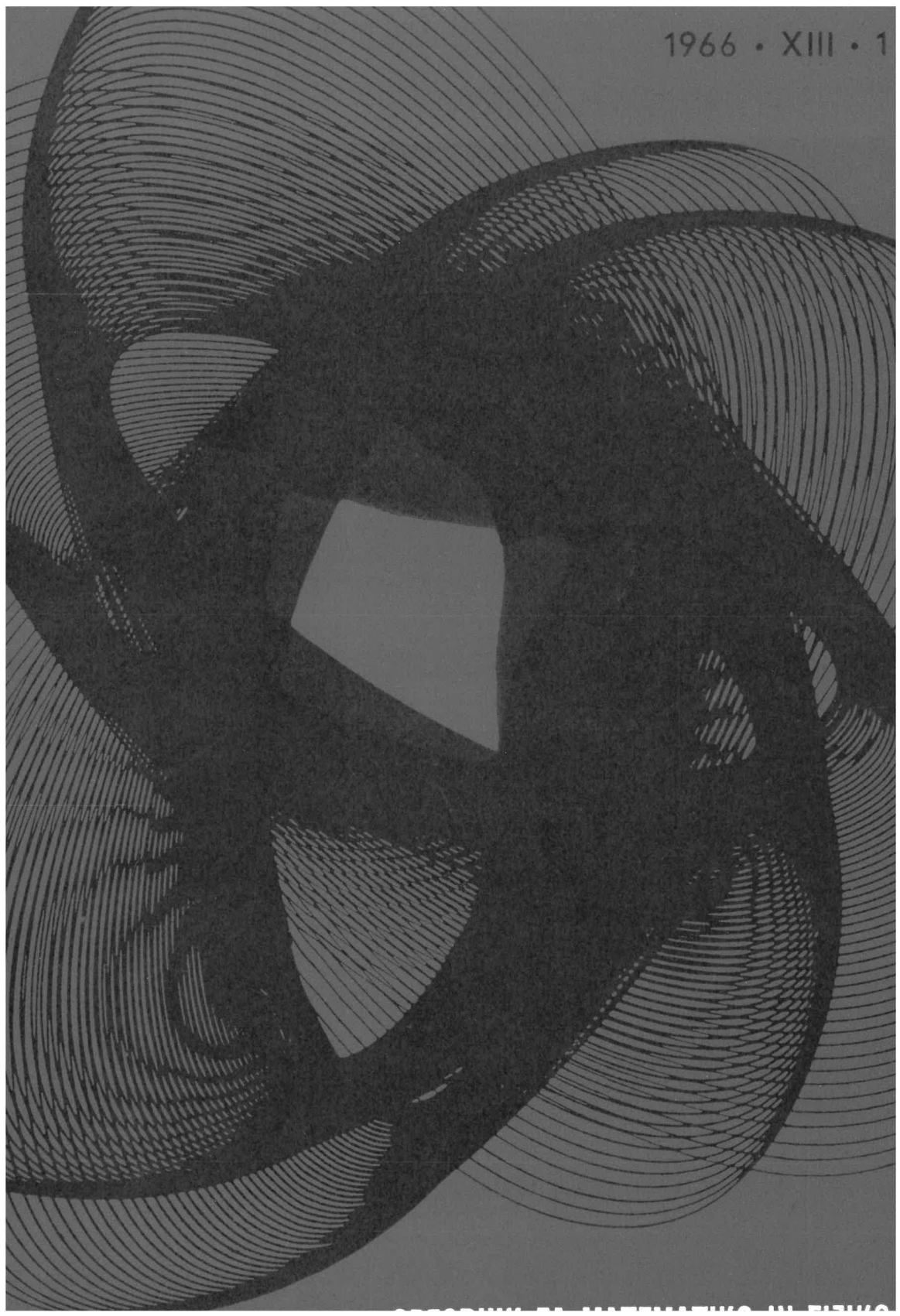




OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XIII. LETNIK — 1. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS
LJUBLJANA, JUNIJ 1966

VSEBINA

Članki	Stran
O p-adičnih številih (J. Grasselli)	1
Razširitve obsega realnih števil (J. Vrabec)	11
Elektromehanski pojavi pri kristalih (B. Lavrenčič)	21
Šola	
Vlažen zrak in megla (M. Hribar in J. Strnad)	27
Domače vesti	
Krožki in tekmovanja za mlade matematike (S. Uršič)	35
Akcija za usmerjanje mladine pri izbiri študija na visokih šolah (F. Ahlin)	39
Zvezno tekmovanje mladih fizikov (M. Hribar)	41
Utrinek	
Statistika in vojskovanje (J. Strnad)	44
Nove knjige	46

CONTENTS

Articles	Page
Some about p-adic's Numbers (J. Grasselli)	1
Extensions of the Field of the Real Numbers (J. Vrabec)	11
Electromechanical Properties of Crystals (B. Lavrenčič)	21
School	27
Home News	35
New Books	46

O p-ADIČNIH ŠTEVILIH

JOŽE GRASSELLI

1. Števila, imenovana p-adična, je vpeljal K. Hensel (1861—1941) v zvezi z nekim problemom iz teorije števil. Od njihove uvedbe se je pomen teh števil večal in so sedaj razen v teoriji števil važna tudi v algebri. Če pustimo vse to vnmear, pa so p-adična števila zanimiva tudi zato, ker so v nekem smislu edini sorodnik realnih števil. Kako je treba razumeti to izjavo, bo razvidno pozneje.

Uvesti je mogoče p-adična števila različno. Prav lepo se pride do njih na način, kakor ga je uporabil G. Cantor pri opredelitvi realnih števil. Kako se vpeljejo p-adična števila po tem postopku, bomo nekoliko opisali.

Zaznamujmo s Q obseg racionalnih števil. Naj bo f funkcija, ki priredi vsakemu racionalnemu številu a realno število $f(a)$ tako, da je

- 1° $f(a) > 0$ za $a \neq 0$ in $f(0) = 0$
- 2° $f(ab) = f(a)f(b)$
- 3° $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$

Vsako funkcijo f s temi lastnostmi imenujemo metrika obsega Q . Navedimo dva zgleda.

Funkcija

$$f_0(a) = 1 \text{ za } a \neq 0, f_0(0) = 0 \quad (1)$$

očitno ustreza zgoraj naštetim zahtevam in je torej metrika v Q . Nadaljnji primer dobimo, če izberemo kako praštevilo p in upoštevamo, da se izraža vsako racionalno število $a \neq 0$ na en sam način v obliki $a = p^n a_0$, kjer je n celo število, racionalno število a_0 pa takšno, da ne števec ne imenovallec nista deljiva s p . Zgled: $p = 3$, $5/6 = 3^{-1} \cdot 5/2$. Naj bo f_p funkcija, določena s predpisom

$$\begin{aligned} f_p(0) &= 0 \\ f_p(a) &= 2^{-n} \end{aligned} \quad (2)$$

Tu smo za a upoštevali enolično izražavo $a = p^n a_0$. Ni se težko prepričati, da ta funkcija izpolnjuje zahteve 1°, 2° in 3°. Prvi dve lastnosti sta očitni, preverimo, da ima f_p tudi tretjo lastnost. Če je v naši izražavi $a = p^n a_0$, $b = p^m b_0$, $a + b = p^k c_0$ in je npr. $n \geq m$, je $a + b = p^m (p^{n-m} a_0 + b_0)$. Če vsoto v oklepaju izračunamo, bo dobljeni ulomek vseboval p kvečjemu v števcu kot faktor; njegov imenovallec je namreč produkt imenovalcev števil a_0 in b_0 in zato tuj k p . Torej je $k \geq m$ in naprej $2^{-k} \leq 2^{-m} < 2^{-m} + 2^{-n}$. To pa je že lastnost 3°. Ker je pri $n < m$ treba v zgornjem sklepu samo zamenjati vlogo števil m in n , je jasno, da ima funkcija f_p lastnost 3°. Torej je f_p pri vsakem fiksnem praštevilo p metrika v Q . Z njo se preslika ulomek a tem bliže 0, v čim višji pozitivni stopnji vsebuje a praštevilo p . Če pa nastopa v a praštevilo p v negativni stopnji, je $f_p(a) \geq 2$. Kadar a nima praštevil p ne v števcu ne v imenovalcu, je $f_p(a) = 1$.

Vrnimo se k splošni metriki in omenimo nekaj posledic lastnosti 1^o — 3^o. Iz 2^o dobimo $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ in od tod $f(1) = 1$, kajti po 1^o je $f(1) \neq 0$. Podobno preverimo, da veljajo naslednje zveze

$$\begin{aligned} f(\pm 1) &= 1 \\ f(-a) &= f(a) \\ f(a-b) &\leq f(a) + f(b) \\ f(a \pm b) &\geq |f(a) - f(b)| \\ f(a/b) &= f(a)/f(b) \quad \text{pri } b \neq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Na metriko naslonimo pojem konvergence. Pravimo, da konvergira zaporedje racionalnih števil (a_n) v metriki f proti racionalnemu številu a , če gre $f(a - a_n) \rightarrow 0$ pri $n \rightarrow \infty$. Zaporedje (a_n) imenujemo konvergentno v metriki f in a je njegova limita.

Zaporedje racionalnih števil (a_n) je Cauchyjevo, če limitira $f(a_n - a_m)$ proti 0, ko n in m neprenehoma rasteta.

Vsako konvergentno zaporedje je Cauchyjevo. Ako ima namreč zaporedje (a_n) limito a , se steka $f(a - a_n) \rightarrow 0$, ko se večja $n \rightarrow \infty$. Po osnovnih lastnostih metrike pa je

$$0 \leq f(a_n - a_m) = f(a_n - a + a - a_m) \leq f(a_n - a) + f(a - a_m)$$

Ker gresta sumanda na desni proti 0, ko n in m naraščata prek vsake meje, limitira pri tem tudi $f(a_n - a_m)$ proti 0. Konvergentno zaporedje je torej vedno Cauchyjevo.

Kadar je metrika takšna, da ima vsako Cauchyjevo zaporedje limito v obsegu Q , pravimo, da je obseg Q v metriki poln. Zgoraj smo se seznanili z metriko f_0 . Naj bo (a_n) Cauchyjevo zaporedje v metriki f_0 . Torej gre $f_0(a_n - a_m) \rightarrow 0$ pri $n, m \rightarrow \infty$. Ker zavzame f_0 samo vrednosti 0 in 1, mora biti za vse dovolj velike indekse n, m $f_0(a_n - a_m) = 0$ in zato $a_n - a_m = 0$. Od nekega člena naprej so torej vsi členi enaki, tj. $a_n = a$ za $n \geq n_0$. Očitno je a limita zaporedja (a_n) . Tako vidimo, da je v metriki f_0 obseg Q poln.

Dostikrat pa se zgodi, da ni vsako zaporedje, ki je v neki metriki Cauchyjevo, v tej isti metriki tudi konvergentno. V takem primeru pravimo, da obseg Q v metriki ni poln. Metrika f_p je že takšna, da v njej obseg Q ni poln. Vzemimo npr. zaporedje

$$1 + p^2, 1 + p^2 + p^4, 1 + p^2 + p^4 + p^8, \dots, 1 + p^2 + p^4 + p^8 + \dots + p^{2n}, \dots \quad (4)$$

Pri tem zaporedju je za $m < n$

$$a_n - a_m = p^{2^{m+1}} + \dots + p^{2^n} = p^{2^{m+1}}(1 + \dots)$$

Vsak od sumandov, označenih s pikami, je potenca p -ja. Število v oklepaju torej ni deljivo s p . Na podlagi lastnosti 2^o izračunamo

$$f_p(a_n - a_m) = f_p(p^{2^{m+1}}) f_p(1 + \dots) = 2^{-2^{m+1}}$$

Od tod se vidi, da se približuje $f_p(a_n - a_m) \rightarrow 0$ pri $m \rightarrow \infty$. Ker velja za $n < m$ prav podoben sklep, vidimo, da je gornje zaporedje Cauchyjevo. Zdaj pa bomo ugotovili, da nobeno racionalno število ne more biti njegova limita.

Členi zaporedja (4) so cela števila, vsa nedeljiva s p . Zato je za vsak člen tega zaporedja $f_p(a_n) = 1$. Denimo, da bi bilo racionalno število a njegova limita. Po četrti lastnosti tabele (3) bi imeli

$$f_p(a - a_n) \geq |f_p(a) - 1|$$

Desna stran te neenačbe mora biti nič, saj pride leva stran z naraščajočim n poljubno blizu nič. Dobili bi torej $f_p(a) = 1$. Edina racionalna števila, za katera je $f_p(a) = 1$, pa so oblike $a = r/s$, kjer sta r in s celi, proti p tuji števili. Le taki ulomki pridejo torej v poštev za limite našega zaporedja. Ali pa je res kakšen tak ulomek njegova limita? Če bi to bilo, bi izrazil

$$f_p(r/s - a_n) = f_p(r - sa_n) = f_p(r - s - sp^2 - sp^4 - sp^8 - \dots - sp^{2^n})$$

limitiral proti nič, ko bi se n neprenehoma večal. To bi pomenilo, da bi bili vsi členi $r - sa_n$ z zadosti velikim indeksom deljivi z vsako potenco pravega števila p , torej npr. tudi s p^{2^N} . Izberimo naravno število N tako, da bo $|r| < p^N$, $|s| < p^N$, $N \geq 4$. Za vsak dan r in s je takšen N možno dobiti. Poglejmo, ali p^{2^N} deli člene

$$\begin{aligned} r - sa_n &= (r - s - sp^2 - sp^4 - \dots - sp^{2^{N-1}}) + \\ &+ (-sp^{2^N} - sp^{2^{N+1}} - \dots - sp^{2^n}) = A + B \end{aligned}$$

pri dosti velikih indeksih n . Jasno je, da bo tak člen deljiv s p^{2^N} samo tedaj, če ima sumand A v prvem oklepaju to lastnost. Sumand B v drugem oklepaju je namreč večkratnik števila p^{2^N} . Toda prvi sumand lahko ocenimo takole

$$\begin{aligned} |A| &\leq |r| + |s| + |s|(p^2 + p^4 + \dots + p^{2^{N-1}}) < p^N(p + p^2 + p^3 + p^4 + \dots + p^{2^{N-1}}) = \\ &= p^{N+1}(p^{2^{N-1}} - 1)/(p - 1) < p^{2^{N-1} + N + 1} \end{aligned}$$

Pri $N \geq 4$ je pa $2^{N-1} + N + 1 < 2^N$ in zato $|A| < p^{2^N}$. Iz te ocene vidimo, da A in torej tudi $r - sa_n$ pri nobenem indeksu n ni deljiv s p^{2^N} . Zaporedje (4) v obsegu racionalnih števil ni konvergentno.

Dejstvo, da je obseg Q v neki metriki nepoln, pomeni pravzaprav, da ima obseg Q za to metriko premalo števil. V njem ni namreč števil, ki bi bila limite nekonvergentnih Cauchyjevih zaporedij. To pomanjkljivost je mogoče odpraviti tako, da manjkajoča števila ustvarimo. Spoznanje, da je to zmeraj mogoče, je prav važno. Natančno povedano velja tale trditev: Če je obseg Q v metriki f nepoln, ga je možno potopiti v bogatejši poln metrični obseg $\bar{Q}$. Elementi in metrika obsega $\bar{Q}$ so pri tem določeni z elementi obsega Q in z metriko f tako, da je obseg Q povsod gost v $\bar{Q}$. Pri dani metriki f je obseg $\bar{Q}$ v bistvu en sam.

Gornje trditve ne bomo dokazovali. Opisali bomo samo, kako dobimo elemente in metriko obsega $\bar{Q}$.

Naj bo torej metrika f takšna, da obseg Q v njej ni poln. Vzemimo vsa možna Cauchyjeva zaporedja obsega Q in imejmo za ekvivalentni Cauchyjevi zaporedji (a_n) , (b_n) , če limitira $f(a_n - b_n) \rightarrow 0$ pri $n \rightarrow \infty$. Skupnost vseh Cauchyjevih zaporedij, ki so med sabo ekvivalentna, imenujmo razred. Vsa Cauchyjeva zaporedja razpadajo na ta način v razrede, in sicer tako, da je vsako zaporedje natančno v enem razredu. Vsak razred moremo predstaviti s poljubnim zaporedjem, ki je v tem razredu. Razred, v katerem je zaporedje $(0, 0, 0, \dots)$, zapišimo kratko z 0 . Podobno je zaporedje $(1, 1, 1, \dots)$ predstavnik razreda, ki ga zapisujemo z 1 . Če je a racionalno število, prav tako z a označujemo razred, v katerem je zaporedje $(a, a, a, \dots)$. Zaznamujmo množico vseh razredov s $\bar{Q}$. Ker pripada vsakemu racionalnemu številu neki razred, vsak razred pa nima predstavnika v obliki zaporedja $(a, a, a, \dots)$, kjer je a racionalno število, je seveda $Q \subset \bar{Q}$.

Prav preprosto moremo v množici $\bar{Q}$ opredeliti seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje. Če sta α, β razreda iz $\bar{Q}$, dobimo njuno vsoto takole: vzamemo kako zaporedje (a_n) iz razreda α in kako zaporedje (b_n) iz razreda β in ju seštejemo. Dobljeno zaporedje $(a_n + b_n)$ je spet Cauchyjevo in je zato vsebovano v enem samem razredu γ . Vsota $\alpha + \beta$ naj bo ta razred γ . Če nadomestimo zaporedje (a_n) z ekvivalentnim zaporedjem (a'_n) in zaporedje (b_n) z ekvivalentnim zaporedjem (b'_n) , je zaporedje $(a'_n + b'_n)$ ekvivalentno zaporedju $(a_n + b_n)$. Razred, v katerem je zaporedje $(a'_n + b'_n)$, je torej isti kot razred, ki vsebuje zaporedje $(a_n + b_n)$. Od tod je jasno, da je vsota $\alpha + \beta$ odvisna samo od razredov α in β , ne pa od tega, kateri zaporedji vzamemo pri seštevanju za njuna predstavnika. Iz enakih razlogov smemo postaviti, naj bo razlika $\alpha - \beta$ razred, ki vsebuje zaporedje $(a_n - b_n)$, produkt $\alpha \beta$ pa razred, v katerega pade zaporedje $(a_n b_n)$. Če je razred $\beta \neq 0$, so v njem zaporedja, ki imajo vse člene od nič različne. Naj bo (b_n) neko takšno zaporedje. Zaporedje (a_n/b_n) je Cauchyjevo in razred, ki ga vsebuje, vzamemo za količnik α/β . Tudi tukaj seveda velja, da dobimo isti količnik, če zaporedji $(a_n), (b_n)$ zamenjamo z ekvivalentnima zaporedjema. Ker imamo pri naših zaporedjih opravka z racionalnimi števili, je jasno, da imajo vpeljane računske operacije vse lastnosti, kakor jih zahtevamo pri obsegu. Množica $\bar{Q}$ je torej obseg.

Poglejmo še, kako se da obseg $\bar{Q}$ napraviti za metrični obseg. Uporabili bomo metriko obsega Q . Če je $\alpha \in \bar{Q}$ in (a_n) Cauchyjevo zaporedje iz razreda α , velja za zaporedje $f(a_n)$ po četrti lastnosti iz tabele (3) ocena

$$f(a_n - a_m) \geq |f(a_n) - f(a_m)|$$

Leva stran limitira proti nič, ko se večata n in m prek vsake meje. Torej pade tudi desna stran pri zadosti velikih n in m pod vsako pozitivno vrednost. To pa pomeni, da je zaporedje števil $f(a_n)$ konvergentno v obsegu realnih števil in zato v njem obstaja limf (a_n) , $n \rightarrow \infty$. V tem je dana možnost, kako razširiti metriko f iz obsega Q na obseg $\bar{Q}$. Pri $\alpha \in \bar{Q}$ postavimo namreč

$$F(\alpha) = \limf (a_n), n \rightarrow \infty \quad (5)$$

Prepričati se je mogoče, da ima vpeljana funkcija F lastnosti 1^o, 2^o, 3^o in je torej metrika v $\bar{Q}$. Takoj se tudi vidi, da je za razred, ki je prirejen racionalnemu številu α , torej za razred, ki ga določa zaporedje $(\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$

$$F(\alpha) = f(\alpha)$$

Metrika F se torej na obsegu Q ujema s prvotno, tam dano metriko f . Nadaljnja pomembna lastnost metrike F je, da je obseg $\bar{Q}$ v njej poln, obseg Q pa gost v $\bar{Q}$.

Zgoraj smo omenili metriko f_p . Videli smo, da obseg racionalnih števil Q v tej metriki ni poln. Po postopku, ki smo ga pravkar opisali, moremo razširiti obseg Q do polnega metričnega obsega Q_p . Obseg Q_p imenujemo p -adični obseg, njegove elemente pa p -adična števila. Vsako p -adično število α je torej dano z zaporedjem racionalnih števil (a_n) , ki je v metriki f_p Cauchyjevo. Posebej so med p -adičnimi števili zapopadena vsa racionalna števila. Vendar ne samo ta. Tako npr. zaporedje

$$1 + p^2, 1 + p^2 + p^4, 1 + p^2 + p^4 + p^8, \dots, 1 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2^n}, \dots$$

določa neko p -adično število, ki ni racionalno. Že zgoraj smo namreč ugotovili, da je to zaporedje Cauchyjevo pa brez limite v Q . Ker je daleč več Cauchyje-

vih zaporedij, ki v $\mathbb{Q}$ niso konvergentna, kot pa Cauchyjevih zaporedij, ki so v $\mathbb{Q}$ konvergentna, smo pri prehodu od obsega $\mathbb{Q}$ na obseg $\overline{\mathbb{Q}}$ pridobili ogromno novih števil.

Metrika f_p je opredeljena pri fiksnem praštevilu p . Ker je praštevilo neskončno veliko, dobimo tudi neskončno obsegov $\mathbb{Q}_p$, namreč $\mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3, \mathbb{Q}_5, \dots$

Postopek, ki nas je pripeljal do p -adičnih števil, nam da neka nova števila vsakikrat, kadar imamo v obsegu racionalnih števil dano kako metriko, v kateri ta obseg ni poln. Tako je npr. funkcija

$$f_1(a) = |a|, a \in \mathbb{Q} \quad (6)$$

ki preslika racionalno število v njegovo absolutno vrednost, metrika v $\mathbb{Q}$ in obseg $\mathbb{Q}$ v njej ni poln. Kot je znano, pripelje napolnitev obsega $\mathbb{Q}$ v tej metriki do obsega realnih števil $\mathbb{R}$. Prvi hip bi pričakovali, da bomo tako prišli razen do p -adičnih in realnih števil še do raznih drugih zvrsti števil. Ali je takšno pričakovanje utemeljeno? Odgovor je tesno povezan z vprašanjem, koliko je metrik v obsegu $\mathbb{Q}$. Treba je torej poiskati vse realne funkcije f , ki so opredeljene na množici racionalnih števil in izpolnjujejo zahteve $1^0, 2^0, 3^0$. A. Ostrowski je dokazal, da so takšne funkcije v bistvu tri, in sicer $f_0(a)$, $f_1(a)$, $f_p(a)$. Vse tri smo že srečali. Metrika f_0 ne da novih števil, ker je v njej obseg racionalnih števil poln. Metrika f_1 privede do realnih števil, metrika f_p pa do p -adičnih števil. Realna števila in p -adična števila so tedaj edina števila, ki se morejo dobiti z napolnitvijo obsega $\mathbb{Q}$. V takem smislu smo na začetku tudi zapisali, da so p -adična števila edini sorodnik realnih števil.

V obsegu p -adičnih števil $\overline{\mathbb{Q}_p}$ je dana metrika. Zato moremo v njem na običajen način vpeljati pojme funkcija, zveznost itd., skratka, gradimo lahko matematično analizo. Zanimivo je vprašanje, ali bomo dobili kakšno podobno obsežno teorijo, kot je analiza nad obsegom realnih števil $\mathbb{R}$.

V izrekih realne analize se odražajo razne lastnosti obsega realnih števil. Važno se pokaže zlasti to, da so v obsegu $\mathbb{R}$ štiri osnovne računske operacije zvezne in da je $\mathbb{R}$ Hausdorffov, lokalno kompakten, sovisen prostor. Teh pojmov ne bodo opisovali, ker nam v nadaljnjem ne bodo potrebni. Povemo naj samo, da med drugim od tod izvirajo značilnosti, ki jih poznamo pri zveznih realnih funkcijah. Vsekakor moremo pričakovati analizo v takšnem bogastvu, kot je realna analiza, le v obsegih, ki imajo vse zgoraj omenjene lastnosti obsega $\mathbb{R}$. Naj omenimo v tej zvezi neki pomembni izrek, ki ga je dokazal L. Pontrjagin. Po tem izreku sta poleg obsega $\mathbb{R}$ pravzaprav še samo dva obsega, ki imata vse zgoraj naštet lastnosti, namreč obseg kompleksnih števil in obseg kvaternionov. Za analizo so torej zanimivi le ti trije obsegi oziroma obsegi, ki so topološko izomorfní kateremu teh treh obsegov.

Glede obsega $\overline{\mathbb{Q}_p}$ se da hitro spoznati, da so v njem seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje zvezne operacije, da je Hausdorffov in lokalno kompakten, ne pa sovisen prostor. Po Pontrjaginovem izreku lahko od tod sklepamo, da obseg $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ni topološko izomorfen obsegu $\mathbb{R}$. Razložek med obema obsegoma je torej precejšen.

2. Videli smo, kako dobimo p -adična števila pri napolnitvi obsega ulomkov. Pri tem so se jasno pokazale njihove topološke lastnosti in njihov odnos do realnih števil. Mnoge značilne lastnosti p -adičnih števil pa so ostale prikrite. Nekaj takih lastnosti najlažje spoznamo, če uvedemo p -adična števila

nekoliko drugače. Pozabimo torej za nekaj časa, kar smo o p -adičnih številih že povedali in začnimo znova.

Osnovni pojem bo zdaj celo p -adično število. Naj bo p praštevilo. Zaporedje celih števil

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots) \quad (7)$$

določa celo p -adično število, če je za vsak indeks n izpolnjena kongruenca

$$a_{n+1} \equiv a_n \pmod{p^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Poln smisel dobi ta opredelitev šele z naslednjim dodatkom. Zaporedji celih števil (a_n) in (b_n) pomenita isto celo p -adično število natančno tedaj, kadar je za vsak indeks n

$$a_n \equiv b_n \pmod{p^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Zgledov za cela p -adična števila ni težko najti. Če vzamemo poljubno celo število a , mu prištejemo kak večkratnik p -ja, nato tej vsoti prištejemo kak večkratnik števila p^2 in podobno nadaljujemo, je zaporedje tako dobljenih vsot že celo p -adično število. Tudi zaporedje

$$1 + p^2, 1 + p^2 + p^4, \dots, 1 + p^8 + p^4 + \dots + p^{2^n}, \dots \quad (4)$$

pomeni neko celo p -adično število. Tega ni težko preveriti.

Če je a celo število, izpolnjuje zaporedje $(a, a, \dots)$ pogoj (8) in torej določa celo p -adično število. Na ta način je vsakemu celemu številu prirejeno neko celo p -adično število. Ta prirejenost je takšna, da različnima celima številoma pripadata različni celi p -adični števili. Če namreč celi števili a, b določata isto celo p -adično število, mora za vse eksponente n veljati kongruenca

$$a \equiv b \pmod{p^n}$$

Pri $a \neq b$ pa razlika $a - b$ ni deljiva z vsemi potencami praštevila p . Celi p -adični števili $(a, a, a, \dots)$ in $(b, b, b, \dots)$ sta torej različni, če je le $a \neq b$.

Isto celo p -adično število je določeno še z neskončno različnimi zaporedji celih števil. Poglejmo, kako se je temu mogoče izogniti. Vzemimo celo p -adično število $a = (b_1, b_2, b_3, \dots)$. Število a določajo vsa taka zaporedja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, ki izpolnjujejo kongruence (9). Eno med temi zaporedji ima posebej preprosto obliko. Naj bo namreč a_n tisto najmanjše nenegativno število, za katero je

$$a_n \equiv b_n \pmod{p^n} \quad (10)$$

Če v takem smislu rešimo kongruenco (10) pri vsakem n , dobimo zaporedje celih števil $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, pri katerem je $0 \leq a_n < p^n$ za vsak n . Tako dobljeno zaporedje določa število a , toda členi so zdaj nenegativni in $a_n < p^n$. Seveda členi a_n izpolnjujejo kongruence (8). Zato je $a_{n+1} = a_n + c_{n+1} p^n$. Če tukaj upoštevamo, da je $0 \leq a_{n+1} < p^{n+1}$ in $0 \leq a_n < p^n$, dobimo $0 \leq c_{n+1} < p$. Postavimo še $a_1 = c_1$, pa moremo število a zapisati z zaporedjem

$$(c_1, c_1 + c_2 p, c_1 + c_2 p + c_3 p^2, c_1 + c_2 p + c_3 p^2 + c_4 p^3, \dots), \quad 0 \leq c_n < p \quad (11)$$

Takšna izražava pripada vsakemu celemu p -adičnemu številu. Možno je tudi pokazati, da različni zaporedji gornje oblike določata različni celi p -adični števili. Od tod sledi, da je celih p -adičnih števil prav toliko, kot je različnih zaporedij (11), torej kontinuum veliko. Če je celo p -adično število zapisano z zaporednjem (11), pravimo, da je v kanonični obliki.

Zaznamujmo z O_p množico vseh celih p -adičnih števil. Elementi množice O_p so, kot smo videli, vsa mogoča celoštevilčna zaporedja, ki ustrezajo pogoju (8). Vpeljimo zdaj med elementi množice O_p seštevanje, odštevanje in množenje. Vsota dveh zaporedij naj bo zaporedje, katerega člene dobimo tako, da seštejemo istoležne člene prvega in drugega zaporedja. Podobno naj bo razlika oz. produkt dveh zaporedij zaporedje, ki ima za člene razlike oz. produkte istoležnih členov prvega in drugega zaporedja. Členi zaporedij, ki jih dajo omenjene operacije, so spet cela števila. Ker pa velja za izhodni zaporedji pogoj (8), je po osnovnih lastnostih kongruenc ta pogoj izpolnjen tudi pri novih, po zgornjih operacijah dobljenih zaporedjih. To pomeni, da dobimo pri vpeljanih operacijah kot rezultat spet elemente iz množice O_p . Od tod takoj sledi, da je množica O_p kolobar.

V kolobarju je zmeraj zanimivo pogledati, kako je z deljivostjo njegovih elementov. Če sta α, β števili kolobarja O_p , pravimo, da α deli β , če je mogoče najti v O_p takšno število γ , da je $\alpha\gamma = \beta$. Ker so v kolobarju O_p zapopadena vsa cela števila, je jasno, da imamo v O_p primere deljivosti. Hitro pa se prepričamo, da v kolobarju O_p deljenje ni vsevprek izvršljivo. Naj bo npr.

$$\begin{aligned}\alpha &= (0, p, p, p, \dots) \\ \beta &= (1, 1, 1, 1, \dots) = 1\end{aligned}$$

Če bi bil β deljiv z α , bi moralo biti $\alpha\gamma = \beta$ vsaj za eno celo p -adično število

$$\gamma = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Rešiti bi se torej morale dati kongruence

$$\begin{aligned}0 \cdot x_1 &\equiv 1 \pmod{p} \\ px_2 &\equiv 1 \pmod{p^2} \\ px_3 &\equiv 1 \pmod{p^3} \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Prvi kongruenci pa z nobenim x_1 ni mogoče ustreči. Število α torej ne deli števila β .

Ker v kolobarju O_p deljenje ni zmeraj izvršljivo, se postavljajo glede deljivosti podobna vprašanja, kakor jih poznamo pri navadnih celih številih. Videli bomo, da so cela p -adična števila v tem pogledu bolj preprosta kot racionalna cela števila.

Identiteta 1 deli vsako število iz kolobarja O_p . Ali je v O_p še kaj števil, ki imajo to lastnost? Če naj neko število deli vsako število iz O_p , mora deliti tudi 1. Jasno je tedaj, da se števila, po katerih smo vprašali, ujemajo z delitelji identitete 1. Vsak delitelj identitete imenujemo enota. Če je ε enota, je v kolobarju O_p vsaj eno tako število ε_1 , da je $\varepsilon\varepsilon_1 = 1$. Število ε_1 je recipročna vrednost k ε in pišemo $\varepsilon_1 = \varepsilon^{-1}$. Enačba $\varepsilon\varepsilon_1 = 1$ pove, da je recipročna vrednost enote spet enota. Če sta ε in η enoti, je $\varepsilon\varepsilon^{-1} = 1$, $\eta\eta^{-1} = 1$. Množimo enačbi! Dobimo $(\varepsilon\eta)(\varepsilon^{-1}\eta^{-1}) = 1$. Od tod sledi, da je produkt enot tudi enota.

Seveda je identiteta enota. Toda kolobar O_p ima še druge enote, in sicer jih premore zelo veliko. Možno je namreč ugotoviti, da so enote prav tista števila $\alpha \in O_p$, $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, pri katerih je a_1 nedeljiv s p . Če upoštevamo kanonično izražavo, vidimo, da je različnih enot v O_p kontinuum veliko. Lepo je pomen enot viden iz naslednjega izreka, ki ga omenjamo brez dokaza. Vsako celo od nič različno p -adično število α se da na en sam način zapisati v obliki

$$\alpha = p^m \varepsilon \quad (12)$$

Tukaj je m naravno število ali nič, ε pa enota v O_p . Gradniki celih p -adičnih števil so torej enote in potence $p, p^2, p^3, \dots$ praštevila p . Enačba (12) spominja na razcepitev racionalnega celega števila v produkt praštevil. Le da je v kolobarju O_p ta razcepitev enostavnejša, saj nastopa poleg enote kot faktor le še potenca praštevila p . V kolobarju O_p imamo torej pri vsej obilici števil eno samo praštevilo, namreč p . Tudi glede deljivosti števil v kolobarju O_p je zdaj vse jasno. Če sta dani števili α, β , ju lahko po zgornjem zapišemo $\alpha = p^m \varepsilon$, $\beta = p^n \eta$, kjer sta m, n celi nenegativni števili, ε, η pa enoti. Očitno je α deljiv z β , če je $m \geq n$. V tem primeru velja namreč $p^m \varepsilon = (p^n \eta)(p^{m-n} \eta^{-1} \varepsilon)$; ker je $\eta^{-1} \varepsilon$ produkt enot, je enota. Pri $m < n$ pa število α ni deljivo z β .

Opozorimo še na neko stvar. V enačbi (12) je ε enota. Izraža se z nekim takim zaporedjem $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ racionalnih celih števil, ki ustrezajo zahtevi (8), da a_1 nima za delitelj p . Posebej je vsako racionalno celo število $a = (a, a, a, \dots)$, če ni s p deljivo, enota. Recipročna vrednost a^{-1} je potem tudi enota in zato vsebovana v O_p . Seveda je a^{-1} neko zaporedje celih racionalnih števil. Toda računsko se to zaporedje obnaša čisto enako kot zaporedje ulomkov $(a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, \dots)$. Zato smemo vzeti, da je recipročni element k a opredeljen z zaporedjem $(a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}, \dots)$ oziroma z racionalnim številom a^{-1} . V kolobarju O_p so torej zapopadena vsa cela racionalna števila pa tudi vsi ulomki b/a , kjer sta a, b navadni celi števili in a nedeljiv s p .

Iz izražave (12) sledi važna ugotovitev, da kolobar O_p nima deliteljev nič. V nasprotnem primeru bi se dali dobiti vsaj dve celi p -adični števili α, β , obe različni od nič in takšni, da bi bil njun produkt $\alpha\beta = 0$. Če upoštevamo omenjeno izražavo, je npr. $\alpha = p^m \varepsilon$, $\beta = p^n \eta$. Ker sta ε, η enoti, je število $\varepsilon^{-1} \eta^{-1}$ v O_p . Iz enačbe $\alpha\beta = p^{m+n} \varepsilon \eta = 0$ bi po množenju z $\varepsilon^{-1} \eta^{-1}$ sledilo $p^{m+n} = 0$. To pa za noben m in n ne drži. Kolobar O_p res nima deliteljev nič.

Videli smo že, da v kolobarju O_p deljenje ni vselej izvršljivo. Iz te zagate pa se je mogoče rešiti, ker je naš kolobar brez deliteljev nič. Vsak takšen kolobar je namreč mogoče razširiti s privzemom novih elementov do obsega. Tipičen primer za tako ravnanje srečamo, ko konstruiramo obseg ulomkov iz kolobarja celih števil. Tudi od kolobarja celih p -adičnih števil do obsega p -adičnih ulomkov pridemo na isti način.

Upoštevajmo za cela p -adična števila izražavo (12). Če je npr. $\alpha = p^m \varepsilon$, $\beta = p^n \eta$, moremo njun količnik formalno zapisati v obliki $\alpha/\beta = p^{m-n} \zeta_1$. Tu je $\zeta_1 = \varepsilon/\eta$ enota, saj smo že prej videli, da je kvocient enot spet enota. Pa si oglejmo množico vseh elementov

$$\omega = p^m \varepsilon \quad (13)$$

ko preteče m vsa cela števila, ε pa vse enote kolobarja O_p . Očitno je ta množica zaključena za množenje in deljenje svojih elementov. Pa tudi vsota in razlika elementov te množice je spet v njej vsebovana. Ker smemo vzeti $m \leq n$, dobimo za vsoto dveh takih elementov $p^m \varepsilon + p^n \eta = p^m (\varepsilon + p^{n-m} \eta)$. Drugi faktor pa je v O_p in ima obliko $p^k \zeta$, k nenegativno celo število, ζ enota. Vsota se torej glasi $p^m \varepsilon + p^n \eta = p^{m+k} \zeta$, kar je že oblika (13). Privzemimo k številom (13) še nič in zaznamujmo dobljeno množico z $\bar{O}_p$. Precej je jasno, da je $\bar{O}_p$ obseg in da so zajeta v njem vsa cela p -adična števila. Ker so njegovi

elementi p -adični ulomki, mu bomo rekli obseg p -adičnih ulomkov. Tudi vsak navaden ulomek b/a , kjer sta a, b celi racionalni števili, je zapopaden v O_p .

Vsako število ω iz obsega $\overline{O}_p$, če ni nič, se zapiše na en sam način v obliki $\omega = p^m \varepsilon$. Če se naslonimo na to dejstvo, lahko napravimo obseg $\overline{O}_p$ za metričen obseg. Vpeljimo funkcijo f_p takole

$$\begin{aligned} f_p(\omega) &= 2^{-m}, \text{ če je } \omega = p^m \varepsilon \\ f_p(0) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Bralec se more sam prepričati, da je funkcija f_p metrika v obsegu $\overline{O}_p$. Seveda je s tem dana možnost, da uvedemo v obseg $\overline{O}_p$ pojme limita, konvergenca zaporedja, zveznost funkcije in tako naprej. Zaporedje p -adičnih ulomkov $(\omega_n) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$ ima za limito p -adični ulomek ω , če gre $f_p(\omega_n - \omega) \rightarrow 0$, ko narašča $n \rightarrow \infty$. Če bi želeli v podrobnosti zasledovati lastnosti metričnega obsega O_p , bi ravnali podobno kot v prejšnjem razdelku, ko smo obravnavali metrični obseg racionalnih števil. Naj navedemo samo dva od izsledkov, ki se pri tem dobe:

Vsak p -adični ulomek $\omega \in \overline{O}_p$ je limita zaporedja racionalnih števil.

Zaporedje p -adičnih ulomkov (ω_n) , $\omega_n \in \overline{O}_p$, je konvergentno natančno tedaj, če konvergira $f_p(\omega_{n+1} - \omega_n) \rightarrow 0$, ko narašča $n \rightarrow \infty$.

K prvemu izreku pripominjamo, da so vsa racionalna števila obsežena v $\overline{O}_p$. Drugi izrek pa kaže, da je obseg $\overline{O}_p$ poln. V obsegu $\overline{O}_p$ namreč zaporedje konvergira, če le gre v metriki f_p razdalja med sosednjima členoma proti nič, ko se pomikamo v zaporedju k vedno bolj poznim členom. Zaradi tega je vsako Cauchyjevo zaporedje v obsegu $\overline{O}_p$ konvergentno.

V prvem razdelku smo spoznali obseg $\overline{Q}_p$, zdaj pa smo se seznanili z obsegom $\overline{O}_p$. Ali imajo števila obojih obsegov kaj skupnega ali pa gre za različne tvorbe? Iz zadnjih dveh izrekov sklepamo, da je obseg $\overline{O}_p$ poln v metriki (14) in da so racionalna števila v njem povsod gosta. Nadalje je počitno, da se metriki (14) in (2) na racionalnih številih ujemata. Obsega $\overline{O}_p$ in $\overline{Q}_p$ sta torej napolnitvi obsega racionalnih števil v isti metriki. Omenili smo že, da je mogoče takšno napolnitev doseči v bistvu na en sam način. Zato se obsega $\overline{O}_p$ in $\overline{Q}_p$ ujemata in imamo obakrat opraviti z istimi p -adičnimi števili.

3. Povejmo še nekaj malega o tem, kako so bila uporabljena doslej p -adična števila pri nedoločenih enačbah.

Naj bo $f(x_1, \dots, x_n)$ polinom s spremenljivkami $x_1, \dots, x_n$ in s celimi racionalnimi koeficienti. Ali ima enačba

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (15)$$

takšne racionalne celoštevilčne rešitve, pri katerih vsaj ena od spremenljivk ni nič? To vprašanje je zbujało zmeraj precej zanimanja in je bilo za razne dane polinome f tudi rešeno. V splošnem, ko polinoma f natančneje ne poznamo, je obravnavanje tega vprašanja težavno.

Če ima gornja enačba kakšno zahtevno rešitev $x_1^0, \dots, x_n^0$, je $f(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$ in ta rešitev ustreže tudi vsaki kongruenci

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^k} \quad \begin{aligned} k &= 1, 2, 3, 4, \dots \\ p &\text{ po vseh praštevilih} \end{aligned} \quad (16)$$

Od tod vidimo, da more imeti enačba (15) rešitve, kakršne iščemo, kvečjemu takrat, kadar je vsaka kongruenca (16) rešljiva. Kot pričajo zgledi, je ta pogoj le pri nekaterih posebnih oblikah polinoma f tudi zadosten za rešljivost

enačbe (15). Seveda moremo odločiti o obstoju rešitve za prvotno enačbo tudi v takem primeru šele tedaj, ko smo ugotovili, ali so rešljive kongruence (16). Ker je teh kongruenc neskončno veliko, to ni preprosto.

Doslej smo iskali rešitve za našo enačbo med celimi racionalnimi števili. Nobene ovire pa ni, da ne bi smeli za neznanke dopustiti cela p -adična števila. Kako je z rešljivostjo enačbe (15) v kolobarju O_p pri fiksnem praštevilu p ? Namesto kongruence (16) obravnavamo zdaj kongruence

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^k}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (17)$$

Izkaže se, da sta v O_p rešljivost vsake teh kongruenc in rešljivost enačbe (15) enakovredna problema. Za rešljivost enačbe (15) v kolobarju O_p se dajo dobiti preprosti in razmeroma učinkoviti kriteriji. Z njimi lahko potem ugotovimo, kako je z obstojem rešitev kongruence (17) v fiksnem kolobarju O_p . Če vzamemo kongruence (17) po vrsti pri vseh praštevilih, dobimo kongruence (16). Če so tedaj kongruence (17) rešljive pri vsakem praštevilu p , pomeni to, da so kongruence (16) rešljive pri vsakem p v celih p -adičnih številih. Včasih se da od tod sklepati tudi na rešljivost enačb (15) v navadnih celih številih. Na ta način je mogoče npr. dokazati znameniti Minkowski-Hassejev izrek o kvadratnih formah.

Naj pomeni $F(x_1, \dots, x_n)$ kvadratno formo s celimi racionalnimi koeficienti. Minkowski-Hassejev izrek trdi, da ima enačba $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ netrivialne racionalne cele rešitve natančno tedaj, kadar je enačba $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ rešljiva v realnih številih in v vsakem kolobarju O_p celih p -adičnih števil. Naj pripomnimo, da je pogoje, ki v izreku nastopajo, pri dani formi res mogoče preveriti. Znano je namreč, da je rešljivost enačbe $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ v realnih številih enakovredna indefinitnosti kvadratne forme $F(x_1, \dots, x_n)$, tj. lastnosti, da more forma zavzeti pozitivne in negativne vrednosti. Teže je na videz odločiti ali ima enačba $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ rešitve v vsakem kolobarju O_p . A tudi tu se pokaže, da je treba dejansko upoštevati le končno veliko kolobarjev O_p , ki so odvisni še od koeficientov forme.

Posebno preprosto se glasi Minkowski-Hassejev izrek, kadar je kvadratna forma nesingularna (tj. determinanta koeficientov forme je neenaka nič) in vsebuje pet ali več spremenljivk. Ustrezna enačba $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ ima namreč v tem primeru netrivialne rešitve v vsakem kolobarju celih p -adičnih števil. Potreben in zadosten pogoj, da ima zdaj enačba $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ netrivialno rešitev v navadnih celih številih, je, da je forma indefinitna. Če je kvadratna forma $F(x_1, \dots, x_n)$ takšna, da ima enačba $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ racionalne rešitve, pravimo tudi, da forma racionalno izraža nič. Indefinitna nesingularna kvadratna forma petih ali več spremenljivk z racionalnimi koeficienti torej racionalno izraža nič. Ali velja kaj podobnega pri formah višjih stopenj? V zvezi s tem vprašanjem je E. Artin postavil domnevo, da vsaka racionalna forma lihe stopnje r z n spremenljivkami predstavlja nič v obsegu racionalnih števil, če je le $n > r^2$. Da pri vseh formah sode stopnje ta domneva ne drži, kažejo zgledi. Dokazano je tudi, da forme lihe stopnje izražajo nič racionalno, če je število spremenljivk zadosti veliko v primeri s stopnjo forme. Seveda s tem še zdaleč ni ugotovljeno, da je $n = r^2 + 1$. Artinova domneva je še zmeraj odprta.

Literatura

- J. Dieudonné, Foundations of modern Analysis. N. York, London 1960.
 Z. I. Borevič i I. R. Šafarevič, Teorija čisel. Moskva 1964.
 A. G. Kuroš, Lekcii po obščej algebre. Moskva 1962.

RAZŠIRITVE OBSEGA REALNIH ŠTEVIL

JOŽE VRABEC

1. Uvod

Beseda *število* nima točno določenega pomena, ker s tem imenom znamujemo nekaj različnih množic, ki se ločijo med seboj ne le po sestavi elementov, temveč tudi po algebraini strukturi. Najpreprostejša (in tudi najmanjša) je množica naravnih števil. V njej sta definirani dve računski operaciji, seštevanje in množenje. Če množico naravnih števil povečamo, s tem da privzamemo primerno mnogo novih elementov, dobimo množico celih števil. Definijsko območje obeh računskih operacij lahko razširimo od množice naravnih števil na vsa cela števila. Poleg tega lahko definiramo še odštevanje, to je operacijo, ki je inverzna seštevanju. Če pa hočemo uvesti še množenju inverzno deljenje, je tudi množica celih števil premajhna. S pomočjo celih števil konstruiramo precej obširnejšo množico racionalnih števil in v njej lahko smiselno definiramo vse štiri osnovne računske operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje. Racionalna števila tvorijo torej *obseg*. Kot je znano, imenujemo obseg tako množico, v kateri sta definirani asociativno in komutativno seštevanje in asociativno množenje, v kateri eksistirata element 0 za seštevanje in enota 1 za množenje in v kateri ima vsak element x nasprotni element $-x$ in inverzni element x^{-1} . V splošnem ne zahtevamo, da bi bil izpolnjen tudi komutativnostni zakon za množenje. Če pa je izpolnjen, imenujemo obseg komutativen. Racionalna števila na primer tvorijo komutativen obseg. V takem obsegu lahko definiramo deljenje s predpisom $x : y = xy^{-1} = y^{-1}x$. V nekomutativnem obsegu pa ne moremo govoriti o deljenju v običajnem pomenu besede, ker sta tu produkta xy^{-1} in $y^{-1}x$ v splošnem različna. Omenimo še, da pri definiciji obsega ne zahtevamo vedno niti asociativnosti za množenje, vendar se bomo tu ukvarjali le z asociativnimi obsegi.

Z naravnimi, celimi in racionalnimi števili še nismo izčrpali vseh osnovnih množic, ki jih odlikujemo z imenom števila. V matematični analizi so najvažnejša realna števila. Tudi ta tvorijo komutativen obseg (označevali ga bomo z R), ki je večji od obsega racionalnih števil, to pa v naslednjem smislu: med realnimi števili so taka, ki jih lahko identificiramo z racionalnimi; poleg tega velja: če dve racionalni števili seštejemo kot elementa obsega racionalnih števil ali kot elementa obsega realnih števil, dobimo isti rezultat. Isto velja za množenje. Zato tvorijo racionalna števila *podobseg* obsega R . Pravimo tudi, da je obseg realnih števil *razširitev* obsega racionalnih števil. Ni pa to najmanjša razširitev. Eksistira neskončno mnogo razširitev obsega racionalnih števil, ki so manjše od R (torej podobsegi obsega realnih števil).

Ogledati si hočemo, kako je z razširitvami obsega R . Elemente vsake take razširitve pravzaprav lahko imenujemo števila. Zanima nas torej, kako daleč je mogoče posplošiti pojem števila.

2. Kompleksna števila in kvaternioni

Ena razširitev obsega realnih števil je zelo znana, to je obseg *kompleksnih* števil, ki so tudi izredno pomembna v matematični analizi. Kompleksna števila lahko definiramo na mnogo načinov, na primer takole: obseg kompleksnih števil C je najmanjši obseg, ki vsebuje 1) obseg realnih števil kot podobseg, 2) še neki elementi i , ki ustreza enačbi $i^2 = -1$ (torej ni realno število) in ki komutira z vsemi realnimi števili: $ai = ia$ za vsak $a \in R$.

Vzemimo, da obseg C že imamo! Ker vsak obseg vsebuje vse produkte in vsote svojih elementov, so vsi elementi oblike $a + bi$, pri čemer sta a in b realni števili, v obsegu C . Označimo z E množico vseh elementov take oblike: $E = \{a + bi : a, b \in R\}$! Prav lahko je dokazati, da je že množica E obseg, torej podobseg obsega C . Naj bosta $\alpha = a + bi$ in $\beta = c + di$ poljubna elementa množice E . Upoštevajoč osnovne računske zakone, ki morajo veljati v obsegu C , dobimo:

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in E \quad (1)$$

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in E \quad (2)$$

$$-\alpha = -(a + bi) = -a - bi \in E$$

$$\alpha^{-1} = (a + bi)^{-1} = a/(a^2 + b^2) - bi/(a^2 + b^2) \in E$$

Te štiri enačbe kažejo, da je E res podobseg, in to komutativen. Ker za poljubno realno število a velja, da je $a = a + 0i \in E$, in ker je $i = 0 + 1i \in E$, mora biti $C = E$, saj smo definirali množico kompleksnih števil kot najmanjši obseg, ki vsebuje realna števila in element i .

Poglejmo, kdaj je element $a + bi \in C$ enak 0! Če je $a + bi = 0$, mora biti $a = b = 0$, ker bi sicer lahko izračunali: $i = -a/b$. To pa ni mogoče, ker i ni realno število. Zdaj pa takoj vidimo, da je vsak element obsega C mogoče na en sam način izraziti v obliki $a + bi$. Naj bo na primer $a + bi = c + di$. Če prenesemo vse člene na levo stran enačbe, dobimo: $(a - c) + (b - d)i = 0$. Ugotovili pa smo, da je ta enačba mogoča le v primeru, ko sta oba koeficienta enaka 0, torej tedaj, ko je $a = c$ in $b = d$.

Začeli smo s supozicijo: vzemimo, da obseg C že imamo. No, če ga nimamo, si ga pa naredimo! Označimo s C množico vseh simbolov oblike $a + bi$, kjer sta a in b realni števili. Znak $+$ tu ne pomeni seštevanja. Če definiramo v množici C seštevanje in množenje s predpisoma (1) oziroma (2), dobimo komutativen obseg, kot lahko dokažemo z nekaj preprostimi računi. Ta obseg sicer ne vsebuje realnih števil kot takih, pač pa lahko simbole oblike $a + 0i$ identificiramo z realnimi števili. Taki simboli tvorijo podobseg obsega C . Analogno identificiramo element i s simbolom $0 + 1i$.

Kaj več o kompleksnih številih ne bomo govorili, saj so dovolj poznana. Poglejmo rajši, če eksistirajo še kake razširitve obsega realnih števil! Eno lahko konstruiramo po zgledu kompleksnih števil: označimo s K najmanjši obseg, ki vsebuje 1) obseg realnih števil kot podobseg, 2) še tri različne elemente i, j, k , ki komutirajo z realnimi števili: za vsak $a \in R$ je $ai = ia$, $aj = ja$, $ak = ka$, in ki se med seboj množijo po formulah:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i$$

Elemente i, j, k imenujemo imaginarne enote. Poiščimo še ostale relacije med njimi! Če enačbo $1 = -i^2$ pomnožimo na obeh straneh z i^{-1} , dobimo: $i^{-1} = -i$. Analogno dobimo še $j^{-1} = -j$ in $k^{-1} = -k$. Iz enačb $k = ij$ in $i = jk$ dobimo

$ki = (ij)(jk) = -ik$. Če enačbo $k = ij$ pomnožimo na levi z i , dobimo $ik = -j$, če pa jo pomnožimo na desni z j , dobimo $kj = -i$. Iz enačb $i = jk$ in $j = ki$ sledi končno $ij = (jk)(ki) = -ji$. Popolna tabela produktov imaginarnih enot se torej glasi:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij &= -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \end{aligned} \quad (3)$$

Vidimo, da obseg K , če sploh eksistira, ni komutativen. Pa denimo, da eksistira. Sklepali bomo čisto podobno kot pri kompleksnih številih. Ker je K obseg, mora vsebovati vsaj vse elemente oblike

$$a = a + bi + cj + dk \quad (4)$$

pri čemer so a, b, c, d realna števila. Dokazali bomo, da že vsi taki elementi zase tvorijo obseg in s tem bo dokazano, da je $K = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Elemente oblike (4) imenujemo *kvaternioni* ali kvaternionska števila. Obseg K je potem pač obseg kvaternionov. Dokažimo zdaj, da elementi oblike (4) res tvorijo obseg! Vzemimo dva kvaterniona: $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\beta = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$! Ker veljajo v K običajni računski zakoni za seštevanje in distributivnost, se vsota izraža takole:

$$\alpha + \beta = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k \quad (5)$$

Ker je množenje asociativno, ker realna števila komutirajo z imaginarnimi enotami in ker velja distributivnostni zakon, dobimo s pomočjo tabele produktov (3) naslednjo formulo za množenje:

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \\ &= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i + \\ &+ (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k \end{aligned} \quad (6)$$

Ničelni element obsega K je pač realno število 0 in enota za množenje realno število 1. Nasprotni kvaternion se očitno izraža takole:

$$-\alpha = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = -a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$$

Izračunajmo še inverzni kvaternion! Kvaternion $a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ imenujemo kvaternionu $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ adjungirani kvaternion in ga označujemo z α^* . Adjungirani kvaternion je analogon konjugiranemu kompleksnemu številu. Podobnost ni samo navidezna. Če po formuli (6) izračunamo produkt $\alpha\alpha^*$, dobimo

$$\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Ta produkt imenujemo norma kvaterniona α . Norma je očitno nenegativno realno število, ki je enako 0 tedaj in le tedaj, ko je $\alpha = 0$. Pri kompleksnih številih ustreza normi kvadrat absolutne vrednosti. Zdaj pa že vidimo, kaj je

inverzni kvaternion: $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha\alpha^*} \alpha^*$, saj je $\alpha \frac{1}{\alpha\alpha^*} \alpha^* = \frac{1}{\alpha\alpha^*} \alpha^* \alpha = 1$. Kvaternioni

tvorijo torej res obseg.

Poglejmo zdaj, na koliko različnih načinov je mogoče dan kvaternion izraziti v obliki $a + bi + cj + dk$! Najprej odgovorimo na vprašanje, kdaj je

$$a + bi + cj + dk = 0 \quad (7)$$

Če to enačbo pomnožimo enkrat na levi in drugič na desni z i , dobimo

$$\begin{aligned} ai - b + ck - dj &= 0 \\ ai - b - ck + dj &= 0 \end{aligned}$$

Če ti dve enačbi seštejemo, dobimo $2ai - 2b = 0$, od koder sledi $a = b = 0$ (ker bi bilo sicer $i = b/a \in R$, kar pa ni res). Če bi enačbo (7) analogno množili še z j oziroma s k , bi dobili, da je tudi $b = d = 0$.

Z natančno istim preprostim sklepom kot pri kompleksnih številih lahko zdaj dokažemo, da se da vsak kvaternion izraziti na en sam način v obliki $a + bi + cj + dk$.

Začeli smo s predpostavko, da obseg K eksistira. Iz računskih pravil, ki morajo veljati v obsegu, smo izračunali, kako naj bi se izražala produkt in vsota. Zdaj pa moramo odgovoriti še na vprašanje, ali obseg K sploh eksistira. Odgovor je podoben kot pri kompleksnih številih: obseg K lahko konstruiramo.

Označimo s K množico vseh simbolov oblike (4):

$$K = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in R\}$$

Dva taka simbola štejemo za enaka tedaj in le tedaj, ko se ujemata v vseh štirih koeficientih. Seštevanje in množenje teh simbolov definiramo s predpisoma (5) in (6). Ampak zdaj nič ne vemo, če se ti operaciji pokoravata običajnim računskim zakonom in moramo to šele dokazati. Dokazi so seveda čisto elementarni, pa precej utrujajoči (posebno dokaz za asociativnost množenja) in prav nič zanimivi. V glavnem bi ponavljali, kar smo že povedali. Zato bomo dokaz preskočili. Konstruirani obseg je res tisti, ki smo ga iskali. Vsebuje namreč podobseg, ki ga lahko identificiramo z obsegom realnih števil: to je množica simbolov $\{a + 0i + 0j + 0k\}$. Poleg tega vsebuje K še tri simbole: $0 + 1i + 0j + 0k$, $0 + 0i + 1j + 0k$, $0 + 0i + 0j + 1k$, ki jih lahko po vrsti označimo z i, j, k in ki ustrezajo zahtevam (3).

Ker pa obseg kvaternionov K vsebuje obseg realnih števil kot podobseg in poleg realnih števil še element i , ki ustreza enačbi $i^2 = -1$ in ki komutira z realnimi števili, potem mora, kot smo dokazali pri študiju kompleksnih števil, vsebovati podobseg $E = \{a + bi : a, b \in R\}$, ki je v bistvu obseg kompleksnih števil C . Obseg K je torej razširitev ne le obsega realnih, ampak tudi obsega kompleksnih števil.

Toda tudi kvaterniona j in k imata to lastnost, da komutirata z realnimi števili in da je njun kvadrat enak -1 . Zato sta tudi množici $\{a + cj : a, c \in R\}$ in $\{a + dk : a, d \in R\}$ podobsega, ki ju lahko identificiramo z obsegom C . Pa še neskončno mnogo podobsegov obsega K je, ki imajo to lastnost, ker je še neskončno mnogo takih kvaternionov α , da je $\alpha^2 = -1$, kot se da dokazati.

3. Frobeniusov izrek

Sklenili smo, da bomo poiskali vsa »števila«, to je vse razširitve obsega realnih števil, in gotovo je že čas, da se lotimo te naloge. Do zdaj smo namreč našli le dve posebni razširitvi in to tako, da smo k realnim številom privzeli nekaj novih elementov in predpisali njihove algebraine lastnosti. Ne zdi se verjetno, da bomo po tej poti kaj kmalu prišli do konca (če sploh kdaj), ker si pač lahko še poljubno izmišljujemo, koliko elementov bomo privzeli k realnim številom in kakšne lastnosti naj imajo. Vsaj zdi se tako.

Pa naj bo X poljubna razširitev obsega R ; le toliko se omejimo, da bomo raziskovali le take razširitve, katerih vsi elementi komutirajo z realnimi števili (kot smo zahtevali že pri kompleksnih številih in kvaternionih): $a\xi = \xi a$ za vsak $\xi \in X$ in za vsak $a \in R$. Ne zahtevamo pa, da bi bil obseg X komutativen.

Elemente obsega X lahko množimo z realnimi števili (saj so ta tudi v X). Hitro se lahko prepričamo, da je X za seštevanje in za množenje z realnimi števili vektorski prostor nad obsegom R . Zato lahko definiramo dimenzijo razširitve X nad obsegom R :

Elemente $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in X$ imenujemo *linearno odvisne*, če eksistirajo taka realna števila $a_1, a_2, \dots, a_n$, ki niso vsa enaka 0, da je

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n = 0$$

Če pa je ta enačba mogoča le v primeru, ko je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, so elementi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *linearno neodvisni*. Če v obsegu X eksistira n linearno neodvisnih elementov, vsakih $n + 1$ elementov pa je linearno odvisnih, pravimo, da je *dimenzija* razširitve X enaka n . Če pa lahko dobimo v X poljubno veliko število linearno neodvisnih elementov, pravimo, da je dimenzija razširitve X neskončno. Velja izrek, da je dimenzija razširitve X enaka n tedaj in le tedaj, ko eksistira takih n elementov $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in X$, da se da vsak element $\xi \in X$ enolično izraziti kot linearna kombinacija elementov $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$\xi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$$

Obseg kompleksnih števil je dvodimenzionalna razširitev obsega realnih števil, ker se da vsako kompleksno število zapisati enolično kot linearna kombinacija števil 1 in i . Obseg kvaternionov je štiridimenzionalna razširitev obsega R ; vsak kvaternion namreč lahko enolično predstavimo kot linearno kombinacijo kvaternionov 1, i , j , k .

Pri študiju razširitev obsega realnih števil se bomo omejili na končno dimenzionalne razširitve. Elemente take razširitve lahko podamo s končno mnogimi realnimi števili (npr. kompleksna števila z dvema, kvaternione s štirimi). Dokazali bomo zanimiv izrek:

Frobeniusov izrek: *Asociativni obseg X naj bo taka razširitev obsega realnih števil, da vsi elementi iz X komutirajo z vsemi realnimi števili. Če je X končno dimenzionalna razširitev, potem velja:*

a) *če je obseg X komutativen, je v bistvu identičen z obsegom realnih ali pa z obsegom kompleksnih števil;*

b) *če X ni komutativen obseg, ga lahko identificiramo z obsegom kvaternionov.*

Z izrazoma »je v bistvu identičen« in »ga lahko identificiramo z« hočemo izraziti tisto, kar v algebri precizneje povemo z izrazom »je izomorfen«. Da bi bil obseg X natančno enak npr. obsegu realnih števil, ne moremo trditi, saj imamo obsege, ki se od obsega R algebraično prav nič ne razlikujejo, pa njihovi elementi le niso realna števila. Kvaternioni oblike $a + 0i + 0j + 0k$ so kvaternioni in ne realna števila, vendar jih algebraično lahko identificiramo z realnimi števili.

Lotimo se zdaj dokaza Frobeniusovega izreka! Vzemimo poljubno končno dimenzionalno razširitev X obsega realnih števil! Dimenzija naj bo na primer n . Obseg X vsebuje obseg R kot podobseg. Lahko je kar $X = R$, če pa je X večji od R , vsebuje še neki element ξ , ki ni realno število. Domenimo se, da bomo označili z $R(\xi)$ najmanjši podobseg obsega X , ki vsebuje vsa realna števila in poleg njih še element ξ . Če vzamemo poljuben element $\eta \in R(\xi)$, ki ni realno število, mora biti $R(\eta)$ vsebovan v $R(\xi)$. Obseg $R(\xi)$ je namreč tak podobseg obsega X , ki vsebuje vsa realna števila in element η , obseg $R(\eta)$ pa

je najmanjši podobseg s to lastnostjo, zato mora biti $R(\eta) \subset R(\xi)$. V posebnem primeru je seveda lahko $R(\eta) = R(\xi)$.

Vzemimo, da X res vsebuje kak element ξ , ki ni realno število! Hkrati s ξ so v X seveda tudi vse potence ξ^m . Oglejmo si zdaj elemente

$$1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^n \quad (8)$$

Teh elementov je $n+1$, dimenzija razširitve X pa je n , zato morajo biti elementi (8) linearno odvisni: eksistirajo realna števila $a_0, a_1, \dots, a_n$, ki niso vsa enaka 0, da je

$$a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 = 0 \quad (9)$$

Lahko se seveda zgodi, da je $a_n = 0$, lahko je še nekaj nadaljnjih koeficientov a_k enakih 0. Ker pa vsi niso 0, eksistira največji indeks m , $1 \leq m \leq n$, da je $a_m \neq 0$. Vzeti smemo, da je $a_m = 1$, ker bi sicer enačbo (9) z a_m delili. To enačbo lahko zdaj zapišemo v naslednji skrajšani obliki:

$$\xi^m + a_{m-1} \xi^{m-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 = 0 \quad (10)$$

Označimo z $f(x)$ polinom: $f(x) = x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$! Enačbo (10) očitno lahko zapišemo v obliki $f(\xi) = 0$. Polinom $f(x)$ pa se da razstaviti na m linearnih faktorjev:

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_m)$$

pri čemer so $r_1, r_2, \dots, r_m$ kompleksna števila. Ker ima polinom $f(x)$ realne koeficiente, je obenem z vsakim r_s ($s = 1, 2, \dots, m$), ki ni realno število, med ničlami $r_1, r_2, \dots, r_m$ polinoma $f(x)$ tudi konjugirano kompleksno število $\bar{r}_s$. Če faktorja $x - r_s$ in $x - \bar{r}_s$ zmnožimo, dobimo kvadratni polinom $x^2 + px + q$, pri čemer sta p in q realna. Ta kvadratni polinom je v obsegu realnih števil seveda nerazcepen. Tako vidimo, da se da polinom $f(x)$ zapisati v obliki:

$$f(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_k(x), \quad 1 \leq k \leq m \quad (11)$$

pri čemer so $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ realni polinomi, linearni ali nerazcepni kvadratni. Enačba (11) je identiteta in velja, če je x poljučen simbol. Zato ostane v veljavi, če namesto x vstavimo naš element $\xi \in X$. Enačbo (10) lahko zato zapišemo v obliki:

$$\varphi_1(\xi) \varphi_2(\xi) \dots \varphi_k(\xi) = 0 \quad (12)$$

Izrazi $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_k(\xi)$ imajo obliko $\xi - r$ ali $\xi^2 + p\xi + q$, pri čemer so p, q, r realna števila. Zato so vsi $\varphi_s(\xi)$, $s = 1, 2, \dots, k$, elementi obsega X . V obsegu pa je produkt več faktorjev enak 0 samo v primeru, ko je vsaj eden od faktorjev enak 0. Iz enačbe (12) zato sledi, da eksistira najmanj en s , $1 \leq s \leq k$, da je $\varphi_s(\xi) = 0$. Polinom $\varphi_s(x)$ ne more biti linearen. Kajti če bi bilo $\varphi_s(x) = x - r$, bi iz enačbe $\varphi_s(\xi) = \xi - r = 0$ dobili $\xi = r \in R$, vzeli pa smo, da ξ ni realno število. Ostane torej le še možnost, da je $\varphi_s(x)$ nerazcepen kvadraten polinom: $\varphi_s(x) = x^2 + px + q$.

Polinom $\varphi_s(x)$ ima dve konjugirano kompleksni ničli; naj bosta to števili $a + bi$ in $a - bi$! Tako je $x^2 + px + q = (x - a - bi)(x - a + bi)$, kar nam da:

$$p = -2a, \quad q = a^2 + b^2 \quad (13)$$

Označimo: $\tau = \frac{1}{b} (\xi - a) \in R(\xi)$! Izračunajmo kvadrat tega elementa! Iz enačb (13) in relacije $\xi^2 + p\xi + q = 0$ dobimo

$$\tau^2 = \frac{1}{b^2} (\xi^2 - 2a\xi + a^2) = \frac{1}{b^2} (\xi^2 + p\xi + q - b^2) = -1$$

Ker je $\tau \in R(\xi)$, mora biti $R(\tau) \subset R(\xi)$, kot smo že pokazali. Pa tudi ξ lahko izrazimo s τ : $\xi = a + b\tau \in R(\tau)$. Velja torej $R(\xi) \subset R(\tau)$, kar nam da $R(\tau) = R(\xi)$. Podobseg $R(\tau)$ je najmanjši podobseg obsega X , ki vsebuje vsa realna števila in še element τ , ki ustreza enačbi $\tau^2 = -1$. Obseg $R(\tau) = R(\xi)$ lahko torej identificiramo z obsegom kompleksnih števil, pri čemer ima element τ vlogo imaginarne enote i . Zato bomo v nadaljnjem pisali kar i namesto τ .

Zdaj se lahko zgodi, da je $R(\xi) = R(i)$ že kar ves obseg X . V tem primeru je X v bistvu identičen z obsegom kompleksnih števil. Druga možnost pa je, da je v X še kak element η , ki ni v $R(i)$. Tudi za element η velja vse tisto, kar smo povedali za element ξ , saj sta enakopravna. Tudi v $R(\eta)$ eksistira torej element, katerega kvadrat je enak -1 . Imenujmo ta element j_0 . Podobsega $R(\eta)$ in $R(j_0)$ sta enaka in v bistvu identična z obsegom kompleksnih števil. To seveda ne pomeni, da je $R(\eta) = R(i)$ (saj to sploh ne more biti, ker η ni v $R(\xi)$). Videli smo že, da na primer v obsegu kvaternionov eksistira mnogo podobsegov, ki jih lahko identificiramo z obsegom C , pa le niso enaki med seboj.

Privzeli smo, da η ni v $R(i)$, in od tod takoj sledi, da tudi j_0 ni v $R(i)$. Hitro bomo videli, da tudi element i ni vsebovan v $R(j_0)$. V obsegu kompleksnih števil sta samo dve števili, katerih kvadrat je enak -1 : to sta i in $-i$. Obseg $R(j_0)$ je v bistvu identičen s C . Če bi bila torej v $R(j_0)$ dva elementa, i in j_0 , katerih kvadrat bi bil enak -1 , bi moralo veljati $i = -j_0$. Od tod pa takoj dobimo protislovje $j_0 \in R(i)$.

Označimo z $R(\xi, \eta)$ najmanjši podobseg obsega X , ki vsebuje vsa realna števila ter elementa ξ in η . Jasno je, da je $R(\xi, \eta) = R(i, j_0)$.

Elementi $1, i, j_0$ so linearno neodvisni. Vzemimo, da imamo neko linearno kombinacijo teh elementov, ki je enaka 0:

$$a + bi + cj_0 = 0, \quad a, b, c \in R! \quad (14)$$

Če bi bil $c \neq 0$, bi lahko izračunali: $j_0 = -\frac{1}{c} (a + bi) \in R(i)$. To pa ni res, zato mora biti $c = 0$. Enako ugotovimo, da je $b = 0$, torej je tudi $a = 0$. Vidimo, da je enačba (14) mogoča le v primeru, ko so vsi trije koeficienti enaki 0, in elementi $1, i, j_0$ so res linearno neodvisni.

Enačba (14) torej ne more veljati, če je $b = 1$ in $c = \pm 1$, kar pomeni, da elementa $i + j_0$ in $i - j_0$ nista realni števili. Prej smo ugotovili: če je $\xi \in X$ poljuben element, ki ni realno število, ustreza neki enačbi $\xi^2 + p\xi + q = 0$ z realnima koeficientoma p in q . Za elementa $i + j_0$ in $i - j_0$ smo se prepričali, da nista realni števili, zato eksistirajo realna števila a, b, c, d , da veljata enačbi:

$$\begin{aligned} (i + j_0)^2 + a(i + j_0) + b &= 0 \\ (i - j_0)^2 + c(i - j_0) + d &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Če ti dve enačbi seštejemo, dobimo:

$$(i + j_0)^2 + (i - j_0)^2 + (a + c)i + (a - c)j_0 + (b + d) = 0 \quad (16)$$

Izračunajmo prva dva člena na levi strani te enačbe!

$$\begin{aligned} (i + j_0)^2 &= i^2 + ij_0 + j_0 i + j_0^2 = -2 + (ij_0 + j_0 i) \\ (i - j_0)^2 &= i^2 - ij_0 - j_0 i + j_0^2 = -2 - (ij_0 + j_0 i) \end{aligned} \quad (17)$$

Vstavimo to v enačbo (16):

$$(a + c)i + (a - c)j_0 + (b + d - 4) = 0$$

Ker so elementi $1, i, j_0$ linearno neodvisni, morajo biti vsi trije koeficienti na levi strani zadnje enačbe enaki 0:

$$a + c = a - c = b + d - 4 = 0$$

od koder sledi najprej $a = c = 0$. Če vstavimo to v enačbo (15) in upoštevamo še enačbo (17), dobimo $ij_0 + j_0 i = 2 - b$. Vidimo, da je element $ij_0 + j_0 i$ realno število. Označimo to število z $2u$!

Leva stran enačbe $x^2 + ax + b = 0$, ki ji ustreza element $i + j_0$, mora biti nerazcepen polinom, kot vemo. Isto velja za polinom $x^2 + cx + d$, katerega ničla je element $i - j_0$. Ker je $a = c = 0$, mora biti $b > 0$ in $d > 0$. Kot smo ugotovili zgoraj, je $b + d = 4$, zato je $0 < b < 4$. Če upoštevamo to v enačbi $2u = 2 - b$, vidimo, da velja $-1 < u < 1$. Zato eksistira število $v = 1/\sqrt{1 - u^2}$ in je realno. Konstruirajmo element j :

$$j = v(ui + j_0) \in R(i, j_0) \quad (18)$$

Kvadrat tega elementa je:

$$j^2 = v^2[u^2 i^2 + u(ij_0 + j_0 i) + j_0^2]$$

Upoštevajmo, da je $ij_0 + j_0 i = 2u$:

$$j^2 = v^2(u^2 - 1) = -1$$

Izračunajmo še izraz

$$ij + ji = iv(ui + j_0) + v(ui + j_0)i = -2uv + v(ij_0 + j_0 i) = 0$$

Tako lahko definiramo: $ij = -ji = k \in R(i, j_0)$. Oglejmo si malo novi element k !

$$\begin{aligned} k^2 &= (ij)(-ji) = -i(j^2)i = i^2 = -1 \\ jk &= j(-ji) = -(j^2)i = i \end{aligned}$$

Ker je $j \in R(i, j_0)$, velja $R(i, j) \subset R(i, j_0)$. Element j_0 pa tudi lahko izrazimo iz enačbe (18) z i in j (število v namreč ni enako 0):

$$j_0 = -\frac{1}{v}j - ui \in R(i, j)$$

Zato je $R(i, j_0) \subset R(i, j)$ in ker je obenem $R(i, j) \subset R(i, j_0)$, velja $R(i, j) = R(i, j_0)$.

Zberimo zdaj vse informacije, kar jih imamo o elementih i, j in k :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i \quad (19)$$

Obseg $R(i, j)$ je najmanjši podobseg obsega X , ki vsebuje vsa realna števila in poleg njih še elementa i in j . Kot smo videli, vsebuje tudi element k . Zato velja, da je $R(i, j)$ najmanjši podobseg obsega X , ki vsebuje vsa realna števila ter elemente i, j in k , ki ustrezajo enačbam (19). To pa pomeni, da lahko

obseg $R(i, j)$ identificiramo z obsegom kvaternionov. S tem smo trditev a) Frobeniusovega izreka pravzaprav že dokazali. Poglejmo še enkrat, kaj smo ugotovili:

Naj bo X komutativna končno dimenzionalna razširitev obsega R ! Lahko je $X = R$. Če pa je $X \neq R$, če torej X vsebuje kak element ξ , ki ni realno število, potem vsebuje X podobseg $R(\xi)$, ki je v bistvu obseg kompleksnih števil. Zdaj mora veljati, da je $X = R(\xi)$, kajti če bi bil v X še kak element η , ki ne bi bil v $R(\xi)$, potem bi moral obseg X vsebovati podobseg $R(\xi, \eta) = R(i, j)$, ki bi bil v bistvu identičen z obsegom kvaternionov, kot smo pravkar ugotovili. Obseg kvaternionov pa ni komutativen, zato tudi celotni obseg ne bi bil komutativen, kar je v nasprotju s supozicijo. To protislovje pove, da mora biti res $X = R(\xi) = C$.

Trditve b) Frobeniusovega izreka zdaj ne bo težko dokazati. Vzemimo, da obseg X ni komutativen. Zdaj X ne more biti enak niti R niti $R(\xi)$, ker sta ta obsega komutativna. Zato vsebuje X neki podobseg $R(i, j)$, ki je v bistvu identičen z obsegom kvaternionov. Videli bomo, da je kar $X = R(i, j)$.

Pa vzemimo, da X vsebuje neki element ζ , ki ni v $R(i, j)$! Kot vemo, eksistira v podobsegu $R(\zeta)$ tak element ε , da je $\varepsilon^2 = -1$. Spomnimo se ene od prejšnjih ugotovitev: če sta bila i in j_0 poljubna taka elementa, da je bilo $i^2 = j_0^2 = -1$ in da sta bila podobsega $R(i)$ in $R(j_0)$ različna, se je izkazalo, da je element $ij_0 + j_0i$ (tedaj smo ga označili z $2u$) realno število. Ker je tudi podobseg $R(\varepsilon)$ različen od $R(i)$, lahko j_0 nadomestimo z ε . Vsota

$$i\varepsilon + \varepsilon i = x \quad (20)$$

mora biti, torej realno število. Analogno velja, da sta izraza

$$j\varepsilon + \varepsilon j = y \quad (21)$$

$$k\varepsilon + \varepsilon k = z \quad (22)$$

realni števili, saj je podobseg $R(\varepsilon)$ različen tudi od podobsegov $R(j)$ in $R(k)$. Na osnovi enačb (20), (21) in (22) ter s pomočjo osnovnih formul (3) za množenje elementov i, j in k dobimo:

$$\begin{aligned} \varepsilon k &= \varepsilon ij = (x - i\varepsilon)j = xj - i(\varepsilon j) = xj - i(y - j\varepsilon) = \\ &= xj - yi + ij\varepsilon = xj - yi + k\varepsilon = xj - yi + z - \varepsilon k \end{aligned}$$

Od tod pa sledi $2\varepsilon k = xj - yi + z$, in če to enačbo pomnožimo na desni s k , dobimo: $-2\varepsilon = xi + yj + zk$. To pa je protislovje, kajti izraz $xi + yj + zk$ je element podobsega $R(i, j)$, mi pa smo vzeli, da ζ , torej tudi ε , ni v $R(i, j)$. Dokaz Frobeniusovega izreka je tako v celoti končan.

Ves čas smo se ukvarjali le s končno dimenzionalnimi razširitvami obsega realnih števil. Pa se za konec vprašajmo, kako je z neskočno dimenzionalnimi razširitvami! Ali sploh eksistirajo, ali pa bi morda v Frobeniusovem izreku lahko izpustili tisto omejitve na končno dimenzijo, tako da sta obsega kompleksnih in kvaternionskih števil sploh edini razširitvi obsega realnih števil?

Oglejmo si naslednji primer: z $S(x)$ označimo množico vseh racionalnih funkcij ene spremenljivke z realnimi koeficienti, to je množico vseh kvocientov $p(x)/q(x)$, pri čemer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma z realnimi koeficienti in $q(x)$ ni identično enak 0. Takoj vidimo, da je množica $S(x)$ komutativen obseg za običajno seštevanje in množenje funkcij: vsota in razlika ter produkt in kvocient dveh racionalnih funkcij so spet racionalne funkcije. Racionalne funkcije oblike $p(x)/q(x) = a/1$, pri katerih je polinom v števcu kar poljubna

realna konstanta, v imenovalcu pa je konstanta 1, lahko identificiramo z realnimi števili. Obseg realnih števil R je torej podobseg obsega $S(x)$ oziroma obseg racionalnih funkcij je razširitev obsega R . To mora biti neskončno dimenzionalna razširitev, ker bi sicer moral biti obseg $S(x)$ v bistvu identičen z obsegom realnih ali kompleksnih števil. Neskončno dimenzionalne razširitve torej eksistirajo.

Nekoliko pa le lahko omilimo pogoje Frobeniusovega izreka. Če namesto končne dimenzije razširitve X zahtevamo samo, da za vsak $\xi \in X$ eksistira tako naravno število n , da so elementi $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^n$ linearno odvisni, ostane izrek v veljavi. Drugje namreč sploh nismo potrebovali podatka, da ima X končno dimenzijo, ko smo dokazovali Frobeniusov izrek. Zato pa velja: če je X neskončno dimenzionalna razširitev, eksistira vsaj en tak element $x \in X$, da so vsi elementi $1, x, x^2, x^3, \dots$ linearno neodvisni. Obseg X vsebuje seveda vse elemente oblike

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (23)$$

pri čemer je n poljubno naravno število, koeficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ pa poljubna realna števila. Ker so potence elementa x linearno neodvisne, sta dva elementa oblike (23) enaka tedaj in le tedaj, ko se ujemata v vseh koeficientih. To pa pomeni, da lahko elemente oblike (23) identificiramo s polinomi spremenljivke x . Kot vsi elementi obsega X imajo tudi ti polinomi v X inverzne elemente. Naj bosta $p(x), q(x) \in X$ poljubna polinoma spremenljivke x , le $q(x)$ naj ne bo identično enak 0. Izračunajmo razliko

$$p(x)[q(x)]^{-1} - [q(x)]^{-1}p(x) = \xi \in X \quad (24)$$

Pomnožimo enačbo (24) na desni s $q(x)$ in upoštevajmo, da polinomi komutirajo: $p(x)q(x) = q(x)p(x)$!

$$\xi q(x) = p(x)[q(x)]^{-1}q(x) - [q(x)]^{-1}p(x)q(x) = p(x) - p(x) = 0$$

Ker je $q(x) \neq 0$, je $\xi = 0$ oziroma

$$p(x)[q(x)]^{-1} = [q(x)]^{-1}p(x)$$

Elementi, ki so v X inverzni polinomom elementa x , torej komutirajo s polinomi. To pa pomeni, da lahko element $p(x)[q(x)]^{-1}$ identificiramo z racionalno funkcijo $p(x)/q(x)$. Tako smo dokazali izrek:

Vsaka neskončno dimenzionalna razširitev obsega realnih števil vsebuje podobseg, ki ga lahko identificiramo z obsegom racionalnih funkcij ene spremenljivke z realnimi koeficienti.

Tako smo ugotovili, da je obseg $S(x)$ najmanjša neskončno dimenzionalna razširitev obsega R . Obenem pa smo uvideli, da neskončno dimenzionalnih razširitev pravzaprav ne gre imenovati »števila«, ampak jim bolj pristoji naziv »funkcije«. Obsega kompleksnih in kvaternionskih števil sta torej edina številska obsega, ki sta večja od obsega realnih števil.

Neskončno dimenzionalnih razširitev obsega R je pa zelo veliko. Množica vseh neskončno dimenzionalnih razširitev je neskončna in tudi nekoliko nepregledna. Če bi hoteli poiskati prav vse take razširitve, bi bila to kar prehuda naloga.

Literatura

Kuroš: Lekcii po obščej algebre, Moskva 1962.

ELEKTROMEHAŃSKI POJAVI PRI KRISTALIH

BORUT LAVREŃIĆ
Nuklearni inštitut »J. Stefan«

Od elektromehanskih pojavov so najprej opazili *piezoelektričnost*, to je pojav, da se kristal polarizira, če deluje nanj sila.* Kmalu nato so odkrili obratni pojav, da se piezoelektrični kristal v električnem polju deformira. Kristale lahko polariziramo tudi s segrevanjem; to je *piroelektričnost*. V tem članku bomo obravnavali vse te pojave in poiskali zveze med njimi.

Elastičnost kristalov

Kristale lahko deformirajo zunanje ali notranje sile. Za opis napetega stanja izrežimo v mislih iz napetega kristala kocko z robom enote! Normale na mejne ploskve so vzporedne z osmi $x \equiv x_1$, $x \equiv x_2$ in $z \equiv x_3$ pravokotnega koordinatnega sistema. Na ploskev z normalo v smeri osi x_i deluje rezultanta sil X_i s komponentami X_{i1} , X_{i2} , X_{i3} . Indeks i zavzame vrednosti 1, 2, 3, tako da dobimo devet količin-komponent *napetostnega tenzorja* X_{ij} . Če upoštevamo, da morata biti vsota zunanjih sil in vsota zunanjih navorov enaki nič, ugotovimo, da je ta tenzor simetričen $X_{ij} = X_{ji}$.

Naj bo $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ vektor od točke T v nedeformiranem kristalu do točke T', kamor se je premaknila točka T. Za majhne premike $d\mathbf{u}$ velja:**

$$d\mathbf{u} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \text{def } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u}) \times d\mathbf{r}$$

Izraz $\frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u})$ ustreza zasuku kristala kot celote in ga izpustimo. Devet komponent $(\text{def } \mathbf{u})_{ij} \equiv x_{ij}$ tvori deformacijski tenzor, ki je tudi simetričen: $x_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$. Za izotropno snov velja pri nategu v smeri osi x_3 zveza $x_{33} = \Delta l / l = X_{33} / E = F / ES$ in pri strižni obremenitvi v smeri osi x_1 zveza $x_{13} = \Delta l' / l' = X_{13} / G = F' / GS'$, pri čemer je E prožnostni in G strižni modul, F natezna in F' strižna sila, $\Delta l / l$ relativni vzdolžni podaljšek in $\Delta l' / l'$ relativni prečni premik.

Iščemo splošno zvezo med deformacijskim in napetostnim tenzorjem, pri čemer moramo upoštevati anizotropijo kristalov. V splošnem so namreč lastnosti kristalov odvisne od smeri, v kateri merimo. Če napetosti niso prevelike, je iskana zveza linearna — kot pri Hookovem zakonu —, le da je bolj zapletena:

$$x_{ij} = \sum \sum s_{ijkl} X_{kl}$$

Sešteti je treba po indeksih k in l od 1 do 3. s_{ijkl} je *tenzor elastičnih konstant*. Uvedimo dogovo, da moramo v produktu sešteti po tistih indeksih (v našem

* Odkrila sta ga 1880 brata Pierre in Jacques Curie pri kremenu, rošelski soli (Na-K-tartratu), turmalinu ipd. Obratni pojav je isto leto napovedal Lippman.

** I. Kuščer: Matematične metode fizike (skripta) I. Ljubljana (Inštitut »J. Stefan«), 1959, s. 143.

primeru od 1 do 3), ki so skupni faktorjema produkta. Tako lahko zgornjo zvezo pišemo

$$x_{ij} = s_{ijkl} X_{kl}$$

Pri tem naj bosta električna poljska jakost E in temperatura kristala T ves čas konstantni.

Na videz ima tenzor s_{ijkl} $3^4 = 81$ komponent. Vendar sta tenzorja x_{ij} in X_{kl} simetrična, kar zniža število neodvisnih komponent. Velja $s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{ijlk}$, zaradi česar imamo v najbolj splošnem primeru, to je pri monoklinskih kristalih, le 21 neodvisnih komponent. Upoštevati moramo dogovor o znakih: deformacija x_{ij} je v neki smeri pozitivna, če se razsežnost kristala v tej smeri poveča. Napetost je pozitivna, če je obrnjena navzven iz kristala. Po tem dogovoru je hidrostatski tlak negativen in ima napetostni tenzor v tekočini obliko $X_{kl} = -p\delta_{kl}$, kjer je δ_{kl} Kroneckerjev simbol.

Za primer navedimo komponente elastičnega tenzorja za rošelsko sol pri $+34^\circ\text{C}$ v enotah $10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$:

$s_{1111} = 52,0$	$s_{2222} = 36,8$	$s_{3333} = 35,9$
$s_{1122} = -16,3$	$s_{1133} = -11,6$	$s_{2233} = -12,2$
$s_{2323} = 37,5$	$s_{1313} = 87,8$	$s_{1212} = 26,0$

Vse druge komponente so enake nič.

Kristal se deformira tudi, ko ga segrejemo. V splošnem velja med deformacijskim tenzorjem in spremembo temperature ΔT naslednja zveza:

$$x_{ij} = a_{ij} \Delta T$$

Posebno preprosta je ta zveza pri izotropni snovi: $\Delta l/l = \alpha \Delta T$.

Direktni in obratni piezoelektrični efekt

Pri piezoelektričnem efektu nas zanima zveza med električno polarizacijo kristala in napetostnim tenzorjem. V prvem redu je ta zveza

$$P_m = d_{mkl} X_{kl}$$

pri $E = 0$ in $T = \text{konst.}$ Zvezo posreduje tenzor piezoelektričnih koeficientov, ki je tretjega reda. Simetričen je v indeksih k in l in ima za to največ 18 neodvisnih komponent. Pri tem je polarizacija definirana kot dipolni moment kristala na enoto prostornine

$$\mathbf{P} = V^{-1} \int \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$$

kjer je $\varrho(\mathbf{r})$ gostota naboja, V pa prostornina kristala. Če ni zunanjega električnega polja, je $\mathbf{P}$ od nič različna le, če kristal nima centra simetrije — inverzije. Kristale lahko po simetrijskih lastnostih, to je po sučnih oseh, zrcalnih ravninah, centrih simetrije itd., razdelimo v 32 razredov. Od teh 20 razredov nima centra simetrije. Kristali, ki pripadajo tem 20 razredom, so vsi piezoelektrični. Lastnost je tako značilna, da ugotavljajo s piezoelektričnostjo ali ima neznan kristal center simetrije ali ne.

Za opis obratnega piezoeфекta potrebujemo zvezo med deformacijskim tenzorjem in električno poljsko jakostjo. To zvezo vzpostavi tenzor tretjega reda:

$$x_{ij} = d_{nij} E_n$$

Tu sta temperaturi T in napetost x_{ij} konstantni. Tenzor d_{nij} je simetričen v indeksih i in j . Ta tenzor smo zaznamovali z isto črko kot pri piezoeфекtu;

izkazalo se bo namreč, da sta oba tenzorja identična. Pri rošelski soli so pri temperaturi 34 °C komponente piezoelektričnega tenzorja v enotah 10^{-12} As/N:

$$d_{123} = 172$$

$$d_{231} = 72$$

$$d_{312} = 6$$

Vse druge komponente so enake nič.

Kristal lahko polariziramo tudi z zunanjim električnim poljem. Najbolj splošna zveza med polarizacijo in zunanjo električno poljsko jakostjo je

$$P_m = \chi_{mn} \varepsilon_0 E_n$$

pri čemer so temperatura in napetost konstantne. χ_{mn} je *tenzor susceptibilnosti*.

Obstajajo kristali, ki so v nekem temperaturnem območju spontano polarizirani: imajo dipolni moment, čeprav ni zunanjega polja. To so feroelektriki in zanje ne velja zgornja zveza. Znani feroelektriki so: rošelska sol, barijev titanat, triglicin sulfat, kalijev dihidrogenfosfat (KH_2PO_4) in drugi. Seveda feroelektrični kristali v feroelektrični fazi nimajo centra simetrije, medtem ko ga v paraelektrični fazi lahko imajo.

Piroelektričnost

Skoraj istočasno s piezoelektričnostjo so odkrili, da se kristal lahko polarizira tudi zaradi spremembe temperature. Kristal mora biti čist in ne sme imeti površinskih nabojev. Če spremenimo temperaturo za ΔT se pojavi polarizacija $\mathbf{P}$ v smeri piroelektrične osi. To je neke vrste spontana polarizacija, ki pa se bistveno loči od one pri feroelektrikih. Tam lahko spontano polarizacijo z zunanjim električnim poljem obrnemo, medtem ko pri piroelektrikih to ni možno.

Piroelektričen kristal mora imeti usmerjeno os. Take osi ima 10 kristalnih razredov. Piroelektričnost je zelo težko opazovati, ker polarizacija hitro izgine zaradi površinskih tokov in tokov po notranjosti kristala. Pri piroelektričnosti je zveza med polarizacijo kristala in spremembo temperature

$$P_m = p_m \Delta T$$

Tu sta napetost in električna poljska jakost konstantni. Zelo močna je piroelektričnost pri turmalinu, kjer je $p_3 = 4,0 \cdot 10^{-6}$ As/st.

Vsi obravnavani tenzorji se nanašajo na pravokotni koordinatni sistem. Pri kubičnih in tetragonalnih kristalih se ta koordinatni sistem ujema s sistemom kristalografskih osi, pri kristalih z nižjo simetrijo pa ne. Vendar obstoji dogovor, kako se pri kristalih z nižjo simetrijo določi koordinatni sistem.³

Termodinamika piezoelektrikov in piroelektrikov

Spoznali smo bistvene lastnosti piezoelektrikov in nekatere zveze. Te zveze bi radi zdaj preučili s termodinamskega stališča. Taka obravnava piezoelektrikov je precej splošna in dodobra izdelana. Z njo se da napovedati mnogo kvalitativnih in kvantitativnih rezultatov. — Zapišimo spremembo notranje energije U kristala, če dovedemo toploto $dQ = TdS$, ter opravimo mehansko delo $X_{ij} dx_{ij}$ in električno delo $E_m dP_m$

$$dU = TdS + X_{ij} dx_{ij} + E_m dP_m!$$

(Tudi tu moramo v skladu z dogovorom sešteti po enakih indeksih.) Za neodvisne spremenljivke bomo vzeli skupno 10 spremenljivk X_{ij} , E_m in T . Izbrali smo jih zato, ker jih najlažje fizikalno kontroliramo tako, da kristal termostatiramo, da ga imamo prostega ali napetega in v električnem polju ali izven njega. Odvisnih spremenljivk je prav tako 10: x_{ij} , P_m in S . Vsaka od teh spremenljivk je v splošnem funkcija vseh 10 neodvisnih spremenljivk. Zato zapišemo:

$$\begin{aligned} dx_{ij} &= (\partial x_{ij}/\partial X_{kl})_{E,T} dX_{kl} + (\partial x_{ij}/\partial E_n)_{X,T} dE_n + (\partial x_{ij}/\partial T)_{X,E} dT \\ dP_m &= (\partial P_m/\partial X_{kl})_{E,T} dX_{kl} + (\partial P_m/\partial E_n)_{X,T} dE_n + (\partial P_m/\partial T)_{X,E} dT \\ dS &= (\partial S/\partial X_{kl})_{E,T} dX_{kl} + (\partial S/\partial E_n)_{X,T} dE_n + (\partial S/\partial T)_{X,E} dT \end{aligned}$$

Večino parcialnih odvodov poznamo:

$$\begin{aligned} (\partial x_{ij}/\partial X_{kl})_{E,T} &= s_{ijkl}, \quad (\partial x_{ij}/\partial E_n)_{X,T} = d_{nij} \\ (\partial x_{ij}/\partial T)_{X,E} &= \alpha_{ij}, \quad (\partial P_m/\partial X_{kl})_{E,T} = d_{mkl} \\ (\partial P_m/\partial E_n)_{X,T} &= \chi_{mn} \varepsilon_0, \quad (\partial P_m/\partial T)_{X,E} = p_m \\ (\partial S/\partial T)_{X,E} &= C/T \end{aligned}$$

Na prvih 6 odvodov smo naleteli že prej, v zadnjem pa je, kot se pokaže, toplotna kapaciteta kristala C pri konstantnih napetostih in konstantnem električnem polju.

Uvedimo prosto entalpijo G

$$G = U - X_{ij} x_{ij} - E_m P_m - TS!$$

Diferencirajmo izraz za prosto entalpijo in upoštevajmo izraz za dU

$$dG = -x_{ij} dX_{ij} - P_m dE_m - SdT!$$

Iz diferenciala G sledi:

$$(\partial G/\partial X_{kl})_{E,T} = -X_{kl}; \quad (\partial G/\partial E_n)_{X,T} = -P_n; \quad (\partial G/\partial T)_{X,E} = -S$$

Prosta entalpija G je dvakrat odvedljiva funkcija neodvisnih spremenljivk. Pri računanju drugih odvodov ugotovimo:

$$\begin{aligned} -(\partial^2 G/\partial X_{kl} \partial E_n)_{T} &= (\partial x_{kl}/\partial E_n)_{X,T} = (\partial P_n/\partial X_{kl})_{E,T} = d_{nkl} \\ -(\partial^2 G/\partial X_{kl} \partial E_n)_{E} &= (\partial x_{kl}/\partial T)_{X,E} = (\partial S/\partial X_{kl})_{E,T} = \alpha_{kl} \\ -(\partial^2 G/\partial E_n \partial T)_{X} &= (\partial P_n/\partial T)_{X,E} = (\partial S/\partial E_n)_{X,T} = p_n \end{aligned}$$

S prvo od treh enačb smo dokazali prvotno trditev, da sta tenzorja za direktni in obratni piezoeфект identična. Odvod $(\partial S/\partial E_n)_{X,T}$ opisuje elektrokalični efekt, odvod $(\partial S/\partial X_{kl})_{E,T}$ pa piezokalični efekt.

Integrirajmo sedaj diferencialne odvisnih spremenljivk v prvem redu, to je v majhnem območju, če je bil sprva kristal prost in ni bilo električnega polja.

$$\begin{aligned} x_{ij} &= s_{ijkl} X_{kl} + d_{nij} E_n + \alpha_{ij} \Delta T \\ P_m &= d_{mkl} X_{kl} + \chi_{mn} \varepsilon_0 E_n + p_m \Delta T \\ \Delta S &= \alpha_{kl} X_{kl} + p_n E_n + (C/T) \Delta T! \end{aligned}$$

Koeficienti v diagonalni ustrezajo glavnim pojavom, koeficienti izven diagonale pa krožnim pojavom. Ugotovimo, da so simetrično ležeči koeficienti enaki.

Zveza med simetrijo kristalov in tenzorji

Že v začetku smo omenili, da je simetrija kristalov povezana s simetrijo tenzorja elastičnih konstant. Želeli bi splošno pravilo za simetrijo nekoga tenzorja, če poznamo vse simetrijske lastnosti kristala. Pri tem moramo

upoštevati, da imata simetrijske lastnosti kristal in tudi zunanji vpliv, ki je v zvezi s tem tenzorjem. Če se na primer zanimamo za tenzor susceptibilnosti, je važna tudi simetrija električnega polja: Kadar je polje homogeno, definira neko rotacijsko os. Omenili smo, da ni spontane polarizacije, to je polarizacije brez zunanjega električnega polja, v kristalih, ki imajo center simetrije. Vendar pa lahko polariziramo z električnim poljem kak nepiezoelektrik.

Koristni sta dve načeli kristalne fizike. **Neumannovo načelo** pravi: Vsaka lastnost kristala kot npr. gostota, temperaturni raztezek, susceptibilnost, piezoelektričnost, elastičnost itd., ima višjo ali enako simetrijo kot geometrijska oblika kristalov, nižje pa ne more imeti. Tako imajo nekateri kristali z zelo nizko simetrijo nekatere snovne konstante skoraj izotropne. **Voigtovo načelo** pa pravi: Kristal pod zunanjim vplivom bo imel le tiste simetrijske elemente, ki so skupni kristalu brez vpliva in vplivu brez kristala. Če je npr. smer homogenega električnega polja vzdolž triadne osi kubičnega kristala, je triadna os edini skupni simetrijski element kristala in polja. Zato je v električnem pogledu ta kristal podoben trigonalnemu in je optično enoosen. Z drugimi besedami, zunanje polje ohrani ali zniža simetrijo kristala. Zato lahko tudi z zunanjim električnim poljem kristal polariziramo, kajti kristal in polje skupaj nimata centra simetrije.

Pojavi drugega reda

Integracijo po odvisnih spremenljivkah x_{ij} , P_m in S smo izvršili v prvem približku, ki je za večino kristalov dober. Dostikrat pa moramo dodati popravke drugega, tretjega reda in višje. Edino tako lahko obravnavamo feroelektrike, ki so v feroelektrični fazi spontano polarizirani in zato spontano deformirani zaradi notranjih sil. Ker še ni splošne mikroskopske teorije feroelektrikov, so termodinamski opis feroelektrikov izdelali do podrobnosti. Drug primer, kjer so popravki višjega reda zelo važni, so kristali s centrom simetrije. Pri njih ni zveze med deformacijskim tenzorjem in električno poljsko jakostjo v prvem redu kot pri piezoeffektu, temveč v drugem redu. Ta pojav je *elektrostrikcija*, ki je pri piezoelektrikih v paraelektrični fazi zanemarljiva. V feroelektrični fazi pa je elektrostrikcija istega velikostnega reda kot piezoeffekt. Oba pojava združimo in pišemo:

$$x_{ij} = d_{nij}^{(1)} E_n + d_{nmij}^{(2)} E_n E_m$$

Tenzor $d_{nmij}^{(2)}$ imenujemo *elektrostriksijski tenzor* in je simetričen v indeksih n in m ter i in j . Zgornjo enačbo lahko pišemo v obliki:

$$x_{ij} = (d_{nij}^{(1)} + d_{nmij}^{(2)} E_m) E_n = d_{nij} E_n$$

kjer je tenzor tretjega reda $d_{nmij}^{(2)} E_m$ popravek tenzorja $d_{nij}^{(1)}$. Po Voigtovem načelu ima tenzor $d_{nmij}^{(2)} E_m$ simetrijo kristala in polja skupaj. Popravek more dati od nič različne komponente d_{nmij} , ki bi bile sicer nič. Polje zniža simetrijo kristala in ustvari nove piezoelektrične konstante. To je morfični pojav. Podobnih pojavov višjega reda je še več.

Elektromehanske lastnosti kristalov so danes predmet živahnega raziskovanja. Vzroka sta dva: uporaba piezoelektričnih kristalov v ultrazvočnih izviri in odkritje laserja. Laser da zelo monokromatično svetlobo z izredno veliko električno poljsko jakostjo. V takem električnem polju pridejo do izraza

nelinearni elektromehanski pojavi, ki zahtevajo v glavnem kvanten opis elektromagnetnega polja in snovi. Novo znanstveno področje, kvantna ali nelinearna optika je sinteza fizike trdne snovi in optike.

Poglejmo, kakšne pojave imamo, če zveza med polarizacijo kristala in električnim poljem ni linearna! Kakor je znano, prispevajo k polarizaciji kristala permanentni molekulski dipoli v snovi ter elektronski oblak molekul in atomov. Pri optičnih frekvencah ostane zaznaven le še prispevek elektronov. Tudi pri feroelektrikih imamo nelinearno zvezo med $\mathbf{P}$ in $\mathbf{E}$, le da izvira ta nelinearnost od dipolov. Nelinearno elektronsko polarizacijo pa so opazili šele pred kratkim.⁵

Razvijmo v enodimenzionalnem primeru P po potencah E : $P = X^{(1)} E + X^{(2)} E^2 + X^{(3)} E^3 + \dots$! Če električna poljska jakost sinusno niha, $E = E_0 \sin \omega t$, dobimo $P = X^{(1)} E_0 \sin \omega t + \frac{1}{2} X^{(2)} E_0^2 (1 - \cos 2 \omega t) + \frac{1}{4} X^{(3)} E_0^3 (3 \sin \omega t - \sin 3 \omega t) + \dots$ Vidimo, da polarizacija ne niha samo z osnovno frekvenco ω , temveč tudi z višjimi harmoskimi frekvencami 2ω , 3ω itd. Tak pojav je podoben usmerjanju pri diodi, pri kateri zveza med tokom in napetostjo tudi ni linearna. Če posvetimo na kristal z veliko gostoto svetlobnega toka, dobimo iz kristala poleg prvotne svetlobe tudi nekaj svetlobe z natanko dvojno frekvenco. To je *generacija druge harmonske frekvence*. Kvantno gledano je zaradi dielektričnosti, ki je odvisna od E , znatna verjetnost za anihilacijo dveh fotonov vpadle svetlobe in kreacijo fotona z dvojno energijo.

Pokazati se da, da ima koeficient $X^{(2)}$ isto simetrijo kot piezoelektrični tenzor d_{ijk} . Pri kristalih s centrom simetrije je torej $X^{(2)}$ enak nič. Tu ne dobimo druge harmonske frekvence, pač pa tretjo, ki jo je izredno težko opazovati.

Literatura

- ¹ W. Cady: Piezoelectricity, New York (McGraw-Hill) 1940.
- ² W. Mason: Piezoelectric Crystals and Their Applications in Ultrasonics, New York (van Nostrand) 1950.
- ³ J. Nye: Physical Properties of Crystals, Oxford (University Press), 1958.
- ⁴ P. Gosar: Feroelektriki, Obz. mat. fiz., 4, 161 (1956).
- ⁵ P. Franken: Survey of Non-linear Optical Effects, 3. Conference on Quantum Electronics, Paris 1964.

VLAŽEN ZRAK IN MEGLA

V Obzorniku je bilo objavljenih več vprašanj o vlažnem zraku in megli.^{1,2} Nekatere bralce utegnejo zanimati zapozneli odgovori na ta vprašanja. Dodan jim je še odgovor na sorodno izpitno vprašanje iz fizike I.³ V uvodu so zbrane količine, ki nastopajo v računih z vlažnim zrakom in meglo.

Uvod. Vlažen zrak obravnavamo kot zmes idealnih plinov: suhega zraka in vodne pare. Plinska enačba da za posamezno sestavino

$$p_z V = (p - p_p) V = m_z r_z T; \quad p_p V = m_p r_v T \quad (1)$$

Tu sta p_z in p_p delna tlaka suhega zraka in pare, m_z in m_p ustrezni masi ter $r_z = R/M_z$ in $r_v = R/M_v$ ustrezni specifični plinski konstanti. R je splošna plinska konstanta, M_z povprečni kilomol zraka, M_v kilomol vode, $p = p_p + p_z$ celotni tlak, V prostornina in T absolutna temperatura. Masa vodne pare na enoto prostornine $m_p/V = p_p M_v/RT$ je *absolutna vlažnost*.

Največji delni tlak pare v ravnovesju je nasičeni parni tlak p_n . Njegovo temperaturno odvisnost ugotovimo iz enačbe $(\partial p/\partial T)_V = (\partial S/\partial V)_T = \Delta S/\Delta V$, kjer je S entropija in kaže indeks, katera količina je konstantna. Zanemarimo prostornino vode V_v v primeri s prostornino nastale pare V in upoštevamo (1). Tako dobimo Clausius-Clapeyronovo enačbo

$$dp_n/dT = m_p q_i/T (V - V_v) = p_n q_i/r_v T^2 \quad (2)$$

Izparilna toplota q_i je odvisna od temperature. Vendar lahko (2) približno integriramo, če vzamemo za izparilno toploto konstantno srednjo vrednost $\bar{q}_i$:

$$p_n(T) = p_n(T') \exp [-(\bar{q}_i/r_v)(1/T - 1/T')] \quad (2')$$

Za majhne temperaturne razlike je izparilna toplota linearno odvisna od temperature: $q_i(T) = q_i(T') + (c_{pp} - c_{pv})(T - T')$. Teda je $\bar{q}_i = q_i(T') + \frac{1}{2}(c_{pp} - c_{pv})(T - T')$. Tu sta c_{pp} in c_{pv} specifični toploti pare in vode pri stalnem tlaku. Enačba (2') je uporaben približek, če razlika temperatur ni prevelika. Nasičeni parni tlak pa je obširno tabeliran v odvisnosti od temperature.^{4,5,7}

Razmerje $m_p/m_n = p_p/p_n$, pri čemer sta oba tlaka mišljena pri isti temperaturi, imenujemo *relativna vlažnost*. Masi pare in suhega zraka sta v nenasičeno vlažnem zraku v razmerju $x = m_p/m_z = (M_v/M_z) p_p/(p - p_p)$. V nasičeno vlažnem zraku je to razmerje $x_n = (M_v/M_z) p_n/(p - p_n)$. Presežek pare se utekočini in v ravnovesju imamo nasičeno vlažen zrak in vodo. V obliki pare je delež x_n , v obliki vode pa delež $x - x_n$, če je $x = m/m_z$ in je m skupna masa vode in pare. Če je voda v obliki drobnih kapljic, govorimo o megli. Gostota vlažnega zraka je $\rho = pM_z/RT - (M_z - M_v) p_p/RT$.

Notranja energija idealnega plina je odvisna samo od temperature.⁶ Notranja energija vlažnega zraka je sestavljena iz notranjih energij suhega zraka in pare. Privzamemo, da sta notranji energiji suhega zraka in vode pri temperaturi T' enaki nič. Pri notranji energiji pare je treba upoštevati še dovedeno toploto dQ in delo tlaka $dA = -pdV$ pri izparevanju. Z energijskim zakonom $dW_n = dQ + dA = dQ - pdV$ izračunamo spremembo notranje energije pri izparevanju pri temperaturi T' . Zopet zanemarimo prostornino vode V_v

v primeri s prostornino pare V in upoštevamo enačbi (1): $W_n = m_p q_i(T') - p_n(T')(V - V_v) = m_p(q_i(T') - r_v T')$. Notranja energija vlažnega zraka je tedaj

$$W_n = m_z c_{Vz}(T - T') + m_p [q_i(T') - r_v T' + c_{Vp}(T - T')] \quad (3)$$

kjer sta c_{Vz} in c_{Vp} specifični toploti suhega zraka in pare pri stalni prostornini. — Dostikrat vzamejo za temperaturo T' ledišče pri tlaku 760 tor = 1,013 bar, to je $T_0 = 273^\circ\text{K}$ ($= 0^\circ\text{C}$).

Iz enačbe (3) izračunamo specifično toploto megla, v kateri lahko zanemarimo maso vodnih kapljic, pri stalni prostornini c_v . Pri tem je zrak ves čas nasičeno vlažen in moramo upoštevati odvisnost m_p od temperature. Odvajamo drugo enačbo (1) na temperaturo pri konstantnih V in m_z ter vstavimo dp_n/dT iz (2). Tako dobimo $(\partial m_p/\partial T)_V = m_p(q_i(T')/r_v T - 1)/T$. Končno je

$$c_V(T) = (m_z + m_p)^{-1} (\partial W_n/\partial T)_V = [M_z c_{Vz}(p - p_n) + p_n(R(q_i/r_v T - 1)^2 + M_v c_{Vp})]/[M_z(p - p_n) + M_v p_n] \quad (4)$$

kjer je treba vstaviti q_i in p_n pri temperaturi T .

Entalpija je definirana kot $H = W_n + pV$. Iz definicije in energijskega zakona sledi za spremembo entalpije $dH = dQ + Vdp$. Pri pojavih, pri katerih ni izmenjavanja toplote z okolico in ki potekajo pri stalnem tlaku, se ohrani skupna entalpija sistema. Pri stalnem tlaku je sprememba entalpije enaka dovedeni toploti. Entalpija idealnega plina je odvisna samo od temperature. Entalpija vlažnega zraka je sestavljena iz entalpije zraka in entalpije pare. Privzamemo, da sta entalpiji suhega zraka in vode pri temperaturi T' enaki nič. Za entalpijo vlažnega zraka dobimo:

$$H = (m_z + m_p)h = m_z h_z + m_p h_p; \quad h_z = c_{pz}(T - T'); \\ h_p = q_i(T') + c_{pp}(T - T'). \quad (5)$$

Tu so h , h_z in h_p specifične entalpije vlažnega zraka, suhega zraka in pare ter c_{pz} specifična toplota suhega zraka pri stalnem tlaku. Če je prisotna še voda (npr. če se del pare utekočini) z maso $m - m_p$, je treba prišteti H še entalpijo vode $(m - m_p)h_v$, kjer je $h_v = c_{pv}(T - T')$ specifična entalpija vode.

Iz enačbe (5) izračunamo specifično toploto megla v stalnem tlaku c_p . Tudi tu upoštevamo odvisnost m_p od temperature. Enačbi (1) delimo, da se znebimo V . Nato odvajamo na temperaturo pri konstantnih p in m . Za dp_n/dT vstavimo (2) in imamo $(\partial m/\partial T)_p = m_p(q_i(T')/r_v T^2)p/(p - p_n)$. Končno je

$$c_p(T) = (m_z + m_p)^{-1} (\partial H/\partial T) = [M_z c_{pz}(p - p_n) + p_n(R(q_i/r_v T)^2 p/(p - p_n) + c_{pp} M_v)/[M_z(p - p_n) + M_v p_n], \quad (6)$$

kjer je treba vstaviti q_i in p_n pri temperaturi T .

Pogosto navajajo entalpijo h^* za maso vlažnega zraka, v kateri je 1 kg suhega zraka: $h^* = h_z + xh_p$. Velja $h = (1 + x)^{-1}h^*$ in $H = m_z h^*$. Za nasičeno vlažen zrak je treba namesto p_p in x vstaviti p_n in x_n , h in h^* pa preideta v h_n in h_n^* . Medtem ko sta h in h^* funkciji temperature, tlaka in še razmerja x , sta h_n in h_n^* samo funkciji temperature in tlaka.

Za meglo je $h^* = h_n + (x - x_n)h_v$. Zdaj izračunamo odvod $(\partial h^*/\partial T)_{T,p}$. Za nenasičeno vlažen zrak je $(\partial h^*/\partial x)_{T,p} = h_n$ in za meglo $(\partial h^*/\partial x)_{T,p} = h_v$.

Entropijski zakon da za spremembo entropije pri reverzibilnih pojavih $dS = dQ/T$.⁶ Pri izentropnih (reverzibilnih adiabatnih) pojavih, pri katerih ni izmenjavanja toplote z okolico, se ohrani skupna entropija sistema. — S plinsko

enačbo in z energijskim zakonom izrazimo entropijo idealnega plina kot funkcijo tlaka in temperature. Entropija vlažnega zraka je sestavljena iz entropij zraka in pare. Privzamemo, da sta entropiji suhega zraka in vode pri temperaturi T' in pri tlaku p' enaka nič. Entropija vlažnega zraka je po tem

$$S = (m_z + m_p) s = m_z s_z + m_p s_p; \quad s_z = c_{pz} \ln T/T' - r_z \ln (p - p_p);$$

$$s_p = c_{pp} \ln T/T' - r_v \ln p_p/p_n(T') + q_i(T')/T' \quad (7)$$

Tu so s , s_z in s_p po vrsti specifične entropije vlažnega zraka, suhega zraka in pare. Če je prisotna še voda z maso $m - m_p$, je treba prišteti še entropijo vode ($m - m_p$) s_v , kjer je $s_v = c_{pv} \ln T/T'$ specifična entropija vode.

Pogosto navajajo entropijo s^* za maso vlažnega zraka, v kateri je 1 kg suhega zraka: $s^* = s_z + x s_p$. Velja $s = (1 + x)^{-1} s^*$ in $S = m_z s^*$. Za nasičeno vlažen zrak je treba vstaviti p_n namesto p_p in x_n namesto x , s in s^* pa preideta v s_n in s_n^* . Za meglo je $s^* = s_n^* + (x - x_n) s_v$. Zanima nas še odvod $(\partial s^*/\partial x)_{T,p}$. Za nenasičeno vlažen zrak je $(\partial s^*/\partial x)_{T,p} = s_p$, za meglo pa $(\partial s^*/\partial x)_{T,p} = s_v$.

V izrazu za s^* nadomestimo delna tlaka s tlakom p : $p_p = x M_z p / (x M_z + M_v)$ in $p - p_p = M_v p / (x M_z + M_v)$. Iz nove enačbe

$$s^* = (c_{pz} + x c_{pp}) \ln T/T' - (r_z + x r_v) \ln p/p' + (r_z + x r_v) \ln (r_z + x r_v) - r_z \ln r_z - r_v x \ln r_v x + x q_i(T')/T' \quad (7)$$

razberemo odvisnost s^* od tlaka. Entropija s^* se spremeni pri stalni temperaturi in stalnem razmerju x za $-(r_z + x r_v) \ln p_2/p_1$, če se tlak spremeni od p_1 do p_2 .

Iz enačb (1) do (7) lahko izračunamo vse potrebne količine. S tabelami za p_n , x_n in h_p , h_z ter s_p , s_z , še posebej pa s tabelami za h_n^* in s_n^* , si precej olajšamo delo.^{4,5} Pri naši natančnosti se vrednosti iz tabel⁵ in iz enačb razlikujejo kvečjemu za enoto na zadnjem mestu. Pri posebno natančnem računanju, pri katerem je treba upoštevati tudi temperaturno odvisnost specifičnih toplot, pa smo navezani na uporabo tabel.⁵

Vprašanje 3.¹ V 1 kg suhega zraka z 20 °C in 760 tori vbrizgamo in fino razpršimo 20 g vode z enako temperaturo. Za koliko se ohladi zrak, koliko vode izpari?

Tlak je stalen in ni izmenjavanja toplote z okolico. Zato se ohrani skupna entalpija. Na začetku je entalpija sestavljena iz entalpij zraka in vode

$$H_1 = m_z h_z + m h_v = m_z c_{pz} (T_1 - T_0) + m c_{pv} (T_1 - T_0) = 21,8 \text{ kJ}$$

Vstavimo $m_z = 1 \text{ kg}$, $c_{pz} = 1,01 \text{ kJ/kgst}$, $T_1 - T_0 = 20 \text{ st}$, $m = 0,02 \text{ kg}$ in $c_{pv} = 4,2 \text{ kJ/kgst}$. Na koncu je entalpija sestavljena iz entalpij nasičeno vlažnega zraka in ostanka vode

$$H_2 = h_n^*(T_2) + [m - m_z x_n(T_2)] h_v(T_2)$$

Začetna in končna entalpija sta enaki $H_1 = H_2$. Iz te enačbe izračunamo T_2 , saj je H_2 samo funkcija T_2 . Enačbo lahko rešimo npr. z iteracijo ali z načrtovanjem. Pri iteriranju najprej zanemarimo drugi člen v H_2 in postavimo $H_2 = h_n^*(T_2^{(0)})$. Poiščemo začetni približek $T_2^{(0)}$. Nato poiščemo iz enačbe $h_n^*(T_2^{(1)}) = H_1 - (m - m_z x_n(T_2^{(0)})) h_v(T_2^{(0)})$ naslednji približek $T_2^{(1)}$. Že naslednji korak ne da več nobene izboljšave. — Z načrtovanjem $H_2(T_2)$ pa ugotovimo najprej, da ima H_2 vrednost 21,8 kJ pri temperaturi okoli 6,5 °C. Izračunamo $H_2(6 \text{ °C}) = 20,9 \text{ kJ}$ in $H_2(7 \text{ °C}) = 23,0 \text{ kJ}$, pri čemer je $p = 760 \text{ torov} = 1,013 \text{ bar}$,

$q_i(T_0) = 2,5 \text{ MJ/kg}$, $c_{pp} = 2,0 \text{ kJ/kgst}$, $M_v = 18 \text{ kg}$, $M_z = 29 \text{ kg}$, $R = 8,31 \text{ kJ/st}$ in poiščemo nasičeni parni tlak v tabeli. Z linearno interpolacijo ugotovimo, da je $T_2 = 6,43^\circ\text{C}$. Pri tej temperaturi je nasičeni parni tlak $p_n = 9,63 \text{ mbar}$ in razmerje $x_n = 0,00597$. Končna temperatura je torej $6,4^\circ\text{C}$, izpari pa $6,0 \text{ g}$ vode.

Vprašanje 1.¹ Pri stalnem tlaku zmešamo v toplotno izolirani posodi 1 kg nasičeno vlažnega zraka pri 20°C in 1 kg nasičeno vlažnega zraka pri 10°C . Kaj dobimo?

Tudi pri tem poskusu se ohrani skupna entalpija. Na začetku je skupna entalpija

$$H_1 = m_{z1}' h_n^*(T_1') + m_{z1}'' h_n^*(T_1'') = (m_{z1}' + m_{p1}') (1 + x_n(T_1'))^{-1} h_n^*(T_1') + (m_z'' + m_{p1}'') (1 + x_n(T_1''))^{-1} h_n^*(T_1'') = 86,0 \text{ kJ}$$

Tu je $m_{z1}' + m_{p1}' = m_{z1}'' + m_{p1}'' = 1 \text{ kg}$ ter $T_1' = 10^\circ\text{C}$ in $T_1'' = 20^\circ\text{C}$. Dalje je $x_n(10^\circ\text{C}) = 0,00763$ in $x_n(20^\circ\text{C}) = 0,0149$ ter $m_{z1}' = 0,9985 \text{ kg}$ in $m_{z1}'' = 0,9924 \text{ kg}$. Če se pri mešanju ne bi utekočinilo nič pare, bi bila končna temperatura 15°C . Toda $x_n(\frac{1}{2}(T_1' + T_1''))$ je manjše kot $\frac{1}{2} x_n(T_1') + \frac{1}{2} x_n(T_1'')$. Zato se nekaj pare utekočini, končna temperatura pa je nekoliko nad 15°C . Na koncu imamo nasičeno vlažen zrak in vodo: $H_2 = m_z h_n^*(T_2) + (m - m_z x_n(T_2)) h_v(T_2)$; $m_z = m_{z1}' + m_{z1}''$; $m = m_{z1}' x_n(T_1') + m_{z1}'' x_n(T_1'')$. Iz enačbe $H_1 = H_2$ lahko izračunamo končno temperaturo T_2 . Ker pričakujemo T_2 v bližini 15°C , poiščemo $H_2(15^\circ\text{C}) = 83,4 \text{ kJ}$ in $H_2(15,5^\circ\text{C}) = 86,1 \text{ kJ}$. Z linearno interpolacijo dobimo $T_2 = 15,4^\circ\text{C}$. Z $x_n(15^\circ\text{C}) = 0,01094$ in $x_n(15,5^\circ\text{C}) = 0,01098$ izračunamo $x_n(15,4^\circ\text{C}) = 0,010976$. V celoti se tedaj utekočini $m - m_z x_n(15,4^\circ\text{C}) = 0,37 \text{ g}$ pare.

Vprašanje 2.¹ Nasičeno vlažen zrak s temperaturo 20°C in tlakom 760 tor razpnemo adiabatno reverzibilno tako daleč, da se zniža tlak na 700 tor . Kolikšna je končna temperatura? Koliko vode se kondenzira?

Razpenjanje zraka je adiabatno reverzibilno (izentropno), zato se ohrani skupna entropija. Računamo z maso vlažnega zraka, v kateri je 1 kg suhega zraka. Začetna entropija je $s_1 = s_n^*(T_1, p_1) = 205 \text{ J/st}$. Pri tem smo upoštevali že navedene podatke in postavili $T_1 = 293^\circ\text{K}$, $T' = T_0 = 273^\circ\text{K}$ ter $p_1 = p_0 = 760 \text{ tor} = 1013 \text{ bar}$. Pri razpenjanju se zrak ohladi, izloči se $x_n(T_1' p_1) - x_n(T_2, p_2)$ kilogramov vode. Končna entropija je sedaj $s_2 = s_n^*(T_2, p_2) + (x_n(T_1, p_1) - x_n(T_2, p_2)) s_v(T_2)$, tako da je:

$$s_n^*(T_1, p_1) - s_n^*(T_2, p_2) = (x_n(T_1, p_1) - x_n(T_2, p_2)) s_v(T_2) \quad (8)$$

ali kratko $\Delta s_n^* = s_v(T_2) \Delta x_n$. V pričujočem primeru je znan končni tlak $p_2 = 700 \text{ tor} = 0,933 \text{ bar}$. Iz enačbe (8) izračunamo končno temperaturo T_2 , ki nastopa v $s_n^*(T_2)$, $x_n(T_2)$ in $s_v(T_2)$. Iz enačbe za izentropno spremembo idealnega plina $T^\kappa/p^{\kappa-1} = \text{konst.}$, $\kappa = 1,4$, izračunamo, da bi se suh zrak pri razpenjanju od tlaka 760 torov na tlak 700 torov ohladil od 20°C na okoli 13°C . V našem primeru se utekočini nekaj pare, zato se vlažni zrak ohladi manj. Poskusimo s temperaturama 15°C in 17°C , ki sta med 13°C in 20°C : $s_2(288^\circ\text{K}) = 185 \text{ J/st}$ in $s_2(290^\circ\text{K}) = 206 \text{ J/st}$. Z linearno interpolacijo poiščemo temperaturo, pri kateri je $s_1 = s_2 = 205 \text{ J/st}$. To je $T_2 = 16,9^\circ\text{C}$. Utekočini se $m_z(x_n(20^\circ\text{C}) - x_n(16,9^\circ\text{C})) = (0,01469 - 0,01310) \text{ kg} = 1,6 \text{ g}$ pare na kilogram suhega zraka.

Izpitno vprašanje.³ Nasičeno vlažnemu zraku z 20 °C in 760 tori reverzibilno adiabatno zmanjšamo tlak toliko, da pade temperatura na 10 °C. Koliko vode se izloči? Kolikšen je končni tlak? Tudi pri tem poskusu se ohrani skupna entropija. Če računamo za maso vlažnega zraka, v kateri je 1 kg suhega zraka, lahko prevzamemo enačbo (8). Začetna entropija $s_1 = s_n^*(T_1, p_1) = 205 \text{ J/st}$ je enaka kot pri prejšnjem vprašanju. Toda tu ne poznamo končnega tlaka, ampak končno temperaturo $T_2 = 283 \text{ °K}$. Iz (8) izračunamo končni tlak p_2 , ki nastopa v $x_n(p_2)$ in $s_n^*(p_2)$. Da ohladimo suh zrak z izentropnim razpenjanjem od 20 °C do 10 °C, moramo zmanjšati tlak od 760 tor na 674 tor. V našem primeru se utekočini nekaj pare, zato je tlak nekoliko manjši. Z načrtovanjem s_2 ugotovimo, da leži p_2 med 580 tori in 600 tori. Z linearno interpolacijo med $s_2(580 \text{ tor}) = 208 \text{ J/st}$ in $s_2(600 \text{ tor}) = 195 \text{ J/st}$ ugotovimo, da je $s_2 = s_1 = 205 \text{ J/st}$ pri tlaku $p_2 = 584 \text{ tor}$. Pri razpenjanju se utekočini $m_z(x_n(760 \text{ tor}) - x_n(584 \text{ tor})) = (0,01469 - 0,00996) \text{ kg}$ pare, to je 4,7 g na kilogram suhega zraka.

(V tem primeru lahko v enačbo (8) uvedemo novo spremenljivko $u = p_1/(p_2 - p_n(T_2))$. V novi obliki je enačba zelo primerna za iteracijo: $\ln u = 0,583 - 0,231 u$. Rešitev: $u = 1,32$; $p_2 = 584 \text{ tor}$.)

Diagrama $h^*(x)$ in $s^*(x)$. Hitreje lahko rešimo navedene naloge grafično. V primerih, ko se ohrani entalpija, uporabimo diagram $h^*(x)$. Entalpija h^* je odvisna še od tlaka p in temperature T . Vendar postavimo $p = p_0 = 760 \text{ tor} = 1,013 \text{ bar}$. Temperaturo vzamemo za parameter in rišemo izoterme (krivulje, ki ustrezajo konstantni temperaturi). Diagram ima dve območji. V območju nenasičeno vlažnega zraka je $x = (M_v/M_z) p_p/(p - p_p)$. Strmina izoterm je tu $(\partial h^*/\partial x)_{T,p} = h_p = c_{pp}(T - T_0) + q_i(T_0)$. Konstantni drugi člen je dosti večji od prvega, zato so te izoterme skoraj vzporedne. V območju megle je $x = m/m_z$, kjer je m skupna masa vode in pare. Strmina izoterm je tu $(\partial h^*/\partial x)_{T,p} = h_v = c_{pv}(T - T_0)$. To je zelo malo v primerih s $q_i(T_0)$, če temperatura ni previsoka. Meja obeh območij — *rosiščnica* — povezuje točke, ki ustrezajo nasičeno vlažnemu zraku.

Če bi risali diagram $h^*(x)$ v pravokotnem koordinatnem sistemu, bi bilo območje nenasičeno vlažnega zraka nepregledno stisnjeno ob os h^* . Zato rišejo $h^*(x)$ v poševnem koordinatnem sistemu. Abscisa os x je vodoravna, ordinatno os pa zasujejo v negativnem smislu, tako da postane izoterma nenasičeno vlažnega zraka za 0 °C vodoravna. Premica s konstantno entalpijo $h^* = 0$ ima tedaj (merjeno v pravokotnem koordinatnem sistemu) strmino $-q_i(T_0)$. Druge premice s konstantno entalpijo so ji vzporedne. Vendar teh premic ne rišejo, saj iz diagrama ne želimo razbrati pravih vrednosti entalpij.

Uporabo diagrama $h^*(x)$ pokažemo pri reševanju vprašanja 1! (Glej s. 30!) V začetnem stanju ustreza točka 1' nasičeno vlažnemu zraku pri temperaturi $T' = 10 \text{ °C}$ in točka 1'' nasičeno vlažnemu zraku pri temperaturi $T'' = 20 \text{ °C}$. Obe točki sta na rosiščnici. Pri mešanju v opisanih okoliščinah se ohrani skupna masa zraka, skupna masa pare in vode in skupna entalpija:

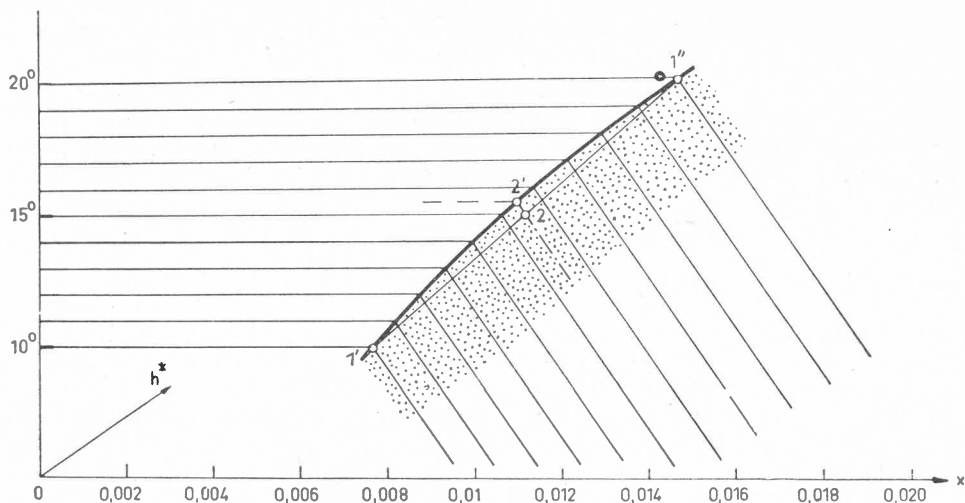
$$m_z = m_{z1'} + m_{z1''}, \quad m = (m_{z1'} + m_{z1''}) x(T_2) = m_{z1'} x_n(T_1') + m_{z1''} x_n(T_1''), \\ (m_{z1'} + m_{z1''}) h^*(T_2) = m_{z1'} h_n^*(T_1') + m_{z1''} h_n^*(T_1'')$$

Tu je T_2 končna temperatura. Točka 2, ki ustreza končnemu stanju, leži na zveznici 1'1'', saj dobimo iz zgornjih enačb zvezo

$$(h^*(T_2) - h_n^*(T_1'))/(x(T_2) - x_n(T_1')) = (h_n^*(T_1'') - h_n^*(T_1'))/(x_n(T_1'') - x_n(T_1'))$$

Razmerje, v katerem deli točka 2 zveznico, je odvisno od razmerja med začetnima masama: $(x(T_2) - x_n(T_1')) / (x_n(T_1'') - x(T_2)) = m_{z1}' / m_{z1}''$.

V našem primeru postavimo kar $m_{z1}' = m_{z1}''$. Zato je točka 2 na sredi med točkama 1' in 1'' (sl. 1). Ta točka leži na izotermi za $T_2 = 15,4^\circ\text{C}$ v območju megle. Iz razlike Δx za točko 2 in točko 2', ki ustreza nasičeno vlažnemu zraku pri temperaturi T_2 , sklepamo na maso utekočinjene pare. V našem primeru je $\Delta x = x_2 - x_2' = 1,9 \cdot 10^{-4}$. Na 2 kg suhega zraka se torej izloči 0,38 g vode.

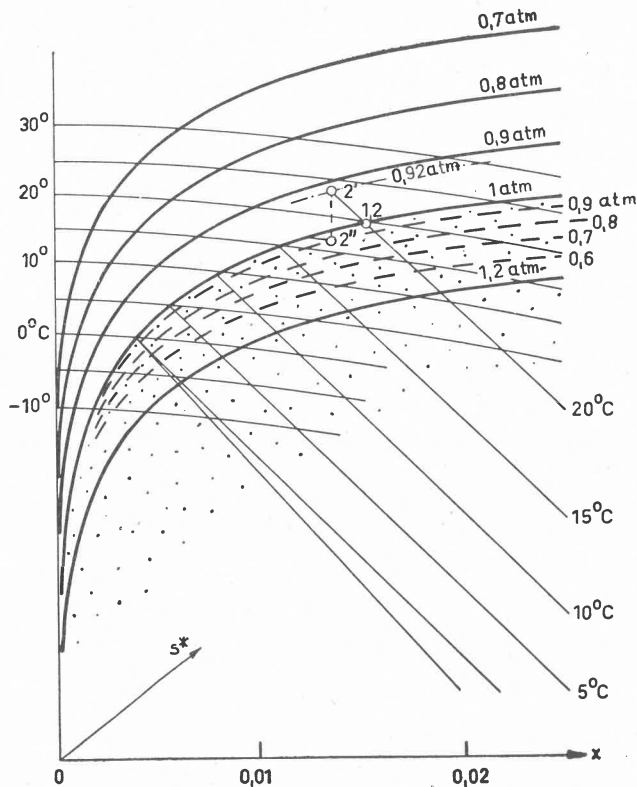


Sl. 1. Diagram $h^*(x)$. Debelo je narisana rosiščnica. Levo od nje so izoterme nenasičeno vlažnega zraka, desno pa izoterme megle. Del območja megle je označen pikčasto. Na rosiščnici sta točki 1' in 1'', ki ustrezata začetnemu stanju. Zveznico med njima razpolavlja točka 2, ki leži na izotermi za $T_2 = 15,4^\circ\text{C}$. V presečišču te izoterme z rosiščnico je točka 2', ki ustreza končnemu stanju. Razlika $x_2 - x_2' = 0,00019$, ki jo izmerimo na diagramu, da maso utekočinjene pare na 1 kg suhega zraka.

Diagram $s^*(x)$ je uporaben v primerih, ko se ohrani entropija. Pri $h^*(x)$ smo lahko postavili tlak kar spočetka enak p_0 , saj se entalpija ohrani le, če je tlak konstanten. Nasprotno je pri $s^*(x)$ tlak važen parameter, saj se spremeni med poskusom. Strmina izoterm nenasičeno vlažnega zraka $(\partial s^* / \partial x)_{T,p} = s_p$ je odvisna od tlaka in od razmerja x . Strmina izoterm megle $(\partial s^* / \partial x)_{T,p} = s_v$ je neodvisna od tlaka in razmerja x . V diagram so vrisane le izoterme za tlak $p_0 = 760$ torov. Navzlic temu je diagram uporaben, saj lahko hitro ugotovimo lego izoterm za druge tlake. Upoštevamo, da se pri konstantni temperaturi in konstantnem razmerju x spremeni entropija s^* za $-(r_z + x r_v) \ln(p_0 + \Delta p) / p_0$, če se tlak p_0 poveča za Δp . Ta prispevek prištejemo pri izbranem x v neki točki izoterme za T in p_0 in dobimo ustrezno točko izoterme za T in $p_0 + \Delta p$. V diagram je vrisana rosiščnica za tlak p_0 . Le-ta povezuje točke izoterm za p_0 , v katerih je $x = x_n(T, p_0)$. Poleg te so vrisane še pomožne rosiščnice, ki povezujejo točke izoterm za p_0 , v katerih je $x = x_n(T, p_0 + \Delta p)$. Vsakemu vlaku $p_0 + \Delta p$ ustreza druga pomožna rosiščnica. Rosiščnico pri nekem tlaku dobimo, če pomožni rosiščnici za tisti tlak za vsak x prištejemo $-(r_z + x r_v) \ln(p_0 + \Delta p) / p_0$. V diagram so vrisane tudi rosiščnice za iste tlake

kot pomožne rosiščnice. Tudi diagram $s^*(x)$ je narisana v poševnem koordinatnem sistemu. Spremembe entropije $\Delta s^* = -(r_z + x r_v) \ln(p_0 + \Delta p)/p_0$ veljajo za konstanten x in jih je zato treba risati v navpični smeri.

Uporabo diagrama $s^*(x)$ si oglejmo pri reševanju vprašanja 2! (Glej s.30!) Točka 1, ki ustreza začetnemu stanju, je v presečišču rosiščnice za $p_0 = 760$ torov $= 1$ atm in izoterme za 20°C in enak tlak. Entropija se ohrani, zato sovпада točka 2, ki ustreza končnemu stanju, s točko 1. Toda zdaj je ta točka na izotermi za tlak $p_2 = 700$ torov $= 0,92$ atm in za neznano temperaturo T_2 . Točka 2 je pod rosiščnico za tlak p_2 , torej v območju megle. Skozi točko 2 bi morali narisati izotermo megle za neznano temperaturo T_2 . Strmina izoterm megle pa je neodvisna od tlaka in za majhne temperaturne razlike približno neodvisna od temperature, vzamemo kar izotermo megle za 20°C . To izotermo



Sl. 2. Diagram $s^*(x)$. Debelo so narisane rosiščnice za nekaj tlakov. Levo od rosiščnice za tlak 1 atm je območje nenasičeno vlažnega zraka pri tem tlaku (izoterme nenasičeno vlažnega zraka so podaljšane še čez rosiščnico), desno pa območje megle (pikčasto). Pomožne rosiščnice za nekaj tlakov so vrisane črtkano. Točka 1,2 v presečišču rosiščnice za tlak 1 atm in izoterme za 20°C ustreza začetnemu in končnemu stanju. S pikami in črticami je narisana rosiščnica za tlak 0,92 atm. V njenem presečišču z izotermo megle za 20°C je točka 2'. Razlika $x_2 - x_2' = 0,0016$, ki jo izmerimo na diagramu, da maso utekočinjene pare na 1 kg suhega zraka. V presečišču navpičnice ($x = \text{konst.}$) skozi 2' in pomožne rosiščnice za 0,92 atm (v diagramu smo vzeli približno kar pomožno rosiščnico za 0,9 atm) je izoterma za končno temperaturo $T_2 = 17^\circ\text{C}$.

podaljšamo do rosiščne za tlak p_2 in dobimo točko 2'. Razlika $\Delta x = x_2 - x_2' = 1,6 \cdot 10^{-3}$ kaže, da se utekočini 1,6 g pare na 1 kg suhega zraka. Izoterma za T_2 in p_2 bi sekala rosiščno za tlak p_2 v točki 2'. Izoterme za p_2 niso vrisane, zato na pomožni rosiščnici za ta tlak navpično pod točko 2' poiščemo točko 2''. Izoterma za tlak p_0 skozi točko 2'' določa končno temperaturo $T_2 = 17^\circ\text{C}$. — Rezultati, ki jih preberemo iz diagramov, so nekoliko manj natančni.

Vprašanje.² Kolikšni so razteznostni koeficient ter izoterma in adiabatna stisljivost megle pri 760 tor in 25°C ? Nasičeni parni tlak vode pri 25°C je 23,8 tor, izparilna toplota pri tej temperaturi pa $2,44 \cdot 10^6$ J/kg.

Računamo, da je masa vodnih kapljic v megli zanemarljiva. Upoštevamo samo, da je zrak v megli ves čas nasičeno vlažen. — Razteznostni koeficient je $\beta = V^{-1}(\partial V/\partial T)_p$. Iz prve enačbe (1) izračunamo prostornino $V = m_z r_z T/(p - p_n(T))$ in jo odvajamo na temperaturo pri konstantnih tlaku p in masi m_z ter upoštevamo za dp_n/dT enačbo (2). Tako dobimo

$$\beta(T) = T^{-1} + (p - p_n)^{-1} dp_n/dT = T^{-1} [1 + (q_i/r_v T) p_n/(p - p_n)].$$

Vstavimo $T = 298^\circ\text{K}$ in izparilno toploto $q_i = 2,44$ MJ/kg ter nasičeni parni tlak $p_n = 23,8$ tor = 28,8 mbar pri tej temperaturi. Dobimo $\beta = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ st}^{-1}$, to je 1,58-kratno vrednost za suh zrak v enakih okoliščinah.

Izotermno stisljivost $\chi_T = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_T$ dobimo naravnost z odvajanjem enačbe za V pri stalni temperaturi: $\chi_T = (p - p_n)^{-1}$. To da $\chi_T = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ tor}^{-1} = 0,987 \text{ bar}^{-1}$ ali 1,03-kratno vrednost za suh zrak v enakih okoliščinah.

Račun adiabatne (izentropne) stisljivosti $\chi_S = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_S$ je dosti zamudnejši. Najhitreje jo dobimo z enačbo $\chi_S/\chi_T = c_v/c_p$, ki je znana za idealni plin $\chi_S = (c_v/c_p)/p = (\kappa p)^{-1}$. Prepričamo se lahko, da velja ta enačba popolnoma splošno.⁴ Za meglo je treba pa vstaviti c_v in c_p iz enačb (4) in (6). Po zamudnem, a lahkem računu dobimo končno:

$$\chi_S = (\kappa p)^{-1} \left\{ 1 + \kappa_z [(1 - \kappa_z^{-1})/(1 - \kappa_p^{-1}) + (1 - \kappa_z^{-1}) (q_i/r_v T - 1)^2 p_n/p] / \{ 1 + [(1 - \kappa_z^{-1})/(1 - \kappa_p^{-1}) - 2 + (1 - \kappa_z^{-1}) (q_i/r_v T)^2] (p_n/p) + [1 - (1 - \kappa_z^{-1})/(1 - \kappa_p^{-1})] (p_n/p)^2 \} \right\}.$$

Tu sta $\kappa_z = c_{pz}/c_{vz} = 1,4$ in $\kappa_p = c_{pp}/c_{vp} = 1,33$ razmerji specifičnih toplot za zrak in za paro.⁷ Rezultat pa ostane nespremenjen, če vzamemo kar $\kappa_z = \kappa_p = 1,4$ in spustimo kvadratni člen v imenovalcu. Dobimo $\chi_S = 0,84 \text{ bar}^{-1}$, kar je 1,19-kratna vrednost izentropne stisljivosti suhega zraka v enakih okoliščinah. Hitrost zvoka v megli pri 25°C je tedaj $(1,19)^{-1/2} c = 0,917 c$, če je c hitrost zvoka v suhem zraku pri tej temperaturi.

M. Hribar in J. Strnad

Literatura

- ¹ I. Kuščer, Obz. mat. fiz. 5, 95 (1957).
- ² M. Rosina, Obz. mat. fiz. 8, 96 (1961).
- ³ F. Ahlin, I. Kuščer, A. Moljk, J. Strnad: Izpitna vprašanja iz fizike. Ljubljana (Univerzitetna založba), 1963. T 5.
- ⁴ F. Bošnjaković: Nauka o toplini. Zagreb (Nakladni zavod Hrvatske), 1950.
- ⁵ M. P. Vukalović: Tablice termodinamičeskikh svojstv vody i vodjanogo para. Moskva (Gosenergoizdat), 1963.
- ⁶ I. Kuščer, A. Moljk: Fizika, Ljubljana (DZS), 1960, II. del.
- ⁷ E. Schmidt: Thermodynamik. Berlin (Springer), 1960, s. 50.

DOMAČE VESTI

KROŽKI IN TEKMOVANJA ZA MLADE MATEMATIKE

Tudi letos je društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS organiziralo krožke in tekmovanja za mlade matematike. V Ljubljani so predavali:

dr. Ivan Vidav — Simetrija v aritmetiki in geometriji

dr. Jože Graselli — Fibonaccijeva števila

Jože Vrabec — Linearni vektorski prostori

dr. Anton Suhadolc — Diferenčne enačbe

Zvonimir Bohte — Ekstremi — Predavanje o študiju matematike

Franc Lebedinec — Pomen in metode opisne geometrije

Marjan Vagaja — Številski sistemi — Problem o zlatnikih — Matematična indukcija

Ivan Pucelj — Determinante in njihova uporaba

Janez Garbajs — Vektorji in njihova uporaba

Franc Dacar — Kompleksna števila

Izven Ljubljane so predavali:

V Kopru: dr. Alojz Vadnal — Linearno programiranje

Zvonimir Bohte — Ekstremi

dr. Anton Suhadolc — Diferenčne enačbe

V Celju: dr. Ivan Vidav — Simetrija v geometriji in aritmetiki

dr. Anton Suhadolc — Diferenčne enačbe

Franc Dacar — Kompleksna števila

V nedeljo, 17. aprila 1966 je bilo v Ljubljani deseto republiško tekmovanje dijakov srednjih šol. Tekmovanja se je udeležilo 140 dijakov. V prvem razredu je tekmovalo 50 dijakov, v drugem 29, v tretjem 31 in v četrtem razredu 30 dijakov. Od udeležencev je bilo 6 iz tehniških šol, drugi pa iz gimnazij, in sicer: Ljubljana — 49, Nova Gorica — 20, Koper — 13, Škofja Loka — 9, Maribor — 9, Celje — 9, Idrija — 7, Črnomelj — 6, Ptuj — 4, Velenje — 3, Tolmin — 2, Trbovlje — 2, Novo mesto — 2, Kamnik — 2, Ravne na Koroškem — 2.

V $2\frac{1}{2}$ ure so udeleženci morali rešiti naslednje naloge:

I. razred

1. Dokaži, da je število $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ deljivo z 19 za vsako naravno število n !

2. Kroglice razdelimo na pet kupov. Iz prvega kupa vzamemo eno petino kroglic in jih damo na drugi kup, nato vzamemo iz drugega kupa eno petino kroglic in jih damo na tretji kup, nato damo eno petino kroglic iz tretjega kupa na četrti kup, potem eno petino kroglic iz četrtega na peti kup in končno eno petino kroglic iz petega kupa na prvi kup. Tako je na vsakem kupu 32 kroglic. Koliko kroglic je bilo na posameznih kupih v začetku?

3. V enakokrakem trikotniku poznamo višino na osnovnico v in polmer včrtanega kroga ρ . Izračunaj stranice trikotnika!

4. Na kraku BC enakokrakega trikotnika ABC leži točka P. Krak AC podaljšaj prek točke A do točke Q tako, da je $AQ = BP$. Daljica PQ seka osnovnico AB v točki R.

- Dokaži, da je točka R središče daljice PQ!
- Kje leži točka R na osnovnici AB?

II. razred

1. Poišči vsa realna števila a in b , za katera je izraz $(a + bi)^3$ realen in večji od 27!

2. Dokaži, da sta korena enačbe

$$6x^2 - 3(a + b + c + d)x + (ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 0$$

realna, če so a , b , c in d realna števila!

3. Načrtaj trikotnik, če poznaš stranico c , polmer očrtanega kroga r in polmer včrtanega kroga ρ !

4. V poljubni tristranični piramidi z oglišči A, B, C, D potegnimo višino iz oglišča D na osnovno ploskev ABC in višino iz oglišča C na ploskev ABD! Dokaži, da se ti višini sekata tedaj in le tedaj, če sta mimobežna robova AB in CD med seboj pravokotna!

III. razred

1. Določi vse korene (tudi kompleksne) enačbe

$$x^2 + \frac{25x^2}{(5 + 2x)^2} = \frac{74}{49}$$

2. Dokaži, da je $x = y = z = 1$ edina rešitev enačbe

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$$

če so x , y in z naravna števila!

3. Dani sta različni pozitivni števili a in b . Ugotovi, katero od števil

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{in} \quad \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

je večje!

4. a) Izrazi vsoto kotov α in γ s števili K , L , p , q , če je

$$\begin{aligned} p \sin \alpha + q \sin \gamma &= K \\ p \cos \alpha - q \cos \gamma &= L \end{aligned}$$

b) Izračunaj ploščino četrkotnika, v katerem poznaš stranice a , b , c , d in vsoto kotov $\alpha + \gamma$.

c) Izpelji obrazec za ploščino tetivnega četrkotnika!

IV. razred

1. Z matematično indukcijo dokaži, da veljata neenačbi

$$\left(\frac{1}{3}n\right)^n < n! \quad \text{in} \quad (3n)! > n^{3n}$$

za vsako naravno število n !

2. V polkrog s polmerom R včrtaj enakokrak trapez z največjim obsegom! (Osnovnica trapeza je premer kroga.)

3. Elipsa v središčni legi in parabola v temenski legi imata skupno gorišče, premica, ki poteka skozi točki $A(5, 8)$ in $B(-10, -1)$, pa jima je skupna tangenta. V kolikem kotu se vidi iz skupnega gorišča tisti del tangente, ki leži med obema dotikališčema?

4. Trikotniku ABC včrtamo krog. Dotikališča tega kroga s stranicami so oglišča novega trikotnika $A'B'C'$. Koliko je razmerje ploščin obeh trikotnikov, če je polmer trikotniku ABC včrtanega kroga enak ρ , očrtanega kroga pa r ?

Tekmovalna komisija pod vodstvom univerzitetnega profesorja dr. Ivana Vidava je podelila naslednje nagrade:

1. nagrada: Peter Legiša, 2. razred II. gimnazije v Ljubljani
Tomo Pisanski, 3. razred II. gimnazije v Ljubljani
2. nagrada: Andrej Bekeš, 4. razred gimnazije v Idriji
Edvard Kramar, 4. razred gimnazije v Novem mestu
Svitan Gaborovič, 2. razred gimnazije Tabor v Mariboru
Andrej Peteln, 4. razred II. gimnazije v Ljubljani
Janez Sketelj, 4. razred gimnazije Ljubljana-Vič
- Pohvale: Tomo Žitko, 2. razred II. gimnazije v Ljubljani
Vladimir Batagelj, 3. razred gimnazije v Kopru
Pavla Lah, 4. razred gimnazije v Kamniku
Peter Murko, 4. razred gimnazije v Ptuj
Milan Kladnik, 1. razred gimnazije v Idriji
Jože Majcen, 1. razred gimnazije v Trbovljah
Julij Savelli, 1. razred gimnazije v Novi Gorici
Janez Krušič, 1. razred gimnazije v Velenju.

Za zvezno tekmovanje v Beogradu so bili izbrani:

Pisanski Tomo
Bekeš Andrej
Kramar Edvard
Peteln Andrej
Sketelj Janez
Batagelj Vladimir

Na zveznem tekmovanju v Beogradu je bilo treba rešiti naslednje naloge:

3. razred

1. Poišči četverociferno število, ki predstavlja popoln kvadrat in v katerem sta prvi dve in zadnji dve cifri enaki!

2. Dokaži, da so prostornine tetraedrov, ki imajo en skupen trieder v istem razmerju kot produkti robov s skupno točko v vrhu tega triedra!

3. Določi vse vrednosti v intervalu $0 - 2\pi$, ki zadoščajo neenačbi

$$2(\cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x) \geq (\sqrt{3} - 1) \sin 2x$$

4. Reši sistem enačb

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ax + by + cz &= d \\a^2 x + b^2 y + c^2 z &= d^2\end{aligned}$$

kjer so a, b, c in d realni parametri in je $|a| \neq |b|$, $|b| \neq |c|$, $|a| \neq |c|$.

5. Kroga K' in K'' se dotikata od zunaj, a njhova skupna zunanja tangenta ima dotikališči A_1 in A_2 . Označi z E presek te tangente z notranjo tangento skupno obema krogoma. Središča označi s C_1 in C_2 .

a) Dokaži, da je trikotnik C_1EC_2 pravokotni!

b) Ako zavrtiš krog K' in K'' skupno z odsekom A_1A_2 okrog premice skozi C_1C_2 , opiše odsek A_1A_2 plašč prisekanega stožca. Določi površino M tega plašča!

c) Ako sta polmera krogov spremenljivki in je njihova vsota $R_1 + R_2 = a$ ($a = \text{konstanta}$), določi maksimalno vrednost površine M !

4. razred

1. Ako so x_1, x_2 in x_3 koreni enačbe

$$x^3 - 1 = 0$$

dokaži, da je

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n x_2^n + x_1^n x_3^n + x_2^n x_3^n!$$

2. Imaš tri črne kroglice oštevilčene z 1 in tri črne oštevilčene z 2 in še tri grupe po 6 belih kroglic oštevilčenih zaporedno z 1, 2 in 3. Kroglice moraš razporediti tako, da so v nizu 9 kroglic tri črne in šest belih. Na koliko načinov lahko to narediš?

3. Dokaži, da ne moremo okrajšati ulomek

$$\frac{3n+1}{2n^2+n} \quad \text{če je } n \text{ naravno število!}$$

4. Naj bo x_1 določeno, poljubno realno število in x množica takih realnih števil, kjer je razlika

$$|x - x_1| \leq \frac{1}{100}$$

a) Dokaži, da za vse točke x in x_1 v intervalu

$$\delta = \left(x_1 - \frac{1}{100}, x_1 + \frac{1}{100} \right)$$

razlika vrednosti funkcije $\sin x$ ni večja od $1/100$!

b) Ali moremo določiti za funkcijo $\sin x^2$ dolžino intervala, navedenega pod a) tako, da je

$$|\sin x^2 - \sin x_1^2| \leq 1/100 \quad x \text{ in } x_1 \in \delta$$

kjer je δ interval končne dolžine in ni odvisen od izbire točke x_1 .

Peta naloga se glasi tako kakor peta naloga v tretjem razredu.

Od naših tekmovalcev je zasedel Tomo Pisanski drugo mesto in je bil tudi izbran za mednarodno matematično olimpiado v Sofiji. Pohvaljena sta bila Janez Sketelj in Vladimir Batagelj.

Stanko Uršič

AKCIJA ZA USMERJANJE MLADINE PRI IZBIRI ŠTUDIJA NA VISOKIH ŠOLAH

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani, Matematično fizikalni oddelek Fakultete za naravoslovje in tehnologijo ter Nuklearni inštitut Jožef Stefan organizirajo vsako leto v pomladanskih mesecih usmerjevalne akcije, ki naj srednješolsko mladino privabijo v študij fizike in matematike, hkrati pa jo tudi opozorijo na zahtevnost študija, da bi s tem v čim večji meri preprečili škodljive napačne odločitve.

Letos je bila prva taka akcija ciklus predavanj iz fizike za srednješolce, ki je bil na katedri za fiziko v Jadranski ulici. Vseboval je naslednja predavanja: 17. III. Gibanja umetnih satelitov (dr. Franjo Dominko), 24. in 31. III. Osnove kvantne mehanike (dr. ing. Janez Strnad), 7. in 14. IV. Spektri zvoka in svetlobe (dr. Ivan Kuščer), 14. in 21. IV. Natančnost, hitrost in avtomatičnost merjenj (dr. Anton Moljk), 5. V. Polarizacija (dr. ing. Mitja Rosina). Udeležba je bila zadovoljiva, proti koncu seveda manjša kakor v začetku, vendar povpreček nekaj čez sto. Predavatelji so se potrudili, da bi našli strokovni jezik, ki bi imel čim globlji odmev med mladino, ki je bila iz vseh razredov srednjih šol. To se jim je v veliki meri tudi posrečilo. Hkrati pa so videli poslušalci ob omenjenem programu tudi sliko fizike s težje strani in bili tako opozorjeni, da študij fizike in matematike ni lahak.

V nedeljo, 8. maja je bilo republiško tekmovanje mladih fizikov, ki ima namen, da pokaže, na kaki stopnji je znanje fizike po naših šolah in s tem tudi, kakšen naraščaj lahko pričakujejo ustrezne visoke šole v naslednjih letih. Letos so dobile kak mesec pred tekmovanjem vse v poštev prihajajoče šole po nekaj izvodov Zbirke nalog iz fizike za srednješolce (kakih 380 nalog), ki bi naj dale interesantom za tekmovanje pobudo za treniranje, še drugim dijakom, ki se zanimajo za fiziko, pa sredstvo za izpopolnjevanje. Tekmovanja iz fizike se je udeležilo 72 dijakov: v prvi skupini (mehanika) 31, v drugi (toplota, nihanje in valovanje, zvok, optika) 17, v tretji (elektrika, atomika) 24. Z gimnazij 59, s srednjih strokovnih šol 13; fantov 63, deklet 8. Udeleženih šol je bilo: gimnazij 15 (lani 10), strokovne šole 4 (lani nič). Rezultati tekmovanja so letos za spoznanje slabši kot lani.

Naloge so bile naslednje:

I. razred

1. Koliko naj bo pri vodoravnem metu začetna hitrost, da bo eno sekundo po začetku gibanja trenutna hitrost enaka dvakratni začetni hitrosti?

2. Oče in sin neseta na ramah 4 m dolg in 10 kp težak homogen drog. Spredej stopa oče, 1 m droga moli pred njega in je na koncu obremenjen z bremenom $F_1 = 30$ kp. Na zadnjem koncu nosi drog sin, 1 m pred njim je na drogu drugo breme $F_2 = 60$ kp. Koliko nosi oče, koliko sin?

3. Izračunaj hitrost, katere železniški vagon ne sme preseči, da se ne prevrne, ako vozi po krivini s polmerom $r = 200$ m. Širina tira je 1,435 m, zunanja tračnica leži 10 cm više od notranje, težišče vagona pa je 1,8 m oddaljeno od robov tračnic.

4. Vzmet razžene dva prvotno mirna vozička v nasprotnih smereh po vodoravnem tiru. Prvi voziček tehta 2 kg in napravi pot 12 m, preden se ustavi. Kolikšno pot prevozi drugi voziček, ki tehta 3 kg? Koeficient trenja je za oba vozička enak 0,04.

II. razred

1. Koliko dela opravi 1 kg zraka (20°C , 1 kp/cm^2), če se reverzibilno adiabatno toliko raztegne, da se ohladi na -30°C ? Specifična toplota pri stalnem tlaku je 1010 J/kg.st.

2. Dve enaki lahki vzmeti obesimo vštric, spodaj pa obe skupaj obremenimo z utežjo in to zanihamo gor in dol. Nato pa obe vzmeti sestavimo zaporedno, na prosti konec obesimo isto utež ter jo spet zanihamo gor in dol. Kolikšno bo razmerje obeh nihajnih časov?

3. Dva zvočnika sta 1 m narazen. Eden oddaja ton s frekvenco 500 s^{-1} , drugi pa 505 s^{-1} . V zelo veliki razdalji r od sredine med zvočnikoma stojita dva poslušalca, eden na simetrali, drugi pa 20° vstran. Koliko kasneje kot prvi sliši utripe drugi poslušalec?

4. Na gladino 4 m globoke vode ($n = 4/3$) pada vzporeden curek enobarvne svetlobe z vpadnim kotom 53° . Gostota svetlobnega toka je 1 W/m^2 . 4 % toka se odbije, tok, ki prodre v vodo, pa oslabi na meter poti za 10 %. Kolika je gostota toka ob dnu?

III. razred

1. Galvanski element, ki ima gonilno napetost 1,5 V in upor 2 ohma, je priključen na 10 cm dolgo in 0,15 mm debelo žico iz snovi s specifičnim uporom $1\text{ ohm.mm}^2/\text{m}$. Napetost na 3 cm dolgem odseku te žice pomerimo z voltmetrom, ki ima upor 10 ohmov. Kolikšno napetost kaže voltmeter?

2. V homogenem magnetnem polju z gostoto $0,5\text{ Vs/m}^2$ se s frekvenco 20 s^{-1} vrti krožen kovinski okvir z radijem 5 cm in uporom 1 ohm. Vrtilna os — eden izmed premerov okvira — je pravokotna na smer magnetnega polja. Kolikšna je efektivna vrednost inducirane napetosti? S kolikšnim povprečnim navorom je treba vrteti okvir?

3. V vakuumu imamo ploščat kondenzator s 5 cm razmaknjenima elektrodama, med katerima je napetost 100 V. Curek elektronov, ki ga spustimo med elektrodi, ima v razdalji 3 cm od negativne plošče hitrost $6 \cdot 10^6\text{ m/s}$ in oklepa z negativno ploščo kot 30° . Nariši, kako se curek ukrivi! Do katere razdalje se curek približa negativni plošči?

4. S kolikšno najmanjšo napetostjo med elektrodama v elektrolizni celici moremo elektrolizirati vodo? Pri sežigu tolikšne množine vodika, da dobimo 1 kg vode, ki jo vtekočinimo in ohladimo na sobno temperaturo, se sprosti toplota 16 MJ.

Nagrajeni: prva nagrada Andrej Detela, drugošolec z II. gimnazije v Ljubljani; druge nagrade Janez Sketelj, četrtošolec z gimnazije Ljubljana-Vič, Drago Coklin iz 2b razreda Tehniške šole za elektrotehniško stroko v Ljubljani in Drago Seliškar, drugošolec z gimnazije v Kranju; tretje nagrade Martin Detela, četrtošolec z II. gimnazije v Ljubljani, Stane Lenarčič, četrtošolec

s I. gimnazije v Ljubljani, Tomaž Šolmajer, tretješolec z gimnazije v Novem mestu, France Bajt, tretješolec z gimnazije v Novi Gorici, Vladimir Batagelj, tretješolec z gimnazije v Kopru, Tone Jeretina, drugošolec s I. gimnazije v Ljubljani in Dragica Jelenc, drugošolka z gimnazije v Škofji Loki.

Izmed nalog, ki so jih dobili tekmovalci, sta bili po dve taki, da sta bliže šolski praksi, po dve pa z nekaj večjo zahtevnostjo, tako da so imeli tekmovalci priložnost pokazati tako svojo fizikalno izobrazbo kot svojo domiselnost.

Spektrum elaboratov je širok: manj dobrih, precej srednjih, a dosti tudi skoraj popolnoma praznih. Morda ne bi bilo napačno, če bi tudi pri nas uvedli tekmovanja po šolah, kot imajo to po drugih republikah. Najbolje kvalificirani s teh tekmovanj naj bi imeli pravico do udeležbe na republiškem tekmovanju. Verjetno bi tako dobili za republiško tekmovanje več tekmovalcev in najbrž tudi boljše. Pa tudi aktiviranje šol bi bilo verjetno močnejše.

Tekmovanje je poleg zgoraj omenjenih ustanov in organizacij v veliki meri podprl republiški sekretariat za prosveto in kulturo. Za nagrajence je priredil sprejem, ki so se ga udeležili nekateri prizadevni profesorji nagrajencev in nekateri organizatorji.

Komisija za tekmovanje je odločila, da imata po dva najboljša iz vsake skupine pravico do udeležbe na zveznem tekmovanju iz fizike v Beogradu.

Kot zaključek celotne usmerjevalne akcije je bil 12. maja še razgovor o študiju fizike in matematike, na katerega so bili povabljeni vsi srednješolci, ki že sedaj mislijo na študij fizike ali matematike. Člani matematično fizikalnega oddelka dr. ing. Janez Strnad, dr. Ivan Kuščer, dr. Ivan Vidav in dr. Anton Moljk so navzočih 35 srednješolcev informirali o tem, kaj naj bi prinesel novinec s srednje šole in kako naj si prizadeva, da bo to dosegel in obenem tudi spoznal, ali je za ta študij ali ne, dalje kako poteka študij fizike in matematike, in končno, kakšne možnosti in dolžnosti ima matematik ali fizik po formalno dovršenem študiju. Osnovni ton med razgovorom je bil: študij je zahteven, kdor se ga loti, mora imeti nekaj talenta in dovolj delavnosti in vztrajnosti, stvarno zaključen pa ni študij nikdar, če naj matematik ali fizik ostane kolikor toliko sodoben.

F. Ahlin

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

Kakor lani, je bilo tudi letos po končanih republiških tekmovanjih 22. V. v Beogradu zvezno tekmovanje mladih fizikov.

Za tekmovanje so bile predvidene tri tekmovahne skupine z naslednjo snovjo:

1. skupina: mehanika, toplota,
2. skupina: elektrika, magnetizem,
3. skupina: optika, atomika.

Taka razdelitev snovi je po mnenju komisije še najbolj ustrezala programom srednjih šol v vseh delih države. Iz tekmovanja bi na ta način izpadli dijaki

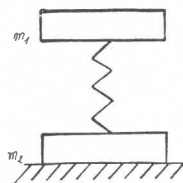
1. razreda gimnazije na srbohrvatskem območju in v Makedoniji in dijaki 2. razreda gimnazije v Sloveniji, vendar so se smeli udeležiti tekmovanja tudi ti dijaki. Program tekmovanja je bil še najmanj ugoden za slovenske tekmovalce, zlasti, ker je bilo časa za priprave zelo malo.

Po ključu, ki je bil sprejet pred tekmovanjem, je odpadlo na Slovenijo 6 tekmovalcev. Republiška komisija je sklenila poslati na tekmovanje naslednje dijake: Graga Cokana, Andreja in Martina Detela, Janeza Sketlja, Draga Seliškarja in Tomaža Šolmajerja. Tekmovalcem je bilo prepuščeno, da se po lastni presoji tekmovanja udeležijo ali ne in si sami izberejo tekmovalno skupino. Od predlaganih tekmovalcev se le Sketelj ni udeležil tekmovanja. A. Detela, D. Seliškar in T. Šolmajer so tekmovali v 1. skupini, D. Coklin in M. Detela pa v 2. skupini.

Naloge: 1. tekmovalna skupina

1. Iz vlaka, ki se giblje premo enakomerno s hitrostjo 2 km/h vržemo pravokotno na smer gibanja vlaka v vodoravni smeri kamen z začetno hitrostjo 1 m/s . Na katerem mestu in s kolikšno hitrostjo pade kamen na tla, če ga vržemo iz višine 3 m ?

2. Ploščici z masama m_1 in m_2 sta povezani s prožno vzmetjo kot je prikazano na sliki 1. S kolikšno silo je treba zgornjo ploščico potisniti navzdol, da se bo spodnja ploščica pri raztegnitvi vzmeti odlepila od tal?



Slika 1

3. Krogla plava na meji med oljem z gostoto $0,9 \text{ g/cm}^3$ in živim srebrom z gostoto $13,6 \text{ g/cm}^3$ tako, da je polovica kroglice v olju, polovica pa v živem srebru. Kolikšna je gostota kroglice?

4. Toplotno izolirano posodo, v kateri je v začetku voda pri 0°C v ravnovesju s svojo paro, izčrpavamo tako, da sproti odstranjujemo novo nastalo paro. Kolikšen del vode izpari, preden preostala voda zmrzne? Izparilna toplota vode pri 0°C je 607 kcal/kg , talilna toplota ledu pa je 83 kcal/kg .

2. tekmovalna skupina

1. Po tenkem obroču z radijem r je enakomerno porazdeljen naboj $+q$. V veliki razdalji od obroča je na osi obroča kroglica z maso m in nabojem $-q$. S kolikšno hitrostjo prileti kroglica skozi središče obroča, če se potem, ko jo spustimo, prosto giblje?

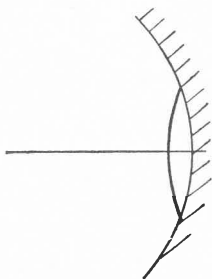
2. V veliki razdalji se nahajata dve izolirani kovinski krogli: prva z radijem 10 cm ima napetost $7,2 \text{ kV}$, druga z radijem 2 cm pa napetost 9 kV proti zelo oddaljenim stenam. Krogli zvežemo s tanko kovinsko žico. Kolikšna je končna napetost? Kolikšno naboj se pretoči z ene kroglice na drugo in v kateri smeri? Kolikšno je opravljeno delo? Medsebojne kapacitete krogel in kapacitete žice ne upoštevaj!

3. Pri napetosti 220 V med sponkama kuhalnika je moč kuhalnika 300 W. Ko priključimo kuhalnik na omrežje z gonilno napetostjo 220 V, dela kuhalnik z močjo 250 W. Kolikšna je moč, če priključimo na omrežje paralelno dva taka kuhalnika?

4. Kratko sklenjena tuljavica z zanemarljivim uporom, induktivnostjo L in polmerom r se nahaja v dolgi tuljavi z osjo vzporedno osi dolge tuljave. Z električnim tokom vzpostavimo znotraj dolge tuljave magnetno polje z gostoto B . Kolikšen tok se pri nastajanju polja inducira v mali tuljavi?

3. tekmovalna skupina

1. Tanka konveksna leča in konkavno zrcalo sta staknjena skupaj kot kaže slika 2. Sistem daje za nek predmet, ki se nahaja na optični osi, dve realni sliki v razdaljah 50 cm in 10 cm od zrcala. Kolikšna je gorišča razdalja leče?



Slika 2

2. Pravokotno na optično mrežico pada natrijeva svetloba z valovno dolžino $0,589 \mu$. Pod kotom $10^\circ 11'$ proti pravokotnici na mrežico dobimo uklonski maksimum 3. reda. Kolikšna je konstanta mrežice? Katerega reda je največji uklonski maksimum, ki ga lahko dobimo s to mrežico?

3. Kolikšen je radij osnovnega tira elektrona v atomu vodika? (Izpelji po Bohrovem modelu atoma!) Kolikšna je frekvenca kroženja elektrona?

4. Mase devterona, protona in nevtrona so po vrsti: 2,01355, 1,00728 in $1,00867 a.m.e.$ Kolikšna sme največ biti valovna dolžina svetlobe, če naj še povzroči razpad devterona?

Skupaj se je tekmovanja udeležilo 38 tekmovalcev, od tega največ v prvi skupini. Tekmovalci v prvi in tretji skupini so uspešno reševali zadane naloge (več kot 50 % rešenih nalog), v drugi skupini pa je bil rezultat slabši, deloma najbrž tudi na račun nekoliko nenavadnih nalog.

Od slovenskih tekmovalcev je D. Seliškar v svoji skupini dosegel 2. mesto in dobil 2. nagrado, A. Detela in T. Šolmajer pa sta bila pohvaljena.

Ob tekmovanju je komisija izdelala predlog pravilnika za nadaljnja tekmovanja mladih fizikov in zlasti razpravljala o tem, kako čimbolj vskladiti program tekmovanja z različnimi programi pouka fizike v srednjih šolah. Predlog pravilnika in programa bodo dobile republiške komisije v razpravljanje, dokončno pa naj bi bila sprejeta na naslednji seji zvezne komisije. Sklenjeno je bilo tudi, da bo tekmovanje prihodnje leto v Zagrebu.

M. Hribar

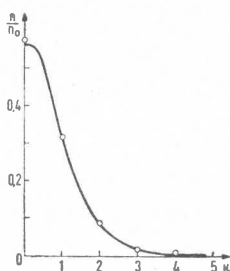
UTRINEK

STATISTIKA IN VOJSKOVANJE

Vrsta sestavkov s podobnimi naslovi se je začela sorazmerno resno med novicami,* nato pa je zašla na spolzka tla ugibanj in med utrinke.** Zares je količine, ki nastopajo v zadnjih dveh sestavkih, nemogoče enolično definirati in objektivno meriti. Zaradi tega so zaključki dostikrat odvisni od izhodišč avtorjev ali celo od želje, da bi dokazali ali ovrgli kako »teorijo«. Navzlic tem resnim pomislekom pa so nekatera »dejstva« zanimiva. Če ostanemo, kolikor je možno, pri pravih dejstvih, tudi očitek neobjektivnosti zgubi ostrino. Seveda ne smemo posploševati.

S statistiko vojn se je dosti ukvarjal L. F. Richardson. Obdelal je vojne z več kot 7000 žrtvami v letih od 1820 do 1929. Najprej pogledjmo časovno porazdelitev!¹ Preštejmo leta (v $n_0 = 110$ letih od 1820 do 1929), v katerih ni izbruhnila nobena vojna, leta, v katerih je izbruhnila 1 vojna, 2 vojni itd.! Pridemo do take razporeditve

število vojn na leto r	0	1	2	3	4	več kot 4
število let n	63	35	9	2	1	0



Slika 1

Na sl. 1 je narisana porazdelitev relativnega števila let (n/n_0) po številu vojn, ki so izbruhnile na leto (r). Poleg navedenih vrednosti je vrisana še ustrezna Poissonova porazdelitev $\exp(-\bar{r}) \bar{r}^r/r!$, kjer je $\bar{r} = 0,57$ povprečno število vojn, ki so izbruhnile na leto. (Poissonova porazdelitev je zaradi risarskih razlogov narisana kot gladka krivulja, čeprav je v resnici porazdelitev diskretna. Ujemanje je presenetljivo. Na Poissonovo porazdelitev naletimo tudi pri porazdelitvi sunkov časovnih razmikov po številu v števcu, ki zaznava npr. žarke β iz kake radioaktivne snovi.

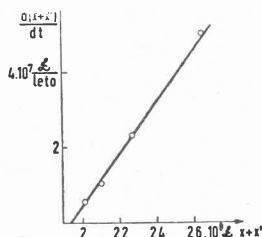
Kako je s številom držav, ki so bile zapletene v kako vojno? Izmed 71 vojn iz nekoliko razširjene prejšnje skupine sta bili v 42 primerih zapleteni dve državi (ali dve skupini v državljanski vojni), v 24 primerih tri (ena proti dvema) in samo v petih primerih več držav.² Richardson je primerjal to z istočasnimi trki dveh, treh in več molekul v plinu in je od tod dobil celo

* Statistika in jezikoslovje. Obz. mat. fiz. 8, 175 (1961).

** Statistika in znanost. Obz. mat. fiz. 11, 92 (1964).

pobudo za svoje delo o verjetnosti trkov med večjim številom molekul. Med molekulami in državami pa so vendarle razlike, saj je pri slednjih treba upoštevati zemljepis. Pokazalo se je, da je zveza (»približna sorazmernost«) med številom vojn, v katere se zaplete kaka država v določenem času, in številom sosedov. Morje se upošteva kot meja z manjšo utežjo.

Richardson je ugibal o vojnah tudi z enačbami.³ Postavil je diferencialni enačbi $dx/dt = kx' - ax + b$ in $dx'/dt = kx - ax' + b$. Tu je x »napadalnost«, približna mera zanjo je kar višina letnega vojaškega proračuna, k koeficient »obrambe«, a koeficient »nasprotovanja vojaškim izdatkom« in b koeficient »neizpolnjenih ozemeljskih zahtev«. Simboli brez črtice se nanašajo na izbrano državo, simboli s črtico pa na sovražno državo ali na vso okolico, k , a , b so mišljeni pozitivno, lahko se od države do države in s časom spreminjajo, približno pa jih moremo vzeti za konstantne. Enačbam bi človek morda še nasedel kot linearnemu približku, tudi splošni diskusiji rešitev. Zelo dvomljiva pa je njihova veljavnost v posameznem primeru, saj navedene količine niti niso zanesljivo definirane. Med »dokazi« o veljavnosti navaja Richardson tole: če enačbi seštejemo, se pokaže, da mora biti odvod $d(x + x')/dt$ linearna funkcija



Slika 2

$x + x'$. Kot kaže sl. 2, je to za višino vojaških proračunov Francije in Rusije skupaj (x) in Nemčije in Avstroogrske skupaj (x') v letih pred prvo svetovno vojno lepo izpolnjeno. Vendar bi se dalo videti v tem samo še en zgled za »eksponentni zakon«.^{**} Morda imajo te enačbe kakega pristaša — zelo verjetno pa se prav nihče ne ravna po njih.

Literatura

- ¹ L. F. Richardson: Distribution of Wars in Time. *Nature* 155, 610 (1945).
- ² L. F. Richardson: Chaos, International and Intermolecular. *Nature* 158, 135 (1964).
- ³ L. F. Richardson: Arms and Insecurity. London (Stevens), 1960, s. 32.

J. Strnad

NOVE KNJIGE

MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGREBIENSIS so se obogatila z novim zajetnim delom. To je dolgo pričakovana *Viša algebra*, ki jo je napisal profesor zagrebskega vseučilišča dr. Đuro Kurepa, izdala pa »Školska knjiga« v Zagrebu.

Algebra je eno od temeljnih poglavij, ki jih mora obvladati med šolanjem bodoči matematik pa tudi v matematični izobrazbi drugih strokovnjakov postaja algebra vse pomembnejša. Avtor obravnavanega dela se prav dobro zaveda širokega pojmovnega in praktičnega pomena algebre, saj pravi že v uvodu:

Cilj je djela da se studentu i drugim korisnicima pruži osnovni algebarski materijal kako bi se s njim mogao služiti u raznim drugim oblastima unutar matematike i van matematike.

Naime, razvitak nauke i tehnike u vezi je sa sve većom potrebom matematičkog aparata uopće, a algebarskog napose pa su spregovi između nauke i tehnike s jedne strane i matematike s druge strane u međusobnom vrlo plodotvornom korisnom djelovanju. Pri tom, algebra i algebarske metode imaju venredno važnu ulogu pa smo svjedoci na kako se sve novim oblastima ljudske djelatnosti očitava povezanost s matematičkim rasuđivanjima i metodama. Od prirodnih, ekonomskih, socijalnih i humanih nauka pa do teorije igara, strategije, strojeva, teorije jezika, informacije, nastave i kibernetike, svuda su nikle ili su u začetku matematičke metode uopće i algebarske strukture posebno.

Posebno, svako odvijanje u prirodi i u mislima nosi pojedine matematičke i algebarske pravilnosti; odatle i potreba da se razrade pojedine matematičke, odnosno algebarske strukture. Broj tih struktura naravno neprestano raste, no u tom nastajanju neke su tekovine (npr. broj, vektor, tenzor, grupoid, grupa, prsten, vektorski prostor, tijelo, linearni operator, uređenost, relacije) dobro zacrtane.

Nastojao sam da ti pojmovi budu jasno obrađeni. Grupama i matricama posvećena je osobita pažnja. Također sam nastojao da numeričkim izračunavanjima i konkretnim situacijama bude dana odgovarajuća važnost.

Široko zasnovano delo obsega v dveh knjigah 1380 + 30 strani. Razdeljeno je v tri dele. Prva dva dela predstavljata osnovno besedilo knjige in imata skupaj 35 poglavij:

1. Algebra logike — 2. Algebra skupova — 3. Algebra funkcija — 4. Vrste brojeva — 5. Algebarske jednadžbe stupnja 1, 2, 3, 4 s jednom nepoznanicom — 6. Kolo ili prsten cijelih racionalnih brojeva — 7. Kolo ili prsten algebarskih polinoma — 8. Uvod u sisteme linearnih jednadžbi. Pojam rješenja — 9. Sistemi linearnih jednadžbi s općim koeficientima — 10. Prvi uvod u račun matrica — 11. Determinanta zadane matrice. Glavna svojstva determinanata — 12. Kramerov teorem. Inverzija matrica — 13. Sistem homogenih linearnih jednadžbi. Linearna matrična jednadžba s jednom nepoznanicom matricom — 15. Rang matrice — 16. Kvadratne forme. Hermitske forme. Bilinearne forme — 17. Teorija grupa — 18. Korijeni jedinice. Dijeljenje kruga. Pravilni n -vrhovi — 19. Simetrične funkcije — 20. O eliminaciji. Rezultanta. Diskriminanta — 21. Transformacije jednadžbi — 22. Kongruencije višeg stupnja — 23. Nekoliko karakterističnih slučajeva u kojima se pojavljuju matrice — 24. Matrične funkcije. Minimalni matrični polinomi — 25. Metrika u linearnim prostorima

— 26. Linearni operatori — 27. Karakteristični polinom. Svojstvene vrednosti — 28. Ortonormirane matrice — 29. Rješenja zadane enadžbe prema zadanoj oblasti brojeva — 30. Linearno programiranje — 31. Numeričko ili približno rešavanje enadžbi i nejednadžbi — 32. Neke algebarske strukture — 33. Predstavljanje (reprezentacija) algebarskih struktura — 34. Algebra tenzora — 35. Historijat algebre.

V tretjem delu pa so:

1. Rješenja nekih zadataka — 2. Literatura — 3. Abecedni popis imena — 4. Pregled oznaka — 5. Abecedni sadržaj — 6. Neriješeni problemi.

Prva štiri poglavja vsebujejo nekaj splošnih pojmov in nekaj elementarnih dejstev iz matematične logike, teorije množic, algebre funkcij in iz aritmetike kompleksnih števil.

Peto poglavje obravnava na elementaren način enačbe prve, druge, tretje in četrte stopnje, šesto poglavje (ki posega v teorijo števil) govori o kolobarju celih števil, sedmo pa o kolobarju polinomov.

Naslednjih deset poglavij gradi osnovne pojme linearne algebre. Izhaja iz preprostih primerov reševanja sistemov linearnih enačb in se po računanju z maticami, determinantami in vektorji povzpne k splošni teoriji lineranih struktur. Šestnajsto poglavje, zadnje v tej skupini, obravnava kvadratne in polilinearne forme.

Obsežno sedemnajsto poglavje zajema vse, kar sodi v temelje teorije grup.

Štiri nadaljnja poglavja se ukvarjajo z algebrskimi enačbami višjih stopenj, dvaindvajseto pa s kongruencami višjih stopenj.

Tu je konec prvega dela.

Drugi del se najprej vrne k linearni algebri (poglavja 23.—28.). Tu obravnava zvezo med matrikami in linearnimi transformacijami, podobne matrike, problem lastnih vrednosti, karakteristični polinom, normalne oblike matrik, funkcije matrik in nekatere posebne matrike.

Druga skupina poglavij (29.—31.) je posvečena numeričnim in grafičnim metodam, linearnemu programiranju in nomografiji.

Dvaintrideseto poglavje obravnava nekatere algebarske strukture. Največ govori o kolobarjih in obsegih. Ob rajširjanju obsegov poseže v osnove Galoisove teorije enačb. V kratkem zapisu se dotakne linearnih prostorov in algeber, obsežneje se ustavi ob Boolovi algebri, bežneje pa ob univerzalnih algebrah in urejenih strukturah. Nazadnje omeni še normirane strukture s primeri iz teorije števil (p -adska števila) in iz funkcionalne analize (Banachov prostor, Banachova algebra).

Trintrideseto poglavje obravnava v bistvu le upodabljanje (ponazoritev, reprezentanco) končnih grup, to je tisti del teorije, ki je izvedljiv s samimi algebrajskimi pripomočki.

Predzadnje poglavje govori o tenzorski algebri, zadnje pa podaja kratek zgodovinski prerez algebre.

Pred bralcem *Tiše algebre* se tako odpira široka, epsko zasnovana panorama algebre, izdelana v skrbni mozaični tehniki. Avtor je vsak drobec svojega mozaika tako izbrusil, da je branje vseskozi lahko in zanimivo. Izbor snovi je tako širok, da bo lahko zadovoljil študenta in profesorja pa tudi tehnika in ekonoma, ki rabita algebrajski aparat pri svojem delu. Posebna odlika knjige je tudi obilica posrečeno izbranih nalog.

Enciklopedijska širina vzbuja vselej določene pomisleke, za katere pa velja omejitev »de gustibus«. Gre za dve vprašanji: ali je snovi preveč ali je premalo. Na primer: poglavje o končno dimenzionalnih algebrah bi bilo lahko obsežnejše, vsaj omenjene bi bile lahko Liejeve algebre. Če pa sodijo ta poglavja drugam, ne v višjo algebro, bi z njimi vred lahko izostala tudi upodobitev končnih grup pa še ta ali ona malenkost iz funkcionalne analize. Homološka algebra bi lahko tu in tam vplivala na matematični jezik dela, če že ne sodi v vsebino.

Prepričani smo lahko, da bo novo delo profesorja Đ. Kurepe učbenik, priročnik in enciklopedija *Viša algebra*, našlo zadovoljne bralce tudi v slovenskem prostoru.

F. Križanič

J. Graselli: Osnove teorije števil. Mladinska knjiga. Zbirka Sigma. Ljubljana, 1966. Strani 152.

Knjiga je razdeljena na šest poglavij. V prvem obravnava avtor deljivost in faktorizacijo celih števil, nekatere številskoteoretične funkcije in reševanje linearnih enačb s celimi števili. Drugo in tretje poglavje govorita o kongruenci števil, o linearnih in višjih kongruencah, o Fermatovem, Eulerjevem in Wilsonovem izreku. Četrto poglavje je posvečeno kvadratičnim kongruencam, lastnostim kvadratov in nekvadratov ter reciprocitnemu zakonu. Peto poglavje govori o primitivnih korenih in indeksih. Zadnje poglavje pa obravnava izražanje naravnih števil z vsoto dveh in štirih kvadratov, razdruževanje naravnih števil in dokaz van der Waerdenove trditve.

Teorija števil je znanost, ki raziskuje lastnosti naravnih oziroma celih števil. Njeni izsledki se dajo pogosto izraziti z razmeroma preprostimi pojmi, tako da so razumljivi tudi bralcu brez posebne matematične izobrazbe, dokazi, ki so sicer kristalno čisti, pa po navadi niso preprosti. Prav zaradi tega je bila teorija števil od nekdaj zelo mikavna. Veliko je v njej takih problemov, ki so tudi laiku razumljivi, ki pa jih kljub naporom največjih matematikov doslej niso še rešili. Pri reševanju težjih problemov sega teorija števil pogosto po pripomočkih iz matematične analize, predvsem iz funkcijske teorije.

V slovenskem jeziku obravnava teorijo števil knjiga prof. J. Plemlja: *Algebra in teorija števil*, ki je pred leti izšla pri SAZU. Vendar ta knjiga ni elementarna in za srednješolce težje dostopna. Delo J. Grassellija pa je elementaren uvod v teorijo števil, ki je brez posebnega truda dostopen tudi začetnikom. Avtor se je omejil na tista področja, ki jih je moč obravnavati z elementarnimi metodami in kjer so tudi dokazi še razmeroma preprosti. Izjema je dokaz van der Waerdenove trditve, ki je na koncu knjige. Na tem primeru se lahko bralec prepriča, kako so nekateri dokazi v teoriji števil izredno zapleteni, čeprav so elementarni.

Knjiga je pisana preprosto, jasno in lahko razumljivo. Z veseljem jo bo vzel v roke vsak, ki ga količkaj zanima to prelepo področje matematike.

I. Vidav

SEZNAM REVIJ, ZA KATERE POŠILJAMO »OBZORNIK« V ZAMENO

1. UKRAINSKIJ matematičeskij žurnal. Izd-vo Uk. SSR, Kiev.
2. UČENYE zapiski Tartarskogo gosudarstvenogo universiteta. Trudy po matematike i mehanike. Tartu, ul. Julikooli 18.
3. UČENYE zapiski Kazahskogo universiteta. Kazan'.
4. Studii si Cercetarii Matematice. Academie republicii populare Romino. Bucuresti
5. Rozprawy matematyczne. Polska Academia nauk. Warszawa.
6. Rozhledy matematicko-fyzikalni. 2-Nove mesto, Praha, Trojanova 13.
7. REVUE Roumaine de Mathematiques pures et appliques. Academie de la republique populare Roumaine. Bucarest.
8. Revista Matematica Hispano Americana. Instituto Jorge Juan de matematicue. Madrid. Serrano 123.
9. Rivista di Matematica della Universita di Parma. ser. 2. Parma.
10. Revista de la Union matematica Argentina y de la Asociacion fisica Argentina. Buenos Aires. Casila de Correo 3588.
11. Publications de l'institut mathematique. Belgrade.
12. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. Praga.
13. Osaka journal of mathematics. Osaka university. Department of mathematics. Osaka.
14. NAUČNI trudove. Izd-vo »Hristo G. Danov« Plovdiv.
15. Memorias de la Facultad de Ciencias. ser. matematica. Universidad de la Habana. Habana. Cuba.
16. Mathematical journal of Okayama university. Okayama, Japan.
17. Mathematicae Notae. Instituto de mathematica. Rosario, Argentina.
18. Matematyka. Zeszyty naukowe politechniki Gdanskij. Gdansk. Pol.
19. Matematički vestnik. Beograd.
20. Matematicko-fyzikalny časopis. Slovenskej akademie vied. Bratislava.
21. Lucrarile stiintifice ale Institutului pedagogic Timisoara. Matematica-fizica. Timisoara. Romunija.
22. The Journal of the Indian mathematical Society. Romanujan Institute of Mathematics. Madras, Indija.
23. Journal of Franklin Institute. Phyladelphia.
24. Journal of science of the Hiroshima University. ser. A. — I. Hiroshima, Japan.
25. Journal of mathematics. Osaka City University. Osaka Japan.
26. Izvestija na matematičeskaja institut. Bolgarskaja akademija na naukate. Sofija.
27. Internationale mathematische nachrichten. Österreichische mathematische Gesellschaft. Wien.
28. Godišnjak filozofskog fakulteta u Novom Sadu. Novi Sad.
29. Godišen zbornik. Sek. A. Mat. Fiz. Him. Prirodno matematički fak. Skopje.
30. Glasnik matematičko fizički i astronomski. Zagreb.
31. Diskretnyj analiz. Institut matematiki. Novosibirsk.
32. Czechoslovak mathematical Journal. Praga.
33. Commentationes mathematicae Universitatis Caroline. Matematick ustav university Karlovy. Praga, Sokolovska 83.
34. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 92. Acharya Praffulla Chandre Road, Calcuta 9, Indija.
35. Bulletin scientifique. Conseil Akademies. Zagreb.
36. Bulletin de la societe mathematique de France. Paris.
37. Bulletin de l'academie Polonaise des Sciences. Varsovie. Poljska.
38. Bonner mathematischen schriften. Mathematische institut der Universitat. Bonn 53, Wegekerstrasse 10.
39. Boletin de la Sociedad Matematica mexicana. ser. 2. Tacuba 5. Mexico.
40. Bilten na društvo na matematičarite i fizičarite od narodna republika Makedonija. Skopje.
41. Arkiv for matematik. Almqvist & Wiksell. Stockholm. Švedska. The Library of The Swedish academy.
42. Annales Academiae scientiarum Fennicae. se. A. Suomalainen Tiedeakatemia. Helsinki. Suellmanik 9—11.
43. Analele universitatii din Timisoara. se. am fi. Universitatea Timisoara, Romunija.
44. Analele universitatii Bucuresti. ser. ma-meh. Unversiita, Bucuresta.

OBVESTILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS ima v zalogi večje število kompletnih letnikov oz. posameznih številk revije »Obzornik za matematiko in fiziko«. Le-te lahko dobite do vključno osmega letnika po znižani ceni v Matematični knjižnici v Ljubljani, Trg revolucije 11. V zalogi imamo še naslednje letnike in številke:

I	1951,	2, 3, 4,	
II	1952,	2,	
III	1953-54,	1, 2-3, 4, 5-6, C (celoten)	
IV	1955-56,	1, 2, 3, 4,	C
V	1956-57,	4,	
VI	1957-58,	2, 3, 4,	
VII	1960,	1, 2, 3, 4,	C
VIII	1961,	1, 2, 3, 4,	C
IX	1962,	2, 3, 4,	
X	1963,	1, 2, 3, 4,	C
XI	1964,	1, 2, 3, 4,	C
XII	1965,	1, 2, 3, 4,	C

Do vključno 8. letnika stane letnik 1,20 N. din, posamezna številka 0,30 N. din; 9. in 10. letnik stane 4 N. din, številka 1,20 N. din; 11. in 12. letnik pa stane 5 N. din, posamezna številka 1,50 N. din.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejajo ga: R. Blinc, Z. Bohte, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, J. Strnad, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 4 N-din, za zasebnike 5 N-din, za šole 10 N-din, za ustanove in podjetja 20 N-din. Čekovni račun Obzornika je 503-608-314.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.