uri. Zato lahko govorimo o ravnovesnem podsistemu spinov z določeno temperaturo, če pri tem mislimo na kratke časovne intervale v primeru s časom relaksacije zaradi interakcije spinov s kristalno mrežo.

Negativno temperaturo lahko dosežemo na naslednje načine: prva možnost je, da pri sistemu delcev s spinom S naenkrat spremenimo smer magnetnega polja, tako da preidemo iz zasedenosti, ki ustreza termičnemu ravnovesju pri sobni temperaturi 300° K (gl. sliko 4), v stanje z negativno absolutno temperaturo.



Sl. 4. Ravnovesnemu sistemu štirih delcev z magnetnim spinom ½, ki so v magnetnem polju H, v trenutku zamenjamo smer magnetnega polja. Delci, ki so prej imeli večjo energijo, imajo sedaj manjšo, zato ima novi sistem negativno temperaturo

Drugi način pa je, da z elektromagnetnim valovanjem s frekvenco $w = \frac{E}{\hbar}$, kjer je E razmak med nivojema, dosežemo enako zasedenost na obeh nivojih. To pa ustreza neskončni temperaturi. Lahko pa tudi preidemo iz $+\vartheta$ temperature v $-\vartheta$ temperaturo s pulzom elektromagnetnega valovanja, ki traja le toliko časa, da se magnetizacija, ki prvotno kaže v smeri zunanjega magnetnega polja, zavrti za 180° in torej po koncu pulza kaže v smer, ki je nasprotna smeri zunanjega magnetnega polja.

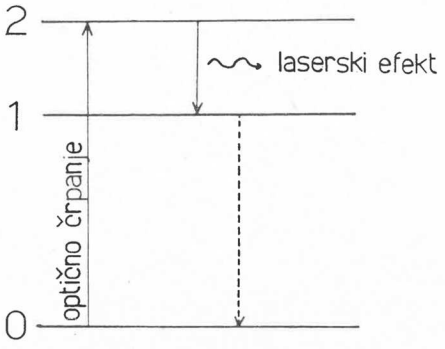
Upravičenost pojma negativnih temperatur lepo prikaže naslednji eksperiment. Zaradi sklopitve z mrežo je relaksacija M_z proti ravnovesni vrednosti M_0 opisana z izrazom:

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{M_0 - M_2}{T_1}$$

Če je v začetnem stanju $M_z = -M_0$, kar ustreza negativni temperaturi, je čas, ki je potreben, da dosežemo $M_z = 0$ istega velikostnega reda kot čas celotne relaksacije do M_0. Ta eksperiment so napravili z elektronskimi spini pri nizki temperaturi, ko je specifična toplota kristalne mreže zelo majhna v primerjavi s specifično toploto sistema elektronskih spinov. Sistem spinov so z elektromagnetnim valovanjem nasitili, to je: dosegli enako zasedenost obeh energijskih nivojev, torej neskončno temperaturo. Zaradi majhne specifične toplote kristalne mreže se je sistem spinov zelo počasi ohlajal, ker je tudi temperatura mreže praktično neskončna. Pri drugem eksperimentu so s 180°-skim impulzom

zamenjali zasedbo nivojev in dobili sistem z negativno temperaturo. Sedaj se je sistem dosti hitreje ohlajal, ker je »neskončna« temperatura kristalne mreže »nižja« kot negativna temperatura sistema spinov.

Delovanje laserja kot tudi maserja je osnovano na prehodih med energijskimi nivoji z invertirano zasedbo (ki ustreza negativni temperaturi), čeprav so nekateri detajli delovanja laserja in maserja različni. Slika 5 prikazuje energijske nivoje in osnovo laserskega efekta.



Sl. 5. Princip laserskega efekta

O optičnim črpanjem ioni ali atomi prehajajo iz stanja 0 v stanje 2. Tako dosežemo večjo zasedenost nivoja 2 v primeri z nivojem 1, ali po naše: temperatura sistema atomov, ki so v prvem in drugem vzbujenem stanju, je negativna. Elektromagnetno valovanje frekvence $\nu = (E_2 - E_1)/h$ se bo sedaj pri prehodu skozi sredstvo z negativno temperaturo ojačevalo: ker je verjetnost za prehod $1 \rightarrow 2$ enaka verjetnosti $2 \rightarrow 1$, število atomov pa je večje na nivoju 2 kot na nivoju 1, bo število atomskih prehodov $2 \rightarrow 1$ (ki jih spremlja inducirana emisija fotonov, koherentnih z vpadajočim valovanjem) večje kot število prehodov $1 \rightarrow 2$, ki jih spremlja absorbcija fotonov. Verjetnost spontanega prehoda z nivoja 1 v osnovni nivo mora biti dovolj velika (verjetnost prehoda je sorazmerna energijski razliki $w \sim \Delta E$), da lahko z optičnim črpanjem vzdržujemo stanje z negativno temperaturo.

Literatura

1. J. G. Powles, Contemparary Physics (June 1963), 4, 5, 338.
2. L. Landau, E. Lifšic, Statističeskaja mehanika (1964).
3. A. Abragam, The Principles of Nuclear Magnetism (1961).
4. Prokhorov, Obzornik za matematiko in fiziko (1967), št. 1.

ŠOLA

KONSTRUKCIJA POSREDNE FUNKCIJE

Če je odvisna spremenljivka y funkcija pomožne spremenljivke u:

$$y = f(u)$$

in če je nadalje pomožna spremenljivka u funkcija neodvisne spremenljivke x:

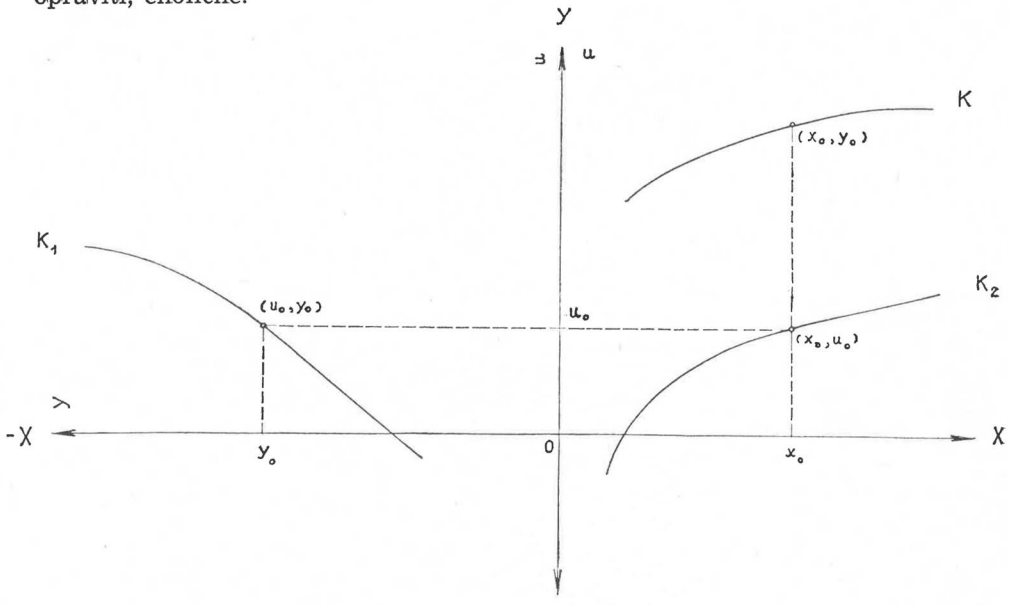
$$u = g(x),$$

tedaj je odvisna spremenljivka y posredno prek pomožne spremenljivke u tudi funkcija neodvisne spremenljivke x:

$$y = f(g(x)) = F(x).$$

Tako funkcijo imenujemo funkcijo od funkcije ali posredno funkcijo.

V nadaljnjem predpostavljamo, da so vse funkcije, s katerimi imamo opraviti, enolične.



Slika 1

Znano je, da uporabljamo posredne funkcije zlasti pri odvajanju kakih bolj kompliciranih funkcij; pri tem uporabljamo izrek o odvajanju posredne funkcije oziroma izrek o tranzitivnem odvajanju.

Manj znano pa je, da lahko posredne funkcije tudi lahko uporabimo pri konstrukciji krivulj, ki ponazarjajo kake bolj komplicirane funkcije.

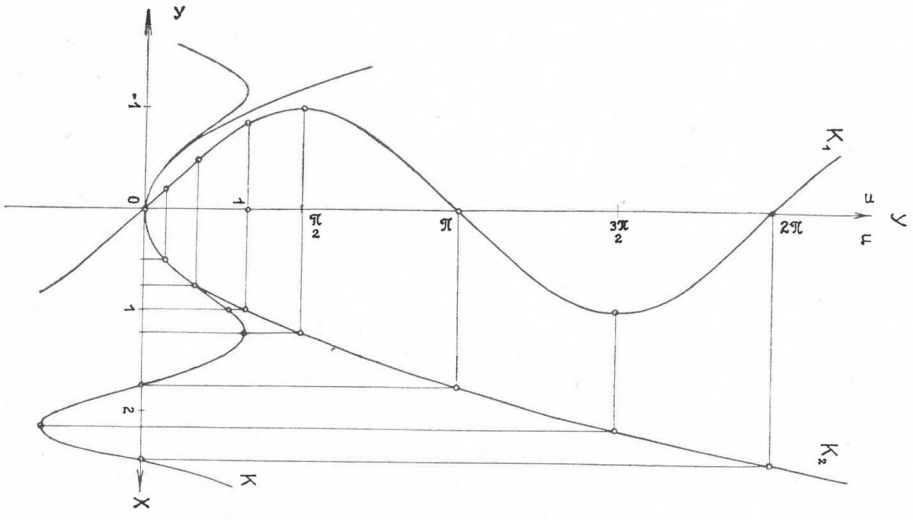
Vzemimo kako nekoliko bolj komplicirano funkcijo:

$$y = F(x),$$

ki jo lahko izrazimo kot posredno funkcijo z dvema bolj enostavnima funkcijama:

$$y = f(u), \qquad u = g(x).$$

Krivuljo K, ki ponazarja funkcijo $y = F(x)$, konstruiramo lahko izhajajoč od krivulj K_1 in K_2, ki ponazarjata funkciji $y = f(x)$ in $u = g(x)$. Konstrukcijo izvedemo takole (sl. 1):



Slika 2

Vzamemo kartezični koordinatni sistem xOy. V prvem kvadrantu koordinatnega sistema konstruiramo krivuljo K_2, ki ponazarja funkcijo $u = g(x)$; pri tem nanašamo spremenljivko u na ordinatno os, kakor se to vidi na sliki. Krivuljo K_2 konstruiramo torej v koordinatnem sistemu xOu. V drugem kvadrantu koordinatnega sistema konstruiramo krivuljo K_1, ki ponazarja funkcijo $y = f(u)$; pri tem nanašamo spremenljivko u na ordinatno os, spremenljivko y pa na abscisno os, toda v nasprotni smeri. Po teh konstrukcijah lahko konstruiramo krivuljo K, ki ponazarja funkcijo $y = F(x)$ v prvotnem koordinatnem sistemu xOy. Poljubno točko krivulje K konstruiramo takole (sl. 2):

Na abscisni osi prvotnega koordinatnega sistema xOy izberemo poljubno točko x_0, v tej točki potegnemo pravokotnico na abscisno os, ta seka krivuljo K_2 v točki (x_0, u_0); iz te točke potegnemo pravokotnico na ordinatno os in dobimo tako na njej točko u_0, na krivulji K_1 pa točko (u_0, y_0): razdaljo teh dveh točk u_0 in (u_0, y_0) nanesemo v prvotni točki x_0 pravokotno na prvotno abscisno os in dobimo tako točko (x_0, y_0) krivulje K. S ponavljanjem tega postopka dobimo lahko poljubno mnogo točk iskane krivulje K.

Primer: Na zgornji sliki je na ta način konstruirana krivulja, ki ponazarja funkcijo:

$$y = \sin x^2,$$

ki je kot posredna funkcija izražena takole: $y = \sin u, \qquad u = x^2$.

A. Vadnal

IZREK O VRTILNI KOLIČINI

Mnoge naloge iz mehanike po navadi najhitreje rešimo z uporabo izreka o kinetični energiji.* Široka uporabnost tega izreka pa nas včasih zapelje, da ga poskusimo uporabiti tam, kjer ga ne bi smeli. Kot zgled, pri katerem ne smemo uporabiti izreka o kinetični energiji, naj služi ena izmed vaj fizikalnega praktikuma na katedri za fiziko. Besedilo vaje *Izrek o vrtilni količini* je navedeno skoraj v celoti.

Dve kovinski kolesi sta vrtljivi okrog svojih geometrijskih osi. Zavrtimo prvo kolo in pritisnimo obod drugega, sprva mirujočega kolesa, ob obod prvega (sl. 1)! Čez nekaj časa se bosta obe kolesi vrteli z enako obodno hitrostjo. Kolikšna je ta hitrost? Kolesi smemo obravnavati kot togi. Trenje v ležajih zanemarimo.

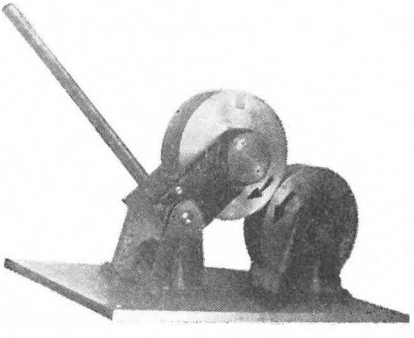
Na prvi mah bi poskusili uporabiti izrek o kinetični energiji, češ da se kinetična energija ohrani. Vendar kratek premislek pove, da izrek v tem primeru ne velja. Prvotno mirujoče kolo se začne vrteti zaradi trenja med obodoma koles. Preden se zavrti s polno hitrostjo, pa drsita oboda drug ob drugem, pri čemer se nekaj kinetične energije pretvori v toploto.

Na pomoč moramo poklicati izrek o vrtilni količini, ki vedno velja. Označimo z J_1 in z J_2 vztrajnostna momenta koles okrog njunih geometrijskih osi! Prvo kolo naj se v začetku vrti s kotno hitrostjo ω_1, ki jo štejemo pozitivno, medtem ko drugo kolo miruje ($\omega_2 = 0$). Označimo z ω_1' končno kotno hitrost prvega kolesa! Potem je zaradi enake obodne hitrosti končna kotna hitrost drugega kolesa $\omega_2' = -\omega_1' (r_1/r_2)$. Pri tem sta r_1 in r_2 radija prvega in drugega kolesa. Ko pritisnemo kolesi drugo ob drugo, začne delovati prvo kolo na drugo s silo **F**, drugo pa na prvo s silo **—F**.

Obravnavajmo najprej prvo kolo! Izrek o vrtilni količini pove, da je sprememba vrtilne količine, računane okrog osi prvega kolesa, enaka skupnemu sunku zunanjih navorov glede na to os. Torej velja:

$$J_1 \omega'_1 - J_1 \omega_1 = -\int_0^{\infty} r_1 F_t \, dt ,$$

kjer smo z $-F_t$ zaznamovali tangentno komponento sile **—F**, s katero deluje drugo kolo na prvo. Ker ta sunek navora zavira vrtenje prvega kolesa, je negativen.



* I. Kuščer in A. Moljk: Fizika. DZS (Ljubljana), 1960, I. del, § 10.

Sedaj izračunajmo še spremembo vrtilne količine drugega kolesa glede na njegovo os! Z izrekom o vrtilni količini dobimo podobno kot prej:

$$J_2 \omega'_2 = -\int_0^{\infty} r_2 F_t \, dt .$$

Delimo prvo enačbo z r_1 in drugo z r_2! Odštejmo drugo od prve in upoštevajmo, da je $r_1 \omega'_1 = -r_2 \omega'_2$, pa dobimo:

$$\omega'_1 = \omega_1/(1 + r_1^2 J_2/r_2^2 J_1).$$

Izračunaj za vajo še razmerje med skupno kinetično energijo po poskusu in pred njim! Rezultat je $W'_k/W_k = (1 + r_2^2 J_2/r_1^2 J_1)/(1 + r_1^2 J_1/r_2^2 J_2)^2$.

Vidimo, da se pretvori ravno pol začetne kinetične energije v toploto, če sta obe kolesi enaki.

Naloga: Izmeri in izračunaj končno kotno hitrost prvega kolesa ter primerjaj obe vrednosti!

Potrebščine: železni kolesi, stoparica.

Navodilo: Z roko poženi kolo z nepremično osjo in določi začetno kotno hitrost ω_1 tako, da izmeriš čas petih obratov! Nalahno pritisni drugo kolo ob prvo in počakaj, da se obodni hitrosti koles izenačita! Nato odmakni drugo kolo in izmeri končno kotno hitrost ω_1' prvega kolesa! Meritev ponovi vsaj trikrat! Ker je trenje v ležajih precejšnje, posebno ko se kolesi tiščita, delaj in meri hitro! Zato napravi ves poskus nekajkrat le za vajo, preden se lotiš meritev!

S. Pahor

VODIKOV ATOM — KLASIČNO

Skoraj v vsakem učbeniku moderne fizike naletimo na obširen kvantnomehanski opis vodikovega atoma.[1] Bralci že vedo, da je za opis atoma uporabna edino kvantna mehanika, zato je samo omenjeno, da klasično ne dobimo pravih rezultatov. Drugače je, če je treba bralca šele prepričati, da klasična fizika ni uporabna za opis atomov. V tem primeru se splača napraviti klasični račun za atom vodika do konca in pokazati, da se dobljeni rezultati ne ujemajo z eksperimentalnimi. Klasičnega računa v učbenikih ni, zato ga napravimo na tem mestu.*

Vzamemo, da proton miruje in da kroži elektron okoli njega. Električna privlačna sila, s katero deluje proton na elektron, je centripetalna sila: $e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = mv^2/r$. Notranja energija atoma je kar skupna energija elektrona, ki jo sestavljata kinetična in potencialna energija:

$$W = \tfrac{1}{2} mv^2 - e_0^2/4\pi\varepsilon_0 r = -e_0^2/8\pi\varepsilon_0 r. \qquad (1)$$

m je masa elektrona, v njegova hitrost in r radij kroga, po katerem se giblje.

Kroženje elektrona lahko sestavimo iz dveh med seboj pravokotnih in za $\frac{1}{2}\pi$ fazno premaknjenih nihanj z enakima amplitudama in enakima frekvencama. Vsak nihajoč električni naboj seva kot majhna dipolna antena.[2] Zato lahko sestavimo elektromagnetno polje okoli krožečega naboja iz elektromagnetnih polj obeh nihajočih dipolov. Polje krožečega naboja se v podrobnostih razlikuje od polja enega nihajočega dipola, a energijski tok, to je v časovni

* To je dopolnilo prispevka Vodikov atom, Obz. mat. fiz. **12**, 88 (1965), v katerem je naveden kvantni opis.

enoti izsevana energija, krožečega naboja je kar enak vsoti energijskih tokov obeh nihajočih dipolov:

$$P = -dW/dt = 8\,\pi^3\,e_0^2\,\nu^4\,r^2/3\,\varepsilon_0\,c^3, \quad (\text{za } r \gg c/\nu). \tag{2}$$

Frekvenca sevanja se ujema s frekvenco elektrona

$$\nu = v/2\,\pi\,r = e_0\,(16\,\pi^3\,\varepsilon_0\,m r^3)^{-1/2} \tag{3}$$

Izrazimo frekvenco v enačbi (2) prek enačbe (3) z radijem r in tega po enačbi (1) z energijo W:

$$-dW/dt = (128\,\pi\,\varepsilon_0/3\,c^3\,m^2\,e_0^2)\,W^4.$$

Rešitev te preproste diferencialne enačbe je

$$W = W_0\,(1 - t/t_0)^{-1/3},$$

pri čemer pomeni $t_0 = -c^3\,e_0^2\,m^2/128\,\pi\,\varepsilon_0\,W_0^3 = 4\,c^3\,\pi^2\,\varepsilon_0^2\,m^2\,r_0^3/e_0^4$.

Za frekvenco dobimo

$$\nu = \nu_0\,(1 - t/t_0)^{-1/2},$$

tir elektrona pa opišeta enačbi**

$$r = r_0\,(1 - t/t_0)^{1/2}, \quad \varphi = 2\,\pi \int_0^t \nu\,dt = 4\,\pi\,r_0\,t_0\,(1 - (1 - t/t_0)^{1/2}).$$

$W_0 = -e_0^2/8\,\pi\,\varepsilon_0\,r_0$ je energija, $\nu_0 = e_0\,(16\,\pi^3\,\varepsilon_0\,m r_0^3)^{-1/2}$ frekvenca in r_0 radij v trenutku $t = 0$. Če postavimo $r_0 = 1$ Å, dobimo $t_0 = 1{,}1.10^{-10}$ s, $\nu_0 = 2{,}5.10^{15}\ s^{-1}$, čemur ustreza valovna dolžina 1200 Å, in $W_0 = -7{,}1$ eV. Elektron se po spirali bliža jedru in po času t_0 pade vanj. Energija atoma se zmanjšuje brez meje in frekvenca narašča brez meje. Izsevana svetloba ima zvezen spekter ($dP/d\nu_0 \propto \nu^3$), ki se začenja pri ν_0 in ni omejen proti visokim frekvencam. Atom bi moral imeti znatno večji radij kot 1 Å, da bi seval vidno svetlobo. V splošnem dva atoma ne bi imela enakih radijev in ne bi sevala svetlobe z enako frekvenco.

Nasprotje med izračunanimi rezultati in eksperimentalnimi dejstvi ne bi moglo biti večje. V resnici so atomi stabilni. Atomi ene vrste so v osnovnem stanju enaki in imajo enako notranjo energijo. Atomi ene vrste sevajo svetlobo izbranih frekvenc, ko jih vzbudimo v stanja z dovolj visoko energijo. Iz tega sledi, da s klasično fiziko ne moremo opisovati atomov. Zato je treba poseči po kvantni mehaniki.

LITERATURA

[1] R. L. Sproull: Modern Physics. New York (S. Wiley & Sons), 1963.

[2] Npr. I. Supek: Teorijska fizika. Zagreb (Školska knjiga) 1951, s. 293.

** Račun je veljaven, dokler je centripetalni pospešek $a_r = (2\,\pi\,\nu)^2\,r$ dosti večji od velikosti Coriolisovega pospeška $a_c = 2\,.\,2\,\pi\,\nu\,|\,dr/dt\,|$. Razmerje $a_r/a_c = 3\,\pi\,\nu_0\,t_0\,(1 - t/t_0)^{1/2}$, npr. za $r_0 = 1$ Å je $a_r/a_c = 2{,}6\,.\,10^6\,(1 - t/t_0)^{1/2}$, je zares zelo veliko, razen tedaj, ko se čas bliža t_0. Vendar to ne moti, saj o podrobnostih trka med elektronom in protonom ne moremo reči ničesar.

J. Strnad

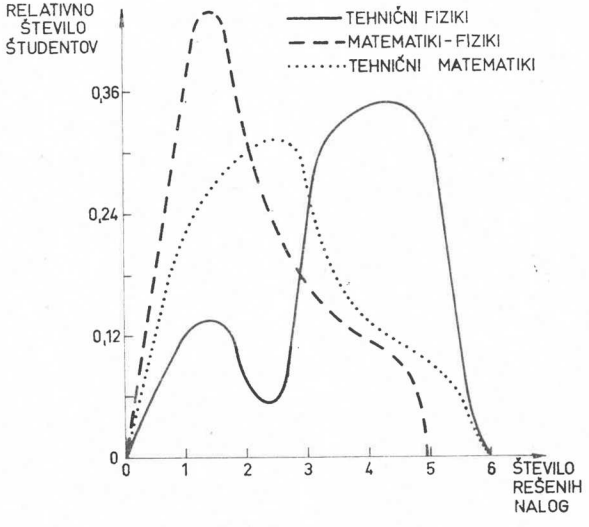
NOVINCI NA MATEMATIČNO-FIZIKALNEM ODDELKU 1967/68

V šolskem letu 1967/68 se je vpisalo na matematično fizikalni oddelek 107 novincev; od teh na tehnično fiziko 37, na tehnično matematiko 32 in na pedagoško predmetno skupino matematika in fizika 38. K temu je treba prišteti še 42 ponavljalcev, od teh 17 na tehnični fiziki, 11 na tehnični matematiki in 14 na pedagoški predmetni skupini. Letos prvič so psihologi ugotavljali zmožnosti novincev za visokošolski študij. Na rezultate tega preskusa bo treba še nekaj časa počakati. Kot je že v navadi, pa smo tudi letos preskusili znanje fizike med novinci. Toda tega nismo storili z nalogami, kakršne so morali reševati v zadnjih letih srednje šole. V nasprotju s prakso preteklih let smo hoteli letos izvedeti nekaj o spodnji meji znanja. Zato so bile naloge izredno preproste in so delno sodile v osnovno šolo. Zaradi velikega števila smo morali študente razdeliti na dve skupini. Ponavljalci niso pisali.

V naslednjem je navedeno besedilo nalog in v oklepaju relativno število pravilnih odgovorov.

Fiziki (37 izdelkov)

1. Nariši vse zunanje sile na Zemljo, ki enakomerno kroži okoli Sonca! (5 %)
2. Zmešamo 1 kg vode s temperaturo 0° C in 2 kg vode s temperaturo 100° C. Kolikšna je končna temperatura, če ne gre nič toplote v izgubo? (76 %)
3. Skozi peč za 220 V teče tok 1 A. Toplotni tok, ki ga oddaja peč, je 180 W. Kolikšen je izkoristek? (81 %)
4. Valovna dolžina zelene svetlobe je 5500 Å. Kolikšna je frekvenca? (60 %)
5. Navedi enoto za kapaciteto! (87 %)
6. Koliko je 2 % od 2 %? (70 %)



Porazdelitev študentov po številu pravilno rešenih nalog.
Na abscisno os je naneseno število rešenih nalog, na ordinatno os pa relativno število študentov
Študente smo razdelili na razrede po rešenih nalogah: 0 do 1, 1 do 2, 2 do 3, 3 do 4, 4 do 5, 5 do 6 rešenih nalog
Porazdelitve so v resnici diskretne, a so le zaradi preglednosti narisane zvezno

Matematiki (tehnični matematiki 35 izdelkov, matematiki-fiziki 30 izdelkov)

1. Nariši vse zunanje sile na mirujočo kilogramsko utež, ki visi na vrvici! (tehnični matematiki 56 %, matematiki-fiziki 40 %)
2. Kolikšen je prostorninski koeficient temperaturnega raztezka za idealni plin pri 0° C in pri 100° C? (16 %, 12 %)
3. Žarnica za 50 W gori 4 ure. Koliko plačamo za porabljeno energijo, če je kilovatura po 20 S din? (80 %, 67 %)
4. V kolikšni razdalji od tanke plankonveksne leče je drugo gorišče, če je razdalja prvega gorišča znana? Nariši! (44 %, 52 %)
5. Navedi enoto za svetlobni tok! (20 %, 27 %)
6. Izračunaj $\log 4$, če veš, da je $\log 2 = 0{,}30$! (83 %, 63 %)

Tehnični fizik je pravilno rešil v povprečju 63 % vseh nalog, tehnični matematik 50 % in matematik-fizik 43 % vseh nalog.

Rezultati so vsekakor takšni, da se je treba zaradi njih zamisliti. Zares je med novinci nekaj takih, da, sodeč po srednješolskih ocenah, zelo verjetno ne bodo zmogli študija matematike in fizike. Ti novinci najbrž še precej znižujejo uspeh. Toda tudi, če upoštevamo to okolnost, je uspeh slab. Kdo bo pripomnil, da okoli 50 % pravilno rešenih nalog morda le ni tako slabo. Vendar gre pri nalogah skoraj brez izjeme za take, da bi jih morali vsi študenti brezpogojno znati. Najbrž smemo tedaj sklepati, da imajo novinci malo temeljitega osnovnega znanja, na katerem bi lahko gradili. Na žalost morajo začeti popolnoma nanovo. Tako je stanje glede osnovnega znanja fizike za novince na matematično fizikalnem oddelku. Verjetno je na drugih oddelkih, na katerih fizika ni med glavnimi predmeti, slabše. Ali ne bi kazalo o tem razpravljati v Društvu matematikov, fizikov in astronomov ali kje drugje in premisliti, kako bi lahko to izboljšali.

J. Strnad, M. Hribar, A. Kodre

DOMAČE VESTI

S SEJE ODBORA DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV

Na seji dne 15. 9. 1967 je sprejel odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov nekaj važnih sklepov. Prav je, da se s temi sklepi seznanijo vsi člani društva.

Društvo bo odslej vsako leto po tekmovanju v matematiki in v reševanju fizikalnih nalog izkazalo priznanje zaslužnim profesorjem matematike in fizike na srednjih šolah. Priznanja so namenjena profesorjem, ki bodo z delom v šoli in izven nje najbolj razširili zanimanje za svoj predmet med dijaki in ki bodo posredovali dijakom najcelovitejše znanje. Kot glavno merilo bo pri tem služilo število dijakov na tekmovanjih in njihov uspeh, upoštevali pa se bodo tudi drugi podatki, ki jih bodo posamezni člani, ravnateljstva in aktivi šol posredovali odboru društva. Število profesorjev, ki bodo deležni priznanja, in višina nagrade se bosta ravnali po vsakokratnih okoliščinah. Letošnja priznanja bodo izjemoma podeljena pozneje, na občnem zboru društva. Odbor društva je izmed svojih članov imenoval komisijo, ki bo pregledala predloge in odločila o kandidatih. Pozneje pa je predvideno, da bi v delu komisije sodelovali profesorji, ki so dobili priznanja preteklo leto.

Odbor društva priporoča profesorjem na srednjih šolah, da v čim večjem številu organizirajo krožke iz matematike in fizike ter po možnosti priredijo tekmovanje dijakov na šoli. Društvo bo skušalo pomagati z občasnimi predavanji in z izdajo zbirk nalog, ki služijo kot priprava za tekmovanje. Če ima kateri izmed članov morda lastno zbirko nalog, ga vabimo k sodelovanju pri zbirkah.

Odbor društva bo v prihodnje poskušal po svoji moči posredovati pri podeljevanju štipendij za študente, ki se vpišejo na matematično-fizikalni oddelek fakultete za naravoslovje in tehnologijo. S tem se nadejamo povečati število boljših dijakov, ki se bodo vpisali na ta oddelek, posebno na smer matematika in fizika. (Ta smer se po dveh letih študija razdeli na smeri matematika s fiziko in fizika z matematiko.)

Člani društva, ki imajo kakršne koli pripombe ali predloge ali žele kako pojasnilo, naj pišejo na naslov: DMFA, Ljubljana, p. p. 227.

J. S., C. V.

DIPLOME IZ MATEMATIKE IN ASTRONOMIJE NA UNIVERZI V LJUBLJANI

Obzornik za matematiko in fiziko že objavlja imena diplomiranih ing. fizike z naslovi diplomskih del ter fizikov pedagoške smeri. Danes pa bomo objavili tudi imena matematikov in astronomov, ki so diplomirali na ljubljanski univerzi. Pri tehničnih matematikih in astronomih so navedeni tudi naslovi diplomskega dela. Naša revija bo odslej ta seznam občasno dopolnjevala.

Matematika — pedagoška smer

1.	Vakselj Anton	1922	6.	Breskvar Silvester	1926
2.	Bergant Jakob	1923	7.	Ribarič Mihael	1926
3.	Sodnik Rudolf	1925	8.	Žabkar Albin	1926
4.	Rupnik Boris	1925	9.	Čudovan Lojze	1927
5.	Čemažar Franc	1925	10.	Sivec Lojze	1927

11. Molinaro Ivan 1928
12. Branc Janko 1928
13. Mlakar Emilija por. Branc 1928
14. Kocjan Andrej 1928
15. Ziegler Milan 1928
16. Ahlin France 1929
17. Sajovic Oton 1929
18. Bitenc Mirko 1929
19. Štancer Franc 1930
20. Sterniša Vladimir 1930
21. Jelenc Slava 1930
22. Peterlin Anton 1930
23. Kozina Elizabeta 1930
24. Pilgram Vladimir 1931
25. Gabrovšek Ludvik 1932
26. Podgornik Ljudmila por. Cek 1932
27. Šegula Alojz 1932
28. Dobovšek Marjan 1932
29. Mačak Marija por. Pilgram 1933
30. Bezjak Franc 1933
31. Kovačič Edvin 1933
32. Žorga Friderik 1934
33. Bernik Alojz 1934
34. Fajdiga Olga 1934
35. Tonin Franc 1934
36. Vadnal Alojz 1934
37. Povšič Josip 1934
38. Ipavec Viljem 1934
39. Štalec Ivan 1934
40. Jenko Milica por. Potisek 1935
41. Autrata Zorko 1935
42. Ažbe Marjan 1935
43. Perpar Gabrijel 1935
44. Šušteršič Franc 1935
45. Gerbec Alojz 1936
46. Planinšek Viktor 1936
47. Čadež Marijan 1936
48. Jeglič Stanko 1937
49. Strašek Jožica 1937
50. Bernik Bogomila por. Kolenko 1938
51. Moljk Anton 1938
52. Ulčar Jože 1938
53. Šuklje Ana 1938
54. Kunc Milena por. Jenko 1938
55. Malnarič Ivan 1938
56. Kastelic Vera por. Košmerlj 1938
57. Dolgan Marija 1938
58. Zorec Darinka por. Pucelj 1938
59. Černetič Silvester 1938
60. Sedej Anton 1939
61. Dolenc Marija 1939
62. Burger Ivan 1939
63. Sladič Viljem 1939
64. Križnar Nikolaj 1939
65. Tušek Alojzij 1939
66. Nadižar Anton 1940
67. Lemut Janez 1940
68. Jakulin Marjan 1940
69. Kučan Ernest 1940
70. Benkovič Niko 1940
71. Žmavc Stana 1940
72. Leskovic Leopoldina 1940
73. Blejec Marjan 1941
74. Vidav Ivan 1941
75. Lešnik Franc 1941
76. Kuščer Ivan 1941
77. Kambič Janez 1941
78. Torkar Rado 1941
79. Vrtačnik Jožica 1942
80. Kastelic Marijan 1942
81. Švikaršič Marija 1942
82. Vovk Vinko 1943
83. Skrbinšek Marijan 1943
84. Baša Zdenka 1944
85. Kvaternik Franc 1944
86. Vrhovec Stanko 1946
87. Prijatelj Nikolaj 1946
88. Prijatelj-Lavrič Ivanka 1946
89. Laharnar Ljubomira por. Javornik 1946
90. Bajželj Stane 1947
91. Brecelj Ivan 1947
92. Telavetz Franica 1949
93. Rauter Aleksander 1950
94. Habe Ivanka 1950
95. Frantar Pavla 1950
96. Dobovišek Bibijana 1950
97. Križanič Franc 1950
98. Jamnik Rajko 1950
99. Grasselli Josip 1951
100. Samobor Sonja por. Plevnik 1953
101. Logar Ivana 1953
102. Kac Milan 1953
103. Šilc Nikolaja 1953
104. Logar Tatjana 1953
105. Skubic Tomislav 1953
106. Brumen Nikica 1953
107. Kuster Vladimir 1953
108. Avsec Franc 1953
109. Šoster Hilda 1953
110. Petelin Magdalena 1953
111. Rebec Sonja por. Križanič 1953
112. Zurlini Nedeljka 1953
113. Pucelj Ivan 1954
114. Brišnik Nada 1954
115. Pičman Lovro 1954
116. Perne Franc 1954
117. Šifrer Franc 1954
118. Šolar Magdalena 1954
119. Koman Martina 1954
120. Stefitz Jožefa 1954
121. Cvetko Štefan 1954
122. Stojan Ivana 1955
123. Galič Franc 1955
124. Seliškar Iva 1955
125. Lužer Ingeborg 1955
126. Urek Marija 1955
127. Mlakar Jože 1955
128. Krušič Bogdan 1955
129. Kovačič Srečko 1955
130. Krajnik Janez 1955
131. Vagaja Marijan 1955

132.	Andrejčič Radovan	1956
133.	Rupnik Viljem	1956
134.	Garbajs Janez	1956
135.	Ranzinger Pavla	1956
136.	Čanžek Ludvik	1956
137.	Modic Dušan	1956
138.	Žnidaršič Karel	1956
139.	Destovnik Miroslav	1956
140.	Karčnik Jože	1956
141.	Močilnik Štefan	1956
142.	Lep Jože	1956
143.	Leben Franc	1957
144.	Munda Marija	1957
145.	Ušan Janez	1957
146.	Suhadolc Anton	1957
147.	Bohte Zvonimir	1957
148.	Gomilšček Zora	1957
149.	Grad Janez	1958
150.	Hočevar Franc	1958
151.	Marinček Franc	1958
152.	Lavrenčič Agna	1958
153.	Urankar Egidija	1958
154.	Cokan Aleksander	1959
155.	Vevar Daniel	1959
156.	Velkovrh Ciril	1959
157.	Poljanec Marjeta	1959
158.	Kernc Dušan	1959
159.	Prelog Peter	1959
160.	Kapš Ivan	1960
161.	Krajnik Marija	1960
162.	Mlakar Kristina	1960
163.	Tomšič Gabrijel	1960
164.	Janežič-Krainer Ema	1960
165.	Grabrijan Marija por. Cokan	1960
166.	Krumberger Franc	1960
167.	Mlinar-Kukovec Terezija	1960
168.	Majcenovič Janez	1960
169.	Plut Judita	1960
170.	Brešar Franc	1960
171.	Dolenšek Jožefa	1960
172.	Grobelnik Terezija	1960
173.	Knap Žiga	1960
174.	Mizori Pavlina	1960
175.	Vodopivec Marjan	1960
176.	Kuštrin Anton	1961
177.	Škufca Silva	1961
178.	Jovanovič Ruža	1961
179.	Meško Ivan	1961
180.	Umek Francka	1961
181.	Petkovšek Marija	1961
182.	Markelj Janez	1961
183.	Čepar Marija	1962
184.	Petrišič Antonija	1962
185.	Žitko-Blaznik Angela	1962
186.	Volavšek-Klein Marija	1962
187.	Komovec Franc	1962
188.	Lebedinc Franc	1962
189.	Požar-Markelj Tatjana	1962
190.	Račič Franc	1962
191.	Roblek Branko	1962
192.	Nagode-Šavs Majda	1962
193.	Jelovčan Vinko	1963
194.	Pavliha Ivan	1963
195.	Žmavc Ivan	1963
196.	Alič Marjeta	1963
197.	Lampret Marjeta	1963
198.	Mulec Ivana	1963
199.	Rupnik-Marc Marija	1963
200.	Avsec Marija por. Kandare	1964
201.	Jordan-Blažič Magda	1964
202.	Podvršnik Anton	1964
203.	Tiegl Agica	1964
204.	Tomec Andreja	1964
205.	Lorger Stanko	1964
206.	Pirc Majda	1964
207.	Kozinc Ivan	1965
208.	Valentinčič Marjeta	1965
209.	Indihar Stanko	1965
210.	Rebolj Albina	1965
211.	Snoj Irena	1965
212.	Bogataj Bogomira	1965
213.	Pirnat Stane	1965
214.	Trampuž Cveto	1966
215.	Kozoglav Marija	1967
216.	Pavlišič Jože	1967
217.	Luštrek-Kuhar Ana Marija	1967
218.	Papler Marija	1967

Matematika — tehniška smer

Od ustanovitve študijske smeri Tehniška matematika na Univerzi v Ljubljani leta 1960 so diplomirali naslednji tehniški matematiki:

1.	Jože Vrabec	1963	Teorija distribucij
2.	Marija Vencelj	1963	Konformne upodobitve z elementarnimi funkcijami
3.	Boštjan Rode	1965	Karakterizacija Hilbertovega prostora
4.	Anton Primož	1965	Enoparametrične polgrupe operatorjev
5.	Egon Zakrajšek	1966	Numerično računanje lastnih vrednosti nesimetričnih matrik

6.	Florijan Pohar	1966	Invariantni integrali na lokalno kompaktnih grupah
7.	Lilijana Bombek-Arih	1966	Linearni diferencialni operatorji v Hilbertovem prostoru
8.	Edvard Košnjek	1966	Ortogonalne grupe
9.	Janez Oblak	1967	Wienerjeva mera
10.	Vida Debevc	1967	Komutatorji v Hilbertovem prostoru
11.	Srečko Kosmina	1967	Ocena napake pri metodah reševanja Fredholmove integralske enačbe II. vrste
12.	Ivan Pušnik	1967	Numerično reševanje integralnih enačb
13.	Jože Jesenko	1967	Lokalno konveksni prostori in prostori distribucij

Astronomija

1.	Kilar Bogdan	1957	Določanje geografske širine po Talcottovi metodi in z metodami v prvem vertikalu.
2.	Novak Andrej	1960	Natančnost določanje lege na morju z astronomsko metodo.
3.	Prosen Marjan	1961	Zvezdni premeri.
4.	Razinger Pavla	1961	Precizno določanje zemeljske dolžine astronomskega abservatorija v Beogradu z metodo brezžične telegrafije in opazovanj na pasažnem instrumentu Askania.

ODGOVORI

ODGOVORI

V Obzorniku (**13**, 144 (1966)) so bila objavljena tri vprašanja. Uredništvo je prejelo na vsako od teh vprašanj pravilen odgovor nepodpisanega bralca. Žal so odgovori prispeli šele, ko so bile že postavljene rešitve, ki jih je pripravilo uredništvo.

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 1

Na klancu (strehi) z nagibom φ je homogen kvader (opeka) z višino $2\,h$, najdaljšim robom $2\,b$ ter maso m. Tretji rob kvadra je vodoraven. Kvader počasi segrejemo za ΔT stopinj in nato počasi ohladimo na prvotno temperaturo. Ali se pri tem težišče kvadra kaj premakne, če se klanec ne razteza in ne krči?

Pri reševanju te naloge bo v pomoč, če najprej obravnavamo segrevanje in ohlajanje kvadra na ravni podlagi. Na kvader delujeta dve zunanji sili: teža in sila podlage. Teža, ki deluje navpično navzdol, je porazdeljena enakomerno po vsej prostornini kvadra. Nadomestimo jo s silo $-mg$, ki prijemlje v težišču. Ko kvader miruje, deluje sila podlage navpično navzgor in je enakomerno porazdeljena po osnovni ploskvi. V tem primeru jo nadomestimo s silo $F = mg$, ki prijemlje v središču osnovne ploskve kvadra, navpično navzgor.

Zanimajo nas premiki delov kvadra v smeri najdaljšega roba. Zato postavimo os x koordinatnega sistema, ki ima izhodišče v središču osnovne ploskve, vzporedno z najdaljšim robom. Pri segretju za ΔT se kvader v smeri osi x podaljša za $2\,b\,.\,\alpha\Delta T$, pri čemer je α linearni koeficient temperaturnega raztezka. Smer pozitivne osi x in nasprotna smer sta enakopravni, zato se pri raztezanju središče osnovne ploskve ne premakne. Premik delov kvadra je tem večji, čim večja je njihova razdalja od izhodišča. Pri segrevanju je premik delov kvadra v smeri osi x enak $u'(x) = \alpha\Delta T\,.\,x$. Skrajni levi del kvadra se premakne za $u'(-b) = -\alpha\Delta T\,.\,b$ (proti levi), skrajni desni del pa za $u'(b) = \alpha\Delta T\,.\,b$ (proti desni), tako da se kvader zares podaljša za $u'(b) - u'(-b) = 2\,\alpha\Delta T\,.\,b$. Premik delov kvadra v smeri osi x pri ohlajanju je $u''(x) = -\alpha\Delta T\,.\,x$.

Pri segrevanju drsi del osnovne ploskve desno od izhodišča po podlagi proti desni, del osnovne ploskve levo od izhodišča pa proti levi. Zato dobi sila podlage vodoravni komponenti: na desni del osnovne ploskve deluje sila trenja proti levi, na levi del pa sila trenja proti desni. Ker je pravokotna sila podlage porazdeljena enakomerno po vsej osnovni ploskvi, je sila trenja na desni del kvadra $-\frac{1}{2}\,kmg$ (proti levi) in sila trenja na levi del kvadra $\frac{1}{2}\,kmg$ (proti desni). Pri tem je k koeficient trenja. Ti sili sta ves čas v ravnovesju, vsota vseh komponent v smeri osi x je enaka nič, zato se težišče kvadra v tej smeri ne premakne. S tem smo utemeljili trditev, ki smo jo postavili na začetku. Pri krčenju je obratno. Del osnovne ploskve kvadra levo od izhodišča zdrsne po podlagi proti desni in nanj deluje sila trenja $-\frac{1}{2}\,kmg$ (proti levi). Del osnovne ploskve desno od izhodišča zdrsne proti levi in nanj deluje sila trenja $\frac{1}{2}\,kmg$ (proti desni).

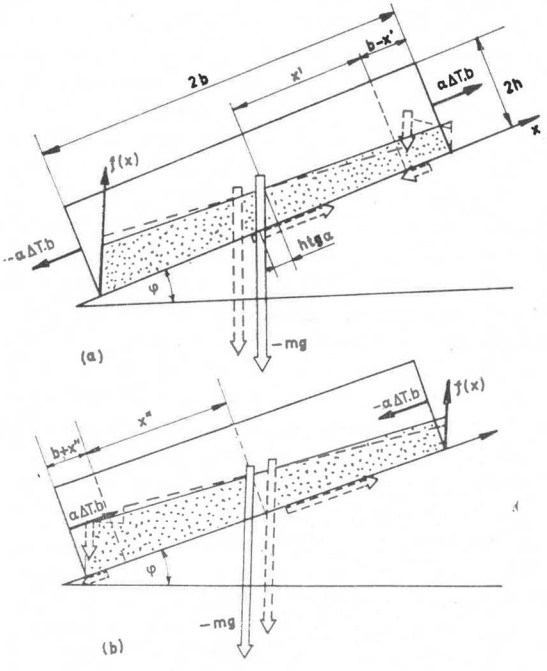
Razmislimo, kaj se dogaja, ko segrejemo in ohladimo kvader na klancu! Teža, ki slej ko prej deluje navpično navzdol, ima zdaj komponento $-mg\cos\varphi$

pravokotno na klanec in komponento $-mg \sin \varphi$ v smeri klanca. Pri raztezanju kvadra ne ostane več pri miru izhorišče, temveč neka druga točka $x = x'$, saj zdaj smer po klancu navzdol in smer po klancu navzgor nista več enakovredni. Premik delov kvadra v smeri osi x je $u'(x) = \alpha \Delta T . (x - x')$. Pri ohlajanju je pri miru druga točka $x = x''$ in je premik delov kvadra $u''(x) = -\alpha \Delta T . (x - x'')$. Pri segrevanju se središče osnovne ploskve premakne za $u'(0) = -\alpha \Delta T . x'$ in pri ohlajanju za $u''(0) = \alpha \Delta T . x''$. Skupni premik $u'(0) + u''(0) = -\alpha \Delta T . (x' - x'')$ je rezultat, ki ga iščemo. Izračunati je treba torej še x' in x''.

Premikanje kvadra je tako počasno, da je pospešek težišča zanemarljiv in smemo računati, da je vsota vseh sil ves čas enaka nič. Zato je enaka nič tudi vsota vseh komponent v smeri osi x. Pri segrevanju deluje na del osnovne ploskve desno od x' sila trenja po klancu navzdol in na del osnovne ploskve levo od x' po klancu navzgor. Računajmo sili trenja podobno kot prej! Kvader si mislimo razdeljen v dva dela: prvi, desno od x', ima maso $m(b - x')/2b$, drugi, levo od x', ima maso $m(b + x')/2b$. Na prvi del deluje sila trenja $-k \cos \varphi \times$ $\times mg(b - x')/2b$ in na drugega $k \cos \varphi . mg(b + x')/2b$. Iz pogoja, da je vsota vseh komponent v smeri osi x enaka nič

$$-k \cos \varphi . mg(b - x')/2b + k \cos \varphi . (b' + x')/2b - mg \sin \varphi = 0$$

sledi $x' = b \operatorname{tg} \varphi / k$. Pri ohlajanju deluje na del osnovne ploskve desno od x'' sila trenja $k \cos \varphi . mg(b - x'')/2b$ po klancu navzgor in na del levo od x''



Kvader na klancu pri segrevanju (a). Osenčeno je narisana linearna gostota sile $f(x)$. Črtkano je narisana linearna gostota sile, s kakršno računamo pri približnem računu, ko obravnavamo oba dela kvadra ločeno (razlike gostot sil v točkah nezveznosti so pretirane). Sili klanca in sili trenja, s katerima računamo pri približnem računu, sta narisani črtkano. Kvader na klancu pri ohlajanju (b).

sila trenja $-k \cos\varphi \,.\, mg\,(b + x'')/2\,b$ po klancu navzdol. Iz pogoja, da je vsota vseh komponent v smeri osi x enaka nič

$$k \cos\varphi \,.\, mg\,(b - x'')/2\,b - k \cos\varphi \,.\, mg\,(b + x'')/2\,b - mg \sin\varphi = 0$$

sledi $x'' = -b \operatorname{tg}\varphi/k$. Končni rezultat je torej $-\alpha\Delta T\,(x' - x'') = -\alpha\Delta T \,.\, 2\,b \operatorname{tg}\varphi/k$.

Za naš primer imamo tele podatke: $2\,b = 0{,}4$ m, $2\,h = 0{,}01$ m $= 2 \,.\, 10^{-5}$ st^{-1}, $\Delta T = 40$ st, $k = 0{,}5$ in $\varphi = 20^0$. Z njimi dobimo $x' = -x'' = 14{,}6$ cm in $u'(0) + u''(0) = 0{,}23$ mm.

Na koncu moramo priznati, da je bil račun samo približen. Zaradi zanimivosti se splača iti problemu do dna. Ne bi smeli računati, da je sila klanca enakomerno porazdeljena po osnovni ploskvi kvadra. Na klancu teža namreč ne gre skozi središče osnovne ploskve, enakomerno porazdeljena sila klanca pa uravnovesi težo le, če gre teža skozi središče osnovne ploskve. Razdelimo osnovno ploskev na pasove, ki so pravokotni na os x in ki imajo širino dx. Na tak pas deluje del sile klanca $dF = f dx$. Za linearno gostoto sile $f = dF/dx$ smo ugotovili, da ne more biti konstantna. Vzemimo zanjo linearno funkcijo $f = f_0\,(1 - x/s)$. Koeficienta f_0 in s določimo iz ravnovesnih pogojev, da sta teža in sila klanca nasprotno enaki

$$\int_{-b}^{b} f_0\,(1 - x/s)\,dx - mg = 0$$

in imata nasprotno enak navor

$$\int_{-b}^{b} x \cos\varphi \,.\, f_0\,(1 - x/s)\,dx - \cos\varphi \,.\, mgh \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Iz prvega pogoja sledi $f_0 = mg/2\,b$ in iz drugega $1/s = 3\,h \operatorname{tg}\varphi/b^2$. Gostota sile f mora biti linearna funkcija x, ker mora biti funkcija enaka za kvader, ki je zlepljen iz dveh kvadrov. Tu tiči ravno dejstvo, ki smo ga spregledali pri približnem računu. Funkcija f mora biti namreč na meji zlepljenih kvadrov zvezna. Računali pa smo za vsak del kvadra posebej in se pri tem nismo ozirali na zveznost $f(x)$ v točkah x' in x''. Pri natančnem računu sta ravnovesna pogoja za komponente sil v smeri osi x

$$\mp k \cos f_0 \int_{-b}^{x^i} (1 - x/s)\,dx \pm k \cos\varphi \,.\, f_0 \int_{x^i}^{b} (1 - x/s)\,dx - mg \sin\varphi = 0,$$

pri čemer se nanašata zgornja znaka na segrevanje, ko je $x^i = x'$, in spodnja na ohlajanje, ko je $x^i = x''$. Iz teh pogojev dobimo kvadratni enačbi z rešitvama

$$x' = b^2/3\,h \operatorname{tg}\varphi - (b^4/9\,h^2 \operatorname{tg}^2\varphi - 2\,b^3/3\,hk + b^2)^{1/2};$$

$$x'' = b^2/3\,h \operatorname{tg}\varphi - (b^4/9\,h^2 \operatorname{tg}^2\varphi + 2\,b^3/3\,hk + b^2)^{1/2},$$

ki gresta proti nič, če gre nagib klanca proti nič. Za naš primer dobimo $x' = 14{,}4$ cm, $x'' = -14{,}7$ cm in $u'(0) = u''(0) = -0{,}233$ mm.

J. S.

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 2

Dopoldne začne snežiti. Snežni plug nastopi delo opoldne in očisti v prvi uri 2 km in v drugi uri 1 km poti. Snežni plug odstrani vsako sekundo dano prostornino snega ϱ_V. Ker neprestano sneži, narašča višina snega sorazmerno s časom $h = ct$, če začnemo meriti čas v trenutku, ko začne snežiti. Sled snežnega pluga naj ima širino b, tako da je prostornina odstranjenga snega $V = bhs$, če je s opravljena pot. Prostornina na časovno enoto je $dV/dt = \varrho_V = bhv$. Iz tega izračunamo hitrost pluga $v = \varrho_V/bh = \varrho_V/bct$. Od trenutka t' do trenutka t'' opravi plug pot $s = \int_{t'}^{t''} v\,(t)\,dt = (\varrho_V/bc) \int_{t'}^{t''} dt/t = (\varrho_V/bc) \ln t''/t'$.

V našem primeru opravi plug v prvi uri dela pot $s_1 = 2$ km in v drugi uri pot $s_2 = 1$ km. Naj bo $t_0 = 1$ ura, pa imamo $s_1 = (\varrho_V/bc) \ln (t' + t_0)/t'$ in $s_2 = (\varrho_V/bc) \ln (t' + 2\,t_0)/(t' + t_0)$, če je t'' časovni razmik med začetkom sneženja in začetkom dela pluga. Iz zgornjih enačb dobimo

$$(s_1/s_2) \ln (t' + 2\,t_0)/(t_0 + t') = \ln (t' + t_0)/t'.$$

Za desno stran zapišemo $\ln [(t' + 2\,t_0)/(t_0 + t')]^{s_1/s_2}$ in antilogaritmiramo levo in desno stran; $[(2\,t_0 + t')/(t_0 + t')]^{s_1/s_2} = (t_0 + t')/t'$. Vstavimo $s_1/s_2 = 2$ in dobimo kvadratno enačbo $t'^2 + t't_0 - t_0^2 = 0$ s pozitivnim korenom $t' = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,t_0 = 0{,}62 \cdot 60$ min $= 37$ min. Snežiti je torej začelo 37 minut pred poldnem.

J. S.

ODGOVOR NA VPRAŠANJE ŠT. 3

Vozilo se mora po cesti dvigniti na višino h. Hitrost vozila v je funkcija elevacijskega kota: $v\,(\alpha) = c \cos 3\,\alpha$. Kolikšen mora biti elevacijski kot α enakomerno strme ceste, da se bo vozilo v najkrajšem času povzpelo na višino h?

Za doseg višine h po poti $s = h/\sin \alpha$ mora biti čas:

$$t = \frac{s}{v\,(\alpha)} \quad \frac{h}{v\,(\alpha) \sin \alpha} \quad \text{minimum!}$$

$$v\,(\alpha) \sin \alpha \qquad \text{maksimum!}$$

$$v'\,(\alpha) \sin \alpha + v\,(\alpha) \cos \alpha = 0$$

$$\frac{v\,(\alpha)}{v'\,(\alpha)} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{c \cos 3\,\alpha}{-3\,c \sin 3\,\alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (3\,\alpha) = \tfrac{1}{3}$$

$$\frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4 \operatorname{tg}^4 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \tfrac{1}{3}$$

$$3 \operatorname{tg}^4 \alpha - 12 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{12 \pm \sqrt{(144 - 12)}}{6}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 0{,}08515$$
$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2917$$
$$\alpha = \sim 16^0\,16'$$

A. V.

VPRAŠANJA

1. Pri kvalitativnih poskusih, ki naj nas prepričajo, da je masa mera za vztrajnost telesa, radi kažemo poskus z dvema vrvicama in dvema utežema. Prvi konec prve vrvice pritrdimo na strop in obesimo na drugi konec prvo utež. Na dno te uteži pritrdimo prvi konec druge vrvice in obesimo na drugi konec drugo utež. Ko spodnjo utež sunkovito potegnemo navpično navzdol, se pretrga zgornja vrvica, če je sila majhna, ali spodnja vrvica, če je sila dovolj velika. Kolikšno vrednost mora preseči ta sila, da se bo pretrgala spodnja vrvica, če sta vrvici in uteži enaki. Masa ene uteži je 2 kg, vsaka od obeh vrvic pa se pretrga, ko doseže natezna sila 4,05 kp. Vzamemo, da velja za vrvici (ali tanki palički) Hookov zakon vse do meje natezne trdnosti. Nadalje predpostavimo, da je sila, s katero vlečemo drugo utež navpično navzdol, spočetka nič in nato nenadoma naraste do končne konstantne vrednosti.

J. Strnad

2.* V neki zbirki je naloga z rešitvijo, ki jo navajamo v prostem prevodu.

Svetilo, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okoli svoje navpične osi, meče ozek curek svetlobe na navpično steno v razdalji l. Izračunaj hitrost v, s katero potuje po steni svetla lisa?

Kot med curkom in med pravokotnico na steno naj bo $\varphi = \omega t$. V trenutku t meri oddaljenosti lise od svetila $l/\cos\varphi$. Krožilna hitrost pri gibanju po krogu s takim radijem je $l/\cos\varphi$. S projiciranjem te hitrosti, ki je pravokotna na curek, na steno dobimo hitrost lise $(\omega\, l/\cos\varphi)\cos\varphi = \omega l$.

Očitno ne bi smela biti hitrost lise konstantna. Bralci naj poskusijo ugotoviti, kaj je narobe z zgornjim sklepanjem.

L. Bogataj

---

* Op. ur.: Vprašanje v prvi številki 14. letnika (Obz. mat. fiz. *14*, 48 (1967)) je vzpodbudilo mlajše bralce ,da so pobrskali po zbirkah nalog in nam poslali več podobnih vprašanj. Tu je prvo izmed njih.

NOVE KNJIGE

Josip Plemelj: Problems in the sense of Riemann and Klein.

V znani zbirki matematičnih monografij Interscience Traets in Pure and Applied Mathematics je izšla že l. 1964 kot šestnajsti zvezek monografija profesorja Josipa Plemlja: Problems in the sense of Riemann and Klein. (London, 1964; VII + 175 strani.)

Monografija ima dva dela. Prvi vsebuje potrebne partiture za Kleinovo nalogo: raziskati je treba upodobitvene lastnosti količnika τ dveh linearno neodvisnih rešitev diferencialnih enačb Fuchsovega tipa. V drugem delu je podana priprava in rešitev Riemannovega problema o eksistenci sistema analitičnih funkcij z dano monodromijsko grupo.

Tuji bralec lahko ob študiju problemov, ki so tako močno pritegnili profesorja Plemlja, občuduje analitično moč matematike. Domači pa, ki študira svojo stroko, še mnogokrat vzame v roke Dela profesorja — matematične resnice najde tu, spodbude in ideje. Predvsem pa zavest, da je matematika lepa veda, ki ji je bil naš profesor Plemelj izvoljen.

I. P.

France Križanič, Vektorska in tenzorska analiza. Izdala Mladinska knjiga v zbirki Matematika. Str. 365. Ljubljana 1966.

Knjigo sestavlja enajst poglavij in dodatek. Po uvodnem poglavju, v katerem avtor ponavlja algebrske operacije z vektorji in opisuje topologijo v množici vektorjev, so tri poglavja namenjena vektorskim funkcijam ene, dveh in treh skalarnih spremenljivk. V njih se obravnavajo zveznost, limita, odvod in enojni, dvojni in trojni integral vektorske funkcije, pa še ločna dolžina in ukrivljenost krivulje, površina in ukrivljenost ploskve ter prostornina geometrijskega telesa. Vektorska analiza v ožjem pomenu se začne v petem poglavju z obravnavo diferenciabilnih skalarnih in vektorskih polj in pravil za računanje gradientov. Šesto poglavje je posvečeno krivuljnim in ploskovnim integralom skalarnih in vektorskih polj. Sedmo in osmo poglavje obravnavata osnovne diferencialne operacije s polji in temeljne formule vektorske analize. V devetem poglavju se vidi, kakšno obliko imajo splošni rezultati v ravninskem primeru in kakšna je zveza med vektorsko analizo in teorijo analitičnih funkcij. Deseto poglavje je namenjeno osnovam tenzorske analize, enajsto pa teoriji diferencialnih form. Knjigo zaključuje dodatek, v njem obravnava pisec odvod z gledišča funkcionalne analize.

Vsebina knjige je zelo bogata. Čeprav govori o rečeh, ki so povečini dobro znane, upravičuje delo svoj obstoj že s posrečeno izbiro snovi. Vendar je njegova poglavitna odlika način obravnave. »Dve vodili prežemata vse delo: osnovni pojmi od odvoda do ločne dolžine so naslonjeni na funkcionalno analizo, teorija in računski algoritmi so dosledno grajeni brez pripomočkov«, pravi pisec v predgovoru in besedo tudi drži. Tako se mu je posrečilo pokazati mesto, ki ga ima vektorska analiza in sorodne reči v sodobnem gledanju na matematiko. Tudi je nekoordinatna obravnava logično ustreznejša in do neke mere ekonomičnejša. Zahteva pa več sposobnosti za abstraktno mišljenje in je v celoti vzeto za začetnika najbrž težja od tradicionalne koordinatne poti. Zato

se mi zdi, da bo knjiga koristno (in zaradi avtorjevega mojstrskega peresa tudi prijetno) branje predvsem za tistega, ki o tem predmetu že nekaj ve. Zvedel bo najbrž še več, in reč, ki mu je bila doslej verjetno samo orodje, bo pred njim zaživela kot del nekega organizma. Takega bravca tudi ne bo motilo, da ni v knjigi niti ene ilustracije, začetnik pa jih bo prav gotovo pogrešal. Vsakomur pa bi prišlo prav stvarno kazalo.

S to knjigo je Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko začel izdajati zbirko univerzitetnih učbenikov in monografij Matematika. To moderno napisano delo je prav primeren začetnik zbirke. Ko jo ob rojstvu pozdravljamo, ji želimo predvsem živo in nemoteno rast.

rj

Prof. dr. Gh. Pic: Algebra superioara. Bucuresti 1966. Str. 478. (V romunskem jeziku.)

Knjiga, ki je učbenik višje algebre, je razdeljena na trinajst poglavij: I. Osnovne algebrajske strukture. II. Determinante in njih uporaba. III. Elementi teorije matrik. IV. Vektorski prostori. V. Linearne trnasformacije. VI. Bilinearne in hermitske forme. VII. Eksistenca ničel polinomov. VIII. Rezultanta. IX. Transformacije enačb. X. Abelske enačbe. XI. Ločitev korenov. XII. Geometrija polinomov. XIII. Efektivno računanje ničel polinomov. Vsako poglavje sestoji iz več razdelkov. Na koncu razdelkov so naloge, med katerimi so nekatere razmeroma težke.

Navedena poglavja kažejo, da je vsebina knjige zelo bogata. V zadnjih letih je izšlo veliko učbenokov sodobne algebre v raznih jezikih. Knjiga prof. Gh. Pica se odlikuje po tem, da vsebuje marsikaj, kar ne dobimo v standardnih učbenikih. Pisana je zelo pregledno in jasno, kolikor sem seveda upravičen dati kakršnokoli izjavo o knjigi, pisani v jeziku, ki ga ne razumem.

I. Vidav

N. I. Koškin, M. G. Širkevič: Priročnik elementarne fizike.

Za pregled slovenskih fizikalnih knjig bi potrebovali komaj nekaj vrstic. Zdaj se je tem knjigam pridružila še ena. Mladen Gros, Marjan Hribar in Zvonko Trontelj so po tretji ruski izdaji priredili **N. I. Koškina in M. G. Širkeviča: Spravočnik po elementarnoj fizike.** Knjigo je izdal založniški zavod Življenje in tehnika v visoki nakladi 10 000 izvodov. Cena je 2 300 starih dinarjev.

Snov je razporejena na šest poglavij: mehanika, toplota in molekulska fizika, mehanska nihanja in valovanja, elektrika, optika in atomika. Na začetku vsakega poglavja je splošni del z definicijami osnovnih količin in osnovnimi zakoni fizike. Obseg snovi v tem delu je določen približno s programom fizike v srednji šoli in v prvem letu študija na univerzi in nekoliko odstopa od originala. Prirejevalci so se pri tem ravnali po domačih učbenikih fizike: snov so delno prilagodili, nekaj pa so tudi dodali. Splošnemu delu sledijo v vsakem poglavju tabele in diagrami, ki zavzemajo dobro tretjino knjige. Pretežni del tabel vsebuje podatke o lastnostih snovi in nekatere druge podatke. Medtem ko lahko najdemo večino snovi iz splošnega dela v domačih učbenikih fizike, je priročnik edina domača knjiga z dovolj obsežnimi in za fizika prirejenimi tabelami. Zato je glavna teža knjige v tabelah in diagramih. V njih najdeta

študent in dijak podatke, ki jih potrebujeta pri reševanju računskih nalog iz fizike. Priročnik bo s svojimi tabelami in zbirko osnovnih zakonov dobrodošel tudi marsikateremu tehniku pri preračunavanju primerov iz vsakdanje prakse.

Knjiga je tiskana na boljšem papirju in je dobro opremljena. Da je cenjen original, pričajo tri izdaje. Tudi prirejevalci so opravili svoje delo premišljeno in vestno. Zaradi tega je Priročnik priporočljiv za vsakogar, ki rešuje fizikalne naloge.

J. S.

Matematički list za učenike osnovne škole.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Srbije je v aprilu in maju izdalo dve številki prvega letnika nove revije »Matematički list« za osnovne šole. Revija je namenjena predvsem učencem VII. in VIII. razreda osnovne šole, katerim bo nudil dovolj zanimivega in koristnega matematičnega branja, kar jim bo pripomoglo k spopolnjevanju njihovega matematičnega znanja.

Nekaj naslovov iz vsebine prvih dveh številk:

Kako se sestavljajo enačbe.

Neka lastnost kvadrata.

Kvadriranje števil, ki se končujejo s 5.

Uporaba identične transformacije.

Neko pravilo deljivosti.

Problem sedem mostov.

Kje učenci delajo največ napak.

Na koncu zvezkov so zbirke raznih nalog s sprejemnih izpitov in tekmovanj ter sestavki zanimive elementarne matematike.

Uredništvo revije prosi vse učitelje matematike, da prispevajo svoje članke ter sodelujejo s predlogi.

Revija bo izhajala v prihodnjih letih petkrat letno. Cena za naročnike je 1,20 N-din za številko. Naročila sprejema Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Srbije, Beograd, pp. 791, denar pa pošljite na ŽR 608-8-37-10 s sporočilom, katere zvezke želite.

Ciril Velkovrh

FINANČNI OBRAČUN UPRAVE OBZORNIKA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

za poslovno dobo od 28. X. 1966 do 16. XII. 1967

A. Poslovanje prek banke

Saldo 28. X. 1966			1 319,92 N-din
Prejemki:	Od Sklada za pospeševanje založništva		32 000,— N-din
	Od Sklada Borisa Kidriča		8 000,— N-din
	Naročnine		1 832,80 N-din
		Skupaj	43 152,72 N-din
Izdatki:	Tiskarna Ljudske pravice		17 868,50 N-din
	Honorarji in davek		9 654,71 N-din
	Dvig v ročno blagajno		700,— N-din
		Skupaj	28 203,21 N-din
Saldo v Narodni banki 16. XII. 1967			14 949,51 N-din

B. Poslovanje prek ročne blagajne

Saldo 28. X. 1966			223,64 N-din
Prejemki:	Dvig iz banke		700,— N-din
	Naročnine		853,10 N-din
		Skupaj	1 876,74 N-din
Izdatki:	Administrativni stroški, poštnina in odprema Obzornika		1 667,89 N-din
Saldo v ročni blagajni 16. XII. 1967			208,85 N-din

VSEM ČLANOM DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

Obveščamo vas, da lahko dobite v matematični knjižnici, Ljubljana, Trg revolucije 11 (tel. št.: 21-641, ŽR društva 501-8-58/1) naslednje knjige po znižani ceni:

KNJIŽNICA SIGMA

4. F. Križanič: Elektronski aritmetični računalniki. 1960	9	8
6. O. Sajovic: Normalna aksonometrija. 1962.	7	6
7. F. Križanič: Vektorji, matrike, tenzorji. 1962.	9.30	8
8. Z. Bohte: Numerično reševanje enačb. 1964.	5.60	5
9. N. Prijatelj: Matematične strukture I. 1964.	8.50	7
10. R. Jamnik: Uvod v teorijo informacij. 1964.	14	10
11. I. Vidav: Števila in matematične teorije. 1965.	11	9
13. R. Jamnik: Teorija iger. 1966	18	12
14. J. Grasselli: Osnovne teorije števil. 1966.	10.40	9
15. N. Prijatelj: Matematične strukture II. 1967. 310 str.	28	19

V pripravi so naslednje knjige:

J. Strnad: Kvantna mehanika za začetnike

I. Pucelj: Neevklidične geometrije.

A. Vadnal in F. Lebedinec: Funkcije II.

MATEMATIKA. Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij.

1. F. Križanič: Vektorska in tenzorska analiza. 1966	40	32
2. J. Vidav: Algebra (skripta). 1965/66		11

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Od letnika I, 1951 do letnika XIV, 1967 30.80
(manjka 16 številk)

NASTAVA MATEMATIKE IN FIZIKE

letnik VI. št. 3—4, Beograd 1957 brezplačno

C. V.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejajo ga: R. Blinc, Z. Bohte, J. Pahor, V. Pivk, A. Moljk, M. Rosina, J. Strnad, F. Šušteršič, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 4 N-din, za zasebnike 5 N-din, za šole 10 N-din, za ustanove in podjetja 20 N-din in za inozemstvo 2 dolarja. Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.