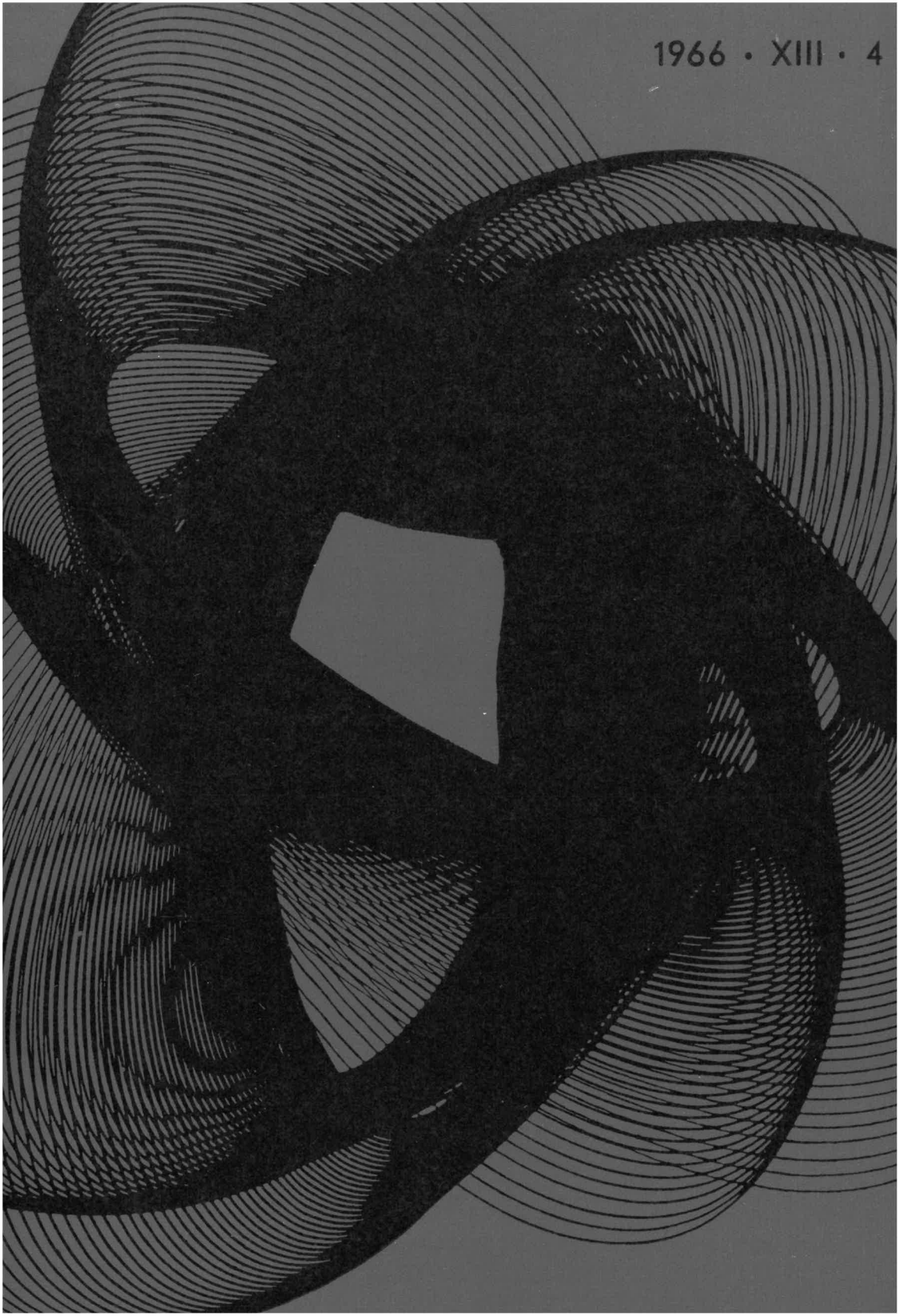
1966 · XIII · 4



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XIII. LETNIK — 4. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, DECEMBER 1966

VSEBINA

Članki Stran

Računanje s p-adičnimi števili (M. Vencelj) 97

Razvojne poti v sodobni matematiki (J. Dieudonné — prev. F. Šušteršič) 112

Novice

Raziskovalne naloge matematičnega oddelka IMFM (Z. Bohte in A. Suhadolc) 118

Invariantnost proti konjugaciji naboja? (J. Strnad) 123

Šola

Nekaj o pouku moderne matematike v Italiji (S. Uršič) 131

Preskusna vaja za študente, ki so se vpisali na matematično-fizikalni oddelek (M. Gros, M. Hribar, J. Strnad) 134

Biotova formula (J. Strnad) 137

Domače vesti

Predlog Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS 140

Organizacija dela pri pouku fizike v gimnaziji po reformi (Fr. Avsec) 140

Tekmovanje mladih matematikov (S. Križanič) 142

Vprašanja 144

CONTENTS

Articles Page

Calculation with p-adic Numbers (M. Vencelj) 97

Recent Developments in Mathematics (J. Dieudonné — trans. by F. Šušteršič) 112

News

Research Projekts of the Mathematical Department of the Institut of Mathematics, Physics and Mechanics (Z. Bohte and A. Suhadolc) 118

Particle-Antiparticle Conjugation Invariance? (J. Strnad) 123

School 131

Home News 140

Questions 144

RAČUNANJE S p-ADIČNIMI ŠTEVILI

MARI VENCELJ

Pred kratkim je izšel v Obzorniku članek J. Grassellija o p-adičnih številih [1]. V njem smo izvedeli, kaj so p-adična števila, si ogledali nekatere njihove lastnosti in videli, da se dajo koristno uporabiti pri reševanju nedoločenih enačb. Med drugim je bilo povedano, da tvorijo vsa p-adična števila obseg (imenovali ga bomo Q_p) in da je ta obseg poln metrični prostor. p-adična števila torej lahko med seboj seštevamo, odštevamo, množimo in delimo ter na njih gradimo matematično analizo. V pričujočem članku bomo z zgledi ilustrirali aritmetiko v Q_p, si ogledali nekaj analize — predvsem kako je s konvergenco nekaterih vrst — in za konec prihranili poglavje o reševanju algebraičnih enačb v Q_p, točneje, ogledali si bomo, kako je z rešitvami enačbe $x^2 - a = 0$, $a \in Z$ v Q_p, in dokazali zanimiv izrek o številu rešitev krožno delitvene enačbe $x^{p-1} - 1 = 0$ v Q_p.

V ta namen se najprej seznanimo z nekaterimi pojmi in dejstvi, potrebnimi za nadaljnje razumevanje. Teorija p-adičnih števil se da še precej posplošiti. Izkoristili bomo priložnost in podali potrebne definicije in dokaze nekoliko splošneje, kot jih bomo kasneje potrebovali. Tako si bomo v prvem razdelku ogledali osnove teorije realnih valuacij, oziroma tisti njen del, ki bo za nas bistvenega pomena. Istočasno bomo na kratko povzeli nekatere ugotovitve, ki smo jih že srečali v [1] v specialnejši obliki. V čem bo omenjena posplošitev, bo razvidno iz teorije same.

1. Realne valuacije

Naj bo k poljuben obseg in R obseg realnih števil. *Realna valuacija* obsega k je taka upodobitev v obsega k v obseg R, ki izpolnjuje naslednje pogoje:

1^0 $v(a) \geqq 0$ in $v(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

2^0 $v(ab) = v(a)\, v(b)$

3^0 $v(a + b) \leqq v(a) + v(b)$

Mi bomo realne valuacije imenovali preprosto kar valuacije.

Iz pogojev 1^0—3^0 hitro sledi, da je $v(1) = 1$, $v(-a) = v(a)$ in $v(a^{-1}) = 1/v(a)$, kjer je 1 v oklepaju na levi strani prve enačbe identiteta obsega k.

Ako valuacija ustreza še dodatnemu pogoju

$$3'^0 \quad v(a + b) \leqq \max(v(a),\ v(b))$$

govorimo o *nearhimedski valuaciji*. Nas bodo predvsem zanimale nearhimedske valuacije.

Naj bo sedaj k obseg racionalnih števil Q. Primerjava s člankom [1] pove, da se pojem valuacije obsega Q ujema s tam definiranim pojmom metrike in da so torej edine valuacije obsega Q funkcije f_0, f_1 in f_p. Ali pa je katera teh valuacij tudi nearhimedska? f_1, to je običajna absolutna vrednost, očitno ni. Nadalje je trivialno, da je f_0 nearhimedska valuacija. Kaj pa ostale? Pokazali bomo, da je f_p za vsako praštevilo p nearhimedska valuacija. Domenimo se, da bomo namesto $f_p(a)$, $a \in Q$, raje pisali $|a|_p$, da bo v kasnejših razdelkih manj težav s pisavo, funkcijo samo pa bomo imenovali p-adična valuacija. Povejmo še enkrat, kako jo dobimo!

Naj bo $c \in R$, $0 < c < 1$ * fiksno število in p fiksno praštevilo. Za vsak ulomek $a \in Q$, $a \neq 0$ je z zapisom $a = p^n \alpha/\beta$, kjer sta α in β celi števili tuji s p, enolično določeno celo število n. p-adična valuacija je potem funkcija, določena s predpisom

$$|a|_p = c^n \quad \text{in} \quad |0|_p = 0$$

Ker je $p \in Q$, lahko izračunamo tudi $|p|_p$. Dobimo

$$|p|_p = c$$

in tedaj lahko pišemo za vsak $a \in Q$, $a \neq 0$,

$$|a|_p = |p|_p^n$$

Pokažimo sedaj, da so p-adične valuacije obsega Q res nearhimedske, da torej velja

$$|a + b|_p \leqq \max(|a|_p, |b|_p) \tag{1}$$

Dokaz. Namesto, da bi preverili (1), bomo dokazali naslednjo ekvivalentno trditev

$$|a|_p \leqq 1 \Rightarrow |1 + a|_p \leqq 1 \tag{2}$$

Najprej dokažimo ekvivalenco pogojev (1) in (2). Če je izpolnjen pogoj (1), potem iz $|a|_p \leqq 1$ sledi $|1 + a|_p \leqq \max(1, |a|_p) = 1$, torej (2). Naj bo sedaj (2) res. V pogoju (1) lahko vzamemo $b \neq 0$, ker bi sicer ne bilo kaj dokazovati. Razen tega lahko brez izgube splošnosti privzamemo, da je $|a|_p \leqq |b|_p$. Potem pa je $|a/b|_p \leqq 1$ in iz veljavnosti pogoja (2) sledi

$$|1 + a/b|_p \leqq 1 \Rightarrow |a + b|_p \leqq |b|_p = \max(|a|_p, |b|_p)$$

torej veljavnost pogoja (1).

Dokažimo sedaj trditev (2) za vsak ulomek a in vsako praštevilo p! Iz definicije p-adične valuacije za $a \neq 0$ neposredno sledi, da mora biti $n \geqq 0$, če je $|a|_p \leqq 1$. Torej lahko tak ulomek a pišemo v obliki $a = \alpha/\beta$, kjer je ulomek okrajšan kolikor mogoče in je β tuj s p. Oglejmo si

$$1 + a = 1 + \alpha/\beta = (\alpha + \beta)/\beta$$

Tudi v $1 + a$ je imenovalec tuj s p in je torej $|1 + a|_p \leqq 1$. Ker je za $a = 0$ pogoj (2) trivialno izpolnjen, je s tem dokaz naše trditve, da so p-adične valuacije nearhimedske, popoln.

---

* V [1] je $c = ½$.

Povrnimo se spet k splošnemu obsegu k in dokažimo naslednji izrek.

Izrek 1. *Če je v nearhimedska valuacija in $v(a) \neq v(b)$, potem velja v pogoju 3'⁰ enačaj:*

$$v(a+b) = \max(v(a), v(b))$$

Dokaz. Naj bo $v(a) > v(b)$. Potem je

$$v(a) = v((a+b)-b) \leqq \max(v(a+b), v(b))$$

Seveda mora biti na skrajni desni $v(a+b) > v(b)$, ker bi sicer bilo $v(a) \leqq v(b)$ v nasprotju s predpostavko. Če to upoštevamo, dobimo

$$v(a) \leqq v(a+b) \leqq \max(v(a), v(b)) = v(a)$$

in od tod

$$v(a+b) = v(a) = \max(v(a), v(b))$$

kar je bilo treba dokazati. Če vstavimo $a = -b$, hitro vidimo, da iz $v(a) = v(b)$ enačaj ne sledi.

Naj bo sedaj v poljubna valuacija na k; ni nujno, da je nearhimedska. Potem lahko smatramo k za *metrični prostor*, v katerem je razdalja $d(x, y)$, $x, y \in k$, definirana takole:

$$d(x, y) = v(x-y)$$

Iz definicije valuacije takoj sledi, da je d res razdalja:

1. $d(x, y) = v(x-y) \geqq 0$ in $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = v(x-y) = v(y-x) = d(y, x)$
3. $d(x, z) = v(x-z) = v((x-y)+(y-z)) \leqq v(x-y) + v(y-z) =$
   $= d(x, y) + d(y, z)$

Če je v nearhimedska valuacija, potem ustreza razdalja ultrametrični neenačbi

$$d(x, z) \leqq \max(d(x, y), d(y, z))$$

Kot zanimivost si oglejmo izreku 1 analogen izrek v ultrametričnih prostorih, to je prostorih, katerih razdalja ustreza ultrametrični neenačbi. Ni se težko prepričati, da za poljubne tri točke x, y, z ultrametričnega prostora iz $d(x, y) \neq d(y, z)$ sledi

$$d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$$

kar geometrijsko pomeni, da je vsak trikotnik v takem prostoru enakokrat, z osnovnico, ki ni nikoli daljša od kraka.

Ko smo tako preko valuacije metrizirali obseg k, lahko uvedemo pojem konvergence.

Pravimo, da zaporedje $\{a_n\}$ elementov iz k *konvergira* po valuaciji v k elementu $a \in k$, in ga imenujemo konvergentno zaporedje, ako za vsako realno število $\varepsilon > 0$ eksistira tako naravno število N, da je $v(a_n - a) < \varepsilon$ za vsak $n > N$. Število a imenujemo *limita* zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo $a = \lim a_n$.

Običajne lastnosti limite, ki jih poznamo iz primera realnih ali kompleksnih števil, veljajo tudi v tej splošnejši situaciji, ker zadošča valuacija istim pogojem kot običajna absolutna vrednost (in na katerih temelje dokazi o lastnostih običajne limite).

Zaporedje $\{a_n\}$ elementov iz k je *Cauchyjevo* po valuaciji v, ako limitira $v(a_n - a_m) \to 0$, ko gresta $m, n \to \infty$. Kot vedno, je tudi tukaj vsako konvergentno zaporedje Cauchyjevo. Če pa je tudi narobe res, da ima torej vsako Cauchyjevo zaporedje limito v k, potem je obseg k *poln* glede na valuacijo v.

V članku [1] smo videli, da obseg Q ni poln za nobeno p-adično valuacijo, in si ogledali dopolnitveni proces — konstrukcijo obsega p-adičnih števil Q_p. Vsako p-adično število je bilo dano z zaporedjem racionalnih števil, ki je Cauchyjevo glede na dano p-adično valuacijo. Taka dopolnitev je možna za vsak obseg k in vsako valuacijo v tega obsega. Velja naslednji izrek.

Izrek 2. *Za vsak obseg k in vsako valuacijo v eksistira tak obseg $\bar{k}$, enolično določen do kongruence, da je k povsod gost v $\bar{k}$ in je $\bar{k}$ poln obseg glede na neko valuacijo, ki je nadaljevanje valuacije v.*

Izreka ne bomo dokazovali. Oglejmo si le glavne korake dopolnitvenega procesa:

Da se videti, da je množica vseh Cauchyjevih zaporedij obsega k kolobar z identiteto, imenujemo ga A, za naslednji dve operaciji:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$
$$\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}$$

Nadalje se izkaže, da je množica $M \subset A$ vseh ničelnih zaporedij, to je zaporedij, ki so konvergentna z limito 0, ideal v A, in sicer maksimalni ideal. Torej je faktorski kolobar A/M obseg in sicer ravno tisti, ki ga iščemo — dopolnitev obsega k. V njem je valuacija definirana takole

$$w(\alpha) = w(\{a_n\} + M) = \lim v(a_n), \quad \alpha \in A/M$$

Ni težko preveriti lastnosti 1^0—3^0 in se tako prepričati, da je w res valuacija. Nadalje velja, da je w nearhimedska, če je bila v nearhimedska. Takoj se tudi vidi, da je w nadaljevanje valuacije v, torej $w(a) = v(a)$, ako smatramo A/M za razširitev obsega k v smislu injekcije $a \to \{v\} + M$, $a \in k$, kjer smo z $\{v\}$ označili zaporedje, v katerem so vsi členi enaki a.

V polnih obsegih lahko uvedemo pojem konvergence neskončne vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ na običajen način. Med drugim mora biti $\lim a_n = 0$, če naj vrsta konvergira. Ako pa je v nearhimedska valuacija, velja tudi obratna trditev:

Izrek 3. *Če je k poln obseg glede na nearhimedsko valuacijo v in je $\{a_n\}$ zaporedje elementov iz k z lastnostjo $\lim a_n = 0$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*

Dokaz. Naj bo $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ in $s_m = a_1 + \ldots + a_m$, $m < n$. Potem je

$$v(s_n - s_m) = v(a_n + \ldots + a_{m+1}) \leqq \max_{m+1 \leqq i \leqq n} v(a_i)$$

Izraz na desni limitira proti nič, ko gresta $m, n \to \infty$. Zaporedje delnih vsot je torej Cauchyjevo in, ker je obseg k poln, tudi konvergentno. Torej naša vrsta res konvergira. Velja še:

Izrek 4. *Če je k poln obseg glede na valuacijo v in je $\{ a_n \}$, $a_n \in k$, tako zaporedje, da konvergira vrsta iz valuacij $\sum_{n=1}^{\infty} v(a_n)$, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Dokaz je direkten in ga lahko bralec izvede sam.

Preden preidemo na naš poseben primer p-adičnih števil, si oglejmo še nekatere stvari, ki veljajo za nearhimedske valuacije. Naj bo kot prej k obseg, v valuacija obsega k, $\bar{k}$ dopolnitev obsega k glede na v in w valuacija obsega $\bar{k}$.

Izrek 5. *Če je v nearhimedska valuacija na k, potem je $v(k) = w(\bar{k})$.* Za vsak element iz $\bar{k}$ torej lahko v k najdemo tak element, da bo vrednost valuacije pri obeh ista.

Dokaz. Naj bo $a \in \bar{k}$. Če je $a = 0$, je $w(0) = 0$ in izrek očitno drži. Predpostavimo sedaj, da je $a \neq 0$. Ker je k gost v $\bar{k}$, eksistira Cauchyjevo zaporedje $a_n \}$, $a_n \in k$, tako da je

$$\lim a_n = a$$

Če sta $a, b \in V$, torej $v(a) \leqq 1$ in $v(b) \leqq 1$, potem iz

$$v(ab) = v(a)\, v(b) \leqq 1$$

Ker je v nearhimedska, pa je za zadosti velike n

$$v(a_n) = w(a_n) = w(a + (a_n - a)) = \max(w(a),\ w(a_n - a)) = w(a)$$

po izreku 1. Vemo namreč, da $w(a) \neq 0$, medtem ko $w(a_n - a)$ lahko poljubno zmanjšamo, če le n vzamemo zadosti velik. Torej je

$$w(a) = v(a_n)$$

kar potrjuje izrek.

Naj bo v še vedno nearhimedska valuacija obsega k. Oglejmo si množico

$$V = \{ a \in k : v(a) \leqq 1 \} \tag{3}$$

$$v(a - b) \leqq \max(v(a), v(b)) \leqq 1$$

sledi, da je tudi $ab \in v$ in $a - b \in V$. Torej je V kolobar in sicer z identiteto, ker je $v(1) = 1$.

Nadalje naj bo

$$P = \{ a \in k : v(a) < 1 \} \tag{4}$$

Jasno je, da iz $a, b \in P$ sledi $a + b \in P$. Nadalje naj bo $a \in P$ in $b \in V$. Potem je $v(ba) = v(b)\, v(a) < 1$, torej $ba \in P$. To pa pomeni, da je P ideal v V. Še več. Če je $a \in V$ in $a \notin P$, potem je $v(a) = 1$. Torej je tudi $v(a^{-1}) = 1$ in tedaj $a^{-1} \in V$. Vsi elementi kolobarja V, ki niso v idealu P, imajo torej v V inverzni element. To pa pomeni, da je P edini maksimalni ideal v V in, ker je $1 \in V$, je P tudi praideal. Združimo vse te ugotovitve v izrek.

Izrek 6. *Če je v nearhimedska valuacija obsega k, potem je množica $V \subset k$, določena s (3), kolobar z identiteto. Množica $P \subset V$, določena s (4), je*

edini maksimalni ideal v V, torej praideal. Kolobar V imenujemo *valuacijski kolobar po valuaciji v.* Faktorski kolobar V/P je v tem primeru obseg, imenovan *residualni obseg.*

2. Aritmetika v p-adičnih obsegih

Dopolnitev obsega Q glede na p-adično valuacijo $|\ |_p$ smo imenovali obseg p-adičnih števil in ga označili s Q_p. Domenimo se, da bomo oznako $|\ |_p$ uporabljali tudi za nadaljevanje valuacije na Q_p.

V članku [1] smo spoznali pojem celih p-adičnih števil in videli, da jih lahko pišemo v posebni, tako imenovani kanonični obliki z zaporedji. Naša prva naloga bo, pokazati, da lahko zapišemo v kanonični obliki ne le cela, ampak prav vsako p-adično število.

Označimo z V valuacijski po valuaciji $|\ |_p$ na Q, s P edini maksimalni ideal v V, $\overline{V}$ naj bo valuacijski kolobar po $|\ |_p$ v Q_p in $\overline{P}$ njegov edini maksimalni ideal. Očitno velja

$$P \subset \overline{P} \text{ in } V \subset \overline{V}$$

Iz definicije p-adične valuacije imamo

$$|Q|_p = \{ |p|_p^n : n \in Z \}$$

Nadalje vemo, da je p-adična valuacija nearhimedska. Zanjo torej velja izrek 5 in je tudi

$$|Q_p|_p = \{ |p|_p^n : n \in Z \}$$

Naj bo sedaj $\alpha \in Q_p$ poljubno od nič različno p-adično število. Po zgornjem je torej

$$|\alpha|_p = |p|_p^n \tag{5}$$

kjer je n neko fiksno celo število, seveda še odvisno od α. Oglejmo si število $\beta = \alpha/p^n$. Ker je $|\beta|_p = 1$, sledi $\beta \in \overline{V}$. Toda β je p-adično število. Torej eksistira neko tako zaporedje $\{c_k\}$, $c_k \in Q$, da je $\beta = \lim c_k$. Za vse zadosti pozne člene tega zaporedja velja, da je $|\beta - c_k|_p < 1$. Naj bo c_N neki tak zadosti pozen člen. Potem je

$$|c_N|_p = |\beta + (c_N - \beta)|_p = \max(|\beta|_p, |c_N - \beta|_p) = |\beta|_p = 1$$

Ker je bil $c_N \in Q$, sledi od tod $c_N \in V$. Označimo sedaj $c_N = b_n$, kjer je n isti kot v (5). Za b_n imamo relaciji $|b_n|_p = 1$ in $|\beta - b_n|_p < 1$, kar pomeni $b_n \in V \subset \overline{V}$ in $\beta - b_n \in \overline{P}$. Od tod pa sledi

$$\beta + \overline{P} = b_n + \overline{P} \tag{6}$$

Seveda je b_n ulomek. Naj bo $b_n = e_n/d_n$, kjer sta e_n, d_n celi števili in tuji s p, kar je mogoče, ker je $|b_n|_p = 1$. Potem pa eksistira tako celo število x, da je $xd_n \equiv 1 \pmod p$. Dobimo

$$\frac{e_n}{d_n} - e_n x = \frac{e_n(1 - d_n x)}{d_n} \equiv 0 \pmod p$$

Torej je

$$b_n - e_n x \in P \subset \overline{P} \qquad (7)$$

Če označimo $a_n = e_n x$ in združimo (6) in (7), dobimo

$$\beta + \overline{P} = b_n + \overline{P} = a_n + \overline{P}$$

kjer je $\beta \in Q_p$, $b_n \in Q$ in $a_n \in Z$. Torej je $a_n - \beta \in \overline{P}$ ali, kar je isto, $|a_n - \beta|_p < 1$. To nam da $|a_n p^n - \beta p^n|_p < |p^n|_p$ ali

$$\alpha = \beta p^n = a_n p^n + (\beta - a_n) p^n = a_n p^n + \gamma_1$$

kjer je $\gamma_1 = (\beta - a_n) p^n$ in $|\gamma_1|_p < |p|_p^n$. Ker je $0 < |p|_p < 1$ (po definiciji p-adične valuacije), imamo $|\gamma_1|_p = |p|_p^m$ za $m > n$. Za γ_1 smo torej dobili relacijo istega tipa, kot smo z njo startali za α v (5). Ponovimo ves postopek za γ_1. Po k korakih dobimo

$$\alpha = a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \ldots + a_{n+k-1} p^{n+k-1} + \gamma_k$$

kjer so $a_i \in Z$, $|a_i|_p = 1$ ali $a_i = 0$ in je $|\gamma_k|_p \leqq |p|_p^{n+k}$. Ker pa limitira $|p|_p^{n+k} \to 0$, ko gre $k \to \infty$, smo s tem dokazali naslednji izrek, ki očitno velja tudi za $\alpha = 0$.

Izrek 7. *Vsako p-adično število lahko zapišemo v obliki*

$$\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j \qquad (8)$$

kjer so $a_j \in Z$ in je n tak, da je $|\alpha|_p = |p|_p^n$. Koeficienti v (8) so enolično določeni le do kongruence po modulu p. Če pa dosledno izbiramo a_j tako, da je $0 \leqq a_j \leqq p - 1$, potem imenujemo (8) kanonični zapis p-adičnega števila.

Namesto vrste (8) često uporabljamo enostavnejši zapis

$$\alpha = a_n a_{n+1} \ldots a_0, a_1 a_2 \ldots (p) \qquad (9)$$

Če ima $\alpha \in Q_p$ kanoničen zapis z $n \geqq 0$, torej

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots (p)$$

potem je α celo p-adično število, definirano v članku [1]. To je tedaj in le tedaj, ako je $|\alpha|_p = |p|_p^n$ z $n \geqq 0$, oziroma, ko je $|\alpha|_p \leqq 1$. p-adična cela števila so torej natančno vsi elementi valuacijskega kolobarja po valuaciji $|\ |_p$ obsega Q_p.

Ilustrirajmo naša izvajanja na zgledu! Recimo, da bi radi zapisali število 3/8 v Q_5 v kanonični obliki. Ker je bil dokaz izreka 7 konstruktiven, nam bo vodilo pri našem delu.

Iz $|3/8|_5 = |5|_5^0 = 1$ dobimo $n = 0$. Rešitev kongruence $8x \equiv 1 \pmod 5$ je $x = 2$ in ker je $2.3 \equiv 1 \pmod 5$, dobimo $a_0 = 1$. Potem je $\gamma_1 = (3/8 - 1) = -5/8$ in $|-5/8|_5 = |5|_5^1$, kar pove, da $a_1 \neq 0$. Nadalje je $(-5/8 : 5) = -1/8$ in spet je rešitev kongruence $8x \equiv 1 \pmod 5$ enaka $x = 2$. Ker je $2 . (-1) \equiv 3$

(mod 5), dobimo $a_1 = 3$. Nadaljujmo! $\gamma_2 = (-1/8 - 3)\,5 = -125/8$. Torej je $|\gamma_2|_5 = |5|_5^3$, od koder sledi $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Iz $\gamma_2/5 = -1/8$ dobimo, da je (kot pri a_1) $a_3 = 3$. Hitro se vidi, da je

$$a_4 = a_6 = a_8 = \ldots = 0$$
$$a_5 = a_7 = a_9 = \ldots = 3$$

Torej je $3/8 = 1{,}303030\ldots(5)$. Dobili smo, da je kanonični zapis ulomka 3/8 v Q_5 periodičen. Je to slučaj, ali velja morda to splošneje, tako kot npr. vemo, da je poljubno realno število racionalno natančno takrat, ko je njegov decimalni zapis periodičen? No, res velja naslednji izrek, čigar dokaz pa bomo zaradi obsežnosti opustili.

Neki element $a \in Q_p$ je racionalen tedaj in le tedaj, če je njegov kanonični zapis periodičen.

Napravimo še nekaj zgledov za aritmetične operacije v Q_p. Naj je $\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j$ in $\beta = \sum_{j=m}^{\infty} b_j p^j$. Potem dobimo $\alpha + \beta$ s seštevanjem po komponentah in $\alpha\beta$ tako, da vrsti formalno množimo in združimo koeficiente pri istih potenzah p-ja, to je tvorimo običajen Cauchyjev produkt. Odštevanje in deljenje sta potem ustrezni inverzni operaciji.

Pri naših posebnih primerih bomo p-adična števila pisali v obliki (9) in pri računanju razen pravkar povedanega upoštevali še naslednje zveze

$$a_n \ldots a_0, \ldots a_i\, a_{i+1} \ldots = a_n \ldots a_0, \ldots (a_i + p)\,(a_{i+1} - 1) \ldots (p)$$
$$a_n \ldots a_0, \ldots a_i\, a_{i+1} \ldots = a_n \ldots a_0, \ldots (a_i - p)\,(a_{i+1} + 1) \ldots (p)$$
$$0 = 00 \ldots 0p\,(p-1) \ldots (p-1), (p-1)\,(p-1) \ldots (p)$$

ki slede neposredno iz identitet

$$a_i p^i + a_{i+1} p^{i+1} = (a_i + p)\,p^i + (a_{i+1} - 1)\,p^{i+1} = \\ = (a_i - p)\,p^i + (a_{i+1} + 1)\,p^{i+1}$$

Seštevanje. V Q_7 seštej:

```
 452,137612
  37,5213152
 ----------
 413,0613303
```

Množenje. V Q_7 zmnoži:

```
 12,314 . 1,203
 --------------
 12314
  246211
    362451
 ----------
 14,0464551
```

Odštevanje. V Q_5 odštej:

```
   221,43021
 - 134,231422
 ------------
 141,64323244...
 141,10423244...
```

Tu smo upoštevali, da je $0 = 054{,}444\ldots(5)$ in to ničlo najprej prišteli minuendu.

Deljenje. V Q_5 deli 32,13 s 43,12! Prva številka količnika bo najmanjše tako pozitivno celo število n, da bo $4n \equiv 3 \pmod 5$. Analogno dobimo tudi ostale številke količnika. Račun:

```
32,13      :  43,12      2,024420 024420
32 34
 0 3344..
  3234
   11044..
   10241
    134244..
    10241
     323244..
     3234
      003344..
```

3. Nekaj analize v Q_p

V tem razdelku si bomo ogledali potenčne vrste v Q_p, posebej eksponencialno, logaritemsko in binomsko vrsto.

Potenčna vrsta v Q_p imenujemo vrsto oblike

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in Q_p \tag{10}$$

Ker je Q_p poln obseg glede na nearhimedsko valuacijo $|\ |_p$, sledi iz izrekov 3 in 4 prvega poglavja, da konvergira vrsta (10) za neki $x \in Q_p$ tedaj in le tedaj, ako je $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x^n = 0$. Nadalje naša vrsta konvergira, če konvergira vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|_p$. Množico vseh $x \in Q_p$, za katere vrsta (10) konvergira, imenujemo konvergenčno območje potenčne vrste. Kot v primeru realnih ali kompleksnih vrst in običajne absolutne vrednosti, se tudi tu hitro vidi, da vrsta konvergira za $|x|_p < r$ in divergira za $|x|_p > r$, kjer je

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|_p}$$

Primer $|x|_p = r$ je tukaj laže analizirati zaradi nearhimedskega značaja valuacije. Za $|x|_p = r$ vrsta konvergira, če je $\lim |a_n|_p r^n = 0$, in divergira za $\lim |a_n|_p r^n \neq 0$.

Tudi drugi rezultati so podobni onim pri realnih in kompleksnih številih. V mnogih primerih pa je dokaz enostavnejši, ker je $|\ |_p$ nearhimedska valuacija. Tako iz konvergence vrst $\sum a_n x^n$ in $\sum b_n x^n$ sledi konvergenca vrst $\sum (a_n \pm b_n) x^n$ in je rezultat enak $\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n$. Podobno konvergira formalni produkt vrst in je enak produktu $\sum a_n x^n \,.\, \sum b_n x^n$.

Vpeljemo lahko tudi pojem odvoda potenčne vrste. Ako je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dana potenčna vrsta, imenujemo njen odvod potenčno vrsto oblike

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Velja, da $f'(x)$ konvergira povsod na konvergenčnem območju vrste $f(x)$. Res: ako $f(x)$ za neki $x \in Q_p$ konvergira, potem je $\lim a_n x^n = 0$, torej $\lim |a_n x^n|_p = 0$ in tudi $\lim |a_n x^{n-1}|_p = 0$. Ker je n celo število, je $|n|_p \leqq 1$. Če vse to upoštevamo, dobimo $|n a_n x^{n-1}|_p \leqq |a_n x^{n-1}|_p \to 0$, torej $f'(x)$ res konvergira.

Med $f(x)$ in $f'(x)$ pa velja tudi naslednja zveza

$$f'(x) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}, \quad y \in Q_p, \; y \neq 0.$$

Dokaz tega rezultata je enako preprost kakor pri realnih potenčnih vrstah.

Eksponencialna vrsta imenujemo vrsto

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$$

Za razliko od konvergence v realnem, eksponencialna vrsta v Q_p ne konvergira vselej. Velja naslednji izrek.

Izrek 8. *Če je p liho praštevilo, potem je konvergenčno območje eksponencialne vrste $E(x)$ v Q_p množica vseh x, za katere je $|x|_p < 1$, torej ravno $\overline{P}$, maksimalni ideal valuacijskega kolobarja $\overline{V}$ v Q_p. V Q_2 pa $E(x)$ konvergira tedaj in le tedaj, ako je $|x|_2 < |2|_2$.*

Dokaz. Naj bo najprej $p \neq 2$ in ocenimo $|n!|_p$. V ta namen poglejmo, kolikokrat nastopa p v $n!$ kot faktor. Recimo, da nastopa k-krat. Očitno je

$$k = [n/p] + [n/p^2] + \ldots + [n/p^j] \leqq n(1/p + \ldots + 1/p^j) < n/(p-1),$$

kjer smo z oglatim oklepajem označili celi del ulomka in je j tako celo število, da je $p^j \leqq n < p^{j+1}$. Torej je

$$|n!|_p = |p|_p^k > |p|_p^{n/(p-1)} \tag{11}$$

Naj bo sedaj $|x|_p < 1$, ali, kar je isto, $|x|_p \leqq |p|_p$. Za n-ti člen vrste potem velja

$$|x^n/n!|_p < \frac{|p|_p^n}{|p|_p^{n/(p-1)}} = |p|_p^{n(p-2)/(p-1)}$$

To pa res konvergira proti nič, ko $n \to \infty$, ker $p \neq 2$. Kaj pa, če je $|x|_p = 1$? Ker je za n oblike p^j

$$k = p^{j-1} + p^{j-2} + \ldots + 1 = \frac{n-1}{p-1} \tag{12}$$

in tedaj

$$|x^n/n!|_p = 1/|p|_p^{(n-1)/(p-1)}$$

za take n ne limitira proti nič, vrsta za $|x|_p = 1$ ne konvergira. S tem je prvi del izreka dokazan.

Naj bo sedaj $p = 2$. Formuli (11) in (12) veljata tudi v tem primeru. Potem pa dobimo za $|x|_2 < |2|_2$

$$|x^n/n!|_2 < |2|_2^{2n}/|2|_2^n \to 0$$

in za $|x|_2 = |2|_2$ ter za $n = 2^j$

$$|x^n/n!|_2 = |2|_2 \not\to 0$$

od koder sledi drugi del izreka.

Prediskutirajmo rezultat! Če je p liho praštevilo, potem vrsta $E(x)$ konvergira le za taka cela števila x, ki so deljiva s p. Ako pa je $p = 2$, pa mora biti x celo deljiv s 4, da bo vrsta konvergirala.

Logaritmična vrsta.

Izrek 9. *Konvergenčno območje logaritmične vrste*

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n/n$$

v Q_p je množica vseh x, za katere je $|x|_p < 1$.

Dokaz izreka je preprostejši kot pri eksponencialni vrsti in ga ne bomo izvajali. Zaradi obsežnosti bomo tudi opustili izpeljavo naslednjih relacij

$$\log E(x) = x$$
$$E(\log(1 + x)) = 1 + x$$

ki veljajo za vse x s skupnega konvergenčnega območja obeh vrst.

Binomska vrsta. Naj bo $y \in Q_p$ tak, da je $|y|_p \leqq 1$, torej celo p-adično število. Če je n naravno število, imenujemo binomski simbol naslednje p-adično število

$$\binom{y}{n} = \frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{n!}$$

Definirajmo še $\binom{y}{0} = 1$.

Binomska vrsta je potem podana takole

$$(1 + x)^y = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{y}{n} x^n$$

Izrek 10. *Binomska vrsta konvergira za vse x z $|x|_p < 1$.*

Dokaz: Ker je $|y|_p \leqq 1$ in je za cela števila vrednost p-adične valuacije $\leqq 1$, imamo

$$\left|\binom{y}{n}\right|_p = |1/n!|_p\, |y|_p \,.\, \max(|y|_p, 1)\ldots\max(|y|_p, |n-1|_p) \leqq |1/n!|_p$$

Tako je $\left|\binom{y}{n} x^n\right|_p \leqq |x^n/n!|_p$. Za desno stran te neenačbe smo že pri eksponencialni vrsti videli, da gre $\to 0$, če je $|x|_p < 1$. Potem pa za take x tudi binomska vrsta konvergira.

Za binomsko vrsto velja formula

$$(1 + x)^{y_1}(1 + x)^{y_2} = (1 + x)^{y_1 + y_2} \tag{13}$$

za $|x|_p < 1$ in $|y_1|_p, |y_2|_p \leqq 1$.

Kot primer si oglejmo vrsto $(1-5)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-5)^n$ v Q_5. Ker je $|1/2|_5 = 1$ in $|-5|_5 = |5|_5 < 1$, vrsta v Q_5 konvergira. Po formuli (13) je $(1-5)^{1/2} \cdot (1-5)^{1/2} = (1-5)^1$. Vrednost vrste na desni pa je racionalno število, in sicer -4. To pa pomeni, da vrednost prvotne vrste ustreza enačbi $x^2 + 4 = 0$, torej je ta enačba v Q_5 rešljiva.

4. Newtonova metoda v polnih obsegih

Naj bo k poln obseg glede na nearhimedsko valuacijo v in V pripadajoči valuacijski kolobar. Potem lahko razširimo Newtonovo metodo za določanje korenov algebraičnih enačb na ta primer v smislu naslednjega izreka.

Izrek 11. *Naj bo $f(x)$ polinom s koeficienti iz V in vodilnim koeficientom 1. Ako eksistira tak $\alpha_1 \in k$, da je*

$$v(f(\alpha_1)) < 1 \quad \text{in} \quad v(f'(\alpha_1)) = 1,$$

potem zaporedje

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 - f(\alpha_1)/f'(\alpha_1) \\ \alpha_3 &= \alpha_2 - f(\alpha_2)/f'(\alpha_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{14}$$

konvergira h korenu $\alpha \in V$ enačbe $f(x) = 0$.

Velja pa tudi naslednji izrek z nekoliko spremenjenimi predpostavkami.

Izrek 12. *Naj bo $f(x)$ polinom s koeficienti iz V in vodilnim koeficientom 1. Ako eksistira $\alpha_1 \in k$, tak da je*

$$v(f(\alpha_1)) < 1, \; f'(\alpha_1) \neq 0, \; v(f'(\alpha_1)) \leqq 1$$

in

$$v(f(\alpha_1)/f'(\alpha_1)^2) < 1$$

potem zaporedje (14) *konvergira h korenu $\alpha \in V$ enačbe $f(x) = 0$.*

Oglejmo si zanimivo uporabo teh dveh izrekov v p-adičnih obsegih. Postavimo si vprašanje, kdaj lahko v Q_p rešimo enačbo

$$x^2 - a = 0 \tag{15}$$

kjer je $a \in Z$ in nedeljiv s p^2.

Naj bo najprej a deljiv s p, torej $|a|_p = |p|_p$. Če bi imela enačba (15) rešitev $\sqrt{a}$ v Q_p, potem bi bilo

$$|\sqrt{a}|_p = \sqrt{|a|_p} = |p|_p^{1/2}$$

v nasprotju z dejstvom, da je za vsak $a \in Q_p$ v zapisu $|a|_p = |p|_p^n$ eksponent n celo število. Če je torej a deljiv s p, enačba (15) v Q_p ni rešljiva.

Naj sedaj p ne deli a. Označimo $f(x) = x^2 - a$. Zanima nas, ali eksistira kak tak $\alpha_1 \in Z$, da bodo izpolnjene predpostavke izreka 11:

$$|f(\alpha_1)|_p = |\alpha_1^2 - a|_p < 1 \quad \text{in} \quad |f'(\alpha_1)|_p = |2\alpha_1|_p = 1$$

Prvi pogoj pomeni, da mora biti $\alpha_1^2 \equiv a \pmod p$, torej kvadrat po modulu p, drugi pa, da $2\alpha_1$ ne sme biti deljivo s p. Za $p = 2$ drugega pogoja očitno ne moremo izpolniti.

Naj bo torej najprej $p \neq 2$ in predpostavimo, da je $\alpha_1^2 \equiv a \pmod p$. Ker a ni deljiv s p, tudi α_1 ne more biti deljiv s p in prav tako ne $2\alpha_1$, ker je $p \neq 2$. Enačba (15) ima torej v Q_p dve rešitvi, če je a kvadrat po modulu p.

Če pa je a nekvadrat, se hitro vidi, da v Q_p ni nobene rešitve. Naj bo namreč $\alpha \in Q_p$ tako število, da bo $\alpha^2 - a = 0$. Ker je $a \in Z$ in ni deljiv s p, je $|\alpha|_p = +\sqrt{|a|_p} = 1$. Kanonski zapis števila α se torej začne z $n = 0$, kar pomeni, da eksistira neki tak $b \in Z$, da je $a \equiv b \pmod p$. Potem pa je $a^2 \equiv b^2 \pmod p$, oziroma $a \equiv b^2 \pmod p$, v nasprotju z dejstvom, da je a nekvadrat po modulu p. Torej velja

Izrek 13. *Če je p liho praštevilo, potem enačba $x^2 - a = 0$ za $a \in Z$ in nedeljiv s p^2*

(1) *nima rešitve v Q_p, če je a deljiv s p*

(2) *ima dve ali pa nobene rešitve v Q_p, odvisno od tega, ali je a kvadrat ali nekvadrat po modulu p, ako a ni deljiv s p.*

Kaj pa, če je $p = 2$? V tem primeru bomo uporabili izrek 12. Iščemo torej tak $\alpha_1 \in Z$, da bo

$$|\alpha_1^2 - a|_2 < 1 \quad \text{in} \quad |(\alpha_1^2 - a)/4\,\alpha_1^2|_2 < 1$$

Ker α_1^2 ni deljivo z 2, bosta oba pogoja izpolnjena, ako bo $\alpha_1^2 - a \equiv 0 \pmod 8$. Rešiti moramo torej kongruenco $x^2 \equiv a \pmod 8$ s takim α_1, da bo $\alpha_1 \equiv 1 \pmod 2$, to je α_1 mora biti lih. Toda za vsako liho število α_1 velja $\alpha_1^2 \equiv 1 \pmod 8$. Za $a \equiv 1 \pmod 8$ lahko torej uporabimo poljubno liho število α_1, pa bomo zadovoljili zahtevam izreka 12. Za take a je torej enačba (15) vedno rešljiva.

Velja pa tudi narobe. Ako je α rešitev enačbe (15) v Q_2, je $|\alpha|_2 = 1$, ker je a po predpostavki nedeljiv z 2. Kanonski zapis ima torej obliko

$$\alpha = 1 + \alpha_1 . 2 + \alpha_2 . 2^2 + \ldots$$

in eksistira tako celo število $b = 1 + \alpha_1 . 2 + \alpha_2 . 2^2$, da je $\alpha \equiv b \pmod 8$. Torej $a = \alpha^2 \equiv b^2 \pmod 8$. Ker pa je b konstrukciji lih, dobimo od tod, da mora biti $a \equiv 1 \pmod 8$. Združimo vse ugotovitve v izrek!

Izrek 14. *Enačba $x^2 - a = 0$, kjer je $a \in Z$ in ni deljiv s 4*

(1) *v Q_2 nima rešitve za sode a*

(2) *ima v Q_2 dve ali nobene rešitve glede na to, ali je $a \equiv 1 \pmod 8$ ali ne, če je a liho število.*

Očitno je obseg Q_p topološko različen od obsega Q_q za $p \neq q$. V obsegu Q_p namreč zaporedje $p, p^2, \ldots, p^n, \ldots$ konvergira k nič, medtem ko v Q_q ni konvergentno. Z uporabo izrekov 13 in 14 pa lahko pokažemo, da sta obsega tudi algebraično različna. Velja namreč

Izrek 15. *Ako sta p in q različni praštevili, potem obsega Q_p in Q_q nista izomorfna.*

Dokaz. Oglejmo si najprej primer, ko sta p in q lihi praštevili, recimo $p > q$. Če bi eksistiral izomorfizem med Q_p in Q_q, potem bi si aditivni in multiplikativni identiteti obeh obsegov ustrezali in kot posledica bi bilo isto z vsemi elementi racionalnega podobsega. To pa pomeni, da bi bila vsaka enačba

oblike $x^2 - a = 0$, kjer je $a \in Q$, hkrati ali rešljiva ali nerešljiva v Q_p in v Q_q (ker si pri izomorfizmu koreni izomorfnih enačb ustrezajo). Ločimo dva primera. Ako je p kvadrat po modulu q, potem ima enačba $x^2 - p = 0$ po izreku 13 rešitev v Q_q, toda nima rešitve v Q_p. Ako pa je p nekvadrat po modulu q, si izberimo nekvadrat n po modulu q tako, da bo $n < q$. Tak n res eksistira, ker $q \neq 2$. Potem je np kvadrat po modulu q in ima enačba $x^2 - np = 0$ rešitev v Q_q, toda ne v Q_p, ker iz $n < q < p$ sledi, da np ni deljivo s p^2. S tem je izrek za poljubni različni lihi praštevili dokazan.

Naj bo sedaj p poljubno liho praštevilo in $q = 2$. Če je 2 kvadrat po modulu p, potem ima enačba $x^2 - 2 = 0$ rešitev v Q_p, nima pa je v Q_2. Ako je 2 nekvadrat po modulu p, izberimo lih nekvadrat n po modulu p, ki očitno eksistira (ako je namreč m sod nekvadrat, je $m + p$ lih nekvadrat). Potem je $2n$ kvadrat po modulu p in ima enačba $x^2 - 2n = 0$ rešitev v Q_p. Nima pa rešitve v Q_2, ker je $2n$ sodo število in ni deljivo s 4.

Naš izrek je tako v celoti dokazan.

5. Krožno delitvena enačba v Q_p

Kot zadnje bomo pokazali, da ima enačba

$$x^{p-1} - 1 = 0 \tag{16}$$

v Q_p točno $p - 1$ različnih korenov.

Naj bo a poljubno od števil $1, 2, \ldots p - 1$ in si oglejmo vrsto

$$a + (a^p - a) + (a^{p^2} - a^p) + \ldots = \lim a^{p^n} \tag{17}$$

Hitro se vidi, da je vrsta konvergentna v Q_p. Izračunajmo namreč n-ti člen

$$a^{p^{n+1}} - a^{p^n} = a^{p^n}\left(a^{p^n(p-1)} - 1\right) \tag{18}$$

Ker sta a in p^{n+1} tuji števili, sledi po Eulerjevem izreku iz teorije števil, da je

$$a^{p^n(p-1)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^{n+1}) \tag{19}$$

To pa pomeni, da limitira n-ti člen vrste (17) po p-adični valuaciji proti nič, vrsta torej konvergira in je $\alpha \in Q_p$. Tako dobljeni α pa je ravno rešitev enačbe (16). Res: iz (17) sledi, da je

$$\alpha^{p-1} = \lim a^{p(p-1)}$$

in zaradi (19)

$$\alpha^{p-1} = 1$$

Naj sedaj a preteče vsa števila $1, 2, \ldots, p - 1$. Potem dobimo z relacijo (17) $p - 1$ različnih korenov enačbe (16). Da so koreni med seboj res različni, sledi iz naslednjega sklepa.

Naj bosta α in β dva korena

$$\alpha = a + (a^p - a) + \ldots$$

$$\beta = b + (b^p - b) + \ldots$$

kjer $a \neq b$ in je $1 \leqq a,\ b \leqq p-1$. Razliki $\alpha - a$ in $\beta - b$ sta zaradi (18) in (19) deljivi s p, torej je tudi

$$(\alpha - a) - (\beta - b) \equiv 0 \pmod{p}$$

Če bi bilo $\alpha = \beta$, bi od tod sledilo $a \equiv b \pmod{p}$, kar je nemogoče.

V obsegu Q_p smo tako našli $p-1$ različnih korenov enačbe (16). Ker pa je Q_p obseg, ima enačba $(p-1)$ — te stopnje v njem kvečjemu $p-1$ korenov, torej jih ima natančno $p-1$.

Literatura

[1] J. Grasselli: O p-adičnih številih, Obzornik za matematiko in fiziko 1966 — XII/1, str. 1—10.

[2] G. Bachman: Introduction to p-adic numbers and valuation theory, New York 1964.

RAZVOJNE POTI V SODOBNI MATEMATIKI

JEAN DIEUDONNÉ

Komaj leto dni je tega, kar sem precej lahkomiselno sprejel povabilo, da bi napisal to kramljanje, toda prav kmalu in vedno bolj sem spoznaval, da je pred menoj polno pasti in da sem bil zares lahkomiseln. Obravnavati bom moral toliko različnih področij, o katerih bi bil moral izmenjati misli z marsikom, ki to področje bolje pozna kakor jaz, pa se bo zato po vsej pravici lahko obregnil ob moje površne pripombe. Še bolj pa se bojim kritičnih puščic, ki bodo letele name zaradi izbire snovi. Jasno je, da je za tako kratek pregled izbira snovi nujna, pa sem pač moral ugotavljati, kaj je važno in kaj ne. Ker nisem imel na razpolago nobenega zanesljivega kriterija, sem se pač ravnal po lastnem občutku. Pri tem nisem maral posnemati nekaterih naših kolegov, ki očarani nad lepoto prav majhnega kotička na področju, kjer so povsem doma, smatrajo to za edino važno stvar na svetu. Po drugi strani pa sem spet prisluhnil mnenju najboljših sodobnih matematikov, da bi se izognil subjektivnosti. Priznam, da to ni ravno demokratično, a jaz prav malo verujem v demokracijo, še posebej v znanstvenih stvareh. Da bi bilo vse bolj jasno, sem kot vidne mejnike v sodobni matematiki izbiral rešitve nekaterih najbolj imenitnih problemov, ki so nam jih kakor v dediščino zapustili matematiki prejšnjih generacij.

Sodobna matematika jo v glavnem ubira po dveh poteh. Nekateri matematiki — imenujmo jih taktike — si razbijajo glavo nad enim samim problemom, uporabljajo samo staro in dobro preizkušeno orodje ter grebejo v svoji razboritosti, kako bi mimo tradicionalnih dokazov našli novo pot do rešitve, ob kateri so se razbili vsi prejšnji poizkusi. Drugi pa — imenujmo jih stratege — si ne dajo miru vse dotlej, dokler vseh pojmov, ki jih problem vsebuje, ne razčlenijo tako temeljito in njihove povezave ne osvetle v tako žarki luči, da se dokončna rešitev izlušči v pravcati preproščini. Pri tem pa je treba razvijati dolge in dolgočasne teorije, ki bi se zdele marsikomu odmaknjene od začetnega vprašanja.

Mislim, da sta obe poti za matematiko koristni in plodni. Pretirana samozavest, ki ne upošteva prejšnjih metod in se ne ozira na druge, se utegne navsezadnje izjaloviti, saj je preveč usmerjena na ozko in preveč poveličevano teorijo. Nasprotno pa tisti, ki so preveč zaljubljeni v splošnost, često izgubljajo nit lastnega dokazovanja, ker se pač spuščajo v brezkončno mešanico vedno bolj praznih teorij. Kako moreta biti obe prizadevanji srečno združeni v ubrano ravnovesje in bogato celoto, nam je najlepši zgled Hilbert. Naj poudarim, da v svojem nadaljnjem razmotrivanju še zdaleč ne mislim prisojati višje vrednosti niti prvi niti drugi od pravkar omenjenih poti.

Že takoj v začetku naj pojasnim, kaj mislim z izrazom »novejši« razvoj. Da bi dobili pravšno ozadje, moramo iti — vsaj tako jaz mislim — nazaj tja do konca druge svetovne vojne. Bodoči zgodovinarji utegnejo razmišljati ob čudnem dejstvu, da je koncu obeh svetovnih vojn sledil bohoten razcvet znan-

stvene ustvarjalnosti, ter bodo iskali sociološko in psihološko razlago za ta pojav, ne da bi kdo dvomil o njem. Jaz pa bi med drugim rad poudaril, da četudi je matematika od leta 1945 sem naravno nadaljevanje prejšnjega dela, vendarle vsebuje povsem nova področja, ki po mojem mnenju napovedujejo novo obdobje v njej. Ozrimo se najprej na novejše uspehe, ki smo jih dosegli pred 30 ali 50 leti! Med najzanimivejše sodijo Rothovo jasno pojmovanje Thue-Siegelovega aproksimacijskega teorema v teoriji števil, ali pa bleščeče delo J. Thompsona o definitnih grupah, zlasti njegov dokaz dolgo časa nedognane Burnsidove domneve o nekomutativnih grupah. Menim, da je dobršen del tega dokaza odkril že Frobenius ali pa Schur na začetku 19. stoletja. Prav tako smemo verjeti, da primer, kako je Novikov ovrgel slavno Burnsidovo domnevo, res ne potrebuje več nikakršnih sodobnih sredstev. Končno smemo šteti sem marsikatero in ponovno predstavo, ki se je pojavila v algebrajski topologiji in ji vrnila njeno prvotno geometrično privlačnost. Toda to je kaj težko ločiti od drugih razvojnih pojavov na tem področju, ki pa so povsem drugačnega izvora, zato naj to odložim za poznejši odstavek v tem mojem pripovedovanju.

Tem zanimivim primerom, kako se je povsem nova razlaga lotila starih problemov, naj sledi zelo pestro in obširno področje, ki bi ga rad opisal kot trdo prislužen plod neizmernih naporov v času tik pred razdobjem, o katerem pravkar razmišljamo in katero je pomoglo matematiki do sodobnih vidikov in skovalo učinkovito orodje novemu rodu. Ne bi hotel vzbujati vtisa, češ da za pridobitev tega orodja ni bilo treba velikanskih naporov. Primeri, ki jih bom navedel, bodo v hipu razpršili take nespametne pomisleke. In vendar se mi zdi, da teh lepih uspehov nikdar ne bi mogli doseči niti jih ustrezno izraziti brez osnovnih pojmov moderne algebre, topologije in topoloških vektorskih prostorov, ki smo jih utemeljili v letih 1920—1940.

Kot značilen primer naj takoj navedem Gleasonovo in Montgomery-Zippinovo rešitev petega Hilbertovega problema, v kateri se pojavi Haarova meritev in Rieszova opredelitev končno dimenzionalnega vektorskega prostora — kot »deus ex machina«. Druga uporaba Haarove meritve je morda manj znano, a po mojem mnenju še bolj pomembno delo o grupah, ki ga je napisal Tamagawa; razvijajoč prejšnje ideje A. Weila, Iwasawe in Tata dodaja glavnim teoremom klasične teorije algebrajskih števil — izredno preproste in presenetljive formulacije. Ta izražava pa — kot navadno — odpira neposredno pot do neslutene posplošitve. Na tem mestu nikakor ne bi hotel prezreti tesno sorodnih in nič manj znamenitih uspehov, ki sta jih leta 1961 dosegla A. Borel in Harish-Chandra v podgrupah Lievih grup, s čimer sta osvetlila in povezala različne teoreme iz »aritmetične teorije form«.

Izredna rast teorije parcialnih enačb v zadnjih 10 letih je prav tako lep primer, kako splošna teorija topoloških vektorskih prostorov vpliva na klasično analizo. Tu je nedvomno imela glavni vpliv teorija distribucij, čeprav se je dobršen del tehnike ohranil od prej. Schwarzova teorija je sicer imela več predhodnic, toda najlaže jo primerjamo s tako imenovanim infinitezimalnim računom: jasno je, da bi slavni evropski matematiki okrog leta 1650, torej davno pred Newtonom in Leibnizom, mogli rešiti večino problemov, ki danes sodijo v elementarni infinitezimalni račun. Toda namesto da bi si ustvarili pripravno in splošno uporabno računsko orodje, so se morali v vsakem primeru posebej zatekati v posebno razmišljanje. Podobno je večina problemov, ki sodijo v teorijo distribucij, bila obdelana in bistveno rešena že pred Schwarzom, toda

nikomur se ni posrečilo odkriti metodo, po kateri bi bili posamezni dokazi za posebne primere odveč. To pa je mogla doseči le teorija topoloških vektorskih prostorov, kajti navzlic temu, da je bilo že prej več poizkusov v teoriji distribucij, po mojem mnenju noben ne daje tolike uporabnosti in moči kot izvirna Schwarzova razlaga. Zaradi velike uporabnosti, pa izredne globine in obsežnosti so se te nove ideje kaj kmalu uveljavile povsod. Naj omenim le dela Gardinga, Hörmanderja, Malgrangea, Ehrenpreisa, Lojasiewicza, Calderona in drugih, ki so v toliki meri osvetlili splošne lastnosti parcialnih diferencialnih enačb. Mislim, da bi nihče ne mogel resno trditi, da bi ti uspehi mogli doseči svoj cilj in splošnost, če že ne bi bilo tega v novih osnovnih idejah funkcionalne analize.

Isto moremo trditi za teorijo grup v neskončnih dimenzionalnih prostorih, ki se je prekrasno razvila v letu 1950 po začetnih naporih von Newmana in Gelfandove šole, ki je zgradila potrebno algebrajsko-topološko ogrodje. Čas mi ne dopušča, da bi se spuščal v podrobnosti, vendar se mi zdi, da višek teh naporov predstavljajo obsežne — in še nedokončane razprave — Harish-Chandra o Lievih grupah, ki se po globini in izvirnosti morejo meriti z vsako sodobno matematično razpravo, saj družijo v veličastno sintezo (v kateri je teorija distribucij osnovno orodje) Lievo algebro, harmonično analizo in parcialne diferencialne enačbe.

Dalje naj omenimo algebrajsko geometrijo, ki spada v Weil-Zariskijevo dobo okoli 1945—1955. Tu je bil glavni problem — zgraditi algebrajsko geometrijo za poljubne prostore, ne toliko zaradi čim večje posplošitve, kot zaradi boljšega umevanja diofantske analize. Tu je bilo najtežje najti dobro nadomestilo za globoko geometrijsko pojmovanje prejšnjih generacij, tako da bi znanstveno delo na tem obširnem področju potekalo lepo povezano, hkrati pa da bi bilo zasnovano na manj majavih osnovah. Prejšnji poizkusi, zlasti van der Waerdena niso dosegli cilja. Največja težava je bila s teorijo presekov, ki jo je dokončno ugnal A. Weil. Med tem pa je hodil Zariski povsem drugo pot: skrbno in potrpežljivo je raziskoval nove algebrajske in topološke pojme, ki utegnejo imeti — kakor se zdi — še velik pomen. Tudi tu ne morem našteti vseh podrobnosti, ki so sledile temu delu. Najvidnejši uspeh predstavlja vsekakor Weilov slavni dokaz tako imenovane »Riemannove hipoteze o krivuljah v omejenem prostoru«. Druga velika pridobitev nove algebrajske geometrije predstavlja razvoj teorije algebrajskih grup, ki je praktično ni bilo vse do leta 1945, ki pa je povsem dozorela v zadnjih petnajstih letih. Tu so zaslužni predvsem trije možje: A. Weil, ki je sam ustvaril splošno teorijo Abelovih variacij na polju poljubne karakteristike, pa A. Borel in C. Chevalley, ki je napravil isto za linearne algebrajske grupe, s tem da je njihovo teorijo povzdignil tako visoko, kakor sta to storila pred 30 leti E. Cartan in H. Weyl za Lieve grupe v realni in kompleksni ravnini. Na ta način pa se je nenadoma odprlo novo področje, na katerem so dosegli že mnogo lepih uspehov, drugi pa nas gotovo še čakajo.

Da bi ostal zvest svojemu načrtu, bom zdaj govoril o razvoju analitične in diferencialne geometrije v letih 1945—1953, odkar sta bili naravno nadaljevanje prejšnjih temeljnih del Oka in H. Cartana, pa še E. Cartana, Whitneya, Cherna, Pontrjagina idr. Tu pa ni mogoče zaznati tako očitne razlike kakor med obema dobama algebrajske geometrije. Zato nameravam o njima kramljati kot o celoti.

Gotovo je še prezgodaj izreči o tem dokončno sodbo, vendar si upam trditi, da je največje dejanje našega časa, ki ga bodo najbolj poudarjali bodoči zgodovinarji matematike, izredni vzpon in prevrat v nekdaj imenovani algebrajski topologiji. Da bi pravilno ocenili veličino te spremembe, se nam je treba le spomniti na dejstvo, da v vsakem zvezku sodobnih matematičnih revij srečujemo homologično algebro in diferencialno topologijo. Prve pred 20 leti sploh ni bilo, druga pa se je omejevala zgolj na De Rhamove in Hodgejeve teoreme. Skoraj ne mine leto, ne da bi prineslo rešitve kakega slavnega starega problema, ki se je zdel prej neizmerno težak: Hauptvermutung — so ovrgli (Mazur-Milnor), Poncréjeva domneva je postala teorem — z izjemo tretje in četrte dimenzije (Smale-Stallings); vemo, da sfere utegnejo imeti več različnih diferencialnih struktur, in v mnogih primerih celo lahko izračunamo njih število (Milnor-Smale). Na drugi strani pa obstajajo topološke mnogoterosti, ki sploh nimajo diferencialnih struktur (Kervaire); točno število linearno neodvisnih vektorskih polj je zdaj na krogli docela dognano (J. Adams). Tako obstajajo vzporedljive krogle in take, ki dopuščajo kompleksno strukturo. Dandanes imamo vedno več in boljših kriterijev za reševanje problemov, za razvozlavanje mnogoterosti itd. Poudariti pa moramo, da vsi ti dosežki temelje predvsem na osnovnih pojmih, ki so se razvili pred letom 1945 (homotopija grup, Whitneyevo delo o diferencialnih mnogoterostih in Morsejeva teorija variacijskega računa). Kot že rečeno — velik del novejšega napredka temelji na boljši in globlji uporabi tega matematičnega orodja (slovito Thomsovo delo, Bottova in Smaleova znamenita uporaba Morsejeve teorije in najnovejša Milnorjeva razprava). Takšna je torej nova geometrijska smer v diferencialni topologiji, ki sem jo že prej omenil. Pred njo zasledimo že velike dosežke, ki so jih v 3-dimenzionalni geometriji poželi: Moise, Bing in Papakyriakopoulos. Njim so sledili novi uspehi v kombinatorijski topologiji z deli Whiteheada, Mazura, Stallingsa, Mortona Browna in drugih. Malo prej — okrog leta 1950 se je algebrajska topologija močno obogatila z vpeljavo cele množice pomožnih računskih sredstev, kot Bocksteinovih operatorjev, Postnikovega sistema, Eilenberg-Mac Lanejevih prostorov, zanjkastih prostorov in Whiteheadovih produktov.

Vse to pa je šele polovica celotne zgodbe in v naglici nametanih dosežkov, kajti boljša in učinkovitejša polovica šele sledi. Nove metode in pojmi, ki sem jih omenil, so dejansko topološki, saj smo jih vpeljali samo zato, da bi reševali topološke probleme. Česar v letu 1940 sploh še nismo pričakovali, pa je to, da moremo metode algebrajske topologije kratko in malo presaditi na prenekatero matematično področje v algebri in analizi. Tu mislim seveda na homološko algebro, ki je zdaj na tem, da bo vdrla v celotno matematiko, kakor pred 50 leti teorija grup in linearna algebra.

Homologična algebra je vznikla — kot znano — kot neka zvrst proslule linearne algebre, s tem, da je vpeljala nove pojme kot ext- in tor-funktorje, ki nam znatno pomagajo v klasični linearni algebri. Podobnost s homologijo grup, ki nam priča, kako nas lahko zavajajo predsodki, je danes — povsem očitna. Toda še mnogo vode je moralo preteči, da se je ta podobnost uveljavila in bila matematično izražena. Šele H. Cartan in Eilenberg sta zbrala razmetane dosežke in jih zvarila v splošno teorijo. Šele leta 1955 pa sta se toliko opogumila, da sta o tem napisala prvo knjigo. Življenjska moč in uspešnost te teorije se najlepše vidi v tem, da je bilo treba knjigo napisati znova in upoštevati v njej kopico

novih pripomočkov, ki so bili od tedaj vpeljani v homološko algebro, zlasti Grothendiekove grupe in obroče.

Verjetno bi te nove ideje ne vdrle tako presenetljivo na druga matematična področja, če ne bi bil istočasno J. Leray vpeljal pojem svežnja ali snopa, s čimer je močno poudaril njihov pomen, saj so prvič dale ustrezno matematično izrazoslovje za intuitivno zamisel strukturnih variacij. Lerayu je šlo v glavnem za uporabo v topologiji mnogoterosti, pri tem pa je vpeljal tudi pojem spektralne zapovrstnosti, ki sodi med najmočnejše pripomočke v homologični algebri. Da je bil mož na pravi poti, so potrdili številni in veliki uspehi in dosežki, ki so neposredno sledili v homološki teoriji, v homotopiji grup itd. Že v nekaj letih je izredna elastičnost in uporabnost teh novih pripomočkov razburkala še mnoga druga področja. Tako sta v analitični geometriji H. Cartan in Serre ob tesnem sodelovanju našla čudovito uporaben pojem koherentnega snopa, kar je spet naglo vodilo k rešitvi mnogih ključnih problemov. Homološka algebra pa se da s pridom uporabiti marsikje (Tateova formulacija teorije polja, Galoisova kohomologija, linearne parcialne enačbe, uporaba grup v eliptičnih enačbah itd.). Izkušnje zadnjih desetih let nam dajo misliti, da upravičeno lahko pričakujemo še veliko in važnih posledic teh novih idej in da bo homološka algebra osvojila še druga matematična področja, ki se jih do danes še ni dotaknila. H koncu bi še rad nekaj pripomnil. To in predvsem to bi rad poudaril, da navzlic silni razburkanosti in precej zaskrbljujočemu nenapovedljivemu razvoju v zadnjih 20 letih matematika še nikdar ni bila tako enotna kot je danes. Očitni primeri za globoko in tesno sorodstvo med posameznimi področji matematike ni ostalo skrito že v klasičnih časih, kakor tudi ne takrat, ko je Dirichlet posegel v teorijo števil in ko je Riemann vpeljal topologijo v funkcijsko teorijo. Mi pa smo danes dospeli že tako daleč, da v literaturi s kakega večjega matematičnega področja kratko in malo ne moremo več uporabljati starih izrazov kot: algebra, analiza ali celo — geometrija. Algebraična in analitična geometrija sta si skoraj dvojčici. Vsak najmanjši napredek v eni se prav kmalu zlije s teoremom iz druge. Na drugi strani sta se komutativna algebra in algebrajska geometrija že domala združili, teorija algebrajskih števil pa jim utegne slediti že v nekoliko letih. Do nekaterih najvažnejših teoremov prihajamo s tem, da skrbno in uspešno primerjamo dve navidez nesorodni teoriji. O tem bi pač lahko navedli nešteto lepih in zanimivih primerov.

Na tem mestu torej stojimo danes in več kot gotovo je, da ta zgodba še dolgo ne bo končana. Upam, da sem dovolj jasno pokazal, kako zapleteni in plodni so danes medsebojni vplivi matematičnih idej, pa naj prihajajo s katerega koli področja.

Včasih se — zlasti mlajši študentje — boje, da utegnejo te silne tendence po popolni združitvi vseh matematičnih področij pokončati same sebe, češ da je čisto nemogoče hkrati z razumom dojeti toliko različnih idej in teorij. Videti pa je, da kakor je bilo v vseh podobnih razdobjih »Sturm in Drang« v zgodovini naše znanosti, tako nas k sreči tudi zdaj zaskrbljujoča množica novih pojmov povsem naravno sili, da iščemo in si prizadevamo, kako bi poenostavili nezaželeno zmedo. V tem trenutku se zdi, da nam bodo prinesli rešitev novi pojmi kategorij in funktorjev, ki sta jih vpeljala že leta 1940 Eilenberg in Mac Lane, in tudi pokazala njihovo koristnost in uporabnost. Mnogo mladih matematikov se zdaj ubada, kako bi vse združili in poenostavili — in tako se — seveda na višji ravni — ponavlja zgodovina algebre in topologije izpred 40 let. Cena pa je kajpak — v vedno hujši abstrakciji. K sreči je

ta pojav že dobro znan: da, kar je za sedanjo generacijo matematikov zelo abstraktno, bo že za prihodnjo — vsakdanja modrost. Tu in tam seveda lahko slišimo krik groze, ki pa prihaja od starejših ljudi, ki žal očitno ne morejo več držati koraka z mlajšimi. Vendarle ljudje vobče vedno manj radi poslušajo take in podobne vzklike človeške slabosti — kot npr. pred 30 leti, in običajne šale o trdih in dobrosrčnih matematikih so že precej zbledele. Nič lažjega ni kot iz kupa aksiomatične navlake, ki jo vsako leto namečejo nesrečni javnosti ljudje, ki bi na vsak način hoteli biti matematiki, izbrati nekoliko posebno nesmiselnih spisov in jih razstaviti kot značilne proizvode sodobne matematike. Sami razsodite, ali je tako početje še v skladu s trohico razumske časti in ali se tistim, ki temu pritrjujejo, ne bi spodobilo, da bi molčali in se pobrigali, da bi se o tem bolj natančno poučili.

Ob koncu bi še rad poudaril, kako malo je novejša zgodovina bila voljna poslušati pobožne plehkosti tistih prerokov, ki nas obdobno svarijo pred strašnimi posledicami, češ da se matematika skuša odtrgati od sleherne uporabnosti v drugih znanostih. Ne bi hotel trditi, da je tesna povezava z drugimi področji — kot npr. s teoretično fiziko — nekoristna za obe strani. Jasno pa je, da med vsemi napredki, o katerih sem govoril, ni nobenega, če morda izvzamemo teorijo distribucij, ki bi imel kaj opraviti z uporabami v fiziki. Tudi v teoriji parcialnih enačb je dandanes več poudarka na notranjih in strukturnih problemih kot na vprašanjih, ali imajo morda kak neposreden pomen za fiziko. Pa tudi če bi matematiko nasilno ločili od drugih področij človeške dejavnosti, bi nam pač še za stoletja ostalo dovolj miselne hrane v velikih problemih naše znanosti, ki nas še čakajo — nerešeni.

Upam, da sem vam podal vsaj medlo sliko silnega napredka, ki smo ga bili deležni v zadnjih 20 letih. Lahko rečemo, da nobeno drugo razdobje v naši zgodovini ni bilo tako bogato z novimi idejami in tolikimi uspehi, pa z vso pravico lahko upamo, da se bo v bodočnosti vedno bolj izpolnjevalo Hilbertovo geslo »Spoznavati moramo, da bomo spoznali...«

(Iz »The American mathematical monthly« — prevedel Francè Šušteršič)

NOVICE

RAZISKOVALNE NALOGE MATEMATIČNEGA ODDELKA IMFM

V okviru raziskovalnega dela matematičnega oddelka IMFM so njegovi člani v zadnjih letih prijavili na Sklad Borisa Kidriča in univerzitetni sklad za znanstveno-raziskovalno delo več nalog. Večina teh nalog predstavlja šele skromen začetek raziskovalnega dela, kar je pripisati pomanjkanju izkušenih in plodnih raziskovalcev na področju matematike pri nas. To velja predvsem za naloge računskega centra, saj imajo le-te bolj izobraževalni in metodološki kot pa pravi raziskovalni značaj. Oglejmo si izvlečke iz posameznih izdelanih elaboratov ali predlogov.

Vse teoretične naloge matematičnega oddelka so s področja funkcionalne analize. Tri naloge so že končane, ena pa je v delu.

Posplošitev Fourier-Laplaceove transformacije

Nosilec naloge je bil A. Suhadolc, sodelavec pa J. Vrabec. Nalogo je financiral Sklad Borisa Kidriča. Končana je bila l. 1964.

Klasična Fourierova transformacija je definirana na Hilbertovem prostoru $L^2(-\infty, +\infty)$ merljivih in s kvadratom integrabilnih funkcij, tj. takih, za katerde eksistira integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$. Fourierova transformacija preslika prostor L^2 nase. Za funkcije, ki so istočasno v L^2 in L^1, za katere eksistira torej tudi integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$, je Fourierova transformacija dana s predpisom $F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx$. Za klasično Fourierovo transformacijo velja Plancherelov izrek, ki trdi, da je Fourierova trasformacija povratnoenolična preslikava prostora L^2 nase in v obe smeri zvezna, torej homeomorfizem prostora L^2 nase. Ohranja tudi »dolžino«, saj velja Parsevalova enačba

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)(y)|^2 dy$$

Pri uporabi Fourierove transformacije v teoriji in praksi so posebno pomembne naslednje lastnosti

1. $F(xf(x)) = -i \frac{d}{dy} F(f(x))$
2. $F(f'(x)) = -iyF(f(x))$
3. $F(e^{ikx} f(x)) = F(f(x))(y-k)$
4. $F(f(x-k)) = e^{iky} F(f(x))$
5. $F(f^*g) = F(f) F(g)$, kjer pomeni $(f^*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$

Naštete lastnosti veljajo le za nekatere funkcije $f(x) \in L^2$ in le za realne vred-

nosti parametra k. Formula 1. na primer velja le, če sta oba integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ in $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|^2 dx$ končna, formula 2. pa le, če je funkcija $f(x)$ odvedljiva in njen odvod tudi s kvadratom integrabilen.

Cilj teme je bil tale: ugotoviti, če eksistira tak prostor, na katerega je mogoče posplošiti klasično Fourierovo transformacijo tako, da bodo za elemente novega prostora veljale formule od 1. do 4. brez dodatnih predpostavk.

V delu je konstruiran tak prostor H in taka posplošitev klasične Fourierove transformacije. Izkaže se, da H vsebuje izomorfno L^2 kot svoj podprostor in L^2 je v H gost v smislu primerne lokalnokonveksne topologije v H. Na funkcijah iz L^2 nova in klasična transformacija sovpadata. Za vse elemente iz H in za vsa kompleksna števila k veljajo enačbe 1. do 4. Ne velja pa več enačba 5.

Pri reševanju naloge je uporabljena teorija lokalnokonveksnih prostorov, teorija Schwartzovih distribucij in teorija analitičnih funkcij.

Ideje za nalogo in njeno rešitev je dobil nosilec med študijem pri prof. H. G. Tillmannu v Heidelbergu; delo pri prvi verziji je vodil prof. I. Vidav, dokaz gostote L^2 v H pa je originalen doprinos sodelavca J. Vrabca. A. Suhadolc je o tem delu poročal na IV. kongresu matematikov, fizikov in astronomov v Sarajevu l. 1965.

Problemi lastnih vrednosti z več parametri in uporaba v teoriji diferencialnih enačb

Nosilec naloge je bil Z. Bohte. Nalogo je financiral Sklad Borisa Kidriča. Končana je bila l. 1964.

Cilj naloge je bil obravnavati sistem enačb

$$(A_k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_{ik})\, x_k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

kjer so A_k in C_{ik} sebi adjungirani operatorji v Hilbertovem prostoru, λ_i pa razpoložljivi parametri, ki jih je treba tako določiti, da ima sistem netrivialno rešitev $x_k \neq 0$ za vsak k. Rezultat dela sta dva eksistenčna izreka v primeru $n = 2$. Pri dokazovanju je bila uporabljena perturbacijska metoda.

Nosilec je najprej obravnaval sistem

$$Ax + \varepsilon(\mu B_1 + C_1)\, x = \lambda x$$
$$Ay + \varepsilon(\mu B_2 + C_2)\, y = \lambda y$$

kjer so vsi nastopajoči operatorji sebi adjungirani in razen operatorja A tudi omejeni. Če je λ_0 enostavna izolirana točka spektra operatorja A z lastnim vektorjem x_0, $\| x_0 \| = 1$, in je izpolnjen pogoj

$$((B_1 - B_2)\, x_0, x_0) \neq 0$$

se pri dovolj majhnem ε izražajo rešitve v obliki potenčnih vrst po potencah ε:

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k, \quad \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \varepsilon^k, \quad x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varepsilon^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \varepsilon^k$$

V delu je izpeljan algoritem računanja koeficientov v potenčnih vrstah in ocenjen konvergenčni polmer teh vrst.

Na podoben način je nosilec obravnaval tudi splošnejši problem

$$Ax + (\lambda + \mu B + C)\, x = \varepsilon\, (\mu\, B_1 + C_1)\, x$$
$$Ay + (\lambda + \mu\, B + C)\, y = \varepsilon\, (\mu\, B_2 + C_2)\, y$$

Pogoji za eksistenco rešitve so tu precej bolj komplicirani.

Ker je problem z več parametri zelo težak in še slabo obdelan, se niso dali dobiti taki rezultati, ki bi jih lahko uporabili v teoriji diferencialnih enačb.

Idejo za nalogo je dal prof. I. Vidav, ki je tudi vodil raziskovalno delo. O tem delu je nosilec poročal tudi na IV. kongresu matematikov, fizikov in astronomov v Sarajevu l. 1965.

Seminar iz fukcionalne analize

Seminar je financiral univerzitetni sklad za znanstveno-raziskovalno delo. Vodja seminarja je bil prof. I. Vidav, sodelovali pa so še Z. Bohte, J. Grasselli, N. Prijatelj, A. Suhadolc in G. Tomšič. Poročilo je bilo oddano l. 1964.

Namen seminarja je bil pripraviti potrebno osnovo za raziskovalno delo na področju funkcionalne analize. Delo v seminarju je potekalo tako, da je vsak izmed imenovanih sodelavcev izbral po eno poglavje iz funkcionalne analize ali iz sorodnih področij, ga obdelal, napisal kratko poročilo in o tem referiral v seminarju. Teme so bile naslednje:

1. Z. Bohte: Invariantni podprostori.

Problem invariantnih podprostorov omejenih operatorjev v Banachovem prostoru še ni v celoti rešen. Predavatelj je poročal o eksistenci invariantnih podprostorov za kompaktne operatorje, ki sta jo dokazala Aronszajn in Smith.

2. J. Grasselli: O nekaterih pojmih pri kategorijah.

3. N. Prijatelj: O kategorijah in funktorjih.

Predavatelja sta obdelala osnovne pojme o kategorijah in funktorjih, ki so vse bolj in bolj pomembni v funkcionalni analizi, saj je težišče raziskav v funkcionalni analizi danes v tej smeri.

4. A. Suhadolc: Posplošitev Laplace-Fourierove transformacije.

V zvezi s svojim delom na posplošitvi Laplace-Fourierove transformacije je predavatelj obdelal lokalno konveksne topološke prostore in distribucije kot robne vrednosti analitičnih funkcij.

5. G. Tomšič: R-številske algebre.

Sistem tako imenovanih r-števil je neka neasociativna komutativna algebra nad obsegom realnih števil. Značilen primer za tako algebro je množica sebi adjungiranih operatorjev Hilbertovega prostora. Predavatelj je poročal o izsledkih, ki so bili doseženi v končno razsežnih r-številskih algebrah.

6. I. Vidav: Homogeni operatorji in homogene spektralne mere.

Prof. I. Vidav je obravnaval homogene operatorje v Hilbertovem prostoru in poročal o nekaterih problemih, ki se pojavljajo v zvezi z definicijo, eksistenco in ekvivalenco homogenih operatorjev in homogenih spektralnih mer.

Izražanje pozitivnih funkcionalov v involutivnih algebrah z 2 k generatorji

Nosilec naloge je G. Tomšič. Naloga je bila predlagana v odobritev Skladu Borisa Kidriča in je še v delu.

Cilj naloge je posplošitev Vidavovih rezultatov, ki se nanašajo na izražanje pozitivnih funkcionalov v involutivnih algebrah z dvema generatorjema, na algebre z 2 k generatorji.

Raziskovalne naloge računskega centra so bile namenjene predvsem izobraževanju članov na področju numerične matematike in izpopolnjevanju biblioteke računalnika Z-23, tj. izdelavi programov za reševanje osnovnih problemov numerične analize.

Študij numeričnih metod in izdelava osnovnih podprogramov za računalnik Z-23

Nosilec naloge je bil Z. Bohte, sodelavci pa E. Zakrajšek, J. Vrabec, J. Lesjak in A. Suhadolc. Nalogo je financiral univerzitetni sklad za znanstveno-raziskovalno delo. Naloga je bila končana l. 1964.

V okviru te naloge je bilo izdelanih 18 samostojnih podprogramov za računalnik Z-23 predvsem iz področja numeričnih metod algebre. Pri izdelavi teh programov so bile proučene mnoge znane metode in izmed njih izbrane najprimernejše za reševanje sistemov linearnih enačb, reševanje algebraičnih in transcendentnih enačb ter za reševanje problema lastnih vrednosti matrik. Poleg temeljite in podrobne proučitve izbranih metod je bilo treba uvesti marsikatero izboljšavo in prilagoditev za programiranje. Velik trud je bil vložen v skrbno programiranje, tako da so izdelani programi glede racionalnega izkoriščanja spomina in hitrosti delovanja skoraj optimalni. Seznam izdelanih programov je naslednji:

1. Osnovne aritmetične operacije v dvojni dolžini (20 decimalk).
2. Osnovne aritmetične operacije v povečanem obsegu (7 decimalk, obseg do 10^{2450}).
3. Reševanje algebraičnih enačb po prirejeni Newtonovi metodi.
4. Reševanje algebraičnih enačb s kompleksnimi koeficienti po Mullerjevi metodi.
5. Reševanje algebraičnih enačb po Muller-Newtonovi metodi.
6. Reševanje algebraičnih enačb, ki imajo samo realne korene.
7. Program za ugotavljanje števila realnih korenov algebraične enačbe po Sturmovi metodi.
8. Program za lokalizacijo realnih korenov algebraičnih enačb.
9. Računanje vseh realnih korenov poljubne algebraične enačbe.
10. Reševanje algebraičnih enačb do četrte stopnje po Cardanovih in Ferrarijevih formulah.
11. Reševanje transcendentnih enačb po sekantni metodi.
12. Reševanje sistemov nelinearnih enačb po Newtonovi metodi.
13. Reševanje sistemov linearnih enačb po Gaussovi metodi z izbiro glavnega elementa.
14. Reševanje normalnih sistemov enačb po metodi kvadratnih korenov.
15. Reševanje sistemov linearnih enačb s tridiagonalno matriko.
16. Računanje karakterističnega polinoma matrike po Le Verierjevi metodi.

17. Računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev simetričnih matrik po Jacobijevi metodi.

18. Reševanje problema lastnih vrednosti poljubnih matrik po metodi Danilevskega.

Numerično reševanje raznih problemov iz matematične analize na računalniku Z-23

Nosilec naloge Z. Bohte, sodelavca E. Zakrajšek in M. Vencelj. Nalogo je financiral Sklad Borisa Kidriča. Končana je bila l. 1965.

Ta naloga je nadaljevanje prejšnje, kjer sta študij metod in izdelava programov razširjena na področje matematične analize. Izdelanih je bilo 11 programov iz področja numeričnega reševanja diferencialnih enačb in aproksimacije funkcij. Biblioteko smo povečali za naslednje programe:

1. Reševanje navadne diferencialne enačbe prvega reda po Mersonovi metodi.
2. Reševanje navadne diferencialne enačbe prvega reda po Milneovi metodi.
3. Reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb prvega reda po Mersonovi metodi.
4. Reševanje navadne diferencialne enačbe reda n po Mersonovi metodi.
5. Reševanje linearnega robnega problema drugega reda po Cauchyjevi metodi.
6. Reševanje enačbe $u_t = u_{xx}$ z linearnimi robnimi pogoji po diferenčni metodi.
7. Razvoj analitično podane funkcije v vrsto po polinomih Čebyševa.
8. Enakomerna aproksimacija tabelarično podane funkcije z linearno kombinacijo danih funkcij po metodi linearnega programiranja.
9. Srednjekvadratična aproksimacija tabelarično podane funkcije v ekvidistantnih točkah z ortogonalnimi polinomi.
10. Srednjekvadratična aproksimacija tabelarično podane funkcije v neekvidistantnih točkah z ortogonalnimi polinomi.
11. Reševanje sistema linearnih enačb po metodi najmanjših kvadratov.

Aproksimativne metode matematične analize

Nosilec naloge: Računski center pri IMFM Univerze v Ljubljani. Delo na tej nalogi je potekalo v seminarski obliki. V okviru seminarja so predavali Z. Bohte, A. Kmet, S. Pahor, A. Suhadolc, J. Vrabec, M. Vencelj, G. Tomšič, E. Zakrajšek, J. Grad, C. Trampuž in M. Petrišič. Temo je financiral univerzitetni sklad za znanstveno-raziskovalno delo.

Ta tema je po svoji naravi različna od vseh drugih, ki obravnavajo kak nov matematični problem ali rešujejo konkretne matematične naloge. Njen namen je bil izobraževanje članov računskega centra. Odkar imamo v Ljubljani elektronski računalnik, potrebujemo tudi precej ljudi, ki poznajo aproksimativne metode matematične analize in znajo tudi programirati. Ker predavanj za matematike iz tega področja do pred nekaj leti ni bilo, je imela večina matematikov, ki delajo v računskem centru le pomanjkljivo znanje iz tega predmeta. Seminar je imel namen to vrzel v znanju zapolniti.

Seminar je potekal v obliki predavanj, ki so trajala 4 semestre po 2 do 3 ure tedensko. Podroben pregled dela seminarja obsega čez 100 tipkanih strani in je bil narejen kot poročilo skladu. Predavanja so bila iz naslednjih področij:

1. Enačbe matematične fizike.
2. Integralne enačbe.
3. Variacijski račun.
4. Konformne preslikave.
5. Asimptotični razvoji.
6. Specialne funkcije.
7. Analiza napak v algebraičnih procesih.

Ostalo je še več zanimivih področij uporabne matematike, ki niso bila vključena v program seminarja, kot mrežne metode reševanja parcialnih diferencialnih enačb, aproksimacije s polinomi Čebyševa in podobno. Zato ima računski center v načrtu prirediti kdaj pozneje podoben seminar.

Numerično reševanje integralskih enačb

Nosilec naloge A. Suhadolc, sodelavec J. Vrabec. Temo smo prijavili na univerzitetni sklad za znanstveno-raziskovalno delo.

Namen teme je preštudirati obširno literaturo o numeričnih metodah reševanja integralskih enačb. Velik del literature je že zbrane. Izmed vseh metod je treba izbrati tiste, ki so primerne za uporabo na elektronskem računalniku, posebno na našem. Za izbrane metode nameravamo napraviti programe in jih preskusiti.

Numerično reševanje problema lastnih vrednosti matrik

Nosilec naloge Z. Bohte, sodelavec E. Zakrajšek. Nalogo smo prijavili na Sklad Borisa Kidriča.

Cilj naloge je študij najmodernejših metod za reševanje problema lastnih vrednosti matrik in izdelava programov za računalnik Z-23. Pri prejšnjih nalogah se je pokazalo, da je problem lastnih vrednosti za nesimetrične matrike zelo težak problem, posebno pa računanje lastnih vektorjev. Težišče študija in raziskave bo Francisova QR metoda za lastne vrednosti in inverzna iteracija za lastne vektorje.

Ti, čeprav skromni, začetki raziskovalnega dela nam dajejo upanje, da bomo sčasoma uspeli tudi pri nas razviti raziskovalno dejavnost na enem ali več področjih matematike. Zanimanje za raziskovalno delo nasploh in še posebej za matematiko stalno narašča, sredstev zaenkrat ne manjka, učni uspehi pri študiju matematike dokazujejo, da je talentiranih in prizadevnih mladih matematikov čedalje več, torej so skoraj vsi pogoji za uspešen razvoj izpolnjeni.

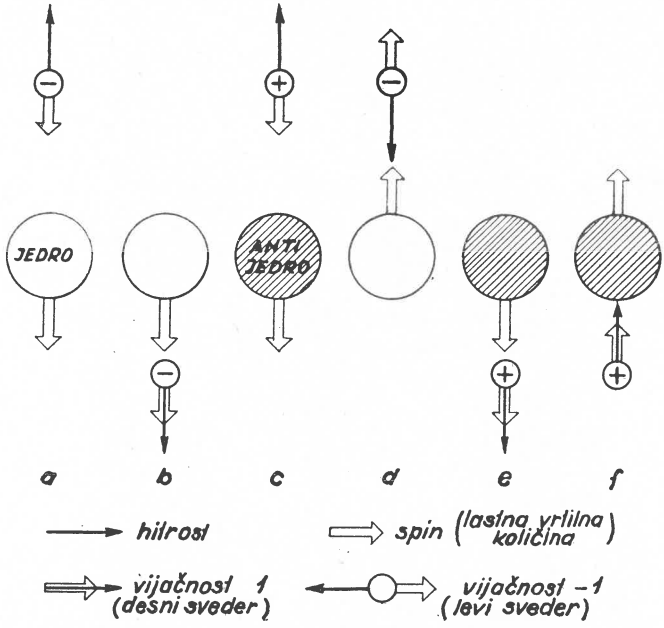
Z. Bohte in A. Suhadolc

INVARIANTNOST PROTI KONJUGACIJI NABOJA?

V fiziki delcev zopet posvečajo precejšnjo pozornost inverziji prostora, obratu časa in konjugaciji naboja.

V klasični fiziki je treba pri inverziji prostora nadomestiti koordinate kake točke x, y, z z $-x, -y, -z$ in pri obratu časa vstaviti namesto časa t

negativno vrednost $-t$. Enačbe gibanja (enačbe, ki sledijo iz Newtonovega zakona) so invariantne proti inverziji prostora. S tem hočemo povedati tole: če v kako rešitev enačb gibanja postavimo $-x, -y, -z$ namesto x, y, z, dobimo eno izmed možnih rešitev teh enačb. Enačbe gibanja so invariantne tudi proti obratu časa. Če v kaki rešitvi enačb gibanja postavimo $-t$ namesto t, dobimo zopet eno izmed možnih rešitev. Preprosto povemo to ugotovitev drugače: samo z opazovanjem filma o kakem pojavu, npr. o trku delcev, ki jih opišemo klasično, ne moremo presoditi, ali je film pravilno obrnjen ali pa sta leva in desna stran zamenjani. Prav tako ne moremo presoditi, ali teče film od začetka proti koncu ali pa obratno. Zadnja trditev velja samo, če je število delcev



Sl. 1. Razpad β (a) in slike tega razpada po inverziji prostora (b), po konjugaciji naboja (c), po obratu časa (d), po hkratni inverziji prostora in konjugaciji naboja (e) in po hkratni konjugaciji naboja in inverziji prostora in obratu časa (f). Pojavov (b) in (c) ne opazijo v naravi. Na sliki je osamljeno jedro. Narisana smer hitrosti delca, ki odleti ali prileti, je smer, v katero odleti ali iz katere prileti večina delcev.

majhno. Za makroskopski sistem z zelo velikim številom delcev, kar opišemo statistično, v veliki večini opazovanj po filmu uganemo, kateri trenutek je prejšnji in kateri poznejši. To je posledica entropijskega zakona.[1]

V elektrodinamiki se navedenima transformacijama pridruži konjugacija naboja, pri kateri je treba v enačbah spremeniti predznake vseh nabojev. Enačbe elektrodinamike (Maxwellove enačbe in enačbe, ki izhajajo iz njih) so invariantne proti konjugaciji naboja. To pomeni, da dobimo eno izmed možnih rešitev teh enačb, če v neki rešitvi upoštevamo vse naboje z nasprotnim znakom.

Delce moramo seveda opisovati kvantnomehansko. Zato se moramo pri njih drugače lotiti navedenih transformacij, ki sicer obdržijo svoj osnovni

pomen. Podrobnosti tu niso bistvene in jih prihranimo za konec sestavka. Glavni zaplet nastane namreč zaradi nekega drugega dejstva: interakcija med delci je sestavljena iz treh delov, ki se pri teh transformacijah vedejo prav različno. Ti deli so: močna (jedrska), elektromagnetna in šibka interakcija, če se ne menimo za gravitacijsko interakcijo.

Znano je, da šibka interakcija ni invariantna proti inverziji prostora.[1,2] Če npr. pri razpadu β (sl. 1 a), ki ga povzroča šibka interakcija, izvršimo inverzijo prostora, ne dobimo pojava, ki bi ga opazili v naravi (sl. 1 b). Isti poskus pokaže, da šibka interakcija tudi ni invariantna proti konjugaciji naboja. Po zamenjavi delcev z antidelci namreč ne dobimo pojava, ki bi ga opazili v naravi (sl. 1 c). Po hkratni inverziji prostora in konjugaciji naboja pa dobimo pojav, ki ga opazimo v naravi (sl. 1 d). Zato je šibka interakcija veljala za invariantno proti hkratni inverziji prostora in konjugaciji naboja. Razpad mezonov K^0 pa je možno pojasniti, če šibka interakcija ni invariantna proti hkratni inverziji prostora in konjugaciji naboja. Ugotovili so namreč, da razpade na dva piona majhen delež dolgožive komponente K_2^0, za katero so spočetka mislili, da lahko razpade samo na dva piona.[1,3]

Iz splošnih predpostavk* sledi, da je vsaka izmed treh interakcij invariantna proti hkratnem obratu časa, inverziji prostora in konjugaciji naboja. Šibka interakcija torej ne bi bila invariantna proti obratu časa, če ne bi bila invariantna proti hkratni inverziji prostora in konjugaciji naboja. Po drugi strani pa je možno pojasniti razpad K_2^0 v dva piona tudi drugače, tako, da ni treba podvomiti v invariantnost šibke interakcije proti obratu časa in proti hkratni inverziji prostora in konjugaciji naboja. V zvezi s tem je bilo izrečenih več domnev.[1,3] V zadnjem času je vzbudila največ pozornosti domneva, da elektromagnetna interakcija med hadroni (delci z močno interakcijo, to je mezoni in barioni) ni invariantna proti konjugaciji naboja.[1,4,5] Na kratko bomo opisali merjenja, s katerimi so poskušali potrditi ali ovreči to domnevo. Za ta merjenja je veliko zanimanje, čeprav si njihovi rezultati še nekoliko nasprotujejo in še ni možen dokončen sklep niti o invariantnosti elektromagnetne interakcije med hadroni proti konjugaciji naboja niti o pravem vzroku razpada K_2^0 na dva piona. Na koncu bomo bežno omenili teoretično novost pri obravnavanju omenjenih transformacij, ki je sprožila te poskuse.

Mnogo eksperimentalnih dejstev kaže, da je elektromagnetna interakcija med delci, med katerimi ni močne interakcije, to je med leptoni ali med leptoni in hadronom ali npr. med elektromi in jedrom v atomu, invariantna proti konjugaciji naboja. Novejši poskusi kažejo tudi, da je močna interakcija invariantna proti konjugaciji naboja. Mimogrede omenimo te poskuse, ker so sorodni s poskusi, ki nas zanimajo. Po konjugaciji naboja preide reakcija

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \text{nevtralni delci v } \bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \text{nevtralni delci.} \quad (1)$$

Transformirana reakcija se ne razlikuje od prvotne. Če je močna interakcija, zaradi katere pride do anihilacije protonskega para v mirovanju (1), invariantna proti konjugaciji naboja, morata biti nabita piona popolnoma enakopravna. Pri

---

* Enačbe vsake lokalne teorije polja, ki je v skladu s specialno teorijo relativnosti (in so zato enačbe invariantne proti zveznim Lorentzevim transformacijam), so nujno invariantne tudi proti hkratnemu obratu časa, inverziji prostora in konjugaciji naboja. (V lokalni teoriji polja je v neki točki v štiridimenzionalnem prostoru treba poznati samo vrednosti polja in odvode v tej točki. Nič pa niso važne točke v okolici.)

velikem številu reakcij (1) izmerijo kinetični energiji nabitih pionov. Če je močna interakcija invariantna proti konjugaciji naboja, mora biti število reakcij, pri katerih ima negativni pion večjo kinetično energijo kot pozitivni, v okviru dosežene natančnosti enako število reakcij, pri katerih ima pozitivni pion večjo kinetinčo energijo kot negativni. Če bi bilo prvih reakcij več kot drugih ali obratno, bi morali sklepati, da močna interakcija med hadroni ni invariantna proti konjugaciji naboja.

Merjenja so pokazala, da je bilo v okviru dosežene natančnosti (1 %) obojih reakcij enako mnogo. Preiskali so tudi reakcijo $p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^+ +$ + nevtralni delci, ki preide po konjugaciji naboja v $\bar{p} + p \rightarrow K^- + K^+ +$ + nevtralni delci. Tudi pri tej so v okviru dosegljive natančnosti (2 %) ugotovili, da je bilo reakcij, pri katerih je imel mezon K^- večjo kinetično energijo kot mezon K^+, enako mnogo kot reakcij, pri katerih je imel K^+ večjo kinetično energijo kot K^-.[6] Ta merjenja so izvedli z namenom, da se prepričajo o invariantnosti močne interakcije proti konjugaciji naboja. Tudi ta neinvariantnost bi namreč pojasnila razpad K_2^0 na dva piona. Vendar se je zdelo že spočetka manj verjetno, da močna interakcija ni invariantna proti konjugaciji naboja.

Precej bolj sumljiva je bila elektromagnetna interakcija med hadroni. Ker ni bilo še nobenega poskusa, ki bi zagotavljal njeno invariantnost, so se lotili novih poskusov. Neinvariantnost elektromagnetne interakcije med hadroni proti konjugaciji naboja bi lahko pojasnila razpad K_2^0 v dva piona. Potekal bi v dveh korakih: v prvem bi zaradi elektromagnetne interakcije ob sevanju in absorpciji virtuelnih fotonov majhen delež K_2^0 prešel v neko vmesno stanje. To vmesno stanje, ki bi se pri konjugaciji naboja vedlo drugače kot prvotno stanje, bi v drugem koraku zaradi šibke interakcije razpadlo v dva piona. Šibka interakcija bi bila v tem primeru invariantna proti hkratni inverziji prostora in konjugaciji naboja.

Za preučevanje elektromagnetne interakcije med hadroni je najprimernejši[5] razpad mezona η

$$\eta^0 \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \pi^+ . \tag{2}$$

Razpadni čas je večji kot 10^{-22} s in je zato prekratek, da bi bil lahko razpad posledica šibke interakcije. Sprva so mislili, da je treba razpad (2) pripisati močni interakciji. Pozneje se je pokazalo, da povzroča razpad (2) elektromagnetna interakcija.* Po konjugaciji naboja preide (2) v

$$\eta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^- ; \tag{2'}$$

ki se ujema z (2). Če je elektromagnetna interakcija med hadroni invariantna proti konjugaciji naboja, morata biti pozitivni in negativni pion pri razpadu mezona popolnoma enakopravna.

* Na to so pomislili, ko so ugotovili, da je razpolovna širina resonance η dosti manjša od razpolovne širine drugih resonanc, ki razpadejo po močni interakciji (manjša razpolovna širina pomeni večji razpadni čas). Pozneje so to potrdili, ko so ugotovili, da se pri razpadu (2) ne ohrani izospin, kar je značilno za elektromagnetno interakcijo. Mezon η ima izospin 0, posamezen pion pa izospin 1. Pri razpadu mezona η pa nastanejo trije pioni v stanju s skupnim izospinom 1. To ugotovimo iz merskih podatkov na podlagi znanega spina mezona η in pionov (0) in dejstva, da mora biti skupna valovna funkcija treh pionov zaradi celega spina pionov simetrična proti zamenjavi dveh pionov.

Število razpadov (N^+), pri katerih ima pozitivni pion večjo kinetično energijo, se mora v okviru natančnosti merjenja ujemati s številom razpadov (N^-), pri katerih ima negativni pion večjo kinetično energijo. Poprečna asimetrija, kakor imenujejo razmerje $A = (N^+ - N^-)/(N^+ + N^-)$, je v tem primeru enaka nič. Po drugi strani bi od nič različna poprečna asimetrija pomenila, da elektromagnetna interakcija med hadroni ni invariantna proti konjugaciji naboja. Poprečna asimetrija bi bila večja od nič, če bi imel v večini razpadov pozitivni pion večjo kinetično energijo kot negativni in manjša od nič v nasprotnem primeru.

Prvi sta izračunali poprečno asimetrijo iz starih podatkov o razpadih mezona η skupina z univerze Duke in skupina z večjega števila ameriških univerz. Dobljeni vrednosti sta bili večji kot nič. Dalo se ju je celo spraviti v sklad s teoretično predvideno vrednostjo 0,05, ki bi pojasnila razpad K_2^0 v dva piona. Zato so nestrpno pričakovali rezultate merjenj, ki so se jih lotili nalašč v ta namen. Rezultati Baltaya, Franzinija in sodelavcev so izzvali precejšnje razburjenje, ker so se lepo ujemali z napovedjo.[7]

Curek pozitivnih pionov s kinetično energijo okoli 690 MeV, ki so ga dobili s sinkrotronom, so usmerili na mehurčno celico. 74 cm dolga mehurčna celica je bila postavljena v magnetno polje in napolnjena s tekočim devterijem. Pozitivni pioni so v njej reagirali z devteroni. Pri delu reakcij je nastal mezon η in takoj nato razpadel:

$$\pi^+ + \mathrm{d} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \eta, \ \eta \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \pi^+ . \qquad (3)$$

Fotografirali so 435 000 reakcij v mehurčni celici. Izmed teh so izbrali 54 000 fotografij, pri katerih so iz ene točke izvirale vidne sledi dveh protonov in pionskega para, če ne štejemo sledi pozitivnega piona, ki je sprožil rakcijo. Takoj so izločili 12 000 reakcj, ker se je eden od nastalih protonov po kratki poti v devteriju ponovno sipal, tako da po ukrivljenosti sledi niso mogli zanesljivo določiti njegove kinetične energije. Preostale reakcije so podrobno premerili in določili kinetične energije in gibalne količine delcev, ki so zapustili vidne sledi. Najprej so z upoštevanjem ohranitve gibalne količine in kinetične energije poiskali mirovno energijo nevtralnega delca, ki pri reakciji $\pi^+ + \mathrm{d} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^- + \pi^+ +$ delec ni zapustil vidne sledi. Izločili so reakcije, pri katerih se mirovna energija nevtralnega delca ni ujemala z mirovno energijo nevtralnega piona. S tem so se znebili reakcij, pri katerih poleg obeh protonov in pionskega para ni nastal noben delec ali je nastal foton ali pa nevtron. Za preostale reakcije so nato izračunali mirovno energijo delca $'$, ki je nastal pri reakciji $\pi^+ + \mathrm{d} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} +$ delec $'$. Izločili so vse reakcije, pri katerih se mirovna energija delca $'$ ni ujemala z mirovno energijo mezona η. Izmed preostalih 1441 reakcij je 90 reakcij poteklo naravnost, to je brez nastanka mezona η ($\pi^+ + \mathrm{d} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^- + \pi^0 + \pi^+$) in 1351 z nastankom mezona η (3). Za preiskanih 1351 razpadov mezona η se je pokazalo, da je imel v večini primerov pozitivni pion v težiščnem sistemu treh pionov, to je v težiščnem sistemu mezona η, večjo kinetično energijo od negativnega piona. Za poprečno asimetrijo so dobili 0,07, pri čemer so ocenili efektivno napako s $\pm$ 0,03.

Zdelo se je, da je uganka razpada K_2^0 na dva piona rešena: da je razpada kriva elektromagnetna interakcija med hadroni, ki ni invariantna proti konjugaciji naboja, in da je šibka interakcija invariantna proti hkratni inverziji

prostora in konjugaciji naboja.[9,10] Položaj se je zapletel, ko je objavila svoje rezultate skupina iz CERN. Cnops, Finocchiaro in sodelavci so pri merjenju ubrali drugačno pot.[8] Curek negativnih pionov s kinetično energijo okoli 580 MeV, ki so ga dobili s sinkrotronom, so usmerili na tarčo s tekočim vodikom. Pri nekaterih reakcijah je nastal mezon η, ki je takoj nato razpadel:

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \eta, \quad \eta \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \pi^+ . \tag{4}$$

Pozitivni in negativni pion, ki sta nastala pri razpadu mezona η, je zaznala 80 cm dolga iskrna celica v magnetnem polju. Iskrna celica se je sprožila, če je eden izmed 14 nevtronskih scintilacijskih števcev zaznal nevtron z določeno kinetično energijo. To so ugotovili po času, ki ga je nevtron potreboval za prelet od tarče do nevtronskega števca.

V celoti so fotografirali 300 000 reakcij v iskrni celici. Izbrali so 21 600 reakcij, pri katerih sta bili vidni sledi pionskega para in je istočasno nastal nevtron s pravo kinetično energijo. Pri teh reakcijah so natančno določili kinetične energije in gibalne količine obeh pionov in nevtrona. S podobnim postopkom kot pri prejšnjem poskusu so najprej izločili reakcije, pri katerih sta nastala nevtron in pionski par ali proton in negativni pion ali proton ter negativni in nevtralni pion. Naposled so izločili še reakcije, pri katerih je poleg mezona η nastal foton. Od preostalih 11 415 reakcij jih je 750 poteklo naravnost, to je brez nastanka mezona η: ($\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \pi^- + \pi^0 + \pi^+$), 10 665 pa z nastankom mezona η (3). Za preiskanih 10 665 razpadov v okviru dosežene natančnosti niso mogli ugotoviti nobene asimetrije. Za poprečno asimetrijo so namreč dobili samo 0,003, pri čemer so ocenili efektivno napako z 0,01.

Pozneje so poročali še o nekaterih neobjavljenih merjenjih.[11] Dobljene poprečne asimetrije so zbrane v razpredelnici. Ena izmed skupin je dobila celo znatno negativno vrednost, medtem ko druga v okviru dosežene natančnosti ni mogla ugotoviti nobene asimetrije. Najbrž je treba verjeti rezultatom CERN,

Laboratorij	Število opazovanih razpadov mezona η	Poprečna asimetrija z efektivno napako
Duke	565	0,041 ± 0,041
Columbia-Berkely-Purdue-Wisconsin-Yale[12]	1 300	0,058 ± 0,034
Columbia-Rutgers[7]	1 351	0,072 ± 0,028
CERN[8]	10 665	0,003 ± 0,011
Saclay-Rutherford	705	—0,060 ± 0,040
Skupaj	14 586	0,013 ± 0,016

za kar govori predvsem veliko število preiskanih razpadov. Tudi poprečje vseh merjenj ne kaže, da bi obstajala znatna asimetrija. Četudi bi se pokazalo, da je resnična asimetrija nekaj tisočink, bi bilo to premalo, da bi mogli pojasniti razpad K_2^0 na dva piona na opisani način. Pripravljajo poskuse, pri katerih bodo asimetrijo določili še natančneje. Meriti nameravamo tudi poprečno asimetrijo pri fotonskem razpadu mezona η: $\eta \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \gamma$. Neinvariantnost elektromagnetne interakcije med hadroni bi se morala pri tem razpadu pokazati v večji meri kot pri razpadu, pri katerem ne nastane foton.

V računih z navedenimi transformacijami so v kvantni mehaniki uporabljali tri operatorje. Operator inverzije prostora **P** prevede valovno funkcijo

nekega delca v valovno funkcijo v invertiranem prostoru. Operator **C** prevede valovno funkcijo nekega delca v valovno funkcijo njegovega antidelca. Operator **T** prevede valovno funkcijo nekega delca v valovno funkcijo z obrnjenim časom. Lee je namesto teh treh vpeljal devet operatorjev $\mathbf{C}_m, \mathbf{P}_m, \mathbf{T}_m$; $\mathbf{C}_e, \mathbf{P}_e, \mathbf{T}_e$; $\mathbf{C}_š, \mathbf{P}_š, \mathbf{T}_š$.[1,4,5] Operatorji imajo podoben pomen kot prej, le da se tisti z indeksom m nanašajo na močno, z indeksom e na elektromagnetno in z indeksom $š$ na šibko interakcijo, pri čemer si je treba misliti preostali dve interakciji vselej izključeni. Sodeč po dosedanjih eksperimentalnih dejstvih je vsaka izmed interakcij invariantna proti trem operatorjem, ki se nanašajo nanjo.* Kaže tudi, da je vsaka izmed treh interakcij invariantna proti katerikoli trojici $\mathbf{C}_i \mathbf{P}_i \mathbf{T}_i$ ($i = m, e, š$), od koder sledi, da je $\mathbf{C}_m \mathbf{P}_m \mathbf{T}_m = \mathbf{C}_e \mathbf{P}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{C}_š \mathbf{P}_š \mathbf{T}_š$. Lastnosti interakcij pri treh transformacijah so določene s povezavami med devetimi operatorji.

Ena izmed možnosti je

$$\mathbf{P}_e \overset{\mathbf{P}_m}{\underset{\neq}{=}} \mathbf{P}_š \qquad \mathbf{C}_e \overset{\mathbf{C}_m}{\underset{\neq}{\neq}} \mathbf{C}_š \qquad \mathbf{T}_e \overset{\mathbf{T}_m}{\underset{\neq}{\neq}} \mathbf{T}_š$$

Osnovnici v prvih dveh trikotnih povezavah da opazovanje razpada β. Preostali potrebni podatek za prvo trikotno povezavo dobimo iz nekaterih drugih poskusov v jedrski fiziki. Razpad K_2^0 v dva piona kaže, da celotna interakcija ni invariantna proti transformaciji $\mathbf{C}_m \mathbf{P}_m$.** V drugi trikotni povezavi je izražena neinvariantnost elektromagnetne interakcije proti $\mathbf{C}_m$ ($\mathbf{C}_m \neq \mathbf{C}_e$). Iz invariantnosti vseh treh interakcij sledi tretja trikotna povezava. Ker pri razpadu mezona η niso našli dovolj velike asimetrije, bo treba morda upoštevati $\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_e$. Vzrok za razpad K_2^0 v dva piona bo treba verjetno iskati med preostalimi možnostmi za povezave devetih operatorjev.

J. Strnad

Literatura

[1] T. D. Lee: Space Inversion, Time Reversal, Particle-Antiparticle Conjugation. Physics Today **19**, 23 (No. 3), 1966.

[2] L. Pičman: Neohranitev parnosti. Obz. mat. fiz. **5**, 157 (1957).

[3] J. Strnad: Neinvariantnost proti obratu časa. Obz. mat. fiz. **12**, 64 (1965).

[4] T. D. Lee, L. Wolfenstein: Analysis of CP-Noninvariant Interactions and the K_1^0, K_2^0 System. Phys. Rev. **138**, B 1490 (1965).

[5] T. D. Lee: Possible C-Noninvariant Effects in the 3π Decay Modes of η^0 and ω^0. Phys. Rev. **139**, B 1415 (1965).

[6] C. Baltay, N. Barash, P. Franzini, N. Gelfand, L. Kirsch, G. Lütjens, J. C. Severiens, J. Steinberger, D. Tycko, D. Zanello: Test of Charge-Conjugation Invariance in p-$\bar{p}$ Annihilations at Rest. Phys. Rev. Letters **15**, 591 (1965).

[7] C. Baltay, P. Franzini, J. Kim, L. Kirsch, D. Zanello, J. Lee-Franzini, R. Loveless, J. McFadyen, H. Yarger: Experimental Evidence Concerning Charge-Conjugation Noninvariance in the Decay of the η-Meson. Phys. Rev. Letters **16**, 1224 (1966).

---

* To pomeni, da operatorji $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{T}_i$ ($i = m, e, š$) komutirajo z ustreznim delom hamiltonke: $\mathbf{P}_i\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i\mathbf{P}_i$, $\mathbf{C}_i\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i\mathbf{C}_i$, $\mathbf{T}_i\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i\mathbf{T}_i$, če je celotna hamiltonka $\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_š$.

** Znano je le, da je $\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m\mathbf{H} \neq \mathbf{H}\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m$, a nihče še ne ve, ali je tega kriv člen $\mathbf{H}_m$ ali člen $\mathbf{H}_e$ ali člen $\mathbf{H}_š$. Možnost, o kateri smo razpravljali, je $\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m\mathbf{H}_m = \mathbf{H}_m\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m$ in $\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m\mathbf{H}_š = \mathbf{H}_š\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m$, a $\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m\mathbf{H}_e \neq \mathbf{H}_e\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m$ zaradi $\mathbf{C}_m\mathbf{H}_e \neq \mathbf{H}_e\mathbf{C}_m$. Seveda mora veljati hkrati zaradi $\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m\mathbf{T}_m\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_e\mathbf{C}_m\mathbf{P}_m\mathbf{T}_m$ tudi $\mathbf{T}_m\mathbf{H}_e \neq \mathbf{H}_e\mathbf{T}_m$ in zato $\mathbf{T}_m \neq \mathbf{T}_e$.

[8] A. M. Cnops, G. Finocchiaro, J. C. Lassalle, P. Mittner, P. Zanella, J. P. Dufey, B. Gobbi, M. A. Pouchon, A. Muller: Test of C Invariance in the Three Pion Decay of the η-Meson. Physics Letters **22**, 846 (1966).

[9] Matter-Antimatter Asymmetry Found in the Intermediate Interaction. Physics Today **19**, 71 (No. 8), (1966).

[10] N. Dombey: Particles Through the Looking Glass. New Scientist **30**, 832 (1966).

[11] Mater-Antimatter Asymmetry. Physics Today **19**, 85 (No. 10), (1966).

[12] Columbia-Berkeley-Purdue-Wisconsin-Yale Collaboration: Search for C Violation in $\eta \quad \pi^+ \pi^- \pi^0$.Phys. Rev. **149**, 1044 (1966).

ŠOLA

NEKAJ O POUKU MODERNE MATEMATIKE V ITALIJI

Na osnovi priporočil zborovanja matematikov v Dubrovniku leta 1960 in kasneje v Bologni je ministrstvo za prosveto v Italiji izdalo dovoljenje, da se organizirajo eksperimentalne šole oziroma razredi v raznih krajih Italije. Že leta 1962 so priredili seminar za 40 predavateljev matematike. Izbrali so najboljše, in sicer po oceni, doseženi na diplomskem izpitu. Po 20-dnevni pripravi je vseh 40 profesorjev pričelo že v šolskem letu 1962/63 s poukom moderne matematike.

Poskus je vodila posebna komisija pri ministrstvu za prosveto, v kateri je poleg strokovnjaka iz ministrstva sodelovala večja skupina univerzitetnih profesorjev in profesorjev srednjih šol.

Eksperiment se je iz leta v leto razširjal in izpopolnjeval.

V šolskem letu 1962/63 je sodelovalo 40 razredov,
v šolskem letu 1963/64 je sodelovalo 160 razredov,
v šolskem letu 1964/65 je sodelovalo 200 razredov in
v šolskem letu 1965/66 eksperimentira 250 razredov.

Preden se seznanimo s poukom moderne matematike, preglejmo sistem splošnoizobraževalnega šolstva v Italiji, da bo laže razumljivo kasnejše izvajanje.

Starost	Osnovna šola
6 let	1. razred
7 let	2. razred
8 let	3. razred
9 let	4. razred
10 let	5. razred

	Scuola media (nižja enotna srednja šola)
11 let	1. razred
12 let	2. razred
13 let	3. razred

	Klasična	Realna	Učiteljišče
14 let	4. gimnazija	1. licej	1. letnik
15 let	5. gimnazija	2. licej	2. letnik
16 let	1. licej	3. licej	3. letnik
17 let	2. licej	4. licej	4. letnik
18 let	3. licej	5. licej	

Reforma predmetnikov in učnih načrtov je zajela v šolskem letu 1965/66 že 3. razred Scuola media. Torej po novem učnem načrtu dela že osnovna šola in Scuola media. Klasična gimnazija, realna in učiteljišče delajo po starih programih.

Reforma višjih razredov srednje šole predvideva 5-letni licej, tako da bosta prvi dve leti skoraj povsem enotni, ostala tri leta pa nastopi furkacija, in sicer v klasični, realni, pedagoški, jezikovni in umetnostni licej.

Struktura liceja bi bila potem takale:

Starost							
14 let	1. razred	enotni dvoletni licej (biennio unico)					
15 let	2. razred						
		triletni licej (triennio liceale)					
16 let	3. razred	klasični (classico)	realni (scientifico)	pedagoški (pedagogico)	jezikovni (linguistico)	umetnostni (artistico)	
17 let	4. razred						
18 let	5. razred						

Na osnovi eksperimentalnega dela in na pobudo profesorjev srednjih šol, ki so pri tem eksperimentu sodelovali, pa tudi na pobudo dijakov, so že sestavili osnutek novega učnega načrta za matematiko.

Kakor sem že omenil, bo imel reformirani licej prvi dve leti enoten učni načrt in šele nato se bo dijak odločil, katero smer si bo izbral za naslednja tri leta.

Za prvi dve leti eksperimentatorji predlagajo ministrstvu za prosveto naslednji učni načrt iz matematike:

1. razred: Elementi teorije množic. Kartezijski produkt množic. Zveze med množicami.
Osnovne operacije in njihove lastnosti. Primerjalna študija operacije z naravnimi, celimi (relativnimi) in racionalnimi števili. Pojem grupe, kolobarja in obsega. Kolobar celih števil in obseg racionalnih števil, ki jih prikazujemo z ulomki. Osnovne enakosti.
Medsebojne povezave števil in njih grafična upodobitev.
Ekvivalentne relacije.
Osnovni odnosi med elementi v ravnini, presek in vzporednost, smer, translacije, vektorji in centralna simetrija.
Urejene množice.
Topološke lastnosti: lastnosti usmerjene premice in delitev ravnine.
Daljice, konveksni liki: koti in mnogokotniki.
Lastnosti urejenosti množice naravnih, celih (relativnih) in racionalnih števil. Neenakosti.

2. razred: Intuitivni uvod v realna števila na osnovi mestnih vrednosti ali številčne premice ali grupe translacij. Lastnosti obsega realnih števil in računanje s približki. Metrične lastnosti ravnine: pravokotne premice, osna simetrija, grupa kongruenc. Dolžina daljice in velikost kota (osnovne mere). Uporaba pri mnogokotnikih.
Kolobar polinomov na kolobarju celih števil in na obsegu racionalnih in realnih števil.

Pojem funkcije kot aplikacija med množicami. Cele racionalne funkcije. Princip identitete polinomov. Evklidov algoritem v kolobarju celih števil in polinomov z enim nedoločenim številom. Primer divizorja prve stopnje, Ruffinijevo pravilo in posledice. Racionalne funkcije kot ulomki.

Elementi analitične geometrije: pravokotni koordinatni sistem. Enačbe translacij. Enačba premice. Premica skozi dve točki, sečišče dveh premic. Linearne enačbe (z eno in dvema neznankama) v obsegu racionalnih ali realnih števil in njihovi sistemi. Analitični dokaz nekaterih geometričnih lastnosti.

Učni načrt za prvi dve leti je bil sestavljen tako, da je upošteval dvoje načel: prvič, da je usmeril dijake k osnovnim konceptom in k značilni metodi moderne matematike, in drugič, da je prilagodil pouk razvojni stopnji dijakov.

Avtorji so predvideli izmenjavanje algebrajske in geometrijske snovi tako, da je formalizem v algebri dobil svojo oporo v geometriji in obratno, da so geometrijski problemi vzbudili potrebo po algebrajskih formalizmih, s katerimi se ti problemi najpreprosteje rešujejo.

Intuitivni uvod realnih števil ni mišljen kot dokončni cilj, ampak bo treba ta pojem rigorozno obdelati v petem liceju.

Potrebno je bilo uvesti elemente analitične geometrije že v bienij zaradi tega, da se dijaki že zgodaj seznanijo z eno osnovnih metod v matematiki in da spoznajo osnovne koncepte linearnih sistemov. Učni načrt je v glavnem enoten v obeh prvih dveh razredih, razlike so predvidene le pri večji ali manjši razširitvi vaj in nalog.

Drugi del učnega načrta, tj. za 3., 4. in 5. razred liceja ni še tako izdelan kakor za prvi dve leti, vendar je tudi pri tem eksperiment pokazal že precej jasno sliko, kaj naj se predela v matematiki v teh dveh razredih.

Ministrstvo za prosveto je že leta 1963 izdalo učbenik moderne matematike (Per un insegnamento moderno della matematica nei licei). V učbeniku so tudi navodila, kako naj se predela učni načrt iz matematike v posameznih razredih. Preglejmo, kakšna so navodila za realni licej:

3. razred: Algebra: Osnovni pojmi aritmetičnega in geometrijskega zaporedja, potenc z realnim eksponentom, eksponencialnih enačb in definicije logaritma. Črtajo se logaritemske tabele.

Geometrija — Osnovno vodilo naj bo, da se ne dokazujejo izreki, ki so evidentni.

Analitična geometrija — Obdelati samo premico, krožnico, parabolo in enakoosno hiperbolo.

4. razred: Geometrija — Osnovni pojmi ekvivaletnih teles. Obrazci površine in prostornine (brez dokazov).

Trigonometrija — Definicija sinusa, kozinusa, tangente; študij teh funkcij in njihovih grafov — Pojem sinusovega in Carnotovega izreka. Formule vsote dveh kotov, dvojnega in polovičnega kota.

Analiza — Vsa snov naj se obdela v 5. razredu.

5. razred: Črtati kombinatoriko in elemente teorije verjetnosti. Elementi analize se morajo predelati v celoti v tem razredu, zaradi tega se je treba strogo ravnati po predpisanih programih. Nobena razširitev teorije o limitah; nobenih pravil odvoda funkcije neke funkcije in inverznih funkcij. Ti argumenti sicer niso bili v učnem načrtu,

vendar se je navada, da tudi to snov učitelji predelajo, razširila na vse šole. Prav tako se ne obravnavajo »poševno asimptote« krivulj, podanih s funkcijo $y = f(x)$; določanje maksimuma in minimuma naj se omeji samo na potreben pogoj ($f'(x) = 0$) in na izražanje zadostnih pogojev.

Nekaj značilnega v tem učnem načrtu je to, da so povsem črtali uporabo logaritmično-trigonometričnih tablic in vaje v reševanju poševnokotnega trikotnika. To utemeljujejo takole: Čemu služi na tej stopnji splošnoizobraževalnega pouka uporaba numeričnih tablic? Tistim dijakom, ki se bodo kasneje posvetili študiju tehnično-matematičnih predmetov, bo uporaba le-teh, kakor tudi drugih tablic, postala povsem naravna in spontana, ne da bi zahtevala neko predpripravo. Če se pa bodo posvetili družboslovnim predmetom, bo zanje dejstvo, da so se učili v liceju uporabe numeričnih tablic samo spomin na nepotrebno in morda celo težavno delo.

To, kar je najvažnejše pri študiju matematike, ki jo smatramo kot splošnoizobraževalen predmet, je razlaga osnovnih principov, na katere moramo opozarjati mladino in v njej vzbujati vedoželjnost do le-teh. Prav zaradi tega nima smisla, da se ustavljamo pri raznih algoritmičnih posebnostih v zvezi z razlago trigonometrije v ravnini, kot npr. reševanje posebno zapletenih in zavitih trigonometričnih enačb ali pa pri reševanju poševnokotnega trikotnika. Ko bodo dijaki na osnovi definicij trigonometričnih funkcij dobro razumeli pojem sinusa in kozinusa, bodo avtomatično znali reševati pravokotne trikotnike, in če ne drugače, vsaj intuitivno prišli k reševanju vseh trikotnikov (morda z delitvijo le-teh v pravokotne trikotnike). Prav tako se sprašujejo, kakšen pomen ima za splošno izobrazbo mladega človeka, ako pozna formulo, s katero dobimo prvi odvod logaritmične funkcije ali eksponentne funkcije, ko pa morajo zaradi pomanjkanja časa opustiti izreke o limiti logaritma ali eksponentne funkcije?

Navedel sem le osnovne misli, ki sem jih lahko povzel iz razgovora s strokovnjaki na ministrstvu za prosvetc, s profesorji na liceju kakor tudi z dijaki. Eksperiment, ki ga izvajajo v Italiji, je zelo pomemben za razvoj pouka matematike ne samo po vsebini, kakor je razvidno iz prej navedenih učnih načrtov, ampak tudi po obsegu, saj se ta eksperiment v letošnjem šolskem letu izvaja v 250 razredih različnih šol na severu in na jugu Italije. Njihovi rezultati bodo prav gotovo zelo koristni vsem, ki si prizadevajo za izboljšanje pouka matematike na vseh vrstah šol.

Stanko Uršič

PRESKUSNA VAJA ZA ŠTUDENTE, KI SO SE VPISALI NA MATEMATIČNO-FIZIKALNI ODDELEK

V šolskem letu 1966/67 se je vpisalo na matematično-fizikalni oddelek nenavadno veliko novincev. Na tehnično fiziko se je vpisalo v I. letnik 59, na tehnično matematiko 47 in na pedagoško študijsko smer matematika in fizika 61 študentov. Tudi letos so pisali novinci preskusno vajo, ki naj bi pokazala, kako spretno znajo reševati preproste računske naloge iz fizike. Preskusno vajo je pisalo 138 novincev v dveh skupinah. Razporeditev na ti skupini je bila naključna, tako da so bili v obeh skupinah študenti vseh treh študijskih smeri. Vendar smo tehnične matematike in matematike-fizike obravnavali

skupaj. Spodaj so naloge za obe skupini; pri vsaki nalogi je naveden odstotek tehničnih fizikov (F) ter matematikov-fizikov in tehničnih matematikov (M), ki so pravilno rešili tisto nalogo.

I

1. Vrtiljak se sprva enakomerno vrti, in sicer se zavrti enkrat vsaki 2 sekundi. Ko pa vključimo zavore, se vrti enakomerno pojemajoče in se ustavi po 4 vrtljajih. Kolikšen je pri tem kotni pojemek? (F 12 %, M 15 %)

2. V jeklenki je plin pri tlaku 1 kp/cm^2 in temperaturi 20 °C. Do kolikšne temperature je treba segreti plin, da se poveča tlak na 1,5 kp/cm^2? (F 62 %, M 59 %)

3. Žarnico, ki je grajena na napetost 150 V in moč 50 W, bi radi priključili na napetost 220 V. Kolikšen predupornik moramo vključiti? (F 40 %, M 67 %)

4. Objektiv projekcijskega aparata z goriščno razdaljo 60 cm je 40 m oddaljen od zaslona. Kako visoka je slika 24 mm visokega diapozitiva? (F 64%, M 36 %)

5. Pot premo se gibajočega telesa je dana v odvisnosti od časa z izrazom $s = kt^3 - k't$. Poišči izraz za odvisnost hitrosti od časa! Kolikšna je hitrost v trenutku $t = 1$ s, če je $k = 2\ \mathrm{ms}^{-3}$ in $k' = 2\ \mathrm{ms}^{-1}$? (F 24 %, M 5 %)

II

1. Na vrhu klanca z nagibom 30° ima voziček hitrost 5 m/s po klancu navzdol. Čez koliko sekund dospe voziček do spodnje točke, ki je po klancu 5,6 m oddaljena od vrha. Kolikšna je hitrost vozička v spodnji točki? (F 27 %, M 15 %)

2. 1 kg ledu s temperaturo 0 °C vržemo v 2 kg vode s temperaturo 100 °C. Kolikšna je končna temperatura, če ne gre nič toplote v izgubo? Talilna toplota ledu je 80 kcal/kg, specifična toplota vode pa 1 kcal/kgst. (F 58 %, M 61 %)

3. Na akumulator za 10 V je prek zelo kratkih žic priključena žarnica za to napetost in za moč 50 W. Za koliko odstotkov se zmanjša moč, ki jo troši žarnica, če jo moramo priključiti na akumulator prek dolgih žic s skupnim uporom 0,2 ohma? (F 27 %, M 12 %)

4. Plankonveksna leča iz stekla z lomnim kvocientom 1,5 ima krivinski radij 25 cm. V kolikšni razdalji za lečo nastane slika predmeta, ki je 75 cm pred lečo? (F 58 %, M 31 %)

5. Hitrost premo se gibajočega telesa v odvisnosti od časa je dana z izrazom $v = kt^3 - k't^2$. Poišči izraz za pospešek v odvisnosti od časa! Kolikšen je pospešek v trenutku $t = 1$ s, če je $k = 5\ \mathrm{ms}^{-4}$ in $k' = 6\ \mathrm{ms}^{-3}$? (F 50 %, M 15 %)

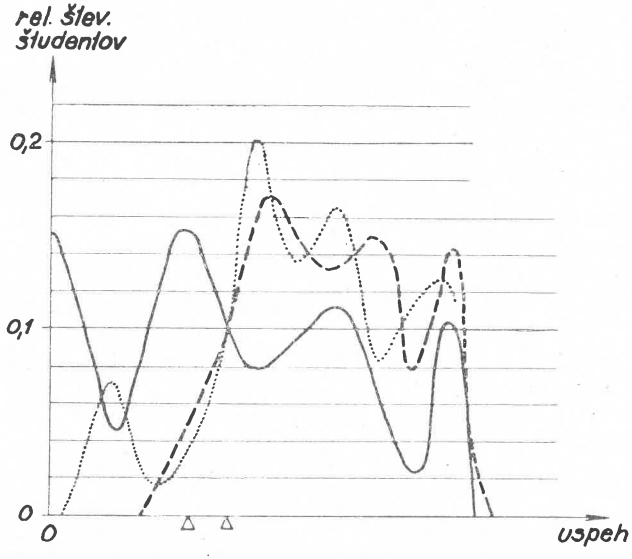
Prve štiri naloge v I. skupini so dobili novinci pri preskusni vaji pred štirimi leti. Tako je možna zanimiva primerjava. Razpredelnica navaja odstotke študentov, ki so pravilno rešili posamezne naloge po vrsti pred štirimi leti in pri obeh skupinah letos:

	mehanika	toplota	elektrika	optika	odvajanje
1962	10 %	30 %	30 %	40 %	—
1966 I. sk.	14	60	56	44	13 %
1966 II. sk.	20	60	18	42	29

Pri nalogah iz toplote in elektrike je opazen napredek. Uspeh pri nalogah II. skupine je podoben. Slab uspeh pri nalogi iz elektrike v tej skupini ne preseneča, ker je bila ta naloga namenoma nekoliko manj šablonska kot druge.

Najbrž bo držalo, da novinci ob vpisu na matematično-fizikalni oddelek iz leta v leto spretneje rešujejo računske naloge iz fizike. To je po vsej verjetnosti posledica uvajanja računskih nalog v srednje šole. Morda bi bilo dobro, ko bi v srednji šoli ne delali samo šablonskih nalog. Tehnični fiziki so

kot prejšnja leta pokazali nekoliko boljši uspeh kot matematiki. Medtem ko so fiziki v poprečju pravilno rešili 2,2 naloge, so matematiki v poprečju rešili le 1,5 nalog. Vendar se zdi, da postaja ta razlika iz leta v leto manjša.



Porazdelitev relativnega števila študentov po uspehu pri preskusni vaji 1966/67 (izvlečena krivulja), pri pismenih vajah v zimskem semestru 1965/66 (pikčasto) in pri pismenih vajah v letnem semestru 1965/66 (črtkano). V prvem primeru je merilo za uspeh število pravilno rešenih nalog od petih, ki so navedene na s. 135, v drugem in v tretjem primeru pa število pravilno rešenih nalog od skupno 18. Najnižji uspeh pri pismenih vajah, s katerim je študent uspešno opravil izpit na koncu leta, je označen s trikotnikoma: levi se nanaša na zimski in desni na letni semester. Porazdelitve so v resnici diskretne (študente smo po uspehu razvrstili v deset razredov) in so narisane z gladkimi krivuljami samo zaradi preglednosti. Pri sprejemnem izpitu bi se morda dalo brez škode odkloniti kandidate v levem vrhu izvlečene krivulje.

Na koncu navedimo še izpopolnjeno razpredelnico uspehov študentov matematično fizikalnega oddelka na koncu prvega leta pri izpitu iz fizike.

	TF	TM	MF
1961/62	47 % (43) 3,9	46 % (13) 3,3	42 % (12) 2,9
1962/63	37 % (35) 3,5	26 % (19) 3,8	43 % (21) 2,7
1963/64	41 % (54) 4,0	45 % (11) 4,6	10 % (49) 2,6
1964/65	52 % (42) 3,7	33 % (11) 3,1	10 % (31) 2,7
1965/66	56 % (52) 4,0	75 % (24) 3,5	45 % (36) 2,8

Najprej je naveden odstotek vpisanih študentov, ki so uspeli pri izpitu iz fizike I. V oklepaju je skupno število vpisanih študentov na začetku 1. letnika. Za oklepajem pa je poprečna ocena iz fizike I, pri čemer sta upoštevani oceni pri izpitu in pri pismenih vajah med letom. Podatke iz razpredelnice je treba vzeti s pridržkom kot vse statistične podatke in zaradi izjemnih primerov. Nekateri se vpišejo namreč samo zato, da imajo status študenta npr. zaradi otroških dodatkov, ne da bi sploh mislili študirati. Poleg tega so pri tistih, ki so izdelali, všteti tudi ponavljavci, ki morda niso bili vpisani. Visok

odstotek tehničnih matematikov, ki so izdelali letos, v primeri z ustreznim odstotkom tehničnih fizikov pojasnimo morda lahko z dejstvom, da se matematiki pogosto zadovoljijo z najnižjo pozitivno oceno, medtem ko se fiziki zaradi študijskih zahtev zadovoljijo s to oceno samo v izjemnih primerih. Pri vsej potrebni previdnosti lahko najbrž sklepamo, da se je bilo v letu 1965 vpisalo na pedagoško študijsko smer več dobrih študentov kot v prejšnjih dveh letih. Želimo si, da bi se na to smer vpisovali še boljši študenti in bi se s časom zvišala poprečna ocena.

M. Gros, M. Hribar, J. Strnad

Obz. mat. fiz. **10**, 142 (1963); **11**, 190 (1964); **12**, 123 (1965).

BIOTOVA FORMULA

Študenti, ki jim je fizika glavni predmet, naj bi spoznali *Biotovo formulo* (Biot-Savartov zakon) v prvem letu študija. Potrebujejo jo npr. pri računanju mognetne poljske gostote okoli kratkega dela ravnega vodnika ali na sredi krožne zanke. V večini osnovnih učbenikov fizike je ta formula samo navedena[1–4], saj je treba s strogo izpeljavo počakati vsaj do drugega leta, ko obvladajo študenti vektorsko analizo.[5] Če pa se odrečemo strogosti, pridemo lahko do Biotove formule tudi brez vektorske analize in vektorskega potenciala.*

Znano je, da so količine in enačbe za električno in magnetno polje v marsičem analogne. Izjema je le električni naboj, ker magnetni naboji ne obstajajo. Če v enačbi, v kateri ne nastopa električni naboj, nadomestimo električne količine z ustreznimi magnetnimi in obratno, dobimo veljavno enačbo, le da moramo včasih spremeniti še znak.

Kot se bo pokazalo, lahko v posebnem primeru razširimo analogijo tudi na enačbe, v katerih nastopa električni tok. Naši izhodišči sta enačbi, s katerima definiramo električno poljsko jakost $\mathbf{E}$ in magnetno poljsko gostoto $\mathbf{B}$. Električno poljsko jakost definiramo s silo na majhen naboj $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$. Pri prostorsko porazdeljenem naboju z gostoto $\varrho_e = de/dV$ navedemo raje gostoto sile $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dV = \mathbf{E}de/dV = \varrho_e\mathbf{E}$. Upoštevajoč zvezo med električno poljsko jakostjo in električno poljsko gostoto $\mathbf{D}$ v praznem prostoru, $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, imamo

$$\mathbf{f} = (\varrho_e/\varepsilon_0)\,\mathbf{D} \tag{1}$$

Magnetno poljsko gostoto definiramo po navadi s silo na raven vodnik z dolžino $\mathbf{l}$, ki ima smer toka I, v homogenem magnetnem polju: $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Gostota sile je $\mathbf{f} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}/dV = (\mathbf{j}_e S dl) \times \mathbf{B}/dV$, torej

$$\mathbf{f} = \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} \tag{2}$$

Tu je $\mathbf{j}_e$ (ploskovna) gostota toka in S presek vodnika. Enačba (1) preide v enačbo (2), če nadomestimo $\mathbf{D}$ z $\mathbf{B}$, saj magnetna poljska gostota ustreza električni, in če nadomestimo ϱ_e/ε_0 z $\mathbf{j}_0 \times$. Drugi predpis vzamemo popolnoma formalno in ga ne poskušamo utemeljevati.

* Druga pot do Biotove formule vodi prek specialne teorije relativnosti. Lahko bi se sklicevali tudi na enačbo $\mathbf{E} = \mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{B}$, ki pa jo spoznajo študenti pozneje pri obravnavanju gibanja nabitih delcev po magnetnem polju. Če se opazovalec giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$ proti magnetnemu polju z gostoto $\mathbf{B}$, občuti električno polje z jakostjo $\mathbf{E} = \mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{B}$. Tej enačbi je do predznaka analogna enačba $\mathbf{H} = -\mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{D}$, iz katere sledi $\mathbf{B} = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{E}$. Opazovalec, ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$ proti električnemu polju z jakostjo $\mathbf{E}$, občuti magnetno polje z izračunano gostoto. Del nabojev, ki se gibljejo po vodniku s hitrostjo $-\mathbf{v}$, zato povzroča za mirujočega opazovalca magnetno polje z gostoto $d\mathbf{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\mathrm{x}\,(-\mathbf{r}\,\varrho_e\,d\mathbf{V}/4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3) = \mu_0\,S dl\mathbf{j}_e\mathrm{x}\mathbf{r}/4\,\pi\,\mathbf{r}^3 = (\mu_0\,I/4\,\pi)\,r^{-3}\,\mathbf{r}\mathrm{x}d\mathbf{l}$.

Izračunamo gostoto polja v električnem polju z dano razporeditvijo nabojev. Po *izreku o električnem pretoku skozi zaprto ploskev* (Gaussovem izreku) je električni pretok $\int \mathbf{D} d\mathbf{S}$ skozi zaprto ploskev enak naboju znotraj ploskve. Električna poljska gostota v razdalji r od točkastega naboja je $D = e/4\pi r^2$ in ima radialno smer. Če imamo več točkastih nabojev e_i, postavimo točko, v kateri iščemo električno poljsko gostoto, v izhodišče koordinatnega sistema in označimo lego nabojev s krajevnimi vektorji $\mathbf{r}_i$. Prispevek i-tega naboja je $\mathbf{D}_i = -e_i \mathbf{r}_i/4\pi r_i^3$. Prispevek dela naboja $de = \varrho_e dV$ pri prostorsko porazdeljenem naboju pa je

$$d\mathbf{D} = -\varepsilon_0 \, dV \, (\varrho_e/\varepsilon_0) \, \mathbf{r}/4\pi r^3 \tag{3}$$

(Na desni smo števec in imenovalec pomnožili z ε_0.) V tej enačbi nadomestimo po znanih predpisih $\mathbf{D}$ z $\mathbf{B}$ in influenčno konstanto ε_0 z indukcijsko konstanto μ_0 ter po izkušnji z enačbama (1) in (2) ϱ_e/ε_0 z $\mathbf{j}_e \times$. Dobljeni izraz je Biotova formula:

$$d\mathbf{B} = -\mu_0 \, dV \mathbf{j}_e \times \mathbf{r}/4\pi r^3 \tag{4'}$$

Za tanek vodnik smemo vstaviti $\mathbf{j}_e dV = I d\mathbf{l}$ in dobimo Biotovo enačbo v običajni obliki

$$\mathbf{B} = (\mu_0 I/4\pi) \int \mathbf{r} \times d\mathbf{l}/r^3 \tag{4''}$$

(Pri tem smo zamenjali vrstni red vektorjev v vektorskem produktu in zato spremenili znak.) Preveriti je treba še znak. Zopet računamo $\mathbf{B}$ v točki, ki je v izhodišču koordinatnega sistema. V točki ob vodniku s tokom določimo smer magnetnega polja: prvič s svedrskim pravilom, drugič pa z vektorskim produktom v enačbah (4). Smeri se ujemata. Tudi sicer sta enačbi (4) pravilni, čeprav naše sklicevanje na analogijo ni neoporečno.

V razdalji R od neskončnega ravnega vodnika izračunamo magnetno poljsko jakost $H = B/\mu_0 = I/2\pi R$.[1] S tem podatkom lahko določimo magnetno napetost po sklenjeni poti okoli neskončnega ravnega vodnika. Magnetna napetost $\int \mathbf{H} d\mathbf{l}$ med dvema točkama polja je definirana analogno kot električna napetost $U = -\int \mathbf{E} d\mathbf{l}$. Za integracijsko pot izberemo silnico — krog z radijem R in s središčem v vodniku v ravnini, ki je pravokotna na vodnik. Ugotovimo, da je magnetna napetost po sklenjeni poti enaka objetemu toku $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I$ (če ni spremenljivega električnega polja). Rezultat ni analogen rezultatu pri električni napetosti po zaključeni poti $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ (če ni spremenljivega magnetnega polja).* Magnetno napetost po sklenjeni poti smo izračunali za poseben primer, a rezultat velja splošno in je znan kot *zakon o magnetni napetosti po sklenjeni poti* (Amperov zakon).

Nakazana pot dopušča postopno vpeljavo količin in enačb magnetnega in električnega polja. Poglavja razporedimo kot je navada v teoretski fiziki: statično električno polje, stacionarni električni tok, statično magnetno polje, kvazistacionarno magnetno in električno polje, elektromagnetno valovanje. Prvo in drugo poglavje lahko še zamenjamo, saj imajo študenti največ izkušenj o električnem toku.[6] Električno napetost med točkama električnega kroga vpeljemo že pri toku. Pozneje posplošimo to na napetost med dvema točkama

---

* «Iz enačbe $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I$ bi morda lahko sklepali na enačbo $\int \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$. Zapišemo $I = |\varepsilon_0 (\varrho_e/\varepsilon_0) \mathbf{v} S|$, pri čemer je ϱ_e gostota za tisti del nabojev, ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$. Po nadomestitvi ε_0 z μ_0 in ϱ_e/ε_0 z $\mathbf{j}_e \times$ dobimo $\mu_0 \mathbf{j}_e \times \mathbf{v} S = 0$, saj je vektorski produkt dveh vzporednih verktorjev enak nič.

električnega polja in iz energijskega zakona dobimo električno napetost po zaključeni poti.[6] Magnetno napetost vpeljemo po analogiji z električno in z Biotovo formulo izračunamo magnetno napetost po sklenjeni poti okoli ravnega vodnika. Na eksperimentalno potrditev zakona o magnetni napetosti po zaključeni poti je treba počakati do indukcije, ko lahko s *tuljavo Rogowskega* merimo magnetno napetost.

Slabost navedene »izpeljave« je v izumetničenem sklicevanju na analogijo. A najbrž je bolje tako, kot da bi enačbe stresli iz rokava. Da ne bi pri študentih vzbujali napačnega vtisa o važnosti Biotove formule, moramo poudariti, da je zakon o magnetni napetosti po zaključeni poti zametek ene izmed Maxwellovih enačb, medtem ko Biotova formula sledi iz Maxwellovih enačb.

J. Strnad

Literatura

[1] J. A. Richards, F. W. Sears, M. R. Wehr, M. W. Zemansky: Modern University Physics. Reading, Mass. (Addison-Wesley), 1960.
[2] K. A. Putilov: Kurs fiziki, II. Moskva (Fizmatgiz), 1962.
[3] Grimsehl: Lehrbuch der Physik, II. Leipzig (Teubner), 1954.
[4] J. Rossel: Physique generale. Paris (Dunod), 1960.
[5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: The Feynman Lectures in Physics, II. Reading, Mass. (Addison-Wesley), 1964.
[6] I. Kuščer, A. Moljk: Fizika, III, Ljubljana (DZS), 1963.

DOMAČE VESTI

PREDLOG DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS je poslalo dne 31. X. 1966 Sekretariatu za prosveto in kulturo SRS, Republiškemu odboru sindikata delavcev družbenih dejavnosti SRS, Zavodu za šolstvo SRS, Skupnosti gimnazij SRS in Kulturno prosvetnemu zboru skupščine SRS naslednji dopis:

Aktiv učiteljev fizike na srednjih šolah v Sloveniji je na svojem rednem sestanku, dne 28. oktobra 1966 razpravljal o pouku fizike na srednjih šolah po reformi gimnazij. Pri tem je bilo na prvem mestu ugotovljeno, da se je kvaliteta pouka z verifikacijo gimnazij znatno dvignila, saj so mnoge šole dobile znatno ugodnejše materialne pogoje in tudi program je primernejši. Na drugi strani pa je aktiv ugotovil, da eksperimentalni del pouka, praktične vaje ter na novo vpeljane šolske naloge pri fiziki učitelja zaposluje znatno bolj kot kdajkoli prej.

S tega vidika je aktiv obravnaval tudi stališče v osnutku predloga zakona o srednjih šolah in domovih za učence, ko je govora o obveznosti učiteljev teoretičnega pouka. Aktiv se ne more strinjati, da se za vse učitelje na srednjih šolah postavlja enotna obveznost 22 ur tedensko, saj obstajajo med posameznimi učnovzgojnimi področji občutne razlike. Prav tako je aktiv ugotovil, da je splošna učna obveznost 22 ur tedensko za učitelje teoretičnega pouka v srednjih šolah bistveno nazadovanje v delovnih pogojih učitelja v srednjih šolah, saj je pretežna večina srednjih šol na podlagi priporočila Sindikata delavcev družbenih dejavnosti ter Zavoda za proučevanje šolstva SRS, ki je izšlo pred približno tremi leti, prišla na 20 ur učne obveznosti tedensko, ki se lahko spreminja navzgor ali navzdol, glede na zahtevnost predmeta. Uveljavitev obveznosti 22 ur tedensko bo pomenilo povečanje v poprečju delovno obveznost za 10 %, kar gotovo ni v skladu s prizadevanji za izboljšanje življenjskega položaja ljudi.

S tega stališča predlagamo merodajnim organom, da se v novem zakonu ne veča učna obveznost na 22 ur tedensko, temveč naj ostane pri sedanji 20-urni obveznosti, na drugi strani pa naj zakon predvidi tudi določene razlike med posameznimi učnovzgojnimi področji, katerih gotovo ne moremo zanikati.

To utemeljujemo ter predlagamo zato, da se delovni pogoji ne bi še nadalje slabšali, da se zato delovna obveznost ne veča, saj se v nasprotju s tem v vseh ostalih panogah delovni čas krči. Povečana učna obveznost prosvetnih delavcev v srednji šoli bi šla gotovo na račun kvalitete pouka ter znanja otrok, kar pa gotovo ne moremo dovoliti v prvi vrsti tisti, ki nam je poverjena skrb za to.

Prepričani smo, da je naš predlog utemeljen, zato pričakujemo, da bo našel svoje mesto tudi pri formuliranju novega zakona.

ORGANIZACIJA DELA PRI POUKU FIZIKE V GIMNAZIJI PO REFORMI

(Poročilo s sestanka aktiva)

Mnogi smo čutili potrebo, da si odkrito izpovemo svoje izkušnje in težave, v katere smo zabredli v zadnjem času pri pouku fizike. Učni načrt namreč predpisuje, da četrtino fiziki namenjenih ur uporabimo za eksperimen-

talne vaje učencev, pri tem pa ne želimo, da bi se dosedanji obseg snovi, ki smo ga v šoli obravnavali, bistveno zmanjšal. Takoj na začetku našega razgovora smo morali spoznati, da je med nami, ki poučujemo na srednjih šolah fiziko, še vse premalo strokovnjakov fizikov, in da se razmere še slabšajo. Vsi pa smo mnenja, da se kljub matematični zasedbi mest kvaliteta pouka nenehno dviga. Danes skoraj nimamo več gimnazije, ki nima zasilnega laboratorija ali pa fizikalne predavalnice. Tudi mnoga dobra učila, tako iz Vzhodne Nemčije, kot tudi iz Sovjetske zveze so nam na razpolago, da ne omenjam zagrebške tovarne učil, ki nam je tudi pripravila prav zajetno serijo zbirk. O vsem tem si pred kratkim še sanjati nismo upali. Materialni faktor pa seveda ni edini, ki dviga raven pouka fizike. Z reformo uvajamo na gimnazijah tudi laboratorijske vaje; s tem prehaja pouk v novo kvaliteto, saj je umska dejavnost dijaka pri samostojnih eksperimentih v laboratoriju intenzivnejša, dijak več ne sprejema samo z očmi in ušesi, temveč zapisuje, dela, se giblje, tiplje ... se nauči razlikovati bistveno od nebistvenega in slučajnega. Tu dijak ostri svoje sposobnosti, površnosti ne more biti, saj ne sme ničesar spregledati. Že pred leti pa smo popestrili pouk fizike tudi z računskimi fizikalnimi nalogami. Uspehi niso izostali. Danes spoznavamo, da dobivajo fizikalne naloge v sklopu laboratorijskih vaj še poseben pomen, in da je prav njihova metodična povezava ustvarila višjo obliko učenja, novo kvaliteto. Pri vsem tem se zavedamo, da delamo veliko napako, ko pretiravamo z obsegom snovi, pa tudi matematične relacije vse preveč postavljamo v ospredje, materija in pojavi sami pa so zapostavljeni.

Kaj naj torej storimo, da bo naše delo uspešnejše? Ob primerjavi tehnik izvajanja laboratorijskega dela smo spoznali, da se poslužujemo prav različnih prijemov. Večina nas ima laboratorijske vaje organizirane ločeno od pouka, nekateri pa jih organsko vklapljajo v redni pouk. Ko na primer v razredu obravnavajo talilno toploto snovi, jo merijo dijaki s pomočjo svojega kalorimetra vsak zase, profesor pa prede vodilno nit. Taka organizacija dela omogoča pridobitev ene šolske ure. Podobnih vaj je mogoče z ne prevelikimi sredstvi organizirati večje število. Izmenjava mnenj pa je pokazala, da se le ne kaže povsem odpovedati prvi metodi, kljub velikim prednostim druge. Pri uvajanju laboratorijskega dela v šoli namreč ne gre samo za to, da se dijak takemu delu privadi, temveč da se osebno spozna s čim večjim številom pojavov, spoznavanje katerih pa zahteva kompliciranejše priprave, ki pa jih ne moremo imeti v večjem številu na razpolago. Ko vpeljujemo laboratorijske vaje, jih izbirajmo tako, da se le-te ne bodo razlikovale samo po snovi, temveč da bodo med njimi tako vaje za konstatacijo pojavov samih, in druge, ki nam bodo ilustrirale količinske zakonitosti. Potrebne so tudi vaje, pri katerih se bomo samo spoznavali z merskimi inštrumenti, in vaje s prav tehničnim smotrom ter laboratorijske vaje v obliki fizikalnih nalog. V bogati zbirki, ki sta jo izdelala profesorja Plevnik in Štalec, jih bomo gotovo našli; le te je potrebno prirediti napravam našega laboratorija. Kolikor smo v stiski s časom, lahko prenekatero laboratorijsko vajo vpeljemo s frontalno demonstracijo pred razredom, saj bomo le tako lahko vzdržali zanimanje ter stimulirali živahno diskusijo in aktivno mišljenje. Z uvedbo laboratorijskega dela reforma še ni končana. Kljub vsemu prizadevanju nismo dosegli, da bi dijaki sami aktivno raziskovali fizikalne zakonitosti doma, vsaj v veliki večini primerov ne. V šoli so bili vse preveč postreženi. Nekateri smo skušali ure praktičnega znanja uporati tudi v ta namen. Z uspehom smo se poslužili laboratorijskega priročnika iz PSSC kursa. Posebnost teh nalog je v tem, da so si morali dijaki

nekatere naprave sami izdelati, da so bili sami konstruktorji laboratorijskih vaj. Tudi diplomske naloge je mogoče uporabiti za aktiviziranje dijaka v politehnični smeri, da dijak napravi tudi kakšno fizikalno napravo, ki je povezana z nalogo, lahko pa je tudi njen bistveni del. Prav hvaležni smo organizatorjem tekmovanja Znanost mladini, ki ta način dela vsestransko podpirajo.

Ko smo skušali pridobiti čim več časa za pouk fizike, smo se spotaknili tudi ob matematiko; menimo, da moramo poglavje, kjer se naj dijak nauči računati s približki, prepustiti matematiki, saj se tu zadnje čase dijak le preveč teoretično izpopolnjuje; prav tako se naj dijak nauči uporabljati logaritemsko računalo pri matematiki. Delo z njim naj postane vsakdanje. V preteklih letih smo pri reševanju fizikalnih nalog le uporabili preveč časa za računanje. Zdaj ne bomo odhajali iz razreda z občutkom, da nam je šla ura po zlu, saj se bomo z uporabo logaritemskega računala ukvarjali z vsakim problemom le toliko časa, kot njegova fizikalna narava zahteva.

Notranje rezerve smo iskali tudi v predznanju, ki ga naj dijak prinese iz osnovne šole. Tu vse preveč popuščamo, a več ne smemo, saj je dijak že preveč izgubil s prekinitvijo pouka fizike in preslabe povezave osnovne šole z gimnazijo. Prav tako sta pregrupacija posameznih poglavij in njihova sinteza omogočili skrajšati učni proces. Akustiko smo obravnavali kar vzporedno z mehanskim valovanjem. Po našem mnenju bi mogli doseči še mnogo več, a nam učni načrt tega ne dopušča. Npr.: poglavje o mehanskem nihanju in valovanju bi lahko nadaljevali v elektriki in končali v fizikalni optiki, kot imajo to organizirano razni sovjetski pa tudi sosednji hrvatski učbeniki. Tudi nekatere eksperimente smo hoteli izločiti iz rednih učnih ur, da ne bi pouka zreducirali v okvir minimalnega učnega načrta; spoznali pa smo: eksperimentiranje ni izgubljanje časa, še več, je pospeševalec učnega procesa, da ne govorimo o drugih odlikah te metode dela.

Nova organizacija dela zahteva od profesorja fizike neprimerno več truda in sposobnosti, vse od strokovnih, tehničnih do organizacijskih. Čutimo, da nas delo ubija in duševno siromaši, saj v takih razmerah ni več moč slediti strokovni literaturi, obdobni seminarji pa problema naše strokovnosti ne morejo rešiti.

Na koncu podajmo še naslednje sklepe sestanka: Učnega načrta ni potrebno spreminjati, saj obstajajo minimalne zahteve. Potrebna je pogosta in odkritosrčnejša izmenjava mnenj. Boljšo kvaliteto bomo dosegli le z manjšo obremenitvijo in stalnim izobraževanjem, to pa pomeni, da moramo boj za kvaliteto povezovati s težnjo za boljšo stimulacijo profesorja fizike. Uravnilovka v obveznostih na srednjih šolah ni v skladu z nagrajevanjem po delu; tudi zakonsko zviševanje delovne obveznosti profesorja srednje šole ni na mestu. Sklenili smo, da bomo ti zadnji naši stališči posredovali Skupščini SRS, Sekretariatu za prosveto in kulturo SRS, Republiškemu odboru sindikata delavcev družbenih dejavnosti SRS, Zavodu za šolstvo SRS in Skupnosti gimnazij Slovenije.

F. Avsec

TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV

Dne 10. novembra 1966 je bilo na II. gimnaziji v Ljubljani (Šubičeva ul.) tekmovanje mladih matematikov. Bilo je prvo tako tekmovanje na naši šoli. Pobudnika in organizatorja sta bila Tomo Pisanski in Igor Leiler iz četrtega razreda, usmerjal pa ju je stud. mat. Franci Dacar.

Prijavilo se je 121 dijakov, tekmovalo jih je 90, in 60 oddalo izdelke.

Naloge so bile:

Prvi razred

1. Dokaži, da je število $n^3 - n$ deljivo s 3 za vsako naravno število n.

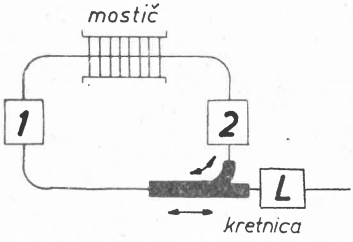
2. Kako bi narisal simetralo kota med premicama, ki se ne sečeta na risalni ploskvi?

3. Poišči napako v temle sklepanju

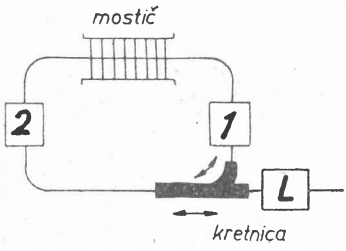
$$a = b \Rightarrow a^2 = ab \Rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \Rightarrow (a - b)(a + b) = (a - b)\, b \Rightarrow a + b = b$$
$$b + b = b \Rightarrow 2\, b = b \Rightarrow 2 = 1$$

4. Na tiru, ki je sestavljen iz zanke in iz odcepa, stoje lokomotiva L in vagona 1 in 2 tako, kot prikazuje slika 1. Lokomotiva lahko potiska ali vleče enega od vagonov ali oba; preko kretnice more kompozicija le na dva načina, ki sta nakazana na sliki, čez mostiček pa sme le lokomotiva sama.

S kakšnim manevriranjem se da razpored lokomotive in vagonov s slike 1 spremeniti v razpored na sliki 2?



Slika 1



Slika 2

Drugi razred

1. Kateti pravokotnega trikotnika sta a in b. Izračunaj dolžino simetrale pravega kota!

2, Kaj dobimo, če $a^{256} - b^{256}$ delimo z

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) \ldots (a^{64} + b^{64})(a^{128} + b^{128})?$$

3. Izračunaj: $(2 + \sqrt{3})/(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) + (2 - \sqrt{3})/(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})$.

4. V ravnini je n zobnikov, $n \geqq 2$; vsak zobnik zase se more vrteti okrog svoje osi. Razporejeni so tako, da se zobje prvega zobnika sklepajo z zobmi drugega zobnika, zobje drugega z zobmi tretjega, . . ., zobje zadnjega zobnika pa segajo v zobe prvega.

Kdaj je ta sistem zobnikov vrtljiv in kdaj ne?

Tretji razred

1. Konstruiraj trikotnik s podatki: v_a, v_b, t_b. Diskusija!

2. Racionaliziraj: $1/(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})$.

3. Reši enačbo: $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.

4. Konj stoji v levem spodnjem kotu šahovske deske. Radi bi z njim priskakali v desni zgornji kot, pri tem pa obredli vsa polja na deski, a vsako polje samo enkrat. Vendar pa se nam ta želja ne more izpolniti. Dokaži to!

Četrti razred

1. Dokaži: Če sta korena enačbe $x^2 + px + q = 0$, kjer sta p in q celi števili, realna, sta ali iracionalna, ali pa cela.

2. Poišči največjo in najmanjšo vrednost izraza $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$.

3. Poišči definicijsko območje in nariši diagrame naslednjih funkcij:

$$f(x) = (\pm \sqrt{x-1})^2, \quad g(x) = \pm \sqrt{(x-1)^2}, \quad h(x) = |x-1|.$$

4. Kolikšna je vsota koeficientov polinoma

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 1)^{1966}?$$

Snov je v skladu z učnim programom, raven nalog je dovolj visoka. Dijakov na tekmovanje nismo posebej pripravljali, kljub temu je bil uspeh dober. Vodstvo šole je tekmovanje vsestransko podprlo in 21 tekmovalcev nagradilo s knjigami iz zbirke »Sigma«. Najboljša mesta so dosegli: Mirko Dobovišek in France Mihelič v prvem razredu, Mitja Omladič v drugem razredu, Peter Legiša v tretjem razredu in Matjaž Zwitter v četrtem razredu.

S tem tekmovanjem smo hoteli privabiti dijake v krožke, v katerih bi se pripravljali za nadaljnja tekmovanja. Pred republiškim tekmovanjem pa bi se dijaki radi pomerili s tekmovalci iz vseh ljubljanskih gimnazij.

Sonja Križanič

VPRAŠANJA

1. Kovinska opeka z robovi 40 cm, 4 cm in 1 cm ter maso 0,4 kg leži plosko na leseni strehi z nagibom 20^0 tako, da je najdaljši rob vzporeden s poševnim robom strehe. Opeka ni pritrjena, ampak miruje zaradi trenja. Koeficient trenja meri 0,5. Zjutraj ima opeka temperaturo —20 °C, opoldne se na soncu segreje do 20 °C, proti večeru pa se zopet ohladi na —20 °C. (Pri tem temperatura opeke najprej monotono naraste, nato monotono pade.) Ali se opeka po segretju in ohladitvi kaj premakne? V katero smer se premakne, če se premakne? Linearni koeficient toplotnega raztezka za opeko je $2.10^{-5}\ st^{-1}$, les pa se nič ne raztegne.

2. Dopoldne začne snežiti in sneži enako gosto ves dan. Opoldne (ob 12^h) začne snežni plug čistiti tramvajsko progo. V prvi uri očisti 2 km proge, v drugi pa samo 1 km proge. Kdaj je začel padati sneg? (Plug odstrani vsako sekundo dano prostornino snega.)

S. P.

Obe vprašanji sta vzeti iz knjige L. A. Graham: Ingenious Mathematical Problems and Methods. New York (Dover), 1959. Prvo vprašanje je sestavil S. J. Mikina. V omenjeni knjigi je sto vprašanj različne težavnosti. To so vprašanja, ki so naletela med 18-letnim izhajanjem časopisa L. A. Grahama DIAL na najjačji odziv med bralci.

3. Vozilo se mora po cesti dvigniti na višino h. Hitrost vozila v je funkcija elevacijskega kota $\alpha : v(\alpha) = c \cos 3\alpha$. Kolikšen mora biti elevacijski kot α enakomerno strme ceste, da se bo vozilo v najkrajšem času povzpelo na višino h?

A. V.

V letošnjem letu smo prejeli v zameno za OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO naslednje revije:

1. Acta facultatis rerum naturalium universitatis comenianae. Mathematica. Bratislava. 1966, P. 13, 14.
2. Algebra i logika — seminar. Novosibirsk. 1966, T. 5, Vyp. 1, 2, 3.
3. Analele Universitatii Bucaresti. Ser. stiintele naturii. mat. fiz. Bucaresta, 1963, 4. 12. T. 39, 40.
4. Analele Universitatii Bucaresti. Ser. stiintele naturii. mat. mech. Bucaresta, 1964, A. 13, nr. 1, 2. A. 14, nr. 1, 2.
5. Annales Academiae scientiarum Fennicae. Ser. A. Helsinki, 1966, No. 385 do 393.
6. Arkiv för Mathematik. Stockholm, 1966, Bd. 6. 1, 2, 3, 4-5.
7. Boletin de la academie de ciencias fisicas, matematicas y naturales, Caracas, 1966. A. 26, No. 70.
8. Bulletin de l'academie Polonaise des Sciences. Varsovie, 1966. Vol. 14. Nu. 1—10.
9. Bulletin scientifique. Zagreb, 1966. T. 11. No. 1—12.
10. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. Praha, 1966. T. 7, No. 1—4.
11. Differencialnye uravnenija. Minsk, 1966. T. 2. Vyp. 1, 2, 4, 8, 9, 10.
12. Journal of science of the Hiroshima University. Ser. A-I. math. 1966. Vol. 30, No. 1.
13. Journal of the Franklin Institute, Phyladelphia, 1966. Vol. 281. Nu. 1—6, vol. 282, Nu. 1, 2, 3, 4, 5.
14. The mathematical gazette. London, 1966. Vol. 50, No. 371—374.
15. Osaka journal of mathematics. Toyonaka, 1966. Vol. 3, No. 1.
16. Publications de l'institut mathematique. Belgrade, 1966, T. 6.
17. Revista matematica Hispano Americana. Madrid, 1966. T. 26, No. 1—4.
18. Revue Roumaine de mathematiques pures et appliques. Bucarest, 1966. T. 11, No. 1—9.
19. Rozprawy matematyczne. Warszawa, 1966. T. 49, 50, 51.
20. Studia universitatis Babas-Bolyai. Ser. mat. phys. Cluj, 1966, F. 1.
21. Studii si cercetari matematice. Bucaresti, 1966. T. 18, Nr. 1—9.
22. Ukrainski matematičeskij žurnal. Kiev, 1966. T. 18.
23. Uspehi matematičeskih nauk. Moskva, 1966. T. 21, Vyp. 1—6.
24. Bulletin of the Boris Kidrič Institute of Nuclear Sciences, Beograd, 1966. Vol. XVII, No. 1—4.
25. Elektrotehniški vestnik. Ljubljana, 1966/67, št. 1—9.
26. Farmacevtski vestnik. Ljubljana, 1966, XVII, št. 1—4.
27. Fotokemijska industrija. Zagreb, 1966, št. 1—4.
28. Idrijski razgledi. Idrija, 1966, XI, št. 1—4.
29. Nuklearni inštitut Jožef Stefan. Ljubljana, 1966, Poročila 187—195.
30. Proteus. Ljubljana, 1966/67. XXIX, št. 1—6.
31. Sodobna pedagogika. Ljubljana, 1966, XVII, št. 1—10.
32. Vestnik Leningradskogo universiteta. Leningrad, 1966, No. 10, Vyp. 1, 2, 3.

OBVESTILO ČLANOM DRUŠTVA

Zveza društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije je že pred letom dni sklenila s Čehi dogovor o zamenjavi njihovih in naših matematikov. Tako so bili Jugoslovani že na obisku na Češkem, kakor tudi Čehi pri nas. Lansko leto sta dva celo predavala v Ljubljani.

S temi vrsticami želimo obvestiti vse naše člane, da je mogoče obiskati češke matematike. Vse, ki se zanimajo za to, prosimo, naj se obrnejo na Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, ki bo njihovo kandidaturo s predavanjem, ki bi ga imeli na Češkem, posredovalo Zvezi društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije.

Obenem vas hočemo seznaniti s seminarji, ki jih bo prirejalo češko društvo v letu 1967 in nas vabijo k udeležbi in sodelovanju:

Convergence Problems in Probability Theory. 31. maja do 3. junija 1967, Liblice.

Conference on Basic Problems of Numerical Mathematics. 11.—16. septembra 1967, Liblice.

Fourth Conference on Nonlinear Oscilations. 5.—9. septembra 1967, Praga.

Symposium on Atomic Absorption Spectroscopy. 30. avgusta do 1. septembra 1967, Praga.

Seminary: Elementary Excitation Processes in Crystals. Septembra 1967.

Seminary on Piezoelectricity. Julija ali septembra 1967, Liberec.

Seminary on Mechanics of Inhomogeneous Media. Julija 1967, Praga.

Seminary: The Tasks of Modern Mechanics of Solid State. 8.—15. septembra 1967, Praga.

Ciril Velkovrh

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejajo ga: R. Blinc, Z. Bohte, J. Pahor, V. Pivk, A. Moljk, M. Rosina, J. Strnad, F. Šušteršič, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 4 N-din, za zasebnike 5 N-din, za šole 10 N-din, za ustanove in podjetja 20 N-din. Čekovni račun Obzornika je 501-8-240/1.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.