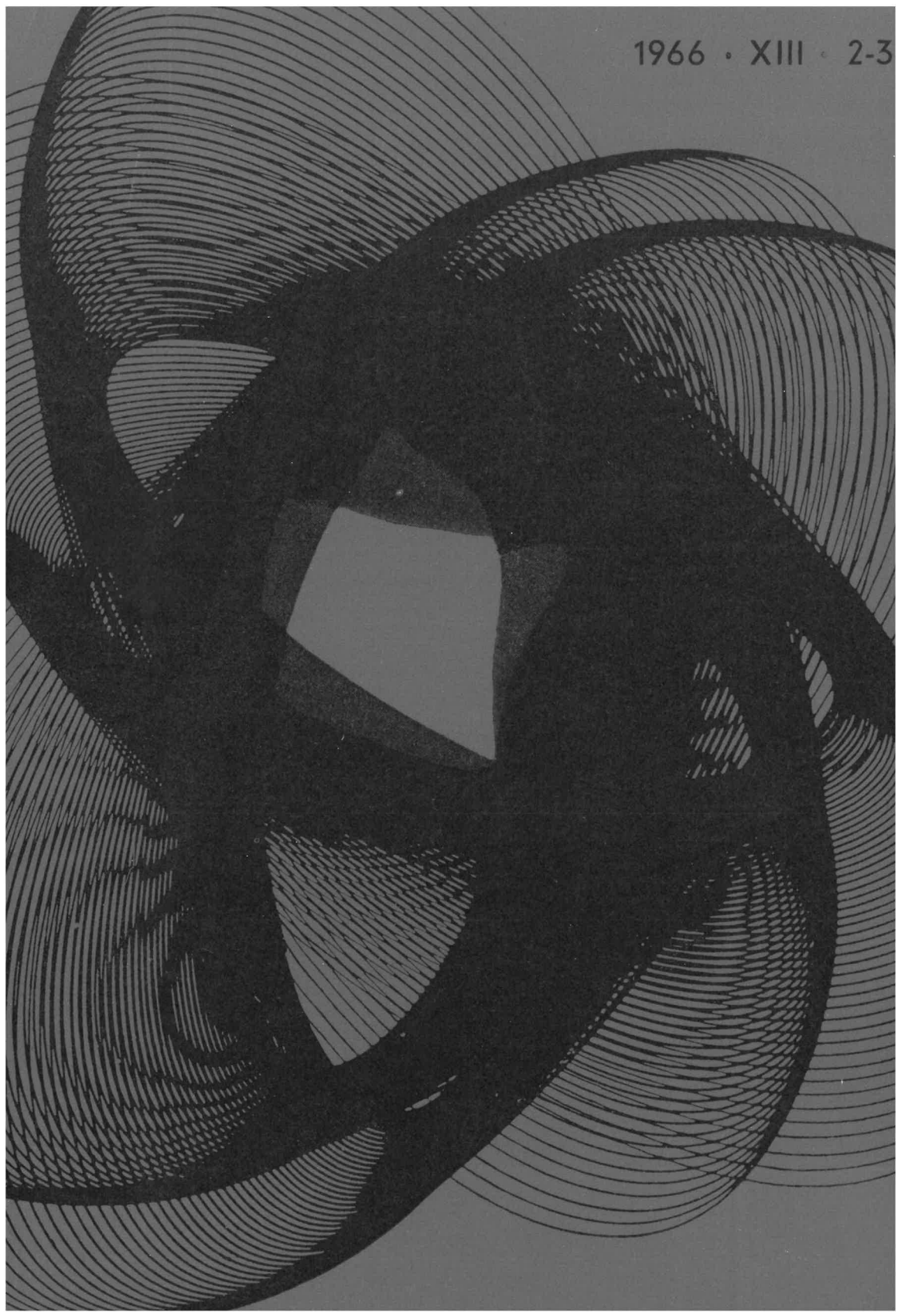




OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XIII. LETNIK — 2-3. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, NOVEMBER 1966

VSEBINA

Članki	Stran
Osnovni pojmi matematične statistike (R. Jamnik)	49
Teorija stabilnosti (G. Tomšič)	67
Poskusi na ljubljanskem reaktorju (F. Žerdin in Z. Gabrovšek)	81
Šola	
Uporaba elektronskega računalnika pri pouku matematike na eko- nomski fakulteti (A. Vadnal)	90
Domače vesti	
Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS (C. Velkovrh)	91
Na univerzi v Ljubljani so diplomirali iz fizike	94
Nove knjige	96

CONTENTS

Articles	Page
Fundamental Notions of Mathematical Statistics (R. Jamnik)	49
Theory of Stability (G. Tomšič)	67
Experiments on the Reactor of Ljubljana (F. Žerdin and Z. Gabrovšek) .	81
School	90
Home News	91
New Books	96

OSNOVNI POJMI MATEMATIČNE STATISTIKE

RAJKO JAMNIK

V zadnjih letih je tudi pri nas opaziti, da v vrsti znanstvenih disciplin vse bolj prehajajo h kvantitativnemu obravnavanju pojavov. Gre predvsem za stroke (ekonomika, biotehniške vede, medicina, sociologija, psihologija ipd.), v katerih se ne da eksperimentirati tako kot, recimo, v mehaniki. V le-tej je mogoče ugotavljati odvisnost med dvema spremenljivkama pri konstantnih vrednostih drugih spremenljivk, ki so morda tudi prisotne v eksperimentu. V strokah, ki sem jih omenil prej, pa so pri pojavih zmeraj udeležene tudi količine slučajne narave. Vplivu teh se je mogoče deloma izogniti tako, da poskus večkrat ponovimo, nato pa rezultate statistično obdelamo. To je edina možnost, da se kvantitativno lotimo pojavov, katerih slučajna narava ne pomeni le neznatnih motenj v sicer zakonitem dogajanju, temveč nanj bistveno vpliva, in kjer poskusov ni mogoče ponoviti tako rekoč neskončno velikokrat. Po povedanem je razumljivo, da postajajo statistične metode vse bolj pomembno raziskovalno orodje. Kljub temu pa je njihovo matematično ozadje pri nas razmeroma malo znano, tudi med matematiki. Namen tega sestavka je deloma izpolniti to vrzel. V njem bomo očrtali nekaj vprašanj, ki se z njimi ubada matematična statistika, in skušali nanje tudi odgovoriti. Pri dokazovanju bomo pokazali tudi nekatere delovne metode matematične statistike.

1. Opisovanje podatkov

Najpreprostejša situacija, ki se v njej uporabljajo statistične metode, je tale. Dana je neka množica elementov e , imenujmo jo, kot je v statistiki v navadi, *populacija*. Na populaciji je definirana realna funkcija $\xi = f(e)$. Vrednost spremenljivke ξ je odvisna od vzrokov, ki so za vse elemente v populaciji skupni, poleg tega pa še od med seboj neodvisnih individualnih vzrokov. Zato ni mogoče vnaprej reči, kakšno vrednost ima ξ na izbranem elementu populacije, temveč le oceniti verjetnost za to, da bo njena vrednost taka in taka. Potemtakem imamo lahko ξ za slučajno spremenljivko v verjetnostnem smislu.

Vzemimo za primer populacijo vseh dečkov v Sloveniji, ki so stari vsaj 10, toda manj kot 11 let. Spremenljivka ξ bodi njihova teža. Ta je gotovo odvisna od starosti, torej od znaka, ki definira populacijo, poleg tega pa še od dednih vplivov, načina prehrane, drugih življenjskih razmer in podobno, ti dejavniki pa se očitno spreminjajo od dečka do dečka.

Vzemimo, da je v populaciji n elementov, spremenljivka ξ pa ima na njej vrednosti

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

Zaloga vrednosti (1) je osnovni statistični material. Če je n veliko število, je ta material dokaj nepregleden. Prva naloga statistike je zato opisati statistični material. To se napravi tako, kot se pač opisujejo slučajne spre-

menljivke: ugotovi se porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke ξ in, če smo bolj skromni, določijo se nekatere njene številske karakteristike.

Porazdelitveni zakon spremenljivke ξ dobimo pri majhnem n kaj preprosto. Recimo, da zavzame ξ različne vrednosti $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ ($k \leq n$), in sicer n_i -krat vrednost x_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Zaznamujmo z

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

relativno frekvenco vrednosti x_i . Tedaj je

$$P(\xi = x_i) = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (2)$$

iskani porazdelitveni zakon. Pri velikih n ravnamo navadno drugače. Tu razdelimo interval $[x_1, x_k]$ na primerno število, recimo m (navadno 10–20), razredov z enako širino $(x_k - x_1)/m$. Spremenljivka ξ naj n_i -krat zavzame vrednost, ki spada v i -ti razred ($i = 1, 2, \dots, m$), in naj bo $f_i = n_i/n$ relativna frekvenca i -tega razreda. Potem je porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke ξ podan z zapisom

$$P \left[x_1 + (i-1) \frac{x_k - x_1}{m} \leq \xi < x_1 + i \frac{x_k - x_1}{m} \right] = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

Res je s tem popisana porazdelitev slučajne spremenljivke le približno, toda zato veliko preglednejše kot z natančnim zapisom (2).

Iz porazdelitvenega zakona lahko takoj dobimo številske karakteristike slučajne spremenljivke ξ . Omejimo se tu le na matematično upanje ali povprečno vrednost $M\xi$ in disperzijo $\sigma^2(\xi)$. Prva označuje, kot se reče, centralno tendenco slučajne spremenljivke ξ , druga pa njeno razpršenost okrog povprečne vrednosti. Če je dan porazdelitveni zakon v obliki (2), je

$$M\xi = \sum_{i=1}^k x_i f_i \quad \sigma^2(\xi) = \sum_{i=1}^k (x_i - M\xi)^2 f_i \quad (4)$$

Pri porazdelitvenem zakonu (3) vzamemo, da so vse vrednosti v istem razredu enake sredini razreda:

$$x_i^* = x_1 + \frac{(2i-1)(x_k - x_1)}{2m} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Potem je spet

$$M\xi = \sum_{i=1}^m x_i^* f_i \quad \sigma^2(\xi) = \sum_{i=1}^m (x_i^* - M\xi)^2 f_i \quad (5)$$

Treba je poudariti, da vrednosti, izračunani po predpisu (5), nista natančni. Napaka je pri $M\xi$ ponavadi neznatna, pri $\sigma^2(\xi)$ pa jo je mogoče včasih popraviti. To možnost samo omenjamo, s podrobnostmi se ne utegnemo ukvarjati. Tudi ne bomo opisovali metod, ki računanje $M\xi$ in $\sigma^2(\xi)$ kolikor se da olajšajo.

2. Ocenjevanje parametrov

Opisovanje podatkov je z matematičnega gledišča prav nezanimivo opravilo. Toda pred statistiko so tudi resnejše naloge. Vzemimo, da je dana populacija z zelo veliko ali celo neskončno močjo in na tej populaciji naj bo

definirana slučajna spremenljivka ξ . Zdaj je zelo zamudno ali celo nemogoče ugotoviti porazdelitveni zakon in številske karakteristike spremenljivke ξ tako, da bi ugotavljali njeno vrednost na vsakem elementu v populaciji. Tedaj ravnamo tako, da iz populacije izberemo primerno manjše število, recimo n , elementov in ugotovimo vrednost spremenljivke ξ le na njih. Izbrani elementi sestavljajo *vzorec*. Izbiranje elementov za vzorec opravimo na slepo, se pravi tako, da ima vsak element iz populacije enako možnost, da bo izbran. Kako se to napravi kar najbolj preprosto, je tu postranskega pomena. Vzorec, izbran na slepo, imenujemo *slučajni vzorec*. Zdaj je vprašanje, kako se dajo na podlagi vrednosti, ki jih ima slučajna spremenljivka na slučajnem vzorcu, oceniti porazdelitveni zakon in številske karakteristike slučajne spremenljivke na populaciji in kako zanesljive so te ocene. Vzemimo, da je porazdelitveni zakon porazdelitvena funkcija $F(x) = P(\xi \leq x)$. Pri njem nas zanima oblika funkcije F , poleg nje pa še parametri, ki nastopajo v F , saj se z njimi izraža večina številskih karakteristik slučajne spremenljivke.

Vzeli bomo le možnost, da nam je tip porazdelitvenega zakona znan in da je treba na podlagi vzorca oceniti njegove parametre. To bomo napravili za praktično najpomembnejši primer, da je slučajna spremenljivka ξ na populaciji porazdeljena normalno, se pravi z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \quad (6)$$

Kot je znano, je a matematično upanje in σ^2 disperzija normalno porazdeljene slučajne spremenljivke. Za ta dva parametra je treba dobiti primerno oceno na podlagi slučajnega vzorca z n elementi, ali drugače rečeno, na podlagi n neodvisnih realizacij $x_1, x_2, \dots, x_n$ slučajne spremenljivke ξ . Nalogo si za začetek še olajšajmo, in sicer vzemimo, da je znan tudi parameter σ in je treba oceniti le a .

Iz vzorca lahko izračunamo povprečno vrednost

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Količina $\bar{x}$ je spet slučajna spremenljivka, saj je njena vrednost odvisna od vzorca, ta pa je bil izbran slučajno. Določimo porazdelitveni zakon za $\bar{x}$. Vsaka od realizacij x_k je slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu (6). Količina

$$\eta = \sum_{k=1}^n x_k$$

je torej vsota n neodvisnih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Kot je znano, je taka količina tudi normalno porazdeljena, njeno matematično upanje je

$$M\eta = \sum_{k=1}^n Mx_k = na$$

disperzija pa

$$\sigma^2(\eta) = \sum_{k=1}^n \sigma^2(x_k) = n\sigma^2$$

Potemtakem je tudi $\bar{x} = \eta/n$ normalno porazdeljena slučajna spremenljivka z matematičnim upanjem

$$M\bar{x} = M\left(\frac{\eta}{n}\right) = \frac{1}{n} M\eta = a \quad (7)$$

in disperzijo

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{\eta}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sigma^2(\eta) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Če je iz vzorca dobljena ocena kaknega parametra taka, da je njeno matematično upanje enako dejanski vrednosti tistega parametra, rečemo, da je ocena *nepristranska*. Relacija (7) kaže, da je vzorčno povprečje nepristranska ocena za matematično upanje slučajne spremenljivke ξ .

Oglejmo si še neko lastnost ocene $\bar{x}$. Naj bo ε dano pozitivno število. Izračunajmo verjetnost za to, da je $|x - a| < \varepsilon$:

$$P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Postavimo $(x - a)\sqrt{n} = \sigma t$; potem je

$$P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n}/\sigma} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Torej je, če je ε še tako majhno pozitivno število,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1 \quad (8)$$

Kadar ocena po verjetnosti konvergira k pravi vrednosti parametra, ko večamo velikost vzorca, pravimo, da je ocena *dosledna*. Relacija (8) torej pomeni, da je $\bar{x}$ dosledna ocena za a .

Pri oceni nas zanima še, kako velika je njena disperzija. Izmed vseh mogočih ocen je v tem pogledu najbolj ugodna tista, ki ima najmanjšo disperzijo. Za tako oceno rečemo, da je *učinkovita*. Povejmo brez dokaza, da je $\bar{x}$ tudi učinkovita ocena parametra a .

Izkoristimo zdaj spoznanje, da je $\bar{x}$ normalno porazdeljena slučajna spremenljivka z matematičnim upanjem a in disperzijo σ^2/n . Slučajna spremenljivka

$$\zeta = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{x} - a)$$

je porazdeljena standardizirano normalno, se pravi z matematičnim upanjem 0 in disperzijo 1. Naj bo p dano število med 0 in 1 in e_p rešitev enačbe

$$P(|\zeta| > e_p) = p \quad (9)$$

To rešitev lahko najdemo v tabelah za funkcijo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Enačba (9) se prebere tako: Verjetnost za to, da je $|\bar{x} - a| > e_p \sigma / \sqrt{n}$, je enaka p . Zato lahko z verjetnostjo $1 - p$ sodimo, da je prava vrednost a , ki je sicer ne poznamo, na intervalu

$$\left(\bar{x} - \frac{e_p \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{e_p \sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (10)$$

Ta interval imenujemo *interval zaupanja s tveganjem p* . Kako veliko tveganje dovolimo, je odvisno od okoliščin. Navadno je $p \leq 0,05$, najpogosteje ali 0,05 ali 0,01 ali 0,001. Ocena $\bar{x}$ očitno ni nikdar popolnoma zanesljiva, celo če se odpovemo natančni vrednosti a in se zadovoljimo z nekim končnim intervalom, na katerem naj bi ležala vrednost a . Iz (10) se vidi, da je pri dani stopnji tveganja interval zaupanja tem ožji, čim večji je vzorec.

Interval zaupanja za a s predpisano stopnjo tveganja je mogoče določiti, če je znana disperzija slučajne spremenljivke ξ . Navadno pa je tako, da sta neznan oba parametra, a in σ^2 . Kako bi v tem primeru s slučajnim vzorcem ocenili matematično upanje in disperzijo? Lotimo se najprej disperzije. Vzemimo spet, da je za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko ξ s porazdelitvenim zakonom (6) znan vzorec iz n neodvisnih realizacij $x_1, x_2, \dots, x_n$ in da je $\bar{x}$ povprečna vrednost vzorca. Oglejmo si količino

$$\zeta_k = x_k - \bar{x} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Njeno matematično upanje je

$$M\zeta_k = Mx_k - M\bar{x} = 0 \quad (11)$$

disperzija pa

$$\sigma^2(\zeta_k) = \sigma^2 \left(x_k - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) = \sigma^2 \left[\frac{x_1 + \dots + (n-1)x_k + \dots + x_n}{n} \right]$$

Členi v zadnjem oklepaju so neodvisni, zato je

$$\sigma^2(\zeta_k) = \frac{1}{n^2} [(n-1)^2 \sigma^2 + (n-1) \sigma^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Od tod in iz (11) sledi

$$M(x_k - \bar{x})^2 = M\zeta_k^2 = \sigma^2(\zeta_k) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Zato je

$$M \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(x_k - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Potemtakem je količina

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

taka slučajna spremenljivka, da je njeno matematično upanje ravno disperzija σ^2 slučajne spremenljivke ξ . Drugače rečeno, s^2 je nepristranska ocena za parameter σ^2 . Kot vidimo, se nepristranska ocena za disperzijo slučajne spremenljivke ξ razločuje od vzorčne disperzije

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

Seve je razloček upoštevanja vreden le pri majhnih n .

Da bomo dobili interval zaupanja za disperzijo, poiščimo porazdelitveni zakon za slučajno spremenljivko

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{x_k - \bar{x}}{\sigma} \right]^2$$

Vrednost spremenljivke χ^2 ni odvisna od tega, kako merimo spremenljivko ξ . Zato smemo vzeti, da ima ξ matematično upanje 0 in disperzijo 1. Tedaj je

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \sum_{k=1}^n x_k + n\bar{x}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{n} (\sum x_k)^2 \end{aligned}$$

vsak x_k pa je porazdeljen po zakonu

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Ker so slučajne spremenljivke $x_1, x_2, \dots, x_n$ neodvisne, je porazdelitveni zakon slučajnega vektorja $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)}$$

in je pri vsakem $v > 0$

$$\begin{aligned} F(v) &= P(\chi^2 < v) = \int_{\chi^2 < v} p(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n \dots du_2 du_1 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\chi^2 < v} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)} du_n \dots du_2 du_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Na desni strani te relacije je n -termni integral po n -razsežnem območju, ki ga omejuje ploskev drugega reda z enačbo

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{n} (\sum x_k)^2 = v$$

in ugotovimo porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke χ_{n-1}^2 . Vzemimo najprej $n = 2$. Tedaj je $\chi_1^2 = y_1^2$. Dogodek $\chi_1^2 < 0$ je nemogoč, pri vsakem $x > 0$ pa je

$$F_1(x) = P(\chi_1^2 < x) = P(-\sqrt{x} < y_1 < \sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dz$$

Gostota verjetnosti za slučajno spremenljivko χ_1^2 je torej

$$p_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Naj bosta α in β med seboj neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni po zakonu

$$p_m(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

prva s parametrom $m = r$, druga pa z $m = s$; vrednosti r in s naj bosta poljubni naravni števili, $\Gamma(c)$ pa je znana funkcija

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x} dx$$

Poiščimo gostoto verjetnosti za slučajno spremenljivko $\gamma = \alpha + \beta$. Ker sta α in β neodvisni, je p_γ konvolucija gostot p_r in p_s , to se pravi, pri vsakem pozitivnem x je

$$p_\gamma(x) = \int_{-\infty}^\infty p_r(t) p_s(x-t) dt$$

ali izpisano

$$p_\gamma(x) = \frac{1}{2^{(r+s)/2} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t} (x-t)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(x-t)} dt \quad (17)$$

Meji v zadnjem integralu smo dobili iz okoliščine, da je $p_r(t) \neq 0$ le pri $t > 0$ in $p_s(x-t) \neq 0$ le, če je $x-t > 0$. Vpeljimo v integralu (17) novo spremenljivko $z = t/x$. Potem je

$$p_\gamma(x) = \frac{x^{\frac{r+s}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}}{2^{(r+s)/2} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^1 z^{\frac{r}{2}-1} (1-z)^{\frac{s}{2}-1} dz$$

Očitno je

$$\int_0^1 z^{\frac{r}{2}-1} (1-z)^{\frac{s}{2}-1} dz = B\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)$$

in je zato

$$p_r(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{(r+s)/2} \Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)} x^{\frac{r+s}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Od tod vidimo, da je vsota dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih po zakonu (16), tudi porazdeljena po tem zakonu, parameter porazdelitve za vsoto pa je ravno vsota parametrov za oba člena. Pri $m = 1$ je porazdelitev (16) identična s porazdelitvijo (15). Iz tega in iz (18) sklepamo, da je slučajna spremenljivka $\chi^2 = y_1^2 + y_2^2$ porazdeljena po zakonu (16) s parametrom $m = 2$, slučajna spremenljivka χ^2 porazdeljena po zakonu (16) s parametrom $m = 3$ in tako naprej. Slučajna spremenljivka χ_{n-1}^2 ima torej porazdelitveni zakon (16) s parametrom $m = n - 1$. Imenujemo ga *porazdelitev χ^2 z $n - 1$ prostostnimi stopnjami*. Z atributom »z $n - 1$ prostostnimi stopnjami« hočemo povedati, da gre za porazdelitev neke funkcije $n - 1$ neodvisnih slučajnih spremenljivk.

Zdaj, ko nam je znana porazdelitev količine $\chi^2 = (n - 1) s^2 / \sigma^2$, pa že lahko določimo interval zaupanja za disperzijo slučajne spremenljivke ξ . Naj bo spet p poljubno število med 0 in 1, h_b rešitev enačbe

$$P(\chi^2 < h_b) = \frac{p}{2}$$

in h_a število, ki ga določa relacija

$$P(\chi^2 > h_a) = \frac{p}{2}$$

Tedaj je

$$P\left(h_a < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < h_b\right) = 1 - p$$

se pravi,

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{h_b} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{h_a}\right) = 1 - p$$

Potemtakem je

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{h_b}, \frac{(n-1)s^2}{h_a}\right)$$

interval zaupanja za σ^2 s tveganjem p .

Porazdelitev χ^2 je odvisna od števila prostostnih stopenj, torej od velikosti vzorca. Poglejmo, kako se spreminja porazdelitveni zakon (16), če m neome-

jeno raste. V ta namen najprej izračunajmo karakteristično funkcijo, se pravi Fourierovo transformacijo, zakona (16):

$$f(t) = M e^{it\chi_m^2} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x + itx} dx$$

Vpeljimo novo spremenljivko $u = \frac{1-2it}{2}x$; potem je

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(1-2it)^{m/2}} \int_{\left(\frac{1}{2}-it\right)^0}^{\left(\frac{1}{2}-it\right)^\infty} u^{\frac{m}{2}-1} e^{-u} du$$

Zadnji integral ima, kot se ni težko prepričati, vrednost $\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$. Torej je

$$f(t) = \frac{1}{(1-2it)^{m/2}}$$

Od tod dobimo z odvajanjem

$$M \chi_m^2 = \frac{1}{i} f'(0) = m$$

$$M (\chi_m^2)^2 = -f''(0) = m(m+2)$$

$$\sigma^2(\chi_m^2) = M (\chi_m^2)^2 - M^2 \chi_m^2 = 2m$$

Zdaj lahko zapišemo karakteristično funkcijo $f_m(t)$ za slučajno spremenljivko $\varrho_m = (\chi_m^2 - m)/\sqrt{2m}$:

$$\begin{aligned} f_m(t) &= M e^{i\varrho_m t} = e^{-it/\sqrt{m/2}} M e^{it\chi_m^2/\sqrt{2m}} = \\ &= e^{-it/\sqrt{m/2}} f\left(\frac{t}{\sqrt{2m}}\right) = \frac{e^{-it/\sqrt{m/2}}}{(1-it/\sqrt{2m})^{m/2}} \end{aligned}$$

Torej je

$$\ln f_m(t) = -it \sqrt{\frac{m}{2}} - \frac{m}{2} \ln \left(1 - it \sqrt{\frac{2}{m}}\right)$$

Pri vsakem fiksiiranem realnem t je za vse zadosti velike m

$$\left| t \sqrt{\frac{2}{m}} \right| < 1$$

Za take m je

$$\begin{aligned}\ln f_m(t) &= -it \sqrt{\frac{m}{2}} - \frac{m}{2} \left(-it \sqrt{\frac{2}{m}} - \frac{i^2 t^2}{2} \frac{2}{m} - \frac{i^3 t^3}{3} \sqrt{\frac{8}{m^3}} - \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\end{aligned}$$

Potemtakem je na vsakem končnem intervalu za t enakomerno

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t) = e^{-\frac{1}{2} t^2} = g(t)$$

Zato je tudi limita $g(t)$ karakteristična funkcija nekega porazdelitvenega zakona $p(x)$. Z lahkim računom dobimo

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - \frac{1}{2} t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

Porazdelitveni zakon spremenljivke ϱ_m torej z rastočim m konvergira proti standardizirani normalni porazdelitvi. Pri velikih m zato lahko vzamemo

$$\chi_m^2 = m + \varrho \sqrt{2m}$$

Pri tem je ϱ standardizirano normalno porazdeljena slučajna spremenljivka.

Vzemimo spet, da o normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki ξ nimamo druge informacije kot njen slučajni vzorec z n elementi, in ocenimo na podlagi tega matematično upanje a . V ta namen sestavimo iz ocen $\bar{x}$ in s slučajno spremenljivko

$$t = \frac{\bar{x} - a}{s} \sqrt{n}$$

in poiščimo njen porazdelitveni zakon.

Premaknimo najprej merilo tako, da bo $a = 0$, torej

$$t = \frac{\bar{x} \sqrt{n}}{s} \quad (19)$$

in pomnožimo v (19) števec in imenovavec s $\sqrt{n-1}$

$$t = \frac{\bar{x} \sqrt{n^2 - n}}{s \sqrt{n-1}}$$

Količina t ni odvisna od tega, s kakšno enoto merimo ξ . Zato smemo vzeti $\sigma^2 = 1$. Tedaj je

$$s \sqrt{n-1} = \chi$$

z $n-1$ prostostnimi stopnjami.

Prepričajmo se, da sta slučajni spremenljivki $\bar{x}$ in $\chi^2 = (n-1)s^2$ med seboj neodvisni. Naj bodo a, b in c poljubna realna števila; očitno je

$$P = P(\chi^2 < a, b \leq \bar{x} < c) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\substack{\chi^2 \leq a \\ b \leq \bar{x} < c}} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + \dots + u_n^2)} du_n \dots du_1$$

Če uporabimo v integralu na desni transformacijo (13), dobimo

$$P = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_G e^{\frac{1}{2}(u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2)} du_{n-1} \dots du_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b/\sqrt{n}}^{c/\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}u_n^2} du_n$$

V prvem integralu na desni je G množica točk, za katere je $u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 < a$. Zadnja relacija nam kaže, da je

$$P(\chi^2 < a, b \leq \bar{x} < c) = P(\chi^2 < a) P(b \leq \bar{x} < c)$$

To pa ravno pomeni, da sta χ^2 in $\bar{x}$ neodvisni slučajni spremenljivki.

Ugotovimo porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke $\beta = \bar{x} \sqrt{n^2 - n}$. Pri vsakem realnem x je

$$P(\beta < x) = P\left(\bar{x} < \frac{x}{\sqrt{n^2 - n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{n^2 - n}} e^{-\frac{nz^2}{2}} dz$$

in zato, če postavimo še $n-1 = f$,

$$p_\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f}} e^{-\frac{x^2}{2f}} \quad (20)$$

Slučajni spremenljivki β in χ^2 sta seve tudi neodvisni. Zato je gostota verjetnosti $p(u, v)$ slučajnega vektorja (β, χ^2) produkt gostot za obe komponenti:

$$p(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2^{f+1} \pi f} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} e^{-\frac{u^2}{2f}} v^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}$$

Zdaj bomo že lahko našli porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke t . Očitno je $t = \beta/\chi$ in je pri vsakem realnem x

$$\begin{aligned} P(t < x) &= P(\beta < x\sqrt{\chi^2}) = \frac{1}{\sqrt{2^{f+1} \pi f} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \iint_{u < x\sqrt{v}} e^{-\frac{u^2}{2f}} v^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} du dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{f+1} \pi f} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_0^\infty v^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} dv \int_{-\infty}^{x\sqrt{v}} e^{-\frac{u^2}{2f}} du \end{aligned}$$

Da dobimo v drugem integralu na desni zgornjo mejo neodvisno od parametra v , postavimo $u = z \sqrt{v}$. Tedaj je

$$P(t < x) = \frac{1}{\sqrt{2^{f+1}} \pi f \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_0^\infty v^{\frac{f-1}{2}} e^{-\frac{v}{2}} dv \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2 v}{2f}} dz$$

Tu lahko integriramo v poljubnem vrstnem redu. Zato je tudi

$$P(t < x) = \frac{1}{\sqrt{2^{f+1}} \pi f \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_{-\infty}^x dz \int_0^\infty v^{\frac{f-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z^2}{f}\right)v} dv$$

V integralu

$$G(z) = \int_0^\infty v^{\frac{f-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z^2}{f}\right)v} dv$$

vpeljimo novo spremenljivko $y = \left(1 + \frac{z^2}{f}\right) \frac{v}{2}$ pa dobimo

$$\begin{aligned} G(z) &= \sqrt{2^{f+1}} \left(1 + \frac{z^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}} \int_0^\infty y^{\frac{f-1}{2}} e^{-y} dy = \\ &= \sqrt{2^{f+1}} \Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right) \left(1 + \frac{z^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}} \end{aligned}$$

Torej je

$$P(t < x) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi f} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_0^x \left(1 + \frac{z^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}} dz$$

in slučajna spremenljivka t ima gostoto verjetnosti

$$p_t(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi f} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}$$

To je tako imenovana *Studentova porazdelitev* z f prostostnimi stopnjami.

S Studentovo porazdelitvijo je mogoče določiti interval zaupanja za matematično upanje, tudi če disperzija ni znana. Naj bo spet p poljubno število med 0 in 1 in t_p rešitev enačbe

$$P(|t| > t_p) = p$$

Tedaj je

$$P\left(-t_p < \frac{a - \bar{x}}{s} \sqrt{n} < t_p\right) = 1 - p$$

in je

$$\left(\bar{x} - \frac{st_p}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{st_p}{\sqrt{n}}\right)$$

interval zaupanja za parameter a s tveganjem p .

Bravec se sam lahko prepriča, da konvergira Studentova porazdelitev z rastočim f proti standardizirani normalni porazdelitvi. Zato smemo, če je vzorec velik, pri določanju intervala zaupanja za a vzeti, da je disperzija σ^2 znana, namreč enaka s^2 .

3. Razločki med parametri

Vzemimo, da imamo za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko ξ znani dve skupini realizacij,

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{in} \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

in da so realizacije med seboj v celoti neodvisne. Za vsako od teh skupin lahko določimo vzorčno povprečje

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$$

in nepristranski oceni za disperzijo

$$s_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})^2 \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2$$

Izračunajmo za zadnji oceni še povprečno vrednost

$$s^2 = \frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{(m-1) + (n-1)} = \frac{1}{m+n-2} \left[\sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})^2 + \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 \right]$$

Sestavimo iz količin $\bar{x}$, $\bar{y}$ in s^2 slučajno spremenljivko

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \quad (21)$$

in poiščimo njen porazdelitveni zakon.

Količina t je neodvisna od merila za ξ , zato lahko vzamemo, da je slučajna spremenljivka ξ porazdeljena standardizirano normalno. Tedaj je

$$(m-1) s_x^2 = \sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})^2 = \chi_{m-1}^2$$

$$(n-1) s_y^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 = \chi_{n-1}^2$$

Dogovorimo se za oznake $m-1 = g$, $n-1 = h$, $m+n-2 = g+h = f$. Vemo že, da sta slučajni spremenljivki $\bar{x}$ in χ_g^2 med seboj neodvisni, prav tako pa tudi $\bar{y}$ in χ_h^2 . Spremenljivke $\bar{x}$, χ_g^2 , $\bar{y}$ in χ_h^2 so celo neodvisne v celoti, saj izvirata zadnji dve iz vzorca, ki je neodvisen od vzorca, od koder dobimo prvi dve. Slučajna spremenljivka

$$\chi_f^2 = (m+n-2) s^2 = \chi_g^2 + \chi_h^2$$

je torej vsota dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta porazdeljeni po zakonu χ^2 z g in h prostostnimi stopnjami, zato je po formuli (18) tudi sama porazdeljena po tem zakonu, in sicer z $g+h = f$ prostostnimi stopnjami. Slučajna spremenljivka

$$\delta = \bar{x} - \bar{y}$$

je razlika dveh neodvisnih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki imata obe matematično upanje 0, njuni disperziji pa sta $1/m$ in $1/n$. Potem, takem je tudi δ porazdeljena normalno, njeno matematično upanje je 0, disperzija pa $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Očitno je

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) s^2 = \frac{m+n}{mn} \cdot \frac{\chi_f^2}{m+n-2} = \frac{m+n}{mn} \frac{\chi_f^2}{f} = \sigma^2(\delta) \frac{\chi_f^2}{f}$$

Torej je $t = \frac{\delta \sqrt{f}}{\sigma(\delta) \chi_f}$. Če postavimo še $\frac{\delta \sqrt{f}}{\sigma(\delta)} = \psi$, lahko izrazimo t v obliki

$$t = \frac{\psi}{\chi_f} \quad (22)$$

torej kot kvocient dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk. Narava spremenljivke χ_f nam je že znana, spremenljivka ψ pa je porazdeljena po zakonu

$$P(\psi < x) = P\left(\delta < \frac{x\sigma(\delta)}{\sqrt{f}}\right) = \frac{1}{\sigma(\delta)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x\sigma(\delta)/\sqrt{f}} e^{-u^2/2\sigma^2(\delta)} du$$

ali drugače zapisano,

$$p_\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f}} e^{-\frac{x^2}{2f}}$$

To je očitno porazdelitveni zakon (20). Zato je t iz (22) porazdeljen prav tako kot t iz (19), se pravi po Studentovem zakonu z f prostostnimi stopnjami.

Spoznanje, do katerega smo pravkar prišli, nam pomaga v takem položaju: Vsi elementi v populaciji imajo neki merljiv znak ξ . Populacija je glede na kak drug znak η razdeljena v dve delni populaciji, na vsaki od njih pa je znak ξ porazdeljen vsaj približno normalno. Ali vrednost znaka η kaj vpliva na porazdelitev znaka ξ , se pravi na njegove parametre? Da odgovorimo na to vprašanje, izberemo iz vsake delne populacije slučajni vzorec za ξ in primerjamo vzorčni povprečji $\bar{x}$ in $\bar{y}$. V ta namen izračunamo iz vzorcev količino t po formuli (21), izberemo poljubno število p med 0 in 1 (navadno ali 0,05 ali 0,01 ali 0,001) in primerjamo izračunani t s t_p , ki ustreza relaciji $P(|t| > t_p) = p$. Potem sklepamo: Če je p majhen in $|t| > t_p$, je zelo malo verjetno, da je tako velik razloček med $\bar{x}$ in $\bar{y}$ posledica slučajnega izbiranja vzorcev, temveč je veliko verjetneje, da izvira iz dejanskega razločka med matematičnima upanjema spremenljivke ξ na obeh delnih populacijah. Tako situacijo opišemo z izjavo, da se $\bar{x}$ in $\bar{y}$ med seboj *značilno razločujeta* s tveganjem p . Če pa je $|t| < t_p$, pravimo, da razloček med ocenama $\bar{x}$ in $\bar{y}$ ni značilen. S tem hočemo povedati, da zbrani podatki ne zadoščajo, da bi zavrnili hipotezo, da ima ξ na eni delni populaciji enako matematično upanje kot na drugi.

Opisani način sklepanja je v uporabah statistike zelo pogost. Rečemo mu *preskušanje hipotez*. V tem sestavku se z njim ne moremo ukvarjati podrobneje.

Podobno kot razloček med vzorčnima povprečjema lahko ocenimo tudi razloček med nepristranskima ocenama disperzije. Vzemimo spet, da je spremenljivka ξ porazdeljena normalno; zanjo imamo znana dva neodvisna vzorca, prvega z močjo m , drugega z močjo n . Iz vzorcev izračunamo oceni s_1^2 in s_2^2 za disperzijo. Iz njih sestavimo slučajno spremenljivko

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka F ? Poiščimo najprej porazdelitveni zakon za slučajno spremenljivko

$$\zeta = \frac{(m-1)s_1^2}{(n-1)s_2^2} = \frac{gs_1^2/\sigma^2}{hs_2^2/\sigma^2} = \frac{\chi_g^2}{\chi_h^2}$$

Spremenljivki χ_g^2 in χ_h^2 sta med seboj neodvisni, zato je slučajni vektor (χ_g^2, χ_h^2) porazdeljen po zakonu

$$p(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{f/2} \Gamma\left(\frac{g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)} u^{\frac{g}{2}-1} v^{\frac{h}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(u+v)} & u, v > 0 \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

Pri vsakem $x > 0$ je

$$\begin{aligned}
 P(\zeta < x) &= \frac{1}{2^{f/2} \Gamma\left(\frac{g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)} \iint_{u < xv} u^{\frac{g}{2}-1} v^{\frac{h}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(u+v)} du dv = \\
 &= \frac{1}{2^{f/2} \Gamma\left(\frac{g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)} \int_0^\infty v^{\frac{h}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}v} dv \int_0^{xv} u^{\frac{g}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du
 \end{aligned}$$

Postavimo v zadnjem integralu na desni $u = vz$, pa dobimo

$$P(\zeta < x) = \frac{1}{2^{f/2} \Gamma\left(\frac{g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)} \int_0^x z^{\frac{g}{2}-1} dz \int_0^\infty v^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+z)v} dv$$

Vpeljimo v integralu

$$H(z) = \int_0^\infty v^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+z)v} dv$$

ново spremenljivko $\frac{1}{2}(1+z)v = t$; potem je

$$H(z) = \frac{2^{f/2} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}{(1+z)^{f/2}}$$

Torej je

$$P(\zeta < x) = \frac{1}{B\left(\frac{g}{2}, \frac{h}{2}\right)} \int_0^x \frac{z^{\frac{g}{2}-1}}{(1+z)^{f/2}} dz$$

Od tod dobimo pri vsakem $x > 0$

$$P(F < x) = P\left(\zeta < \frac{gx}{h}\right) = \frac{1}{B\left(\frac{g}{2}, \frac{h}{2}\right)} \int_0^{gx/h} \frac{z^{\frac{g}{2}-1}}{(1+z)^{f/2}} dz$$

in

$$p_F(x) = \frac{g^{\frac{g}{2}-1} h^{\frac{h}{2}-1}}{B\left(\frac{g}{2}, \frac{h}{2}\right)} \frac{x^{\frac{g}{2}-1}}{(h+gx)^{f/2}}$$

Po tem, tako imenovanem zakonu F je torej porazdeljen kvocijent med dvema neodvisnima nepristranskima ocenama za disperzijo normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

Na podlagi te porazdelitve ocenimo razloček med ocenama disperzije skoraj tako, kot smo ocenili razloček med vzorčnima povprečjema s Studentovo porazdelitvijo. Najprej izračunamo F , in sicer vzamemo za s_1^2 zmeraj večjo oceno. Nato predpišemo tveganje p in izračunamo (ali poiščemo v tabelah) vrednost F_p , ki zadošča zahtevi $P(F > F_p) = p$. Če je $F > F_p$, sodimo, da se oceni disperzije med seboj značilno razločujeta, če pa je $F < F_p$, odločimo, da razloček ni značilen. Pomen obeh izjav je prav tak, kot je bil pri ocenjevanju povprečnih vrednosti.

TEORIJA STABILNOSTI

GABRIJEL TOMŠIČ

1. Uvod

Pri praktičnih nalogah, ki jih rešujemo z diferencialnimi enačbami, so med drugimi konstantami tudi začetni pogoji navadno podani empirično. Empirični podatki so dani z večjo ali manjšo natančnostjo. Kot vemo, so rešitve diferencialnih enačb odvisne od začetnih pogojev. Pojavi se torej vprašanje, v kakšni meri vplivajo spremembe začetnih pogojev na rešitev ustrezne diferencialne enačbe. Če že majhna sprememba začetnih pogojev močno vpliva na rešitev, potem taka rešitev, ki jo dobimo z nenatančnimi začetnimi pogoji gotovo nima nobenega praktičnega pomena. Če se zaradi majhne spremembe začetnih pogojev rešitev le malo spremeni, pravimo, da je rešitev stabilna. V nasprotnem primeru je rešitev nestabilna. Z uporabnega stališča je torej treba študirati stabilnost formuliranega problema. V nadaljnjem si bomo ogledali študij stabilnosti v nekaterih preprostih primerih. Gibanje točke oziroma sistema točk lahko opišemo z diferencialnimi enačbami. Ko opisujemo gibanje točk, upoštevamo glavne sile, ki na točke delujejo. Poleg teh pa delujejo na točke še druge sile, ki jih večkrat ali ne poznamo ali pa jih pri zapisu opustimo, da bi bila enačba gibanja enostavnejša. Te sile so seveda majhne glede na osnovne in jih imenujemo motnje. Vendar motnje vplivajo na spremembo začetnega stanja sistema in na začetne hitrosti. Seveda na nekatere sisteme take motnje bistveno ne vplivajo in se tako moteno gibanje skoraj nič ne razlikuje od nemotenega. Pri drugih sistemih motnje močno vplivajo in se moteno gibanje močno razlikuje od nemotenega, pa čeprav so lahko motnje silno majhne. V prvem primeru imamo opravka s tako imenovanim stabilnim gibanjem, v drugem pa z nestabilnim. Naloga teorije stabilnosti je ugotoviti ali je gibanje stabilno ali ne. V današnjem času, ko imamo v tehniki opravka z velikimi hitrostmi in močno razvito avtomatiko, je teorija stabilnosti postala zelo pomembna. Poleg vrste matematikov ima na področju teorije stabilnosti največ zaslug Ljapunov. Metode, s katerimi se rešujejo problemi stabilnosti, je Ljapunov razdelil v dve skupini. V prvi so tiste metode, pri katerih moramo poznati splošno ali partikularno rešitev diferencialnih enačb. V drugi pa so tiste metode, pri katerih ni treba vnaprej poznati rešitve diferencialnih enačb, pač pa moremo poznati neke pomožne funkcije, ki imajo posebne lastnosti. Te druge metode se pri reševanju nalog stabilnosti v praksi bolj uporabljajo.

2. Osnovne definicije

Vzemimo kar diferencialno enačbo prvega reda

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Funkcija $g(t)$ naj bo rešitev te enačbe pri začetnem pogoju $x|_{t=t_0} = g(t_0)$.

Funkcija $x(t)$ naj bo rešitev iste diferencialne enačbe pri spremenjenem začetnem pogoju $x|_{t=t_0} = x(t_0)$. Obe funkciji $g(t)$ in $x(t)$ naj bosta določeni za vsak $t \geq t_0$. Po definiciji Ljapunova imenujemo rešitev $g(t)$ *stabilno*, če za poljuben $\varepsilon > 0$ eksistira tak $\delta(\varepsilon) > 0$, da iz neenačbe

$$|x(t_0) - g(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad \text{sledi} \quad |x(t) - g(t)| < \varepsilon$$

za vsak $t \geq t_0$. To pomeni, da rešitve, ki so si v začetni točki blizu, ostanejo blizu za vsak $t \geq t_0$. Rešitev, ki ne izpolnjuje teh pogojev, imenujemo *nestabilno*.

Če je rešitev $g(t)$ stabilna in če eksistira še tak $\delta' > 0$, da iz neenačbe

$$|x(t_0) - g(t_0)| < \delta' \quad \text{sledi} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - g(t)] = 0$$

je rešitev *asimptotično stabilna*. To se pravi, da je asimptotično stabilna rešitev ne samo blizu rešitvi $x(t)$ za vsak $t \geq t_0$, ampak se ji z naraščajočim t vedno bolj približuje. Na podoben način definiramo stabilnost za sistem diferencialnih enačb

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Rešitve $g_i(t)$ sistema diferencialnih enačb imenujemo stabilne, če za poljuben $\varepsilon > 0$ eksistira $\delta(\varepsilon) > 0$, da iz sistema neenačb

$$|x_i(t_0) - g_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad \text{sledi} \quad |x_i(t) - g_i(t)| < \varepsilon$$

za vsak $t \geq t_0$ in za vsak $i = 1, 2, \dots, n$.

Rešitve $g_i(t)$ so asimptotično stabilne, če so stabilne in če iz neenačb

$$|x_i(t_0) - g_i(t_0)| < \delta \quad \text{sledi} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [x_i(t) - g_i(t)] = 0$$

za vsak i .

Če imamo diferencialno enačbo višjega reda, npr. n -tega,

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

jo pač prevedemo na sistem n diferencialnih enačb prvega reda, za katere že poznamo definicijo stabilnosti. Stabilnost rešitve $g(t)$ diferencialne enačbe n -tega reda pomeni, da sta si blizu rešitvi $x(t)$ in $g(t)$ in tudi vseh njunih prvih $n-1$ odvodov, če so si le začetni pogoji za rešitev in prvih $n-1$ odvodov dosti blizu.

Problem si poenostavimo, če uvedemo v enačbo $dx/dt = f(t, x)$ novo spremenljivko $y = x - g(t)$. Diferencialna enačba za funkcijo $y(t)$ je tedaj

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + g) - f(t, g)$$

ki ima trivialno rešitev $y(t) \equiv 0$ pri pogoju $y(t_0) = 0$. Novo nepoznano funkcijo imenujemo odklon. V tem sestavku bomo študirali stabilnost trivialne

rešitve. Definicija stabilnosti ima v primeru trivialne rešitve tole obliko: za $\varepsilon > 0$ naj eksistira $\delta(\varepsilon) > 0$, da iz neenačb

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad \text{sledi} \quad |x_i(t)| < \varepsilon \quad \text{za} \quad t \geq t_0$$

Oglejmo si preprost primer:

$$\dot{x} = ax, \quad a = \text{const.}$$

in študirajmo, pri kakšnih vrednostih a je trivialna rešitev $x \equiv 0$ stabilna pri začetnem pogoju $x(t_0) = c$.

Rešitev enačbe je $x = c \cdot e^{a(t-t_0)}$. Če je $a \leq 0$ in $t \geq t_0$ je $e^{a(t-t_0)} \leq 1$ in $|x| = |c| \cdot e^{a(t-t_0)} < \varepsilon$, če je le $|c| < \varepsilon$. Če je $a < 0$ velja pri poljubnem c $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Če je $a > 0$, še pri tako majhnem c ni $|x(t)| < \varepsilon$, temveč raste s t proti neskončnosti. Zaključimo: za $a < 0$ je rešitev asimptotično stabilna, za $a \leq 0$ je stabilna in za $a > 0$ nestabilna.

Ko je $a < 0$, je $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ pri poljubnih vrednostih t_0 in c . Take rešitve imenujemo v celoti *asimptotično stabilne*. Pri sistemu (1) imenujemo rešitev $g_i(t)$ v celoti *asimptotično stabilno*, če je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - g_i(t)| = 0$$

kjer so $x_i(t)$ rešitve, ki smo jih dobili pri poljubnih začetnih pogojih.

Uvedimo še en pojem. V prejšnjem zgledu za $a < 0$ se rešitev $x(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$ z naraščajočim t eksponentialno približuje trivialni rešitvi $x \equiv 0$ in zato rešitev $x \equiv 0$ imenujemo *asimptotično stabilno po eksponentialnem zakonu*. Asimptotično stabilnost po eksponentialnem zakonu definiramo za sistem (1) tako, da mora eksistirati konstanta K in taka $p > 0$ in $\delta > 0$, da je

$$|x_i(t) - g_i(t)| < K e^{-pt} \quad \text{za vsak} \quad t \geq t_0$$

če je

$$|x_i(t_0) - g_i(t_0)| < \delta$$

Oglejmo si sedaj geometrično razlago teh pojmov. V sistemu (1) naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinate točke v n -dimenzijskem prostoru in t čas. Rešitve $x_i = g_i(t)$ pomenijo zakon gibanja v tem prostoru. Če iz rešitev eliminiramo čas t , dobimo enačbe krivulj, ki jih imenujemo trajektorije. Trajektorije so namreč krivulje, po katerih se točka giblje. Lahko pa imamo tudi rešitve $x_i = g_i(t)$ za enačbe trajektorij v parametrični obliki. Če ima sistem rešitve $x_i = x_{i0}$, kjer so vsi x_{i0} konstante, potem trajektorija degenerira v točko $T_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Tako točko imenujemo *točko mirovanja* danega sistema. Takoj vidimo, da je trivialna rešitev sistema $x_i \equiv 0$ točka mirovanja tega sistema, le da je ta v koordinatnem izhodišču. Ako uporabimo definicijo stabilnosti za trivialno rešitev, vidimo, da je točka mirovanja stabilna, če za vsak $\varepsilon > 0$ eksistira $\delta(\varepsilon) > 0$, da iz neenačbe

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta^2(\varepsilon) \quad \text{sledi} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2$$

za vsak $t \geq t_0$. To pomeni: če je začetna točka v notranjosti krogle s polmerom δ in središčem v izhodišču, so za $t \geq t_0$ trajektorije v notranjosti krogle s polmerom ε in istim središčem.

Za asimptotično stabilnost točke mirovanja je poleg stabilnosti potreben še pogoj $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ za vse x_i , ki ustrezajo neenačbi $\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta'^2$. V tem primeru pa trajektorije, katerih začetne točke leže v krogli z dovolj majhnim polmerom δ' , za $t \geq t_0$ ostanejo ne samo v notranjosti krogle s polmerom ε , ampak se z naraščajočim t približujejo kroglinemu središču, to je koordinatnemu izhodišču.

Vzemimo linearen nehomogen sistem

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Uvedimo novo spremenljivko $y_i = x_i - g_i(t)$, to se pravi, da izbrane rešitve $g_i(t)$ transformiramo v trivialne $y_i \equiv 0$. S tem dobimo

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) y_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) g_j(t) + b_i(t) - dg_i/dt$$

Ker so $g_i(t)$ rešitve sistema (2), velja seveda

$$\frac{dg_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) g_j(t) + b_i(t)$$

iz prejšnjega dobimo tale homogeni sistem

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) y_j$$

Odtod spoznamo, da se vse posebne rešitve sistema (2) glede na stabilnost obnašajo enako kot trivialne rešitve ustreznega homogenega sistema. Kot primer vzemimo enačbo

$$\dot{x}(t) - a \cdot x(t) = f(t)$$

kjer naj bo $a < 0$ in $f(t)$ zvezna funkcija. Za homogeno enačbo

$$\dot{x}(t) - a \cdot x(t) = 0$$

vemo že iz prejšnjega primera, da je trivialna rešitev asimptotično stabilna po eksponencialnem zakonu, torej so tudi vse rešitve nehomogene enačbe asimptotično stabilne po eksponencialnem zakonu.

3. Stabilnost pri linearnih sistemih s konstantnimi koeficienti

Oglejmo si sistem dveh linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}\quad (3)$$

Rešitev iščemo v obliki $x = b_1 e^{rt}$, $y = b_2 e^{rt}$. Iz ustrezne karakteristične enačbe določimo r . Če sta r_1 in r_2 različna, $r_1 \neq r_2$, ima splošna rešitev sistema (3) obliko

$$\begin{aligned}x &= c_1 b_{11} e^{r_1 t} + c_2 b_{12} e^{r_2 t} \\ y &= c_1 b_{21} e^{r_1 t} + c_2 b_{22} e^{r_2 t}\end{aligned}\quad (4)$$

Tu so b_{11} , b_{12} , b_{21} , b_{22} konstante, c_1 in c_2 pa poljubni konstanti.

Če sta korena karakteristične enačbe kompleksna $p \pm iq$, se splošna rešitev sistema (3) glasi

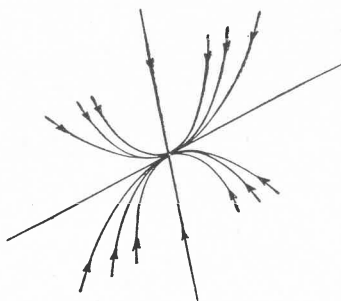
$$\begin{aligned}x &= e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) \\ y &= e^{pt} (c_1' \cos qt + c_2' \sin qt)\end{aligned}\quad (5)$$

Tu sta c_1 in c_2 poljubni konstanti. c_1' in c_2' pa neki linearni kombinaciji konstant c_1 in c_2 .

Sedaj si podrobneje oglejmo tele primere:

1. $r_1 \neq r_2$, $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, slika 1.

Točka mirovanja $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ je kot vidimo iz (4) v celoti asimptotično stabilna po eksponencialnem zakonu. Z naraščajočim t se vse točke na trajektorijah eksponencialno približujejo točki mirovanja. Če je $r_1 < r_2$, potem kvocient y/x pri $c_2 \neq 0$ s $t \rightarrow \infty$ približuje vrednosti b_{22}/b_{12} , kar pomeni, da imajo vse krivulje v koordinatnem izhodišču skupno tangento. Če je $c_2 = 0$, je premica $y = (b_{21}/b_{11}) \cdot x$ trajektorija. Na sliki 1 so narisane trajektorije v okolici koordinatnega izhodišča in s puščico je označena smer gibanja točk po trajektorijah, ko t narašča. Točko mirovanja v tem primeru imenujemo *stabilni voz*el.



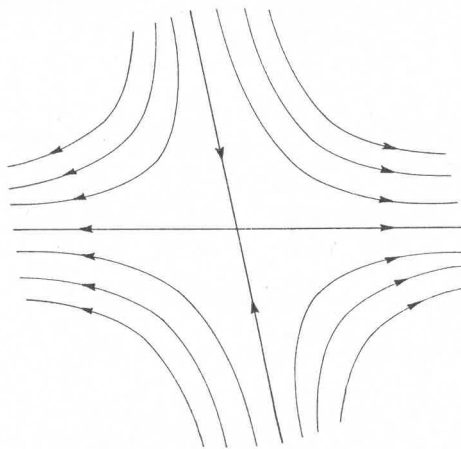
Slika 1

2. $r_1 \neq r_2$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$.

Trajektorije so iste kot v primeru 1, le smer gibanja točk po trajektorijah je nasprotna, kajti če zamenjamo t z $-t$ dobimo isti primer kot prej. Z naraščajočim t se vse točke oddaljujejo od koordinatnega izhodišča — točke mirovanja. Točko mirovanja v taki situaciji imenujemo *nestabilni voz*el.

3. $r_1 \neq r_2$, $r_1 > 0$, $r_2 < 0$, slika 2.

Iz (4) se vidi, da se točke, ki se gibljejo po poljubni trajektoriji z naraščajočim ali padajočim t ($t \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$) oddaljujejo od koordinatnega izhodišča. Če je $c_1 = 0$, je premica $y = (b_{22}/b_{12}) \cdot x$, ($b_{12} \neq 0$), trajektorija, po kateri se z naraščajočim t točke približujejo koordinatnemu izhodišču. Če je pa $c_2 = 0$ ($b_{11} \neq 0$), je trajektorija premica $y = (b_{21}/b_{11}) \cdot x$, po kateri se z naraščajočim t točke oddaljujejo od koordinatnega izhodišča. Točko mirovanja imenujemo v tem primeru *sedlo*, ki seveda ni stabilno.



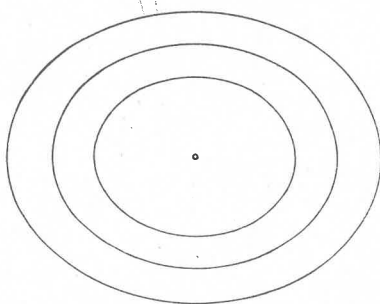
Slika 2

4. $r_{1,2} = \pm qi$, slika 3.

Splošna rešitev je poseben primer (5) in je

$$\begin{aligned}x &= c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\y &= c_1' \cos qt + c_2' \sin qt\end{aligned}$$

Rešitve so periodične funkcije časa t , trajektorije so zaključene krivulje, v splošnem elipse. Točke trajektorij, ki so po začetnih pogojih blizu koordi-

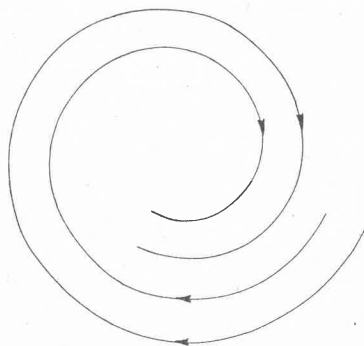


Slika 3

natnega izhodišča, ostanejo blizu koordinatnega izhodišča. Ko gre $t \rightarrow \infty$, se točke očitno ne približujejo koordinatnemu izhodišču. Točka mirovanja se sedaj imenuje *center*; center je stabilen.

5. $r_{1,2} = p \pm qi$, $p < 0$, $q \neq 0$, slika 4.

Iz enačb (5) vidimo, da prvi faktor pada eksponentcialno z naraščajočim t , drugi faktor je periodičen. V tem primeru trajektorije niso zaključene krivulje, se pa približujejo koordinatnemu izhodišču. Točko mirovanja take vrste imenujemo *stabilni fokus*. V tem primeru je točka mirovanja v celoti asimptotično stabilna po eksponentcialnem zakonu.



Slika 4

6. $r_{1,2} = p \pm qi$, $p > 0$, $q \neq 0$.

Situacija je ista kot v primeru 5, le da ima gibanje točk po trajektorijah drugo smer, puščice na sliki 4 bi bile obrnjene. Točka mirovanja je *nestabilni fokus*.

7. $r_1 = r_2 < 0$.

Splošna rešitev sistema (3) ima tole obliko:

$$\begin{aligned} x &= (\alpha_1 + \beta_1 t) e^{r_1 t} \\ y &= (\alpha_2 + \beta_2 t) e^{r_1 t} \end{aligned}$$

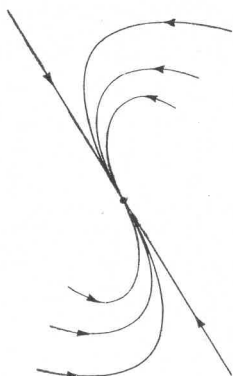
Slika zgornje enačbe je slika 5; točka mirovanja je stabilni vozle in je celo asimptotično stabilna po eksponentcialnem zakonu, saj je $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{r_1 t} = 0$. Ako je $\beta_1 = \beta_2 = 0$ in sta α_1 in α_2 poljubna in od nič različna, ima splošna rešitev obliko

$$x = \alpha_1 e^{r_1 t} \qquad y = \alpha_2 e^{r_1 t}$$

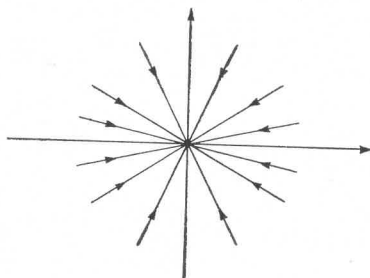
trajektorije so premice $y = (\alpha_2/\alpha_1) \cdot x$ (slika 6). Točka mirovanja je tudi stabilni vozle; v tem primeru pravimo, da je vozle *diktričen*.

8. $r_1 = r_2 > 0$.

Slike trajektorij so iste kot v primeru 7, le smer gibanja točk po trajektorijah je seveda nasprotna. Točka mirovanja je nestabilna in jo imenujemo nestabilni vozle oziroma nestabilni diktrični vozle.



Slika 5



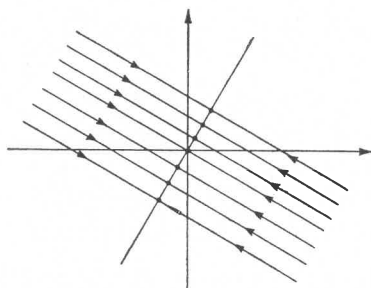
Slika 6

9. $r_1 = 0$, $r_2 < 0$, slika 7.

Splošna rešitev sistema (3) v tem primeru je

$$\begin{aligned}x &= c_1 b_{11} + c_2 b_{12} e^{r_2 t} \\y &= c_1 b_{21} + c_2 b_{22} e^{r_2 t}.\end{aligned}$$

Če je $c_2 = 0$ in $b_{11} \neq 0$, so rešitve točke mirovanja $x = c_1 b_{11}$, $y = c_1 b_{21}$, ki leže na premicah $y = (b_{21}/b_{11}) \cdot x$. Tem točkam se s $t \rightarrow \infty$ približujejo točke, ki leže na drugih trajektorijah, ki so za $c_2 \neq 0$ tudi premice. Torej je točka mirovanja $x = 0$, $y = 0$ stabilna.



Slika 7

10. $r_1 = 0$, $r_2 > 0$.

Trajektorije so take kot v prejšnjem primeru, le gibanje je nasprotno. Točka mirovanja je nestabilna.

11. $r_1 = 0$, $r_2 = 0$.

Splošna rešitev je

$$x = \alpha_1 + \beta_1 t$$

$$y = \alpha_2 + \beta_2 t$$

Trajektorije so premice in točke se z naraščajočim t neomejeno oddaljujejo od koordinatnega izhodišča. Točka mirovanja $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ je seveda nestabilna.

S tem smo pregledali vse možnosti za sistem dveh linearnih diferencialnih enačb. Skušajmo na podlagi tega zapisati pravilo za sistem n linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti.

Če imajo vsi koreni karakteristične enačbe negativen realni del, $\operatorname{Re}(r) < 0$, potem so vse rešitve v celoti asimptotično stabilne po eksponentnem zakonu. Taki primeri iz prejšnjega razčlenjevanja so primer 1 (stabilni vozle), primer 5 (stabilni fokus) in primer 7. Če ima le en koren karakteristične enačbe pozitiven realni del, $\operatorname{Re}(r) > 0$, so vse rešitve nestabilne. To kažejo primeri 2 (nestabilni vozle), 3 (sedlo), 6 (nestabilni fokus), 8. in 10. Če imamo čisto imaginarne korene, drugi koreni, če eksistirajo, pa imajo negativen realni del, so rešitve stabilne. Taka primera sta 4 (center) in 9.

Poglejmo nekaj zgledov: Študiramo stabilnost točke mirovanja $x = 0$, $y = 0$ za sistem

$$\dot{x} = -2x - 3y$$

$$\dot{y} = x + y$$

Karakteristična enačba je $r^2 + r + 1 = 0$, korena $r_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Iz zgornjih pravil sklepamo, da je točka mirovanja asimptotično stabilna in je stabilni fokus.

Poiščimo periodično rešitev enačbe

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin t$$

in določimo stabilnost rešitve. Karakteristična enačba je $r^2 + 2r + 2 = 0$ in korena sta $r_{1,2} = -1 \pm i$. Periodična rešitev je $x = \frac{1}{5} \sin t - \frac{2}{5} \cos t$. Ker je rešitev homogene enačbe asimptotično stabilna, je tudi periodična rešitev asimptotično stabilna.

Za ugotovitev, ali je rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti stabilna ali ne, je treba poznati predznake realnega dela korenov karakteristične enačbe. Pri karakterističnih enačbah višjih stopenj je iskanje korenov zamudna stvar. Eksistirajo metode, po katerih lahko ugotovimo, ali imajo vsi koreni enačbe z realnimi koeficienti realni del negativen ali ne, ne da bi bilo pri tem treba poznati korene. Potreben pogoj, da imajo vsi koreni enačbe z realnimi koeficienti realni del negativen, je, da so vsi koeficienti enačbe istega znaka. Prav tako brez dokaza navedimo še znani kriterij za ugotavljanje negativnega realnega dela korenov enačb poljubnih stopenj, to je *Hurwitzov kriterij*. Ta pravi: potreben in zadosten pogoj, da so realni deli vseh korenov polinoma z realnimi koeficienti

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, a_0 > 0$$

negativni, je, da so vse poddeterminante matrike

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

ki leže na glavni diagonalni pozitivne.*

Hurwitzova matrika je sestavljena takole: na glavni diagonalni stojijo koeficienti polinoma od a_1 do a_n , drugi elementi so sestavljeni po pravilu $b_{ik} = a_{2i-k}$. Vse koeficiente z indeksi, manjšimi od nič oziroma večjimi od n , zamenjamo z ničlami. Ker velja $D_n = D_{n-1} a_n$, zadnji pogoj poenostavimo z $a_n > 0$. Hurwitzovi pogoji so tedaj

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_{n-1} > 0, a_n > 0$$

Poleg tega kriterija eksistirajo še drugi.

Primer: Ali so rešitve enačbe $\ddot{x} + 5\dot{x} + 2x = f(t)$ stabilne? Potrebni pogoj, da so vsi koeficienti karakteristične enačbe ustrezne homogene enačbe istega znaka, je izpolnjen. Sestavimo Hurwitzovo matriko in pogledimo poddeterminante:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 20 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$D_1 > 0$, $D_2 < 0$, $a_3 > 0$. Determinanta D_2 je negativna, vsi koreni nimajo negativnega realnega dela in so zato vse rešitve enačbe nestabilne.

4. Druga metoda Ljapunova

Vzemimo spet sistem diferencialnih enačb

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

s predpostavko $f_i(t, 0, \dots, 0) = 0$ in študirajmo stabilnost trivialne rešitve, to je točke mirovanja $x_i = 0$ tega sistema. Da bi bila točka mirovanja stabilna, je potrebno, da se z naraščajočim t točke na vseh trajektorijah približujejo koordinatnemu izhodišču ali se vsaj od njega ne oddaljujejo. Za ugotovitev tega dejstva pa sploh ne potrebujemo rešitev sistema, ampak nas zanima le, kolikšna je razdalja točke na neki trajektoriji od točke mirovanja, to je od koordinatnega izhodišča. Razdalja ϱ je $\varrho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)}$. Če je $d\varrho/dt \leq 0$ za vsak $t \geq t_0$, se to pravi, da funkcija vzdolž integralne krivulje z naraščajočim t

* F. Križanič: Izbrana sredstva linearne analize za tehnike in fizike I, Ljubljana 1957.

ne narašča, točke na trajektorijah se z naraščajočim t ne oddaljujejo od koordinatnega izhodišča in točka mirovanja $x_i \equiv 0$ je stabilna. Izračunamo

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} f_i$$

in vidimo, da je to funkcija spremenljivk $t, x_1, x_2, \dots, x_n$, in da zadostuje, če poznamo znak vrednosti te funkcije. Navadno računamo kvadrat razdalje, ρ^2 ,

kajti znak $\frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho \frac{d\rho}{dt}$ sovпада z znakom $\frac{d\rho}{dt}$. Označimo $\rho^2 = v$. Ljapunov je

pri teh problemih študiral funkcijo $v(t, x_1, \dots, x_n)$, ki predstavlja posplošeno razdaljo od koordinatnega izhodišča. Te funkcije imenujemo funkcije Ljapunova. Oglejmo si naslednji izrek.

Izrek Ljapunova o stabilnosti pravi, da je točka mirovanja $x_i \equiv 0$ stabilna, če eksistira odvedljiva funkcija $v(t, x_1, \dots, x_n)$, ki v okolici h koordinatnega izhodišča, $\sum_{i=1}^n x_i^2 < h^2$ in za $t \geq t_0$, ustreza pogojema:

a) $v(t, x_1, \dots, x_n) \geq w(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, tu je w zvezna funkcija, ki je enaka nič le v koordinatnem izhodišču, $v(t, 0, \dots, 0) = 0$ (funkcija v je pozitivno definitna);

b) odvod $\frac{dv}{dt}$ vzdolž integralnih krivulj sistema (6) mora biti negativen,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leq 0$$

Dokaz izreka: Za poljuben $\varepsilon > 0$, ki naj bo manjši od h , $\varepsilon < h$, izberemo $\delta(\varepsilon) > 0$ tako, da so vrednosti funkcije $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na krogli $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \varepsilon^2$ večje kakor vrednosti funkcije $v(t_0, x_1, \dots, x_n)$ v notranjosti krogle s polmerom δ , $\sum_{i=1}^n x_i^2 < \delta^2$. Tak δ se da dobiti, ker ima funkcija w na krogli s polmerom ε minimum, ki je od nič različen, označimo ga z m . Pri dovolj majhnem δ se vrednosti funkcije $v(t_0, x_1, \dots, x_n)$ v okolici δ koordinatnega izhodišča poljubno malo razlikujejo od vrednosti funkcije $v(t_0, 0, \dots, 0) = 0$. Tako za dovolj majhen δ lahko zaključimo, da je $v(t_0, x_1, \dots, x_n) < m$ za točke v notranjosti krogle s polmerom δ . Trajektorija, ki se nahaja v δ -okolici koordinatnega izhodišča torej ne more preiti iz ε -okolice koordinatnega izhodišča pri $t \geq t_0$. Ako bi prešla iz ε -okolice, bi to pomenilo, da preseka kroglo $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \varepsilon^2$. V točki preseka t_1 bi vrednost funkcije $v(t_1, x_1, \dots, x_n)$ ne bila manjša od prej postavljenega minimuma funkcije w , to je m , bila bi pa večja od vrednosti funkcije v koordinatnem izhodišču. To pomeni, da bi funkcija v vsaj na odsekih neke

trajektorije naraščala, kar je v protislovju s pogojem b) izreka. Tako velja $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2$ za $t \geq t_0$, če je $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \delta^2$, torej je točka $x_i \equiv 0$ stabilna.

Z uporabo izreka raziščimo stabilnost rešitve $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - 7x \\ \dot{y} &= -2x - 5y\end{aligned}$$

Funkcijo Ljapunova poiščimo v obliki $v = ax^2 + \beta y^2$, a in β sta pozitivni konstanti. Izračunajmo odvod

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= 2ax \frac{dx}{dt} + 2\beta y \frac{dy}{dt} = 2ax(y - 7x) + 2\beta y(-2x - 5y) = \\ &= 2(a - 2\beta)xy - 14ax^2 - 10\beta y^2\end{aligned}$$

Izberimo si a in β tako, da bo $a - 2\beta = 0$, npr. $a = 2$, $\beta = 1$. Potem je $\frac{dv}{dt} = -2(14x^2 + 5y^2) \leq 0$. Vsi pogoji izreka so izpolnjeni, rešitev $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ je stabilna.

Oglejmo si še eno uporabo izreka. Za kakšne vrednosti parametra a ima sistem

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -x - y^5 \\ \dot{x} &= y + ax - x^5\end{aligned}$$

stabilno točko mirovanja?

Funkcija Ljapunova naj bo $v = ax^2 + \beta y^2$, $\frac{dv}{dt} = 2ax(y + ax - x^5) + 2\beta y(-x - y^5) = 2(a - \beta)xy + 2aax^2 - 2ax^6 - 2\beta y^6$. a in β izberemo kot v zgornjem primeru in dobimo

$$\frac{dv}{dt} = 2ax^2 - 2(x^6 + y^6)$$

Da bi bil izpolnjen še pogoj b) izreka, mora biti $a < 0$; v tem primeru je točka mirovanja stabilna.

Pri tej metodi določevanja stabilnosti se pojavi kot težava konstrukcija funkcij Ljapunova. V obeh preprostih primerih to ni bilo težko, v splošnem pa je to precej težka naloga.

5. Stabilnost po prvem približku

Za sistem (6) skušajmo še enkrat raziskati stabilnost trivialne rešitve. Za funkcije f_i zahtevamo še, da naj bodo dvakrat zvezno odvedljive na vse spremenljivke x_i v okolici koordinatnega izhodišča za $t \geq t_0$. Razvijmo sistem (6) v Taylorjevo vrsto v tej obliki

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) x_j + R_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Vse nelinearne člene smo označili z R_i . V okolici točke mirovanja, to je $\sum_{j=1}^n |x_j| < \delta$, je vrednost $|R_i(t, x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$. Nelinearne člene lahko torej v okolici koordinatnega izhodišča zanemarimo in sistem (7) nadomestimo s sistemom

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ta novi sistem enačb imenujemo sistem prvega približka za sistem (7). Tako študiramo stabilnost sistema (7) po prvem približku. Ljapunov je postavil in tudi rešil vprašanje, kdaj lahko z metodami prvega približka razrešimo nalogo o določitvi stabilnosti oziroma nestabilnosti. Najpreprostejši primer je tedaj, če so a_{ij} konstantne vrednosti, to je neodvisne od t . Sistem (7) se v tem primeru glasi

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (8)$$

in ga imenujemo stacionarni sistem. Ljapunov je dokazal te trditvi, ki jih navedimo brez dokaza.

Za sistem oblike (8) smemo uporabiti za določitev stabilnosti metodo prvega približka v primerih:

a) če so vsi koreni karakteristične enačbe za sistem prvega približka taki, da imajo negativen realni del;

b) če je vsaj en koren karakteristične enačbe tak, da ima pozitiven realni del.

V primeru a) je točka mirovanja asimptotično stabilna, v primeru b) je nestabilna.

Poleg omenjenih možnosti imamo še primer, da ima en koren ustrezne karakteristične enačbe realni del enak nič, drugi koreni, če eksistirajo, pa imajo negativen realni del. V tem primeru raziskovanje stabilnosti po prvi aproksimaciji ni možno, na stabilnost namreč vplivajo tudi nelinearni členi. Tak primer imenujemo *kritičen* primer. Prav taki primeri pogosto nastopajo v mehaniki. Do sedaj še ni splošnih metod za reševanje problema stabilnosti v kritičnih primerih. Za neke posebne primere je Ljapunov podal rešitev. Kritični primer ilustrirajmo na preprostem zgledu. Sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - ax^3 \\ \dot{y} &= x - ay^3, \quad a > 0 \end{aligned}$$

ima po izreku Ljapunova (razdelek 4) točko mirovanja $x \equiv 0, y \equiv 0$ stabilno, kajti poleg prvega pogoja je izpolnjen tudi drugi. Funkcijo Ljapunova iščemo v obliki $y = ax^2 + \beta x^2$; izračunamo odvod $dv/dt = 2ax(-y - ax^3) +$

$+ 2 \beta y (x - ay^3)$, izberemo npr. $\alpha = \beta = 1$ in dobimo $dv/dt = -2a(x^4 + y^4) \leq 0$. Sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ax^3 \\ \dot{y} &= x + ay^3, \quad a > 0\end{aligned}$$

ima točko mirovanja po istem izreku nestabilno, saj po podobni poti kot zgoraj dobimo $dv/dt = 2a(x^4 + y^4) \geq 0$. Ako rešujemo problem stabilnosti po metodi prvega približka, dobimo za en kot drugi sistem enačb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

Koreni karakteristične enačbe so seveda čisto imaginarni in po tem, kar smo navedli v razdelku 3, primer 4, je točka mirovanja $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ stabilna — center. Tako vidimo, da v teh pritičnih primerih nelinearni členi vplivajo na stabilnost rešitve.

Na koncu navedimo še en primer za reševanje nalog stabilnosti po metodi prvega približka. Za diferencialno enačbo

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 9x + 5x - 3e^x = 3$$

je treba ugotoviti stabilnost rešitve $x \equiv 0$.

Funkcijo e^x razvijemo v vrsto in oddelimo linearni del; dobimo

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 9x + 2x = 0$$

Po Hurwitzovem kriteriju preiščemo korene karakteristične enačbe. Ker so Hurwitzovi pogoji izpolnjeni: $a_1 = 5 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 a_0 = 43 > 0$, in $a_3 = 2 > 0$, imajo vsi koreni negativen realni del in rešitev $x \equiv 0$ je asimptotično stabilna.

Literatura

- I. G. Malkin: Teorija ustojčivosti dviženja, Moskva 1952.
- I. G. Aramovič, G. L. Lunc, L. E. Eljcgoljc: Funkciji kompl. peremennogo, operacionnoe isčislenie, teorija ustojčivosti, Moskva 1965.
- J. La Salle, S. Lefschetz: Stability by Liapunov's direct methods. N. York 1961.

POSKUSI NA LJUBLJANSKEM REAKTORJU

F. ŽERDIN in Z. GABROVŠEK

Nuklearni inštitut »J. Stefan«, Ljubljana

V začetku letošnjega junija je postal kritičen reaktor TRIGA Mark II Nuklearnega inštituta »J. Stefan« v Podgorici* pri Ljubljani. Na začetku smo napravili s TRIGO nekaj poskusov, ki so obvezni pri vsakem novem reaktorju, npr. kritični poskus ter umeritev kontrolnih palic in moči. Ko je začel reaktor redno obratovati, smo izmerili absolutno vrednost termičnega nevtronskega fluksa na nekaterih mestih v sredici in izven nje ter spekter hitrih nevtronov v sredici.

Kratek opis trige

Reaktor TRIGA (Training, Research and Isotope Production of General Atomic), ki ga izdeluje družba General Atomic, je šolski in raziskovalni reaktor. Namenjen je za raziskovalno delo v reaktorski fiziki, fiziki trdne snovi, jedrski fiziki, kemiji, reaktorski tehniki, za produkcijo kratkoživih izotopov in za šolanje. Glavni tehnični podatki so zbrani v tabeli I. Najvažnejši značilnosti reaktorja sta sorazmerno visok poprečni fluks termičnih nevtronov $4 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ in velik promptni negativni temperaturni koeficient reaktivnosti — $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ st}^{-1}$. Zaradi takega temperaturnega koeficienta je reaktor zelo varen in neobčutljiv za nepredvidene spremembe moči.

Tabela I: Tehnični podatki za 250 kW reaktor TRIGA Mark II

SREDICA

Sestava gorivno-moderatorskega elementa	8 utežnih % urana, 91 utežnih % cirkonija, 1 utežni % vodika
Obogatitev urana	20 % U^{235}
Velikost elementa	premer 3,56 cm, dolžina 72,2 cm
Srajčka elementa	aluminij z debelino 0,76 mm
Velikost aktivne sredice	premer 35,6 cm, višina 35,6 cm

REFLEKTOR

Material	grafit
Material obloge	aluminij
Prečna debelina	30,5 cm
Debelina zgornjega in spodnjega dela reflektorja	10,2 cm

FIZIKALNE LASTNOSTI

Fluks termičnih nevtronov pri maksimalni moči 250 kW:

a) poprečni fluks v sredici	približno $4,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
b) v vrtiljaku	približno $1,8 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
c) v navpičnem kanalu	približno $1 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

* Podgorica leži približno 9 km od središča Ljubljane ob cesti proti Litiji.

Vgrajena reaktivnost	približno 2,25 %
Količina U^{235} v sredici	približno 2,3 kg U^{235}
Celokupna reaktivnost kontrolnih palic	približno 6,0 %
Promptni temperaturni koeficient	$-1,2 \times 10^{-4} \text{ st}^{-1}$
Življenjska doba promptnih nevtronov	$6,5 \times 10^{-5} \text{ s}$
Kontrolne palice iz borovega karbida	3
Maksimalna sprememba reaktivnosti pri dviganju vseh palic	0,05 %

NEVTRONSKI IZVOR

Po-Be nevtronski izvor	1
------------------------	---

REAKTORSKA POSODA IN ZAŠČITA

Reaktorska posoda	premer 200 cm, višina 625 cm
Premična vrata termične kolone	težki beton, debelina 107 cm, širina 204 cm, višina 211 cm
Prečna zaščita	težki beton z najmanjšo debelino 249 cm in voda z debelino 45,7 cm
Navpična zaščita	voda 490 cm nad sredico

POSKUSNE NAPRAVE

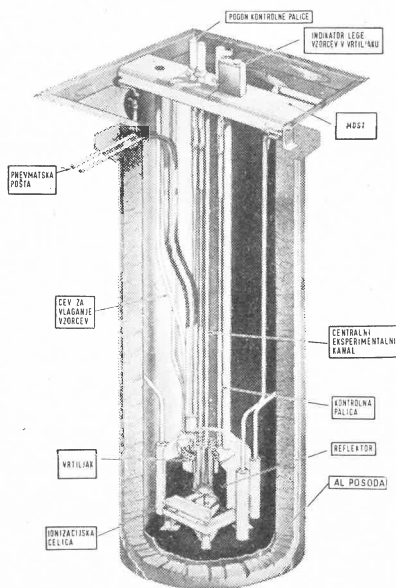
Vodoravni poskusni kanali (4)	premer 12,7 cm
Termična kolona (grafit)	preseki $122 \text{ cm} \times 122 \text{ cm}$, dolžina 167 cm
Vrtiljak	40 mest, v vsako lahko vstavimo 2 posodici. Premer posodic je 2,06 cm, dolžina 9,68 cm
Pnevmatična pošta	blizu sredice. Premer posodice za obsevanje je 1,42 m, dolžina 100 mm
Navpični kanal	v osi sredice (območje največjega fluksa termičnih nevtronov). Premer cevi je 3,38 cm
Območje reflektorja	za poskuse v vodi blizu reflektorja
Merilni bazen	dolžina 274 cm
	širina 244 cm
	globina 366 cm
Termalizirajoča kolona	preseki $61 \times 61 \text{ cm}$, dolžina 120 cm

Sredica reaktorja z reflektorjem je na dnu aluminjske reaktorske posode s premerom 2 m in z višino 6,25 m (sl. 1). Kot zaščita v radialni smeri služi težki beton z gostoto $3,6 \text{ g/cm}^3$, v navpični smeri pa 4,9 m debel sloj demineralizirane vode. Gorivni elementi so iz homogene mešanice cirkonijevega hidrida in 20 % obogatenega urana, ki jih obdaja tanka srajčka iz aluminija. Poleg 65 gorivnih elementov je v sredici tudi 20 grafitnih elementov. Gorivni elementi imajo na zgornji in spodnji strani po 10 cm dolg podaljšek iz grafita, ki služi kot zgornji in spodnji reflektor. Radialni reflektor je 30 cm debel grafit. Voda zavzema približno tretjino prostornine v sredici.

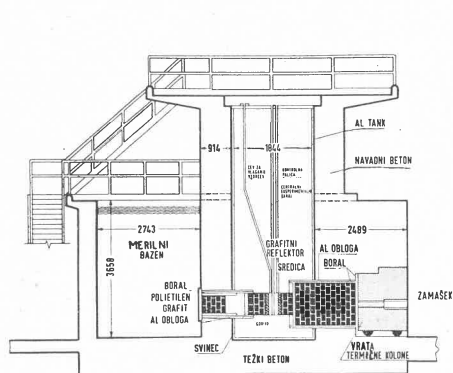
Regulacijo reaktorja omogočajo tri kontrolne palice iz borovega karbida. Nastavljanje palic je ročno ali avtomatsko. Ob reflektorju so v reaktorski posodi 4 nevtronski števci: 3 ionizacijske celice in cepitveni števec. Ti števci so osnova štirih merilnih vezij, s katerimi nadzorujemo zagon reaktorja ter merimo njegovo moč in periodo. Poleg navedenih so na komandni mizi še registrirni instrumenti za temperaturo vode ob izstopu iz reaktorske posode, za električno prevodnost vode ob vstopu in ob izstopu iz demineralizatorja ter merilnik za aktivnost vode.

Triga ima številne naprave za poskuse in obsevanje vzorcev: 4 vodoravne poskusne kanale, grafitno termično kolono, navpični poskusni kanal, pnevmatično pošto, vrtiljak za obsevanje vzorcev in merilni bazen z drugo

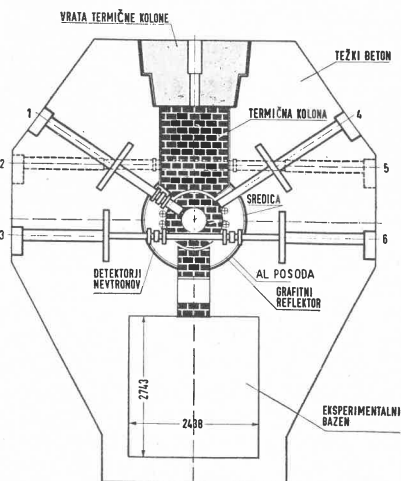
grafitno termično kolono. Vodoravni poskusni kanali povezujejo sredico skozi vodno in betonsko zaščito z reaktorsko dvorano (sl. 2 in 3). Iz teh kanalov izhajajo usmerjeni curki nevtronov in žarkov gama za poskuse v reaktorski dvorani. Termična kolona ima presek $1,2 \times 1,2 \text{ m}^2$ in debelino 1,67 m ter je



Sl. 1. Prerez zaščite in reaktorske posode



Sl. 2. Vodoravni prerez trige



Sl. 3. Navpični prerez trige

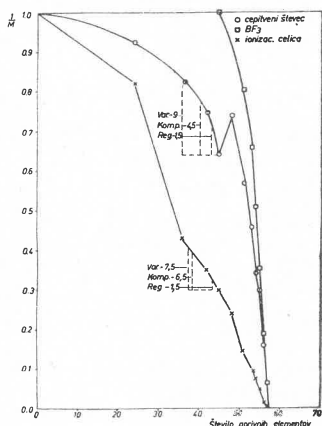
zaščiten s pomičnimi betonskimi vrati. Termična kolona je izvir termičnih nevtronov. Navpični kanal s premerom 34 mm služi za obsevanje vzorcev v največjem nevtronskem fluksu. Pnevmatična pošta je namenjena proizvod-

nji zelo kratkoživih izotopov. Vzorci so v fluksu termičnih nevtronov $4.10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Sprejemna postaja pnevmatične pošte je v kleti, da je zveza s sredico čim krajša. V poprečju potuje vzorec 2 s. Vrtiljak je glavna naprava trige za proizvodnjo radioaktivnih izotopov. V vrtiljaku je 40 mest za obsevanje vzorcev v fluksu termičnih nevtronov $1,8.10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Merilni bazen (sl. 3) je povezan s sredico z drugo termično kolono, ki ima presek $0,61 \times 0,61 \text{ m}^2$ in je dolga 1,2 m. Merilni bazen je namenjen predvsem za meritve na bioloških ščitih.

Kritični poskus

Po zaključku del na montaži mehanske in elektronske opreme reaktorja smo 31. maja 1966 pričeli vlagati gorivne elemente v sredico. Po izkušnjah z drugimi reaktorji iste vrste naj bi postal reaktor kritičen s 55 do 60 gorivnimi elementi, od katerih vsebuje vsak 34 do 36 g U^{235} . Po običaju smo vlagali gorivne elemente postopoma od sredine sredice navzven. V prvem koraku smo hkrati vložili 24 gorivnih elementov, v naslednjih pa smo postopno dodali po vrsti 12, 6, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1 in 1 gorivni element. Kritičnost je bila dosežena pri 58 gorivnih elementih, pri čemer je bila kritična masa U^{235} 2112 g.

Po vsakem koraku smo izmerili podkritično pomnoževanje s števcem BF_3 v vodoravnem poskusnem kanalu, s cepitvenim števcem v zagonskem kanalu reaktorja in z ionizacijsko celico v kanalu za merjenje moči. S pomnoževanjem mislimo na razmerje $m = I/I_0$, pri čemer je I izmerjeno število sunkov zaradi vloženega nevtronskega izvira in cepitev ter I_0 število sunkov zaradi izvira brez cepitev. Nevtron lahko nekoristno pobegne iz sredice, lahko se



Sl. 4. Kritični poskus

absorbira v moderatorju ali U^{238} , lahko se absorbira v U^{235} , ne da bi prišlo do cepitve in končno lahko povzroči cepitev, pri kateri nastaneta 2 ali 3 nevtroni. Imenujmo število nevtronov na koncu cikla, ki ga je začel 1 nevtron, efektivni pomnoževalni faktor k (v kritičnem sistemu je $k = 1$)! Tedaj dobimo zaradi navedenih procesov na posamezni začetni nevtron po prvem ciklu $1 + k$ nevtronov, po drugem $1 + k + k^2$ nevtronov itd. V podkritičnem sistemu je $k < 1$, zato bo po velikem številu ciklov $1 + k + k^2 + \dots = (1 - k)^{-1}$. Vzemimo, da emitira nevtronski izvir Q nevtronov na sekundo in je izkoristek

detektorja η . Tedaj bo $I = Q/(1 - k)$ in $I_0 = Q\eta$. Za pomnoževanje velja torej $m = (1 - k)^{-1}$.

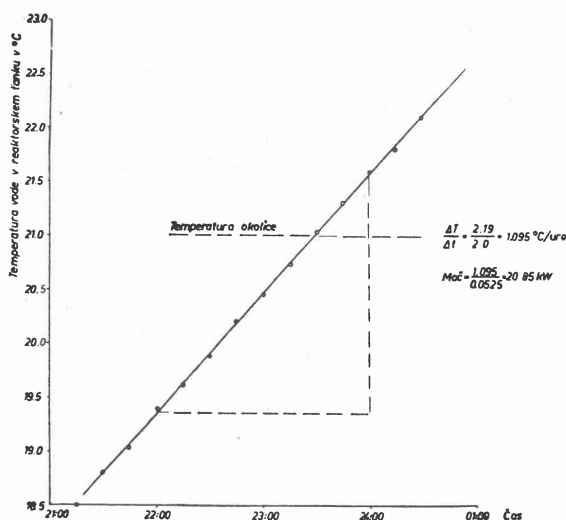
Na sl. 4 so nenesene vrednosti, ki so jih dali omenjeni trije detektorji, v odvisnosti od števila gorivnih elementov. Vse tri krivulje na sl. 4 se sečejo v isti točki. Ko postane reaktor kritičen, je namreč $k = 1$, $m = \infty$ in $1/m = 0$.

Pri vseh teh meritvah so bile kontrolne palice popolnoma izvlečene iz sredice. Po vsakem četrtem koraku smo grobo izmerili učinkovitost vsake kontrolne palice, tako da smo merili pomnoževanje, ko je bila ta kontrolna palica do kraja v sredici, drugi pa povsem izven nje.

Umeritev kontrolnih palic in moči

Reaktivnost definiramo kot $\rho = (k - 1)/k$. Po pogodbi z General Atomic mora biti reaktivnost trige 2,25 %, se pravi, da mora biti $k = 1,0230$. Zato smo vložili v sredico še dodatnih 7 gorivnih elementov. Po tem je v sredici skupno 65 gorivnih elementov z 2307 g U^{235} .

Presežno reaktivnost 2,25 % kompenzirajo kontrolne palice, ko so delno spuščene v sredico. Celotna reaktivnost, ki bi jo lahko kompenzirale kontrolne palice tedaj, ko so povsem spuščene v sredico, je seveda precej večja. Tako lahko z njimi uravnavamo delovanje reaktorja in ga po potrebi ugasnemo.



Sl. 5. Umeritev moči

Za umeritev kontrolnih palic smo uporabili metodo spusta palic (angleško rod drop method). Reaktor je delal sprva pri majhni moči nekaj vatov. Tako ni bilo treba upoštevati temperaturnih sprememb v sredici. Po preteku določenega časa smo reaktor ugasnili s spustom kontrolne palice, ki smo jo umerjali. Nato smo opazovali časovno pojemanje nevtronskega fluksa. Pri General Atomic so izdelali program za elektronski računalnik, ki določi učinkovitost kontrolne palice iz izmerjenega časovnega pojemanja fluksa. Rezultati so dani v diagramu za različne čase. Te rezultate smo lahko uporabili;

ker smo merili pojemanje fluksa v enakih časih. Tako smo ugotovili, da je celotna učinkovitost kontrolnih palic, izražena v procentih reaktivnosti, enaka 5,72 %. Po umeritvi kontrolnih palic smo točneje določili presežno reaktivnost trige, ki je enaka 2,31 %.

Moč trige izmerijo običajno tako, da najprej segrevajo vodo v reaktorski posodi z električnimi grelci z dano močjo P . Pri tem merijo spremembo temperature T v časovni enoti, za katero velja:

$$dT/dt = KP.$$

Iz meritev na večjem številu trig so določili vrednost za koeficient $K = 0,0525^\circ \text{C/kWh}$. Reaktor je obratoval približno z močjo 20 kW. Vsakih 15 sekund smo izmerili temperaturo vode v reaktorski posodi. Meritev je trajala 4 ure. Pri tem je bilo izključeno hlajenje vode, reaktorska posoda pa je bila stalno pokrita. Rezultate meritev kaže sl. 5.

Meritev fluksa termičnih nevtronov in kadmijevega razmerja

Fluks termičnih nevtronov in kadmijevo razmerje R_{Cd} smo določili v centralnem navpičnem kanalu v petih točkah, v vrtiljaku v štirih točkah, v vodoravnem kanalu št. 1 in v pnevmatični pošti. Določili smo tudi fluks termičnih nevtronov na zunanji strani termične kolone.

Fluks termičnih nevtronov smo izmerili absolutno z zlatimi folijami. Folije so imele premer $0,90 (1 \pm 0,01)$ cm in maso med 50 in 60 mg. Aktivnost folij smo merili s koincidenčno metodo beta gama.^{1,2} Napravo so sestavljale tri veje. Žarke gama smo merili s kristalom $\text{NaJ(Tl)} 2'' \times 2''$, ki ga je od izvira ločila 2,5 mm debela plast aluminija, da je bil neobčutljiv za delce beta. Signali iz fotopomnoževalke so šli prek katodnega in linearnega ojačevalnika ter diskriminatorja na števec. Za merjenje delcev beta je služil 2 mm debel kristal antracena. Iz obeh diskriminatorjev pa so šli pulzi v koincidenčno enoto. Istočasne dogodke v vejah beta in gama je zaznal tretji števec. Časovna ločljivost koincidence je bila $2,5 \cdot 10^{-6}$ s.

Razpadna shema Au^{198} je dokaj enostavna, saj razpade 98 % jeder prek vzbujenega stanja Hg^{198} , ki takoj odda 412 keV gama žarek. 4,5 % vzbujenih jeder Hg^{198} se povrne v osnovno stanje z notranjo konverzijo, pri čemer imajo konverzijski elektroni energijo 330 keV. Comptonski elektron, ki ga da 412 keV žarek gama, ima najvišjo kinetično energijo 250 keV. Motilni vpliv konverzijskih in comptonskih elektronov smo odpravili tako, da smo v veji beta nastavili diskriminacijski nivo dovolj visoko. Ker je bila aktivnost folij visoka, smo tudi v veji gama nastavili diskriminacijski prag v sedlo pred fotonskim vrhom žarka gama s 412 keV.

Celotno število koincidence je enako³:

$$N_{tot} = N_{\beta\gamma} + N_{sl} + N_k, \quad (1)$$

pri tem pomeni $N_{\beta\gamma}$ število resničnih koincidence beta-gama, N_{sl} število slučajnih koincidence in N_k število koincidence zaradi kozmičnih žarkov. Število slučajnih koincidence N_{sl} je

$$N_{sl} = 2 \tau N_\beta N_\gamma; \quad (2)$$

pri tem je τ v sekundah izražena časovna ločljivost, N_β število sunkov v veji beta in N_γ število sunkov v veji gama. Zaradi znatnih aktivnosti je število slučajnih koincidenč doseglo tudi 10 % vrednosti pravih koincidenč $N_{\beta\gamma}$. Število $N_{\beta\gamma}$ smo merili dokaj natančno, saj statistična napaka ni presegla 1 %.

Tabela II: Fluks termičnih nevtronov pri merjeni in polni moči ter R_{Cd}

Mesto meritve	Položaj	Φ_{th} (1/cm ² s)		R_{Cd}
		pri merjeni moči	pri moči 250 kW	
Centralni kanal ($P_m = 20$ W)	5	1,42.10 ⁸	3,56.10 ¹²	5,77
	4	2,46	6,15	4,03
	3	3,12	7,80	3,62
	2	2,41	6,04	3,26
	1	1,50	3,75	3,89
Vrtiljak ($P_m = 20$ W)	1	0,984.10 ⁸	1,23.10 ¹²	4,59
	2	1,01	1,27	5,67
	3	1,03	1,28	5,60
	4	1,03	1,28	5,38
Kanal 1 ($P_m = 100$ W)	ob sredici	1,06.10 ⁸	2,64.10 ¹¹	6,10
Termična kolona ($P_m = 10$ kW)	ob izstopu	2,90.10 ⁷	7,26.10 ⁸	—
Pnevmatska pošta ($P_m = 10$ W)	ob sredici	1,23.10 ⁸	3,08.10 ¹²	3,42

Prednost koincidenčne metode je v tem, da moremo določiti aktivnost folij, ne da bi poznali prostorski kot in izkoristek detektorjev. Število razpadov v času štetja je namreč

$$A' = N_\beta N_\gamma / N_{\beta\gamma} \quad (3)$$

Fluks termičnih nevtronov smo izmerili po običajni poti. Aktivnost smo določili kot $A = A'/t$, kjer je t čas štetja. Za nasičeno aktivnost potem velja:

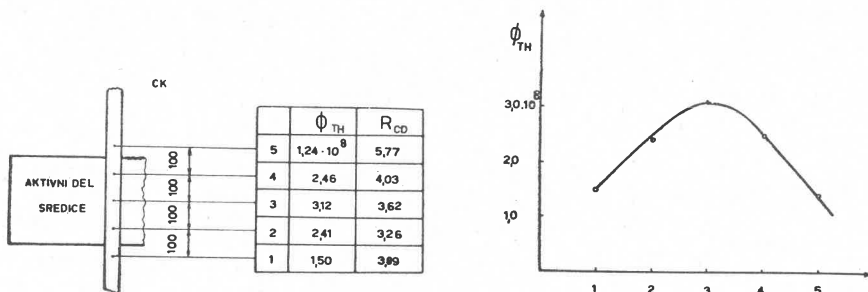
$$A_s = A e^{\lambda t_s} / (1 - e^{-\lambda t_{ob}}) \quad (4)$$

pri čemer je za zlato $\lambda = 1,782 \cdot 10^{-4} \text{ min}^{-1}$, t_{ob} čas obsevanja in t_s čas čakanja od ustavitve reaktorja do pričetka štetja. Med nasičeno aktivnostjo A_s in fluksom termičnih nevtronov Φ_{th} je naslednja zveza:

$$\Phi_{th} = (A_s M / m N_L \sigma_a) (1 - F_{Cd} / R_{Cd}) \quad (5)$$

Pri tem pomeni m maso folije, σ_a absorpcijski presek in M atomsko maso zlata, N_L Loschmidtovo število, $F_{Cd} = A_s^{epi} / A_s^{Cd}$ in je korekturni faktor, ki upošteva delno absorpcijo epitermičnih nevtronov v kadmiju. Vzeli smo, da je $F_{Cd} = 1,14^4$. $R_{Cd} = (A_s / m) / (A_s^{Cd} / m)$ kadmijevo razmerje.

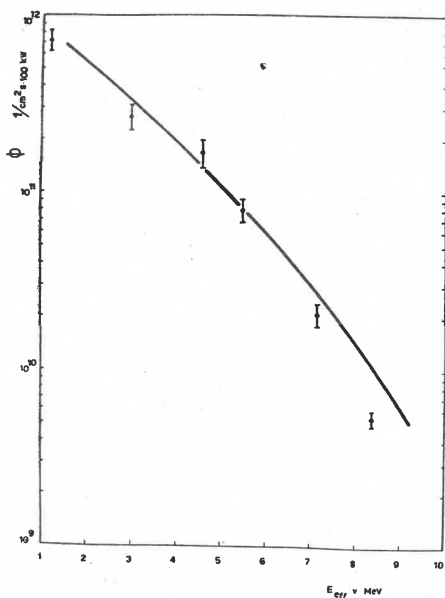
Izračunane vrednosti termičnega fluksa in kadmijevega razmerja za centralni navpični kanal kaže sl. 6. V tabeli II so rezultati, ki smo jih dobili za Φ_{th} , na vseh mestih, kjer smo merili. Rezultati se nanašajo na moč, pri kateri je reaktor delal, preračunani pa so tudi na polno moč 250 kW. V isti tabeli so tudi vrednosti R_{Cd} .



Sl. 6. Fluks termičnih nevtronov in kadmijevo razmerje R_{Cd} v centralnem navpičnem kanalu v odvisnosti od kraja

Meritve spektra hitrih nevtronov

Spektre hitrih nevtronov smo izmerili v centralnem navpičnem kanalu s pragovnimi detektorji. Uporabili smo 6 pragovnih detektorjev: $In^{115}(n, n') In^{115}$, $Ni^{58}(n, p) Cu^{64}$, $Al^{27}(n, p) Mg^{27}$, $Mg^{24}(n, p) Na^{24}$ in $Al^{27}(n, \alpha) Na^{24}$. Aktivnost vseh



Sl. 7. Spekter hitrih nevtronov v centralnem navpičnem kanalu v odvisnosti od energije

detektorjev smo šteli s kristalom NaJ(Tl) z luknjo $2'' \times 2''$. Tako je zajel detektor skoraj polni prostorski kot. Izkoristek kristala v odvisnosti od energije smo določili na 5 % natančno z naslednjimi standardnimi izviri: Co⁵⁷ (129 keV), Hg²⁰³ (279 keV), Cs¹³⁷ (661 keV), Mn⁵⁴ (834 keV) in Co⁶⁰ (1250 keV).

Dobljene spektre smo primerjali z rezultati, ki jih je dobil Berwanger⁶ na dunajski trigi. Sl. 7 kaže spekter hitrih nevtronov v centralnem navpičnem kanalu. Pri tem ustreza polna črta Bergwangerjevimi rezultatom, ki jih je posnel s 13 detektorji, naše meritve pa so označene s krožci. Vrisane so tudi napake. Te v povprečju ne presegajo 15 %. Izmerjene vrednosti se dobro ujemajo z Berwangerjevimi, čeprav smo pri merjenju aktivnosti imeli obilo težav zaradi slabe ločljivosti kristala z luknjo.

* Pri zagonu reaktorja sta sodelovala poleg strokovnjakov GA še N. Bernot in F. Klopčič, pri meritvah termičnega fluksa in spektra nevtronov pa H. Šolinc.

LITERATURA

- ¹ T. Kalin, Diplomsko delo, Ljubljana, 1962.
- ² G. Pregl, I. simpozij reaktorske fizike, Ljubljana, 1963.
- ³ A. C. Mitchell v knjigi K. Siegbahn: Beta and Gamma-Ray Spectroscopy, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1955.
- ⁴ K. T. Beckurts and K. Wirtz: Neutron Physics, Berlin, (Springer), 1964.
- ⁵ Reactor Physics Constants, ANL-5800, 1963.
- ⁶ G. Berwanger: Absolutmessung des schnellen Neutronenflusses im TRIGA-MARK-II-Reaktor, Atomkernenergie 10, 451 (1965).

UPORABA ELEKTRONSKEGA RAČUNALNIKA PRI POUKU MATEMATIKE NA EKONOMSKI FAKULTETI

Kot del uporabne matematike se na Ekonomski fakulteti predava v tretjem letniku predmet Linearno programiranje. Za ta predmet kažejo mladi ekonomisti izredno veliko zanimanje pa tudi veselje.

Zaradi obilice numeričnega računanja pri problemih linearnega programiranja, ki se rešujejo po metodi simpleksov, je bilo do nedavna v okviru pedagoškega dela praktično nemogoče obdelati kakršenkoli zahtevnejši problem, ker ni bilo mogoče izkoristiti elektronskega računalnika.

Za študijsko leto 1966 je določil Sklad za šolstvo za pedagoško dejavnost na fakultetah posebna denarna sredstva za uporabo elektronskega računalnika v Računskem centru Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani. V ta namen je Sklad za šolstvo odobril Ekonomski fakulteti sredstva za 50 ur strojnega računanja.

Ta koristen ukrep Sklada za šolstvo je omogočil, da se je predmet Linearno programiranje s tehničnega vidika lahko moderniziral. Predavatelj je zaradi te tehnične možnosti v okviru splošnega linearnega programiranja izčrpno obdelal poglavje o proizvodnih procesih, ki potekajo v več fazah. Za to poglavje so dobili slušatelji brezplačno nad 40 tipkanih strani obsegajoč študijski material. Tako razdelitev študijskega materiala je omogočil Inštitut za ekonomska raziskovanja v Ljubljani, ki je pokrila stroške razmnoževanja.

Iz snovi tega poglavja je naredil vsak slušatelj poseben program v skladu s predpisano mu varianto oziroma karakteristiko proizvodnega procesa. Numerični izračun je moral opraviti na elektronskem računalniku v Računskem centru.

O delu Računskega centra in elektronskega računalnika je slušatelje informiral na posebnih sestankih tov. Dušan Magušar, uslužbenec Računskega centra; ob tej priložnosti je dal slušateljem tudi navodila, kako naj priredijo podatke svojih programov, da bodo primerni za računanje z elektronskim računalnikom. Tov. D. Magušar je tudi opravil vse računanje na elektronskem računalniku, toda tako, da je slušatelj osebno spremljal od začetka do konca ves računski proces.

Ob tej priložnosti so se slušatelji nekoliko spoznali z delom Računskega centra, spoznali so nekatere njegove sodelavce in na lastne oči videli, kako hitro je računalnik opravil delo, za katerega bi sami brez njega potrebovali nekaj dni.

Tak moderniziran način pouka linearnega programiranja je prav gotovo mnogo koristil ne samo slušateljem, ampak tudi popularizaciji Računskega centra v ekonomskih krogih, saj so sedanji študenti ob primerni vzgoji bodoči koristniki uslug elektronskega računalnika.

Vsem, ki so omogočili tak način pedagoškega dela, iskrena hvala.

A. Vadnal

DOMAČE VESTI

OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

Najkrajši občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS, kar jih pomnijo najstarejši člani, je bil 29. X. 1966, in to po dveh dnevih, posvečenih fiziki. Lepa dvorana tehniške šole za elektrotehniško stroko v Ljubljani je sprejela prek 60 članov našega Društva iz Ljubljane in tudi drugih bližnjih in daljnih krajev Slovenije. Videli smo mnogo že dolgoletnih sodelavcev, pa tudi še neznanih mladih obrazov.

Število 60 ni majhno, a kljub temu je bil stari odbor prepričan, da jih bo še več, predvsem pa si je močno želel, da bi bila dvorana polna. Povabljeni so bili vsi predavatelji matematike in fizike v šolah ter vsi tisti posamezniki, s katerimi imamo kakršnekoli stike. Želeli smo si spet živahen in ploden občni zbor, na katerem bi člani povedali svoje želje, potrebe in pripombe, še posebej pa spregovorili o delu upravnega odbora svojega društva. Mnogo truda smo vložili ob posameznih akcijah, a ne vemo, če prav »služimo narodu«. Nismo pa želeli slišati le hvale, tudi graja bi bila nadvse dobrodošla, kajti po takem odkritem pogovoru bi lahko pričakovali le še boljšega dela, česar si želimo prav vsi. Zato vas že danes prosimo, da sodelujete na prihodnjem občnem zboru. Prav tako pa želimo vse leto slišati vaše želje. Zato vabimo vse člane širšega odbora, a tudi vse ostale člane društva, na naše seje, ki bodo vsako prvo sredo v mesecu.

Po pozdravnem govoru predsednika društva prof. dr. Alojzija Vadnala smo z enominutnim molkom počastili spomin dveh v zadnjem letu umrlih članov: prof. Simona Dolarja in prof. Fajdigove.

Na predlog tov. predsednika smo izvolili naslednje delovno predsedstvo: dr. Fran Diminko, France Šušteršič ter France Avsec. Zapisnik pa je vodila ing. Marica Vencelj.

Sledila so poročila odbornikov. Prvi je tov. predsednik poročal naslednje: Odbor društva je tudi v tej poslovni dobi nadaljeval delo, ki ga opravlja društvo že razmeroma dolgo dobo. Najbolj pomembne dejavnosti so bile: izdajanje Obzornika za matematiko in fiziko in knjižne zbirke Sigma, srednješolski krožki ter tekmovanja iz matematike in fizike. Že takoj v začetku poslovne dobe je bil kongres v Sarajevu, ki je bil lepa manifestacija dela na področju matematike, fizike in astronomije v naši državi. Zdi pa se nam, da naša republika ni bila primerno zastopana na kongresu in da nismo dovolj prikazali naše dejavnosti na teh znanstvenih področjih. Pomemben uspeh odbora v prejšnji poslovni dobi je bil dogovor s Skladom Borisa Kidriča. Ta nam bo pomagal na več načinov: vsako leto bo podelil eno ali dve štipendiji najboljšim dijakom na tekmovanju, kakor tudi posebno prizadevnim učiteljem matematike in fizike na srednjih, višjih in visokih šolah, ki prirejajo matematične in fizikalne krožke, če se bodo želeli udeležiti podiplomskih tečajev za nadaljnje izpopolnjevanje ali pa obiskati matematična in fizikalna središča v tujini. Na te ugodnosti opozarjamo naše člane, ker ne bi bilo pametno, če jih ne bi v celoti izkoristili. Posebno delaven je bil odbor proti koncu svoje poslovne dobe zato, da bi nadaljnje delo ne trpelo zaradi predvidenih sprememb v odboru.

Tem besedam je sledilo tajnikovo kratko poročilo o povečani korespondenci zaradi večje aktivnosti društva v zadnjem letu, posebno še, ker organiziramo krožke tudi izven Ljubljane. Zelo pohvalna je ugotovitev, da so bile seje pestre, zelo dobro obiskane in da jih je bilo kar 12. Zato pa nam bodo potrebna še večja finančna sredstva. Ker je naše delo koristno, jih bomo morali poiskati še pri občinskih skupščinah in drugod. Za uspešno delo se moramo zahvaliti vsem, ki so nam kakorkoli pomagali, še prav posebno pa Republiškem sekretariatu za prosveto in kulturo za dotacije, Skladu za pospeševanje založništva SRS za subvencije knjižnici Sigma ter reviji Obzornik za matematiko in fiziko. Skladu Borisa Kidriča za enkratno pomoč, in Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko ter Nuklearnemu inštitutu J. Stefan, saj sta nam stala vedno ob strani.

V nekaj besedah je opozoril tudi na zbirko Sigma, ki obsega že 14 lepih, dostopnih in koristnih knjižic, a ne samo za matematike, pač pa tudi za fizike, astronome, tehnike ter druge, ki imajo kakršenkoli stik z matematiko. Te knjižice še vedno lahko dobite v matematični knjižnici s približno 15-odstotnim popustom. Da so knjige zanimive, govori dejstvo, da je šest od njih že razprodanih. Od zadnjega občnega zbora smo jih komisijsko prodali svojim članom že skoraj 1400. To pa ni majhno število. V matematični knjižnici pa lahko dobite tudi nekatere druge matematične publikacije. Kot kaže, snovi za to zbirko ne bo zmanjkalo, saj še nikoli ni pisalo toliko avtorjev kot letos: Matematične strukture II, Osnove kvantne mehanike, Funkcije II, Geometrija, Fizikalne meritve in morda še nekatere. Iz svojega področja pa bodo prispevali še astronomi. Veseli nas, da bo to res zbirka našega društva, ne pa samo matematikov. Seveda se bomo pri delu srečali s številnimi problemi, saj se bo lanska gospodarska reforma poznala tudi pri razpoložljivih sredstvih, namenjenih za pospeševanje založništva, a upamo, da jih bomo uspešno rešili.

Promet v društveni blagajni se je od lanskega leta več kot potrojil. To je najlepši dokaz za našo aktivnost. V blagajni je primanjkljaj 875,42 N din. Čeprav moramo dobiti še del lanske dotacije, za začetek res nimamo veliko.

O delu pri krožkih za matematiko in fiziko, kakor tudi o poteku in uspehu na republiškem in zveznem tekmovanju pa ste lahko prebrali že v letošnji prvi številki.

Najteže pa je vedno naši reviji Obzornik za matematiko in fiziko. Subvencija Sklada za pospeševanje založništva, pomoč Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko ter naročnina ne zadostujejo za celotno financiranje. Zato se je upravni odbor Društva po dolgih razpravah odločil za dvojno številko v letošnjem letu. Delni vzrok za to je tudi pomanjkanje rokopisov. Da se v bodoče ne bi bilo več treba posluževati takih načinov, je tehnični urednik pozval prisotne, naj bi v Obzornik čim več in čim pogosteje pisali. Da bi Obzornik čimbolj približali tistim, ki ga največ berejo, bo uvedena še rubrika z naslovom Iz naših aktivov, v kateri bodo poročila o delu v aktivu, o vsebini predavanj itd. Želimo, da bi tudi iz drugih krajev Slovenije, kjer delujejo aktivni, pošiljali prispevke za to in tudi za druge rubrike, tako da bi bili povsod seznanjeni z delom. Zato naj bi v uredniški odbor sprejeli še dva člana, po enega fizika in matematika, ki bosta vodila to rubriko.

Po lanskem mrtvilu smo letos aktiv le z veliko težavo pozno spomladi ponovno spravili na noge. Prizadevnost organizatorjev kažejo številni obiski in to, da sta bila po dveh spomladanskih tudi že jeseni dva sestanka.

Uspeh društva je tudi Bibliografija Franca Močnika, ki jo je napisal in izdal pri Slovenski akademiji znanosti in umetnosti prof. Jože Povšič, in markacija poti od Dolskega do Zagorice, rojstnega kraja matematika Jurija Vege, kjer bo v naslednjem letu v njegovi rojstni hiši urejena soba z biografskimi in bibliografskimi podatki tega našega velikega matematika. Prav tako je pomembna enotnost našega in drugih slovenskih strokovnih društev, ko smo odklonili predlog za dvostopenjsko srednjo šolo.

Ker je občni zbor na predlog predsednika nadzornega odbora razrešil stari odbor, je v njegovem imenu predlagal novi odbor doc. dr. Niko Prijatelj. Stari odbor s predsednikom na čelu je bil mnenja, da je treba novemu odboru pripraviti ugodna tla za delo in ga po možnosti že vpeljati vanj, da ne bi občni zbor ohromil društveno življenje za nekaj tednov. To mu je nadvse lepo uspelo.

Iz seznama članov novega odbora in sodelavcev z njihovimi zadolžitvami pa lahko spoznamo tudi plan dela za naslednje leto:

predsednik: dr. Janez Strnad, doc. na katedri za fiziko;

podpredsednik: dr. Anton Suhadolc, doc. na katedri za matematiko;

tajnik in sourednik zbirke Sigma: Ciril Velkovich, bibliotekar v matematični knjižnici;

blagajnik: Janez Markelj, prof. matematike na gimnaziji Ljubljana-Vič; vodji krožkov, republiškega tekmovanja in slovenske ekipe na zveznem tekmovanju: Jože Vrabec, asistent na katedri za matematiko, ter France Ahlin, višji predavatelj na katedri za fiziko;

vodja aktiva za matematiko in fiziko: Marija Jemec, pedagoški svetovalec pri zavodu za prosvetno-pedagoško službo Ljubljana Vič-Rudnik;

tehnični urednik revije Obzornik za matematiko in fiziko: France Kvaternik, prof. fizike na gimnaziji Ljubljana-Poljane.

Vodji aktiva za matematiko in fiziko so dodeljeni v pomoč naslednji člani: Stanko Uršič, pedagoški svetovalec za matematiko in fiziko pri zavodu za šolstvo, France Čemažar, pedagoški svetovalec za srednje šole pri zavodu za prosvetno-pedagoško službo Ljubljana I, Jože Povšič, pomočnik direktorja tehniške šole za kemijsko, metalurško, rudarsko in lesno industrijsko stroko v Ljubljani ter France Avsec, prof. matematike na gimnaziji v Kranju.

V uredniškem odboru Obzornika za matematiko in fiziko bodo: dr. Robert Blinc, Zvonimir Bohte, dr. Anton Moljk, Jože Pahor, Valentin Pivk, dr. Mitja Rosina, dr. Janez Strnad, France Šušteršič, Stanko Uršič ter dr. Ivan Vidav.

Člani uredniškega odbora knjižne zbirke Sigma bodo: dr. France Križanič, dr. Niko Prijatelj, dr. Janez Strnad, dr. Alojzij Vadnal ter dr. Ivan Vidav. Pozneje pa bomo kooptirali v odbor še fizika s katedre za fiziko oziroma iz nuklearnega inštituta J. Stefan.

V nadzornem odboru bodo isti člani kot doslej: Lojze Bernik, Duša Gajšek in Ivan Stalec.

Ostane zadolžitve, ki so tudi pomembne za društvo, pa so ohranili dosednji tovariši: Jože Povšič (bibliografija), dr. Alojzij Vadnal (terminologija in ureditev sobe v rojstni hiši Jurija Vege), Stanko Uršič (zastopstvo našega društva v svetu fakultete za naravoslovje in tehnologijo), France Plevnik in Marjan Prosen (povezava z Ljudsko tehniko in gibanjem Znanost mladini), France Šušteršič (povezava s Prirodoslovnim društvom). Člani sekretariata Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije iz naše republike pa so dr. Fran Dominko, kot podpredsednik zveze, Jože Povšič ter dr. Janez Strnad.

Za lažje sodelovanje z drugimi kraji v Sloveniji smo izbrali 6 članov, ki bodo v društvu zastopali svoj okoliš:

Nika Šilc, prof. na gimnaziji v Celju,
 France Avsec, prof. na gimnaziji v Kranju,
 Bogomila Kolenko, prof. na gimnaziji v Kopru,
 France Bezjak, prof. na višji tehniški šoli v Mariboru,
 France Perne, prof. na gimnaziji v Novi Gorici ter
 Dušan Modic, prof. na gimnaziji v Novem mestu.

Ob koncu občnega zbora pa smo bili priče skromni slovesnosti, ki smo jo pripravili našima večletnima vodjema društva: predsedniku prof. dr. Alojziju Vadnalu in podpredsedniku Jožetu Povšiču. Predsednik delavnega predsedstva jima je v imenu vseh članov Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS poklonil knjigi »Galerija evropskih majstora« z besedami: ZA VEČLETNO, POŽRTVOVALNO IN NEUMORNO DELO VAM RES ISKRENA HVALA!

Ciril Velkovrh

NA UNIVERZI V LJUBLJANI SO DIPLOMIRALI IZ FIZIKE

91. Potokar Milan	1964	Merjenje fluksa hitrih nevtronov iz reakcije $T/d, n/He^4$
92. Vrenko Erik	1964	Merjenje fluorescentnega pridelka lupine K v argonu
93. Sagmeister Otmar	1964	Delovanje in uporaba plazemskega gorilnika
94. Jovanovič Aleksander	1964	Mikrovalovne dielektrične lastnosti $NaH_3/SeO_3/2$ in $NaD_3/SeO_3/2$ ter njih odvisnost od frekvence, temperature in zunanega električnega polja
95. Stepišnik Janez	1964	Elektronska paramagnetna resonanca obsevanih monokristalov $NaH_3/SeO_3/2$ in $NaD_3/SeO_3/2$
96. Levstik Adrijan	1964	Dielektrične lastnosti kristalov $NaH_3(SeO_3)_2$ in $NaD_3(SeO_3)_2$
97. Repinc Josip	1964	Raziskave mikrovalovnih in strukturnih karakteristik feritov
98. Šentjunc Marjeta	1964	Meritev razvejitvenega razmerja K/β pri fluoru 18
99. Kovačič Mitja	1965	Meritve spinov jedrskih nivojev Al^{26}
100. Vovk Daniel	1965	Dielektrične lastnosti mešanih kristalov $NaH_3(SeO_3)_2$ in $NaD_3(SeO_3)_2$
101. Babšek Bogdan	1965	Tokovne razmere v vodilniku in med-prostoru Kaplanove turbine in primerjava številčnih rezultatov z meritvami
102. Petkovšek Jože	1965	Temperaturna odvisnost kvadrupolnega razcepa jedrske magnetne resonance Na^{23} v devterirani rochellski soli

- | | |
|------------------------|--|
| 103. Bevk Jože | 1965 Priprava tankih dielektričnih plasti tantalovega pentoksida |
| 104. Palčič Branko | 1965 Elektronska spinska resonanca obsevanega feroelektrika $\text{LiH}_3(\text{SeO}_3)_2$ |
| 105. Cankar Ivan | 1965 Transport elektronov v tankih plasteh |
| 106. Lavrenčič Borut | 1965 Protonska spinska relaksacija v obsevanem $\text{NaH}_3(\text{SeO}_3)_2$ |
| 107. Čadež Andrej | 1965 Sipalne funkcije kristalov za mrzle nevtrone |
| 108. Šolinc Hinko | 1965 Meritev pridelka nevtronov v pulzih nevtronskega generatorja |
| 109. Lupinc Zdravko | 1966 Enodelčne energije nukleonov v cilindrično deformiranih lažjih jedrih |
| 110. Žekš Boštjan | 1966 Paraelastični centri O_2 v kristalih KCl, KBr in KJ |
| 111. Zupan Jurij | 1966 Merjenje magnetne susceptibilnosti nekaterih heksafluoridov |
| 112. Krajnik Janez | 1966 Fotonuklearna absorpcija v kalciju |
| 113. Emili Milič Karel | 1966 Temperaturna odvisnost ojačenja fotopomnoževalke 58 AVP |
| 114. Štular Marko | 1966 Študij ozadja pri meritvah spektrov žarkov γ iz zajetja hitrih nevtronov |
| 115. Miklavc Adolf | 1966 Vpliv Coriolisove sile na strukturo vele-
resonance pri C^{12} |
| 116. Oblak Seta | 1966 Merjenje vlažnosti zelo suhih plinov |
| 117. Rupnik Tomaž | 1966 Merjenje fluorescentnega izkoristka lupine K v Cl |
| 118. Lukman Beno | 1966 Elektronska konfiguracija selenosečnine po metodi Pariser-Parr-Pople |
| 119. Žakelj Jože | 1966 Elektronske mikroskopske preiskave strukture tankih plasti CdS in CdSe |
| 120. Maček Vilko | 1966 Parjenje v lahkih jedrih C^{12} |
| 121. Rant Jože | 1966 Generator časovno enakomerno pogostih napetostnih sunkov |
| 122. Čuden Ciril | 1966 Izprojiciranje stanj z določeno vrtilno količino |
| 123. Valič Marko | 1966 Protonske spinske relaksacije v rochellski soli, kalijevem kislem arzenatu in obsevanem triglicin sulfatu |
| 124. Kodre Alojz | 1966 Fluorescenčni pridelek lupine K pri žveplu |
| 125. Lesjak Janez | 1966 Vpliv sile spin-tir na strukturo vele-
resonance pri C^{12} |

NOVE KNJIGE

Jože Povšič: Bibliografija Franca Močnika. Slovenska akademija znanosti in umetnosti. Razred za matematične, fizikalne in tehnične vede. Dela, 8, Ljubljana 1966.

Prof. Jože Povšič zbira kot vodja komisije za bibliografijo Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije kakor čebelica vztrajno in marljivo že nad dve desetletji domače bibliografsko gradivo s področja matematike. Pričujoča bibliografija je sad njegovega nesebičnega in neumornega dela in hkrati trajen spomenik Francu Močniku, možu, ki je dal s svojim delom za več kot sto let neizbrisen pečat matematični pedagoški literaturi v srednji Evropi. Z vsem srcem pozdravljamo Močnikovo bibliografijo, ki dokazuje, kaj vse je zmozel naš človek s svojim talentom in s svojo pridnostjo. Morda je za ocenjevanje Močnikovega dela dovolj, če navedemo samo golo dejstvo, da je uspelo njegovemu bibliografu registrirati 2315 izdaj njegovih del v 13 jezikih.

Avtor začenja delo s ponatisom svojega referata na spominski proslavi ob 150-letnici rojstva Franca Močnika, ki jo je priredilo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije dne 24. oktobra 1964 v Cerknem. V tem referatu poda avtor oris Močnikovega življenjskega dela in njegove poglede na pedagoško problematiko pri pouku matematike. Temu orisu sledi daljši izvleček v nemškem jeziku.

Bibliografski del začenja avtor z uvodom, v katerem navede uporabljene vire.

Bibliografske podatke o Francu Močniku navede avtor ločeno po jezikovnih področjih v naslednjem vrstnem redu:

- I. V nemškem jeziku.
- II. V slovenskem prevodu.
- III. V hrvaškem prevodu.
- IV. V srbskem prevodu.
- V. V prevodih za Bosno in Hercegovino.
- VI. V albanskem prevodu.
- VII. V bolgarskem prevodu.
- VIII. V češkem prevodu.
- IX. V italijanskem prevodu.
- X. V madžarskem prevodu.
- XI. V novogrškem prevodu.
- XII. V poljskem prevodu.
- XIII. V romunskem prevodu.
- XIV. V slovaškem prevodu.
- XV. V ukrajinskem prevodu.

V zadnjem poglavju poda avtor seznam literature o Francu Močniku od l. 1851 do l. 1964.

Bibliografijo krasi slika Franca Močnika.

Ob pregledu tako obsežne bibliografije se moramo nehote čuditi plodnosti Močnikovega dela pa tudi vestnosti njegovega bibliografa prof. Jožeta Povšiča.

A. Vadnal

NEKATERE DOSTOPNEJŠE NOVE KNJIGE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

1. Miličić P. M.: Jednakosti identične transformacije. Zbirka rešenih zadataka. Beograd, Društvo matematičara, fizičara i astronoma SRS. 1964. 32 str. Materiali za mlade matematičare, sv. 1.
2. Arsenović M.: Zbirka rešenih zadataka iz kombinatorike. Beograd, DMFA SRS 1964. 48 str. Materiali za mlade matematičare, sv. 2.
3. Vasiljev N. B. i A. A. Jegorov: Zbirka pripremnih zadataka za Sverusku olimpiadu mladih matematičara. Beograd, DMFA SRS 1965. 63 str. Materiali za mlade matematičare, sv. 5.
4. Zbirka pripremnih zadataka za moskovsku matematičku olimpiadu. I. Beograd, DMFA SRS 1966. 88 str. Materiali za mlade matematičare, sv. 6.
5. Zbirka zadataka s moskovskih matematičkih olimpiada. I. Beograd. DMFA SRS 1966. 100 str. Materiali za mlade matematičare, sv. 7.
6. Kločkov M. V.: Jedno očigledno sredstvo u nastavi geometrije i trigonometrije. Beograd, ZIU SRS 1963. 60 str. Matematička biblioteka, br. 24.
7. Tosić D. D.: Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita na tehničkim fakultetima. Beograd, ZIU SRS 1964. 95 str. Matematička biblioteka, br. 27.
8. Mitrinović D. S.: Matematika za prvi stepen nastave na fakultetima u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima. Beograd, Građevinska knjiga 1964. 519 str.
9. Sprague R.: Recreation in mathematics. Some novel problems. London, Blackie 1963. 61 str.
10. Allendorfer C. B.: Mathematics for parents. New York, The MacMillan comp. 1965. 167 str.
11. Hancock H.: Theory of maxima and minima. New York, Dover publ. 1960. 193 str.
12. Kalužin L. A.: Čto takoe matematičeskaja logika? Moskva, Izd-vo Nauka 1964. 152 str. (cir.)
13. Boltjanskij V. G. i J. M. Jaglom: Preobrazovanija. Vektory. Moskva, Izd-vo Prosvešćenie 1964. 303 str. (cir.)
14. Gradner M.: Matematičeskie čudesa i tajny. Moskva, Izd-vo Nauka 1964. 128 str. (cir.)
15. Sommerville D. M. Y.: The elements of non-euclidean geometry. New York, Dover publ. 1958. XVI + 274 str.
16. Steinhaus H.: One hundred problems in elementary Mathematics. Oxford, Pergamon press 1963. 171 str.
17. McLean K. R.: The teaching of sets in schools. London, G. Bell & Sons 1965. 46 str.
18. Bryant S. J., G. E. Grahm, K. G. Wiley: Nonroutine problems in algebra, geometry and trigonometry. New York, McGraw-Hill 1965. 91 str.
19. Kalnin R. A.: Algebra i elementarnye funkcii. Izd. 2. Moskva, Izd-vo Nauka 1965. 448 str. (cir.)
20. Sivašinskij I. H.: Elementarnye funkcii i grafiki. Teorija i zadači s rešenjima. Moskva, Izd-vo Nauka 1965. 242 str. (cir.)
21. Lausmann R. F.: Fun with figures. New York, McGraw-Hill 1965. 243 str.
22. Zakrajšek E.: Programiranje v algolu. Ljubljana, Univerza v Ljubljani 1966. 110 str.
23. Vilenkin N. Ja.: Rasskazy o množestvah. Moskva, Izd-vo nauka 1965. 128 str. (cir.)
24. Ostrovskij A. I.: 75 zadač po elementarnoj matematike — prostyh, no... Moskva, Izd-vo Prosvešćenie 1966. 132 str. (cir.)
25. Markuševič A. I.: Rjady. Moskva, Gostehizdat 1961. (cir.)
26. Boltjanskij V. G. i I. C. Gohberg: Teoremy i zadači kombinatornoj geometrii. Moskva, Izd-vo Nauka 1965. 108 str. (cir.)
27. Matematička takmičenja učenika škola II. stupnja u SRH. 1958—1965. Zagreb, Stručno obrazovanje 1966. 91 str.
28. Informacija o programiranem učenju. Beograd. Jugoslovenski zavod za proučavanje školskih i prosvetnih pitanja. 1964.
29. Povećanje efektivnosti nastave matematike iz iskustva (prakse) nastavnika. Beograd, Jugoslovenski zavod za proučavanje školskih i prosvetnih pitanja. 1965.

OBVESTILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS ima v zalogi večje število kompletnih letnikov oz. posameznih številk revije »Obzornik za matematiko in fiziko«. Le-te lahko dobite do vključno osmega letnika po znižani ceni v Matematični knjižnici v Ljubljani, Trg revolucije 11. V zalogi imamo še naslednje letnike in številke:

I	1951,	2, 3, 4,	
II	1952,	2,	
III	1953-54,	1, 2-3, 4, 5-6, C	(celoten)
IV	1955-56,	1, 2, 3, 4,	C
V	1956-57,	4,	
VI	1957-58,	2, 3, 4,	
VII	1960,	1, 2, 3, 4,	C
VIII	1961,	1, 2, 3, 4,	C
IX	1962,	2, 3, 4,	
X	1963,	1, 2, 3, 4,	C
XI	1964,	1, 2, 3, 4,	C
XII	1965,	1, 2, 3, 4,	C

Do vključno 8. letnika stane letnik 1,20 N. din, posamezna številka 0,30 N. din; 9. in 10. letnik stane 4 N. din, številka 1,20 N. din; 11. in 12. letnik pa stane 5 N. din, posamezna številka 1,50 N. din.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejšajo ga: R. Blinc, Z. Bohte, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, J. Pahor, V. Pivk, M. Rosina, J. Strnad, F. Šušteršič, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 4 N-din, za zasebnike 5 N-din, za šole 10 N-din, za ustanove in podjetja 20 N-din. Čekovni račun Obzornika je 503-608-314.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.