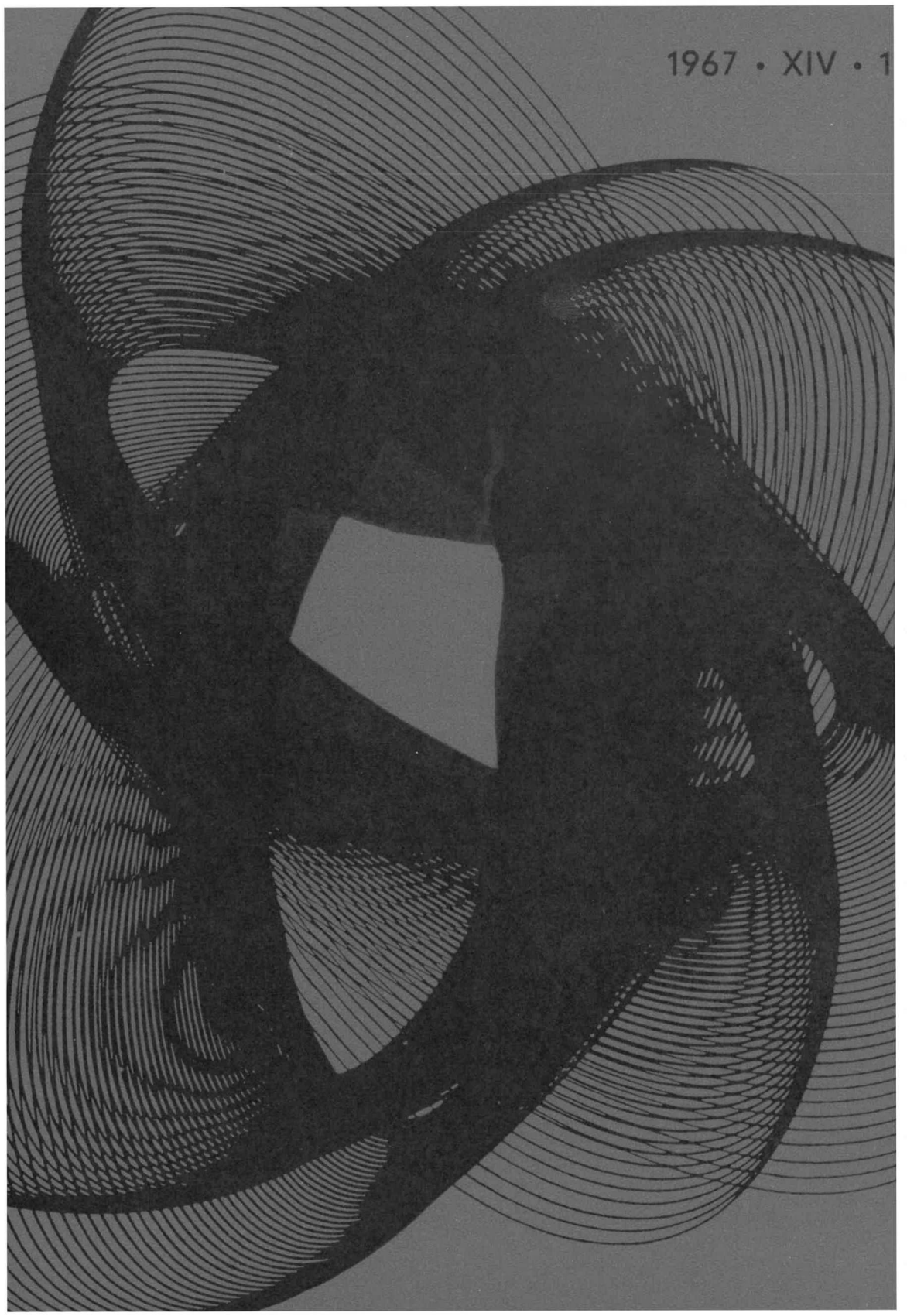
1967 • XIV • 1



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XIV. LETNIK — 1. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, MAREC 1967

VSEBINA

Članki Stran

O neomejeno deljivih in o stabilnih porazdelitvah (R. Jamnik) 4

Zlati rez (A. Vadnal) 21

Kvantna elektronika (A. M. Prokorov) 28

Novice

Merjenje temperature z jedrsko kvadrupolno resonanco (M. Mali) . . 33

Nobelov nagrajenec za fiziko v letu 1966 — Profesor Alfred Kastler . . 36

Domače vesti

Republiko in zvezno tekmovanje mladih matematikov (J. Vrabec) . . 38

Republiško tekmovanje srednješolcev v fiziki (M. Hribar) 43

Zvezno tekmovanje mladih fizikov (M. Hribar) 45

Seminar iz matematike (C. Velkovrh) 47

Vprašanja 48

CONTENTS

Articles Page

On the Infinitely Divisible and on the Stable Distribution laws (A. Jamnik) 4

"Sectio Aurea" (A. Vadnal) 21

Quantum Electronics (A. M. Prokorov) 28

News

Temperature Measurement with Nuclear Quadrupole Resonance (M. Mali) 33

Professor Alfred Kastler — Nobel Prize Winner for Physics in the Year 1966 36

Home News 38

Questions 48

OBZORNIK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1966 LJUBLJANA LETNIK XIII

Uredniški odbor

Robert Blinc, Zvonimir Bohte, Jože Pahor, Valentin Pivk, Anton Moljk, Mitja Rosina, Janez Strnad, France Šušteršič, Stane Uršič, Ivan Vidav, Franc Kvaternik (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Socialistične republike Slovenije

Natisnila tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani

VSEBINA

Članki

O p-adičnih številih (J. Grasselli) 1

Razširitve obsega realnih števil (J. Vrabec) 11

Elektromehanski pojavi pri kristalih (B. Lavrenčič) 21

Osnovni pojmi matematične statistike (R. Jamnik) 49

Teorija stabilnosti (G. Tomšič) 67

Poskusi na ljubljanskem reaktorju (F. Žerdin in Z. Gabrovšek) 81

Računanje s p-adičnimi števili (M. Vencelj) 97

Razvojne poti v sodobni matematiki (J. Dieudonne — prev. F. Šušteršič) . 112

Novice

Raziskovalne naloge matematičnega oddelka IMFM (Z. Bohte in A. Suhadolc) 118

Invariantnost proti konjugaciji naboja? (J. Strnad) 123

Šola

Vlažen zrak in megla (M. Hribar in J. Strnad) 27

Uporaba elektronskega računalnika pri pouku matematike na ekonomski fakulteti (A. Vadnal) 90

Nekaj o pouku moderne matematike v Italiji (S. Uršič) 131

Preskusna vaja za študente, ki so se vpisali na matematično-fizikalni oddelek (M. Gros, M. Hribar, J. Strnad) 134

Biotova formula (J. Strnad) 137

Domače vesti

Krožki in tekmovanja za mlade matematike (S. Uršič) 35

Akcija za usmerjanje mladine pri izbiri študija na visokih šolah (F. Ahlin) . 39

Zvezno tekmovanje mladih fizikov (M. Hribar) 41

Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS (C. Velkovrh) 91

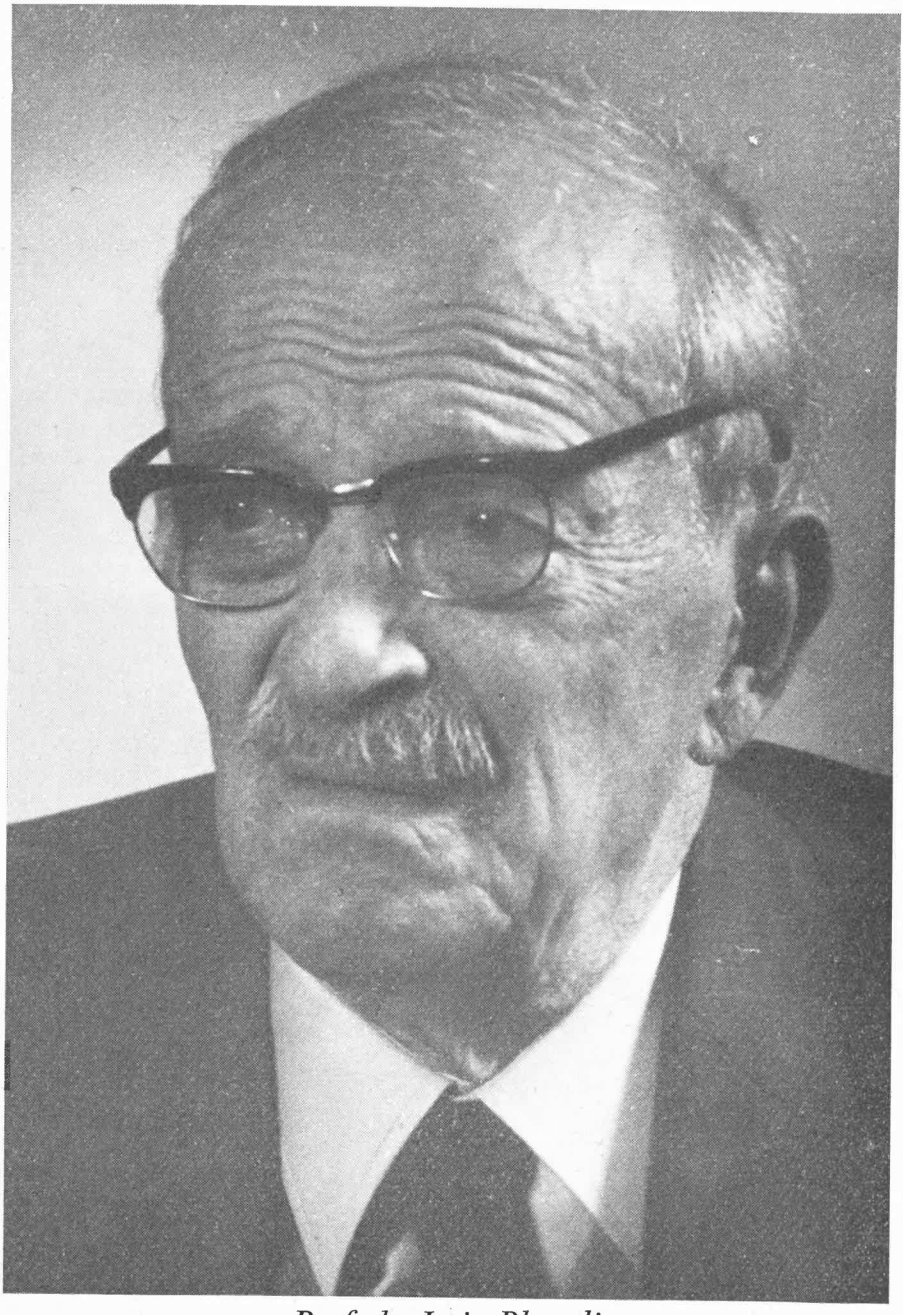
Na univerzi v Ljubljani so diplomirali iz fizike 94
Predlog Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS 140
Organizacija dela pri pouku fizike v gimnaziji po reformi (F. Avsec) . . . 140
Tekmovanje mladih matematikov (S. Križanič) 142

Utrinek

Statistika in vojskovanje (J. Strnad) 44

Vprašanja 144

Nove knjige 46, 96



Prof. dr. Josip Plemelj

11. decembra 1873 — 22. maja 1967

Dragi gospod profesor!

Letos bo preteklo 30 let, od kar sem prišel k Vam kot študent poln navdušenja za matematiko. Tedaj ste Vi imeli za sabo že dobri dve tretjini življenjske poti. Že davno ste si pridobili ime v matematični znanosti. Integralne enačbe, teorija potenciala in analitičnih funkcij so področja, katerih napredek je tesno povezan z Vašim imenom. Z rešitvijo Riemannovega problema pa ste si postavili trajen spomenik, ki bo ostal, dokler se bodo ljudje ukvarjali z matematiko. Razumljivo je, da smo Vas učenci občudovali kot matematika in spoštovali kot človeka zaradi Vašega značaja. To čustvo je v naslednjih letih samo rastlo. Trideset let, kar Vas osebno poznam, je precej dolga doba. Med tem so se spreminjali časi in tudi mi z njimi. Vi pa, se nam je zdelo, ste ostali vedno enaki, vedno mlad po duhu. Bili ste kot simbol matematike, ki je ena najstarejših znanosti pa kljub temu večno mlada.

Po človeških merilih ste dosegli zavidljivo lepo starost. Toda Vaša smrt nas zato ni prav nič manj prizadela. Prizadela nas je kot matematike, ker se ne bomo mogli več obračati na Vas po nasvete, prizadela nas je kot Vaše učence in prijatelje, ker Vas ne bomo več imeli med sabo, prizadela nas je kot ljudi, ki jih zmerom pretrese smrt sočloveka, ta naša nedoumljiva usoda. Vas ni več. Vaša dela pa so ostala in še dolgo bomo segali po njih in se bogatili z njimi.

Neprecenljive so Vaše zasluge za napredek matematike, za slovensko univerzo in za razvoj matematike pri nas. Zahvaljujem se Vam za vse, kar ste storili za našo matematiko. Posebej se še prisrčno zahvaljujem za vse, kar ste storili zame. Ne moremo se Vam več oddolžiti drugače kakor s tem, da Vas ohranimo v lepem spominu in po svojih močeh nadaljujemo Vaše delo.

(Iz govora, ki ga je imel prof. I. Vidav ob odprtem grobu prof. Plemlja)

Spoštovani tovariš profesor!

Preskopo so odmerjene minute slovesa, da bi lahko v njih obudil spomin na vso Vašo življenjsko pot, na vse plodno delo znanstvenika, na darežljivo razdajanje profesorja, na čar Vaše osebnosti.

Odkar Vas je zvezdno nebo nad slovenskimi vršaci zvabilo v odkrivanje zakonitosti, ki vodijo naravo, ste zvesto sledili notranjemu klicu, bogatili in ostrili svoje darove. Vrata astronomije so Vam odprla pot matematike. V matematiko ste stopili v času njenega velikega razcveta, ko si je postavljala nove temelje, kovala nove pripomočke, odpirala nove naloge in nova obzorja. Od vsega začetka ste v tem skupnem delu tvorno in bleščeče uveljavili svoje moči, pa naj gre za integralske enačbe, za teorijo potenciala, teorijo števil, Kleinove probleme v teoriji diferencialnih enačb, teorijo enolistih funkcij pa vse do Vašega najlepšega dela, do rešitve Riemannove naloge o analitičnih funkcijah z dano monodromijsko grupo. V svojih delih niste le ugnali problemov, ki so dolgo kljubovali drugim raziskovalcem. Ob njihovem reševanju ste ustvarjali matematiki novo orodje, najpomembnejše so Plemljeve formule za robne vrednosti analitičnih funkcij. Te formule so še danes temelj žive, globoke in uporabne teorije singularnih integralskih enačb.

Za nas, za Vaše rojake pa je daleč najpomembnejši Vaš veliki korak, prihod v Ljubljano. Velik je ta korak po svojem pogumu, po tragiki, ki jo nosi v sebi Vaš umik iz velikega sveta, velik po izpričanem domoljubju. Z njim ste sledili velikemu snu, Sloveniji, Jugoslaviji. V ta sen pa je bila vselej vtkana misel na slovensko univerzo. Njeni rasti ste posvetili drugi del svojega življenja.

Vzgojili ste mnoge generacije slovenskih matematikov, pomagali pri ustvarjanju slovenske tehniške inteligence. Dolga leta ste predavali oba osnovna tečaja matematike pa še teorijo analitičnih funkcij, algebro s teorijo števil in diferencialne enačbe. Vse to ste nam zapustili tudi v svojih knjigah. Vsem nam, Vašim učencem, niso bila ta predavanja le hladen vir informacije, bila so, vsaka ura zase, svojevrstne umetnine, podoživetje predmeta v njegovem prvinskem nastajanju. V Vaših predavanjih, prav kot v Vaših znanstvenih delih, je bila resnica vselej eno z lepoto. In ne nazadnje ste v njih s tenkim posluhom za jezik pokazali, da zmore domača govorica polnovredno izraziti vsako, tudi tako izbrušeno misel, kakršno terja matematika.

Vaše delo, dragi tovariš profesor, je temelj našega dela, živi z nami in nas obvezuje. V imenu fakultete za naravoslovje in tehnologijo, v imenu inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, kjer živi vaša stvaritev — slovenska matematika, za vse, kar ste ji dali, za vse, kar ste ji žrtvovali — hvala.

(Govor prof. dr. Franceta Križaniča ob odprtem grobu)

O NEOMEJENO DELJIVIH IN O STABILNIH PORAZDELITVAH

RAJKO JAMNIK

Eden prvih velikih dosežkov teorije verjetnosti je bil Laplaceov limitni izrek: Če ima dogodek D v vsakem izmed neodvisnih poskusov verjetnost p $(0 < p < 1)$ in je $q = 1 - p$ ter η_n frekvenca dogodka D v prvih n poskusih, velja za poljubni realni števili a in $b > a$ relacija

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \tag{1}$$

Ta izrek postane vir novih vprašanj, če mu damo drugo obliko. Priredimo vsakemu poskusu slučajno spremenljivko ξ, ki ima vrednost 1, če se zgodi D, in vrednost 0, če se D ne zgodi. Namesto zaporedja poskusov lahko potem obravnavamo zaporedje slučajnih spremenljivk

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

Te spremenljivke so med seboj neodvisne in bravec brž lahko izračuna, da je matematično upanje $M\,\xi_n = p$ in disperzija $D\,\xi_n = pq$. Za frekvenco η_n dogodka D v prvih n poskusih pa velja

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

$$M\,\eta_n = M\,\xi_1 + M\,\xi_2 + \ldots + M\,\xi_n = np$$

$$D\,\eta_n = D\,\xi_1 + D\,\xi_2 + \ldots + D\,\xi_n = npq$$

Potemtakem je η_n ravno n-ta delna vsota zaporedja (2), količina

$$\zeta_n = \frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\eta_n - M\,\eta_n}{\sqrt{D\,\eta_n}} \tag{3}$$

pa tista njena linearna funkcija, ki ima matematično upanje 0 in disperzijo 1; rečemo ji normirana ali standardizirana delna vsota. Množica vseh $P(a < \zeta_n < b,)$ kjer pretečeta a in b neodvisno drug od drugega vso realno os, je porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke ζ_n, z desno stranjo v relaciji (1) pa je definirana standardizirana normalna porazdelitev. Laplaceov limitni izrek torej zagotavlja, da konvergira porazdelitev normirane n-te delne vsote zaporedja (2) z rastočim n proti standardizirani normalni porazdelitvi.

Zaporedje (2) ima prav posebne lastnosti: spremenljivke v njem so med seboj neodvisne, vse enako porazdeljene in njihova zaloga vrednosti je se-

stavljena le iz števil 0 in 1. Zdaj se pojavi vprašanje, ali velja Laplaceov izrek le za zaporedje (2) ali morda še za kakšno drugo. Natančneje povedano: kakšno mora biti zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{4}$$

da konvergira porazdelitveni zakon njegove normirane n-te delne vsote z rastočim n proti standardizirani normalni porazdelitvi, ali na kratko, da velja zanj centralni limitni izrek. Odgovor je znan. Če označimo

$$M\,\xi_k = a_k \qquad M\,\eta_n = A_n \qquad D\,\eta_n = B_n^2$$

in je $F_k(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke ξ_k, je, kot je dokazal Lindeberg 1922, za veljavnost centralnega limitnega izreka zadosti, da je za vsak $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} (x - a_k)^2\, dF_k(x) = 0 \tag{5}$$

Feller pa je 1935 ugotovil, da je pogoj (5) tudi potreben.

Če so spremenljivke v zaporedju (4) vse enako porazdeljene, je pogoj (5) gotovo izpolnjen, kadar imajo končno pozitivno disperzijo. Seveda je to tudi potrebno, saj drugače sploh ne moremo narediti slučajne spremenljivke

$$\zeta_n = \frac{\eta_n - A_n}{B_n} \tag{6}$$

V primeru, ko disperzija in morda celo matematično upanje enako porazdeljenih in neodvisnih slučajnih spremenljivk (4) ne obstaja, pa se nam ponuja tale misel. Morda je mogoče najti za spremenljivke (6) druge primerne konstante A_n in $B_n > 0$, tako da limitna porazdelitev za zaporedje (6) kljub temu obstaja. Tedaj se pojavi vprašanje, kakšen je lahko limitni porazdelitveni zakon za tako posplošeno zaporedje (6). Lévy je 1925 ugotovil, da je limitna porazdelitev v vsakem primeru stabilna.

Druga skupina vprašanj v zvezi z limitnimi porazdelitvami vsot neodvisnih členov izvira iz Poissonovega izreka: Če je dano tako zaporedje poskusov

$$\begin{array}{l} a_{11} \\ a_{21},\ a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots,\ a_{nn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

da so poskusi v vsaki vrsti med seboj neodvisni, in če ima dogodek D v vsakem poskusu iz n-te vrste verjetnost p_n, ta pa se spreminja tako, da je

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \qquad (\lambda > 0)$$

velja za frekvenco η_n dogodka v n-ti vrsti pri vsakem nenegativnem celem k relacija

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Vprašanje, ki nanj odgovarja Poissonov izrek, je mogoče posplošiti takole. Dano naj bo tako dvojno zaporedje slučajnih spremenljivk

$$\begin{array}{l} \xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1k_1} \\ \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{2k_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

da je $\lim k_n = \infty$ in so spremenljivke v vsaki vrsti med seboj neodvisne; pri kakšnih pogojih konvergira porazdelitveni zakon za

$$\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nk_n} - A_n \tag{8}$$

s primerno izbranimi A_n z rastočim n proti neki limitni porazdelitvi in kakšna je lahko ta porazdelitev? Brez dodatnih pogojev je vprašanje prazno, saj je tedaj vsaka porazdelitvena funkcija lahko limitna porazdelitev vsot (8): Če je namreč $F(x)$ poljubna porazdelitvena funkcija, vzemimo, da je za vsak n spremenljivka ξ_{n1} porazdeljena po zakonu $F(x)$, vse druge spremenljivke v n-ti vrsti pa naj imajo z verjetnostjo 1 vrednost 0; če postavimo $A_n = 0$, so vse spremenljivke (8) porazdeljene po zakonu $F(x)$, in ta je kajpak tudi limitna porazdelitev za vsote (8). Kot naraven dodatni pogoj se pokaže zahteva, naj obstajajo take konstante a_{nk}, da je za vsak $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq k_n} P(|\xi_{nk} - a_{nk}| > \varepsilon) = 0 \tag{9}$$

Kadar spremenljivke ξ_{nk} ustrezajo zahtevi (9), jih imenujemo *asimptotično konstantne*. Bavli in Hinčin sta 1937 ugotovila, da je limitna porazdelitev vsot (8) asimptotično konstantnih slučajnih spremenljivk lahko le neomejeno deljiv porazdelitveni zakon.

S temi navedki je dovolj očrtana vloga stabilnih in neomejenih deljivih porazdelitev v verjetnostnem računu. Treba je le še povedati, da je bilo mogoče rešiti prej omenjena vprašanja, ko je bila dovolj popolno izdelana teorija karakterističnih funkcij. Kot je znano, je karakteristična funkcija $f(t)$ porazdelitvene funkcije $F(x)$ njena Fourier-Stieltjesova transformacija:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Ali drugače povedano: če je $F(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke ξ, je $f(t)$ matematično upanje slučajne spremenljivke $e^{it\xi}$. Brez karakte-

rističnih funkcij tudi v tem sestavku ne bomo opravili. Zato je prav, da spomnimo na njihove poglavitne lastnosti.

A) Karakteristična funkcija je enakomerno zvezna na vsem definicijskem območju, $|f(t)| \leqslant 1$ za vsak t in $f(0) = 1$.

B) Preslikava med porazdelitvenimi in karakterističnimi funkcijami je na obe strani enolična in zvezna. To pomeni: a) karakteristična funkcija je natanko določena s svojo porazdelitveno funkcijo in obratno; b) če konvergira zaporedje porazdelitvenih funkcij $F_n(x)$ proti porazdelitveni funkciji $F(x)$ povsod, kjer je $F(x)$ zvezna, konvergira zaporedje ustreznih karakterističnih funkcij $f_n(t)$ na vsakem končnem intervalu za t enakomerno proti funkciji $f(t)$, ki je karakteristična za $F(x)$; c) če konvergira zaporedje karakterističnih funkcij $f_n(t)$ proti zvezni funkciji $f(t)$, konvergira zaporedje njihovih porazdelitvenih funkcij $F_n(x)$ proti porazdelitveni funkciji $F(x)$ povsod, kjer je ta zvezna, in limitna funkcija $f(t)$ je karakteristična za limitno funkcijo $F(x)$.

C) Fourier-Stieltjesova transformacija preslika konvolucijo v produkt. Če sta torej $F(x)$ in $G(x)$ porazdelitveni funkciji, $f(t)$ in $g(t)$ pa njuni karakteristični funkciji, je za porazdelitveno funkcijo

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, dG(y)$$

karakteristična funkcija

$$h(t) = f(t)\, g(t)$$

Ker je $H(x)$ porazdelitvena funkcija vsote dveh med seboj neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih po zakonih $F(x)$ in $G(x)$, lahko opišemo lastnost C) tudi tako: Karakteristična funkcija vsote dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk je enaka produktu karakterističnih funkcij obeh členov. Kajpada velja to ne le za vsoto dveh neodvisnih členov, ampak je členov lahko poljubno končno število. Očitno je ravno lastnost C) razlog za to, da so karakteristične funkcije tako pripravno orodje pri sumiranju neodvisnih slučajnih spremenljivk.

1. Neomejeno deljive porazdelitve

Porazdelitvena funkcija $F(x)$ je *neomejeno deljiva*, če je mogoče slučajno spremenljivko ξ, porazdeljeno po tem zakonu, izraziti pri vsakem naravnem številu n kot vsoto n med seboj neodvisnih in enako porazdeljenih členov:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \tag{10}$$

Opišimo to definicijo še s karakterističnimi funkcijami. Naj bo $f(t)$ karakteristična funkcija slučajne spremenljivke ξ in $f_n(t)$ karakteristična funkcija za slučajne spremenljivke ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ v relaciji (10). Zaradi lastnosti C) karakterističnih funkcij je med $f(t)$ in $f_n(t)$ zveza

$$f(t) = (f_n(t))^n \tag{11}$$

Torej je porazdelitev $F(x)$ s karakteristično funkcijo $f(t)$ neomejeno deljiva, če je za vsako naravno število n

$$f_n(t) = \sqrt[n]{f(t)} \tag{12}$$

tudi karakteristična funkcija. Seveda je treba vzeti v (12) za $\sqrt[n]{f(t)}$ tisto njegovo zvezno vejo, za katero je $f_n(0) = 1$. Poslej bomo to storili brez posebnega dogovarjanja.

Oglejmo si nekaj primerov.

1. Za normalno porazdelitev $N(a, \sigma^2)$ z matematičnim upanjem a in disperzijo σ^2 je karakteristična funkcija

$$f(t) = e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Za vsako naravno število n je

$$f_n(t) = \sqrt[n]{f(t)} = e^{\frac{iat}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$$

To je spet karakteristična funkcija, in sicer za normalno porazdelitev $N(\frac{a}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$. Torej je normalna porazdelitev neomejeno deljiva.

2. Slučajna spremenljivka ξ je porazdeljena po Poissonovem zakonu, če je za $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(\xi = a + bk) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (\lambda > 0)$$

Pri tem sta a in $b \neq 0$ realni konstanti. Za karakteristično funkcijo $f(t)$ Poissonovega zakona velja

$$\ln f(t) = iat + \lambda(e^{ibt} - 1)$$

(Za logaritem je treba vzeti glavno vrednost.) Tudi tu je za vsako naravno število n

$$\ln f_n(t) = \frac{iat}{n} + \frac{\lambda}{n}(e^{ibt} - 1)$$

Ta relacija kaže, da je $f_n(t)$ spet karakteristična funkcija nekega Poissonovega zakona, in sicer s parametroma $a' = a/n$ in $\lambda' = \lambda/n$, parameter b pa ostane celo nespremenjen. Torej je Poissonova porazdelitev neomejeno deljiva.

3. Porazdelitev gama je definirana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \end{cases}$$

Parametra α in β sta poljubni pozitivni števili. Karakteristična funkcija za to porazdelitev je

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{a}$$

Od tod sledi za vsak naravni n

$$f_n(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{a/n}$$

torej karakteristična funkcija za porazdelitev gama s parametroma a/n in β. Zato je tudi porazdelitev gama neomejeno deljiva.

Podobnih primerov bi lahko našteli še več. Toda oglejmo si nekaj splošnih lastnosti neomejeno deljivih porazdelitev.

I. *Karakteristična funkcija neomejeno deljive porazdelitve nima nobene ničle.*

Res je nima: Naj bo $F(x)$ poljuben neomejeno deljiv zakon in $f(t)$ njegova karakteristična funkcija. Tedaj je tudi $f_n(t)$, dana z relacijo (12), karakteristična funkcija. Ker je $f(0) = 1$ in je $f(t)$ zvezna, obstaja tak $a > 0$, da iz $|t| \leqq a$ sledi $f(t) \neq 0$ in seveda tudi $f_n(t) \neq 0$. Za vsak $|t| \leqq a$ je torej za vse dovolj velike n vrednost $|f_n(t)| = \sqrt[n]{|f(t)|}$ tako blizu 1, kot le hočemo.

Naj bosta ζ_1 in ζ_2 neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni po poljubnem zakonu $G(x)$ s karakteristično funkcijo $g(t)$. Količina $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ ima karakteristično funkcijo

$$g^*(t) = Me^{it(\zeta_1 - \zeta_2)} = Me^{it\zeta_1} Me^{-it\zeta_2} = g(t)\overline{g(t)} = |g(t)|^2$$

Iz tega sprevidimo, da je kvadrat absolutne vrednosti karakteristične funkcije tudi karakteristična funkcija, in sicer realna.

Vsako realno karakteristično funkcijo $h(t)$ je mogoče zapisati v obliki

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, dH(x)$$

pri čemer je $H(x)$ ustrezna porazdelitvena funkcija. Za funkcijo $h(t)$ velja pri vsakem realnem t ocena

$$1 - h(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 2tx) \, dH(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 tx \, dH(x) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx)(1 + \cos tx) \, dH \leqq 4\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) \, dH(x) = 4(1 - h(t))$$

Potemtakem je za karakteristično funkcijo $|f_n(t)|^2$ pri vsakem realnem t

$$1 - |f_n(2t)|^2 \leqq 4(1 - |f_n(t)|^2)$$

Če je torej n tako velik, da je pri danem $\varepsilon > 0$ za vsak $|t| \leqq a$

$$1 - |f_n(t)| < \varepsilon$$

je za take t in n

$$1 - |f_n(2t)| \leqq 1 - |f_n(2t)|^2 \leqq 4(1 - |f_n(t)|^2) \leqq 8(1 - |f_n(t)|) < 8\varepsilon$$

Ker je ε poljubno majhen, je potemtakem za vse dovolj velike n in vse $|t| \leqq 2a$ funkcija $f_n(t)$ in z njo tudi $f(t)$ različna od nič. S prav takim sklepom ugotovimo, da $f(t)$ ni enaka nič na intervalu $[-4a, 4a]$, in tako naprej. Izrek je dokazan.

Izreka I ni mogoče obrniti. Obstajajo namreč karakteristične funkcije, ki niso neomejeno deljive, pa so vendar povsod različne od nič.

V čem je pomen izreka I? Zagotavlja nam, da je funkcija $f_n(t)$, ki ustreza relaciji (12) in je zvezna in ima v točki 0 vrednost 1, natanko določena s funkcijo $f(t)$ ali z njeno porazdelitveno funkcijo $F(x)$.

II. *Porazdelitvena funkcija vsote končnega števila med seboj neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih neomejeno deljivo, je neomejeno deljiva.*

Dovolj je, da se prepričamo o tem za vsoto dveh med seboj neodvisnih neomejeno deljivih slučajnih spremenljivk. Naj bosta ξ in η taki slučajni spremenljivki, $\zeta = \xi + \eta$, njihove karakteristične funkcije pa zapovrstjo $f(t)$, $g(t)$ in $h(t)$. Za vsak naravni n je

$$f(t) = (f_n(t))^n \qquad g(t) = (g_n(t))^n$$

Pri tem sta $f_n(t)$ in $g_n(t)$ karakteristični funkciji in kajpada tudi $h_n(t) = f_n(t)\, g_n(t)$. Očitno je $h(t) = (h_n(t))^n$ pri vsakem n in izrek je dokazan.

Tudi tega izreka ni mogoče obrniti. Obstajajo namreč take med seboj neodvisne slučajne spremenljivke, ki niso porazdeljene neomejeno deljivo, njihova vsota pa ima kljub temu neomejeno deljiv porazdelitveni zakon.

III. *Če je $F^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ zaporedje neomejeno deljivih porazdelitvenih funkcij in konvergira to zaporedje proti porazdelitveni funkciji $F(x)$ povsod, kjer je ta zvezna, je $F(x)$ tudi neomejeno deljiva.*

Zares: Naj bo $f^{(k)}(t)$ zaporedju $F^{(k)}(x)$ ustrezno zaporedje karakterističnih funkcij. Zaradi lastnosti B) karakterističnih funkcij je zaporedje $f^{(k)}(t)$ na vsakem končnem intervalu enakomerno konvergentno in je

$$f(t) = \lim_{k \to \infty} f^{(k)}(t)$$

karakteristična funkcija limitne porazdelitvene funkcije $F(x)$. Pri vsakem naravnem k in n je

$$f_n^{(k)}(t) = \sqrt[n]{f^{(k)}(t)}$$

karakteristična funkcija. Zaradi enakomerne konvergence je

$$f_n(t) = \lim_{k \to \infty} f_n^{(k)}(t)$$

zvezna funkcija. Zvezna limita zaporedja karakterističnih funkcij pa je sama karakteristična funkcija. Za vsak n torej obstaja taka karakteristična funkcija $f_n(t)$, da je $f(t) = (f_n(t))^n$. To pa je ravno tisto, kar je bilo treba dokazati.

IV. *Porazdelitvena funkcija $F(x)$ je neomejeno deljiva natanko takrat, kadar je ali konvolucija končnega števila Poissonovih porazdelitev ali limita, proti kateri konvergira zaporedje Poissonovih porazdelitev povsod, kjer je $F(x)$ zvezna.*

Dokažimo! Da je konvolucija končnega števila Poissonovih porazdelitev in limita zaporedja takih porazdelitev neomejeno deljiva, sledi iz izrekov II in III in iz resnice, da je Poissonova porazdelitev neomejeno deljiva. Treba je torej le še ugotoviti, da je mogoče imeti vsako neomejeno deljivo porazdelitev $F(x)$ ali za konvolucijo končnega števila Poissonovih porazdelitev ali za limito zaporedja teh porazdelitev.

Naj bo torej $f(t)$ karakteristična funkcija poljubne neomejeno deljive porazdelitve. Tedaj je pri vsakem naravnem n funkcija $f_n(t) = \sqrt[n]{f(t)}$ karakteristična in zato obstaja taka porazdelitvena funkcija $F_n(x)$, da je

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_n(x) \tag{13}$$

Očitno je

$$\lim_{n\to\infty} n\,(f_n(t) - 1) = \lim_{n\to\infty} n\,\left(\sqrt[n]{f(t)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\left(e^{\frac{1}{n}\ln f(t)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{n}\ln f(t) + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \ln f(t)$$

Ker je integral (13) konvergenten, obstaja tako zaporedje delitev realne osi s točkami $c_0 < c_1 < \ldots < c_m$ na podintervale, da je

$$f_n(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} e^{itc_k}\,(F_n(c_k) - F_n(c_{k-1}))$$

Postavimo

$$a_k = n\,(F_n(c_k) - F_n(c_{k-1}))$$

pa dobimo

$$\ln f(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k\,(e^{itc_k} - 1)$$

Pri vsakem m je vsota na desni strani zadnje relacije logaritem karakteristične funkcije za konvolucijo m Poissonovih zakonov in je zato tudi sama logaritem karakteristične funkcije nekega Poissonovega zakona. Torej je $f(t)$ res limita zaporedja karakterističnih funkcij za Poissonove zakone. Kajpak je to zaporedje lahko od nekega m naprej stacionarno. Tedaj je $f(t)$ karakteristična funkcija neke končne konvolucije Poissonovih zakonov. Izrek IV je dokazan.

Zadnji izrek nam sicer kaže izvir neomejeno deljivih porazdelitev, vendar se iz njega ne da spoznati, kakšna je njihova eksplicitna oblika. Ta za porazdelitvene zakone same tudi ni znana. Pač pa vemo, kakšno obliko ima karakteristična funkcija neomejeno deljivega zakona.

V. *Funkcija $f(t)$ je karakteristična funkcija neomejeno deljive porazdelitve natanko takrat, kadar je mogoče izraziti njen logaritem v obliki*

$$\ln f(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itz} - 1 - \frac{itz}{1+z^2}\right) \frac{1+z^2}{z^2}\, dG(z) \tag{14}$$

Pri tem je γ poljubna realna konstanta, $G(z)$ omejena nepadajoča funkcija, v točki $z = 0$ pa je integrand definiran s predpisom

$$\left[\left(e^{itz} - 1 - \frac{itz}{1+z^2}\right) \frac{1+z^2}{z^2}\right]_{z=0} = -\frac{t^2}{2}$$

Reprezentacija $\ln f(t)$ s formulo (14) je enolična.

Relacija (14) je Lévyjeva formula, izražava $\ln f(t)$ z Lévyjevo formulo pa se imenuje kanonska reprezentacija karakteristične funkcije $f(t)$.

Dokaz izreka V bi bil za ta sestavek preveč zamuden.

Tudi dokazovanje, da konvergira porazdelitveni zakon slučajnih spremenljivk (8) z rastočim n proti nekemu neomejeno deljivemu zakonu, bi bilo v splošnem primeru, ko zahtevamo od spremenljivk ξ_{nk} le to, da so v vsaki vrstici med seboj neodvisne in asimptotično konstantne, preveč zapleteno. Zato se bomo tu omejili na tako dvojno zaporedje slučajnih spremenljivk

$$\begin{array}{l} \xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1k_1} \\ \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{2k_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

v katerem slučajne spremenljivke ξ_{nk} ustrezajo zahtevam:

1) pri vsakem n so spremenljivke ξ_{nk} $(1 \leqq k \leqq k_n)$ med seboj neodvisne;
2) pri vsakem n je

$$D\xi_{n1} + D\xi_{n2} + \ldots + D\xi_{nk_n} \leqq C < \infty \tag{15}$$

3) velja relacija

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq k_n} D\xi_{nk} = 0 \tag{16}$$

Tako dvojno zaporedje se imenuje *elementarni sistem*. Za prihodnjo rabo se domenimo: za vsak n in $1 \leqq k \leqq k_n$ naj bo $F_{nk}(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke ξ_{nk} in $F_{nk}^*(x)$ porazdelitvena funkcija spremenljivke $\xi_{nk}^* = \xi_{nk} - M\xi_{nk}$. Ustrezni karakteristični funkciji naj bosta $f_{nk}(t)$ in $f_{nk}^*(t)$. Dokažimo:

VI. *Porazdelitvena funkcija vsote*

$$\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nk_n} \tag{17}$$

členov iz elementarnega sistema konvergira proti neki porazdelitveni funkciji natanko takrat, kadar konvergirajo proti tej funkciji neomejeno deljivi zakoni s kanonsko reprezentacijo

$$\psi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} (i\, t\, M\, \xi_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}^*(x)) \tag{18}$$

Za dokaz se najprej prepričajmo, da je z (18) res dan logaritem karakteristične funkcije za neki neomejeno deljiv zakon. S tem namenom postavimo

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{k_n} M\, \xi_{nk} \qquad K_n(z) = \sum_{k-1}^{k_n} \int_{-\infty}^{z} x^2\, dF_{nk}^*(x)$$

Funkcija $K_n(z)$ je nepadajoča. Tudi omejena je, saj je nenegativna in je zaradi (15)

$$K_n(\infty) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF_{nk}^*(x) = \sum_{k=1}^{k_n} D\, \xi_{nk}^* = \sum_{k=1}^{k_n} D\, \xi_{nk} \leqq C < \infty$$

Nadalje je

$$\sum_{k=1}^{k_n} dF_{nk}^*(x) = \frac{1}{x^2}\, dK_n(x)$$

in ker je za vsak k

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_{nk}^*(x) = M\, \xi_{nk}^* = 0 \tag{19}$$

velja relacija

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\, \frac{1}{x^2}\, dK_n(x)$$

Torej je za vsak n

$$\psi_n(t) = i\, \gamma_n\, t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itz} - 1 - itz)\, \frac{1}{z^2}\, dK_n(z)$$

To ni nič drugega kot posebna oblika Lévyjeve formule, če v njej postavimo

$$K_n(z) = \int_{-\infty}^{z} (1 + x^2)\, dG(x)$$

Torej je z izrazom (18) res dan logaritem karakteristične funkcije nekega neomejeno deljivega zakona.

Zaznamujmo s $f_n(t)$ karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke (17) in s $\varphi(t)$ karakteristično funkcijo porazdelitve, proti kateri konvergira po-

razdelitveni zakon slučajne spremenljivke (17). Na vsakem končnem intervalu za t je enakomerno

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \varphi(t)$$

Izrek VI bo dokazan, ko ugotovimo, da je na vsakem končnem intervalu za t enakomerno

$$\lim_{n\to\infty} | \ln f_n(t) - \psi_n(t) | = 0 \tag{20}$$

Zapišimo najprej

$$\ln f_n(t) = \ln \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \ln f_{nk}(t)$$

Ker je za vsak k od 1 do k_n

$$f_{nk}(t) = e^{itM\xi_{nk}} f_{nk}^*(t)$$

je tudi

$$\ln f_n(t) = it \sum_{k=1}^{k_n} M\,\xi_{nk} + \sum_{k=1}^{k_n} \ln f_{nk}^*(t) \tag{21}$$

Postavimo

$$f_{nk}^*(t) - 1 = a_{nk} \qquad a_n = \max_{1\leq k\leq k_n} | a_{nk} |$$

Zaradi (19) velja relacija

$$a_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\, dF_{nk}^*(x) \tag{22}$$

Vzemimo poljuben $T > 0$ in naj bo $|t| \leqq T$. Če uporabimo v (22) oceno

$$| e^{ia} - 1 - ia | \leqq \frac{a^2}{2}$$

ki velja za vsak realni a, dobimo

$$| a_{nk} | \leqq \frac{T^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF_{nk}^*(x) = \frac{T^2}{2} D\xi_{nk} \tag{23}$$

Od tod in iz (16) sledi, da je na intervalu $|t| \leqq T$ enakomerno

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{24}$$

Od zadosti velikega n naprej je torej za take t za vsak k od 1 do k_n

$$| a_{nk} | < \tfrac{1}{2} \tag{25}$$

in zato

$$\ln f_{nk}^*(t) = \ln(1 + a_{nk}) = a_{nk} - \frac{a_{nk}^2}{2} + \frac{a_{nk}^3}{3} - \ldots$$

Naj bo $R_n = \ln f_n(t) - \psi_n(t)$. Zaradi (18) in (21) je

$$R_n = it \sum_{k=1}^{k_n} M\,\xi_{nk} + \sum_{k=1}^{k_n} \ln f_{nk}^*(t) - it \sum_{k=1}^{k_n} M\,\xi_{nk} - \sum_{k=1}^{k_n} (f_{nk}^*(t) - 1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} (\ln f_{nk}^*(t) - a_{nk})$$

Za vse zadosti velike n sledi iz ocene (25)

$$|R_n| \leq \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{|a_{nk}|^s}{s} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{|a_{nk}|^2}{1 - |a_{nk}|} < \sum_{k=1}^{k_n} |a_{nk}|^2 \leq a_n \sum_{k=1}^{k_n} |a_{nk}|$$

Uporabimo še oceno (23) in relacijo (15):

$$|R_n| < \tfrac{1}{2} C T^2 a_n$$

Iz te neenačbe in iz (24) pa že sledi relacija (20), ki jo je bilo treba dokazati.

Iz izreka VI se brž dobi tale posledica.

VII. *Vsaka porazdelitev, proti kateri konvergirajo porazdelitve vsot v elementarnem sistemu, je neomejeno deljiva in ima končno disperzijo. Vsaka neomejeno deljiva porazdelitev s končno disperzijo je limitna porazdelitev vsot iz nekega elementarnega sistema.*

Res: Iz izreka VI sledi, da je vsaka porazdelitev, proti kateri konvergirajo porazdelitve vsot (17), hkrati limita zaporedja neomejeno deljivih porazdelitev, in je zato po izreku III neomejeno deljiva. Da ima limitna porazdelitev končno disperzijo, sledi iz lastnosti (15) elementarnega sistema. Drugi del izreka VII pa je impliciran v definiciji neomejeno deljive porazdelitve.

2. Stabilne porazdelitve

Dana porazdelitvena funkcija $F(x)$ je *stabilna*, če je mogoče za poljubna $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ in za kakršna koli realna b_1 in b_2 najti tak $a > 0$ in realen b, da je

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b) \tag{26}$$

Leva stran v tej relaciji je konvolucija porazdelitvenih zakonov $F(a_1 x + b_1)$ in $F(a_2 x + b_2)$, se pravi,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(a_1 x + b_1 - y)\, dF(a_2 y + b_2)$$

Stabilno porazdelitev lahko definiramo tudi drugače. Naj bo ξ slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $F(x)$, in $f(t)$ njena karakteristična funkcija. Leva stran v relaciji (26) je tedaj porazdelitvena funkcija vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk η in ζ, od katerih je prva porazdeljena tako kot slučajna spremenljivka $(\xi - b_1)/a_1$, druga pa kot $(\xi - b_2)/a_2$, in sta zato njuni karakteristični funkciji

$$f_\eta(t) = f\left(\frac{t}{a_1}\right) e^{-itb_1/a_1} \qquad f_\zeta(t) = f\left(\frac{t}{a_2}\right) e^{-itb_2/a_2}$$

Potemtakem ima porazdelitvena funkcija na levi strani (26) karakteristično funkcijo

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) exp\left\{-it\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}\right)\right\}$$

Karakteristična funkcija desne strani v (26) pa je $f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-itb/a}$. Označimo izraz

$$\frac{b}{a} - \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}$$

na kratko kar z b. Potem lahko rečemo: Porazdelitveni zakon $F(x)$ s karakteristično funkcijo $f(t)$ je stabilen, če je mogoče za poljubni pozitivni števili a_1 in a_2 najti tako pozitivno število a in tako realno število b, da je za vsak t

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) = f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-ibt} \tag{27}$$

Oglejmo si nekaj primerov.

1. Slučajna spremenljivka ξ je porazdeljena po nepravem zakonu, če obstaja tako realno število c, da je $P(\xi = c) = 1$. Karakteristična funkcija za to porazdelitev je $f(t) = e^{ict}$. Za poljubna pozitivna a_1 in a_2 je

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) = e^{itc/a_1} e^{itc/a_2}$$

Če postavimo $a_1^{-1} + a_2^{-1} = a^{-1}$, dobimo

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) = e^{itc/a} = f\left(\frac{t}{a}\right)$$

Neprava porazdelitev je torej stabilna.

2. Normalna porazdelitev $N(\gamma, \sigma^2)$ ima karakteristično funkcijo

$$f(t) = e^{i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Če sta a_1 in a_2 poljubni pozitivni števili, je

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) = e^{i\gamma t\,(a_1^{-1} + a_2^{-1}) - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 (a_1^{-2} + a_2^{-2})}.$$

Od tod dobimo (27), če postavimo $a_1^{-2} + a_2^{-2} = a^{-2}$ in $a_1^{-1} + a_2^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$. Torej je normalna porazdelitev stabilna.

3. Cauchyjeva porazdelitev

$$p(x) = \frac{c}{\pi\,(c^2 + (x - \gamma)^2)} \qquad c > 0$$

ima karakteristično funkcijo

$$f(t) = e^{i\gamma t - c\,|t|}$$

Da ta ustreza relaciji (27), se prepričamo kot pri nepravi porazdelitvi. Zato je tudi Cauchyjeva porazdelitev stabilna.

V uvodu smo povedali, kakšen je pomen stabilnih porazdelitev. Zdaj pa je čas, da ga tudi dokažemo.

VIII. *Porazdelitvena funkcija $F(x)$ je limitna porazdelitev vsot*

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n \qquad (B_n > 0) \tag{28}$$

neodvisnih in enako porazdeljenih členov s primernimi normirnimi konstantami A_n in B_n natanko takrat, kadar je stabilna.

Torej dokažimo. Naj bo $\varphi(t)$ karakteristična funkcija porazdelitve $F(x)$ in $f(t)$ karakteristična funkcija spremenljivke ξ_1 v vsoti (28). Če je $F(x)$ neprava porazdelitev, vzemimo, da so vse spremenljivke ξ_k $(1 \leqq k \leqq n)$ v vsoti (28) porazdeljene po tem zakonu, postavimo $A_n = 0$ in $B_n = n$. Potem je pri vsakem n tudi spremenljivka ζ_n porazdeljena po zakonu $F(x)$. Vsaka neprava porazdelitev je torej lahko limitna porazdelitev vsot (28). Ker je neprava porazdelitev stabilna, je izrek za ta primer dokazan.

Vzemimo še, da je limitna porazdelitev vsot (28) prava porazdelitev $F(x)$, in dokažimo najprej, da je tedaj

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 1 \tag{29}$$

Vzemimo, da prva od relacij (29) ne velja. Tedaj je zaporedje $\{B_n\}$ omejeno in je mogoče najti v njem tako podzaporedje $\{B_{n_k}\}$, da je

$$\lim_{k\to\infty} B_{n_k} = B \neq \infty$$

Za vsak t je pri $k \to \infty$

$$\left| f\left(\frac{t}{B_{n_k}}\right) \right|^{n_k} = |\varphi(t)|\,(1 + o(1))$$

ali drugače zapisano,

$$|f(t)| = |\varphi(tB_{n_k})|^{1/n_k}(1 + o(1))$$

To je mogoče le, če je $|f(t)| \equiv 1$ in zato tudi $|\varphi(t)| \equiv 1$. Zadnje pa pomeni, da je porazdelitev $F(x)$ neprava. Prišli smo do protislovja, ki potrjuje pravo relacijo (29).

Dokažimo še drugi del (29). Ker je prvi del že dokazan, je pri vseh t

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{t}{B_n}\right) = f(0) = 1$$

in pri $n\to\infty$

$$\left|f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^n = |\varphi(t)|(1 + o(1)) \tag{30}$$

$$\left|f\left(\frac{t}{B_{n+1}}\right)\right|^n = |\varphi(t)|(1 + o(1)) \tag{31}$$

Če postavimo v (30) $B_n\, t/B_{n+1}$ namesto t, v (31) pa $B_{n+1}\, t/B_n$ namesto t, dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi(B_n\, t/B_{n+1})|}{|\varphi(t)|} = 1 \tag{32}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi(B_{n+1}\, t/B_n)|}{|\varphi(t)|} = 1 \tag{33}$$

Če drugi del (29) ne velja, je mogoče izbrati vsaj v enem od zaporedij $\{B_{n+1}/B_n\}$ in $\{B_n/B_{n+1}\}$ tako podzaporedje, ki konvergira proti $B < 1$. Če napravimo v (32) ali (33) limitni prehod po tem podzaporedju, dobimo relacijo

$$\varphi(t) = \varphi(Bt)$$

Uporabimo jo n-krat:

$$\varphi(t) = \varphi(B^n t)$$

Torej je za vsak t

$$|\varphi(t)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi(B^n t)| = \varphi(0) = 1$$

To pa velja le za nepravo porazdelitev. Ker smo to izključili, drži tudi druga relacija (29).

Zdaj bomo pa hitro videli, da je $F(x)$ stabilna. Naj bosta a_1 in $a_2 > a_1$ poljubni pozitivni, b_1 in b_2 pa poljubni realni števili. Zaradi (29) je mogoče dobiti tako zaporedje naravnih števil $m = m(n)$, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_m}{B_n} = \frac{a_2}{a_1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{m}{B_n} = 0$$

Zaznamujmo

$$\frac{B_n}{a_1} = B \qquad \frac{1}{B}(B_n A_n + B_m A_m + b_1 B_n + b_2 B_m) = A$$

in si oglejmo vsoto

$$\frac{B_n}{B}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n - b_1\right) + \frac{B_m}{B}\left(\frac{\xi_{n+1} + \ldots + \xi_{n+m}}{B_m} - A_m - b_2\right) =$$

$$= \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{n+m}}{B} - A \tag{34}$$

Porazdelitveni zakon prvega člena na levi strani relacije (34) konvergira proti $F(a_1 x + b_1)$, porazdelitveni zakon drugega člena pa proti $F(a_2 x + b_2)$. Ker sta člena na levi med seboj neodvisna, konvergira porazdelitev njune vsote proti $F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2)$. Ta vsota pa se da izraziti v obliki

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{m+n}}{B_{m+n}} \cdot \frac{B_{m+n}}{B} - A_{m+n} - (A - A_{m+n})$$

se pravi podobno kot člena na levi strani (34). Torej more konvergirati njen porazdelitveni zakon le proti zakonu z obliko $F(ax + b)$. Potemtakem ustreza $F(x)$ relaciji (26) in je stabilna.

Pokažimo še, da je vsaka prava stabilna porazdelitvena funkcija $F(x)$ lahko limitna porazdelitev vsot (28) neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. V ta namen vzemimo, da so v zaporedju $\{\xi_n\}$ spremenljivke med seboj neodvisne in vse porazdeljene po zakonu $F(x)$. Zaradi (26) imajo delne vsote $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ porazdelitveno funkcijo z obliko $F(a_n x + b_n)$, normirane delne vsote

$$\zeta_n = \frac{\eta_n}{a_n} - b_n$$

pa so vse porazdeljene po zakonu $F(x)$. Izrek VIII je dokazan.

Vsote (28) so poseben primer vsot (8). Od tod, iz izreka VIII in izreka, da je limitna porazdelitev vsot (8) neomejeno deljiva, se vidi, da so stabilne porazdelitve neomejeno deljive. Potemtakem se da tudi pri stabilni porazdelitvi logaritem karakteristične funkcije kanonsko reprezentirati. Precej dolgovezna preiskava, ki je tu ne utegnemo napraviti, pokaže, da velja tale izrek.

IX. *Porazdelitvena funkcija $F(x)$ s karakteristično funkcijo $f(t)$ je stabilna natanko takrat, kadar se da $\ln f(t)$ izraziti v obliki*

$$\ln f(t) = i\gamma t - c\,|t|^{\alpha}\left(1 + i\beta\frac{t}{|t|}\,\omega(t, \alpha)\right) \tag{35}$$

Pri tem je γ poljubno realno število, $c \geqq 0$, $-1 \leqq \beta \leqq 1$, $0 < \alpha \leqq 2$ in

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |t| & \alpha = 1 \end{cases}$$

Karakteristične funkcije stabilnih porazdelitev torej sestavljajo štiriparametrično družino. Nekaj njenih članov že poznamo: 1) vrednost $c = 0$ da nepravo porazdelitev; 2) $\alpha = 2$ ustreza normalni porazdelitvi; 3) $\alpha = 1$, $\beta = 0$ pa je karakteristična funcija Cauchyjeve porazdelitve.

Čeprav je oblika karakteristične funkcije pri stabilnih porazdelitvah znana, pa poznamo le redke stabilne porazdelitve eksplicitno. Kajpak se dajo nekatere splošne lastnosti stabilnih porazdelitev razbrati iz (35). Tako je za pravo stabilno porazdelitev ($c > 0$) skoraj očitno, da ima absolutno integrabilno karakteristično funkcijo. Kot je znano, od tod sledi, da je porazdelitev zvezna in da se izraža njena gostota $p(x)$ v obliki

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt$$

Torej ni nobena prava diskretna porazdelitev stabilna, tudi če je neomejeno deljiva, kot npr. Poissonova. Nadalje povejmo brez dokaza, da je stabilna porazdelitev unimodalna, se pravi, njena gostota ima en sam maksimum.

Če je porazdelitvena funkcija $G(x)$ limitna porazdelitev vsot (28), katerih členi so porazdeljeni po zakonu $F(x)$, rečemo, da $F(x)$ *gravitira* proti $G(x)$. Vse porazdelitvene funkcije, ki gravitirajo proti $G(x)$, sestavljajo *gravitacijsko območje* funkcije $G(x)$. Očitno imajo gravitacijsko območje samo stabilne porazdelitve, te pa vse, saj vsaka stabilna porazdelitev spada v svoje gravitacijsko območje. Gravitacijska območja stabilnih porazdelitev so raziskana precej temeljito. V tem sestavku o dobljenih rezultatih ne moremo razpravljati. Zadovoljimo se s tem, da vsaj navedemo enega od najvažnejših:

X. *Porazdelitvena funkcija $F(x)$ spada v gravitacijsko območje normalne porazdelitve natanko takrat, kadar je*

$$\lim_{X \to \infty} \frac{X^2 \int_{|x| > X} dF(x)}{\int_{|x| < X} x^2 dF(x)} = 0$$

LITERATURA

1. B. V. Gnedenko — A. N. Kolmogorov: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrössen, Berlin 1959.

2. I. A. Ibragimov — J. V. Linnik: Nezavisimye i stacionarno svjazannye veličiny, Moskva 1965.

ZLATI REZ

ALOJZIJ VADNAL

Uvod

V elementarni geometriji se pri obravnavanju zlatega reza navadno omejujemo na razdelitev intervala na dva podintervala, katerih dolžini ustrezata temu znamenitemu delitvenemu zakonu.

Znano razdelitev intervala po pravilu zlatega reza je mogoče posplošiti v dveh smereh. Pri prvi posplošitvi razdelimo interval po pravilu zlatega reza na poljubno veliko število podintervalov tako, da zadoščata dolžini po dveh zaporednih podintervalov sorazmerju, ki definira zlati rez. Pri drugi posplošitvi pa gre za posplošitev delitvenega pravila, po katerem razdelimo interval na dva ali več podintervalov.

Razne delitve intervala na podintervale po bolj splošnih delitvenih pravilih so našle v zadnjih letih široko področje uporabe pri reševanju mnogih problemov dinamičnega programiranja. Marsikateri problem dinamičnega programiranja je namreč formalno mogoče prevesti na problem delitve intervala na podintervale po predpisanem delitvenem pravilu.

Naš namen je pokazati, kako sledi delitev intervala po pravilu zlatega reza kot poseben primer nekega zelo splošnega delitvenega pravila.

Delitev intervala po splošnem delitvenem pravilu

Interval $[a, b]$ želimo razdeliti na n podintervalov z $n + 1$ zaporednimi razdelišči:

$$a = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n, x_{n+1} = b \tag{1}$$

tako, da zadošča vsakih k zaporednih razdelišč diferenčni enačbi:

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}) = 0;$$

pri tem je $i = 1, 2, \ldots, n - k + 2$.

Glede števila zaporednih razdelišč, ki nastopajo v diferenčni enačbi, se bomo v naslednjem omejili na možnost, ko je $k = 3$. Obravnavali bomo torej tale splošni delitveni problem:

Interval $[a, b]$ želimo razdeliti na n podintervalov z $n + 1$ zaporednimi razdelišči (1) tako, da zadoščajo po tri zaporedna razdelišča diferenčni enačbi:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = 0; \tag{2a}$$

pri tem je $i = 2, 3, \ldots, n$ in $x_{i-1} < x_i$.

Če izrazimo iz diferenčne enačbe srednje razdelišče z obema sosednima razdeliščema, dobimo diferenčno enačbo v obliki:

$$x_i = f_{3,2}(x_{i-1}, x_{i+1}). \tag{2b}$$

V tej enačbi ima funkcijski znak dva indeksa; prvi indeks izraža število zaporednih razdelišč, ki nastopajo; drugi indeks pa izraža, na katerem mestu med temi razdelišči nastopa razdelišče, ki je na levi strani enačbe. V našem primeru pomeni indeks 3, da nastopajo tri razdelišča: x_{i-1}, x_i in x_{i+1}; indeks 2 pa izraža, da je med temi razdelišči razdelišče x_i na drugem mestu.

Po predpisanem delitvenem pravilu lahko razdelimo interval na poljubno vnaprej predpisano število podintervalov. Če zahtevamo delitev na večje število podintervalov, razdelimo interval po naslednjem iterativnem delitvenem postopku:

Najprej razdelimo interval na 2 podintervala; poznavajoč razdelitev na 2 podintervala razdelimo nato interval na 3 podintervale; poznavajoč razdelitev na 3 podintervale, razdelimo interval na 4 podintervale itd., dokler ne razdelimo intervala na zahtevano število podintervalov.

Oglejmo si posamezne zaporedne iteracije.

Prva iteracija. Interval razdelimo na 2 podintervala. Srednje razdelišče določimo po delitvenem pravilu (2b). Zaradi tega ima interval naslednja tri razdelišča:

$$x_1 = a,$$

$$x_2 = f_{3,2}(a, b)$$

$$x_3 = b.$$

Druga iteracija. Poznavajoč razdelitev na 2 podintervala razdelimo interval na 3 podintervale z razdelišči

$$a = x_1, x_2, x_3, x_4 = b.$$

Iz prve iteracije že poznamo razdelitev intervala $[x_2, x_4]$ na dva podintervala z razdeliščem x_3, za katerega velja:

$$x_3 = f_{3,2}(x_2, x_4),$$

Ker velja za razdelišče x_2 zaradi diferenčne enačbe:

$$x_2 = f_{3,2}(x_1, x_3),$$

sledi po substituciji enačba:

$$x_2 = f_{3,2}(x_1, f_{3,2}(x_2, x_4),$$

iz katere izračunamo razdelišče x_2 ter dobimo:

$$x_2 = f_{4,2}(x_1, x_4).$$

Pri tem imata indeksa pri funkcijskem znaku naslednji pomen: med 4 razdelišči, med katerimi je x_1 prvo in x_4 četrto, je razdelišče x_2 drugo.

Če vstavimo izračunano razdelišče v izraz za x_3, dobimo:

$$x_3 = f_{3,2}(f_{4,2}(x_1, x_4), x_4) = f_{4,3}(x_1, x_4).$$

Tu pomenita indeksa 4 in 3: med štirimi razdelišči, med katerimi je x_1 prvo in x_4 četrto, je razdelišče x_3 tretje.

Pri razdelitvi intervala na podintervale dobimo torej naslednja razdelišča:

$$x_1 = a,$$
$$x_2 = f_{4,2}(a, b),$$
$$x_3 = f_{4,3}(a, b),$$
$$x_4 = b.$$

Četrta iteracija. Interval razdelimo na štiri podintervale. Iz druge iteracije že poznamo razdelitev intervala $[x_2, x_5]$ na tri podintervale; zato je:

$$x_3 = f_{4,2}(x_2, x_5),$$

ker velja zaradi diferenčne enačbe:

$$x_2 = f_{3,2}(x_1, x_3),$$

sledi za x_2 enačba:

$$x_2 = f_{3,2}(x_1, f_{4,2}(x_2, x_5)),$$
$$x_2 = f_{5,2}(x_1, x_5).$$

Nato izračunamo še druga razdelišča takole:

$$x_3 = f_{4,2}(f_{5,2}(x_1, x_5), x_5) = f_{5,3}(x_1, x_5),$$
$$x_4 = f_{3,2}(x_3, x_5) = f_{3,2}(f_{5,3}(x_1, x_5), x_5) = f_{5,4}(x_1, x_5).$$

Pri razdelitvi intervala na štiri podintervale dobimo torej naslednja razdelišča:

$$x_1 = a,$$
$$x_2 = f_{5,2}(a, b),$$
$$x_3 = f_{5,3}(a, b),$$
$$x_4 = f_{5,4}(a, b),$$
$$x_5 = b.$$

Ta postopek nadaljujemo do konca. Če upoštevamo, da smo pri predzadnji iteraciji dobili razdelitev intervala na $n - 1$ podintervalov z razdelišči:

$$x_1 = a,$$
$$x_2 = f_{n,2}(a, b),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} = f_{n,\,n-1}(a, b),$$

$$x_n = b,$$

dobimo pri zadnji iteraciji razdelišča takole:

Po prejšnji iteraciji že poznamo razdelitev intervala $[x_2, x_{n+1}]$ na $n-1$ podintervalov, imamo torej:

$$x_3 = f_{n,\,2}(x_2, x_{n+1}).$$

Ker je zaradi diferenčne enačbe:

$$x_2 = f_{3,\,2}(x_1, x_3),$$

sledi za x_2 enačba:

$$x_2 = f_{3,\,2}(x_1, f_{n,\,2}(x_2, x_{n+1})),$$

iz katere izračunamo:

$$x_2 = f_{n+1,\,2}(x_1, x_{n+1}).$$

Iz rezultatov, ki jih poznamo iz predzadnje iteracije, izračunamo še druga razdelišča:

$$x_3 = f_{n,\,2}(x_2, x_{n+1}) = f_{n+1,\,3}(a, b)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = f_{n,\,n-1}(x_2, x_{n+1}) = f_{n+1,\,n}(a, b)$$

Pri razdelitvi intervala na n podintervalov dobimo končno razdelišča:

$$x_1 = a,$$

$$x_2 = f_{n+1,\,2}(a, b),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = f_{n+1,\,n}(a, b),$$

$$x_{n+1} = b.$$

Če diferenčna enačba, ki podaja delitveno pravilo, ni precej enostavna in če je število podintervalov, na katere moramo razdeliti interval, veliko, postane opisani splošni iterativni postopek razdeljevanja z numeričnega vidika zelo zamuden pa tudi težaven. Toda, če ne najdemo kake lažje poti, se mu ne moremo izogniti. Pri kakih diferenčnih enačbah, ki se odlikujejo po kakih posebno preprostih lastnostih, pa je mogoče ubrati kako krajšo pot in nadomestiti opisani iterativni postopek s kako mnogo bolj preprosto metodo razdeljevanja.

V naslednjem si bomo ogledali dva taka preprosta primera. Kot prvi primer bomo obravnavali delitev intervala po pravilu, ki temelji na kaki konveksni linearni sestavi. Kot drugi primer pa bomo obravnavali delitev intervala po pravilu zlatega reza; ob tem bomo spoznali, da je delitev po pravilu zlatega reza le neki poseben primer delitve na osnovi konveksne linearne sestave.

Delitev na osnovi konveksne linearne sestave

Vzemimo diferenčno enačbo takega tipa, da je vmesna točka x_i dana konveksna linearna sestava obeh sosednih točk x_{i-1} in x_{i+1}; v tem primeru ima diferenčna enačba obliko:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = px_{i-1} - x_i + (1-p)\, x_{i+1} = 0$$

oziroma obliko:

$$x_i = f_{3,2}(x_{i-1}, x_{i+1}) = px_{i-1} + (1-p)\, x_{i+1};$$

pri tem zadošča spremenljivka p neenačbi:

$$0 < p < 1.$$

S substitucijo

$$k = \frac{p}{1-p}$$

prevedemo diferenčno enačbo v obliko:

$$x_i = f_{3,2}(x_{i-1}, x_{i+1}) = \frac{k}{1+k}\, x_{i-1} + \frac{1}{1+k}\, x_{i+1}. \tag{3}$$

Za delitev intervala na osnovi take diferenčne enačbe velja izrek:

Dolžine zaporednih podintervalov tvorijo geometrično zaporedje s kvocientom k.

Dokaz. Vzemimo dva zaporedna podintervala

$$[x_{i-1}, x_i] \quad \text{in} \quad [x_i, x_{i+1}].$$

Če izrazimo x_i z vrednostjo na desni strani diferenčne enačbe (3), dobimo dolžino prvega podintervala:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{1+k}(x_{i+1} - x_{i-1}),$$

in dolžino drugega podintervala:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{k}{1+k}(x_{i+1} - x_{i-1}).$$

Drugi podinterval je torej k-krat daljši od prvega; s tem pa je izrek dokazan.

Dokazani izrek lahko izkoristimo, da se izognemo zamudni delitvi intervala po prej opisanem splošnem iterativnem postopku, ki ga lahko nadomestimo z navadnim geometričnim interpoliranjem razdelišč. Pri taki delitvi je lahko zelo elementarno dokazati izrek:

Če razdelimo interval [a, b] na n podintervalov na osnovi konveksne linearne sestave (3), tedaj izračunamo i-to razdelišče po obrazcu:

$$x_i = f_{n+1,\,i}(a, b) = a + (b - a)\,\frac{k^{i-1} - 1}{k^n - 1} \tag{4}$$

Ta obrazec obvlada delitev intervala na podintervala za vsako posebno konveksno linearno sestavo in za vsako predpisano število podintervalov.

Zlati rez

Razdelitev intervala $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ na dva podintervala z vmesnim razdeliščem x_i po pravilu zlatega reza je definirana z znanim stalnim sorazmerjem:

$$(x_{i-1} - x_{i-1}) : (x_i - x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) : (x_{i+1} - x_i).$$

Iz tega sorazmerja dobimo za diferenčno enačbo, ki definira zlati rez, naslednjo obliko:

$$x_i = f_{3,\,2}(x_{i-1}, x_{i+1}) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\,x_{i-1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\,x_{i+1} \tag{5}$$

Ker sta oba koeficienta v zadnjem obrazcu pozitivna in ker je njuna vsota enaka 1, sledi, da je pri zlatem rezu vmesno razdelišče konveksna linearna sestava obeh sosednih razdelišč. Pri tem je po prejšnjem:

$$p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad 1 - p = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = k.$$

Po vpeljavi koeficienta k dobi diferenčna enačba (5) obliko:

$$(k + 1)\,x_i = k\,x_{i-1} + x_{i+1} \tag{5a}$$

Ker je zlati rez definiran z določeno konveksno linearno sestavo, veljata za dolžine podintervalov izreka:

Če razdelimo interval po pravilu zlatega reza na poljubno število podintervalov, tedaj tvorijo dolžine zaporednih podintervalov padajoče geometrično zaporedje s kvocientom

$$k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618\,..$$

Če razdelimo interval [a, b] po pravilu zlatega reza na n podintervalov, tedaj izračunamo i-to razdelišče po obrazcu (4), v katerem ima parameter k zgoraj navedeno vrednost.

Pri zlatem rezu velja za dolžine treh zaporednih podintervalov izrek:

Dolžina vsakega podintervala je enaka vsoti dolžin dveh njemu neposredno sledečih podintervalov:

$$x_{i+1} - x_i = x_{i+3} - x_{i+1}.$$

Dokaz. Po diferenčni enačbi (5a) veljata enačbi:

$$x_i = \frac{k+1}{k} x_{i+1} - \frac{1}{k} x_{i+2},$$

$$x_{i+2} = \frac{k}{k+1} x_{i+1} + \frac{1}{k+1} x_{i+3}.$$

Upoštevajoč ti dve enačbi sledi:

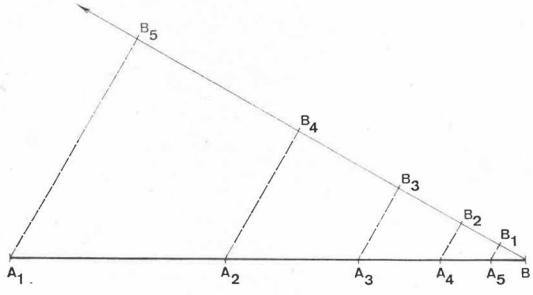
$$x_{i+1} - x_i = \left(1 - \frac{k+1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) x_{i+1} + \frac{1}{k(k+1)} x_{i+3}.$$

Koeficient pri prvem členu na levi strani je enak -1, koeficient pri drugem členu pa $+1$; zato velja izrek, ki smo ga želeli dokazati.

Interval lahko hitro razdelimo na predpisano število podintervalov po pravilu zlatega reza tako, da izračunamo vsa razdelišča po obrazcu (4).

Jasno je, da bi lahko delili interval tudi po zgoraj obravnavanem splošnem iterativnem postopku; to bi bilo sicer precej zamudno, bi pa na primeru zlatega reza lepo ilustriralo splošni postopek,

Če pa upoštevamo zadnji izrek, po katerem je dolžina vsakega podintervala enaka vsoti dolžin naslednjih dveh podintervalov, pa lahko geometrično konstruiramo razdelitev intervala po pravilu zlatega reza na poljubno predpisano število podintervalov.



V ta namen konstruiramo najprej razdelitev poljubno dolgega intervala na predpisano število podintervalov. Razdelitev konstruiramo, kakor se vidi na sliki, retrogradno. Na poltraku iz točke B vzamemo poljuben interval BB_2, ki ga z znano konstrukcijo razdelimo s točko B_1 po pravilu zlatega reza; pri konstrukciji uberemo tako smer, da je dolžina intervala BB_1 manjša od dolžine intervala B_1B_2. Točko B_3 dobimo tako da nanesemo na poltrak na levo od točke B_2 interval BB_2. Točko B_4 dobimo tako, da nanesemo na poltrak na levo od točke B_3 interval B_1B_3 itd. Ta postopek nadaljujemo, dokler ne dobimo na poltraku zahtevano število podintervalov. Na naši sliki smo tako konstruirali 5 podintervalov tako, da je interval BB_5 razdeljen po pravilu zlatega reza na 5 podintervalov. Razdelitev na prvotnem intervalu A_1B dobimo tako, da projiciramo nanj razdelitev na pomožnem poltraku.

KVANTNA ELEKTRONIKA

A. M. PROKOROV*
Lebedev Institut, Moskva

Kvantna elektronika je nastala ob koncu leta 1954 in v začetku leta 1955.[1,2] Tedaj so bile izdelane tako teoretske osnove kakor tudi prvi molekularni oscilator. Kvantna elektronika temelji na pojavu stimulirane emisije, ki jo je napovedal že Einstein leta 1917, dejansko pa se je razvila precej pozneje. Povsem naravno je, da se vprašamo, zakaj niso naredili kvantnih oscilatorjev in ojačevalcev mnogo prej, npr. v letih 1930—40. Da bi poskusil odgovoriti na to vprašanje, moram najprej povedati nekaj besed o osnovah kvantne elektronike.

Kakor sem že povedal, je pojav stimulirane emisije napovedal že Einstein. Poznano je, da more atom v vzbujenem stanju oddati energijo v obliki sevanja na dva načina. Prva možnost je spontana emisija, to je, atom seva brez zunanjega vzroka. Na tem principu (spontani emisiji) temelje običajni svetlobni izvori (žarnice, neonske cevi itd.). Znanstveniki, ki so se ukvarjali z optično spektroskopijo, so že precej let poznali emisijo te vrste. Druga možnost, kako se atom lahko znebi odvečne energije, je stimulirana emisija. Einstein je dognal, da je ta pojav nujen, če želimo opisati termodinamsko ravnovesje med elektromagnetnim poljem in atomi. Do stimulirane emisije pride, če vzbujen atom seva zaradi interakcije z zunanjim poljem. Opraviti imamo torej z dvema kvantoma, s kvantom zunanjega polja in s kvantom, ki ga seva atom sam. Teh dveh kvantov ne moremo ločiti, ker imata identično smer razširjanja in frekvenco. Ta pomembna značilnost induciranega sevanja, na katero je prvi opozoril Dirac leta 1927, je omogočila konstrukcijo kvantnih oscilatorjev.

Da bi mogli opazovati stimulirano emisijo, je potrebno dvoje:

1. imeti moramo atome v vzbujenih stanjih,

2. verjetnost za stimulirano emisijo mora biti večja od verjetnosti za spontano emisijo. V termičnem ravnovesju optični nivoji atomov niso zasedeni. Če atome vzbudimo, preidejo zaradi spontane emisije na nižji nivo. Pri običajnih gostotah svetlobne energije je namreč verjetnost za stimulirano emisijo izredno majhna. Raziskovalci, ki so delali na področju optične spektroskopije, zaradi tega stimulirane emisije sploh niso jemali v poštev, in vsaj nekateri med njimi so jo očitno imeli le za nekakšno »umetnijo« teoretikov, vendar brez praktičnega pomena.

Če bi imeli vse atome v vzbujenem stanju, je povsem jasno, da bi moral tak sistem ojačevati elektromagnetno valovanje. To so spoznali že mnogi znanstveniki pred letom 1940, vendar ni nihče izmed njih predlagal, da bi na tej

* Ta članek je prevod govora, ki ga je avtor imel v Stockholmu dne 11. decembra 1964, ko je skupaj z N. G. Basovom in C. H. Townesom sprejel Nobelovo nagrado za fiziko.

osnovi konstruirali generatorje svetlobe. Čeprav se čudno sliši, bi v principu lahko naredili optične kvantne oscilatorje (laserje) že pred letom 1940. Manjkalo pa je še nekaj bistvenih dosežkov, ki jih je prinesel šele razvoj radiofrekvenčne spektroskopije po drugi svetovni vojni. Šele raziskovalci, ki so delali na področju radiofrekvenčne spektroskopije, so položili temelje za razvoj kvantne elektronike.[1, 2]

Kako naj to razumemo? Pomagalo jim je nekaj ugodnih okoliščin, s katerimi si raziskovalci na področju optične spektroskopije niso mogli pomagati.

V nasprotju z optičnim področjem je zasedenost vzbujenih stanj v radiofrekvenčnem področju v termičnem ravnovesju znatna, zato je seveda treba upoštevati stimulirano emisijo. Če označimo koncentracijo delcev na spodnjem nivoju z n_1 in na vzbujenem nivoju z n_2, moremo absorpcijski koeficient za elektromagnetno valovanje napisati v obliki

$$a = \frac{1}{v} h\nu (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \tag{1}$$

Koeficient B_{12} meri verjetnost absorpcije, koeficient B_{21} pa verjetnost spontane emisije. Če nivoja nista degenerirana, velja $B_{12} = B_{21}$ in enačba (1) pride v obliko

$$a = \frac{1}{v} h\nu (n_1 - n_2) B_{12} \tag{2}$$

Če pade frekvenca ν v vidni del spektra, smemo s precejšnjo natančnostjo reči, da je $n_2 = 0$, absorpcijski koeficient pa tedaj postane

$$a = \frac{1}{v} h\nu n_1 B_{12} \tag{3}$$

V vidnem delu spektra je torej absorpcijski koeficient odvisen le od zasedenosti nižjega stanja. V radiofrekvenčnem področju pa je, nasprotno, $h\nu \ll kT$, in

$$n_2 = n_1 e^{-h\nu/hT} \approx n_1 \left(1 - \frac{h\nu}{kT}\right)$$

ter sta torej zasedenosti zgornjega in spodnjega nivoja skoraj enaki. Absorpcijski koeficient je v tem primeru

$$a = \frac{1}{v} h\nu n_1 B_{12} \frac{h\nu}{kT} \tag{4}$$

torej je za faktor $kT/h\nu$ manjši, kakor bi bil brez navzočnosti stimulirane emisije. Zaradi tega morajo vsi radiofrekvenčni spektroskopisti upoštevati učinek stimulirane emisije. Še več, da bi zvečali absorpcijski koeficient, je treba znižati temperaturo in s tem zmanjšati zasedenost vzbujenih stanj ter verjetnost za stimulirano emisijo. Enačba (2) pove, da postane absorpcijski koeficient negativen za neravnovesne sisteme, pri katerih je $n_2 > n_1$. Tak sistem torej ojačuje elektromagnetno valovanje. Take sisteme so fiziki za

radiofrekvečno področje v principu že dolgo poznali. Če pošljemo curek molekul ali atomov skozi nehomogeno električno ali magnetno polje, moremo ločiti molekule, ki so v določenih energijskih stanjih. Iz curkov lahko izločimo tudi tiste molekule, ki so le v zgornjem energijskem stanju. Absorpcijski koeficient ima največjo absolutno vrednost, če so molekule le v spodnjem ali pa le v zgornjem energijskem stanju. V drugem primeru je seveda absorpcijski koeficient negativen in molekulski sistem deluje kot ojačevalec.

Vsak ojačevalec pa lahko deluje tudi kot oscilator, če ustvarimo povratno zvezo, to je, če energijo vodimo od izhoda spet k vhodu. Teorija oscilatorjev v radiofrekvenčnem področju je dokaj razvita. Pri opisu oscilatorjev se mnogokrat uporablja pojem elementa z »negativno upornostjo«, to je elementa, v katerem pride do negativnih izgub. Pri kvantnem oscilatorju je tak »element« sredstvo z negativnim absorpcijskim koeficientom. Pogoj za nastop oscilacij lahko torej za kvantni oscilator napišemo v enaki obliki kot za klasični radiofrekvenčni oscilator. Podobno kot v radijski tehniki moremo tudi za kvantni oscilator pričakovati, da bodo oscilacije monokromatske.

Tako kot pri klasičnem je tudi pri kvantnem oscilatorju (laserju ali maserju) resonančni krog bistveni del oscilatorja. Resonatorji v mikrovalovnem področju pa so bili že poznani in so jih uporabili pri maserjih. Vsi bistveni elementi maserjev so bili torej vsak zase že dalj časa znani, treba jih je bilo le sestaviti, da bi naredili maser. Članka, ki sta opisala to sintezo, sta bila skoraj hkrati neodvisno objavljena v ZSSR in ZDA. Oba sta opisovala konstrukcijo radiofrekvenčnih spektrometrov z visoko ločljivostjo na temelju molekulskih žarkov.

Ta dva članka sta položila temelje kvantni elektroniki in prvi uspehi na tem področju so spodbudili nadaljnji razvoj. Leta 1955 je bila predlagana nova metoda za ustvaritev negativne absorpcije — metoda optičnega črpanja.[3] Omogočila je konstrukcijo cele vrste novih kvantno-elektronskih naprav, med njimi kvantnih ojačevalcev na osnovi elektronske paramagnetne resonance.[4, 5] Kvantne naprave te vrste je Townes imenoval »maserje«. Človek bi pričakoval, da bomo po uspešni konstrukciji maserjev v mikrovalovnem področju prav kmalu dobili tudi kvantne ojačevalce za optično področje (laserje). Vendar do tega ni prišlo. Oscilatorje te vrste so napravili šele pet ali šest let pozneje.

To zamudo sta povzročili dve težavi: prva, da tedaj še ni bilo resonatorjev za optično področje, in druga, da ni bilo znano, kako naj bi dosegli invertirano zasedbo stanj v optičnem področju.

Oglejmo si najprej problem resonatorjev. Znano je, da se je radijska tehnika začela v dolgovalovnem področju, kjer so za resonančne kroge uporabljali kombinacije tuljav in kondenzatorjev. Velikost resonatorja je bila tu mnogo manjša od valovne dolžine. Pozneje, ko se je radijska tehnika razširila v kratkovalovno področje, so uporabljali resonančne votline, katerih dimenzije so bile enakega reda velikosti kot valovna dolžina. Brez primernih resonatorjev ni bilo mogoče prodreti v optično področje in šele leta 1958 so predlagali konstrukcijo tako imenovanih odprtih resonatorjev za to področje.[6, 7] To so bili v bistvu Fabry-Perotovi interferometri, pri katerih so pozneje ravna zrcala nadomestili s krogelnimi. Po velikosti so ti resonatorji znatno presegali valovne dolžine elektromagnetnega valovanja v optičnem področju. Resonatorji te vrste se še danes uporabljajo pri laserjih.

Tedaj so predlagali tudi vrsto postopkov, kako doseči negativno absorpcijo v submilimetrskem,[6] daljnem infrardečem in vidnem področju.[7–10] Kljub temu pa so šele leta 1960 naredili prvi kvantni optični oscilator.[11] To je bil rubinski laser.

Potem ko so raziskovalci prodrli v optično področje, so začeli misliti na še krajše valovne dolžine, to je na prodor v področje rentgenskih žarkov. V tem področju so se pojavile enake težave kot prej v optičnem. Potrebno je bilo najti nove vrste resonatorjev kakor tudi postopke za ustvaritev negativne absorpcije. Pri tem pa je nastala vrsta novih težav in kvantni oscilatorji za rentgentske žarke še do danes niso zgrajeni.

Življenjska doba vzbujenih stanj je namreč v rentgenskem področju izredno kratka, zato predvsem ta določa širino spektralne črte. Absorpcijski koeficient α moremo v tem primeru napisati preprosto kot

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{4\pi}(n_1 - n_2) \tag{5}$$

λ je tu valovna dolžina, n_1 in n_2 pa število delcev v zgornjem oziroma spodnjem stanju na enoto prostornine. Izraz (5) pove, da se s skrajšanjem valovne dolžine absorpcijski koeficient močno zmanjša. To pa je zelo nesrečna okoliščina, saj mora biti α reda velikosti cm^{-1}, če naj laser oscilira. Da to dosežemo, mora biti v zgornjem energijskem nivoju vsaj 10^{17} delcev na cm^3 pri valovnih dolžinah $\lambda = 1$ Å. Ker je življenjska doba τ vzbujenih stanj reda velikosti 10^{-16} sek, to pomeni, da moramo v sekundi v 1 cm^3 spraviti na zgornji nivo vsaj 10^{33} delcev. To pa je eksperimentalno izredno zahteven problem.

Čeprav laserji v rentgentskem področju še niso konstruirani, so dosežki kvantne elektronike izredni. Frekvenčno področje, v katerem maserji in laserji delajo, je zelo široko. Izvore koherentnega valovanja na temelju stimulirane emisije imamo danes v vsem področju od najnižjih radijskih frekvenc pa vse do ultravijoličnega dela elektromagnetnega spektra.

Delovanje maserjev in laserjev temelji na dejstvu, da v sredstvih, pri katerih je absorpcijski koeficient negativen, stimulirana emisija zaradi velike intenzitete sevalnega polja prevlada nad spontano emisijo. Z rubinskim laserjem moremo danes proizvesti celo take gostote moči elektromagnetnega polja, da postane verjetnost za večkvantne prehode enaka verjetnosti za enokvantne procese.

Maksimalna gostota moči,[12] ki jo moremo dobiti iz rubinskega laserja pri $\lambda = 6943$ Å, je 10^{11} wattov na cm^2. Pri tej gostoti je verjetnost za sočasno absorpcijo treh »rdečih« kvantov ($\lambda = 6943$ Å) — ta povzroči prehod elektrona v prevodni pas — tako velika, da prepreči nadaljnje naraščanje intenzitete elektromagnetnega polja. Izgube pri trikvantnih procesih rastejo s tretjo potenco gostote energije — od tod tako velika odvisnost od intenzitete elektromagnetnega polja.

Izredno visoke električne poljske jakosti v laserskem žarku s tako močjo morejo povzročiti ionizacijo, pa tudi razpad molekul in električni preboj v trdnih snoveh.

Večkvantni procesi pa imajo poleg slabe (omejujejo maksimalno moč laserja) tudi dobro stran. Omogočajo namreč razvoj novega področja kvantne elektronike, to je konstrukcijo laserjev, ki temelje na dvokvantnih prehodih.

Razvoj takih laserjev so spet neodvisno predlagali raziskovalci iz ZSSR[13] in ZDA.[14, 15] Če namreč ustvarimo invertirano zasedbo med dvema stanjema z energijsko razliko $E_2 - E_1 = h\nu$ moremo s stimulirano emisijo producirati fotone frekvenc ν_1 in ν_2, ki zadoščajo relaciji

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \tag{6}$$

Frekvenci ν_1 in ν_2 sta lahko enaki, lahko pa sta tudi različni. Potrebno je samo to, da je enačbi (6) zadoščeno.

Verjetnost za dvokvantne prehode je precejšnja, če je gostota polja dovolj velika. Za vzbuditev oscilacij v takem laserju bi potrebovali še močan pomožen laser, ki bi delal bodisi pri frekvenci ν_1 bodisi pri ν_2 in bi ga lahko izklopili, potem ko bi dvokvantni oscilator začel oscilirati. Prednosti dvokvantnega laserja sta:

1. hitrejše naraščanje gostote moči kot pri običajnih laserjih,
2. možnost osciliranja pri katerikoli frekvenci, ki jo dopušča enačba (6).

Konstrukcija takega laserja bo izredno povečala praktično uporabnost laserjev. Če bomo lahko zvezno spreminjali frekvenco laserja, bomo lahko vzbujali izbrane kemične vezi v molekulah in s tem dobili novo možnost usmerjanja kemičnih reakcij.

Problem seveda ni lahek in ga ni mogoče preprosto rešiti. Nekaj pa je jasno: problem je zelo zanimiv in rešitev bo morda napravila revolucijo v nekaterih panogah kemične industrije.

LITERATURA

1. N. G. Basov in A. M. Prokorov, Ž. Experim. Teor. Fiz. **27**, 431 (1934).
2. J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev. **95**, 282 (1954).
3. N. G. Basov in A. M. Prokorov, Ž. Experim. Teor. Fiz. **28**, 249 (1955).
4. N. Bloembergen, Phys. Rev. **104**, 324 (1956).
5. H. E. D. Scovil, G. Feiher, H. Seidel, ibid. **105**, 762 (1957).
6. A. M. Prokorov, Ž. Experim. Teor. Fiz. **34**, 1658 (1958).
7. A. L. Shawlow in C. H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).
8. N. G. Basov, B. M. Vul, Yu. M. Popov, Ž. Experim. Teor. Fiz. **37**, 587 (1959).
9. A. Javan, Phys. Rev. Letters **3**, 87 (1959).
10. F. A. Butajeva in V. A. Fabrikant, »Medium with negative absorption coefficient,« v Research in Experimental and Theoretical Physics, Memorial Volume to G. S. Landsberg (Akademija Nauk SSSR, Moskva, 1959).
11. T. H. Maiman, Brit. Commun. Electron **1**, 674 (1960).
12. F. V. Bunkin in A. M. Prokorov, Ž. Experim. Teor. Fiz., v tisku.
13. A. M. Prokorov in A. S. Selivanenko, patentna prijava št. 872303, vložena dne 24. decembra 1963.
14. P. P. Sorokin in N. Braslau, IBM J. Res. Develop. **8**, 177 (1964).
15. R. Z. Garwin, ibid., str. 338.

NOVICE

MERJENJE TEMPERATURE Z JEDRSKO KVADRUPOLNO RESONANCO

Nuklearni inštitut »J. Stefan«

Močna temperaturna odvisnost frekvence jedrske kvadrupolne resonance v molekularnih kristalih je že takoj po odkritju jedrske kvadrupolne resonance leta 1951 (1) porodila misel, da bi se ta pojav uporabil za natančno merjenje temperature. V novejši literaturi zasledimo več člankov (2, 3, 4, 5), kjer avtorji opisujejo praktično izvedbo termometra na osnovi jedrske kvadrupolne resonance (JKR), ki ga bomo v nadaljevanju na kratko imenovali JKR termometer. Zaradi izredne natančnosti, občutljivosti, obsega in ponovljivosti JKR termometra je vredno, da se seznanimo z njegovim delovanjem.

Kot sonda večine JKR termometrov služi jedro Cl^{35} v kalijevem oziroma natrijevem kloratu. Jedro Cl^{35} ima spin 3/2 in električni kvadrupolni moment $eQ = -7{,}97\ e \times 10^{-26}\ cm^2$ zaradi električnega kvadrupolnega momenta pride do interakcije med jedrom Cl^{35} in gradientom lokalnega električnega polja. Hamiltonian interakcije zapišemo kot skalarni produkt dveh tensorjev

$$H = \mathbf{Q}.\mathbf{V} = \sum_{j,k} Q_{jk} V_{jk} \tag{1}$$

kjer **Q** tensor popisuje kvadrupolno porazdelitev naboja v jedru in **V** tensor gradient električnega polja na mestu jedra.

Q tensor lahko zaradi osno simetrične porazdelitve naboja v jedru opišemo z eno samo skalarno količino, skalarnim kvadrupolnim momentom jedra

$$eQ = \int \varrho_i r_i^2 (3 \cos^2 \Theta_{iI} - 1)\, d^3 x_i \tag{2}$$

pri tem je ϱ_i gostota naboja v majhnem volumskem elementu $d^3 x_i$ znotraj jedra, oddaljenem za r_i od centra jedra, Θ_{iI} pa je kot med vektorjem $\mathbf{r}_i$ in jedrskim spinom.

Tensor gradienta električnega polja na mestu jedra je posledica nabojev, ki jedro obdajajo. To je simetričen tensor s sledjo enako nič. V Cartezijevih koordinatah zapišemo komponente tensorja **V**

$$V_{ij} = V_{ji} = \frac{\partial V}{\partial x_i\, \partial x_j}; \quad (x_i, x_j = x, y, z)$$

kjer je V elektrostatični potencial na mestu jedra zaradi nabojev okolice. Kot vidimo, imamo le pet med sabo neodvisnih komponent.

Po transformaciji koordinatnega sistema v sistem glavnih osi tensorja **V** dobi enačba (1) obliko

$$H = \frac{e^2\, q\, Q}{4\, I\, (2I - 1)} [(3\, I_z^2 - I^2) + \eta\, (I_x^2 - I_y^2)] \tag{3}$$

kjer pomeni q maksimalno glavno os tensorja **V**, e osnovni naboj, eQ kvadrupolni moment, I spin jedra in η parameter asimetrije tensorja **V**. η je definiran kot

$$\eta = \frac{V_{XX} - V_{YY}}{V_{ZZ}} \tag{4}$$

pri čemer izberemo glavni osi tako, da velja

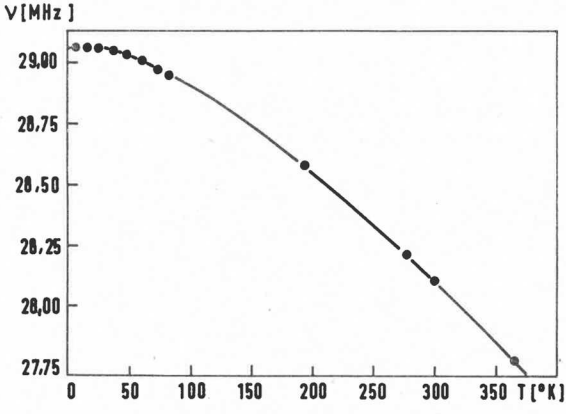
$$|V_{XX}| < |V_{YY}| < |V_{ZZ}|$$

V kalijevem oziroma natrijevem kloratu je asimetrijski parameter enak nič in so lastne vrednosti Hamiltoniana kvadrupolne interakcije v bazi, ki jo tvorijo lastne funkcije operatorja I_z, enake

$$E_m = A\,[3\,m^2 - I\,(I+1)]; \qquad A = \frac{e^2\,q\,Q}{4\,I\,(2\,I-1)}$$

Stanjema, ki se razlikujeta le po predznaku magnetnega kvantnega števila m, pripada ista energija ali drugače povedano, energijski nivoji so dvakrat degenerirani.

Ker ima Cl^{35}, kakor smo že zapisali, spin 3/2, nastaneta zaradi kvadrupolne interakcije dva energijska nivoja $E_{\pm 3/2}$ in $E_{\pm 1/2}$, ki se razlikujeta za $\Delta E = \frac{e^2\,q\,Q}{2}$. Razlika pa je odvisna od temperature. Jedro namreč »vidi« le poprečen gradient lokalnega električnega polja, ne pa njegove trenutne vrednosti. Poprečna vrednost gradienta zavisi od nihanja kristalne mreže in še posebej od torzijskega gibanja grupe ClO_3^-, obe gibanji pa sta odvisni od temperature.



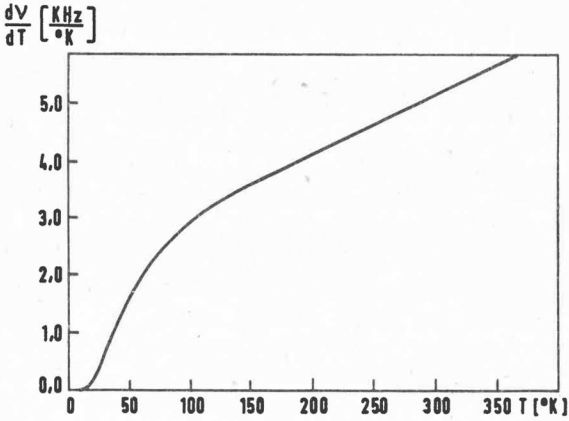
Sl. 1. Temperaturna odvisnost frekvence jedrske kvadrupolne resonance za Cl^{35} v $KClO_3$

Če povzamemo bistvo dosedanjih izvajanj, smo ugotovili, da imamo v kloratu zaradi interakcije kvadrupolnega momenta jedra Cl^{35} s temperaturno odvisnim poprečjem gradienta električnega polja dva dvakrat degenerirana energijska nivoja, katerih energijski razmak zavisi od temperature. Metoda, s katero merimo razliko med energijskima nivojema in s tem posredno tudi temperaturo, je JKR. Naj na tem mestu na kratko opišem delovanje JKR, bolj izčrpno razlago bo bralec dobil v literaturi (6, 7).

Prehode med nivojema $E \pm_{3/2}$ in $E \pm_{1/2}$ povzročimo z majhnim izmeničnim magnetnim poljem prek interakcije z magnetnim dipolnim momentom jedra. Običajna perturbacijska teorija nam pove, da nastopi največja verjetnost za prehode, ko je za frekvenco izmeničnega magnetnega polja izpolnjen resonančni pogoj

$$\nu = \frac{E_{m+1} - E_m}{h}$$

kjer je ν resonančna frekvenca. ν je za Cl^{35} v $KClO_3$ enaka $\frac{e^2 q Q}{2h}$ in leži med 28 in 29 MHz odvisno od temperature (glej sl. 1). Da bi določili resonančno frekvenco, damo ampulo napolnjeno s $KClO_3$ v tuljavico nihajnega kroga občutljivega oscilatorja, kateremu moramo zvezno spreminjati frekvenco nihanja. Pri resonančni frekvenci se v $KClO_3$ zaradi prehodov med različno zasedenima nivojema absorbira del oscilatorjeve energije. Nastala absorpcija zaduši nihanje, kateremu se zato močno zmanjša amplituda. Da bi laže zaznali spremembo nihanja, visoko frekvenco oscilatorja moduliramo z nizko frekvenco. S tem dosežemo v neposredni bližini resonančnega pogoja nizkofrekvenčno amplitudno modulacijo nihanja oscilatorja. Amplitudno modulirano visokofrekvenčno nihanje ojačimo in nato s filtri razstavimo. Nizkofrekvenčni del vodimo v občutljiv fazni detektor, ki nam da v primeru, ko je frekvenčna modulacija dosti ožja od širine resonančne črte, signal proporcionalen odvodu resonančne črte.



Sl. 2. Temperaturna odvisnost $\frac{d\nu}{T}$ za Cl^{35} v $KClO_3$

Aparaturo JKR je treba pred uporabo za merjenje temperature umeriti. Točke na umeritveni krivulji $\nu = \nu(T)$ dobimo tako, da pri različnih točno izmerjenih temperaturah tuljavice oscilatorja s $KClO_3$ izmerimo frekvenco oscilatorja na sredini resonančne črte. Sredino črte določimo tako, da s spreminjanjem frekvence oscilatorja poiščemo ničlo resonančnega signala iz faznega detektorja. Na opisani način je mogoče določiti frekvenco sredine resonančne

črte na ± 5 Hz. Pri temperaturni občutljivosti resonačne frekvence $\frac{d\nu}{dT} > 2{,}5$ KHz za $T > 77\ ^0K$ (glej sl. 2) ustreza to napaki manjši od ± 0,002 ^0K.

Pri nižjih temperaturah se zaradi zmanjšane temperaturne občutljivosti resonančne frekvence poveča napaka JKR termometra, vendar vse do 20 ^0K ne preseže ± 0,02 ^0K.

Gornja temperaturna meja uporabe JKR termometra s $KClO_3$ je okrog 450 ^0K, nad to temperaturo se namreč zaradi gibanja kristalne mreže resonančna črta toliko razširi, da ni več mogoča njena detekcija.

Vsekakor pa so že merilno območje od 20 ^0K do 450 ^0K in napaka pod ± 0,02 ^0K do 77 ^0K ter ± 0,002 ^0K nad 77 ^0K take kvalitete, ki JKR termometru široko odpirajo pot v termometrijo. Ni izključeno, da bo v bližnji prihodnosti v mnogih laboratorijih JKR termometer služil kot delovni temperaturni standard.

M. Mali

Literatura

1. H. G. Dehmelt, H. Kruger: Naturwiss. **37**, 111 (1950); **38**, 121 (1951).
2. J. Vanier: Can J. Phys. **38**, 1937 (1960).
3. G. Benedek, T. Kushida: Rev. Sci. Instr. **28**, 92 (1957).
4. V. I. Solovjev, A. D. Brodski: Pribori i Tehnika Eksperimenta **2**, 111 (1962).
5. J. Vanier: Metrologija **1**, 135 (1965).
6. H. G. Dehmelt: Am. J. Phys. **22**, 110 (1954).
7. T. P. Das, E. L. Hahn: Nuclear Quadrupole Resonance Spectroscopy. Solid State Physics, Sup. 1, Academic Press (1958).

NOBELOV NAGRAJENEC ZA FIZIKO V LETU 1966 — PROFESOR ALFRED KASTLER

Alfred Kastler, nagrajenec za fiziko v letu 1966, je profesor na Université de Paris in vodja fizikalnega laboratorijo na Ecole Normale Superieure. Švedska akademija mu je z nagrado izrekla priznanje za njegovo večletno delo kot raziskovalcu za »odkritje in razvoj optičnih metod pri študiju radiofrekvenčnih resonanc v atomih«.

Profesor Kastler se je rodil leta 1902 v Guebwillerju. Po srednješolskih študijah se je vpisal v Ecole Normale Supérieure in prejel naslov doktorja znanosti leta 1936. Nekaj časa je bil srednješolski profesor, predvsem v Bordeauxu, potem pa so ga leta 1941 pozvali za predavatelja v fizikalni laboratorij Ecole Normale Supérieure. V okviru tega močnega žarišča znanstvenega raziskovanja so se po drugi svetovni vojni razvila njegova najvažnejša dela.

Glavno raziskovalno področje profesorja Kastlerja je atomska fizika. Po neuspelem poskusu dr. Brossela z MIT, ki je hotel optično detektirati magnetno resonanco, je profesor Kastler skupaj z njim predlagal dvojno-resonančno metodo. V tej tehniki se — za detektiranje radiofrekvenčne resonance optično vzbujenih stanj — magnetni podnivozi teh stanj selektivno vzbujajo s polarizirano resonančno svetlobo. Radiofrekvenčno resonanco je sedaj moč detektirati z meritvami sprememb v intenziteti emitirane polarizirane svetlobe.

Leto kasneje (1950) je profesor Kastler predlagal tehniko optičnega črpanja, ki uporablja cirkularno polarizirano resonančno svetlobo, da dvigne atome kake pare iz absorbirujočega magnetnega podnivoja osnovnega energij-

skega stanja prek vzbujenih stanj v neabsorbirajoči magnetni podnivo osnovnih stanj, kar ima za posledico, da se atomi osnovnega stanja spinsko polarizirajo.

Ti dve tehniki, skupaj z njunimi razširitvami in nadaljnjimi izboljšavami, so omogočile meritve jadrskih spinov in magnetnih momentov, jedrskih električnh kvadrupolnih momentov, elektronskih magnetnih momentov, jedrske hiperfine interakcije in podobno, v celi vrsti snovi, kjer teh količin do tedaj ni bilo mogoče meriti.

Čeprav komaj dobro desetletje mlada raziskovalna veja, je optično spektroskopija v radiofrekvenčnem področju odlično dopolnilo magnetno resonančnim metodam, dala pa je že takoj v začetku izredne praktične rezultate: optično črpanje je namreč osnova za delovanje najpreciznejših magnetometrov, atomskih ur in frekvenčnih normal, pa tudi za delovanje generatorjev koherentne svetlobe ali laserjev.

Priznanje Švedske akademije Kastlerju niti ni presenetljivo: že leta 1954 je svet Britanskega društva za fiziko podelil profesorju Kastlerju Holweckovo nagrado za prav tista dela, katerih nadaljevanja so mu prinesla Nobelovo nagrado. Malo pozneje je v svoji domovini prejel Veliko nagrado za znanstveno raziskovanje (1956), Veliko nagrado mesta Paris (1963) in naslednje leto so ga izbrali za člana fiizkalne sekcije francoske Akademije znanosti. Leta 1965 pa je prejel zlato medaljo CNRS (državnega komiteja za znanstvene raziskave).

Profesor Kastler je razen svojega delovanja kot univerzni učitelj in svojega znanstvenega dela mnogo prispeval k evropskemu sodelovanju na področju fizike s svojo odločilno vlog pri ustvarjanju mednarodnih in evropskih grupacij za molekularno fiziko in radiofrekvenčno spektroskopijo. Kot član stalnega odbora združenja AMPERE je bil tudi v organizacijskem odboru XIV Colloque AMPERE, ki je bil lani septembra v Ljubljani.

Zadnjih deset, petnajst let se profesor Kastler predvsem posveča študiju z elektronskim curkom vzbujenih stanj z dvojno resonančno metodo, prav tako pa študiju koherence in fenomenom zožitve črte koherentno sevajočih atomov.

DOMAČE VESTI

REPUBLIŠKO IN ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

23. aprila 1967 je bilo v Ljubljani na gimnaziji Center v Šubičevi ulici že enajsto republiško tekmovanje srednješolcev v matematiki. Organiziralo ga je kot navadno Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS. Udeležencev je bilo približno toliko kot prejšnja leta. Naloge je oddalo 119 dijakov, 55 Ljubljančanov in 64 ostalih. Največ tekmovalcev je bilo: z gimnazije Ljubljana-Bežigrad 22, z gimnazije Ljubljana-Center 18, po 9 s koprske in škofjeloške gimnazije, po 7 iz Trbovelj in s šentviške gimnazije v Ljubljani; ostali udeleženci so bili z gimnazij Vič in Poljane ter tehniških šol za elektro-stroko in kovinarsko stroko v Ljubljani, s pedagoške gimnazije in gimnazije Tabor v Mariboru, iz Celja, Kranja, Raven, Ptuja, Ljutomera, Nove Gorice, Idrije, Novega mesta, Kočevja, Kamnika, Brežic in Tolmina. V Sloveniji pa je še lepa vrsta srednjih šol, s katerih ni bilo nobenega tekmovalca, čeprav smo poslali obvestila na vse šole in poudarili, da bo po enemu tekmovalcu z vsake šole plačalo stroške potovanja v Ljubljano naše društvo. Jasno je, da vsaka šola v Sloveniji ne more imeti republiškega prvaka; težko pa je verjeti, da bi na nekaterih srednjih šolah ne mogli najti niti enega dijaka, ki bi ga lahko poslali na tekmovanje. Bolj verjetno je, da je naše obvestilo obležalo v kakem predalu in ga dijaki sploh niso videli.

Naloge za tekmovanje so predlagali: za 1. razred Aleksander Cokan (profesor na gimnaziji Ljubljana-Vič) in Jože Vrabec (asistent na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo), za 2. razred Milan Ziegler (višji predavatelj na FNT) in France Račič (profesor na Tehniški šoli za kem., metal., rud. in lesno ind. stroko v Ljubljani), za 3. razred Sonja Plevnik in Ivan Pucelj (profesorja na gimnaziji Ljubljana-Bežigrad), za 4. razred Marijan Vagaja (profesor na gimnaziji Ljubljana-Poljane) in Peter Petek (študent na FNT). Iz predlaganih nalog sta prof. dr. Ivan Vidav in doc. dr. Niko Prijatelj izbrala za tekmovanje naslednje:

1. razred

1. Popotnik, ki je prehodil v prvi uri 4 km poti do oddaljene železniške postaje, je nato izračunal, da bo pri tej hitrosti hoje zamudil vlak za 15 minut. Zato je preostanek poti prehodil s hitrostjo 5 km/h in prišel na postajo 12 minut prezgodaj. Kako daleč je imel do postaje?

2. Kupec v knjigarni izbira med sedmimi knjigami. Kupiti namerava dve knjigi. Vsaka knjiga stane celo število novih dinarjev, najcenejša pa velja 2 N-din. Kupec opazi, da ne bi za noben par knjig, ki bi ju izbral, plačal iste vsote. Če torej izbere katerikoli dve knjigi, nato pa se premisli in zamenja eno ali obe, se cena spremeni. Koliko najmanj stane vseh sedem knjig?

3. V enakokrakem trapezu z osnovnicama a in c ter krakoma b in d je podano: $a = b = d = 2c$; c naj bo znan. Izračunaj polmer kroga, ki je temu trapezu očrtan!

4. V trikotniku ABC je kot pri A za 90^0 večji od kota pri B. Simetrala notranjega kota pri C seka osnovnico AB v točki D, simetrala zunanjega kota pri C pa njen podaljšek v točki E. Dokaži, da je $CD = CE$!

2. razred

1. Pokaži, da ima enačba $x^2 - (a + c)\,x + ac - b^2 = 0$ pri poljubnih realnih številih a, b, c realna korena x_1, x_2 in da sta a in c korena enačbe $(y - x_1)\,(y - x_2) + b^2 = 0$!

2. V kakšnem odnosu morata biti dani realni števili p in q, da sistem $x + y = 2\,p$, $xy - z^2 = q^2$ (a) ne bo imel realne rešitve; (b) bo imel natančno eno realno rešitev; (c) bo imel več kot eno rešitev. Za primer (b) določi rešitev, za primer (c) navedi, koliko je rešitev!

3. V krožni izsek s polmerom R in središčnim kotom 60^0 včrtaj tri enake kroge, ki se med seboj dotikajo. Nalogo reši s konstrukcijo in z računom!

4. Tristranična piramida je včrtana kocki tako, da je njen vrh v enem oglišču kocke, oglišča osnovne ploskve pa leže v središčih tistih ploskev kocke, ki se stikajo v nasprotnem oglišču od onega, kjer je vrh piramide. Izračunaj površino in prostornino te piramide, če je znan rob kocke!

3. razred

1. Določi vse vrednosti za x, ki zadoščajo neenačbi

$$\sqrt{3}\sin x + 3\cos x < 2\sqrt{3}\sin 3\,x$$

2. Naj bo x realna spremenljivka in x^{-1} recipročna vrednost.

a) Prevedi na najenostavnejšo obliko funkcijo

$$y = f(x) = (((((x^{-1} + 1)^{-1} + 1)^{-1} + 1)^{-1} + 1)^{-1} + 1)^{-1}$$

(b) Poišči obratno funkcijo funkcije $f(x)$!

(c) Načrtaj grafa funkcij $f(x)$ in $f(|x|)$!

3. V trikotniku ABC naj imajo višine nožišča A_1, B_1, C_1. (a) Izračunaj stranice a_1, b_1, c_1 trikotnika $A_1B_1C_1$, če so stranice a, b, c trikotnika ABC znane! (b) Izrazi vsoto $(a_1/a)^2 + (b_1/b)^2 + (c_1/c)^2 - 1$ kot tako funkcijo kotov trikotnika ABC, ki je pripravna za logaritmiranje!

4. Krogli s polmerom R očrtaj pokončni prisekani stožec, katerega površina je 21/8 površine krogle. Krog, vzdolž katerega se krogla dotika stožca, razdeli površino krogle na dve kapici, prisekani stožec pa na dva prisekana stožca. V kakšnem razmerju sta površini kapic in v kakšnem razmerju sta plašča obeh prisekanih stožcev?

4. razred

1. Pri kateri vrednosti števila a ima sistem

$$x + ay = xy, \quad y + az = yz, \quad z + ax = zx$$

samo trivialno rešitev $x = y = z = 0$?

2) Načrtaj približni potek funkcije $y = \sqrt{\log \frac{x-1}{x}}$

3. Kvader ima robove $a > b > c$. Skozi telesno diagonalo tega kvadra postavi ravnino tako, da je ploščina lika, ki ga kvader izreže iz te ravnine, najmanjša možna! Kolikšna je ta ploščina?

4. Elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je včrtan tak trikotnik $T_1T_2T_3$, da je tangenta na elipso v vsakem oglišču vzporedna z nasprotno stranico trikotnika. Kolikšna je ploščina tega trikotnika, če leži eno njegovo oglišče v temenu s koordinatama $(0, b)$?

Predlagatelji nalog so po tekmovanju posamič pregledali izdelke dijakov in predlagali zanje ocene, potem pa so na skupni seji pod vodstvom prof. Vidava dokončno določili ocene in vrstni red tekmovalcev. Najuspešnejši so bili prvošolci, kjer so kar trije tekmovalci dosegli vse možne točke, najslabše pa se je odrezal četrti razred, kjer ni tretje naloge rešil nihče. Tekmovalna komisija je dijakom razdelila naslednja priznanja:

1. nagrada: Dragan Božič (1. razr. gimnazije Kranj), Karel Markelj (1. razr. gim. Maribor-Tabor) in Jurij Stare (1. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad).

2. nagrada: Peter Legiša (3. razr. gim. Ljubljana-Center) in Berto Žitko (2. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad).

3. nagrada: Vladimir Batagelj (4. razr. gim. Koper), Bojan Golli (2. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Niko Guid (2. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Janez Seliger (4. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Tomaž Slivnik (4. razr. Tehniške šole za elektro stroko v Ljubljani), Nada Špacapan (1. razr. gim. Koper), Pavle Štajdohar (2. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad).

Pohvale: Igor Leiler (4. razr. gim. Ljubljana-Center), Anton Cedilnik (4. razr. gim. Ljubljana-Št. Vid), Tomo Pisanski (4. razr. gim. Ljubljana-Center), Jožef Urbančič (4. razr. gim. Maribor-Tabor), Svitan Gaborović (3. razr. gim. Maribor-Tabor), Janez Rakovec (3. razr. gim. Ljubljana-Center), Marko Razpet (3. razr. gim. Idrija), Tomo Žitko (3. razr. gim. Ljubljana-Center), Uroš Aleksič (2. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Marko Bonač (2. razr. gim. Ljubljana-Center), Branko Cedilnik (2. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Franc Kodela (2. razr. gim. Ptuj), Marija Lupša (2. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Matjaž Omladič (2. razr. gim. Ljubljana-Center), Rudi Bric (1. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Mirko Dobovišek (1. razr. gim. Ljubljana-Center), Olga Loitrek (1. razr. gim. Ljubljana-Bežigrad), Miran Nedeljković (1. razr. gim. Ljubljana-Center), Mirko Paradiž (1. razr. gim. Ravne), Jure Špiler (1. razr. gim. Ljubljana-Center).

Letos so na zveznem tekmovanju mladih matematikov prvič nastopili poleg dijakov tretjega in četrtega razreda tudi drugošolci. Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije nam je iz Beograda sporočila, da lahko pošlje Slovenija na zvezno tekmovanje do sedem dijakov iz drugega, tretjega in četrtega razreda (vendar iz drugega čim manj, ker ti ne pridejo v poštev za matematično olimpiado). Šele v zadnjem hipu so sporočili, da ima lahko naša ekipa tudi kakega tekmovalca več, če bi bilo težko izbrati ravno sedem dijakov, ne da bi komu storili krivico. To so storili na prošnjo Hrvatske, ki je potem res poslala nekaj tekmovalcev več, kot jim je bilo v začetku do-

ločeno. Mi pa smo bili obveščeni že nekoliko prepozno, zato je odšlo v Beograd samo sedem tekmovalcev. Drugo leto bomo že vnaprej pripravili kakega kandidata več.

Zveznega tekmovanja, ki je bilo 14. maja 1967 v Beogradu, so se iz Slovenije udeležili Vladimir Batagelj, Peter Legiša, Tomo Pisanski, Janez Seliger, Tomaž Slivnik, Berto Žitko in Tomo Žitko. Tekmovalne naloge je iz predlogov, ki so jih poslala republiška društva, izbrala tekmovalna komisija, ki je bila sestavljena iz zastopnikov vseh republik. Slovenijo je zastopal Jože Vrabec. Izbrane so bile tele naloge:

2. razred

1. Dan je polinom $(k+1)x^2 - 2kx + k - 1$, pri čemer je k spremenljiv parameter.

(a) Določi geometrijsko mesto temen vseh parabol, danih z enačbo $y = (k+1)x^2 - 2kx + k - 1$!

(b) Ali eksistira kaka točka, ki je skupna vsem parabolam?

(c) Pokaži, da je samo en koren enačbe $(k+1)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ spremenljiv in prikaži to na grafiku!

(d) Določi, za katere celoštevilčne k je spremenljivi koren periodično decimalno število z eno številko v periodi!

2. V trinomu $9n^2 + 3n - 2$ je n celo število.

(a) Pokaži, da ta trinom ni deljiv z 9 za nobeno celo število n!

(b) Dokaži, da je dani trinom deljiv s 4 za neskončno mnogo celih n! Kakšna je splošna oblika takega n?

3. Dan je kvadrat Q s stranico a, v katerega je včrtan kvadrat Q_1 tako, da njegova oglišča leže na stranicah kvadrata Q. V kvadrat Q_1 in v vse štiri nastale trikotnike so včrtani krogi. Določi položaj oglišč včrtanega kvadrata Q_1 tako, da bo vsota ploščin vseh včrtanih krogov najmanjša!

4. Dana je neprozorna krogla in zunaj nje ravnina P. V točki K ravnine P je premičen izvir svetlobe, ki osvetljuje kroglo. Pokaži, da gre namišljena ravnina, ki deli osvetljeni del krogle od neosvetljenega, skozi fiksno točko T, ki ni odvisna od položaja točke K!

3. razred

1. Reši enačbo $\sqrt{5x+1} + 2\sqrt{4-x} + \sqrt{5}\sqrt{x+2} = \sqrt{61-4x}$!

2. Znotraj danega kota AOB je krog, ki nima nobene skupne točke s kraki kota. Določi na krogu točki M in N tako, da bo vsota razdalj teh točk od krakov kota najmanjša, oziroma največja! (Uporabi izrek: Vsota razdalj poljubne točke na osnovnici enakokrakega trikotnika od krakov tega trikotnika je enaka višini na krak.)

3. Reši neenačbo $(1+\sqrt{3})\sin 2x + 2\cos^2 x \geqslant 2(1+\sqrt{3}\cos^2 x)$!

4. Bodita $ABCD$ in $A'B'C'D'$ dva paralelograma, ki ležita v neparalelnih ravninah. Označimo po vrsti z M, N, P, Q točke, ki dele daljice AA', BB', CC', DD' v istem razmerju.

(a) Dokaži, da je $MNPQ$ paralelogram!

(b) Določi geometrijsko mesto centrov vseh paralelogramov $MNPQ$, ki jih dobimo, ko točka M preteče daljico AA'!

4. razred

1. Poišči množico točk, v katerih funkcije iz družine

$$f(x) = (4x^3)/p^2 - 3x + p$$

dosežejo maksimum, in množico tistih točk, v katerih te funkcije dosežejo minimum. Nariši graf tiste funkcije iz družine, ki ustreza vrednosti $p = 1$. V katerih točkah seče ta krivulja os x?

Prikaži $\cos 3t$ kot funkcijo od $\cos t$ in s substitucijo $x = \cos t$ poišči ničle funkcije $g(x) = 4x^3 - 3x + \sqrt{2}/2$! Nariši graf te funkcije!

2. Stranica BC trikotnika ABC je razdeljena s točkami $B = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n = C$ na n delov. Iz teh delilnih točk so potegnjene daljice do stranic AB in AC paralelno stranicama AC oziroma AB.

(a) Na koliko različnih načinov je mogoče priti iz točke A po dobljeni mreži do točke M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), če je dovoljeno samo gibanje v smeri vektorjev **AB** in **AC**?

(b) Koliko je vseh zgoraj opisanih poti, ki vodijo od točke A do vseh točk $M_0, M_1, \ldots, M_n$?

(c) Izračunaj vsoto dolžin vseh poti od A do vseh točk M_k za primer, ko so $M_0, M_1, \ldots, M_n$ ekvidistantne!

3. Dokaži identiteto:

$$1/\sin 2x + 1/\sin 4x + \ldots + 1/\sin 2^n x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x$$

4. Isto kot 4. naloga za tretji razred.

Dijaki so imeli na razpolago štiri ure časa, zato so naloge precej obširnejše kot tiste, ki so bile na republiškem tekmovanju; tam pišejo dijaki le dve uri.

Izdelke, ki so jih dijaki oddali pod šifro, je že isti dan popoldne pregledala dvanajstčlanska skupina ocenjevalcev, ki so bili izbrani iz vrst univerzitetnih učiteljev in asistentov beograjske univerze. Nato pa je tekmovalna komisija še enkrat temeljito pregledala vse tiste naloge, ki so dobile večje število točk, določila ocene in vrstni red tekmovalcev. Izkazalo se je, da so bile naloge za drugi razred pretežke: četrto nalogo (oziroma glavni del te naloge) je napravil samo en dijak. Seveda je bil zato kriterij pri podeljevanju priznanj za drugošolce milejši, saj bi bil sicer (glede na število točk) najboljši iz drugega razreda komaj pohvaljen.

Podeljenih je bilo 5 prvih nagrad, 4 druge, 9 tretjih in 17 pohval. Navajamo samo uspeh naših dijakov: Tomo Pisanski je dobil prvo nagrado; njegova naloga je bila najboljša od vseh; bil je edini, ki je dobil pri oceni vse možne točke. Tomaž Slivnik je dobil tretjo nagrado, Tomo Žitnik, Vladimir Batagelj in Peter Legiša pa so bili pohvaljeni.

Za priprave na matematično olimpiado in matematično balkaniado je bilo izbranih 16 dijakov. Iz četrtega razreda so bili izbrani vsi nagrajeni in

večina pohvaljenih dijakov, iz tretjega razreda pa le najboljši, kajti na obeh mednarodnih tekmovanjih dobijo vsi dijaki iste naloge, ki so izbrane iz snovi za četrti razred. Iz Slovenije so na priprave odšli Pisanski, Slivnik in Batagelj.

J. Vrabec

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV V FIZIKI

V nedeljo, 6. maja je bilo v Ljubljani IV. republiško tekmovanje srednješolcev v reševanju računskih nalog iz fizike. Tekmovanje je za zaključek pomladanske dejavnosti pri popularizaciji fizike priredilo Društvo matematikov, fizikov in astronomov ob sodelovanju Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, Nuklearnega inštituta J. Stefan in Katedre za fiziko pri Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Tekmovalo je 63 dijakov, od tega 13 iz drugega, 26 iz tretjega in 24 iz četrtega letnika. Največ tekmovalcev je bilo s I. gimnazije v Ljubljani (14), z gimnazije Nova Gorica (12) in z II. gimnazije v Ljubljani (10). Drugi tekmovalci so prišli s tehle šol: z gimnazije Novo mesto (7), s TŠE Ljubljana (5), z gimnazije Škofja Loka (4), z gimnazije Maribor-Tabor (3), z gimnazije Kranj (2), z gimnazije Ravne na Koroškem (2), s TŠK Ljubljana (2), z gimnazije Koper (1) in z gimnazije Trbovlje (1).

Navajamo naloge, ki so jih dijaki reševali v posameznih tekmovalnih skupinah.

Naloge za II. letnik

1. Avto z maso 800 kg se giblje po 3-odstotnem klancu navzdol pri odklopljenem motorju enakomerno s hitrostjo 32,4 km/h. S kolikšno močjo mora delovati motor, če hoče avto peljati v isti klanec navzgor z enako veliko hitrostjo?

2. Kroglica z maso ¼ kg je obešena na 60 cm dolgi vrvici in kroži v vodoravni ravnini z obhodnim časom 1,5 s. Kolikšen je tedaj kot med vrvico in navpičnico?

3. Prek pritrjenega škripca je speljana vrv, ki se pretrga, če jo nategnemo z več kot 70 kp. Na en konec vrvi obesimo maso $m_1 = 60$ kg. Kolikšno največjo maso m_2 smemo obesiti na drugi konec vrvi v neki višini od tal, ne da bi se vrv pretrgala?

4. 1 m dolga ravna, enakomerno debela palica je sestavljena iz dveh delov. 9/10 dolžine je iz snovi z gostoto 0,70 kg/dm^3, ostanek pa iz snovi s 4-krat tolikšno gostoto. Kje je težišče palice? Palico spustimo, da plava po vodi; kolikšna je dolžina potopljenega dela?

Naloge za III. letnik

1. Kolikšna naj bo prostornina posode, da bo pri temperaturi 20° C in tlaku 2 kp/cm^2 sprejela zmes 20 g kisika in 30 g dušika?

2. Na vodoravni plošči, ki sinusno niha v vertikalni smeri s frekvenco 2 s^{-1}, je pritrjena utež. Pri kolikšni amplitudi je največja sila med podlago in utežjo enaka trikratni teži uteži? Pri kolikšni amplitudi pa začne utež odskakovati, če ni pritrjena?

3. Konkavno zrcalo in konveksna leča imata enako goriščno razdaljo 10 cm in sta na skupni optični osi 50 cm vsaksebi. V sredi med njima je postavljena sveča tako, da je plamen ravno na optični osi. Kje dobimo slike plamena in kolikšne so, če je plamen visok 5 cm?

4. Okno na strehi je narejeno iz treh vzporednih šip. Pri prehodu svetlobe se na vsaki mejni ploskvi vsake šipe odbije po 5 % svetlobe, ki nanjo pade, po 1 % svetlobe, ki prodre v šipo, pa se v njej absorbira. Kolikšna je gostota svetlobnega toka po prehodu skozi okno, če sije nanj sončna svetloba z gostoto toka 1 kW/m^2?

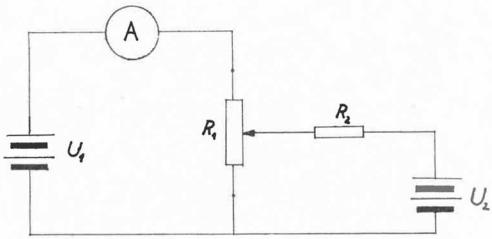
Naloge za IV. letnik

1. Električno vezje (gl. sliko) sestoji iz dveh baterij: prve za 4 V (U_1), druge za 12 V (U_2), 30 cm dolgega drsnega upornika s 1500 ohmi (R_1), navadnega upornika z 200 ohmi (R_2) ter ampermetra. S katerim polom baterije U_2 je treba spojiti drsni kontakt in kako daleč od vrhnjega konca upornika R_1 mora biti ta kontakt, da skozi ampermeter ne bo toka? Kolikšno moč trošita pri tem oba upornika? Upornost baterij in ampermetra zanemarimo.

2. Milni mehurček z radijem 2 mm ima z zrakom v njem vred maso 0,045 mg in naboj $1{,}6.10^{-10}$ As. Mehurček miruje med vodoravnima ploščama kondenzatorja, ki sta v razmiku 3 cm. Kolikšna je napetost med ploščama? Gostota zraka je 1,2 kg/m^3.

3. Nihajni krog sestavimo iz ploščatega kondenzatorja s ploščama v razmiku 1 mm in ploščino 100 cm^2 te riz tuljave s 1000 ovoji, dolžino 50 cm in presekom 10 cm^2. Kolikšen je nihajni čas? Kolikšen je največji tok po tuljavi, če je amplituda napetosti enaka 100 V?

4. Razredčen ioniziran plin s temperaturo 10 000 °K imamo v magnetnem polju z gostoto 0,001 Vs/m^2. Po kako velikih krogih krožijo tisti prosti elektroni, katerih kinetična energija je ravno enaka povprečni vrednosti in katerih smer gibanja je pravokotna na silnicah?



Sl. 1. Električno vezje k nalogi 1. za IV. letnik.

Pri reševanju nalog so si dijaki lahko pomagali z učbeniki, priročniki in računali. V poprečju so tekmovalci rešili več kot polovico postavljenih nalog, v tretjem razredu nekaj več kot v preostalih dveh. Popolnoma pravilen ni bil noben izdelek. Iz rezultatov je razvidno, da dela dijakom težave uporaba Newtonovega zakona (3. naloga za II. letnik in 2. naloga za III. letnik), pa tudi obravnavanje tokov električnih krogov (1. naloga za IV. letnik), ter da jim manjka računske spretnosti (4. naloga za III. letnik). Na splošno so bile naloge letos bolj »šolske« in so zahtevale manj samostojnega razmišljanja kot prejšnja leta, tako da so jih dijaki reševali dokaj uspešno.

Za izdelke je tekmovalna komisija podelila tri prve, pet drugih in deset tretjih nagrad. Prvo nagrado so dobili:

Marko Bonač, II. letnik II. gimnazije v Ljubljani (17 točk od 20 možnih),
Dragica Jelenc, III. letnik gimnazije v Škofji Loki (18 točk),
Martin Lesjak, II. letnik TŠE v Ljubljani (17 točk).

Drugo nagrado so dobili:

Svitan Gaborovič, III. letnik gimnazije Maribor-Tabor (16),
Peter Legiša, III. letnik II. gimnazije v Ljubljani (16),
Jožko Otorepec, III. letnik I. gimnazije v Ljubljani (16),
Tomo Žitko, III. letnik II. gimnazije v Ljubljani (16),
Tomaž Slivnik, IV. letnik TŠE v Ljubljani (15).

Tretjo nagrado so dobili:

Bojan Golli, II. letnik I. gimnazije v Ljubljani (11),
Darko Kocjan, II. letnik I. gimnazije v Ljubljani (11),
Berto Žitko, II. letnik I. gimnazije v Ljubljani (11),
Drago Coklin, III. letnik TŠE v Ljubljani (15),
Miloš Mele, III. letnik I. gimnazije v Ljubljani (15),
Bogdan Soban, III. letnik gimnazije Nova Gorica (15),
Andrej Detela, IV. letnik II. gimnazije v Ljubljani (14),
Franc Bajt, IV. letnik gimnazije v Novi Gorici (14),
Dušan Murovec, IV. letnik gimnazije v Kranju (14) in
Janez Seliger, IV. letnik I. gimnazije v Ljubljani (13).

Za nagrajene tekmovalce so Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko in Nuklearni inštitut J. Stefan pripravili praktične nagrade.

M. Hribar

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

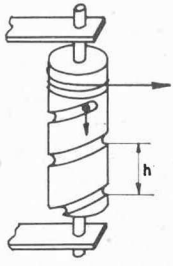
Letošnje zvezno tekmovanje srednješolcev iz fizike, že četrto po vrsti, je bilo 21. maja v Beogradu. Datum tekmovanja je bil izbran tako, da so bila do tedaj končana vsa republiška tekmovanja in so imeli kandidati za zvezno tekmovanje še nekaj časa za priprave. Tekmovanje je potekalo po začasnem pravilniku, ki je bil sprejet lani. Zopet je bilo obremenjeno z vsemi neprijetnostmi, ki jih prinašajo neusklajeni programi za pouk fizike v srednjih šolah.

46 tekmovalcev je bilo razdeljenih v tri tekmovalne skupine: v prvi skupini so tekmovali iz mehanike in toplote, v drugi skupini iz elektrike in magnetizma, v tretji skupini pa iz optike in atomike. Posamezne skupine so imele naslednje naloge:

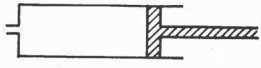
I. skupina:

1. Po vijačnem žlebu z navojno višino h, ki je navit na pokončen valj s premerom d, se lahko brez trenja giblje majhna, težka kroglica. Na valj je navita vrvica, s katero valj poganjamo tako, da vrvico vlečemo v vodoravni smeri. S kolikšnim pospeškom moramo vleči vrvico, da bo kroglica po žlebu prosto padala? (Sl. 1.)

2. Na gladkih tleh miruje lesena kocka z maso M. Izstrelek z maso m se v vodoravni smeri zaleti v kocko in jo prebije, pri čemer se giblje skozi središče kocke. Spočetka ima izstrelek hitrost v_1, po preboju kocke pa hitrost v_2. Kolikšen del kinetične energije izstrelka se je pri tem spremenil v toploto?



Sl. 1. K 1. nalogi za 1. skupino.



Sl. 2. K 3. nalogi za 1. skupino.

3. V injekcijski brizgi je bat s ploščino 2 cm^2, vodo pa iztiskamo skozi luknjico s presekom 1 mm^2. V kolikšnem času premaknemo bat za 5 cm, če pritiskamo nanj s silo 8 N? (Sl. 2.)

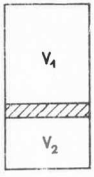
4. Zaprta valjasta posoda je s težkim, brez trenja gibljivim batom, razdeljena na dva dela. Dela posode sta napolnjena z enakima masama istega plina, ki ima po vsej posodi enako temperaturo. Ko je valj v navpični legi, se bat postavi tako, da razlika tlakov v delih posode uravnovesi težo bata. Pri temperaturi 300 °K je tedaj prostornina plina pod batom 3-krat manjša od prostornine plina nad batom. Kolikšno je to razmerje pri temperaturi 400 °K? (Sl. 3.)

II. skupina:

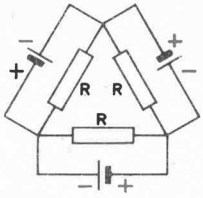
1. Pravokotno na smer električnega polja prileti v smeri proti središču med plošči ploščatega kondenzatorja hiter elektron. Med ploščama je napetost 150 V, razmik plošč pa je 2 cm. Kolikšno hitrost mora najmanj imeti elektron, da lahko uide iz kondenzatorja, če je premer plošč 10 cm?

2. Trije uporniki z uporom po 5 ohmov so zaporedno vezani v trikotnik, na vsak upornik pa je priključena baterija z gonilno napetostjo 4,5 V in notranjim uporom 3 ohme. Kolikšen tok teče po upornikih, kolikšen je tok skozi baterije? (Sl. 4.)

3. V destilacijskem aparatu se predestilira na uro 1 kg etra, segretega na vrelišče. Energijo dovajamo z električnim grelcem, ki oddaja pri napetosti 220 V moč 107,3 W. Kolikšna je izparilna toplota etra, če ne gre nič električne energije v izgubo? Kolikšna je jakost toka po grelcu? Kolikšen je upor grelca? Kako dolga je bila žica, iz katere smo navili grelno spiralo, če je specifični upor žice 110 μohm.cm in njen radij 0,07 mm?



Sl. 3. K 4. nalogi za 1. skupino.



Sl. 4. K 2. nalogi za 2. skupino.

4. V homogenem magnetnem polju z gostoto 2 gaussa sta 20 cm narazen dve zelo dolgi vzporedni ravni žici tako, da je njuna ravnina pravokotna na smer polja. Žici prečno povežemo z žičnima prečkama, ki stojita pravokotno na žici. Prva prečka je pritrjena, druga pa lahko drsi po žicah. Spočetka sta prečki druga poleg druge in mirujeta, nato pa se začne premična prečka gibati enakomerno pospešeno s pospeškom 40 cm/s^2. Kolikšen je največji tok, ki se inducira po krogu? Kolikšna je hitrost prečke v trenutku, ko je tok največji? Upornost žic in prečk je 3 ohma/m.

III. skupina:

1. Zbiralna leča ima v vodi goriščno razdaljo 30 cm. Leča je v vodoravni legi 10 cm pod gladino vode. V kateri globini pod lečo dobimo sliko predmeta, ki je 35 cm nad vodo?

2. Na osi konveksnega zrcala s krivinskim radijem R je v razdalji $\frac{1}{2}R$ od zrcala točkasto svetilo. Kolikšna je gostota svetlobnega toka ob optični osi v razdalji R od zrcala, če je gostota svetlobnega toka v razdalji $2R$ enaka 100 lm/m^2?

3. Interferenčna slika se premakne za 4 kolobarje, ko postavimo na pot enega od interferirajočih delnih curkov tanko stekleno ploščico z lomnim kvocientom 1,6. Kolikšna je debelina ploščice, če opazujemo v svetlobi z valovno dolžino 550 mμ?

4. Proton in delec α preideta enako pospeševalno napetost. Po pospeševanju je kinetična energija protona enaka tretjini kinetične energije delca α. Kolikšna je pospeševalna napetost?

V prvi skupini je bilo 52 %, v drugi 61 % in v tretji 54 % pravilno rešenih nalog. Za izdelke je komisija podelila nagrade 11 tekmovalcem. Pet tekmovalcev je dobilo prve nagrade, štirje druge in dva tretje nagrade, 12 tekmovalcev je bilo pohvaljenih.

Iz Slovenije je odšlo na tekmovanje sedem dijakov, ki so dobili prvo ali drugo nagrado na tekmovanju v Ljubljani. Zaradi neskladja med učno snovjo v tekočem šolskem letu in tekmovalno snovjo so si smeli slovenski dijaki sami izbrati tekmovalno skupino. Tako je v prvi skupini tekmovalo pet dijakov, v drugi dva, v tretji pa ni tekmoval nobeden. Trije tekmovalci so bili nagrajeni s prvo, eden pa s tretjo nagrado. Prvo nagrado so dobili: Martin Lesjak (TŠE Ljubljana), Svitan Gaborovič (gimnazija Maribor-Tabor) in Peter Legiša (II. gimnazija, Ljubljana). Tretjo nagrado je dobil Tomaž Slivnik (TŠE, Ljubljana).

M. Hribar

SEMINAR IZ MATEMATIKE

Letos je bil že drugi seminar iz matematike za predavatelje srednjih šol v času od 26. junija do 1. julija 1967. Otvoril ga je v imenu organizatorjev tov. prof. dr. Ivan Vidav. Zavod za šolstvo SRS je prevzel predvsem tehnično stran organizacije, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko večji del finančnih stroškov, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS pa je poskrbelo za razmnožitev predavanj tov. prof. Ivana Puclja.

Na seminarju o vektorskih prostorih in uporabi v elementarni matematiki so predavali:

doc. dr. Niko Prijatelj: Osnovni pojmi splošne teorije vektorskih prostorov,

prof. dr. Ivan Vidav: Končno razsežni vektorski prostori s skalarnim produktom,

prof. Ivan Pucelj: Elementarna geometrija kot model evklidičnega vektorskega prostora.

Namen seminarja je bil seznaniti udeležence z nekaterimi osnovnimi pojmi teorije vektorskih prostorov, posebno s tistimi pojmi, ki se pojavljajo pri pouku matematike v srednji šoli.

Predavanj se je udeleževalo prek 50 slušateljev iz vseh krajev Slovenije. Pogrešali smo več udeležencev iz Ljubljane in pa iz strokovnih šol. V prihodnje bomo morali pravočasno prositi skupnosti posameznih šol, da svoje delo prilagodijo tako, da bodo lahko prav vsi prisostvovali takemu seminarju. Posebno razveseljivo je, da so udeleženci vztrajali do konca, saj je obisk nihal le za 10 %. To je tudi lep dokaz, da je bil seminar lepo pripravljen in koristen ter zanimiv za vse prisotne.

Predzadnji dan je imel tov. prof. France Galič, pomočnik republiškega sekretarja za prosveto in kulturo SRS predavanje o uveljavitvi zakona o srednjem šolstvu, kateremu je sledil še krajši razgovor.

Popoldne pa so si udeleženci ogledali računski center na inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko in se seznanili z njegovim delom ter problemi.

V dneh seminarja je društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS organiziralo v sodelovanju z Državno založbo Slovenije, Mladinsko knjigo ter Cankarjevo založbo prodajo slovenske, jugoslovanske in tudi inozemske ma-

tematične literature. Odkup je bil proti vsem pričakovanjem presenetljivo velik, saj je študent, ki je knjige prodajal, iztržil skoraj 1700 N-din v gotovini, za prek 1000 N-din pa je sprejel raznih naročil.

Vsi udeleženci so prejeli skripta predavanj tov. prof. Ivana Puclja, ki jih je imel na tem seminarju. Skript je še dovolj na zalogi in jih lahko dobijo brezplačno tudi tisti predavatelji matematike, ki se seminarja niso udeležili.

Uradni del je zaključil tov. prof. Stanko Uršič, praktično pa so se slovenski matematiki razšli uro kasneje, ker je društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS priredilo skromno malico za svoje člane.

Da je seminar tako lepo uspel, se moramo zahvaliti poleg organizatorjem, predavateljem ter udeležencem tudi oddelku za tekstilno tehnologijo Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, ki je za ves teden brezplačno odstopil vse potrebne prostore.

Tako uspelih seminarjev iz matematike oz. fizike je bilo v Ljubljani že več. Zato bi bilo škoda, da bi minilo kako leto, ne da bi ga organizirali.

Ciril Velkovrh

VPRAŠANJA

V neki zbirki nalog iz fizike sta navedeni naloga in njena rešitev, ki ju navajamo v prostem prevodu.

Vodoravna lesena palica z maso 500 g in dolžino 0,5 m je vrtljiva okoli pravokotne osi skozi sredino, pri čemer je os navpična. Izstrelek z maso 15 g zadene krajišče palice s hitrostjo 200 m/s pravokotno na palico in pravokotno na os. Izračunaj začetno kotno hitrost, ki jo ima palica, če izstrelek v njej obtiči!

V rešitvi je naslednji sklep: kinetična energija izstrelka pred trkom preide v vrtilno kinetično energijo palice in izstrelka po trku. Iz tega sledi za kotno hitrost $\omega = (2v/l)(1 + M/3\,m)^{-1/2} = 224\ \mathrm{s}^{-1}$. Pri tem je v hitrost izstrelka, m njegova masa, M masa palice in l njena dolžina.

Rešitev je napačna. Bralci naj poiščejo pravilno rešitev in naj utemeljijo, zakaj je navedena rešitev napačna.

J. S.

24. Apsen Boris: Riješeni zadaci iz više matematike. Zagreb, Tehnička knjiga 1967. 440 str.

25. Rečnik matematičkih termina. Red. T. Pejović. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SRS 1966. 287 str. (cir.)

26. Leon M. P.: Pitagoras, fundator de las ciencias matematicas. Caracas, Biblioteca de la Academia de ciencias fisicas, matematicas y naturales 1966. XV + 307 str.

27. Rajston, Džastman, Robins: Vrednovanje u savremenoj obrazovanju. Prevela Z. Ivković. Beograd, Vuk Karadžić 1966. 380 str.

28. Džordan A. M.: Merenje u pedagogiji. Prevele L. Miočinović i S. Miladinović. Beograd, Vuk Karadžić 1966. 464 str.

29, Kokster G. S. M.: Vvedenie v geometriju. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. 648 str. (cir.)

30. Kočetkov E. S. i. E. S. Kočetkova: Algebra i elementarnye funkcii. č. 1. in 2. Moskva, Izd-vo Prosveščenie 1967. (cir.)

31. Čerkasova M. P.: Sbornik zadač po metodam vyčislenij i elementam programmirovanija. Minsk, Izd-vo Vysšaja škola 1966. 200 str. (cir.)

32. Christian R. R.: Introduction to logic and sets. Waltham, Blaisdell publ. comp. 1965. XII + 116 str.

33. O'Neill B.: Elementary differential geometry. New York, Academic press 1966. IX + 411 str.

34. Niven I.: Calculus. An introductory approach. Princeton, D. Van Nostrand comp. 1965. VIII + 172 str.

35. Spain B.: Vector analysis. London, D. Van Nostrand comp. 1965. IX + 114 str.

36. Meyer H.: Precalculus mathematics. Princeton, D. Van Nostrand 1964. XI + 365 str.

V zadnjih letih smo prejeli tudi naslednje matematične revije, v katerih lahko dobite lepo število raznih nalog:

a) The American Mathematical Monthly. Menasha, The Mathematical Association of America. Vol. 72. 1965, Vol. 73. 1966.

b) L'Education mathematique. Paris, Vuibert. Annee 62—69. 1959—1966.

c) Elemente der Mathematik. Basel, Birkhäuser Verlag. Bd. 20. 1965, Bd. 21. 1966.

d) Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola. Zagreb, Društvo matematičara i fizičara SRH. God. 16, 1965/66, god. 17, 1966/67, br. 1, 2, 3.

e) Matematika v škole. Moskva, Prosveščenie. 1957, 1958, 1959, 1960, 1965, 1966.

Ciril Velkovrh

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejajo ga: R. Blinc, Z. Bohte, J. Pahor, V. Pivk, A. Moljk, M. Rosina, J. Strnad, F. Šušteršič, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 4 N-din, za zasebnike 5 N-din, za šole 10 N-din, za ustanove in podjetja 20 N-din in za inozemstvo 2 dolarja. Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.

NEKAJ NOVIH DOSTOPNEJŠIH KNJIG V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

1. Zbirka nalog iz matematike za srednješolce. IV. Naloge sta zbrala P. Petek in I. Nadrah. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1967. 26 str. (brošura je v prodaji v mat. knjižnici).

2. Matematičke olimpiade srednješkolaca u SSSR. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SRS 1965. 220 str. Matematička biblioteka, knj. 29.

3. Mitrinović D. S. i D. C. B. Marsh: Priručnik za takmičenja srednješkolaca u matematici. I. Problemi iz elementarne teorije brojeva. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SRS 1965. 80 str. Matematička biblioteka, knj. 30.

4. Beskin N. M.: Zadačnik — praktikum po trigonometrii. Posobie dlja učitelej. Izd. 3., perer. Moskva, Izd-vo »Prosveščenie« 1966. 176 str. (cir.)

5. Radić M.: Rješivost algebarskih jednadžbi. Zagreb, Školska knjiga 1966. 160 str. Materija i broj, br. 14.

6. Polya G.: Kako ću riješiti matematički zadatak. 2. izd. Zagreb, Školska knjiga 1966. XIX + 196 str.

7. Gžegorčik A.: Populjarnaja logika. Poščedostupnyj očerk logiki predloženij. Moskva, Izd-vo Nauka 1965. 108 str. (cir.)

8. Nagibin F. F.: Ekstremumy. Posobie dlja učaščihsja starših klassov. Moskva, Izd-vo Prosveščenie 1966. 120 str. (cir.). Biblioteka škol'nika.

9. Korovkin P. P.: Neravenstva. Izd. 3. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. 56 str. (cir.). Populjarnye lekcii po matematike, vyp. 5.

10. Ljubič Ju. I. i L. A. Šor: Kinematičeskij metod v geometričeskih zadačah. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. 52 str. (cir.). Populjarnye lekcii po matematike. Vyp. 42.

12. Uspenskij V. A.: Treugol'nyk Paskalja. Moskva. Izd-vo Nauka 1966. 36 str. (cir.). Populjarnye lekcii po matematike. Vyp. 43.

13. Niven A.: Čisla racional'nye i irracional'nye. Moskva, Izd-vo MIR 1966. 200 str. (cir.). Sovremenaja matematika.

14. Kulldorf G.: Vvedenie v teoriju ocenivanija po gruppirovannym i častično gruppirovannym vyborkam. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. 176 str. (cir.)

15. Gel'fand I. M., E. G. Glagoleva, A. A. Kirillov: Metod koordinat. Izd. 2, ispr. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. 80 str. (cir.)

16. Gel'fand I. M., E. G. Glagoleva, E. E. Šnol': Funkcii i grafiki. (Osnovnye priemy) Izd. 2, ispr. i dop. Moskva, Izd-vo Nauka 1966. (cir.). Biblioteka fiziko-matematičeskoj školy. Matematika. Vyp. 2.

17. Benčić V.: Elementarna geometrija za studente pedagoških akademija. I. d. Zagreb, Školska knjiga 1966. VII + 144 str.

18. Pál I.: Nacrtna geometrija u anaglifskim slikama. Preveo V. Niče. Zagreb, Tehnička knjiga 1966. 196 str.

19. Jirasek V. i S. Škreblin: Analitička geometrija. Zagreb, Školska knjiga 1966. 144 str.

20. Džurović V.: Nacrtna geometrija. 5. izd. Beograd, Naučna knjiga 1966. X + 448 str. (cir.)

21. Zbirka rešenih zadataka iz matematike I. Beograd, Naučna knjiga 1966. (II) + 199 str.

22. Mitrinović D. S.: Matematika I. i II. u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima. 2. izm. i proš. izd. Beograd, Građevinska knjiga 1967.

23. Uščumlić M. P., P. M. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike I. 2. izm. izd. Beograd, Građevinska knjiga 1967. VII + 567 str.