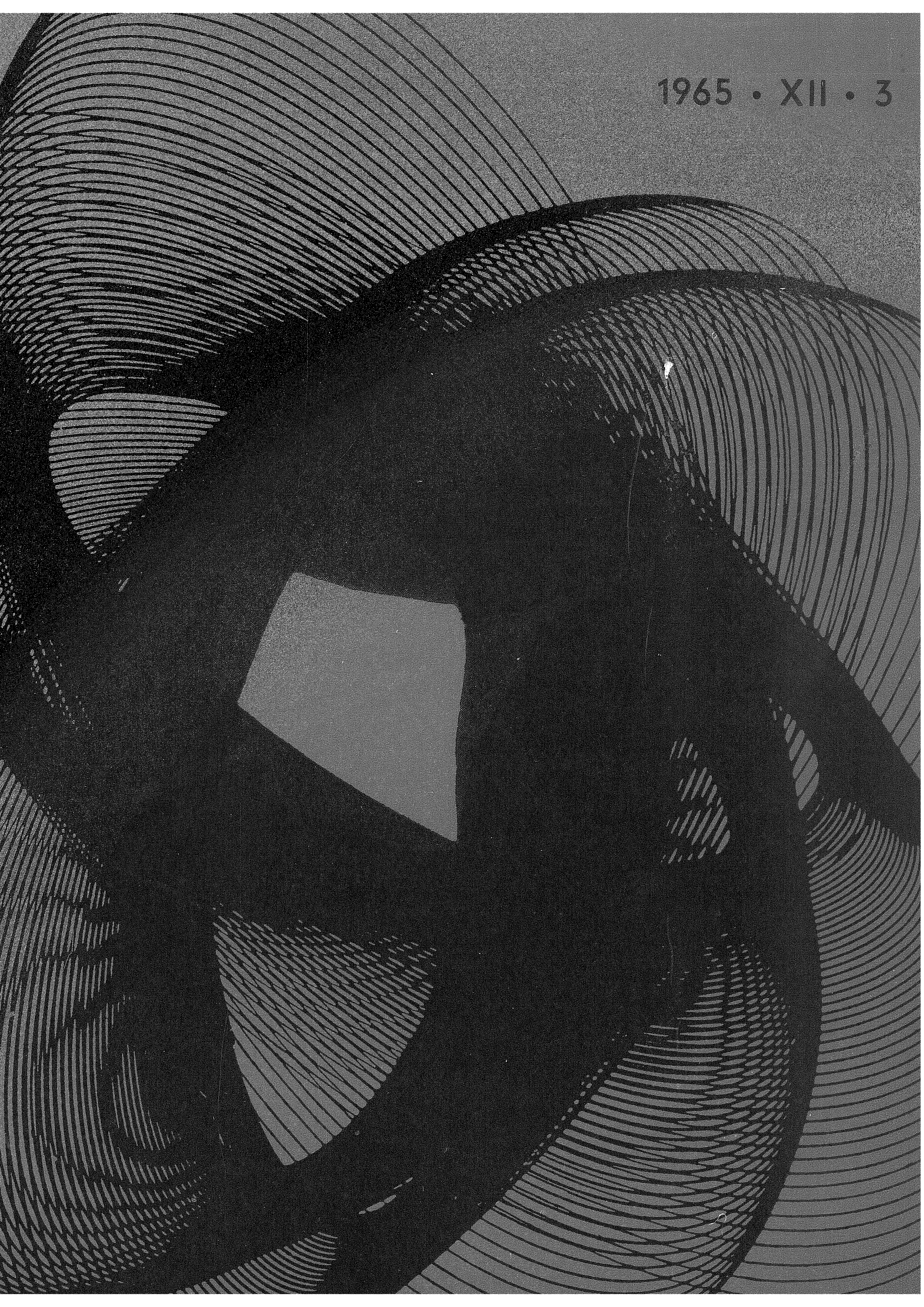


1965 • XII • 3



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XII. LETNIK — 3. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, OKTOBER 1965

VSEBINA

Članki	Stran
Nekaj stavkov iz teorije najboljših aproksimacij (J. Garbajs)	97
Lok kot topološki prostor (M. Vencelj)	103
Intermetalni polprevodniki (G. Lahajnar)	111
Spremembe specifične upornosti kovin in polprevodnikov v magnetnem polju (M. Mali)	117
Novice	
Dva nova načina za merjenje težnega pospeška (J. Strnad)	122
Antidevteroni (J. Strnad)	123
Šola	
Uvajanje novincev v matematiko na ekonomski fakulteti v Ljubljani (A. Vadnal)	126
Koliko fizike znajo študenti v prvem letniku matematično-fizikalnega oddelka? (M. Gros, M. Hribar, J. Strnad)	130
Domače vesti	
Društvo matematikov, fizikov in astronomov na občnem zboru in po njem (C. Velkovrh)	132
IV. kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije v Sarajevu od 4. do 9. oktobra 1965 (F. Dominko)	134
Za mlade matematike in fizike	
Odgovor na vprašanje v Obz. mat. fiz. 12, 144, 1965	138
Odgovor na vprašanje v Obz. mat. fiz. 12, 144, 1965	138
Nove knjige	142

CONTENTS

Articles	Page
Some Theorems from Theory of the best Approximations (J. Garbajs)	97
The arc as a Topological Space (M. Vencelj)	103
Intermetallic Semiconductors (G. Lahajnar)	111
Variations in Specific Resistivity of Metals and Semiconductors in the Magnetic Fields (M. Mali)	117
News	
Two new Methods from the Measurement of the Acceleration due to Gravity (J. Strnad)	122
Antideuterons (J. Strnad)	123
School	126
Home News	132
For Young Mathematicians and Physicists	138

NEKAJ STAVKOV IZ TEORIJE NAJBOLJŠIH APROKSIMACIJ

JANEZ GARBAJS

Na končnem intervalu $[a, b]$ sta dani dve zvezni funkciji $f(x)$ in $s(x)$. Funkcija $s(x)$ na intervalu $[a, b]$ nima ničle. Vzemimo množico funkcij oblike

$$Q(x) = s(x) \frac{q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n}{p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m} \quad (1)$$

Stopnji polinoma v števcu (n) in imenovalcu (m) sta dani naravni števili, parametri te množice pa so koeficienti obeh polinomov q_i in p_i .

Vprašanje je: ali v množici (1) eksistira kakšen element, ki funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ najboljše aproksimira? Iščemo torej tako funkcijo oblike (1), da bo izraz

$$H_Q = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q(x)| \quad (2)$$

minimalen.

Odgovorili bomo na vprašanje ali tak element eksistira in koliko je takih elementov.

Vzemimo na intervalu $[a, b]$ zvezno funkcijo

$$R(x) = s(x) \frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-\nu} x^{n-\nu}}{a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-\mu} x^{m-\mu}}$$

$0 \leq \nu \leq n$, $0 \leq \mu \leq m$; polinoma v števcu in imenovalcu nimata skupnega faktorja. Definirajmo naravno število N z enačbo $N = m + n - d + 2$, pri čemer je $d = \min(\mu, \nu)$ in si oglejmo stavek, ki nam daje spodnjo oceno izraza (2):

Če izraz $f(x) - R(x)$ v N točkah $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ intervala $[a, b]$ zavzame vrednosti s spreminjajočimi predznaki $\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3, \dots, (-1)^{N-1} \lambda_N$, potem velja $H_Q \geq \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_N|)$.

Vzemimo, da je $H_Q < \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_N|)$ in če pridemo do protislovja, potem zgornji stavek velja. Tvorimo diferenco

$$G(x) = Q(x) - R(x) = [f(x) - R(x)] - [f(x) - Q(x)]$$

Funkcija $G(x)$ ima v točkah $x_1, x_2, \dots, x_N$ isti znak kot $f(x) - R(x)$. To pomeni, da ima $G(x)$ v točkah $x_1, x_2, \dots, x_N$ vrednosti s spreminjajočimi predznaki. $G(x)$ je tudi zvezna na intervalu $[a, b]$, saj sta $R(x)$ in $Q(x)$ zvezni funkciji. Iz tega sledi, da ima $G(x)$ na intervalu (a, b) vsaj $N - 1$ ničel. Po drugi strani je $G(x) = s(x) \cdot h(x)$. Ni težko ugotoviti, da je $h(x)$ racionalna funkcija, ki ima v števcu polinom kvečjemu stopnje $N - 2$. Torej ima $G(x)$ kvečjemu $N - 2$ ničel. Prišli smo do protislovja in je zato zgornji stavek dokazan.

Sedaj pa dokažimo, da v množici (1) eksistira vsaj ena taka funkcija $Q(x)$ ki $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ najboljše aproksimira.

Vsakemu elementu $Q(x)$ množice (1) je prirejen $H_Q \geq 0$. Množica pozitivnih števil H_Q je navzdol omejena, natančno spodnjo mejo označimo z $H \geq 0$. Število H je izolirana robna točka ali stekališče množice H_Q . Če bi bilo število H izolirana robna točka, smo tako funkcijo $Q(x)$ že našli. Vendar pa izolirana robna točka ne more biti, kajti $Q(x)$ se v vsaki točki malo spremeni, če se koeficienti q_i in p_i malo spremenijo.

Iz množice H_Q vzemimo zaporedje $H_{Q1}, H_{Q2}, \dots$ z lastnostjo $\lim_{i \rightarrow \infty} H_{Qi} = H$.

Vsakemu členu H_{Qi} pripada vsaj ena funkcija $Q_i(x)$. Tvorimo zaporedje $Q_1(x), Q_2(x), \dots$. Člene zaporedja normirajmo tako, da velja

$$p_{i0}^2 + p_{i1}^2 + \dots + p_{im}^2 = 1$$

Sedaj pa dokažimo, da so koeficienti polinoma v števcu omejeni. Konvergentno zaporedje H_{Qi} je navzgor omejeno, zato velja

$$H_{Qi} \leq G$$

Za vsak $x \in [a, b]$ velja

$$|f(x) - Q_i(x)| \leq H_{Qi}$$

ali

$$|Q_i(x)| \leq H_{Qi} + |f(x)| \leq G + \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Torej dobimo

$$\left| s(x) \frac{q_{i0} + q_{i1}x + \dots + q_{in}x^n}{p_{i0} + q_{i1}x + \dots + p_{im}x^m} \right| \leq G + \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Ker funkcija $s(x)$ na intervalu $[a, b]$ nima ničle, dobimo

$$|q_{i0} + q_{i1}x + \dots + q_{in}x^n| \leq L$$

Polinom $q_{i0} + q_{i1}x + \dots + q_{in}x^n$ je na intervalu $[a, b]$ omejen. Vzemimo $n+1$ različnih točk intervala $[a, b]$ in v teh točkah predpišemo vrednosti tega polinoma. Z Lagrangeovo interpolacijsko formulo poiščemo koeficiente q_{ij} in ugotovimo, da so omejeni.

Vsako neskončno omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče. Zato lahko izberemo v zaporedju $Q_1(x), Q_2(x), \dots$ tako delno zaporedje, da je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_{ij} = a_j \quad \text{in} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} q_{ij} = b_j$$

in pišimo

$$P(x) = s(x) \frac{b_0 + \dots + b_n x^n}{a_0 + \dots + a_m x^m}$$

Funkcija $P(x)$ na intervalu $[a, b]$ nima nobenega pola. Vzemimo, da bi bil kakšen pol, pa z y označimo vsako točko intervala $[a, b]$, ki ni pol. Potem velja

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(y) = P(y)$$

in

$$\begin{aligned} P(y) &= [Q_i(y) - f(y)] + [P(y) - Q_i(y)] + f(y) \\ |P(y)| &\leq |Q_i(y) - f(y)| + |P(y) - Q_i(y)| + |f(y)| \leq \\ &\leq H_{Qi} + \varepsilon_i + \max_{x \in [a, b]} |f(x)| < M \end{aligned}$$

Zadnjo oceno dobimo od tod, ker je $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$, zaporedje H_{Qi} pa je navzgor omejeno. Torej je funkcija $P(x)$ povsod na intervalu $[a, b]$ omejena. Odtod sledi, da je $P(x)$ element množice (1) in

$$P(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(x)$$

povsod na intervalu $[a, b]$.

Dokazati moramo še zadnjo lastnost funkcije $P(x)$, tj. da funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ najbolj aproksimira. Pišemo

$$f(x) - P(x) = [f(x) - Q_i(x)] + [Q_i(x) - P(x)]$$

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_i(x)| + |Q_i(x) - P(x)|$$

Ker velja

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| = H_P \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |f(x) - Q_i(x)| = H$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |Q_i(x) - P(x)| = 0$$

dobimo $H_P \leq H$. Za vsako funkcijo množice (1), torej tudi za funkcijo $P(x)$ pa velja ocena $H_P \geq H$, torej $H_P = H$.

Stavek je s tem dokazan.

Funkcijo $P(x)$ okrajšamo tako, da sta polinoma v števcu in imenovalcu tuja. Če še upoštevamo, da so lahko nekateri koeficienti a_i in b_i enaki 0, dobi $P(x)$ obliko

$$P(x) = s(x) \frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-\nu} x^{n-\nu}}{a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-\mu} x^{m-\mu}} = s(x) \frac{A(x)}{B(x)} \quad (4)$$

Velja tale stavek:

Potreben in zadosten pogoj zato, da funkcija $P(x)$ funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ najbolj aproksimira, je ta, da zavzame diferenca $f(x) - P(x)$ v najmanj N točkah intervala $[a, b]$ vrednosti H_P s spreminjajočimi predznaki.

Pogoj je zadosten. Imamo funkcijo $P(x)$, ki v najmanj N točkah intervala $[a, b]$ zavzame vrednosti H_P s spreminjajočimi predznaki. Po prvem stavku je

$$H_Q \geq \min(H_P, H_P, \dots, H_P) = H_P$$

torej funkcija $P(x)$ funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ najbolj aproksimira.

Pogoj je potreben. Funkcija $P(x)$ naj funkcijo $f(x)$ najbolj aproksimira. Dokazati moramo, da zavzame diferenca $f(x) - P(x)$ v najmanj N točkah intervala $[a, b]$ vrednost H_P s spreminjajočimi predznaki. Vzemimo, da je to doseženo v $N' \leq N - 1$ točkah in če bomo prišli do protislovja, je potreben pogoj zgornjega stavka dokazan.

Interval $[a, b]$ razdelimo na N' podintervalov

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{N'-1}, b] \quad (5)$$

Razdelitvene točke $x_1, x_2, \dots, x_{N'-1}$ izberemo tako, da zavzame diferenca $f(x) - P(x)$ v notranjosti vsakega od gornjih podintervalov enkrat vrednost $+H_P$ ali $-H_P$. Izjemo tvorita morda točki a in b , v katerih lahko zavzame diferenca $f(x) - P(x)$ vrednosti $\pm H_P$. Ta možnost pa nadaljnjega izvajanja ne bo ovirala.

Tvorimo polinom

$$\Phi(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{N'-1})$$

Ker sta polinoma $A(x)$ in $B(x)$ tuja, lahko poiščemo dva polinoma, prvega $\varphi(x)$ stopnje m in drugega $\psi(x)$ stopnje n tako, da velja

$$A(x) \cdot \varphi(x) - B(x) \cdot \psi(x) = \Phi(x)$$

Tvorimo funkcijo oblike

$$Q(x) = s(x) \frac{A(x) - \varepsilon \psi(x)}{B(x) - \varepsilon \varphi(x)} \quad (6)$$

realno število ε izberemo tako, da polinom v imenovalcu nima nobene ničle na intervalu $[a, b]$. Predznak števila ε bomo kasneje določili.

Poiščimo diferenco

$$\begin{aligned} f(x) - Q(x) &= [f(x) - P(x)] + [P(x) - Q(x)] = \\ &= [f(x) - P(x)] + \left[(x) s \frac{A(x)}{B(x)} - s(x) \frac{A(x) - \varepsilon \psi(x)}{B(x) - \varepsilon \varphi(x)} \right] = \\ &= [f(x) - P(x)] - \varepsilon \cdot s(x) \frac{A(x) \varphi(x) - B(x) \psi(x)}{B(x) [B(x) - \varepsilon \varphi(x)]} = \\ &= [f(x) - P(x)] - \varepsilon \cdot s(x) \frac{\Phi(x)}{B(x) [B(x) - \varepsilon \varphi(x)]} \end{aligned} \quad (6)$$

Enakost $f(x) - Q(x) = f(x) - P(x)$, velja samo v ničlah polinoma $\Phi(x)$, tj. v točkah $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$. V teh točkah diferenca $f(x) - P(x)$ ne zavzame vrednosti $\pm H_P$. Za te točke velja

$$|f(x) - Q(x)| = |f(x) - P(x)| < H_P$$

To želimo dokazati še za ostale točke podintervalov (5). Polinom $\Phi(x)$ ima na podintervalih (5) stalno isti predznak, in sicer na sosednih podintervalih nasprotnega. Torej lahko številu ε v (6) določimo tak predznak, da velja

$$|f(x) - Q(x)| < |f(x) - P(x)|$$

Za vse notranje točke podintervalov (5) pa tudi za točki a in b . Dognali smo, da velja

$$|f(x) - Q(x)| < |f(x) - P(x)|; \quad x \in [a, b]$$

ali

$$H_Q < H_P$$

Ker pa je funkcija $P(x)$ najboljša aproksimacija funkcije $f(x)$, ta neenačba ne velja. To je protislovje in potreben pogoj zgornjega stavka je dokazan.

Ostane nam še dokaz, da v množici (1) eksistira samo ena taka funkcija $P(x)$, ki funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ najbolj aproksimira.

Vzemimo obratno, da v množici (1) eksistirata dve taki funkciji $P(x)$ in $P_1(x)$, ki $f(x)$ enako dobro aproksimirata.

Funkciji $P(x)$ in $P_1(x)$ okrajšamo tako, da dobita obliko (4). Funkciji $P(x)$ so prirejena števila N, μ, ν, d in N' , funkciji $P_1(x)$ so pa prirejena števila: N_1, μ_1, ν_1, d_1 in N_1' . Števili N' in N_1' nam povesta, kolikokrat zavzameta izraza $|f(x) - P(x)|$ in $|f(x) - P_1(x)|$ vrednosti H_P in $H_{P_1} = H_P$ na intervalu $[a, b]$. Po prejšnjem je $N' \geq N = m + n - d + 2$ in $N_1' \geq N_1 = m + n - d_1 + 2$.

Vzemimo, da je $N_1' \geq N'$. Točke

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{N_1'} \quad (8)$$

so točke intervala $[a, b]$, v katerih $f(x) - P_1(x)$ zavzame vrednost H_P s spreminjajočimi predznaki. Tvorimo diferenco

$$g(x) = P(x) - P_1(x) = [f(x) - P_1(x)] - [f(x) - P(x)]$$

Ta diferenca ima v točkah (8) intervala $[a, b]$ lahko vrednost nič, vendar pa vsaj v dveh točkah vrednosti nič ne more zavzeti. To trditev dokažimo. Pišimo funkcijo $g(x)$ takole

$$g(x) = s(x) \frac{V(x)}{U(x)}$$

kjer sta $U(x)$ in $V(x)$ polinoma. Stopnjo r polinoma $U(x)$ ocenimo

$$r \leq \max(n - \nu + m - \mu_1, n - \nu_1 + m - \mu) = m + n - \min(\mu_1 + \nu, \mu + \nu_1) \leq \\ \leq m + n - \min(\mu_1, \nu_1) = m + n - d_1 = N_1 - 2 \leq N_1' - 2$$

Polinom $U(x)$ ali funkcija $g(x)$ ima na intervalu $[a, b]$ največ $N_1' - 2$ ničel. Od tod sledi, da eksistirata v zaporedju (8) dve taki točki x_i in x_k , kjer je

$$g(x_i) \neq 0, g(x_{i+1}) = g(x_{i+2}) = \dots = g(x_{k-1}) = 0, g(x_k) \neq 0$$

Torej ima $g(x)$ na intervalu $[x_i, x_k]$ vsaj $k - i - 1$ ničel, ugotovili pa bomo, da jih je vsaj $k - i$. Če predpostavimo, da smo to že ugotovili, potem ima funkcija $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ vsaj $N_1' - 1$ ničel, kar pa ni mogoče. Torej velja $g(x) \equiv 0$ ali $P(x) \equiv P_1(x)$.

Funkcija $g(x)$ ima v točkah x_i in x_k isti predznak kot diferenca $f(x) - P_1(x)$, kar zapišemo takole

$$\text{sign } g(x_i) = \text{sign } [f(x_i) - P_1(x_i)]$$

$$\text{sign } g(x_k) = \text{sign } [f(x_k) - P_1(x_k)]$$

velja pa

$$f(x_k) - P_1(x_k) = (-1)^{k-i} [f(x_i) - P_1(x_i)]$$

ali

$$\text{sign } g(x_k) = (-1)^{k-i} \text{sign } g(x_i)$$

zadnja enačba nam pove, da ima funkcija $g(x)$ na intervalu $[x_i, x_k]$ sodo mnogo ničel, če je $k - i$ sodo število, in liho mnogo, če je $k - i$ liho število. Stavek je dokazan.

Primer. Interval $[a, b]$ naj bo interval $[-1, +1]$, $f(x) = x^n$, $s(x) = 1$, polinom v števcu funkcije (1) stopnje $n - 1$, polinom v imenovalcu pa stopnje 0. Dobimo

$$f(x) - Q(x) = x^n - (-a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \dots - a_1x - a_0) = \\ = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

Polinom $Q(x)$ je najboljša aproksimacija potence x^n , če diferenca $f(x) - Q(x)$ zavzame največjo vrednost

$$H_n = \max_{x \in [-1, +1]} |f(x) - Q(x)|$$

najmanj N -krat, pri čemer je $N = m + n - d + 2$. Pri tem pa je m stopnja polinoma v imenovalcu, torej 0; n stopnja polinoma v števcu, torej $n - 1$ in $d = 0$. Sledi, da je $N = n + 1$.

Postavimo

$$P_n(x) + f(x) - Q(x) = \frac{1}{2^n} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] \quad (9)$$

Ta funkcija je polinom stopnje n , ker vse lihe potence korenov odpadejo. Koeficient pri najvišji potenci dobimo z

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} P_n(x) = \frac{1}{2^n} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)^n + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^n \right] = 1$$

V (9) postavimo $x = \cos \alpha$ in dobimo

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} (e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\alpha$$

Ta polinom zavzame največjo oziroma najmanjšo vrdenost

$$\max_{[-1,1]} |P_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

v $n + 1$ točkah

$$x = 1, \cos \frac{\pi}{n}, \cos \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{3\pi}{n}, \dots, \cos \frac{n\pi}{n} = -1$$

Zato velja: Med vsemi polinomi stopnje n s koeficientom 1 pri najvišji potenci polinom $P_n(x)$ najbolj aproksimira ničlo na intervalu $[-1, +1]$. Polinomi $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, so Čebyševi polinomi.

Uporaba: V primeru $f(x) = 0$, $s(x) = 1$ aproksimiramo ničlo na intervalu $[a, b]$ z racionalno funkcijo. Tako racionalno funkcijo, z imenom prevajalna funkcija, uporabljajo pri tvorbi električnih filtrov.

Literatura

N. I. Ahiezer: Lekcii po teorii aproksimacij, OGIZ, Moskva 1947.

W. Cauer: Theorie der Linearen Wechselstromschaltungen, Akademie Verlag, Berlin 1954.

I. S. Berezin-Židkov: Metodi vičislenij, FIZMATGIZ, Moskva 1962.

LOK KOT TOPOLOŠKI PROSTOR

MARI VENCELJ

Lok je splošno znan pojem, s katerim so povezani številni problemi v analizi. V ravnini pridemo do njega na naslednji način:

Vzemimo zaprt interval na realni osi. Ne da bi splošnost pri tem kaj trpela, se lahko omejimo kar na enotni interval $J = [0, 1]$. Nadalje naj bosta

$$(1) \quad x = x(t) \quad y = y(t)$$

dve enolični zvezni funkciji na tem intervalu. Ako tolmačimo vrednosti teh dveh funkcij kot koordinati točke v ravnini (x, y) , potem nam ta točka opiše neko krivuljo v tej ravnini, ko preteče parameter t vse vrednosti na danem intervalu. Pravimo, da smo s funkcijama $x(t)$, $y(t)$ preslikali interval J v krivuljo v ravnini (x, y) . Da bo ta krivulja tudi lok, mora biti izpolnjena še ena zahteva. Upodobitev intervala na krivuljo naj ne bo le enolična in zvezna, ampak tudi povratno enolična. Različnim točkam intervala naj ustrezajo različne točke krivulje. Ta pogoj je izpolnjen tedaj, ako sta funkciji (1) takšni, da za noben par točk $t_1, t_2 \in J$ nista hkrati izpolnjeni naslednji enačbi:

$$x(t_1) = x(t_2) \quad y(t_1) = y(t_2)$$

Skratka, lok ne sme imeti večkratnih točk, ne sme napraviti zanke.

Seveda pojem loka ni omejen le na ravninske loke. Ako dodamo k sistemu (1) še funkcijo $z = z(t)$ z ustreznimi lastnostmi, bomo dobili lok v prostoru. Čisto splošno pa lahko govorimo o loku tudi kot o topološkem prostoru.

Namen tega članka je pogledati na lok prav s topološke plati. Ogledali si bomo topološko definicijo loka in nekatere njegove lastnosti in zaključili z izrekom o potrebnem in zadostnem pogoju, da je dan topološki prostor lok. Hkrati bomo izkoristili to priložnost za razjasnitev nekaterih preprostih topoloških pojmov. Pri izbiri se ne bomo ozirali na pomembnost pojma, ampak bomo upoštevali le dejstvo, ali je za razumevanje omenjene definicije in izreka potreben ali ne.

Topološki prostor

Množico X z družino podmnožic $\mathcal{O}$ imenujemo *topološki prostor*, če ustreza družina $\mathcal{O}$ naslednjim trem aksiomom:

1. Prazna množica $\emptyset$ in ves prostor X spadata v $\mathcal{O}$.
2. Unija poljubnega števila podmnožic iz $\mathcal{O}$ je v $\mathcal{O}$.
3. Presek končnega števila elementov iz $\mathcal{O}$ je v $\mathcal{O}$.

Elementom množice X navadno pravimo *točke* topološkega prostora. Družino $\mathcal{O}$ imenujemo *topologija* prostora X , njene elemente pa *odprte množice* prostora X v tej topologiji. Prostor je nedegeneriran, ako sestoji vsaj iz dveh različnih točk. Dva topološka prostora sta enaka tedaj in le tedaj, če se ujemata v osnovni množici X in v topologiji.

V dano množico X lahko uvedemo topologijo na različne načine. Najpreprostejši sta *trivialna* in *diskretna topologija*. V prvem primeru vsebuje $\mathcal{O}$ le prazno množico in vso množico X , v drugem pa je $\mathcal{O}$ kar partitivna množica osnovne množice X .

Oglejmo si preprost primer topološkega prostora. Naj bo X kar množica $\mathbb{R}$ vseh realnih števil. Imenujmo množico $A \subset \mathbb{R}$ odprto, če za vsak $x \in A$ eksistira tak odprt interval (a, b) , da je $x \in (a, b) \subset A$. Drugače povedano, A bo odprta množica tedaj in le tedaj, če se da zapisati kot unija samih odprtih intervalov na realni osi. Ni se težko prepričati, da ustreza družina vseh na ta način definiranih odprtih množic osnovnim trem zahtevam za topologijo.

Relativna topologija

Naj bo $(X, \mathcal{O})$ dan topološki prostor in $Y \subset X$ delna množica točk tega prostora. Potem lahko na podlagi topologije v prostoru X uvedemo topologijo $\mathcal{O}_Y$ v množici Y na naslednji način:

$$\mathcal{O}_Y = \{Y \cap O; O \in \mathcal{O}\}$$

Spet se ni težko prepričati, da *relativna topologija* $\mathcal{O}_Y$ res ustreza osnovnim trem pogojem za topologijo.

Ponovno vzemimo za zgled prostor $\mathbb{R}$ vseh realnih števil s prej definirano topologijo. Poiščimo relativno topologijo na zaprtem enotnem intervalu $J = [0, 1]$. Očitno so odprte množice prostora J natanko vse tiste podmnožice intervala J , ki se dajo pisati kot unija intervalov oblike (a, b) , $[0, b)$ ali $(a, 1]$, kjer sta a in b vedno točki z intervala $(0, 1)$.

Baza prostora

Naj bo X prostor s topologijo $\mathcal{O}$. V tem prostoru naj bo $\mathcal{B}$ taka družina odprtih množic, da lahko vsako množico iz $\mathcal{O}$ zapišemo kot unijo množic iz $\mathcal{B}$. Potem imenujemo družino $\mathcal{B}$ *baza* topološkega prostora $(X, \mathcal{O})$.

Zgled: Iz prejšnjega takoj sledi, da je družina vseh odprtih intervalov baza za običajno topologijo v prostoru $\mathbb{R}$.

Nastopi vprašanje, kakšne lastnosti mora imeti družina odprtih množic, da bo baza. Vzemimo poljubno množico X , za katero ni treba, da je topološki prostor. Naj bo $\mathcal{B}$ neka družina delnih množic množice X z lastnostmi:

1. Vsak $x \in X$ je vsebovan vsaj v eni množici $B \in \mathcal{B}$.
2. Če sta $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ in $x \in B_1 \cap B_2$, vedno eksistira neki B_3 , da je $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Očitno ima vsaka baza ti dve lastnosti. Je pa tudi narobe res. Vsaka družina odprtih množic s tema lastnostma je vedno baza za neko topologijo v množici X .

Preslikave topoloških prostorov

Naj sta X in Y dva topološka prostora in naj med njima eksistira neka upodobitev $f: X \rightarrow Y$. Pravimo, da je upodobitev f *zvezna*, če je inverzna slika vsake odprte množice $A \subset Y$, to je $f^{-1}(A)$, odprta množica prostora X . Nadalje pravimo, da je upodobitev f *odprta*, ako je slika vsake odprte množice prostora X odprta v prostoru Y .

Ako eksistira med dvema prostoroma neka *povratno enolična odprta zvezna preslikava*, pravimo, da sta prostora homeomorfná, ustrezno preslikavo pa imenujemo *homeomorfizem*. Homeomorfnih prostorov s topološkega stališča ne ločimo.

Tesno povezan s homeomorfizmom je pojem topološke lastnosti. Neko lastnost prostora X imenujemo *topološka lastnost*, če jo imajo vsi prostoru X homeomorfní prostori. Topološke lastnosti, ki so skupne vsem lokom, so natančno tiste, ki jih ima zaprt enotni interval $[0, 1]$, v skladu z naslednjo topološko definicijo loka.

Topološki prostor X je lok tedaj in le tedaj, če je homeomorfen zaprtemu intervalu $J = [0, 1]$ prostora R realnih števil. Vse topološke lastnosti, ki jih bomo našli pri enotnem intervalu J , bodo torej čisto splošno veljale za vsak lok.

Nastopi vprašanje, ali je definicija loka, ki smo jo pravkar srečali, v skladu z našim prvotnim pojmom loka, ali lahko naš lok iz analize spravimo v njen okvir. Omejimo se spet kar na ravninski primer! Poskušali bomo vpeljati v množico točk v ravnini (x, y) , na katero se s funkcijama (1) upodobi interval J , to je na analitičen lok, topologijo, ki bo v skladu s topologijo prostora J . To napravimo na naslednji način. Poiščemo slike vseh odprtih množic prostora J s funkcijama (1). Očitno so to delne množice celotnega loka. Razen tega se da trivialno prepričati, da izpolnjuje družina vseh takih množic osnovne zahteve za topologijo. Topološki prostor torej že imamo. Odprto je le še vprašanje, ali je homeomorfen prostoru J . Tudi na to vprašanje lahko takoj pritrdilno odgovorimo. Upodobitev, definirana s funkcijama (1), je povratno enolična, preslika odprte množice v odprte in odprte množice so slike samo odprtih množic. Iskani homeomorfizem med obema prostoroma je torej kar upodobitev, s katero smo definirali odprte množice na loku.

Okolice. Zaprte množice

Naj je X topološki prostor in $x \in X$ točka tega prostora. Podmnožico $U \subset X$ imenujemo *okolica* točke x tedaj in le tedaj, če vsebuje točko x in je odprta množica prostora X .

Podmnožica A prostora X je *zaprta* tedaj in le tedaj, ako je njen komplement $X - A$ odprta množica.

Adherenca množice. Separabilnost

Naj je X topološki prostor in $A \subset X$ poljubna množica točk tega prostora. Točko $a \in A$ imenujemo *notranja točka* množice A , če eksistira vsaj ena okolica točke a , ki je vsa vsebovana v A . Nasprotno pravimo neki točki *zunanja točka*, ako je vsaj ena njena okolica disjunktna z A . Točka a je *robna točka* množice A , ako vsebuje vsaka njena okolica točke iz A in točke izven A . Notranje in robne točke skupaj imenujemo *adherentne* točke množice A . Množico, ki sestoji iz vseh adherentnih točk množice A , imenujemo *adherenco* te množice in jo označimo z $\bar{A}$. Prav gotovo velja, da je $A \subset \bar{A}$. Razen tega pa se da videti, da je $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Dokaz. Naj je $c \in \bar{\bar{A}}$ in U_c poljubna njena okolica. Po definiciji adherentne točke eksistira neka taka točka b , da je $b \in U_c$ in $b \in \bar{A}$. Označimo z U_b neko

okolico te točke in si oglejmo množico $U_c \cap U_b$. Ta je odprta in vsebuje b , torej je tudi okolica točke b . Ker je b element $\bar{A}$, mora eksistirati neka taka točka $a \in A$, ki je vsebovana v $U_c \cap B_b$ in tedaj tudi v U_c . U_c pa je bila poljubna okolica točke c , torej je res $c \in \bar{A}$.

Analogno premišljanje nas privede tudi do ugotovitve, da je $\bar{A}$ vedno zaprta množica in da je neka množica A zaprta natančno takrat, ako je $A = \bar{A}$.

Naj je X topološki prostor in A podmnožica tega prostora z lastnostjo, da je $\bar{A} = X$. Potem pravimo, da je množica A *povsod gosta* v prostoru X . Topološki prostor je *separabilen*, če eksistira v njem neka števna *povsod gosta množica*.

Iz analize vemo, da je vsako realno število limita konvergentnega zaporedja racionalnih števil. To pomeni, da lahko najdemo znotraj poljubno majhnega intervala okrog poljubne točke iz J racionalne točke, ali kar je isto, množica racionalnih števil je v J povsod gosta. Ker pa je tudi števna, je enotni interval J separabilen prostor.

Separabilnost je topološka lastnost, kar sledi iz povratne enoličnosti in odprtosti homeomorfizma. Torej je vsak lok separabilen prostor.

T_1 prostor. Hausdorffov prostor

Prostor X imenujemo T_1 prostor, če je v njem vsaka točka zaprta množica.

Prostor X je *Hausdorffov prostor*, če k vsakemu paru različnih točk $x, y \in X$ eksistirata disjunktni okolici U_x in U_y . Vsak Hausdorffov prostor je T_1 prostor.

Dokaz. Vzemimo poljubno točko $x \in X$, kjer je X Hausdorffov prostor, in si oglejmo množico $X - x$. Vsakemu $y \in X - x$ pripada neka okolica U_y , ki ne vsebuje točke x . Torej lahko pišemo $X - x$ kot unijo odprtih množic U_y . $X - x$ je tedaj odprta množica, točka x pa zaprta množica prostora X .

Metrični prostor

Prostor X imenujemo *metrični prostor*, ako eksistira v njem neko pravilo, po katerem pripada vsakemu paru točk $x, y \in X$ neko nenegativno število $d(x, y)$ z naslednjimi lastnostmi:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Število $d(x, y)$ imenujemo *razdalja* točk x in y . V metrični prostor lahko uvedemo topologijo na naslednji način:

Vzemimo poljuben element $a \in X$ in poljubno pozitivno število $r > 0$ ter si oglejmo množico

$$B_r = \{x \in X, d(x, a) < r\}$$

Tako množico imenujemo odprta krogla s polmerom r in središčem v točki a . Hitro se da videti, da izpolnjuje družina vseh krogel

$$\mathcal{B} = \{B_r, r > 0, a \in X\}$$

oba pogoja, da je baza. Če uvedemo v metrični prostor topologijo, ki ima družino $\mathcal{B}$ za bazo, pravimo, da je njegova topologija v skladu z njegovo *metriko*.

Zgled za metrični prostor je prostor R z metriko $d(x, y) = |x - y|$. Topologija, inducirana s to metriko, je ista, kot jo dobimo, če vzamemo družino vseh odprtih intervalov za bazo.

Vsak metrični prostor je Hausdorffov prostor in torej tudi T_1 prostor.

Zaporedja. Poln metrični prostor

Naj bo X metrični prostor z metriko d . Nadalje naj bo

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

zaporedje točk tega prostora. Pravimo, da to zaporedje konvergira k limitni točki a , če lahko za poljuben $\varepsilon > 0$ dobimo tako pozitivno število n_0 , da bo $d(x_n, a) < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$. Neko zaporedje ustreza Cauchyjevemu pogoju, če lahko po izbiri poljubnega $\varepsilon > 0$ dobimo tak n_0 , da bo $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, za vsak par $m, n > n_0$. Vsako konvergentno zaporedje ustreza Cauchyjevemu pogoju. Narobe pa v splošnem ne drži. Tako npr. v prostoru racionalnih števil z metriko $d(x, y) = |x - y|$ Cauchyjev pogoj ni zadosten za konvergenco. Če pa je v metričnem prostoru X Cauchyjev pogoj potreben in zadosten za konvergenco zaporedja, imenujemo prostor X poln.

Iz analize vemo, da je v prostoru J Cauchyjev pogoj potreben in zadosten pogoj za konvergenco zaporedja, torej je prostor J poln metrični prostor. Tak je tudi vsak lok.

Enakomerna zveznost. Razširitev preslikave

V metričnih prostorih lahko uvedemo pojem enakomerne zveznosti. Naj sta X in Y metrična prostora z metrikama d in d' . Upodobitev $f: X \rightarrow Y$ je enakomerna zvezna na X , če za vsak $\varepsilon > 0$ eksistira tak $\delta > 0$, da je $d'(f(x'), f(x)) > \varepsilon$ za poljuben par $x, x' \in X$, da je le $d(x', x) < \delta$.

Vzemimo dve množici X in Y . A in B naj bosta taki podmnožici množice X , da je $A \subset B$. Razen tega naj bo dana neka preslikava $g: A \rightarrow Y$. Preslikavo $f: B \rightarrow Y$ imenujemo razširitev upodobitve g z A na B , če je $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in A$. Če sta X in Y prostora in je g zvezna upodobitev, potem je preslikava $f: B \rightarrow Y$ zvezna razširitev preslikave g z A na B , če je zvezna in je razširitev upodobitve g .

Kompaktne množice

Družina množic $\{0_\alpha\}$ je pokritje množice A , oziroma pokriva množico A , če je $A \subset \bigcup 0_\alpha$. Pokritje je odprto, če je vsak element družine $\{0_\alpha\}$ odprta množica. Če vsebuje družina končno mnogo elementov, je pokritje končno, sicer neskončno.

Množica A je kompaktna, če vsebuje vsako odprto pokritje končno pokritje. Analogno je topološki prostor X kompakten, če vsako odprto pokritje prostora X vsebuje končno pokritje prostora X .

Vsaka zaprta podmnožica kompaktnega prostora je kompaktna. Dokaz:

Naj bo X kompakten prostor, $Z \subset X$ zaprta podmnožica in $\{0_\alpha\}$ poljubno odprto pokritje množice Z . Če privzamemo k družini $\{0_\alpha\}$ še odprto množico $X - Z$, dobimo odprto pokritje prostora X . Ta pa je kompakten, torej eksistira v družini $\{0_\alpha\} \cup (X - Z)$ neko končno pokritje prostora X . Brez množice $X - Z$

je to pokritje tudi končno pokritje množice Z , vsebovano v družini $\{0_\alpha\}$. Torej je Z res kompaktna množica.

Kompaktnost je topološka lastnost. Velja namreč, da jo homeomorfizem ohranja. Dokaz:

Zadosti je dokazati, da je zvezna slika kompaktne množice kompaktna. Vzemimo kompaktno podmnožico A prostora X in zvezno upodobitev $f: X \rightarrow Y$. Družina $\{0'_\alpha\}$ naj bo poljubno pokritje slike $f(A) \subset Y$. Oglejmo si družino množic $0_\alpha = f^{-1} \{0'_\alpha\}$. Ker $\{0'_\alpha\}$ pokriva množico $f(A)$, pokriva družina $\{0_\alpha\}$ množico A . Množice 0_α so odprte, ker je f zvezna preslikava, torej je $\{0_\alpha\}$ odprto pokritje kompaktne množice A . Potem pa eksistira neko končno pokritje množice A :

$$0_{\alpha_1} \cup 0_{\alpha_2} \cup \dots \cup 0_{\alpha_n}$$

Če tvorimo unijo ustreznih množic 0_{α_i} :

$$0'_{\alpha_1} \cup 0'_{\alpha_2} \cup \dots \cup 0'_{\alpha_n}$$

dobimo končno pokritje množice $f(A)$; torej je $f(A)$ res kompaktna množica.

Zanima nas, kaj so kompaktne množice v prostoru R z normalno topologijo. Če neka množica $A \subset R$ ni omejena, prav gotovo ni kompaktna. Pokrijmo namreč vsako točko množice A z odprtim intervalom širine 2 s to točko v sredini. Prav gotovo končno število takih intervalov ne pokrije množice A . Dokazati pa se da (Heine-Borelov izrek), da je vsak končen zaprt interval prostora R kompakten. Torej je kompakten tudi prostor J in s tem vsak lok.

Povezanost prostorov

Naj bo X topološki prostor. V vsakem prostoru sta prazna množica in ves prostor hkrati zaprti in odprti množici. Če sta to edini taki množici v prostoru X , je prostor X *povezan*. Če X ni povezan, eksistira neka množica $A \subset X$, ki je odprta in zaprta v prostoru X in $A \neq X$, $A \neq \emptyset$. Vzemimo $B = X - A$. Tudi B je hkrati zaprta in odprta množica. Prostor X torej lahko pišemo kot unijo dveh ločenih odprtih množic. Velja tudi narobe. Če se da X pisati kot unija dveh ločenih odprtih množic, potem ni povezan.

Vzemimo neko podmnožico $A \subset X$. V njej lahko definiramo relativno topologijo. V tej topologiji je množica A lahko *povezana* ali ne. Pravimo, da je množica povezana v prostoru X , če je povezana v relativni topologiji.

Zgled: Prostor R je povezan prostor. Vsi intervali v R so povezane množice, hkrati pa so to tudi edine povezane množice na številski premici.

Povezan je tudi vsak lok; velja namreč, da je *zvezna slika povezane množice povezana*.

Oglejmo si še nekatere pojme v zvezi s povezanostjo prostorov.

Dve množici A in B prostora X imenujemo *separirani*, če je $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\bar{A} \cap B = \emptyset$ in $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Dve tuji podmnožici prostora X sta separirani, če ni nobena prazna in sta obe hkrati zaprti in odprti v svoji uniji. Podmnožica A prostora X je povezana tedaj in le tedaj, če je ne moremo pisati kot unijo dveh separiranih množic. Vsak nepovezan prostor lahko pišemo kot unijo dveh separiranih množic. To unijo imenujemo *separacija* prostora X .

Naj bo X povezan prostor in $x \in X$ taka točka prostora, da $X - x$ ni več povezan. Potem lahko pišemo

$$X - x = A \cup B$$

kjer sta A in B separirani množici. V vsakem primeru sta množici $A \cup x$ in $B \cup x$ povezani, če pa je x zaprta podmnožica prostora X , velja še, da je $\bar{A} = A \cup x$ in $\bar{B} = B \cup x$.

Lok

Doslej smo mimogrede že srečali topološko definicijo loka in tudi že spoznali nekatere njegove lastnosti. Združimo dosedanje ugotovitve. Definirali smo, da je *dan topološki prostor lok tedaj in le tedaj, ako je homeomorfen podprostoru J prostora R , kjer smo z J označili zaprt enotni interval $[0, 1]$. Videli smo, da je vsak lok nedegeneriran, kompakten, povezan, separabilen metrični prostor.*

Interval $[0, 1]$ pa ima tudi zanimivo lastnost, da ostane povezan, ako mu odvezemo krajiščni točki 0 in 1 , bodisi vsako zase, bodisi obe skupaj. Razen tega sta ti dve točki tudi edini točki intervala s to lastnostjo. Ker je ta lastnost prostora J očitno topološka, mora imeti tudi vsak lok dve in samo dve *nepresečni točki* in vsak homeomorfizem med J in lokom mora preslikati nepresečni točki v točki 0 oziroma 1 . Pri tem imenujemo točko $x \in X$ *nepresečna točka* prostora X natančno takrat, če je množica $X - x$ povezana. V nasprotnem primeru govorimo o *presečni točki* prostora X .

Namesto vprašanja po topoloških lastnostih loka si lahko zastavimo tudi obratno nalogo: *Kakšen naj bo topološki prostor, da bo lok.* Odgovor je naslednji:

Potreben in zadosten pogoj za to, da je topološki prostor lok, je, da je nedegeneriran, kompakten, povezan, separabilen metrični prostor s kvečjemu dvema nepresečnima točkama.

Videli smo že, da je pogoj potreben. Da pa je tudi zadosten, se da dokazati z eksistenco homeomorfizma med J in vsakim prostorom X z navedenimi lastnostmi. Dokaz je precej obsežen in kot tak vsaj v celoti ne sodi v Obzornikov okvir. Bralec si ga lahko ogleda v knjigi Hall-Spencer: *Elementary Topology*, stran 150—169. Mi si bomo le v grobem ogledali idejo dokaza in ob koncu zgolj v ilustracijo podrobneje dokazali manjši del izreka.

Najprej se da dokazati, da ima X točno dve nepresečni točki, in sicer tako, da se dokaže, da ima vsak nedegeneriran, kompakten, povezan, separabilen T_1 prostor vsaj dve nepresečni točki. Ker naš prostor nima več kot dve, ima natančno dve, ki ju označimo z a in b .

Seveda mora vsak homeomorfizem preslikati nepresečne točke v nepresečne. Da nam sploh uspe definirati kak homeomorfizem $f: X \rightarrow J$, moramo torej vzeti $f(a) = 0$ in $f(b) = 1$. Naslednji korak je definicija naše upodobitve med točkami števne, povsod goste množice v X in števne, povsod goste množice v J . V ta namen se da videti, da lahko prostor X uredimo v smislu, ki sovpada z njegovo topologijo, to je, da eksistira v X tako imenovana naravna urejenost. V tem primeru lahko med vsemi povratno enoličnimi preslikavami, ki eksistirajo med dvema števnima množicama, najdemo tako preslikavo, ki ohranja omenjeno naravno urejenost, in prav to preslikavo uporabimo za definicijo homeomorfizma na števni, povsod gosti podmnožici v X . Nadalje se da dokazati, da je ta upodobitev na povsod gosti množici enakomerno zvezna in da se da enolično zvezno nadaljevati na ves X . To nadaljevanje na ves prostor pa je iskani homeomorfizem med X in J .

Podrobneje si oglejmo le prvi del dokaza, da ima lok natančno dve nepresečni točki.

Lok ima natančno dve nepresečni točki

Dokazati moramo naslednji izrek:

Vsak kompakten, povezan, nedegeniran, separabilen T_1 prostor X ima vsaj dve nepresečni točki.

Recimo, da izrek ne velja in ima X kvečjemu eno nepresečno točko. Ker je X separabilen, eksistira v njem zaporedje točk $\{p_n\}$, tako da je množica $H = \bigcup p_n$ povsod gosta v X . Naj bo n_1 najmanjše tako celo število, da je $p_{n_1} \in H$ presečna točka prostora X . Ker je X nedegeneriran prostor in je vsaka točka v njem zaprta, vsebuje H vsaj dve točki; torej tak p_{n_1} res eksistira. Prostor $X - p_{n_1}$ ni več povezan in ga torej lahko pišemo kot unijo dveh separiranih množic:

$$X - p_{n_1} = A_1 \cup B_1$$

kjer smo izbrali oznake tako, da leži tista edina nepresečna točka, če sploh kakšna je v X , v množici B_1 . Oglejmo si množici A_1 in B_1 . Ker je naš prostor T_1 prostor, je $\bar{A}_1 = A_1 \cup p_{n_1}$ in $\bar{B}_1 = B_1 \cup p_{n_1}$ in sta obe množici povezani.

Množico A_1 lahko pišemo v obliki $A_1 = X - \bar{B}_1$, torej je odprta množica. Potem mora vsebovati vsaj eno točko povsod goste množice H . Naj je n_2 najmanjše tako celo število, da je $p_{n_2} \in A_1 \cap H$. Ker vsebuje A_1 samo presečne točke, nam p_{n_2} določa separacijo

$$X - p_{n_2} = A_2 \cup B_2$$

Oznake smo izbrali tako, da je povezana množica B_1 vsebovana v B_2 . Istočasno je $\bar{A}_2 \subset A_1$.

Definirajmo množice A_k in B_k za $k > 2$ z naslednjo separacijo

$$X - p_{n_k} = A_k \cup B_k$$

Pri tem je p_{n_k} element, ki ima med vsemi elementi množice H , ki leže v A_{k-1} , najmanjši indeks. Oznake so spet izbrane tako, da je povezana množica $B_{k-1} = B_{k-1} \cap p_{n_{k-1}}$ vsebovana v B_k in hkrati $\bar{A}_k \subset A_{k-1}$.

Vzemimo sedaj množico $B = \bigcup \bar{B}_k = \bigcup [p_{n_k} \cup B_k]$. Množica B je povezana, ker je unija povezanih množic s skupno točko p_{n_1} . Nadalje je iz definicije jasno, da je $H \subset B$. Torej je tudi množica B povsod gosta v X . Videti pa se da tudi, da je B prava podmnožica prostora X . Tu bomo uporabili Cantorjev izrek, ki ga navedimo brez dokaza:

Naj je $\{A_n\}$ monotonno padajoče zaporedje nepraznih zaprtih podmnožic T_1 prostora ($A_n \subset A_{n+1}$ za vsak n) in naj je A_1 kompaktna množica. Potem eksistira $p \in X$, da je $p \in A_n$ za vsak n .

Definirajmo množico A z enačbo $A \cap A_k$. Ker je $\bar{A}_{k+1} \subset A_k$ za vsak indeks k , velja $A = \bigcap \bar{A}_k$. Razen tega je za vsak k množica $\bar{A}_{k+1}$ števno kompaktna, zaprta in vsebovana v $\bar{A}_k$. Torej je po Cantorjevem izreku A neprazna množica; ker pa je $A \subset X - B$, sledi od tod, da je B prava podmnožica prostora X .

Pri predpostavki, da ima X kvečjemu eno nepresečno točko, smo torej konstruirali povezano, povsod v X gosto množico B , ki je prava podmnožica prostora X in vsebuje tudi edino (če sploh je) nepresečno točko prostora X . Do protislovja pridemo takole: ker je B prava podmnožica prostora X , eksistira vsaj ena taka točka $p \in X$, ki ni v B . Oglejmo si množico $X - p$! Ker je $B \subset X - p \subset B = X$ in je B povezana množica, mora biti tudi $X - p$ povezana, ali kar je isto, p je nepresečna točka prostora X . To pa je že protislovje, ker p ni v B , B pa vsebuje vse nepresečne točke prostora X .

INTERMETALNI POLPREVODNIKI

GOJMR LAHAJNAR

Nuklearni inštitut »Jožef Stefan«

UVOD

Nekatere spojine dveh kovin — tako imenovane *intermetalne spojine* — imajo kovinske lastnosti kot zlitine, druge pa imajo pravi stehiometrični sestav kot soli. Spojine dveh elementov, od katerih sta oba na levi strani *Zintllove meje*, ki poteka v periodni tabeli nekako med skupinama III B in IV B, imajo lastnosti kovin, spojine dveh elementov z raznih strani te meje pa lastnosti soli. Že dalj časa je znano, da imajo spojine elementov skupin II B in VI B ter I B in VII B, npr. ZnS in CuJ, polprevodniške lastnosti. Šele leta 1952 pa so odkrili podobne lastnosti pri spojinah elementov skupin III B in V B. S tem se je precej povečalo število znanih polprevodnikov. Intermetalni polprevodniki, od katerih sta najbolj znana InSb in GaAs, so v zadnjih letih v središču raziskovanja zaradi problemov, ki so zanimivi za teorijo, in zaradi možnosti za uporabo. V nadaljnjem bomo površno opisali intermetalne polprevodnike in navedli nekaj primerov za njihovo uporabo.

		1s		1	2																																		
		H		He																																			
		s		s																																			
		1		2																																			
IA	IIA																	IIIB IVB VB VIB VIIB																					
2s	3 Li	4 Be																	2p	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne														
3s	11 Na	12 Mg																	3p	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 A														
4s	19 K	20 Ca	3d	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	4p	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr																			
5s	37 Rb	38 Sr	4d	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	5p	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe																			
6s	55 Cs	56 Ba	5d	57 La	+	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	6p	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn																		
7s	87 Fr	88 Ra	6d	89 Ac	*	d ² s ²	d ³ s ²	d ⁴ s ²	d ⁵ s ¹	d ⁵ s ²	d ⁶ s ²	d ⁷ s ²	d ⁸ s ²	d ¹⁰ s ¹	d ¹⁰ s ²	s ² p ¹	s ² p ²	s ² p ³	s ² p ⁴	s ² p ⁵	s ² p ⁶																		
	s ¹	s ²		d ¹ s ²																																			

+ Lantanova serija (14 elementov)

* Aktinijeva serija (14 elementov)

Tabela I. Periodna tabela elementov

Kinetično energijo popolnoma prostega elektrona izrazimo z valovnim vektorjem k takole $E = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 / m$, pri čemer so dovoljene vse vrednosti k . Za elektrone v kristalih k ne more zavzeti vseh vrednosti. Za dovoljene vrednosti k , v tako imenovanih energijskih pasovih, pa velja približno $E = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 / m^*$.

Efektivna masa m^* je lahko večja ali manjša od mase m prostega elektrona; za valenčne elektrone je blizu m , za elektrone iz globljih plasti pa je precej večja. V energijskem pasu končno velikega kristala je končno število energijskih nivojev. Po Paulijevem načelu sta lahko na vsakem energijskem nivoju kvečjemu po dva elektrona z nasprotnima spinoma.

Valenčnim elektronom ustreza *valenčni pas*. Pri izolatorjih in polprevodnikih je pri nizkih temperaturah valenčni pas popolnoma zaseden, pri kovinah pa le delno. Sledi mu prepovedani pas, katerega širina ΔE je pri izolatorjih nekaj eV, pri polprevodnikih pa je velikostne stopnje 1 eV. Pri polprevodnikih je število prostih elektronov in število vzreli, to je izpraznjenih mest elektronov v valenčnem pasu, zaradi majhnega ΔE pri enakih pogojih precej večje kot pri izolatorjih.* Gibljivost μ je definirana z enačbo $v = \mu \mathcal{E}$ kjer je v hitrost elektrona ali vrzeli zaradi jakosti zunanjega električnega polja $\mathcal{E}$. Gibljivost elektrona je $\mu = e_0 \tau / m^*$, kjer je τ relaksacijski čas, to je čas med dvema zaporednima trkoma.

INTERMETALNI POLPREVODNIKI IN NJIHOVE LASTNOSTI

Najbolj znana in raziskana intermetalna spojina elementov iz skupin II B in IV B je Mg_2Sn . Pri sobni temperaturi je polprevodnik s širino prepovedanega pasu 0,20 eV. Druge spojine II B — IV B imajo znatno širše prepovedane pasove: Mg_2Si 0,8 eV, Mg_2Ge 0,7 eV, Ca_2Si 1,9 eV, Ca_2Sn 0,9 eV in Ca_2Pb 0,5 eV, medtem ko kaže Mg_2Pb kovinske lastnosti. Vse našteje spojine magnezija so kubične s fluoritno strukturo, spojine kalcija pa tetragonalne, vendar se struktura kristalne mreže le malo razlikuje od fluoritne. Gibljivosti elektronov in vrzeli so razmeroma majhne, pri magnezijevih spojinah imajo velikostno stopnjo $100 \text{ cm}^2/\text{Vs}$.

Med spojinami II B — V B sta najbolj raziskani ZnSb in CdSb . CdSb je polprevodnik s širino prepovedanega pasu $\Delta E = 0,48 \text{ eV}$. Posebnost te spojine je, da je giblivosť vrzeli (300 do $700 \text{ cm}^2/\text{Vs}$) večja od giblivosti elektronov; podobno je pri ZnSb .

Tudi med spojinami I A — V B so nekatere polprevodniki, npr. KSb , K_3Sb , CsSb , Cs_3Sb in Li_3Sb , s širinami prepovedanih pasov od 0,5 do 0,8 eV.

Lastnosti intermetalnih spojin III B — V B, II B — VI B in I B — VII B je možno primerjati z lastnostmi elementarnih polprevodnikov IV. skupine (Si, Ge, sivega kositra α — Sn). Te intermetalne spojine z maloštevilnimi izjemami kristalizirajo kubično kot ZnS . Polprevodniki Ge, GaAs, ZnSe in CuBr so si zelo podobni. Celo razdalje med sosednimi atomi so za vse skoraj enake: 2,44 Å, 2,44 Å, 2,45 Å in 2,46 Å. Podobno ujemanje imamo tudi v vrsti: sivi kositer (α -Sn), InSb , CdTe in AgJ . Gibljivosti elektronov v polprevodnikih skupine IV B (pri sobni temperaturi okrog $900 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ v diamantu, $1400 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ v siliciju, $3600 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ v germaniju in okrog $3000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ v sivem kositru) so dosti večje od giblivosti elektronov v kovinah.

	α -Sn	InSb	CdTe	AgJ
ΔE	0,08	0,22	1,5	2,8 eV
μ_e	3000	65 000	300	30 cm^2/Vs
μ_h		1 000	100 cm^2/Vs	

Tab. II. Izmerjene giblivosti elektronov (μ_e) in vrzeli (μ_h) za polprevodnike iz iste vrste periodne tabele

* P. Gosar: O elektronih v kristalih, Obz. mat. fiz. 7, 116 (1960); M. Pintar: Električna upornost enovalentnih kovin, Obz. mat. fiz., 8, 162 (1961).

Atomi elementarnih polprevodnikov skupine IV B imajo zasedeni lupini s in p . Isto velja za enega izmed atomov v binarnih polprevodnikih. Zaključeni podlupini s in p pa imajo lahko samo atomi, ki so v periodni tabeli v IV., V., VI. ali VII. skupini. S tem je pojasnjeno empirično pravilo, da vsebujejo vsi polprevodniki elemente, ki ležijo v periodni tabeli desno od Zintllove meje. Zaradi zaključenih valenčnih lupin s in p v atomu vsaj enega od elementov polprevodniške spojine velja zveza $n_e/n_a + b = 8$. Pri tem je n_e število valenčnih elektronov na »molekulo«, n_a število atomov elementa iz skupine IV B do VII B na »molekulo« in b povprečno število vezi, ki jih eden od teh atomov tvori z drugimi atomi iz skupine IV B do VII B (tab. III.). S tem so lahko napovedali polprevodniške lastnosti binarnih spojin (npr. Li_2Se , Li_2Te , Na_2Se , Na_2Te in druge), ternarnih spojin s kristalno strukturo Mg_2Sn (npr. AgAsMg , AsLiMg , LiMgP , $\text{In}_2\text{S}_4\text{Mg}$) in celo spojin štirih elementov (npr. $\text{Cu}_2\text{FeSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnTe}_4$).

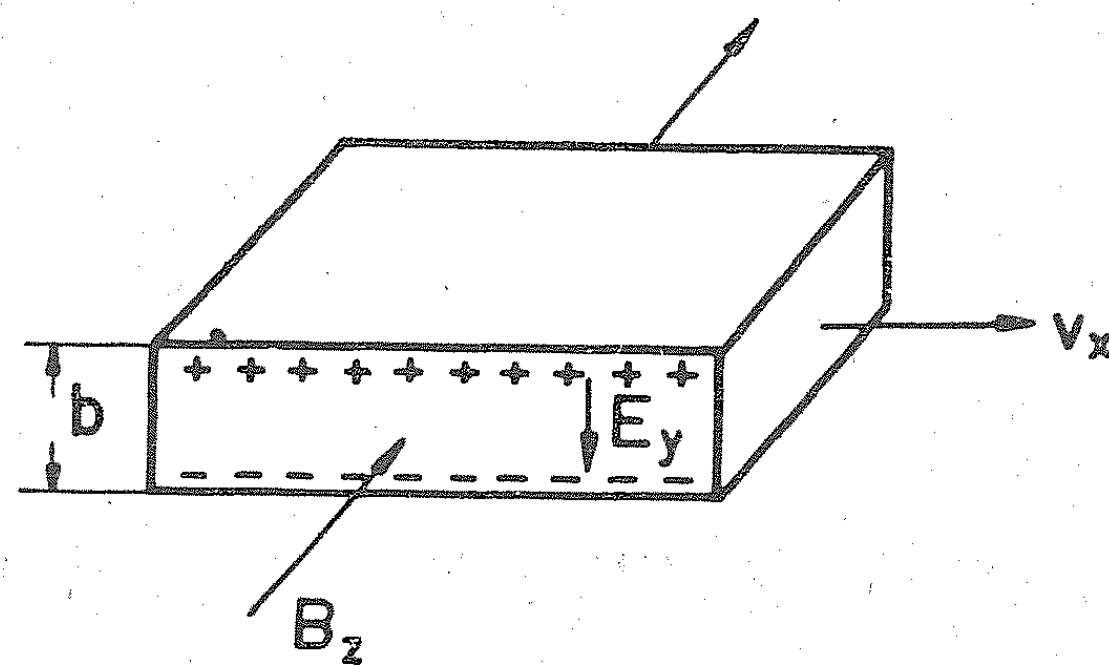
	n_e	n_a	b		n_e	n_a	b
Ge	4	1	4	CdSb	7	1	1
As	5	1	3	Mg_3Sb_2	16	2	0
Se	6	1	2	AgInTe_2	16	2	0
InSb	8	1	0	TiO_2	16	2	0
Mg_2Sn	8	1	0	SiC	8	2	4
Li_3Bi	8	1	0	In_2Te_3	24	3	0

Tab. III. Bralec se lahko sam prepriča, da je za vse spojine v tabeli $n_e/n_a + b = 8$.

NEKAJ PRIMEROV ZA PRAKTIČNO UPORABO INTERMETALNIH POLPREVODNIKOV

Merjenje gostote magnetnega polja s Hallovim efektom

Znano je, da se na vodniku z električnim tokom, ki je prečno postavljen v magnetno polje, pojavi *Hallova napetost*, ki je pravokotna na vodnik in na smer magnetnega polja. Na nosilce naboja v vodniku namreč deluje poleg električne sile tudi prečna magnetna sila. Če se gibljejo naboji v smeri osi x s hitrostjo v_x in ima magnetno polje z gostoto B smer osi z , ima magnetna sila $e_0 v_x B_z$ smeri osi y (sl. 1). Naboji se bodo nabirali na vodoravnih mejnih



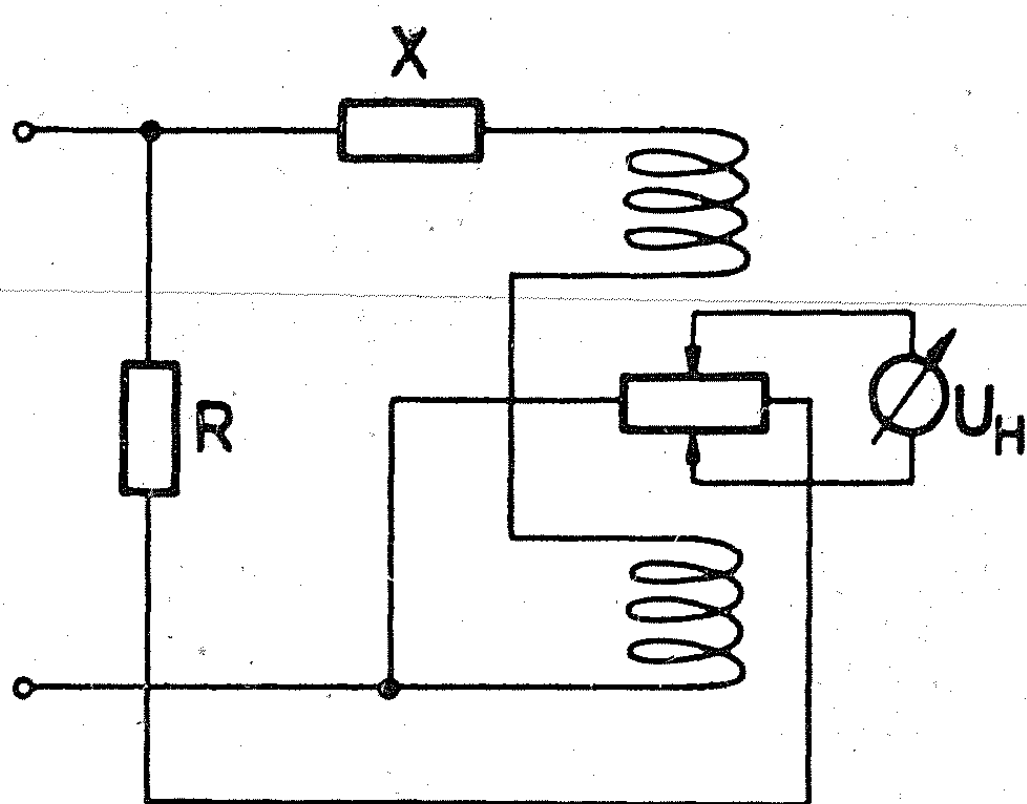
Sl. 1. Hallov efekt. Elektroni, ki se gibljejo s hitrostjo v_x v smeri osi x , se v prisotnosti magnetnega polja B_z odklanjajo proti spodnji ploskvi vodnika.

ploskvah vodnika, dokler ne bo nastalo električno polje z jakostjo $\mathcal{E}_y$, tako da bo delovalo na nosilce s silo, ki je nasprotno enaka magnetni sili. V ravnovesju velja tedaj $e_0 \mathcal{E}_y = e_0 v_x B_z$. Ker je gostota toka $j_x = Ne_0 v_x$, pri čemer je N gostota nosilcev naboja, dobimo $\mathcal{E}_y = j_x B_z / Ne_0$. Hallova konstanta $R_H = \mathcal{E}_y / j_x B_z = (Ne_0)^{-1}$ je negativna za proste elektrone. Pri polprevodnikih so absolutne vrednosti R_H dosti večje, ker so koncentracije prostih nosilcev naboja dosti manjše kot pri kovinah, npr. 10^{17} cm^{-3} .

Hallova napetost je sorazmerna z gostoto magnetnega polja, zato je možno Hallov efekt uporabiti za merjenje gostote magnetnih polj. Za majhne gostote B_z uporabimo lahko polprevodniški germanij tipa n (specifična upornost $10 \Omega\text{cm}$, pri toku 1 mA je za $0,15 \text{ mm}$ debelo ploščico $U_H/B_z = j_x b / Ne_0 = 0,2 \text{ V/(Vsm}^{-2})$). Za večje gostote B_z pa moramo uporabiti InSb s specifičnim uporom $1 \Omega\text{cm}$, ker dovoljuje večje gostote tokov. Z InSb lahko s Hallovim efektom merimo še gostote magnetnih polj okrog 1 Vsm^{-2} z natančnostjo $\pm 2 \%$. Pri manjših gostotah je natančnost meritve omejena le z natančnostjo merjenja napetosti.

Merjenje električne moči s Hallovim efektom

Zaporedno s porabnikom X, katerega moč želimo izmeriti (sl. 2), je tuljava elektromagneta, tako da je gostota magnetnega polja B sorazmerna s tokom skozi porabnik. Med poloma je ploščica iz polprevodniškega materiala. Tok skozi ploščico je sorazmeren z napetostjo izvira. Običajno je potreben pred-



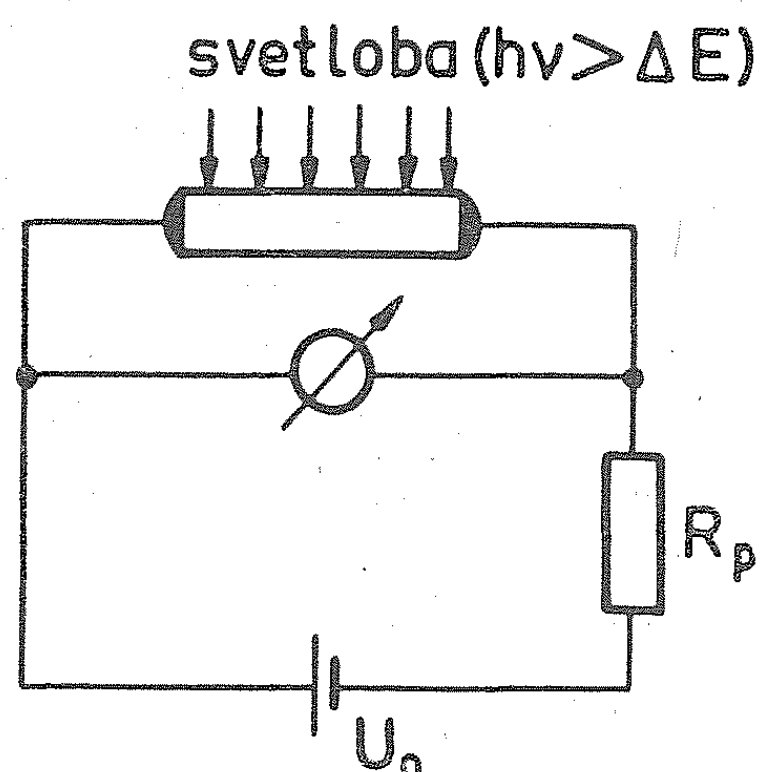
Sl. 2. Wattmeter na Hallov efekt. Z enosmernim instrumentom izmerjena Hallova napetost U_H je sorazmerna z močjo, ki jo troši porabnik X.

upor R , da tokovi niso preveliki. Hallova napetost na ploščici je sorazmerna s tokom skozi ploščico in z gostoto magnetnega polja, torej je sorazmerna z močjo, ki jo troši porabnik X. Ako je napetost izvira izmenična, je Hallova napetost U_H še vedno sorazmerna z močjo, če je induktivnost tuljave tako majhna, da povroči le neznaten fazni premik. Tedaj je gostota toka skozi ploščico $j = j_0 \sin \omega t$ in gostota magnetnega polja $B = B_0 \sin (\omega t + \varphi_0)$; φ_0 je fazni premik med tokom in napetostjo na porabniku. Torej je U_H sorazmerna z $jB = \frac{1}{2} j_0 B_0 [\cos \varphi_0 - \cos (2 \omega t + \varphi_0)]$. Instrument za enosmerne napetosti meri samo enosmerno komponento $\frac{1}{2} j_0 B_0 \cos \varphi_0$, ki je sorazmerna z močjo.

Detektorji za infrardečo svetlobo

InSb je zaradi majhne širine prepovedanega pasu uporaben za zaznavanje infrardeče svetlobe. Na ploščico InSb naj pada svetloba, pri kateri je energija fotonov $h\nu$ večja od širine prepovedanega pasu ΔE . Foton, ki se absorbira v ploščici, ustvari par elektron-vrzel. Ploščica ima ob straneh privarjena priključka, ki ju priključimo na izvir enosmerne napetosti U_0 (sl. 3). Ko vpadne svetloba na ploščico, se zaradi novo nastalih elektronov in vrzeli spremeni upor, in napetost na voltmetru se zmanjša. Zmanjšanje napetosti je tem večje, čim tanjša je ploščica in čim manjša je njena specifična prevodnost. Zato je potreben čim bolj čist polprevodniški material s čim daljšo življenjsko dobo elektronov in vrzeli in primerna debelina ploščice.

Z opisanim detektorjem je možno meriti infrardečo svetlobo z valovnimi dolžinami do $7\ \mu$ pri sobni temperaturi. S hlajenjem se občutljivost detektorja poveča, ker se zmanjša šum. Tako je pri $90\ ^\circ\text{K}$ neki detektor zaznal še svetlobni tok $2,6 \cdot 10^{-11}\ \text{W}$ z valovno dolžino $5,5\ \mu$. Uporabnost takih detektorjev pa je omejena tudi v kratkovalovnem področju, ker absorpcijski koeficient s padajočo



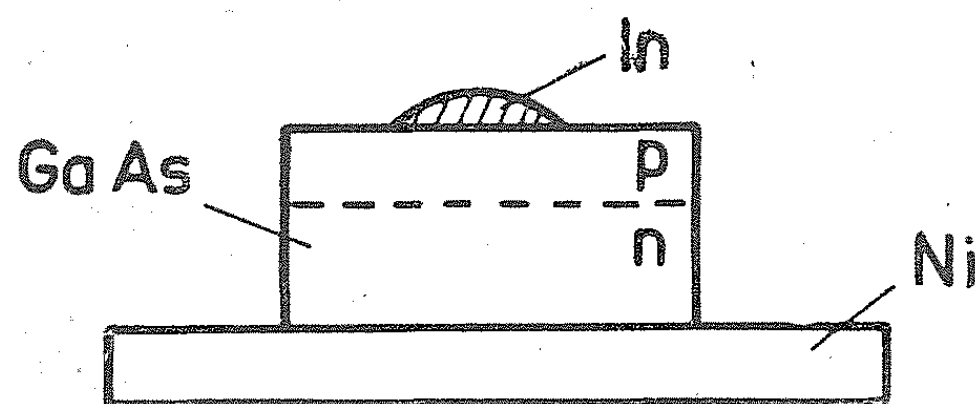
Sl. 3. Polprevodniški detektor za infra rdečo svetlobo. Pri absorpciji fotonov primernih energij nastanejo v ploščici pari elektron — vrzel. Prevodnost ploščice se zato spremeni in na voltmetru se pokaže znižanje napetosti, in je tem večje, čim večja je gostota vpadajočega svetlobnega toka.

valovno dolžino svetlobe hitro narašča. Zato se vedno več svetlobe absorbira tik pod površino detektorja in so pari elektronov in vrzeli kmalu izgubljeni.

Podobne detektorje za infrardečo svetlobo so naredili tudi s spojinami PbS (za valovne dolžine od vidnega dela spektra do $4\ \mu$), PbTe (najbolj občutljivi detektorji za območje od $3\ \mu$ do $5\ \mu$) in PbSe (za območje od $5\ \mu$ do $7\ \mu$).

Polprevodniška dioda kot izvir koherentne svetlobe

V polprevodniški diodi, po kateri teče v prepustni smeri električni tok, nastajajo novi in novi pari elektron-vrzel. Če pride do znatne rekombinacije elektronov in vrzeli, zapušča površino diode tok fotonov z energijami velikostne stopnje ΔE . Dioda GaAs seva pri tej *spontani emisiji* razmerom široko infra rdečo črto z vrhom pri $8470\ \text{\AA}$, to je nekako $1,47\ \text{eV}$. Za razpolovno širino črte so izmerili pri temperaturi tekočega dušika ($77\ ^\circ\text{K}$) okoli $145\ \text{\AA}$ in pri temperaturi tekočega helija ($4,2\ ^\circ\text{K}$) okoli $100\ \text{\AA}$. Energija fotonov je v povprečju nekaj $0,01\ \text{eV}$ manjša kot širina prepovedanega pasu v čistem GaAs ($\Delta E = 1,51\ \text{eV}$ pri $77\ ^\circ\text{K}$). To priča, da rekombinacija ne poteka naravnost, ampak gre za prehode elektronov iz valenčnega pasu na akceptorske nivoje, ki ležijo tik nad zgornjim robom valenčnega pasu.



Sl. 4. Maserska dioda

Spoj* p—n v diodi GaAs (sl. 4) dobijo z difuzijo akceptorskih atomov cinka, okoli $5 \cdot 10^{19}\ \text{cm}^{-3}$, v ploščico GaAs, ki je prvotno tipa n in vsebuje okoli 10^{18} donorskih atomov telurja na cm^3 . Za dovod toka služi spodaj ploščica iz niklja ali iz pozlačene zlitine kovar. Zgoraj pa je brbončica iz indija. Ploščina

*F. Herman: Spoj P—N, Obz. mat. fiz. 8, 20 (1961).

dotikalne ploskvice med indijem in GaAs je lahko samo nekaj stotin mm^2 . Ploščica iz GaAs pa je visoka komaj nekaj deset in široka kak mm .

Ko so spustili po taki diodi v prepustni smeri zelo kratkotrajne sunke električnega toka z zelo veliko gostoto, pri čemer je šibek enosmerni tok v prepustni smeri tekel stalno, so opazili nekaj nenavadnega. Gostota izsevanega svetlobnega toka pri določeni valovni dolžini se je močno povečala, obenem se je spektralna črta močno zožila. Tega pojava niso mogli pojasniti drugače kot z maserskim* delovanjem diode GaAs.

Tokovni sunki so trajali od nekaj stotink μs do nekaj μs in so bili kratki v primeri s povprečnim rekombinacijskim časom. Povzročili so, da je narasla koncentracija elektronov v valenčnem pasu močno nad ravnovesno koncentracijo. Prvi par, ki se je rekombiniral, je ustvaril foton, in vzbudil nadaljnje prehode. Pri taki *prisilni emisiji* je nastal blisk koherentne svetlobe. Prisilna emisija je prevladala nad spontano, ker je bil povprečni rekombinacijski čas dovolj dolg. Nekateri diode GaAs so imele stranske ploskve spolirane in kolikor se da vzporedne, da so se fotoni po večkrat odbili, preden so zapustili diodo. Do prisilne emisije je prišlo namreč le tedaj, če so bile izgube (uklon, odboj, sipanje na prostih nosilcih naboja itd.) v »resonatorju« dovolj majhne. Potrdilo, da je šlo zares za prisilno emisijo, so našli v precej izrazitem pragu. Pod gostoto toka več tisoč do $10\,000\text{ A/cm}^2$ pri 77°K ali več sto A/cm^2 pri 4°K je prevladovala spontana emisija, pri večjih gostotah pa je hitro narasel delež prisilne emisije. Razpolovna širina izsevane črte je bila pri največjih gostotah toka nekaj deset $\text{\AA}$ pri 77°K in nekaj $\text{\AA}$ pri 4°K ali še manj. Opazili so celo že črte s širino samo dela $\text{\AA}$.

Dioda GaAs je bila prva maserska dioda. Kmalu ji je sledila vrsta podobnih, npr. dioda InAs, ki seva pri $3\text{ }\mu$, in dioda InSb, ki seva pri $5\text{ }\mu$. S primernimi zlitinami intermetalnih spojin III B — V B je možno narediti maserske diode, ki sevajo koherentno svetlobo v določenem delu spektra. Diode s sestavom $(\text{Ga}_x\text{In}_{1-x})\text{As}$ naj bi sevale koherentno svetlobo z valovnimi dolžinami med $0,84\text{ }\mu$ in $3\text{ }\mu$. Naredili so diode te vrste za $2,2\text{ }\mu$. Diode s sestavom $\text{Ga}(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)$ pa sevajo v vidnem delu spektra, npr. pri $7100\text{ \AA}$.

Raziskovanje v zvezi z opisano zmožnostjo intermetalnih diod se je izredno razmahnilo. Njegov zadnji cilj bi bilo moduliranje (v oddajniku) in demoduliranje (v sprejemniku) koherentnega svetlobnega curka. To bi pomenilo skoraj neomejene možnosti za prenašanje sporočil, saj bi bilo pri svetlobi zaradi izredno visoke frekvence število razpoložljivih kanalov izredno veliko.

Medtem ko pri drugih omenjenih primerih za uporabo intermetalni polprevodniki niso edina možnost, kaže za zdaj, da pri maserskih diodah zanje ni nadomestila.

* S. Poberaj: Maserji, Obz. mat. fiz. 7, 108 (1960); G. Lahajnar: Optično črpanje, Obz. mat. fiz. 10, 34 (1963).

L i t e r a t u r a

- ¹ L. Pincherle and J. M. Radcliffe, Advances in Physics, 5, 271 (1956).
- ² R. A. Smith: Semiconductors, Cambridge Univ. Press (1959).
- ³ C. Kittel: Introduction to Solid State Physics, Wiley, New York (1963), str. 284—290.
- ⁴ H. Welker and H. Weiss, Solid State Physics 3, 1—74, Academic Press Inc., New York (1956).
- ⁵ B. Lax, Proc. Symp, on Optical Masers, Vol. 13, New York (Polytechnic Press) 1963, str. 119.
- ⁶ T. M. Quist et al., Appl. Phys. Letters 1, 91 (1962).

SPREMEMBA SPECIFIČNE UPORNOSTI KOVIN IN POLPREVODNIKOV V MAGNETNEM POLJU

M. MALI

Nuklearni inštitut J. Stefan, Ljubljana

Uvod

Kovinom in polprevodnikom se v magnetnem polju poveča specifična upornost. Ta pojav je tem večji, čim večja je gibljivost nosilcev toka v snovi. (Gibljivost je definirana kot povprečna hitrost nosilcev toka v cm s^{-1} , ki jo pridobijo v električnem polju 1 V cm^{-1} . Enota gibljivosti je $1 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$.) Nosilci toka v kovinah so prosti elektroni, v polprevodnikih pa so to elektroni v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu. Slednji se obnašajo kot pozitivno nabiti delci.

Gibljivost nosilcev toka je v večini kovin in polprevodnikih sorazmerno majhna (pod $10^3 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$) in je zato pojav spremembe specifične upornosti v magnetnem polju manj izrazit. Edino v polprevodniških intermetalnih spojinah elementov III. in V. skupine periodnega sistema (indijev antimonid InSb, indijev arzenid InAs) so gibljivosti velike, velikostnega reda $10^4 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Tem polprevodniškim snovem se v tehnično dosegljivih magnetnih poljih gostote do 10 000 gauss poveča specifična upornost tudi do 20-krat. Zaradi tolikšne spremembe specifične upornosti so ti polprevodniki praktično uporabni za izdelavo elektronskih množilnih elementov v analognih računskih strojih, modulatorjih, demodulatorjih, oscilatorjih itd.

Razlaga spremembe specifične upornosti v magnetnem polju

Na kratko si oglejmo izvor spremembe specifične upornosti v magnetnem polju! Do nadaljnjega zaradi enostavnosti obravnavamo paličast tokovodnik, v katerem so nosilci toka le elektroni. Tokovodnik je v magnetnem polju $B = (0, 0, B_z)$ pravokoten na njegovo daljšo os (x -os). Na obeh koncih je priključen na izvor napetosti, ki poganja skozenj električni tok. Na gibajoče elektrone zaradi magnetnega polja deluje znana Lorenzova sila $F = e v \times B$, ki jih odklanja pravokotno na magnetno polje in smer gibanja. Elektroni se pričnejo nabirati na eni strani tokovodnika, nasprotna stran pa se nabije pozitivno. Pravokotno na magnetno in električno polje $E = (E_x, 0, 0)$, ki poganja tok, se pojavi kot posledica nabojev na stranskih ploskvah dodatno električno polje, tako imenovano Hallovo polje $E_H = (0, E_y, 0)$. To novo električno polje se krepi toliko časa, dokler njegov vpliv na gibajoče se elektrone ne kompenzira Lorentzove sile. Takrat se ustavi tudi proces nabiranja elektrenine na stranskih ploskvah tokovodnika.

Iz ravnotežnega pogoja $eE_y + F_y = 0$ moremo izračunati Hallovo poljsko jakost E_y .

$$e(E_y - v_x B_z) = 0 \quad (1)$$

$$E_y = v_x B_z = \mu_n E_x B_z,$$

kjer pomeni μ_n gibljivost elektronov v $\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$, B_z magnetno poljsko gostoto v Vs cm^{-2} in E_x začetno električno poljsko jakost v Vcm^{-1} .

Ako izrazimo v_x z gostoto toka $j_x = en v_x$ (n je koncentracija elektronov, podana s številom elektronov na cm^3), dobimo še naslednjo zvezo:

$$E_y = \frac{j_x B_z}{en} = R_H j_x B_z$$

$$R_H = \frac{1}{en}$$
(2)

R_H imenujemo Hallovo konstanto.

V stacionarnem stanju se gibljejo elektroni zopet paralelno z x -osjo tokovodnika, kot da magnetnega polja sploh ni. Samo ekvipotencialne ploskve se zasujejo za Hallov kot

$$\text{tg } \vartheta = \frac{E_y}{E_x} = \mu_n B_z$$
(3)

Torej nam izbrani poenostavljeni model ne pokaže nikake spremembe specifične upornosti. Vzeli smo namreč prehud približek, da so vse hitrosti elektronov enake $v_x = \mu_n E_x$, to pa seveda ni res. v_x je le povprečna hitrost elektronov v električnem polju E_x . Hitrosti posameznih elektronov so zaradi termodinamskega ravnovesja, ki se vzpostavi prek trkov elektronov z nihajočo kristalno mrežo, porazdeljene po Boltzmanovi statistiki. Ker nastopajo različne hitrosti, ni več mogoča kompenzacija Lorentzove sile s Hallovim poljem za vsak posamezen elektron. Elektroni se odklanjajo levo in desno od smeri tokovodnika odvisno od njihove hitrosti, le oni s povprečno hitrostjo v_x ohranijo svojo smer gibanja. Odkloni zmanjšajo komponento hitrosti v smeri zunanega električnega polja, kar v celoti tudi zmanjša povprečno hitrost v_x in gibljivost μ_n . Slednje se opazi kot povečana specifična upornost ϱ , ki je obratno sorazmerna povprečni hitrosti v_x oziroma gibljivosti.

$$\varrho = \frac{E_x}{j_x} = \frac{E_x}{en v_x} = \frac{1}{en \mu_n}$$
(4)

S pomočjo elektronske teorije dobimo pri pogoju, da magnetno polje zelo malo spremeni hitrostno porazdelitev elektronov ($\mu_n B \ll 1$), za odvisnost relativne spremembe specifične upornosti od magnetnega polja izraz:

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \frac{4 - \pi}{\pi} \left(\frac{3\pi}{\pi} \right)^2 (\mu_n B)^2$$
(5)

Kadar so v tokovodniku nosilci toka elektroni in vrzeli, je sprememba specifične upornosti večja, kot v primeru samo ene vrste nosilcev toka. Elektroni in vrzeli se zaradi nasprotnih smeri gibanja odklanjajo na isto stran. Naboj na površini tokovodnika je zato manjši in s tem tudi Hallovo polje, ki je v tem primeru enako (ref. 4):

$$E_y = \frac{n \mu_n^2 - p \mu_p^2}{e (n \mu_n + p \mu_p)^2} j_x B_z$$
(6)

p in μ_p pomenita koncentracijo oziroma gibljivost vrzeli.

Zaradi zmanjšane Hallovega polja je vpliv magnetnega polja na gibanje nosilcev toka večji, zato je večja tudi sprememba specifične upornosti.

O. Madelung in H. Welker sta poiskala zvezo med $\frac{\Delta \varphi}{\varphi}$ in koncentracijo elektronov n ter vrzeli p . Dobila sta naslednjo enačbo:

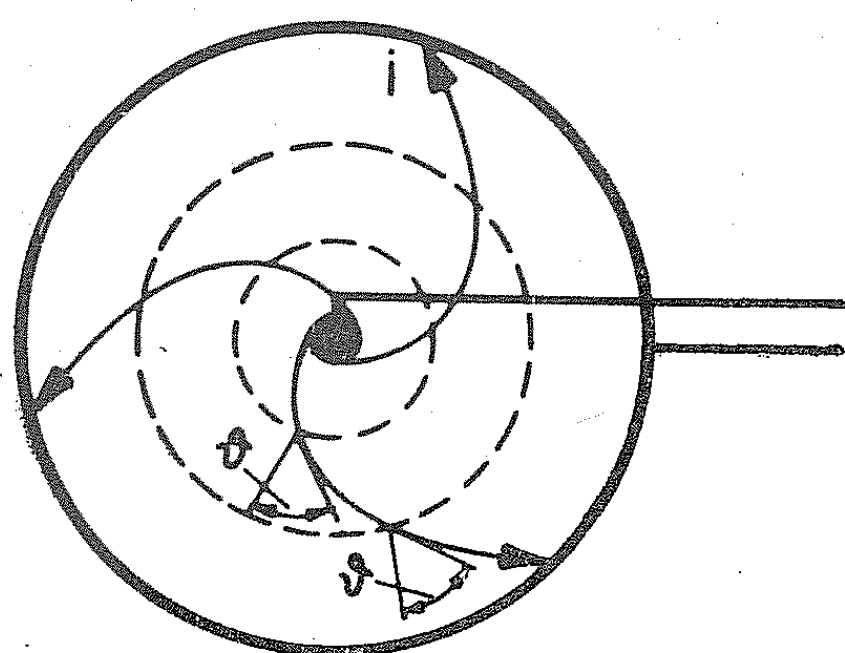
$$\frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \left(\frac{3\pi}{8} \right)^2 B^2 \left\{ \frac{4}{\pi} \frac{\mu_n^3 n + \mu_p^3 p}{\mu_n n + \mu_p p} - \left(\frac{d \ln n + u \ln p}{\mu_n^2 - \mu_p^2} \right)^2 \right\} \quad (7)$$

Izraz $\frac{\Delta \varphi}{\varphi}$ doseže maksimum pri naslednjem razmerju koncentracij elektronov in vrzeli:

$$\frac{n}{p} = \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\eta_p}{\eta_n} \right) + \frac{2 \eta_p}{\eta_n} \right] \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\eta_n}{\eta_p} \right) + \frac{2 \eta_n}{\eta_p} \right] \quad (8)$$

To razmerje pa se razen v primeru, ko sta gibljivosti elektronov in vrzeli enaki, razlikuje od razmerja, pri katerem izgine Hallovo polje $\left(\frac{n}{p} = \frac{\mu_p^2}{\mu_n^2} \right)$. Ker je večinoma gibljivost vrzeli dosti manjša od gibljivosti elektronov (v InSb, ki najbolj spremeni specifično upornost v magnetnem polju, je na primer razmerje $\frac{\mu_n}{\mu_p}$ velikostnega reda 100), bo Hallovo polje vedno prisotno, ko zavzame $\frac{\Delta \varphi}{\varphi}$ maksimum.

Hallovo polje lahko popolnoma odpravimo s primerno geometrično obliko tokovodnika. Ta naj ima obliko krožne ploščice z eno elektrodo v središču in z drugo na obodu (sl. 1).



Sl. 1. Oblika tokovodnika, ekvipotencialnih črt in poti nosilcev toka

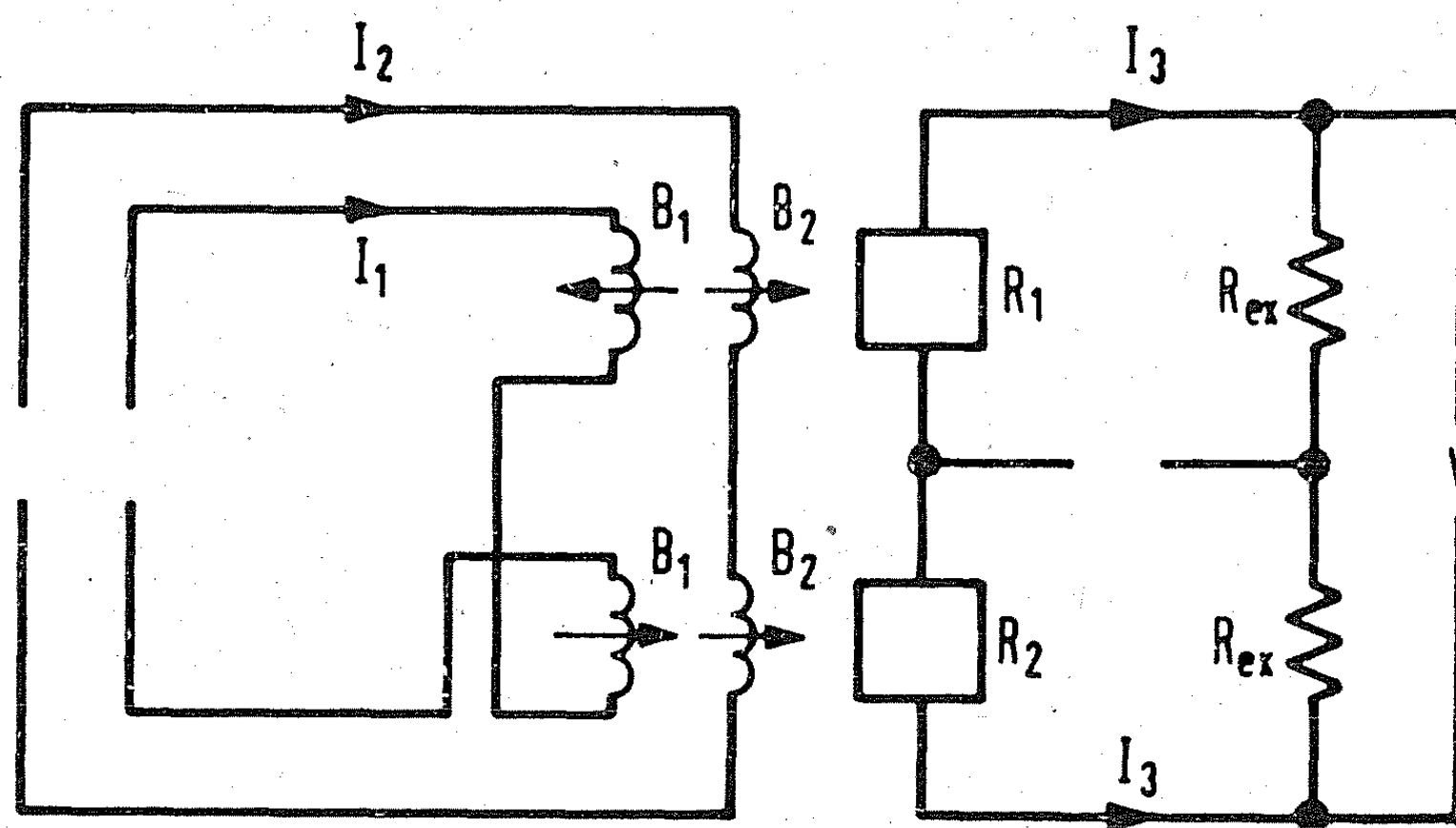
Magnetno polje, ki je pravokotno na ploščico, ne pokvari radialne simetrije električnega polja. Površinski naboj, značilen za paličast tokovodnik, se tu sploh ne more pojaviti. Električni tok ne teče več po najkrajši poti, temveč po poti, ki je proti prvi zasukana za Hallov kot in ima obliko logaritmične spirale. Ako krožno ploščico v mislih razrežemo najprej na določeno število N segmentov, ki jih omejuje logaritmična spirala, razmaknjena za kot $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{N}$ in nato

še na enako število krožnih izsekov, vidimo, da je dolžina segmentov večja za faktor $\cos \vartheta$, presek pa manjši za faktor $\cos \vartheta$ od dolžine oziroma preseka

krožnih izsekov. Torej se tokovodnik navidezno podaljša in stanjša, kar obojno prvotno obravnavano spremembo specifične upornosti v paličastem tokovodniku poveča še za faktor $\frac{1}{\cos^2 \vartheta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta$. Znatni vpliv oblike je opazen le tedaj, ko je $\operatorname{tg} \vartheta \geq 1$. V magnetnih poljih do 10 000 gauss je ta pogoj izpolnjen za snovi z gibljivostjo nad $10\,000 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Snovi s tolikšno gibljivostjo so le InSb in InAs in je zato pri njih tudi lepo vidna odvisnost specifične upornosti od oblike tokovodnika.

Opis elektronskega množilnega elementa, ki deluje na osnovi spremembe specifične upornosti v magnetnem polju

Kot sem že omenil v uvodu, je možno praktično uporabiti obravnavani pojav za izdelavo elektronskih množilnih elementov v analognih računskih strojih, modulatorjih, demodulatorjih, oscilatorjih itd. Na sl. 2 je shematičen prikaz vezja množilca z magnetoupornostnimi enotami.



Sl. 2. Shema triparametrskega množilca, katerega izhodna napetost U je sorazmerna produktu treh tokov I_1 , I_2 , I_3

To je v bistvu množilec treh parametrov.

Magnetoupornostna enota je narejena iz polprevodnika P(InSb), nameščena z rezo magnetnega jedra z dvema vzbujačnima navitjema. Dve enaki enoti sta zvezani v mostičnem vezju, podobno kot push-pull ojačevalnik. Magnetno polje v rezi magnetnega jedra ene enote je vsota, v drugi pa razlika magnetnih polj vzbujačnih navitij. Začetna upornost enot R_0 se zaradi različnih polj spremeni v R_1 in R_2 .

Iz enačb (5) in (7) sledi, da je

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + k_1 (B_1 + B_2)^2 \\ R_2 &= R_0 + k_1 (B_1 - B_2)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Dokler so polja šibka, torej ni nasičenja v jedru, smemo vzeti, da sta polji B_1 in B_2 v rezi jedra sorazmerni tokovoma I_1 in I_2 v vzbujačnih navitjih. R_1 in R_2 lahko zato zapišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + k_2 (I_1 + I_2)^2 \\ R_2 &= R_0 + k_2 (I_1 - I_2)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Ker vzamemo zunanji upor R_z mnogo večji od R_1 in R_2 , napetost na vhodu 3 požene praktično enak tok I_3 skozi obe tokovni veji. Vsota napetostnih padcev U na uporih R_1 in R_2 je:

$$U = I_3 (R_1 - R_2) = k_3 I_1 I_2 I_3 \quad (11)$$

Izhodna napetost je sorazmerna produktu treh tokov, to je treh parametrov. Običajno se spreminjata le dva parametra, tretji pa služi za nastavitev in za preverjanje sestavljene karakteristike.

Opisani množilec lahko zamenja podobne elemente, ki delujejo na osnovi Hallovega polja. Pri slednjih izrabljamo dejstvo, da je Hallova napetost sorazmerna produktu toka skozi polprevodnik in gostote magnetnega polja. Imamo množilec dveh parametrov, in sicer toka skozi polprevodnik in toka, ki vzbuja magnetno polje. Težave pri teh elementih nastopijo zaradi zelo majhne Hallove napetosti (nekaj mV). Elemente moramo ohlajevati, tako da so v polprevodniku navzoči le nosilci toka, ki smo jih namenoma vnesli z nečistočami. Pri višjih temperaturah se namreč ustvarjajo v polprevodniku pari elektron-vrzel, tako da sta navzoči obe vrsti nosilcev toka, to pa, kot je razvidno iz enačbe (6), zmanjša že tako majhno Hallovo napetost.

Teh težav pri novem množilcu ni. Izhodna napetost U more zavzeti precejšnje vrednosti, nadalje množilec lahko deluje pri sobni temperaturi, nemajhna prednost pa je tudi lažja nastavitvev.

L i t e r a t u r a :

1. H. Welker, M. Weiss: Solid State Phys., Vol. 3.
2. H. Welker, M. Weiss: Z. Physik, 138, 322 (1954).
3. O. Madelung, H. Welker: Z. angew. Physik, 5, 12 (1953).
4. W. Shockley: Electrons and Holes in Semiconductors, 215.
5. S. F. Sun: Electronics, 37, 66 (1964).

DVA NOVA NAČINA ZA MERJENJE TEŽNEGA POSPEŠKA

Cook je v Državnem fizikalnem laboratoriju v Londonu na nov način izredno natančno izmeril težni pospešek. Pri svojih poskusih je z vzmetno pištolo izstrelil stekleno kroglico navpično navzgor z začetno hitrostjo 5 m/s ali več. Meril je čas med prehodom kroglice mimo izbrane točke pri gibanju navzgor in prehodom mimo iste točke pri gibanju navzdol. To je storil za dve točki, med katerima je bila višinska razlika približno 1 m. Za navpični met navzgor z začetno hitrostjo v_0 je pot $s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$ pri gibanju navzgor in $s_1 = v_0 (t_1 + T_1) - \frac{1}{2} g (t_1 + T_1)^2$ pri gibanju navzdol. Pri tem naj ustreza $i = 1$ spodnji in $i = 2$ zgornji točki. Brez težav ugotovimo, da je $t_1 = v_0/g - \frac{1}{2} T_1$ in dalje $h = s_2 - s_1 = \frac{1}{8} g (T_1^2 - T_2^2)$. Končno je $g = 8 h / (T_1^2 - T_2^2)$.

Treba je bilo torej natančno meriti oba časovna intervala T_1 in T_2 in višinsko razliko h . Zgornjo točko sta določali dve vodoravni reži. Medtem ko je bila prva reža osvetljena, je za drugo režo stala fotopomnoževalka. Ko je bila kroglica pri gibanju navzgor prvič natančno med obema režama, je upodobila osvetljeno režo na fotopomnoževalko, ki je sprožila elektronsko uro. Ko je bila kroglica pri gibanju navzdol drugič med režama, je prek fotopomnoževalke ustavila uro. Na enak način je bila določena spodnja točka. Elektronska ura, ki je bila v zvezi s fotopomnoževalko pri spodnjih dveh režah, je pokazala čas T_1 . Elektronska ura pri zgornjih režah je pokazala čas T_2 . Obe dvojici rež sta bili vgrajeni v steber iz kosov litega kremenca, ki ima zelo majhen temperaturni koeficient linearnega raztezka. Razdaljo h med obema dvojicama rež so določili z interferometrom. Poskusi pri zmanjšanem tlaku so pokazali, da izmerjeni g ni bil odvisen od upora zraka.

Iz zgornje formule so dobili težni pospešek, ki je bil srednja vrednost $g(r_0 + h)$ in $g(r_0)$, pri čemer je r_0 radij Zemlje $6,4 \cdot 10^6$ m. Z upoštevanjem izraza za relativno spremembo $dg/g = -2 dr/r_0$ so izračunali g v višini laboratorijskih tal $g = (9,811\,818 \pm 0,000001) \text{ m/s}^2$. (V resnici so navedli še eno decimalno mesto, tako da je bila efektivna napaka 13 na zadnjem mestu.) S skrbnim merjenjem z reverzijskim nihalom so prej izmerili $g = (9,811\,832 \pm 0,000007) \text{ m/s}^2$. Treba bo še pojasniti, odkod razlika, ki je večja kot vsota efektivnih napak. Morda bo treba meriti v vakuumu. Vendar priča majhna efektivna napaka pri novem načinu, da gre za enega izmed najnatančnejših načinov za merjenje g .

Drugi način merjenja, o katerem so poročali Adlem in sodelavci, je sicer dosti manj natančen, a nič manj zanimiv. Pri njem ni bilo treba meriti razdalj in do rezultata so prišli v delu sekunde. Na prosto padajočo vodoravno kovinsko ploščo, ki je imela na zgornji strani lesen stožec s stabilizatorskimi krilci, so usmerili curek radarskih valov z valovno dolžino $\lambda = 8,7$ mm. Če je padala plošča s hitrostjo $v = v_0 + gt$, so imeli odbiti valovi zaradi Dopplerjevega pojava frekvenco $\nu' = \nu (1 + 2\nu/c)$, kjer je c hitrost svetlobe in $\nu = c/\lambda$. Mislimo si namreč lahko, da se je zrcalna »slika« oddajnika bližala sprejemniku z dvojno hitrostjo v . Odbite valove so v sprejemniku ojačili in jih mešali z valovi, ki jih je oddajal oddajnik. Tako so dobili utripanje, ki so ga usmerili in zgladili. Preostalo je nihanje s frekvenco, ki je enaka razliki frekvenc $\nu' - \nu = 2\nu/c$. Število utripov v določenem času $N(T) = 2(gT + v_0)T/\lambda$ so prešteli z elektronsko števno napravo. To so storili za dva časovna intervala T_1 in T_2 , tako da so

lahko izračunali pospešek $g = \frac{1}{2} \lambda (N_1/T_1 - N_2/T_2)/(T_1 - T_2)$. S tem načinom so izmerili g na $0,02 \text{ m/s}^2$ natančno. Obetajo, da bodo lahko nenatančnost zmanjšali na $0,0002 \text{ m/s}^2$.

L i t e r a t u r a

A. H. Cook: A New Absolute Determination of the Acceleration due to Gravity. *Nature* **208**, 279 (1965).

J. Adlem et al. *Electronics Letters* **1**, 63 (1965).

J. Strnad

ANTIDEVTERONI

Antidevteron je antidelec devterona. Sestavljata ga antiproton in antinevtron. Antibarion se od ustreznega bariona razlikuje po nasprotnem znaku barionskega števila, naboja, tretje komponente izospina in hipernaboja. Mirovna energija obeh je enaka, količine, ki so v zvezi z nabojem (npr. magnetni moment), pa imajo nasproten znak. Med antinevtronom in antiprotonom deluje enaka jedrska sila kot med nevtronom in protonom. Zato obstajajo antidevteroni in težja jedra iz antiprotonov in antinevtronov. V vakuumu so prav tako stabilna ali radioaktivna kot ustrezna navadna jedra.

Letos poleti so Dorfan, Eades, Lederman, Lee in Ting objavili, da se jim je posrečilo ugotoviti obstoj antidevteronov. Zelo velikopotezni poskus so izvedli pravzaprav z namenom, da bi našli kvarke. V tem pogledu je bil izid poskusa negativen. Kvarkov z razpadnimi časi, večjimi kot 10^{-7} s niso našli. Za kvarke, ki bi nastali v parih, so določili spodnjo mejo za mirovno energijo 4500 MeV pri naboju $-\frac{2}{3}e_0$ in 5000 MeV pri naboju $-e_0$, za delce, ki ne bi nastali v parih, pa 7000 MeV . Ta poskus se je od drugih poskusov, pri katerih naj bi odkrili kvarke, razločeval po tem, da so iz izmerjene hitrosti in gibalne količine delcev določili naravnost maso delcev. Dobljeni rezultati so bili vsaj stokrat natančnejši kot pri drugih poskusih.

V brookhavnskem sinkrotronu so protoni z energijo 30 GeV zadevali berilijevo tarčo. V njej so pri reakcijah nastali mezoni π in K in pari barion-antibarion. Pod kotom $4,5^\circ$ proti smeri vpadnih protonov so omejili ozek curek negativnih delcev. Gibalno količino delcev sta določila dva odklonska magneti, med katerima je bil kolimator. Gibalno količino delcev so kontrolirale še tri skupine odklonskih magnetov: en sam in dva para. Dve magnetni kvadrupolni leči sta poskrbeli, da se curek delcev na dolgi poti ni preveč razpršil. Curek so vodili po vakuumskih ceveh ali ceveh, polnjenih s helijem, kjer so to dopuščale naprave.

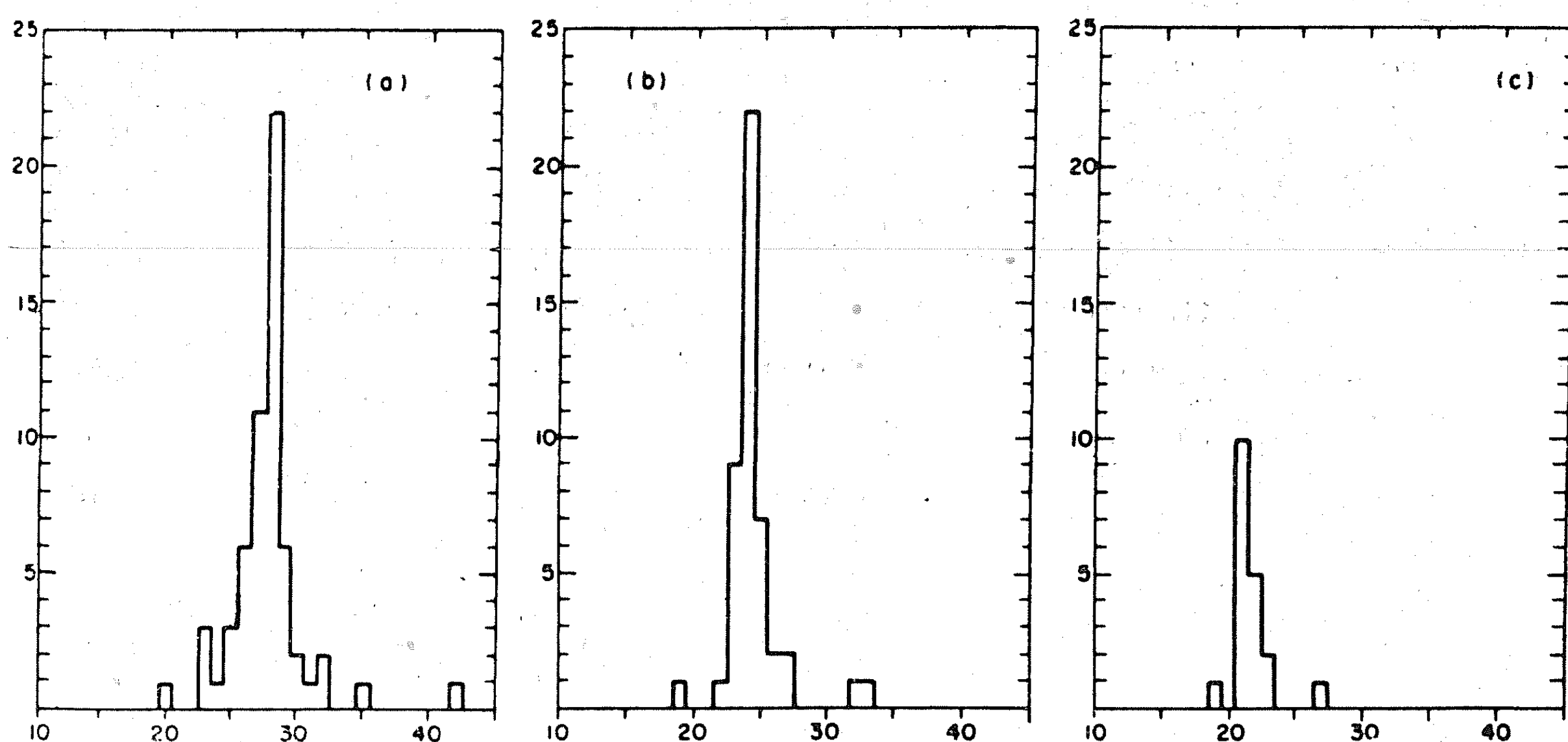
Na 120 m dolgi poti sta bila dva števca Čerenkova in deset scintilacijskih števecov 1—10. Prvi števec Čerenkova je bil 10 m dolg in polnjen s plinom (etilen) pri okoli 2 kp/cm^2 . Občutljiv je bil samo na hitre delce, to je na lažje delce (predvsem pione*), ki so imeli praktično hitrost svetlobe c . Na take delce so reagirale tudi koincidence med scintilacijskimi števci 1—4, 2—4, 3—4, 4—5. Precej težje delce, ki so imeli pri enaki energiji hitrost med $0,81 c$ in $0,96 c$, je zaznaval drug števec Čerenkova. Ta je bil dolg samo 5 cm in je bil napolnjen z mešanico vode in glicerina. Take delce so zaznavale tudi zakasnele koincidence med scintilacijskimi števci 4—7, 4—8, 4—9, 5—10 in 1—5. Posebna enota

* Glavna skrb je veljala pionom, saj so vsi kaoni razpadli med letom zaradi majhnega razpadnega časa.

je primerjala čas preleta med po dvema scintilacijskima števcema, ki sta bila po 33 m vsaksebi: 1—5, 3—8, 6—10. Proti koncu poti je bilo ob curku več kontrolnih antikoincidenčnih števecv. Ti so morali izločiti delce, ki so sprožili kako reakcijo.

Celotna naprava je registrirala le delec, katerega tir so določile štiri skupine odklonskih magnetov in 11 števecv. Delec ni smel sprožiti prvega števca Čerenkova in nobene koincidence za hitre delce. Delec je moral sprožiti drugi števec Čerenkova in vse zakasnele koincidence za počasne delce. $35 \cdot 10^{-9}$ s pred delcem ali po njem ni smelo biti nobenega hitrega delca. Poleg tega se ni smel sprožiti noben antikoincidenčni kontrolni števec. Končno se hitrosti delca na treh 33 m dolgih odsekih niso smele razlikovati za več kot 1 %. Celotna naprava je delovala še duhoviteje, kot lahko slutimo po tem skopem opisu. Zmožna je bila registrirati en težek delec med 10^{10} do 10^{11} pioni. Gibalno količino delcev so naravnali z odklonskimi magneti. Za tiste delce, ki jih je naprava registrirala, pa so zmerili hitrost iz časa preleta med števčema 1 in 10 (in za kontrolo še med števčema 2 in 9). Porazdelitev registriranih delcev z določeno gibalno količino po časih preleta, to je po hitrosti, so dobili kar na stokanalnem analizatorju.

Antidevterone so ugotovili pri gibalnih količinah 4,5 GeV/c, 5,0 GeV/c, 6,0 GeV/c, 9,0 GeV/c ($1 \text{ GeV/c} = 5,3 \cdot 10^{-19} \text{ kgms}^{-1}$ je enota za gibalno količino). O njihovem obstoju pričata predvsem dve dejstvi. Vrh v porazdelitvi delcev po hitrosti se je pojavil na istem mestu kot pri kontrolnih poskusih z devteroni v pozitivnem curku. Poleg tega je imela hitrost, ki je ustrezala vrhu, pravo odvisnost od gibalne količine. Iz znane formule $G = mv(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ brez večjih težav izračunamo $dv/dG = (1 - v^2/c^2)^{3/2}/m = (mc^2)^2 [(mc^2)^2 + (cG)^2]^{-3/2} c^2$. Če vstavimo $mc^2 = 1,86 \text{ GeV}$ in $cG = 5,5 \text{ GeV}$, sledi $dv/dG = 0,017 \text{ c}^2/\text{GeV}$. Pri poskusu pa so ugotovili (glej sl. 1) $dv/dG = (0,016 \pm 0,004) \text{ c}^2/\text{GeV}$. Napravili so še več poskusov, da bi izločili vsako drugo možnost.



Sl. 1. Porazdelitve antidevteronov po času preleta med števčema 1 in 10, ki sta bila v razdalji 75 m. Na ordinatno os je naneseo število delcev, na abscisno os pa zaporedna številka kanala v analizatorju. Vsak kanal ustreza časovnemu intervalu $5,6 \cdot 10^{-10}$ s. Porazdelitve so izmerjene pri gibalnih količinah 5 GeV/c (a), 5,4 GeV/c (b) in 6,0 GeV/c (c). S primerjanjem lege vrhov lahko določimo za dv/dG vrednost $0,016 \text{ c}^2/\text{GeV}$.

Ugotovili so, da je nastal pri gibalni količini 5 GeV/c en antidevteron na okoli 18 milijonov negativnih pionov. To je bilo okoli 2000-krat manj, kot so

prej napovedali. Toda izmerjenega razmerja ni bilo težko pojasniti z novo grobo oceno. Od drugih poskusov je bilo znano, da nastane pri gibalni količini 5 GeV/c en devteron na okoli 670 negativnih pionov. Nastanek antidevterona je manj verjeten, ker pri gibalni količini 2,5 GeV/c le pri vsaki stoti reakciji nastane antinukleon. Ker morata za tvorbo antidevterona nastati dva antinukleona, je tvorba antidevterona okoli 100^2 -krat manj verjetna od tvorbe devterona. Po tem sklepanju bi pričakovali en antidevteron na nekako 6,7 milijonov negativnih pionov. To se po velikostni stopnji ujema z izmerjenim razmerjem.

Morda so pri tem poskusu ugotovili tudi nekaj antitritonov, to je jeder iz dveh antinevtronov in antiprotona. Vendar je za antitritone gotovost mnogo manjša kot za antidevterone.

L i t e r a t u r a

D. E. Dorfan, J. Eades, L. M. Lederman, W. Lee, C. C. Ting: Search for Massive Particles. Phys. Rev. Letters **14**, 999 (1965); Observation of Antideuterons. Phys. Rev. Letters **14**, 1003 (1965).

J. Strnad

UVAJANJE NOVINEV V MATEMATIKO NA EKONOMSKI FAKULTETI V LJUBLJANI

Na Ekonomsko fakulteto v Ljubljani se lahko vpišejo brez sprejemnega izpita absolventi gimnazij in ekonomskih srednjih šol, s sprejemnim izpitom pa vsi drugi ne glede na prejšnje šolanje. Sprejemni izpit za vpis v študijsko leto 1965/66 je delalo 13 kandidatov, od katerih je 1 kandidat izpit naredil, 12 kandidatov pa je padlo. Vsi kandidati, ki so padli, so padli tudi pri matematiki.

V rednem in naknadnem vpisnem roku se je vpisalo v prvi letnik v zimski semester 395 slušateljev; od tega je 330 rednih in 65 izrednih slušateljev. V naslednjem poročilu obravnavam samo redne slušatelje. Zaradi tolikšnega vpisa novincev je prišla fakulteta v velike težave zlasti, ker ima premajhne prostorske kapacitete. Za nekaj predmetov, med njimi tudi za gospodarsko matematiko je fakulteti uspelo dobiti veliko predavalnico Fakultete za elektrotehniko.

Za vpis v poletni semester morajo redni slušatelji uspešno opraviti kolokvij iz politične ekonomije in iz matematike ali izpit iz družbene in pravne ureditve SFRJ in enega od obeh kolokvijev. Ti vpisni pogoji niso pretežki za poprečno marljivega in nadarjenega študenta. Namen teh pogojev je, da se že po prvem semestru izločijo s fakultete vsi tisti slušatelji, ki so se vpisali zgolj formalno, in vsi tisti slušatelji, ki pokažejo zelo veliko nezanimanje za študij ali zelo veliko nenadarjenost za študij na fakulteti.

Ker so pedagoška komisija, svet letnika in učno osebje takoj zelo resno začeli z intenzivnim pedagoškim delom, se je razmeroma kmalu izkristalizirala skupina okoli 260 slušateljev, ki so se vključili v delo in ki jemljejo študij zadosti resno.

Pri predavanjih iz gospodarske matematike je velika predavalnica do kraja zasedena, kljub temu, da so predavanja po urniku ob sobotah dopoldne. Zaradi povsem razumljivih mnogih neugodnih okoliščin vaj ni bilo mogoče razcepiti na manjše skupine; zato vodi vaje predavatelj sam za vse slušatelje obenem. Ob tako velikem številu slušateljev ni mogoče pri vajah nikakršno individualno delo s študenti. Študent dobi na vajah številne naloge s krajšimi ali daljšimi napotki, kako se naloge rešujejo; njegova dolžnost je, da jih potem sam dokonča med študijem doma. Poleg teh nalog daje predavatelj študentom periodične neobvezne programe; ti programi se nanašajo na obravnavano snov in jih študentje izdelujejo doma. Izdelani programi se lahko upoštevajo pri določevanju skupne ocene pri kolokviju.

Zaradi heterogenosti predizobrazbe slušateljev je predavatelj razporedil učne materije primerno prikrojil, da ne bi bila tvarina za mnoge slušatelje v začetku študija pretežka. Da bi uvedel predavatelj slušatelje na čim bolj smotrni način v študij matematike, je uporabil prvi mesec in pol nekako za uvod v matematiko. V tem uvodu je obravnaval v glavnem snov, ki se obravnava že v srednji šoli; prikrojil pa jo je v določeni meri potrebam ekonomije.

Do testa, ki je bil dne 20. novembra, je predavatelj obdelal tole učno tvarino:

I. poglavje: Števila in mere (2 tedna).

Naravna števila. Matematična indukcija. Realna števila. Spremenljivka. Ekonomske količine.

II. poglavje: Funkcije (4 tedne).

Koordinatni sistemi. Definicija funkcije. Geometrična ponazoritev funkcije. Parametri v funkcijah. Krivulje indifferene. Funkcije popraševanja in ponudbe. Linearna funkcija. Linearno programiranje. Poslovni računi: sklepni in verižni račun, družbeni račun, procentni račun, obrestni račun, terminski račun.

V zvezi s to učno stvarino so dobili slušatelji 6 programov s tole vsebino:

1. program:

- a) Dekadična in diadična števila.
- b) Razcepitev ulomkov v vsoto ulomkov.
- c) Uporaba sorazmerij pri ponazarjanju podatkov.
- d) Uporaba sorazmerij pri ponazarjanju podatkov.

2. program:

- a) Periodična decimalna števila in ulomki.
- b) Reševanje neenačbe.
- c) Pretvarjanje nemetrskih mer.
- d) Pretvarjanje nemetrskih mer.

3. program: Koordinatni sistemi:

- a) Ekonomska tolmačenja koordinatnega sistema.
- b) Računanje sestavin četverokotnika z znanimi oglišči.
- c) Ploščina peterokotnika z znanimi oglišči.
- d) Ponazoritev ekonomskih procesov z diagrami.

4. program: Parametri v funkcijah:

- a) Študij parametra v funkciji $y = a(x^2 - 1)$.
- b) Študij parametra v funkciji $y = x^2 - 1 + a$.
- c) Študij parametra v funkciji $y = (x - a)^2 - 1$.
- d) Študij parametrov v funkciji $y = ax + b/y$.

5. program: Linearno programiranje:

- a) Proizvodni problem reda 4×2 .
- b) Prehrambeni problem reda 4×2 .
- c) Transportni problem reda 2×2 .
- d) Transportni problem reda 2×3 .

6. program: Poslovni računi:

- a) Verižni račun.
- b) Družbeni račun.
- c) Obrestni račun.
- d) Terminski račun.

Po tem opravljenem uvodnem delu je predavatelj opravil testiranje znanja študentov, in sicer s temi nameni: Želel se je prepričati, kako obvladajo slušatelji predelano učno stvarino, ki je po svoji težavnosti pravzaprav srednješolska. Želel je ugotoviti morebitne razlike v znanju med slušatelji, ki so prišli z gimnazij in slušatelji, ki so prišli z ekonomskih srednjih šol. Želel je najti tiste slušatelje, ki res nič ne znajo in ki ne spadajo na fakulteto.

Zaradi takih namenov so bile dane pri testu razmeroma lahke naloge. Naloge so metodično in numerično lahko rešljive in ne skrivajo nikakršnih posebnih trikov za razreševanje. Test so opravljali slušatelji prostovoljno, in sicer samo pismeno; zaradi velikega števila prijavljenih slušateljev jih je bilo treba razdeliti na dve skupini. Vsaka skupina je dobila po štiri naloge, vendar iste vrste in enako težke oziroma bolje rečeno enako lahke.

Prva naloga zajema uporabo Pitagorovega izreka v geometriji in spada v 7. razred osnovne šole. Druga naloga zajema razreševanje sistema linearne in kvadratne enačbe in spada v 2. razred srednje šole. Tretja naloga spada v analitično geometrijo, obravnava pa samo linearno funkcijo in spada potemtakem največ v 3. razred srednje šole. Pri četrti nalogi gre za uporabo linearne interpolacije v ekonomiji.

V naslednjem navajamo posamezne naloge v obeh skupinah (a) in (b) in rezultate, ki so jih dosegli absolventi gimnazij (gimn.), absolventi ekonomskih srednjih šol (ekon.) in vsi skupaj.

1. naloga:

a) Izračunaj ploščino enakokrakega trikotnika, ki ima osnovnico $a = 58,2$ cm in stranico $b = 48,5$ cm.

b) Izračunaj ploščino romba, če meri obseg $o = 192$ cm in diagonalna $f = 58,2$ cm.

Rezultat:

	Število slušateljev	odl	pd	db	zd	nzd	Poprečna ocena
gimn.	199	87	40	23	22	27	3,7
ekon.	54	37	9	2	2	4	4,4
skupaj	253	124	49	25	24	31	3,8

Mnogi slušatelji so se izognili kvadriranju z množenjem kljub temu, da je predavatelj naglasil, da morajo kvadrirati. Število slušateljev, ki ne obvladajo te snovi, je vsekakor preveliko, ker bi moral to snov vsakdo obvladati. Rezultat pokaže, da obvladajo to snov bolje slušatelji iz ekonomskih šol kot pa gimnazijci; verjetno zato, ker je ta snov gimnazijcem časovno bolj odmaknjena in ker zahteva precej numeričnega računanja.

2. naloga: Razreši sistem enačb:

$$\begin{aligned} \text{a) } x + y &= 7, \\ 2x^2 + 5y^2 &= 98. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + y &= 8, \\ 2x^2 + 3y^2 &= 93. \end{aligned}$$

Rezultat:

	Število slušateljev	odl	pd	db	zd	nzd	Poprečna ocena
gimn.	199	153	16	14	10	6	4,5
ekon.	54	37	6	3	4	4	4,3
skupaj	253	190	22	17	14	10	4,4

Doseženi rezultat pri tej nalogi je znatno boljši od rezultata pri prvi nalogi. Gimnazijci so pokazali za malenkost boljši rezultat kot absolventi ekonomskih srednjih šol.

3. naloga:

a) Izračunaj tangens naklonskega kota, ki ga oklepata premica, ki gre skozi točki A (2,3) in B (8,1), in premica, ki seka abscisno os v točki C z absciso $x = 1$ in ki oklepa s pozitivno smerjo abscisne osi kot 45° . Izračunaj tudi presečišče premic.

b) Izračunaj tangens naklonskega kota, ki ga oklepa premica, na kateri ležita točki A (2,1) in B (6,5), in premica, ki gre skozi točko C (2,3) in ima smerni koeficient $-\frac{1}{3}$. Izračunaj tudi presečišče premic.

Rezultat:

	Število slušateljcev	odl	pd	db	zd	nzd	Poprečna ocena
gimn.	199	87	43	33	22	14	3,8
ekon.	54	17	6	9	8	14	2,9
skupaj	253	104	49	42	30	28	3,7

Pri tej nalogi so gimnazijci pokazali občutno boljše znanje kot absolventi ekonomskih srednjih šol. Vzrok temu tiči v dejstvu, da se na ekonomskih šolah analitična geometrija le v majhni meri obravnava.

4. naloga:

a) Popraševanje x po nekem blagu je linearna funkcija cene p : $x = ap + b$. Pri ceni $p_1 = 3$ din znaša popraševanje $x_1 = 111$ kg, pri ceni $p_2 = 10$ din znaša popraševanje $x_2 = 55$ kg. Določi funkcijo popraševanja in izračunaj popraševanje pri ceni $p = 7$ din.

b) Ponudba x nekega blaga je linearna funkcija cene p : $x = ap + b$. Pri ceni $p_1 = 0,80$ din znaša ponudba $x_1 = 0,78$ g, pri ceni $p_2 = 0,50$ din pa znaša ponudba $x_2 = 0,45$ g. Določi funkcijo ponudbe in izračunaj ponudbo pri ceni $p = 0,6$ din.

Rezultat:

	Število slušateljcev	odl	pd	db	zd	nzd	Poprečna ocena
gimn.	199	75	50	19	13	42	3,5
ekon.	54	21	8	2	6	17	3,2
skupaj	253	96	58	21	19	59	3,4

Snov, ki zadeva to nalogo, je predavatelj podrobno obdelal pri predavanjih in pri vajah. Kljub temu, da je snov po vsebini ekonomska, so pokazali gimnazijci nekoliko boljši uspeh kot absolventi ekonomskih srednjih šol.

Skupni rezultat celotnega testa podaja tabela:

	Število slušateljcev	odl	pd	db	zd	nzd	Poprečna ocena
gimn.	199	54	96	38	10	1	4
ekon.	54	9	24	18	3	—	3,7
skupaj	253	63	120	56	13	1	3,9

Iz skupnega rezultata sledi, da so gimnazijci nekoliko boljši od slušateljev ekonomskih srednjih šol.

Iz vsega dosedanjega dela pri predmetu gospodarska matematika je mogoče posneti te zaključke:

Po šesttedenskem pedagoško zelo intenzivnem uvajanju novincev v matematiko je znanje gimnazijcev še vedno sicer nekoliko boljše od znanja slušateljev, ki so prišli z ekonomskih srednjih šol, vendar pa je znanje v bistvu že precej izenačeno.

Izenačeno znanje slušateljev različnega izvora bo omogočilo v nadaljnjem dvigniti nivo pedagoškega dela pri matematiki na fakultetno višino.

V letniku je nekaj nad 200 slušateljev, ki so resno in vestno zagrabili za delo in ki bodo v splošnem lahko kos zahtevam fakultetnega študija.

Zanimivo je primerjati rezultate pri testih iz gospodarske matematike z rezultati pri testih pri politični ekonomiji, kjer pa je predavatelj takoj brez začetnega uvajanja začel obravnavati razmeroma težko in dokaj abstraktno snov.

Rezultati testa iz politične ekonomije:

	Število študentov	odl	pd	db	zd	zd/nz	nz	Poprečna ocena
gimn.	198	4	8	24	52	74	36	1,9
ekon.	58	1	5	9	11	23	9	2,0
skupaj	256	5	13	33	63	97	45	1,9

Iz teh rezultatov sledi, da glede uspehov gimnazijcev in absolventov ekonomskih šol ni znatne razlike, in da se je tudi pri tem predmetu resno lotilo dela nekaj nad 200 slušateljev. Formalno nižji uspehi pri politični ekonomiji izvirajo iz drugačne koncepcije testa in iz ostrejših kriterijev ocenjevanja. Na osnovi rezultatov obeh testov je mogoče okvirno ugotoviti zelo dobre, poprečne in zelo slabe slušatelje.

Na osnovi dosedanjega pedagoškega dela je računati, da se bo v poletni semester lahko pravočasno vpisalo nekaj nad 200 rednih slušateljev.

A. Vadnal

KOLIKO FIZIKE ZNAJO ŠTUDENTI V PRVEM LETNIKU MATEMATIČNO-FIZIKALNEGA ODDELKA?

Po ustaljeni navadi so študenti prvega letnika Matematično-fizikalnega oddelka tudi letos pisali preskusno vajo iz fizike. Ta naj bi pokazala, kako so se v srednji šoli naučili reševati preproste računske naloge iz fizike. Naloge so bile letos nekoliko manj šablonske.* Kot druga leta so študenti pri reševanju nalog lahko uporabljali učbenike in priročnike. Študenti so se morali podpisati na svoje izdelke, kar doslej ni bilo obvezno. Zaradi velikega števila študentov sta bili dve skupini. V prvi je od 56 vpisanih tehniških fizikov oddalo izdelke 47 študentov. V drugi skupini je od 34 vpisanih matematikov-fizikov na pedagoški predmetni skupini in 23 vpisanih tehničnih matematikov skupaj oddalo izdelke 48 študentov. Navajamo naloge za obe skupini. Pri vsaki nalogi je v oklepaju dodan odstotek študentov, ki so pravilno rešili tisto nalogo.

Tehnični fiziki. 1. Premo sinusno nihalo, ki niha z amplitudo 4 cm, je 1,2 s po prehodu skozi mirovno lego 2 cm oddaljeno od mirovne lege. Kolikšen je nihajni čas? (30 %)

2. V kalorimetrsko posodo, v kateri je že 0,5 kg vode s temperaturo 20 °C, dolijemo 0,2 kg vode s temperaturo 80 °C. Zmesna temperatura je 35 °C. Kolikšno toploto moramo dovesti kalorimetrski posodi, da se segreje za 1 stopinjo? (26 %)

3. Baterija poganja po uporniku za 10 Ω tok 100 mA. Ko nadomestimo upornik z drugim za 20 Ω , teče tok 70 mA. Kolikšen je upor baterije in kolišna njena gonilna napetost? (55 %)

4. V projekcijskem aparatu je zbiralna leča z goriščno razdaljo 8 cm. Leča je 8 m oddaljena od zaslona. Kolikšna mora biti razdalja diapozitiva od leče, da dobimo na zaslonu ostro sliko? Kako visoka je slika, če je diapozitiv visok 24 mm? Nariši! (64 %)

* Obz. mat. fiz. 10, 142 (1963), Obz. mat. fiz. 11, 190 (1964).

5. Prostornina kroglastega milnega mehurčka naraste vsako sekundo za 10 cm^3 . Za koliko milimetrov se v 1 s poveča radij mehurčka, ko je prostornina 100 cm^3 ? (9 %)

6. Kolikšno delo opravi centripetalna sila, ki deluje na enakomerno krožeče telo, pri enem obhodu? (4 %)

Matematiki-fiziki, tehnični matematiki. 1. Kolikšen čas poteče med trenutkom, ko premo sinusno nihalo doseže amplitudo 10 cm, in trenutkom, ko je odklon 7 cm, če je nihajni čas 2 s? (12 %)

2. Kolikšno maso ledu s temperaturo 0°C moramo vreči v 2 kg vode s temperaturo 50°C , da se voda ohladi za 10° . Nič toplote naj ne gre v izgubo. Talilna toplota ledu je 80 kcal/kg . (36 %)

3. Ampermeter z uporom 6Ω ima obseg 10 mA. Kako moramo priključiti upornik, da bomo s tem ampermetrom lahko merili tokove do 100 mA? Nariši vezje in izračunaj upor upornika! (37 %)

4. V fotoaparatu je leča z goriščno razdaljo 5 cm. Za koliko milimetrov moramo premakniti lečo, če smo sprva fotografirali zelo oddaljene predmete, pa želimo fotografirati predmete v razdalji 2 m? Nariši! (33 %)

5. Kamen spustimo v vodnjak. Po 4 s zaslišimo pljusk. Kako globok je vodnjak? Upoštevaj hitrost zvoka 300 m/s ! (18 %)

6. Črpalke črpajo vodo v pretočno polje kanala in dvignejo s tem ladjo za 5 m. Kolikšna je razlika dela, ki ga opravijo črpalke pri dviganju 10 000-tonske ladje, in dela, ki ga opravijo črpalke pri dviganju 1000-tonske ladje? (2 %)

V prvi skupini je študent v povprečju pravilno rešil skoraj dve nalogi, v drugi pa samo eno. Seveda ima ta podatek pomen samo, če so bile naloge v obeh skupinah vsaj približno enako težavne. Vsem študentom, ki so imeli manj kot dve pravilno rešeni nalogi, smo svetovali, naj še enkrat premislijo, če so si izbrali študij po svojih zmožnostih. Opozorili smo jih tudi na težave, ki jih čakajo pri pismenih vajah med letom. V prvi skupini je bilo 21 takih študentov, v drugi pa 33. Po podatkih iz prejšnjih let je komaj kaka desetina študentov, ki so imeli na začetku težave, končala prvi letnik. Morda bi kazalo kdaj v prihodnosti razmisliti o pravem sprejemnem izpitu, ki bi marsikateremu študentu prihranil izgubljeno leto.

Na koncu naj opozorimo še na problem, ki se je zdel pereč že lani. V šolskih letih 1961/62 do 1964/65 je na tehnični fiziki in na tehnični matematiki po prvem letu pri izpitu iz fizike uspel vsak drugi ali tretji študent. Povprečna ocena je bila 3,7. Podobno je bilo v letih 1961/62 in 1962/63 tudi na pedagoški predmetni skupini. Toda v letih 1963/64 in 1964/65 je na tej predmetni skupini izdelal samo vsak deseti študent. Povprečna ocena pa je bila 2,7. Težko je na hitro najti in analizirati vzroke za tako stanje. Poleg tistih, ki smo jih navedli lani, je med njimi verjetno tudi neustrezen način pri razdeljevanju štipendij. Najbrž pa se le malokdo ne bo zavedel škode, ki utegne nastati, če se stanje ne bo izboljšalo.

M. Gros, M. Hribar, J. Strnad

DOMACE VESTI

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV NA OBČNEM ZBORU IN PO NJEM

Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS je bil letos že 25. septembra v predavalnici katedre za matematiko v Ljubljani, Trg revolucije 11. Naš letni obračun smo morali predstaviti na zgodnjo jesen zaradi IV. kongresa matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, ki je bil od 4. do 9. oktobra.

Predavalnica je bila polna članov našega društva iz skoraj vseh večjih krajev Slovenije. Bilo nas je okrog 50 po številu. Naši občni zbori so si močno podobni, pa vendar toliko različni, ker imamo vedno kaj prav posebno razveseljivega, da niso dolgočasni in samo formalni.

Dolgoletni predsednik našega društva dr. A. Vadnal je po pozdravnem nagovoru predlagal v delovno predsedstvo naslednje tovariše: Rupnika, dr. Prijatelja in Kastelica. Zapisnik je vodil C. Velkovrh.

V uvodnem govoru je dr. Vadnal na kratko opisal dejavnosti društva in njegov uspeh v preteklem letu. Osnovne dejavnosti društva, kot so: izdajanje Obzornika za matematiko in fiziko ter knjig zbirke Sigma, matematični krožki za srednješolce in predavanja za srednješolske profesorje, so bile tudi letos uspešne. S posebnim zadovoljstvom je govoril o Obzorniku, ki izhaja že enajsto leto ob večjih in manjših težavah, in pa o knjižni zbirki Sigma, v kateri bo letos izšla že štirinajsta knjiga. Torej smo že 14 različnih matematičnih področij približali mladim ljudem. To delo pa bomo morali nadaljevati še z večjim elanom, saj smo dosegli velik uspeh in podporo več institucij.

Sigma smo lahko izdajali le s subvencijami Sklada za pospeševanje založništva, ki nam je bil še prav posebno naklonjen zadnje leto. Zaradi ugleda in podpore, ki ga uživata naše društvo in knjižna zbirka Sigma, bomo že v naslednjem letu pritegnili k sodelovanju tudi fizike in astronome. S svojimi deli bodo prav lahko še povečali pestrost naše zbirke in zanimanje zanjo.

Ker te knjige idealno posredujejo svojo snov različnih panog mladini, bomo morali obliko Obzornika toliko spremeniti, da bo tudi ta potrebnejši, koristnejši in bolj zaželen med dijaki, študenti in učitelji. Problemov in težav je v šoli vedno toliko, da bi jih lahko vsaj nekaj reševali s sodelovanjem naše revije. Zato vabimo vse, ki bi s svojimi idejami pripomogli Obzorniku do najbolj primerne oblike.

Tov. predsednik je omenil težave, ki so nastale z organizacijo tekmovanja »Znanost mladini« v okviru Ljudske tehnike Slovenije. Le-ta so bila istočasno z našim tekmovanjem. Ker so naloge teh dveh tekmovanj različne, oboja lahko obstajata in zato ne moreta potekati istočasno. Naše društvo organizira tekmovanje, na katerem kandidati pokažejo spretnost v hitrem reševanju numeričnih nalog iz matematike in fizike. Pri drugem pa morajo dijaki izdelati domače delo, ki ga predložijo in kasneje zagovarjajo.

Na občnem zboru so sledila poročila odbornikov: tajnika F. Šušteršiča, blagajnika V. Sladiča, tehničnega urednika Obzornika za matematiko in fiziko F. Kvaternika, načelnika sekcije za popularizacijo matematike in fizike S. Uršiča ter načelnice sekcije za dvig pouka. Ker je bila M. Potiskova odsotna, je njeno poročilo prebral F. Šušteršič.

Sekcija za dvig pouka je imela letos le tri sestanke in tečaj za linearno programiranje na računskem stroju Z-23. Večkrat pa so naši člani sodelovali pri aktivih na srednjih in osnovnih šolah po Sloveniji. Veliko zanimanje, ki so ga pokazali udeleženci takih večerov, kaže, da je treba v naslednjih letih to še pospešiti v vseh možnih oblikah. Enako velja za širša predavanja iz naše stroke, ki bodo letos v okviru Prirodoslovnega društva Slovenije.

Matematična šola za prvošolce in predavanja za višje razrede srednjih šol so bila, kot že vrsto let, dobro obiskana. Zaključili smo jih s tekmovanjem. Najboljši pa so odšli na zvezno tekmovanje v Beograd in celo na olimpiado v Berlin.

Tudi letos smo že pričeli z matematičnimi predavanji za dijake. Našo dejavnost pa bomo razširili po vsej Sloveniji. Posamezni predavatelji bodo obiskali večje kraje in svoje predavanje ponovili. Dijaki pa bodo dobili nekaj izvodov biltena, v katerem bodo fizične naloge, primerne za tekmovanje. Tako se bodo še lažje pripravili na spomladansko tekmovanje. Po poročilih smo v debati zvedeli, da so v Kranju z velikim uspehom priredili za predavatelje na osnovnih šolah seminar z eksperimenti iz fizike, katerega se je udeležilo preko 30 predavateljev. Drugo pa je bilo sporočilo, da je društvu uspelo prodati s popustom do občnega zbora 700, do danes pa že preko 900 knjig zbirke Sigma. Knjige bodo še tudi v bodoče na razpolago v matematični knjižnici.

Na koncu občnega zbora pa so izbrali še nov upravni odbor društva in nov nadzorni odbor. Prav tako so določili 17 kandidatov za skupščino Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, ki je bila po končanem kongresu v Sarajevu.

Nov odbor je sestavljen takole: dr. Alojzij Vadnal, predsednik, Jože Povšič, podpredsednik, Ciril Velkovrh, tajnik, Fran Račič, blagajnik, Milica Potisek, načelnik sekcije za dvig pouka, Marjan Vagaja, načelnik sekcije za popularizacijo matematike in fizike. V nadzornem odboru pa so ostali Duša Gajšek, Lojze Bernik in Ivan Štalec.

Ciril Velkovrh

IV. KONGRES MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV JUGOSLAVIJE V SARAJEVU OD 4. DO 9. OKTOBRA 1965

Nacionalni kongresi naj bi nudili splošen pregled trenutnega stanja neke stroke v državi; primerjava s prejšnjim kongresom bi povedala relativno stopnjo napredka, ob vrednotenju strokovnih in predvsem obzornih referatov vidnejših znanstvenikov iz tujine bi pa utegnili določiti mesto in pomen domačih znanstvenikov glede na povprečno mednarodno raven. Poizkus, da bi en sam udeleženec kongresa na podlagi osebnih vtisov podal splošno oceno kongresa, bi dal zagotovo nepravilno sliko. Vendar so nekatere ugotovitve na dlani:

Sodeč po številu referatov (okoli 390 nasproti 23 ob prvem kongresu na Bledu) in pestrosti vsebine je razvoj matematično fizikalnih znanosti pri nas v nenehnem vzponu;

na področju matematike goje naši strokovnjaki vse njene veje in celo njene naj sodobnejše aspekte;

fiziki so nastopili z večjim številom referatov kot matematiki; poleg atomskih inštitutov so bili to pot močno zastopani še fakultetni inštituti in katedre, in to z referati iz eksperimentalne in teoretične fizike;

prvič sta se na kongresu pojavili sekciji za fiziko plazme in za geofiziko; pri astronomih se krepijo težnje, da bi se temeljiteje seznanili z metodami astrofizike in pouk astronomije tesneje naslonili na teoretično fiziko;

po številu udeležencev in referatov niso bile matematične in fizikalne ustanove v Sloveniji na kongresu zastopane v sorazmerju z značajem njihovih dosežkov; splošen vtis je celo bil, da so strokovnjaki iz Slovenije praktično odsotni.

Kongresa se je udeležilo okoli 1200 strokovnjakov iz naše države in 25 gostov iz tujine (14 matematikov in 11 fizikov).

Svečana otvoritev kongresa je bila v novi dvorani Delavske univerze »Đuro Salaj«, ki je bila prenapolnjena, kljub temu, da ima 800 sedežev, ker so se otvoritve udeležili še številni meščani in študentje Sarajevske univerze. Kratkemu nagovoru predsednika Zveze prof. dr. D. Blanuše in predsednice pripravljalnega odbora prof. Vere Šnajder so sledili pozdravni govori zastopnikov strokovnih društev iz tujine.

Ker so se bile na lanskem plenumu pojavile težnje, da bi matematiki in fiziki imeli svoje ločene kongrese, je zvezni odbor določil, da bi bila na otvoritveni seji tri predavanja za vse udeležence, ki naj bi z njimi poudarili tesno medsebojno povezavo med ustreznimi znanostmi. Govorniki so bili primorani, da svoja že napisana predavanja skrajšajo skoraj na polovico, ker se je bila svečanost iz neznanih vzrokov pričela s precejšnjo zamudo. V prvem predavanju »Matematika danes« je prof. Đ. Kurepa kratko orisal buren razvoj novih matematičnih metod in njihov prodor v druge discipline, celo v družbene vede, kar zastavlja matematikom nalogo, da spremenijo programe in metodiko pouka in da predvidijo nove programe za širok spekter učnih skupin od filoloških do družbenih, vse z geslom »matematika vedno in povsod«. Prof. A. Milojević je v predavanju »Fizika danes« opozoril na to, da število dosežkov in publikacij iz fizike narašča za tretjino hitreje kot splošna uporaba energije in celo petkrat hitreje od števila publikacij v družbenih vedah. Fizika je fundamentalna znanost za vse naravoslovne in tehnične vede. Seči je treba po bolj učinkovitih učnih postopkih, ki naj posredujejo študentu v kratki dobi študija dovolj obsežno, predvsem pa temeljito znanje, obenem pa še spoznanje o tesnem prepletanju fizikalnih dognanj z ustvaritvami tehnike in z duhovno nadgradnjo družbe. V predavanju »Astronomija danes« je skušal prof. F. Dominko utemeljiti že od drugih izrečeno trditev, da se revolucija v sodobni astronomiji more primerjati samo z dobo Galileja. Podobno kakor tedanje odkritje daljnogleda nudijo sodobne raziskovalne metode, od radijske astronomije do kozmičnih raket, načelno nova sredstva pri spoznavanju fizikalnih zakonov materije v vesolju; nedavno odkritje zelo oddaljenih galaksij — kvazistelarnih objektov in stelarnih galaksij — daje astronomu možnost, da že v bližnji bodočnosti ugotovi metrično strukturo prostora časa. Popoldne istega dne je prof. I. Supek v predavanju »Zakonitost moderne fizike« orisal razvoj fizike od prvih pojavov krize v klasični fiziki pa vse do še odprtih vprašanj klasifikacije elementarnih delcev in skušal izluščiti zakonitost tega razvoja.

Strokovno delo kongresa je potekalo v posameznih sekcijah, ki so zasedale v prostorih novega fizikalnega inštituta. Na svojih sedmih sekcijah so matematiki obravnavali 85 strokovnih referatov in poslušali nekaj obzornih predavanj. Kakor je bilo že rečeno, se ti referati nanašajo na zelo širok spekter matematičnih panog. Zapažene so bile razprave nekaterih naših mladih znanstvenikov.

Iz Slovenije so imeli referate dr. A. Vadnal (dva iz numerične analize), dr. A. Suhadolc (Fourierove transformacije), Z. Bohte (iz funkcionalne analize) in dr. T. Skubic (o računskem centru v Ljubljani).

S področja fizike je bilo 144 strokovnih referatov v petih sekcijah (teorijska, nuklearna fizika, fizika trdnih teles, fizika plazme, optika). O delu matematičnih in fizikalnih sekcij bi lahko izčrpneje poročal, kdor je zasledoval njihovo delo.

Najbolj živo je bilo zanimanje za vprašanja pouka matematike in fizike; celo na cesti ali pri omizju je bilo lahko naleteti na skupine, ki so vneto nadaljevale razgovor o mislih in ugotovitvah nekaterih referentov. Vse splošnejša uporaba matematike, posebno nekaterih najnovejših metod v sodobni družbi, zahteva modernizacijo učnih programov in nove prijeme v pouku. Tudi pri nas so bili v tej smeri storjeni odločni koraki; do cilja pa je še trnova pot. Razlogov za to je več: zaradi ponovnih in nezadostno dognanih šolskih reform naša šola še ni dobila ustaljene podobe; splošni strokovni nivo učiteljstva, posebno na podeželju, ni na primerni višini, saj se je pouk celo na nekaterih višjih šolah šele v zadnjih letih prilagodil potrebam časa. Razumljivo je, da so na kongresu s posebno pozornostjo poslušali poročila o modernizaciji pouka drugod po svetu. Prof. Engel (Rostock), prof. G. Papy (Bruxelles) in prof. U. Morin (Padova) so kritično ocenjevali težave in uspehe učnih reform v lastnih državah.

O problemih pouka matematike so razpravljali v štirih sekcijah (za osnovne, srednje, tehnične, višje šole) (74 referatov). Naj navedem le nekatere misli in sugestije, ki so žele splošno odobravanje. Problem modernizacije pouka ne moremo rešiti v okviru ene same republike; potrebni so skupni organizirani napor v tesnem sodelovanju s priznanimi strokovnjaki iz vsega sveta. Za vsebino stalnih seminarjev, ki jih posamezne republike vodijo za strokovno spopolnjevanje učiteljev in profesorjev, je treba pripraviti bolj smotrne in dolgoročne programe. Za mlajše učitelje in profesorje, ki so se izkazali v pedagoškem udejstvovanju, naj bi vpeljali pri fakultetah posebno učno smer na tretji stopnji za njihovo strokovno spopolnjevanje. Izrečena je bila sugestija, naj bi organizirali stalni poletni seminar o sodobnih vprašanjih pouka matematike na vseh stopnjah; po udeležencih in predavateljih naj bi imel seminar mednarodni karakter. V pogledu študija matematike in fizike na tretji stopnji svetujejo, naj bi kritično ocenili dosedanje izkušnje in presodili možnost, da se tesneje poveže s strokovnimi inštituti v tujini in s tujimi priznanimi predavatelji. V poročilu o pouku matematike na tehniških fakultetah sta dva referenta prišla do podobne ugotovitve: do reforme sta se postopoma izboljševala kakovost pouka in obseg programov; uvedba dvostopenjskega študija je ta proces zavrla.

Na kongresu je prvič delovala še sekcija za delo z mladimi matematiki. Dosedanje udejstvovanje republiških društev v tej smeri je bilo pozitivno ocenjeno. Pred nekaj leti je bilo padlo število študentov matematike na zaskrbljujoče nizko raven. Prav prizadevnosti republiških društev je treba pripisati sedanje večje zanimanje mladine za študij te stroke.

V sekciji za pouk fizike (33 referatov) so predvsem ocenjevali metodo pouka, ki jo je izdelala komisija okoli 300 ameriških pedagogov in znanstvenikov pod vodstvom profesorjev G. Zahariasa in F. Friedmana, oba profesorja za fiziko na Massachusetskem tehnološkem inštitutu. Metoda je znana pod kratico PSSC (= Physical Science Study Committee). Razlikuje se od drugih

po splošni zasnovi, po izboru materiala in po načinu prikaza. Osnove klasične fizike so prikazane tako, da se učencu vzporedno posredujejo tudi dosežki sodobne fizike. Težnja avtorjev je, da poudarijo celovitost in enotnost fizike kot vede o materiji, zato črpajo dokazni material tudi iz sorodnih področij teoretičnih in uporabnih znanosti. Učenca privajajo k samostojnemu eksperimentiranju z enostavnimi sredstvi. Fiziko prikazujejo v dinamiki njenega nastajanja, preko blodenj, zmot in težav do uspehov in še nerešenih vprašanj.

Dve naši gimnaziji (v Beogradu in Zagrebu) sta dve leti preizkušali to metodo. Na seminarju, ki je trajal mesec dni, so tik pred kongresom pregledovali lastne ugotovitve ob vzpodbudnem in kritičnem sodelovanju strokovnjakov iz tujine (prof. J. Cross iz Anglije, prof. Friskopp iz Švedske, prof. A. V. Peryškin iz Moskve in drugi). Na samem kongresu je širša strokovna javnost ocenjevala zaključke seminarja; opozarjala je na nekatere pomanjkljivosti metode in menila, da jo moremo vpeljati v naših šolah le v dokaj zoženem obsegu.

O pouku fizike na strokovnih šolah v Sloveniji je poročal prof. F. Kvaternik. Po presoji pomanjkljivosti v tem pouku je predlagal nekatere izboljšave: izdelati je treba minimalni učni program, ki naj bi bil obvezen za vse šole in predpisati minimalno število ur; pouk fizike je treba koordinirati s strokovnimi predmeti; vsaka šola mora imeti posebno predavalnico in laboratorij za praktične vaje; vaditi je treba učence v reševanju računskih nalog, pisati šolske naloge, uskladiti simboliko v fiziki in v sorodnih predmetih ter se strogo držati že uzakonjenega merskega sistema po Giorgiju.

Na kongresu sta še delovali dve manjši sekciji: za geofiziko (12 referatov) in »Razno« (biofizika, fizika atmosfere, termodinamika in akustika). Tu je treba pripomniti, da je Zvezni odbor pravočasno razglasil, naj bi na kongresu sodelovali tudi strokovnjaki sorodnih strok (meteorologi, geofiziki različnih smeri in drugi). Pozivu se je odzvala z maloštevilnimi izjemami samo Hrvatska. Razlog: edino na Hrvatskem imajo strokovna društva skupno »strešno« organizacijo v »Prirodoslovnem društvu«, ali pa je med strokovnimi društvi nekakšna personalna unija (na primer predsednik društva matematikov in fizikov Hrvatske je po stroki geofizik). V Srbiji in Sloveniji pa so strokovna društva med seboj strogo razmejena.

Posebej je še delovala astronomska sekcija (31 referatov). Večina naših astronomov se udeje v observatoriju v Beogradu, ki ima v svojem delovnem načrtu skoraj izključno astrometrijske probleme (natančne meritve leg točke na nebu ali na Zemlji). Strokovno kulturo so si pridobili s študijem na Beograjski univerzi, kjer je astronomska učna skupina samostojna od prvega letnika naprej in je v njej študij matematike in fizike nezadostno zastopan. Nekateri beograjski astronomi z bolj poudarjeno fizikalno strokovno kulturo imajo drugačno stališče do organizacije pouka astronomije in nastopajo zoper sedanji sistem študija. Nepravilno postavljena antiteza — astronomija ali astrofizika — je bila močno zaostрила nasprotja. Da bi ustvarili bolj primerno vzdušje, ki naj bi omogočilo mirnejše razpravljanje o tem vprašanju na samem kongresu, je bila na naš predlog postavljena posebna komisija, ki jo je vodil prof. F. Dominko. Komisija je načrtovala referate in referente. Vprašanje, kaj naj tvori osnovo strokovni kulturi astronoma in kdaj naj se prične ožja specializacija, je bilo predmet dveh daljših referatov (V. Oskanjan in F. Dominko), katerim je sledila dokaj živahna razprava žal z edinim zaključkom,

da naj posebna komisija to vprašanje še nadrobneje prouči. Mirnejša je bila razprava o ciljih pouka astronomije v srednji šoli. Nekateri so bolj poudarjali njen ideološki pomen, drugi pa so opozarjali na nekatere metodološke težave. Dr. Đ. Teleki je obširno poročal o stanju raziskav na področju astronomije pri nas in o perspektivah znanstvenega dela. Obstoječi instrumentarij na našem največjem observatoriju v Beogradu je zastarel, lokacija neprimerna. Pomisliti je treba na gradnjo osrednjega splošno astronomskega observatorija na izbranem mestu. Republiška ozkosrčnost je nemo zavrnila marsikatero dobro idejo referenta.

V strokovnih poročilih so drugi referenti obravnavali večinoma metodiko določevanja instrumentalnih in drugih konstant, vrednotili so vplive motečih činiteljev (temperature, refrakcije in druge) in ocenjevali maksimalno natančnost uporabljenih postopkov. Zanimiva so bila poročila o meritvah sprememb, ki so posledica nihanja vrtilne osi glede na simetrično os zemeljskega elipsoida. Skoraj značaj obzornega predavanja je bila razprava o atmosferski refrakciji (dr. Đ. Teleki); o časovni službi pri nas in v svetu sta poročala dr. Z. Brkić in D. Šaletić: z zadovoljstvom smo zvedeli, da je po uvedbi kremenskih ur beograjski observatorij po natančnosti v določevanju in ohranitvi astronomskega časa dosegel sedmo mesto med 43 observatoriji v svetu. Dr. L. Randić je obravnaval vprašanje astrokline, to je kriterije, ki naj bi bili merodajni pri izboru mesta za astronomski observatorij. Udeleženci so nato pozorno prisluhnili poročilu skupine, katera je konstruirala fotoelektrični fotometer, ki meri hkrati navidezno svetilnost in stopnjo polarizacije svetlobe šibke zvezde (V. Oskanjan, A. Kubičela, J. Arsenijević). O določitvi zemljepisne dolžine observatorija na Golovcu je poročala P. Ranzinger.

Kongres je zaključila skupščina Zveze društev, ki je bila razmeroma kratka in po vsebini dokaj blede. Zastopnik astronomov je prebral dvanajst zaključkov sekcije, od katerih naj omenim le predlog, da se osnuje nacionalni komite za astronomijo, in sugestijo, naj bi se v učne programe skupin za matematiko in fiziko uvedla še predmeta astronomija in geofizika (na naši univerzi je to deloma že storjeno). Skupščina je izvolila nov odbor, ki se je še istega dne konstituiral: Predsednik zveze je akademik prof. dr. D. Blanuša (Zagreb), podpredsednika sta prof. F. Dominko (Ljubljana) in prof. B. Galeb (Sarajevo), generalni sekretar je prof. V. Dajović, ki ima še štiri sekretarje (D. Adnađević, Lj. Cirković, G. Čupona, M. Bajraktarević); blagajnik je tov. Micić.

Kljub dejstvu, da so bile knjižice s kongresnim programom razdeljene šele ob začetku kongresa, je potekalo delo po načrtu. Obžalujemo pa, da so nekatera zelo zanimiva obzorna predavanja mogli poslušati le člani dotične sekcije. Na prihodnjem kongresu je treba predvideti večje število obzornih predavanj v večernih urah za vse udeležence. Poostriti je treba kriterije pri izboru referatov ali »saopštenj«; morda bi bilo primerno, da republiške komisije nastopijo kot prvo izbirno sito.

Goste iz tujine je sprejel predsednik mestnega odbora. Po tipično bosanski zakuski s šljivovico, hladnim kefirom, bučnimi semeni, oreški in drugimi slaščicami so gostom poklonili v spomin pravkar dotiskani krasni album mesta Sarajeva.

Za časa kongresa je bila v hali Delavske univerze izložba strokovnih knjig in učil.

Pripravljalnemu odboru gre predvsem hvala za prijetno bivanje. Občutek lagodja je še stopnjevalo vedro in sončno nebo, ki je trajalo ves čas kongresa. Večerni sprehodi po starem mestu skozi ozke ulice med »tezgami« z vabljivim blagom in sadjem, kava v mehani »Džaira« in pogled na vitke minarete bodo ostali v trajnem spominu. Odbor je organiziral izlet z avtobusi po strmi cesti mimo prve razgledne točke »Vidikovci«, dalje skozi gozdove do središča zimskega športa planine Jahorine. Spremljevalka je z ljubeznijo govorila o svoji deželi, »ki je lepa, ni pa še tako urejena kakor Slovenija«. Izjava, da je v tej republiki še vedno nad 60 % nepismenih, je drastično razkrila težko stanje. Pravilno je torej bilo, da smo prav na kongresu v Sarajevu toliko pozornosti posvetili vprašanju pouka.

F. Dominko

ZA MLADE MATEMATIKE IN FIZIKE

ODGOVOR NA VPRAŠANJE

iz Obz. mat. fiz. **12**, 144, 1965

Naloga: Enačba $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x}$

ima rešitev $x = 0$. Ta je očitna. Ima pa še druge rešitve. Kako jih dobiš, premisli!

Rešitev. Postavimo $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = z$. Od tod dobimo

$$2(1 + \sqrt{1-x^2}) = z^2$$

in

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}z^2 - 1 \quad \text{ali} \quad 1-x^2 = (\frac{1}{2}z^2 - 1)^2$$

in končno

$$(1) \quad x = \pm \frac{1}{2}z \sqrt{4-z^2}$$

Sedaj lahko vstavimo

$$\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} = z$$

kvadriramo

$$\sqrt{1+x} + 2\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt{1-x} = z^2$$

še enkrat kvadriramo in dobimo

$$(z^2 - z)^2 = 4\sqrt{1-x^2}$$

torej

$$z^4 - 2z^3 + z^2 = 2z^2 - 4 \quad \text{ali} \quad z^4 - 2z^3 - z^2 + 4 = 0$$

Trivialna rešitev $x = 0$ da $z_1 = 2$. Leva stran enačbe se da zato razstaviti:

$$(z-2)(z^3 - z - 2) = 0$$

Enačbo $z^3 - z - 2 = 0$ rešimo po Cardanovi formuli in dobimo

$$z_2 = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}} = 1,5214$$

$$z_3, z_4 = -0,7606 \pm 0,8579i$$

Te vrednosti vstavimo v (1) pa dobimo končno

$$x_1, x_2 = 0, \quad x_3, x_4 = \pm 0,98756, \quad x_5, x_6 = \mp 0,92045 \pm \pm 0,76475i \quad \text{ter} \quad x_7, x_8 = \mp 0,92045 \mp 0,76475i$$

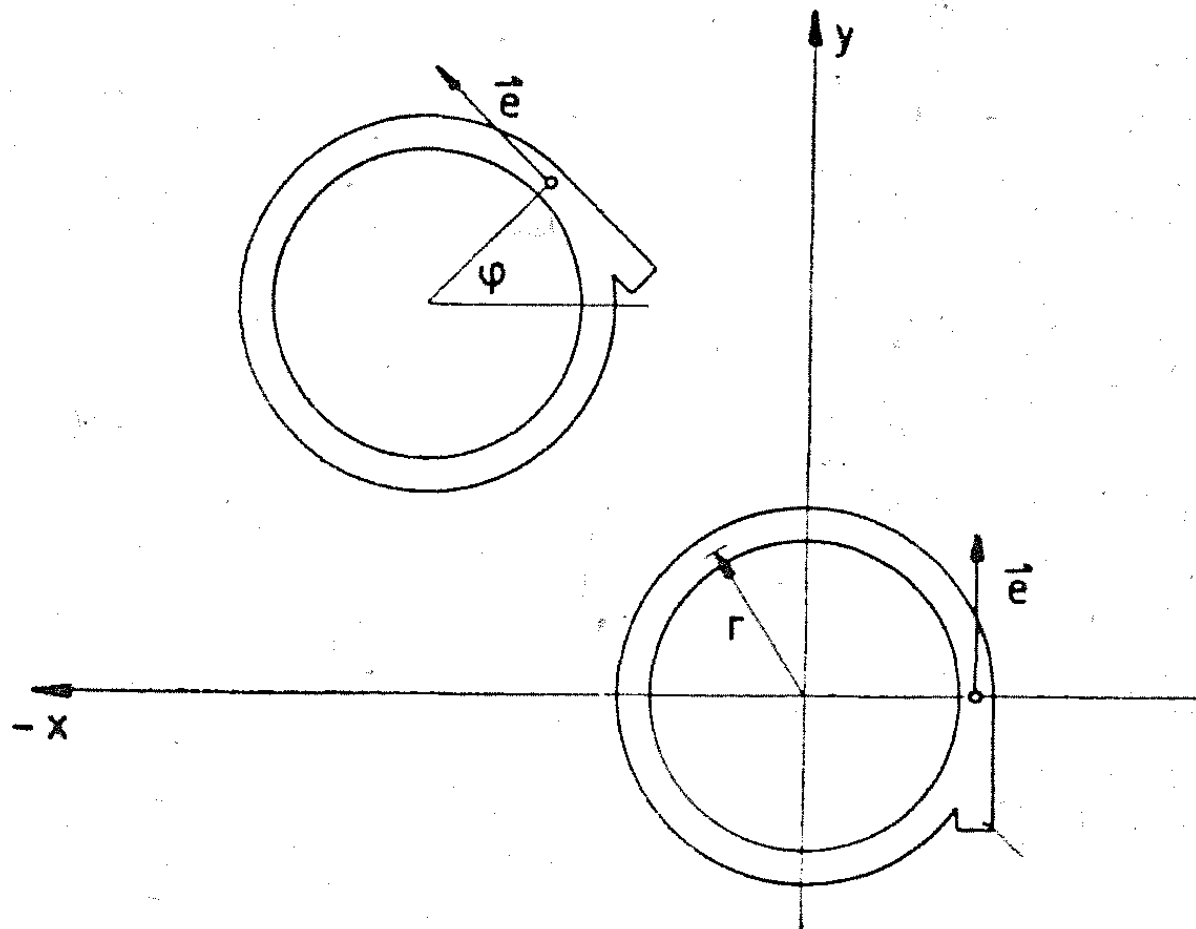
Jože Vrečko

ODGOVOR NA VPRAŠANJE

(Obz. mat. fiz. **12**, 48, 1965)

Vesoljska postaja v obliki tankega obroča miruje v breztežnem prostoru. Kako se bo gibala postaja, ko vključimo raketni motor na obodu, pri čemer ima curek iztekajočih plinov tangentno smer?

Vesoljska postaja ima srednji radij $r = 10 \text{ m}$ in začetno maso $M = 5 \cdot 10^5 \text{ kg/s}$. Masni tok je $dm/dt = \Phi = 5 \text{ kg/s}$, velikost hitrosti curka glede na postajo pa je $v_o = 3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Trenutna masa postaje je $m = M - \Phi t$. Pri stalnem masnem toku in stalni hitrosti v_o deluje curek plinov na postajo s silo $F = v_o \Phi$ (»nasprotna sila curka«), ki ima stalno velikost.



Slika 1

Pojav opazujemo iz mirujočega koordinatnega sistema. Izhodišče sistema v začetku sovpada s težiščem postaje, osi x in y sta v ravnini obroča. Motor je v začetku v točki $(r, 0)$ in je usmerjen tako, da začno izhajati plini v smeri negativne osi y (sl. 1).

Najprej uporabimo izrek o vrtilni količini za težiščno os, pravokotno na ravnini xy :

$$rF = rv_o \Phi = J^* \alpha.$$

Na levi je stalni navor glede na težiščno os. J^* je vztrajnostni moment obroča glede na težiščno os; če je obroč homogen, je $J^* = mr^2$. α je kotni pospešek.

V začetku gibanja smemo namesto mase m vstaviti začetno maso M . Če dopustimo napake do 1 %, lahko na tak način opisujemo gibanje postaje v našem primeru še kakih 10 min po vključitvi motorja. V tem primeru je kotni pospešek stalen, kotna hitrost ω sorazmerna s časom, zasuk φ pa sorazmeren s kvadratom časa:

$$\alpha = v_o \Phi / (Mr), \quad \omega = \alpha t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2)$$

Pri daljšem opazovanju je treba upoštevati, da se masa s časom spreminja:

$$\alpha = (v_o \Phi / Mr) (1 - \Phi t / M)^{-1}, \quad \omega = (v_o / r) \ln (1 - \Phi t / M), \\ \varphi = (v_o / r) [(M / \Phi - t) \ln (1 - \Phi t / M) + t] \quad (2')$$

Treba je določiti še gibanje težišča. Za to uporabimo zakon o gibanju težišča:

$$\mathbf{F} = m d\mathbf{v}^* / dt, \quad (3)$$

kjer je $\mathbf{v}^*$ hitrost težišča. Nasprotna sila curka seveda nima stalne smeri, njena smer je odvisna od zasuka:

$$\mathbf{F} = v_o \Phi \mathbf{e},$$

kjer je $\mathbf{e}$ enotni vektor, ki izhaja sprva iz točke $(r, 0)$ v smeri osi y , kasneje pa se vrti skupaj s postajo (sl. 1). V komponentah je:

$$F_x = -F \sin \varphi = -v_o \Phi \sin \varphi = m dv_x^*/dt$$

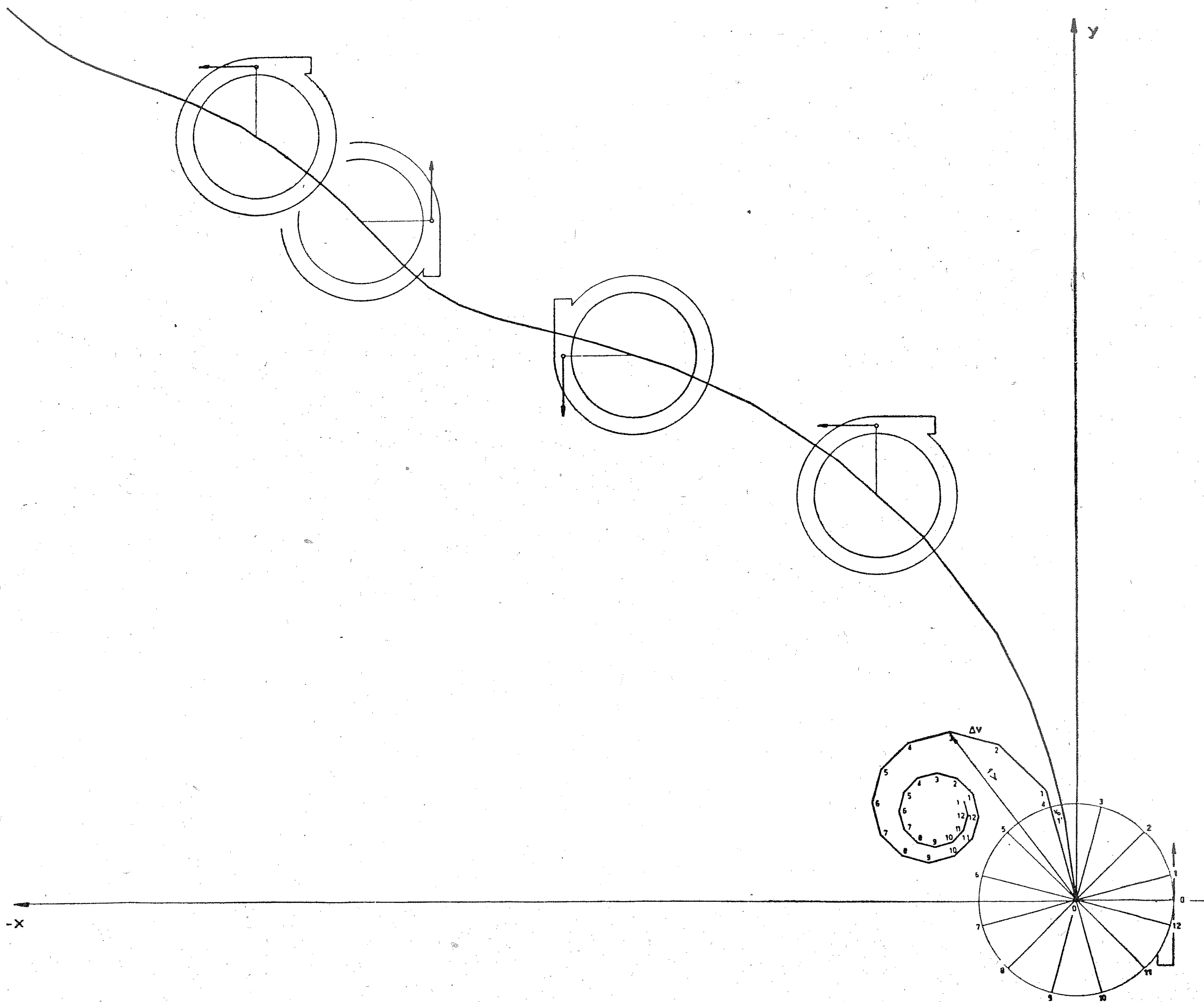
$$F_y = F \cos \varphi = v_o \Phi \cos \varphi = m dv_y^*/dt.$$

Za majhne čase sta masa in kotni pospešek približno konstantna, tako da velja:

$$v_x^* = - (v_o \Phi / M) \int_0^t \sin \frac{1}{2} \alpha t^2 dt = - (v_o \Phi / M) (\pi / \alpha)^{1/2} S [(\alpha / \pi)^{1/2} t]$$

$$v_y^* = (v_o \Phi / M) \int_0^t \cos \frac{1}{2} \alpha t^2 dt = (v_o \Phi / M) (\pi / \alpha)^{1/2} C [(\alpha / \pi)^{1/2} t]$$

$S(u)$ in $C(u)$ sta tabelirana Fresnelova integrala (gl. npr.: E. Jahnke, F. Emde: Tablici funkcij — prevod, Moskva, Fizmatgiz, 1959, st. 137). Enačba tira v parametrični izražavi je tedaj:



Sl. 2. Gibanje postaje. Krivuljo dobimo z grafično integracijo: za prvi obrat izberemo $d\varphi = 15^\circ$, za drugega pa $d\varphi = 30^\circ$, izračunamo ustrezne vrednosti dt in dv^* v odvisnosti od zasuka φ in nato z risanjem določimo dv^* in v^* . Naposled izračunamo $v^* dt$ in z risanjem dobimo r^* . Za dva polna obrata na sliki potrebuje postaja 64,6 s. Zato smemo za maso postaje vzeti kar začetno maso M . Vesoljska postaja je narisana pretirano velika.

$$x^* = - (v_o \Phi/M) (\pi/\alpha)^{1/2} \int_0^t S [(\alpha/\pi)^{1/2} t] dt, \quad y^* = (v_o \Phi/M) (\pi/\alpha)^{1/2} \int_0^t C [(\alpha/\pi)^{1/2} t] dt$$

Integracijo je treba izvršiti numerično. Numerično integriranje je še bolj zamudno pri velikih časih, ko spreminjanja m in α ne smemo več zanemariti.

Dosti hitreje kot iskanje vrednosti Fresnelovih integralov in numerično integriranje, privede do cilja grafično integriranje. Najprej izračunamo čas dt , v katerem se zasučje postaja za kot $d\varphi$:

$$dt = (2 \alpha \varphi)^{-1/2} d\varphi .$$

Od tod sledi, da se vrtil postaja tem hitreje, čim večji je zasuk. Pričakujemo, da se bo že po majhnem številu obratov hitrost težišča po smeri in po velikosti le malo spreminjala in bo potovala postaja precej natančno v smeri, ki jo bo imela po prvih nekaj obratih. (Fresnelova integrala se kmalu približata $\frac{1}{2}$ in potem čedalje šibkeje nihata okoli te vrednosti.)

Za ustrezno spremembo hitrosti težišča velja

$$d\mathbf{v}^* = (v_o \Phi/M) \mathbf{e} dt ;$$

ustrezni premik težišča je:

$$d\mathbf{r}^* = \mathbf{v}^* dt.$$

Hitrost $\mathbf{v}^*$ je vektorska vsota posameznih sprememb $d\mathbf{v}^*$, celotni premik težišča $\mathbf{r}^*$ pa je vektorska vsota posameznih premikov $d\mathbf{r}^*$ (sl. 2).

Marjan Hribar

NOVE KNJIGE

France Križanič: Elektronski aritmetični računalniki, 142 strani, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.

Knjižica Elektronski aritmetični računalniki je prvo in doslej edino delo v slovenski literaturi o osnovah aritmetičnih računalnikov in programiranja. Na poljuden, izredno dostopen in prijeten način nas avtor seznani z novimi pojmi, tako da bo celo površnega bralca v zelo kratkem času vpeljal v obsežno in pomembno področje.

V uvodu se seznanimo s pojmom algoritma in s principialno shemo računalnika. Aritmetične osnove računalnikov in razne načine kodiranja števil spoznamo v prvem poglavju. V drugem so opisane najpomembnejše oblike spomina v računalnikih in osnovna enota spomina — celica. Nadalje avtor izredno razumljivo poda logične osnove računalnikov: seznani nas z Boolovo algebro in osnovnimi vezji, iz katerih je sestavljena aritmetična enota. V naslednjih poglavjih je obravnavano programiranje za aritmetične računalnike na zgledu sistema ukazov za računalnik »STRELA«. Ves čas uporablja avtor tudi od računalnika neodvisen operatorski zapis poteka programov. Na nekaj poučnih zgledih lahko bralec usvoji osnove programiranja. V zadnjih dveh poglavjih beremo o delovanju upravne enote in o najpogostejših uporabah računalnikov.

Tekst spremlja 76 slik in 7 fotografij. Knjižica je dostopna najširšemu krogu bralcev in ne zahteva nobenega predznanja.

Zvonimir Bohte

Ivan Vidav: Algebra, 146 strani, Mladinska knjiga, Ljubljana 1961.

Knjižica ima namen prikazati bralcu pojem moderne algebre in ga seznani z osnovnimi algebraičnimi strukturami. Načeloma jo more razumeti vsak, ki je končal osemletko. Seveda pa to ne pomeni, da jo je mogoče brati in razumeti brez vsakega truda. Algebra je namreč ena najbolj abstraktnih matematičnih vej in tudi njenih najosnovnejših pojmov ni mogoče podati tako, da bi jih razumel človek, ki nima prav nič sposobnosti za abstraktno razmišljanje.

Prvo poglavje govori o kompleksnih številih. Predvsem ima namen pomagati bralcu, da bi v naslednjih poglavjih lažje razumel pojem računske operacije med elementi poljubne množice, ki je osnovni pojem algebre. Aritmetičnih operacij med realnimi števili smo namreč vse preveč navajeni, da bi povprečen bralec mogel iz njih izluščiti bistvo pojma računske operacije.

Naslednja poglavja so posvečena posameznim osnovnim algebraičnim strukturam: grupam, kolobarjem in obsegom, mrežam ter algebram (te niti več ne sodijo med najosnovnejše). Obseg knjižice seveda ne dovoljuje takega obširnejšega obravnavanja. Zato avtor pri vsakem poglavju v glavnem le aksiomatično definira določeno algebraično strukturo, uvede najosnovnejše pojme, ki so v zvezi s tisto strukturo, ter izpelje ali navede nekaj osnovnih zakonitosti. Skoraj polovico prostora pa je namenil zgledom, ki naj bralcu približajo sicer težko dostopne pojme.

Algebra še zdaleč ni izolirana matematična panoga. Če bi izključili iz moderne matematike vse, kar ni popolnoma neodvisno od algebre, bi najbrž

bolj malo ostalo. Kljub temu avtor verjetno ne bi mogel najti tej knjižici primerne zglede za uporabo algebre na drugih področjih matematike. Pri večini takih primerov je že problem sam za človeka s srednjo izobrazbo povsem nedostopen, pri problemih, ki so lahko razumljivi (npr. problemi iz teorije števil), pa je potrebno neprimerno boljše poznavanje algebre, kot ga more bralec dobiti v tej knjižici. Zato je avtor segel po zgledih iz fizike, ki bodo za marsikoga še bolj zanimivi. V zadnjem poglavju pokaže, kako moderna kvantna teorija uporablja algebrske metode.

Jože Vrabec

Oton Sajovic: Normalna aksonometrija. Strani 268, MK, Ljubljana 1962.

Iz vsebine: To delo podrobno obravnava normalnoaksonometrični sistem, potem ko nas je avtor predhodno seznanil z razmerami v dvojnoprojekcijskih sistemih.

Pri uvajanju aksonometričnega sistema so tu lepo osvetljene zveze z Mongeovim projekcijskim sistemom, hkrati pa so poudarjene prednosti, ki jih ima aksonometrično predočanje pred Mongeovim, seveda glede na namensko rabo upodobitev.

Zelo skrbno izdelanemu elementarnemu delu, v katerem avtor obravnava zveze med koordinatnimi osmi in njih projekcijami, osnovne operacije in tiste elemente konstrukcij, s katerimi so možne vse nadaljnje operacije, sledijo poglavja, ki postopno ter pregledno nizajo kompleksne naloge in primere, potrebne tako za teorijo, kot za prakso aksonometričnega upodabljanja. V tej zvezi so tudi obravnavane nekatere krive ploskve, kakor tudi značilni primeri senčenja. V posebnem poglavju ob koncu knjige je dodano nekaj, sicer osnovnih, a morda manj znanih dejstev iz planimetrije, s katerimi so metodično dopolnjena tista mesta, na katerih bi ob sočasni razlagi trpela preglednost dela. Na kraju so posebej dodani tudi napotki, oziroma smernice za predočanje objektov v poševni aksonometriji.

France Križanič: Vektorji, matrike, tenzorji. Strani 268. MK, Ljubljana 1962.

Avtor je v 272 strani obsegajoči knjižici iz zbirke »Sigma« obdelal na dostopen in svež način vektorsko algebro. Prva poglavja morejo služiti kot dobrodošlo dopolnilo matematično oz. fizikalno usmerjenim dijakom v srednjih šolah. Druga polovica knjige zahteva od bralca-nestrokovnjaka pozoren študij snovi. Razlaga je nazorna, saj se giblremo večji del v tridimenzionalnem prostoru. Posebno zanimivi so oddelki o uporabi vektorske algebre v geometriji in fiziki, pa tudi oni o operatorjih in Liejevih algebrah, ki segajo kar daleč v matematiko. Zadnje poglavje o tenzorjih je poglavje linearne algebre, ki v slovenski matematični literaturi še ni bilo obravnavano.

Kazalo: Afine operacije nad vektorji, Metrične operacije nad vektorji, Primeri iz uporabe vektorske algebre, Linearne transformacije in matrike, Normalne, simetrične in ortogonalne linearne transformacije, Tenzorji.

A. S.

SPOROČILO UPRAVE

Sočasno z izidom prejšnje številke lista so bili razposlani opomini za doplačano naročnino vsem, ki dolgujejo več kot za 1 letnik. Prosimo vse naročnike, da čimprej nakažejo dolžno naročnino, ker bomo sicer prisiljeni list ustaviti.

REVIJE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI KATEDRE ZA MATEMATIKO

1. PROCEEDING of american mathematical society, Menasha, 1950—1964, vol. 15, Nu. 5.
2. PROCEEDING of London mathematical society, London, 1948—1964, vol. 14.
3. The Quarterly journal of mathematics. Oxford. 1946—1964, vol. 15.
4. QUARTERLY of applied mathematics, Oxford, 1960—1964, vol. 22, Nu. 3.
5. REFERATIVNIJ žurnal — Avtomatika i radiotehnika, Moskva, 1962.
6. REFERATIVNIJ žurnal — Aavaomatika, telemehanikaii vyčislitel'naja tehnika, Moskva, 1963—1964.
7. REFERATIVNIJ žurnal — Matematika, 1961—1964.
8. RAZPRAWY matematyczne, Warszawa, Poljska, 1955—1963. No. 31.
9. SCRIPTA matematika, New York, 1961—1964, vol. 27, Nu. 2.
10. SIAM reviews, Philadelphia, 1964, vol. 6, No. 3.
11. SIBIRSKI matematički žurnal, Moskva, 1960—1964. T. 5.
12. STUDIA mathematica, Warszawa, 1957—1964, T. 24.
13. TEORIJA verojatnostej i ee primenenija, Moskva, 1956—1964. T. 9.
14. TRANSACTION OF AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. New York, 1943—1964, vol. 113.
15. USPEHI matematičeskih nauk, Moskva, 1946—1964. T. 19.
16. VESTNIK Leningradskogo universiteta, Leningrad, 1956—1964.
17. VESTNIK moskovskogo universiteta, ser. mat. fiz. astr., Moskva, 1954—1964.
18. ZEITSCHRIFT für angewandte Mathematik und Physik, Basel, 1950—1964, vol. 15.
19. ZENTRALBLATT für Mathematik und ihre Grenzgebiete, Berlin, 1951—1964. Bd. 108.
20. ŽURNAL vyčislitel'noj matematiki i matematičeskoj fiziki, Moskva, 1961—1964, T. 4.
21. RENDICONTI del circolo mathematico di Palermo. Palermo, Italija, 1906—1963. T. 12, F. 3.
22. JOURNAL of research of the national bureau of standards, Washington.
23. NASTAVA matematike i fizike, Beograd.
24. PORTUGALIAE mathematica. Lisboa.

Zveza Društev matematikov in fizikov SFRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov SRS in Matematički institut izdajata

MATEMATIČKI VESTNIK

Letno izide v štirih številkah, letna naročnina je 1600 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vestnik«. Dopise pošiljajte na naslov: Matematički institut, Beograd, Kneza Mihajlova 35/I.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO - FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 560 din, posamezna številka 140 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 3071-608-324.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 1500 din, za redne člane Društva 1000 din, za sodelavce 250 din, za ustanove 3000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-181-608-72 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, Z. Bohte, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, J. Strnad, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 400 din, za zasebnike 500 din, za šole 1000 din, za ustanove in podjetja 2000 din in za inozemstvo 1500 din. Čekovni račun Obzornika je 600-14-608-314.