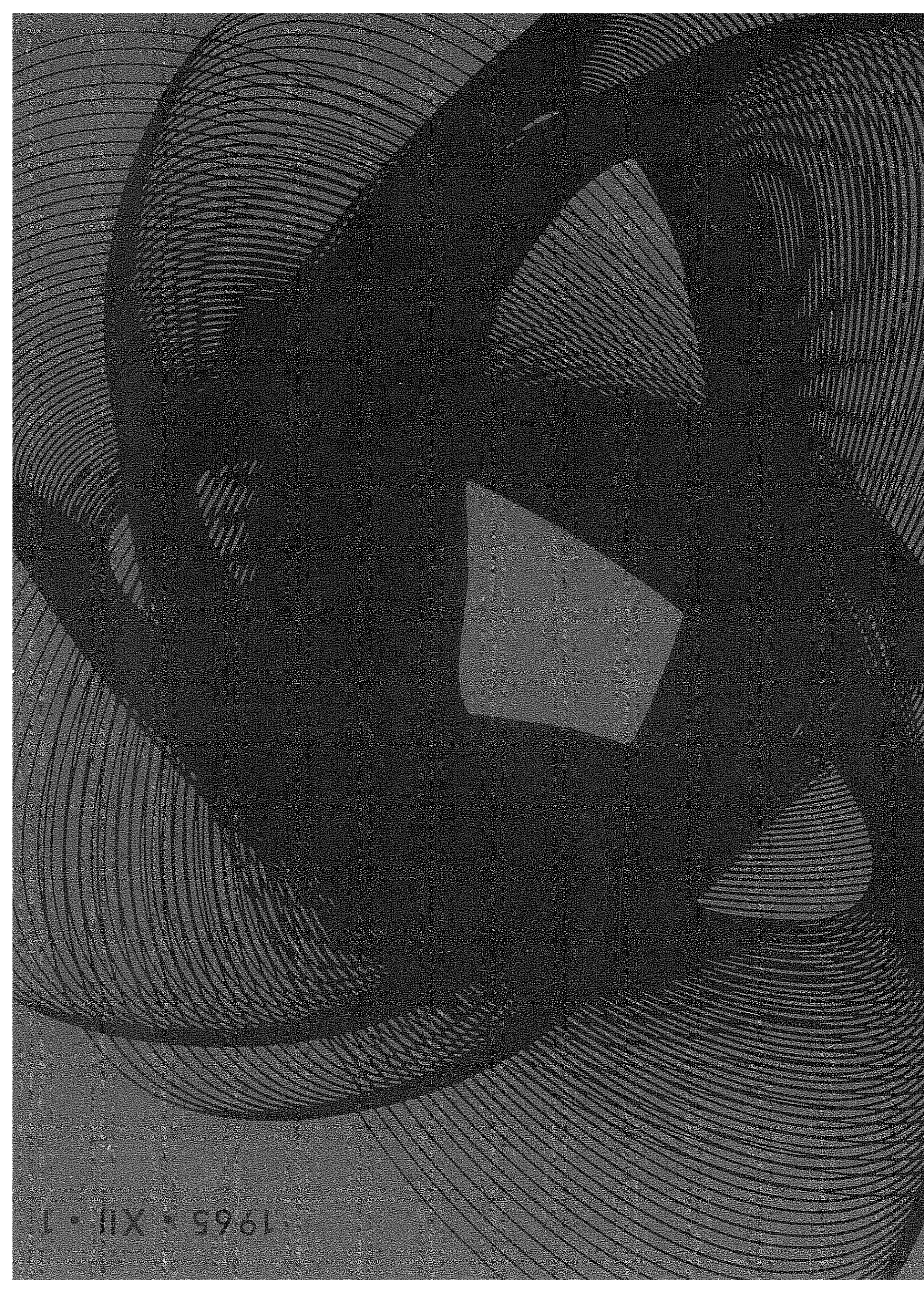




OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XII. LETNIK — 1. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, APRIL 1965

VSEBINA

Članki

Stran

O pojmu odvoda v algebri (J. Grasselli)	1
Metoda Danilevskega za določevanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrik (E. Zakrajšek)	8
Delno urejene algebraične strukture (J. Vrabec)	15
Simetrija in ohranitveni zakoni (E. P. Wigner — prev. J. Strnad)	32

Novice

Nov uspeh v fiziki delcev? (J. Strnad)	40
--	----

Šola

Pripomoček za poskuse iz optike (S. Uršič)	47
Vprašanje. (J. S.)	48

Nove knjige	48
-----------------------	----

CONTENTS

Articles

Page

On the Differentiation in Algebra (J. Grasselli)	1
The Method of Danilevski for the Computation of Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices (E. Zakrajšek)	8
Partially Ordered Algebraic Structures (J. Vrabec)	15
Symetry and Conservation Laws (E. P. Wigner — translated by J. Strnad)	32

News

A Further Success in Particle Physics (J. Strnad)	40
---	----

School	47
------------------	----

O POJMU ODVODA V ALGEBRI

JOŽE GRASSELLI

1

Seštevanje in množenje sodita med najbolj preproste matematične operacije. V nekem smislu se s študijem teh dveh operacij ukvarja teorija kolobarjev, ki spada v algebro, obsežno in za vsa področja matematike pomembno disciplino. Kot je znano, je kolobar množica poljubnih elementov, v kateri sta definirani dve operaciji, seštevanje in množenje. Obe operaciji sta asociativni, med sabo pa povezani po distributivnostnih zakonih. Nadalje je seštevanje komutativno in enačba $a + u = b$ je enolično rešljiva za vsak par elementov a, b . Nevtralen element za seštevanje bomo označili z ničlo. Torej je $a + 0 = a$ za vsak element a kolobarja. Nevtralen element za množenje imenujemo enota in ga zapisujemo s številko 1. Značilno za enoto je torej, da velja za vsak element a iz kolobarja enačba $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Vsak kolobar vsebuje element nič. Z enoto pa je drugače. Nekateri kolobarji jo imajo, drugi ne. V kolobarju z enoto moremo uvesti pojem regularnega elementa. Element a se imenuje regularen, če je v kolobarju takšen element b , da velja enačba $ab = ba = 1$. Element b imenujemo potem inverzen k a in pišemo zanj a^{-1} .

Za množenje v kolobarju komutativnost ni zahtevana. Zato sta v splošnem produkta ab in ba različna. Če pa za vsak par elementov a, b velja $ab = ba$, je kolobar komutativen. Množica celih števil je že zgled komutativnega kolobarja. Tudi skupnost vseh polinomov s celoštevilčnimi koeficienti je komutativen kolobar. Prav tako množica vseh zveznih funkcij. Vse dvovrstne matrike tudi sestavljajo kolobar, ki pa ni komutativen. Vsi ti kolobarji so z enoto. Zgled komutativnega kolobarja, ki nima enote, je množica vseh polinomov s celimi koeficienti, enakih nič za $x = 0$. V naslednjem bomo imeli opraviti le s komutativnimi kolobarji.

2

Obrnimo se zdaj k odvajanju, v primeri s seštevanjem in množenjem nič manj temeljni matematični operaciji! Ogledati si hočemo, kako se da odvod formalno vpeljati v kolobar.

Omenili smo že, da je množica vseh polinomov s celimi koeficienti kolobar. Odvod vsakega polinoma s celimi koeficienti je spet polinom s celimi koeficienti. Z odvajanjem imamo torej v tem kolobarju vsakemu polinomu prirejen en sam polinom iz istega kolobarja. Če zaznamujemo polinom s črko a in njegov odvod z a' , nam odvod v kolobarju polinomov definira neko upodobitev tega kolobarja vase. Namreč tako, da je vsakemu polinomu prirejen kot slika njegov odvod: $a \rightarrow a'$. Ta upodobitev pa ni čisto neodvisna od seštevanja in množenja. Zaradi pravil o odvodu vsote in produkta velja pri dobljeni upodobitvi: $a + b \rightarrow a' + b'$ in $ab \rightarrow a'b + ab'$.

V obravnavanem zgledu je odvajanje obenem upodobitev kolobarja vase z določenimi lastnostmi. To dejstvo hočemo uporabiti pri opredelitvi odvajanja v poljubnem kolobarju. Naj bo R kolobar. Odvajanje v R je upodobitev, ki enolično prireja vsakemu elementu $a \in R$ kot sliko element $a' \in R$ tako, da je

$$\text{I. } (a + b)' = a' + b'$$

$$\text{II. } (ab)' = a'b + ab'$$

Komutativen kolobar, ki vsebuje enoto in je v njem definirano odvajanje, imenujemo diferencialni kolobar. Element a' , ki ga pri odvajanju dobimo kot sliko elementa a , je odvod elementa a . Možno je, da imamo v kolobarju več različnih odvajanj. V kolobarju polinomov je npr. eno odvajanje običajno odvajanje, neko drugo odvajanje pa dobimo, če vsak polinom preslikamo v 0. Ako v istem izrazu nastopa odvod večkrat, ga je seveda treba povsod vzeti glede na isto odvajanje. Ker nas v nadaljnjem odnosi med različnimi odvajanji v istem kolobarju ne bodo zanimali, bomo vzeli, da ima diferencialni kolobar eno samo odvajanje. Kar bomo ugotovili zanj, velja tudi za vsako drugo odvajanje.

Iz definicije diferencialnega kolobarja hitro dobimo nekaj preprostih ugotovitev. Takoj vidimo, da je vsak element v diferencialnem kolobarju neskončnokrat odvedljiv. Če je namreč $a \in R$, je $a' \in R$. Zato je tudi $(a')' \in R$. Pišimo za ta element a'' in ga imenujmo drugi odvod elementa a . Torej je $a'' \in R$. Če ta postopek nadaljujemo, dobimo, da je za vsako naravno število n element $a^{(n)} \in R$.

Po lastnosti II najdemo $(a^2)' = a'a + aa' = 2aa'$. S popolno indukcijo ugotovimo, da velja za vsako naravno število n obrazec

$$(a^n)' = na^{n-1}a'.$$

Potenco odvajamo torej v diferencialnem kolobarju na isti način kot v navadnem smislu. Seveda je veljavnost obrazca omejena tukaj na naravne n .

Poglejmo, kaj je odvod enote 1. Iz enačbe $1^2 = 1$ sledi po odvajanju $2 \cdot 1' = 1'$ in od tod $1' = 0$. Odvod enote je torej 0. Nadalje je $(n \cdot 1)' = (1 + 1 + \dots + 1)' = 0$. Zdaj pa takoj pridemo do odvoda inverznega elementa. Naj bo a regularen element diferencialnega kolobarja. Potem je $aa^{-1} = 1$, pri čemer je a^{-1} inverzni element k a . Odvod te enačbe je $a'a^{-1} + a(a^{-1})' = 0$. Po množenju z inverznim elementom sledi

$$(a^{-1})' = -(a^{-1})^2 a'.$$

Dobimo pa isto, kot če levo stran v običajnem smislu formalno odvajamo.

Zdaj pa nekaj zgledov za diferencialne kolobarje.

Kolobar polinomov s celimi koeficienti, kjer vzamemo za odvod navadni odvod, smo že omenili. Enota je tukaj število 1.

Vsak komutativen kolobar z enoto postane diferencialen kolobar, če vpeljemo odvajanje kot upodobitev v element nič. Ta zgled je pomemben, ker kaže, da drže vse ugotovitve o diferencialnih kolobarjih tudi za navadne komutativne kolobarje z enoto. Posebej je npr. kolobar celih števil diferencialen. Lahko se je prepričati, da v njem razen trivialnega odvajanja, ki preslika vsak element v 0, ni nobenega drugega odvajanja.

Množica vseh neskončnokrat odvedljivih realnih funkcij je očitno komutativen kolobar. Enota v njem je funkcija, ki ima konstantno vrednost 1.

Ker je nadalje ta množica za navadno odvajanje zaključena, je diferencialni kolobar.

Naj bo R fiksni diferencialni kolobar. Privzemimo k R formalen element y in njegove zaporedne odvode $y', y'', \dots, y^{(n)}, \dots$. Tvorimo s pomočjo elementa y in odvodov polinome, ki imajo za koeficiente elemente iz R . Tak polinom je vsota končnega števila formalnih produktov au , pri čemer je koeficient $a \in R$, u pa je formalni produkt končno mnogo potenc $y^k, (y')^l, (y'')^m$ itd., pri čemer so $k, l, m \dots$ naravna števila. Skupnost vseh takih polinomov zaznamujmo z $R\{y\}$. Polinome seštevajmo in množimo v $R\{y\}$ čisto formalno. Pri tem še privzemimo, da so faktorji v produktu zamenljivi. Očitno postane na ta način skupnost $R\{y\}$ kolobar z enoto. Element nič in enota v $R\{y\}$ sta ista kot v R . Razširimo zdaj še odvajanje iz R v $R\{y\}$. Odvod elementa au naj bo element $a'u + au'$; u' dobimo, če u formalno odvajamo. Polinom iz $R\{y\}$ odvajajmo tako, da vzamemo vsoto odvodov njegovih sumandov. Tako vpeljana odvajanje v $R\{y\}$ tudi ustreza pogojem I in II. Torej je $R\{y\}$ diferencialni kolobar. Polinome iz $R\{y\}$ imenujemo diferencialni polinomi. Če izhajamo iz kolobarja navadnih polinomov spremenljivke x , nam gornji postopek da za diferencialne polinome vse mogoče algebrajske diferencialne izraze spremenljivke y in njenih odvodov.

V diferencialnem kolobarju imamo tri operacije: seštevanje, množenje in odvajanje. Na množice, ki so za te operacije zaključene, naletimo pogosto v analizi. To kažejo tudi zgornji zgledi. Do važnih izsledkov za te množice je zato mogoče priti preko preučevanja diferencialnih kolobarjev in njim podobnih tvorbo.

3

V tem razdelku želimo omeniti nekaj lastnosti diferencialnih kolobarjev. Lastnosti navadnih kolobarjev se dajo po navadi le pri dodatnih pogojih ohraniti tudi za diferencialne kolobarje. To je razumljivo, saj je diferencialni kolobar ožje določen. Začnimo s pojmom diferencialnega ideala.

Naj bo J množica elementov iz diferencialnega kolobarja R . Pravimo, da je J diferencialni ideal, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

A. Za vsak par elementov a, b iz J je tudi razlika $a - b$ v J .

B. Za vsak element a iz J in poljuben element c iz kolobarja R je produkt ac v J .

C. Za vsak element a iz J je tudi odvod a' v J .

Kot je znano, definirata pogoja A in B ideal v komutativnem kolobarju. Mogli bi torej tudi reči, da je diferencialni ideal takšen ideal, ki vsebuje odvode svojih elementov. Pogoj C, po katerem se loči diferencialni ideal od navadnega ideala, je seveda mogoče postaviti le v kolobarjih z odvajanjem.

Če vzamemo množico, ki jo sestavlja samo element 0 diferencialnega kolobarja, je to že diferencialni ideal. Nadaljnji zgled je celotni diferencialni kolobar R . Razen teh trivialnih pa more imeti diferencialni kolobar še netrivialne diferencialne ideale. Vzemimo diferencialni kolobar vseh neskončnokrat odvedljivih realnih funkcij $f(x)$. Naj bo $g(x)$ takšna neskončnokrat odvedljiva funkcija, ki je zunaj intervala $(-1, 1)$ povsod enaka nič. Vse take funkcije tukaj že sestavljajo diferencialni ideal, ki ni trivialen.

Če je element a v nekem idealu, je za vsako naravno število n tudi element a^n vsebovan v tem idealu. To pove zahteva B. Če je ideal takšen, da

vsakikrat, kadar vsebuje kak element a^n , vsebuje tudi element a , ga imenujemo radikalen ideal. Seveda pomeni radikalni diferencialni ideal tak ideal, ki je hkrati radikalen in diferencialen.

Kako pridemo v diferencialnem kolobarju do radikalnih diferencialnih idealov?

Neko možnost odpira naslednja trditev: Za vsako podmnožico S diferencialnega kolobarja R eksistira najmanjši radikalni diferencialni ideal iz R , vsebujoč podmnožico S . Ta radikalni diferencialni ideal zapisujemo z znakom $\{S\}$. Vsaka podmnožica S enolično določa $\{S\}$. Če je v diferencialnem kolobarju še kak drug od $\{S\}$ različen radikalni diferencialni ideal, ki tudi vsebuje S , je nujno obsežnejši kot $\{S\}$. V omenjeni trditvi ni nakazana nobena metoda, kako pri danem S priti do $\{S\}$. V primerih, ko je dovolj, če vemo za obstoj najmanjšega podmnožico S vsebujočega radikalnega diferencialnega ideala, ta pomanjkljivost ne moti.

Nadalje se je pri iskanju radikalnih diferencialnih idealov mogoče opirati na dejstvo, da vsak ideal pripelje do nekega radikalnega ideala. Naj bo npr. J ideal komutativnega kolobarja R (brez odvajanja). Zaznamujmo z J_1 množico vseh tistih elementov a iz R , za katere je pri kakem naravnem številu n element a^n vsebovan v idealu J . Očitno je J_1 ideal. Če sta namreč elementa a, b v J_1 , najdemo taki naravni števili n, m , da velja $a^n \in J, b^m \in J$. Prva inkluzija je seveda izpolnjena tudi za vse od n večje eksponente, prav tako pa velja druga inkluzija za vse od m večje eksponente. Naj bo $N = n + m$. Po binomskem izreku dobimo

$$(a - b)^N = a^N + Na^{N-1}(-b) + \dots + \binom{N}{k} a^{N-k} (-b)^k + \dots + (-b)^N$$

Vsak sumand na desni strani te enačbe je v J , ker je bodisi pri a eksponent $\geq n$, bodisi pri b eksponent $\geq m$. Torej je element $(a - b)^N$ v J , oziroma $a - b$ v J_1 . Iz $a \in J$ sklepamo, da je za vsak element $c \in R$ tudi $a^n c \in J$ in naprej $a^n c^n = (ac)^n \in J$. To pa pomeni, da je $ac \in J_1$. Tako vidimo, da je množica J_1 res ideal. Toda J_1 je celo radikalni ideal. Ako je $a^n \in J_1$, je neka potenca $(a^n)^m \in J$ in zato $a \in J_1$. Radikalnemu idealu J_1 , ki ga na opisani način ustvarja vsak ideal J komutativnega kolobarja, pravimo radikal.

Po zgornjem je seveda tudi radikal vsakega diferencialnega ideala radikalni ideal. Ni pa ta radikal v splošnem zaključen za odvajanje. Lastnost, da je radikal diferencialnega ideala tudi diferencialni ideal, se da izpeljati šele, ako vemo, da ima diferencialni kolobar neke dodatne lastnosti. S tem pa pridemo že do neke nove algebrske tvorbe.

4

Med elementi diferencialnega kolobarja v splošnem niso obsežena vsa racionalna števila. Od tod izvira težava, da v abstraktnem diferencialnem kolobarju elementov ni mogoče množiti z necelimi racionalnimi števili. Da te ovire ne bi bilo, se dostikrat omejimo na kolobarje, v katerih so racionalna števila zapopadena. Diferencialni kolobar, ki vsebuje med svojimi elementi vsa racionalna števila, je dobil ime Rittova algebra. Diferencialni kolobar vseh neskončnokrat odvedljivih funkcij je že Rittova algebra. Še preprostejši zgled zanjo je diferencialni kolobar vseh polinomov v x , ki imajo racionalne koeficiente.

Rittova algebra ima seveda nekatere lastnosti, ki jih pri diferencialnem kolobarju ni. Eno takšnih lastnosti si hočemo ogledati.

Vzemimo diferencialni ideal J Rittove algebre. Naj bo a takšen njen element, da je pri nekem naravnem številu n element a^n v J . Trdimo, da je za vsako naravno število $k \leq n$ element $a^{n-k} (a')^{2k-1}$ vsebovan v J .

Ker je ideal J diferencialen, je $(a^n)' = na^{n-1}a' \in J$. Ulomek $1/n$ je v Rittovi algebri, zato je element $a^{n-1}a' \in J$. Torej je za $k = 1$ trditev resnična. Denimo, da je pri nekem k element $a^{n-k} (a')^{2k-1} \in J$. Tedaj je v J tudi element

$$[a^{n-k} (a')^{2k-1}]' = (n-k) a^{n-k-1} (a')^{2k} + (2k-1) a^{n-k} (a')^{2k-2} a''$$

Če množimo obe strani z a' , dobimo, da je

$$(n-k) a^{n-k-1} (a')^{2k+1} = [a^{n-k} (a')^{2k-1}]' a' - (2k-1) a^{n-k} (a')^{2k-1} a''$$

Oba elementa na desni pa sta v J , zato je tudi njuna razlika v J . Od tod sledi $a^{n-k-1} (a')^{2k+1} \in J$. S tem je po indukciji trditev dokazana.

Ako izberemo $k = n$, dobimo posebej $(a')^{2n-1} \in J$. Diferencialni ideal J vsebuje torej z vsakim elementom a^n tudi element $(a')^{2n-1}$. Iz tega dejstva moremo naprej sklepati, da je v Rittovi algebri radikal vsakega diferencialnega ideala diferencialni ideal. Če je namreč J_1 radikal diferencialnega ideala J , je za vsak element $a \in J_1$ neka potenca $a^n \in J$ in zato $(a')^{2n-1} \in J$. To pa pomeni, da je $a' \in J_1$.

5

Če imamo komutativen kolobar R , lahko napravimo s spremenljivko x polinome, ki imajo za koeficiente elemente iz R . Množica vseh možnih takih polinomov $R[x]$ je spet komutativen kolobar. Kolobar polinomov $R[x]$ deduje marsikako lastnost kolobarja svojih koeficientov. O eni takih lastnosti govori Hilbertov izrek o končnosti verig naraščajočih idealov. Povejmo, za kaj gre v tem izreku.

Ideale istega kolobarja moremo primerjati med sabo po obsežnosti. Ako ideal J_2 vsebuje vse elemente ideala J_1 in še kakšne elemente, ki jih v J_1 ni, je J_2 obsežnejši od J_1 in pišemo $J_1 \subset J_2$. Vsako zaporedje po obsežnosti naraščajočih idealov se da izraziti z verigo

$$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots \subset J_p \subset \dots$$

Očitno je, da se vsaka taka veriga po končno členih neha, kadar je v kolobarju samo končno mnogo idealov. Velja pa to celo pri nekaterih kolobarjih z neskončno različnimi ideali. Zgled te vrste imamo kar v kolobarju celih števil. V tem kolobarju ustvarja vsako pozitivno celo število a s svojimi večkratniki ideal (a) . Torej je tukaj različnih idealov res neskončno. Od ideala (a) je lahko obsežnejši le ideal, ki ga ustvarja kak delitelj b števila a . Če imamo verigo $(a) \subset (b) \subset (c) \subset \dots$, pomeni to $a > b > c > \dots$. Vsako padajoče zaporedje naravnih števil pa vsebuje le končno mnogo členov. Torej se tudi veriga idealov po končno členih neha. Niso vsi kolobarji takšni, da bi se vsaka veriga naraščajočih idealov že po končno členih pretrgala. Zgledov ne bomo navajali. Toda če ima kak komutativen kolobar R z enoto to lastnost, potem jo ima tudi nad njim tvorjeni kolobar polinomov $R[x]$. To je vsebina Hilbertovega izreka o končnosti verig naraščajočih idealov. Posebej ima npr. v kolobarju

polinomov s celimi koeficienti vsaka veriga naraščajočih idealov le končno idealov.

Hilbertov izrek se ne da avtomatično prenesti na diferencialne kolobarje diferencialnih polinomov. Znan je diferencialni kolobar, v katerem je vsaka veriga naraščajočih diferencialnih idealov končna, nad njim tvorjeni diferencialni kolobar diferencialnih polinomov pa vsebuje neskončne verige naraščajočih diferencialnih idealov. Pač pa so dokazali Hilbertov izrek za Rittove algebre in sicer v naslednji obliki: Naj bo R Rittova algebra, v kateri je vsaka veriga naraščajočih radikalnih diferencialnih idealov končna. Potem je tudi v diferencialnem kolobarju $R\{y\}$ diferencialnih polinomov s koeficienti iz R vsaka veriga naraščajočih radikalnih diferencialnih idealov končna. Dokaz izpuščamo. Navesti pa hočemo neko uporabo za ta izrek.

Množica realnih števil je za navadno odvajanje Rittova algebra. Očitno sta 0 in vsa množica radikalna diferencialna ideala. Sta pa to tukaj tudi edina radikalna diferencialna ideala, ker je množica realnih števil obseg. Napravimo zdaj s spremenljivko x vse možne polinome z realnimi koeficienti. Zaznamujmo to množico polinomov z R . Za navadno odvajanje je R Rittova algebra. Vsaka veriga naraščajočih radikalnih diferencialnih idealov se v R neha po končno členih. Videli smo namreč, da je ta lastnost izpolnjena v množici realnih števil. Po gornjem izreku velja potem tudi za R . Če razširimo R z diferencialno spremenljivko y , sledi na enak način, da je v $R\{y\}$ vsaka veriga naraščajočih radikalnih diferencialnih idealov končna. Elementi v $R\{y\}$ so diferencialni polinomi, torej vsi možni polinomi v $y, y', y'', \dots$, ki imajo za koeficiente realne polinome spremenljivke x .

Naj pomeni M poljubno neskončno zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots$ diferencialnih polinomov iz $R\{y\}$. Če izenačimo vsakega teh polinomov z nič, dobimo sistem neskončno algebraskih diferencialnih enačb $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, \dots$. Ali je mogoče o rešitvah tega sistema kaj ugotoviti? Rešitev sistema je seveda vsaka funkcija, ki ustreza vsem diferencialnim enačbam in ni ravno treba, da je vsebovana v R .

Povrnimo se k zaporedju M . Povedali smo že, da vsaka množica S diferencialnega kolobarja ustvarja najmanjši radikalni diferencialni ideal $\{S\}$, ki jo vsebuje. Napravimo s polinomi $a_1, a_2, a_3, \dots$ iz zaporedja M verigo naraščajočih radikalnih diferencialnih idealov

$$\{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \{a_1, a_2, a_3\} \subset \dots$$

Vemo, da se v $R\{y\}$ ta veriga po končno členih neha. Naj bo $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ njen zadnji člen. Množico polinomov $a_1, a_2, \dots, a_n$ zaznamujmo z F . Množica F je del množice M . Zato je vsaka rešitev sistema diferencialnih enačb M rešitev sistema diferencialnih enačb F . Uporabimo zdaj dejstvo, da množici F in M ustvarjata isti radikalni diferencialni ideal $\{F\} = \{M\}$. Vsak polinom a_i iz M je torej v F . Toda vsak element iz F ima po definiciji to lastnost, da se neka njegova potenca izraža kot linearna kombinacija elementov in odvodov elementov iz F , koeficienti pa so elementi iz $R\{y\}$. Ker je $a_i \in \{F\}$, velja torej pri nekem eksponentu m izražava:

$$a_i^m = c_1 a_1 + \dots + c_t a_n^{(k)}$$

Pri tem so vsi elementi $c_1, \dots, c_t$ iz $R\{y\}$. Če vnesemo v to izražavo za y kakšno rešitev sistema diferencialnih enačb F , dobimo na desni strani nič.

Vsaka rešitev sistema F je torej tudi rešitev diferencialne enačbe $a_i = 0$. Ker velja to za vse indekse i , vidimo, da so vse rešitve sistema F tudi rešitve sistema M . Da je res tudi narobe, smo pa že prej ugotovili. Če ima M rešitve, so to prav iste, kot jih ima F . Če M nima rešitev, jih tudi F nima.

Imamo torej tole ugotovitev: Skupnost rešitev poljubnega števnege sistema algebrajskih diferencialnih enačb se ujema s skupnostjo rešitev nekega končnega podsistema teh enačb. Ta ugotovitev se da v raznih smereh posplošiti, vendar se v to ne bi spuščali.

Literatura:

- I. Kaplansky, An introduction to differential algebra. Paris 1957.
- J. F. Ritt, Differential algebra. New York 1950.

METODA DANILEVSKEGA ZA DOLOČEVANJE LASTNIH VREDNOSTI IN LASTNIH VEKTORJEV MATRIK

EGON ZAKRAJŠEK

Računski center IMFM

Ena najtežjih nalog linearne algebre je problem lastnih vrednosti in vektorjev matrik. Dani matriki

$$A = \| a_{ij} \|$$

je treba poiskati vsa taka števila λ , da bo imela enačba

$$AX = \lambda X \quad (1)$$

netrivialne rešitve. Ta števila imenujemo lastne vrednosti matrike A , vektorje X pa lastne vektorje. Očitno ima sistem linearnih enačb (1), ki ga lahko napišemo v obliki

$$(A - \lambda E) X = 0 \quad (2)$$

netrivialno rešitev tedaj in le tedaj, če je determinanta sistema (2) enaka nič. Če to determinanto

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

razvijemo, vidimo, da je $D(\lambda)$ polinom n -te stopnje. Ta polinom imenujemo karakteristični polinom matrike A , njegove ničle pa so ravno lastne vrednosti matrike A . Ker je to determinanto težko razviti po potencah λ , se poslužujemo posebnih metod, ki nam omogočijo, da numerično izračunamo koeficiente karakterističnega polinoma. Če znamo izračunati njegove ničle, lahko po teh metodah izračunamo tudi lastne vektorje.

Metoda Danilevskega, o kateri bomo govorili, je, vsaj teoretično, univerzalna in jo lahko brez omejitev uporabimo za poljubne matrike. Prav tako se pred ostalimi metodami odlikuje z majhnim številom računskih operacij.

Izračun koeficientov karakterističnega polinoma

Oglejmo si matriko Frobeniusovega tipa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & p_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 \end{bmatrix}$$

Tej matriki lahko zlahka določimo karakteristični polinom, če ustrezno determinanto razvijemo po zadnjem stolpcu.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & p_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (p_1 - \lambda) (-\lambda)^{n-1} - p_2 (-\lambda)^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n =$$

$$= (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) \quad (3)$$

Zato skušajmo dani matriki A najti nesingularno matriko S , tako da bo

$$P = S^{-1} A S \quad (4)$$

Frobeniusova matrika. Ker sta si matriki podobni, imata iste lastne vrednosti, pa tudi lastni vektorji so med seboj preprosto povezani. To uvidimo takole:

Naj bo Y lastni vektor in λ lastna vrednost matrike P , torej

$$PY = \lambda Y$$

Upoštevajmo zvezo (4) in dobljeno enačbo množimo z leve z S

$$SS^{-1}ASY = \lambda SY$$

ali

$$A(SY) = \lambda(SY)$$

Če označimo

$$X = SY \quad (5)$$

dobimo

$$AX = \lambda X$$

Obe matriki imata iste lastne vrednosti, lastni vektorji matrike A pa se z enačbo (5) izražajo z lastnimi vektorji matrike P .

Po metodi Danilevskega skušamo najti transformacijsko matriko S kot produkt $n-1$ matrik

$$S = S_1 S_2 \dots S_{n-1}$$

Tedaj je

$$S^{-1} = S_{n-1}^{-1} S_{n-2}^{-1} \dots S_1^{-1}$$

in

$$P = S_{n-1}^{-1} S_{n-2}^{-1} \dots S_1^{-1} A S_1 S_2 \dots S_{n-1}$$

Vpeljimo oznake

$$A^{(1)} = A; \quad A^{(k+1)} = S_k^{-1} A^{(k)} S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Potem je

$$A^{(n)} = P$$

Z vsakim korakom pretvorimo po en stolpec dane matrike v ustrezen stolpec Frobeniusove matrike. Matrika $A^{(k)}$ ima obliko

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1k}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 1 & 0 & \dots & a_{2k}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

V matriki $A^{(k+1)}$ želimo imeti k -ti stolpec enak $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, kjer je enojka na $k+1$ -vem mestu. To lahko dosežemo z elementarnimi transformacijami: $k+1$ -vo vrstico matrike $A^{(k)}$ delimo z elementom $a_{k+1,k}^{(k)}$ in od i -te vrstice ($i \neq k+1$) odštejemo $k+1$ -vo vrstico, pomnoženo z $a_{ik}^{(k)}$. Če iste operacije izvršimo z enotno matriko, dobimo matriko S_k^{-1} :

$$S_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & s_{1,k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & s_{n,k+1} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

kjer je

$$s_{i,k+1} = -a_{ik}^{(k)} / a_{k+1,k}^{(k)} \quad i \neq k+1$$

$$s_{k+1,k+1} = 1 / a_{k+1,k}^{(k)}$$

Od tu sklepamo, da je transformacija, ki smo jo izvedli z matriko $A^{(k)}$ ekvivalentna množenju matrike $A^{(k)}$ z leve z S_k^{-1} (glej [2] str. 263). Tako dobimo pomožno matriko $B^{(k)}$

$$B^{(k)} = S_k^{-1} A^{(k)} = \| b_{ij}^{(k)} \|$$

kjer je

$$b_{k+1,j}^{(k)} = a_{k+1,j}^{(k)} / a_{k+1,k}^{(k)} \quad (6)$$

$$b_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \cdot b_{k+1,j}^{(k)} \quad i \neq k+1$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Da bo ta transformacija podobnostna, moramo matriko $B^{(k)}$ z desne množiti z S_k , kjer je S_k inverzna matrika matrike S_k^{-1} . Z množenjem se prepričamo, da je

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & a_{1k}^{(k)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nk}^{(k)} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Tako dobimo matriko $A^{(k+1)}$ kot produkt

$$A^{(k+1)} = B^{(k)} \cdot S_k = \| a_{ij}^{(k+1)} \|$$

kjer je

$$a_{ij}^{(k+1)} = b_{ij}^{(k)} \quad j \neq k+1 \quad (7)$$

$$a_{i, k+1}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(k)} a_{jk}^{(k)}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

S postopno uporabo formul (6) in (7) za $k = 1, 2, \dots, n-1$ dobimo matriko $P = A^{(n)}$, ki je Frobeniusovega tipa. Koeficiente karakterističnega polinoma $D(\lambda)$ lahko kar prečitamo in rešimo enačbo

$$D(\lambda) = 0$$

S tem je prvi del naloge rešen.

Izračun lastnih vektorjev

Za dano lastno vrednost λ izračunajmo najprej lastni vektor matrike P

$$PY = \lambda Y$$

Za komponente vektorja Y dobimo homogen sistem linearnih enačb

$$p_n y_n = \lambda y_1$$

$$y_{i-1} + p_{n-i+1} y_n = \lambda y_i \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Postavimo $y_n = 1$. Za preostale komponente vektorja Y dobimo rekurzivne formule

$$y_{i-1} = \lambda y_i - p_{n-i+1}, \quad i = n, n-1, \dots, 3, 2 \quad (8)$$

Če te formule primerjamo s Hornerjevo shemo za računanje vrednosti polinoma, vidimo, da so komponente lastnega vektorja Y : $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, ravno koeficienti polinoma, ki ga dobimo, če polinom $(-1)^n D(t)$ delimo s $(t - \lambda)$, kjer je λ lastna vrednost.

Lastni vektor matrike A dobimo iz enačbe (5)

$$X = SY = S_1 S_2 \dots S_{n-1} Y \quad (9)$$

Vpeljimo oznake

$$Y^{(n)} = Y$$

$$Y^{(k)} = S_k Y^{(k+1)}, \quad k = n-1, \dots, 2, 1 \quad (10)$$

Iz enačbe (9) je očitno, da je $Y^{(1)} = X$ lastni vektor matrike A . Če enačbe (10) izpišemo še po komponentah, kjer upoštevamo elemente matrik S_k , dobimo

$$y_i^{(k)} = y_i^{(k+1)} + y_{k+1}^{(k+1)} \cdot a_{ik}^{(k)} \quad i \neq k+1 \quad (11)$$

$$y_{k+1}^{(k)} = y_{k+1}^{(k+1)} \cdot a_{k+1, k}^{(k)}$$

$$k = n-1, n-2, \dots, 1$$

S tem je tudi drugi del problema rešen.

Izjemni primeri

Navedeni postopek lahko izvedemo, če je pri vsakem koraku element $a_{k+1, k}^{(k)} \neq 0$. V nasprotnem primeru pogledamo, če je sploh kak element $a_{ik}^{(k)} \neq 0$ ($i = k + 2, k + 3, \dots, n$). Če najdemo od nič različen element v i -ti vrstici, zamenjamo i -to in $k + 1$ -vo vrstico ter i -ti in $k + 1$ -vi stolpec. To je spet neka podobnostna transformacija in se zato lastne vrednosti ne spremenijo pri dobljenih lastnih vektorjih pa je treba zamenjati i -to in $k + 1$ -vo komponento.

Lahko se pa zgodi, da so vsi elementi v k -tem stolpcu pod diagonalo enaki nič. V tem primeru matrika $A^{(k)}$ razpade, to se pravi, da jo lahko zapišemo v obliki

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} P_k & C \\ \hline \emptyset & D \end{array} \right]$$

kjer je P_k Frobeniusova matrika reda k . Karakteristični polinom matrike A razpade na produkt dveh polinomov: prvi je karakteristični polinom matrike P_k , drugi pa karakteristični polinom matrike D . Prvega lahko takoj zapišemo, drugega pa lahko poiščemo po metodi Danilevskega, če posebej obravnavamo matriko D . Če matrika D ponovno razpade, proces na isti način ponovimo.

Če hočemo v primeru razpada izračunati lastni vektor matrike A , potrebujemo najprej lastni vektor matrike $A^{(k)}$, nato pa po formulah (11) izračunamo želeni lastni vektor. Tu ločimo dva primera.

1. primer. λ je lastna vrednost matrike P_k . V tem primeru iščemo lastni vektor matrike $A^{(k)}$ v obliki

$$Y^{(k)} = \left[\begin{array}{c} Y \\ \hline \emptyset \end{array} \right]$$

in dobimo

$$A^{(k)} Y^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} P_k & C \\ \hline \emptyset & D \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Y \\ \hline \emptyset \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} P_k Y \\ \hline \emptyset \end{array} \right]$$

$$\lambda Y^{(k)} = \left[\begin{array}{c} \lambda Y \\ \hline \emptyset \end{array} \right]$$

Vidimo, da je treba enostavno izračunati lastni vektor Y matrike P_k in mu dodati ustrezno število ničel, pa dobimo lastni vektor matrike $A^{(k)}$.

2. primer. λ je lastna vrednost matrike D . Najprej izračunamo po metodi Danilevskega lastni vektor Z matrike D . Lastni vektor matrike $A^{(k)}$ iščemo v obliki

$$Y^{(k)} = \left[\begin{array}{c} Y \\ \hline Z \end{array} \right]$$

in dobimo

$$A^{(k)} Y^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} P_k & C \\ \hline \emptyset & D \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Y \\ \hline Z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} P_k Y + CZ \\ \hline DZ \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} P_k Y + CZ \\ \hline \lambda Z \end{array} \right]$$

$$\lambda Y^{(k)} = \left[\begin{array}{c} \lambda Y \\ \hline \lambda Z \end{array} \right]$$

Vidimo, da mora biti Y rešitev enačbe

$$P_k Y - \lambda Y = -G \quad \text{oz.} \quad (P_k - \lambda E) Y = -G, \quad (12)$$

kjer je

$$G = CZ.$$

Denimo, da λ ni hkrati tudi lastna vrednost matrike P_k . V tem primeru je sistem (12) enolično rešljiv. Zapišimo ga v komponentah:

$$\begin{aligned} -\lambda y_1 + p_k y_k &= -g_1 \\ y_{i-1} - \lambda y_i + p_{k-i+1} y_k &= -g_i \quad i = 2, 3, \dots, k \end{aligned} \quad (13)$$

Sistem (13) lahko rešimo z nastavkom

$$\begin{aligned} y_i &= a_i + b_i y_k \quad i = 1, 2, \dots, k \\ a_k &= 0 \quad b_k = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Ta stavek vnesemo v zadnjih $k-1$ enačb sistema (13)

$$\left. \begin{aligned} a_{i-1} + b_{i-1} y_k &= \lambda a_i + \lambda b_i y_k - p_{k-i+1} y_k - g_i \\ a_{i-1} &= \lambda a_i - g_i \\ b_{i-1} &= \lambda b_i - p_{k-i+1} \end{aligned} \quad i = k, k-1, \dots, 2 \right\} \quad (15)$$

Izračunamo lahko vse a_i in b_i , iz prve enačbe sistema (13) pa še y_k

$$\begin{aligned} y_k (\lambda b_1 - p_k) + (\lambda a_1 - g_1) &= 0 \\ b_0 y_k + a_0 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Drugo enačbo v formuli (16) namreč dobimo, če formule (15) napišemo še za $i = 1$. Vidimo, da so b_i spet koeficienti polinoma, ki ga dobimo, če $(-1)^k D_k(t)$ delimo s $(t - \lambda)$, b_0 pa je ostanek pri deljenju in je v našem primeru različen od nič; zato y_k lahko izračunamo.

Če pa je $b_0 = 0$, tedaj je λ tudi lastna vrednost matrike P_k . Če je poleg tega tudi $a_0 = 0$, potem je y_k poljuben; lahko vzamemo $y_k = 0$ in dobimo

$$y_i = a_i \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Če pa je $a_0 \neq 0$, tedaj sistem (13) ni rešljiv, in tedaj k lastni vrednosti λ , ki je v tem primeru vsaj dvakratna, ne moremo najti nobenega neodvisnega lastnega vektorja več.

Iz tega lahko razberemo, kaj se dogaja pri večkratnih lastnih vrednostih:

Če ima matrika i -kratno lastno vrednost λ_0 , ustrezni lastni podprostor pa je j -dimenzionalen ($j \leq i$), potem pri reševanju matrika vsaj j -krat razpade, vsaj v j delnih Frobeniusovih matrikah dobimo vsaj po en λ_0 in v rekurzivnem postopku (15) dobimo natančno j -krat $a_0 = b_0 = 0$.

Vidimo, da je postopek popolnoma splošen in da v vsakem primeru izračunamo vse lastne vrednosti in vse lastne vektorje, kolikor jih eksistira. Prav tako ni vezan na realne lastne vrednosti, saj se v primeru kompleksnih lastnih vrednosti alogaritem nič ne spremeni.

Slaba stran metode pa je nestabilnost, ker števila, s katerimi računamo, razmeroma hitro naraščajo, pa tudi natančnost ni zelo dobra. Vendar se je

metoda pri neprevelikem redu matrike izkazala za zelo ugodno zaradi majhnega števila operacij.

Naj navedemo število množenj in deljenj, ki so potrebna, da izračunamo koeficiente karakterističnega polinoma pri nekaterih najbolj znanih metodah. Red matrike je n [1]:

Leverier $n^4 - n^3$

Krylov $5 n^3/2 + 3 n^2/2$

Samuelson $5 n^3/2 - n^2/2$

Danilevski $n^3 - n^2$

Literatura:

[1] D. K. Faddeev — V. N. Faddeeva: Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry, FM 1963.

[2] B. P. Demidovič, I. A. Maron: Osnovy vyčislitel'noj matematiki, FM 1960.

DELNO UREJENE ALGEBRAIČNE STRUKTURE

JOŽE VRABEC

1. Urejenostna polnost

Ponovimo najprej definicijo delne urejene množice! Vzemimo poljubno množico X ! V njej naj bo definirana neka binarna relacija med elementi. To relacijo bomo imenovali relacijo *delne urejenosti* in za elementa a in b , ki sta v relaciji, zapisali $a \leq b$, če veljajo aksiomi:

- A) za vsak $a \in X$ je $a \leq a$ (refleksivnost relacije);
- B) če je $a \leq b$ in $b \leq c$, je $a \leq c$ (tranzitivnost relacije);
- C) če je $a \leq b$ in $b \leq a$, je $a = b$ (antisimetričnost relacije).

Za množico X pa pravimo, da je z relacijo delno urejena. Če za elementa a in b velja $a \leq b$, pravimo, da je a pod b ali da je a manjši ali kvečjemu enak b . Včasih uporabljamo tudi zapis $a < b$, ki pomeni: $a \leq b$ in $a \neq b$. Če je $a < b$, pravimo, da je a strogo manjši od b . Delno urejeno množico X imenujemo *urejeno* ali tudi *linearno urejeno*, če poleg aksiomov A), B) in C) velja še

- D) za poljubna elementa $a, b \in X$ velja $a \leq b$ ali $b \leq a$.

Naj bosta X in Y delno urejeni množici! Preslikavo $f: X \rightarrow Y$ bomo imenovali *monotono*, če za poljubna elementa $a, b \in X$ iz $a \leq b$ sledi $f(a) \leq f(b)$. Povratno enolično preslikavo med množicama X in Y , ki je v obe smeri monotona, bomo imenovali (urejenostni) *izomorfizem*.

Eden najvažnejših primerov delno urejene množice je partitivna (potenčna) množica $\mathcal{P}(E)$ poljubne množice E . Če sta A in B poljubni podmnožici množice E , naj bo po definiciji $A \leq B$, če je $A \subset B$. Prav lahko je preveriti, da so za to relacijo izpolnjeni aksiomi A), B) in C). Delno urejenost, ki jo na ta način definiramo v partitivni množici (ali v kaki njeni podmnožici), imenujemo delno urejenost po inkluziji ali vključitvi. Če ima množica E vsaj dva elementa, aksiom D) ni izpolnjen, zato relacija inkluzije množice $\mathcal{P}(E)$ v splošnem ne ureja linearno.

Če uredimo naravna števila po velikosti, dobimo linearno urejeno množico. Imenujmo jo N ! Množico naravnih števil pa lahko delno uredimo še drugače, in sicer po deljivosti. Če sta m in n poljubni naravni števili, postavimo: $m \leq n$ natančno tedaj, ko je število n deljivo s številom m . Tudi za ta primer se je čisto lahko prepričati, da so izpolnjeni aksiomi A), B) in C). Delno urejeno množico, ki jo tako dobimo, imenujmo N_d ! Množici N in N_d se kot delno urejeni množici razlikujeta, čeprav imata iste elemente. Med njima imamo povratno enolično preslikavo, to je identično (vsako število se preslika vase), ki pa ni izomorfizem. V eno smer, kot preslikava iz N_d v N je sicer monotona: če je število n deljivo s številom m , je n tudi večji od m , obratno pa ne drži, zato preslikava $N \rightarrow N_d$ ni monotona.

Vzemimo poljubno delno urejeno množico X ! Naj bo E poljubna podmnožica množice X : $E = \{x_\xi \in X: \xi \in \mathcal{E}\}$! Vsak element y množice X , ki je večji od vsakega elementa množice E , torej $x_\xi \leq y$ za vsak $\xi \in \mathcal{E}$ (če sploh kak tak y

eksistira), bomo imenovali *zgornjo mejo* množice E . Rekli bomo, da je množica E *navzgor omejena*, če ima vsaj eno zgornjo mejo. Element $z \in X$ bomo imenovali *spodnjo mejo* množice E , če je $z \leq x_\xi$ za vsak $\xi \in \Xi$. Množico, ki ima vsaj eno spodnjo mejo, bomo imenovali *navzdol omejeno*. Navzgor in navzdol omejeno množico bomo kratko imenovali omejeno.

V delno urejeni množici $\mathcal{P}(E)$, pri čemer je E poljubna množica, je vsaka podmnožica omejena. Kar vzemimo poljubno družino podmnožic množice E : $\mathcal{M} = \{A_\xi \subset E : \xi \in \Xi\}$! Zgornja meja množice $\mathcal{M}$ je vsaka taka množica $A \subset E$, ki vsebuje vse množice A_ξ , $\xi \in \Xi$. Temu pogoju pa ustreza že osnovna množica E . Prazna množica pa je prav gotovo spodnja meja družine $\mathcal{M}$, saj vsaka množica A_ξ vsebuje prazno množico. V urejeni množici N je vsaka podmnožica navzdol omejena, ker je vsako naravno število večje ali enako 1, navzgor pa so omejene končne množice in samo te. Prav tako je v množici N_d . Ker je vsako naravno število deljivo z 1, je število 1 spodnja meja poljubne podmnožice množice N_d . Navzgor pa so tudi tu omejene končne in samo končne množice. Zgornja meja končne množice je vsak skupni mnogokratnik vseh elementov množice, npr. njihov produkt.

Naj bo $E = \{x_\xi \in X : \xi \in \Xi\}$ navzgor omejena podmnožica delno urejene množice X . Včasih je med vsemi zgornjimi mejami množice E , ki jih je v splošnem več, ena najmanjša. Element $x \in X$ je torej najmanjša zgornja meja ali *supremum* množice E , $x = \sup E$ ali $x = \sup_{\xi \in \Xi} x_\xi$, če velja:

za vsak $\xi \in \Xi$ je $x_\xi \leq x$;
če za vsak $\xi \in \Xi$ velja $x_\xi \leq y$, je $x \leq y$.

Analogno je definirana največja spodnja meja množice. Element $x_\xi \in X$ je največja spodnja meja ali *infimum* množice E , $z = \inf E$ ali $z = \inf_{\xi \in \Xi} x_\xi$, če velja:

če za vsak $\xi \in \Xi$ velja $y \leq x_\xi$, je $y \leq z$.

Kot je znano, imenujemo delno urejeno množico *mrežo*, če ima vsaka njena končna podmnožica supremum in infimum. Vsaka linearno urejena množica npr. je mreža: v vsaki končni podmnožici je en element največji in eden najmanjši. Ta dva sta seveda supremum oziroma infimum podmnožice.

Definirajmo: delno urejena množica X je *polna mreža*, če ima vsaka njena podmnožica najmanjšo zgornjo in največjo spodnjo mejo.

Če so v delno urejeni množici X tudi neomejene podmnožice, potem X ne more biti polna mreža. Lahko pa taka množica X ustreza malo milejšemu pogoju. Definirajmo: mreža X je *pogojno polna mreža*, če ima vsaka njena navzgor omejena podmnožica najmanjšo zgornjo, vsaka navzdol omejena podmnožica pa največjo spodnjo mejo.

Oglejmo si npr. delno urejeno množico $\mathcal{P}(E)$, pri čemer je E poljubna množica! Naj bo $\mathcal{M} = \{A_\xi \subset E : \xi \in \Xi\}$ poljubna družina podmnožic množice E . Očitno je $\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi = \sup \mathcal{M}$ in $\bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi = \inf \mathcal{M}$. Partitivna množica poljubne množice je torej polna mreža.

Vzemimo zdaj množico N ! Polna mreža to ne more biti, ker so v njej tudi neomejene množice. Pogojno polna pa seveda je, saj je v vsaki množici naravnih števil najmanjša, v vsaki navzgor omejeni množici pa tudi največje število. Podobno je z množico N_d . Mreža to je, ker ima vsaka njena končna podmnožica supremum in infimum. Zgornje meje take podmnožice so namreč skupni mnogokratniki, spodnje meje pa skupni delitelji vseh števil iz pod-

množice. Najmanjša zgornja meja je torej najmanjši skupni mnogokratnik, največja spodnja meja pa največji skupni delitelj. Jasno je, da je N_d pogojno polna mreža. Vsaka množica naravnih števil ima namreč največji skupni delitelj: to je najmanjši skupni mnogokratnik vseh skupnih deliteljev, ki jih je seveda samo končno mnogo. Navzgor pa so tako in tako omejene samo končne množice. Kot bomo spoznali, množica racionalnih števil, linearno urejena po velikosti, ni pogojno polna mreža.

2. Delno urejene grupe

Zelo zanimiv in ploden je študij delno urejenih množic, v katerih je definirana ena ali več algebraičnih operacij, pri čemer urejenostna in algebraična struktura nista neodvisni, ampak sta na določen način vsklajeni. Najbolj razvita je verjetno teorija delno urejenih linearnih prostorov. V tej teoriji se urejenostna in algebraična struktura pogosto povezujeta še s tretjo, topološko strukturo. Mi se z delno urejenimi linearnimi prostori ne bomo ukvarjali, ampak si bomo ogledali nekaj drugih osnovnih primerov.

Množico X imenujemo aditivno grupo, če je na njej definirana binarna operacija, ki jo imenujemo seštevanje: urejenemu paru (a, b) , kjer sta a in b poljubna elementa množice X , je enolično prirejen nek element $c \in X$, ki ga imenujemo vsoto elementov a in b . Omenjeno relacijo med elementi a , b in c zapišemo $c = a + b$. Pri tem pa morajo biti izpolnjeni naslednji aksiomi:

1. *vsota je asociativna: za poljubne elemente $a, b, c \in X$ velja $(a + b) + c = a + (b + c)$;*
2. *v X je neki tak element 0 , da za vsak $a \in X$ velja $a + 0 = 0 + a = a$;*
3. *če je a poljuben element množice X , je v X nek tak element $-a$, da velja $a + (-a) = (-a) + a = 0$.*

Element $-a$ imenujemo nasprotni element elementa a . Izkaže se, da je v grupi samo en element 0 in da ima vsak element en sam nasprotni element. Očitno je a nasprotni element elementa $-a$. Vsoto n sumandov, $n \geq 2$, ki so vsi enaki a , zapišemo kratko na . Vrstni red seštevanja tu očitno ni važen. Dodatno definiramo še: $1a = a$, $0a = 0$, $(-n)a = n(-a) = -(na)$ (n naravno število).

Če velja poleg aksiomov 1., 2. in 3. še naslednji:

4. *vsota je komutativna: za poljubna elementa $a, b \in X$ velja $a + b = b + a$,*

imenujemo grupo *komutativno* ali *Abelovo*. V komutativni grupi pišemo tudi $a - b$ namesto $a + (-b)$.

Naj bo množica X aditivna grupa in obenem delno urejena množica. Rekli bomo, da je X *delno urejena grupa*, če sta delna urejenost in operacija seštevanja v naslednji zvezi: če so a, b, c katerikoli trije elementi grupe X in je $a \leq b$, potem velja tudi $a + c \leq b + c$ in $c + a \leq c + b$.

Naj bo X delno urejena grupa. V splošnem lahko definiramo relacijo delne urejenosti v množici X še na mnogo drugih načinov. Da se bomo lažje izražali, se domenimo naslednje: kadar bomo rekli »delna ureditev grupe X « ali »relacija delno ureja grupo X «, bomo pri tem vedno razumeli tako delno urejenost, da je zanjo X delno urejena grupa. Če pa bomo mislili na kakršnokoli delno urejenost, bodo rekli: »delna ureditev množice X « ali »relacija delno ureja množico X «.

Vzemimo štiri poljubne elemente a, b, c, d delno urejene grupe X ! Če velja $a \leq b$ in $c \leq d$, potem je tudi $a + c \leq b + d$. To je prav lahko dokazati. Po definiciji delno urejene grupe iz $a \leq b$ sledi $a + c \leq b + c$, iz $c \leq d$ pa $b + c \leq b + d$. Zaradi tranzitivnosti delne urejenosti je potem tudi $a + c \leq b + d$.

Če za emeneta $a, b \in X$ velja $a \leq b$, potem je $-b \leq -a$. To dobimo takole: iz $a \leq b$ sledi $a + (-a) \leq b + (-a)$, odtod pa $(-b) + a + (-a) \leq (-b) + a + (-a)$ ali $-b \leq -a$.

Element $a \in X$, ki ustreza neenačbi $0 \leq a$, bomo imenovali *pozitiven element*. Če pa je $0 < a$, bomo rekli, da je a strogo pozitiven element. Množico vseh pozitivnih elementov grupe X označimo z X_+ ! Množica X_+ ima lastnosti:

- a) element 0 je v X_+ ;
- b) če za nek element $a \in X$ velja $a \in X_+$ in $-a \in X_+$, je $a = 0$;
- c) če je $a \in X_+$ in $b \in X_+$, je tudi $a + b \in X_+$;
- d) če je $a \in X_+$ in je x poljuben element v X , je $x + a + (-x) \in X_+$.

Preverimo te trditve! Pri a) ni kaj dokazovati.

b) Če je $a \in X_+$, torej $0 \leq a$, potem je, kot smo videli malo prej, $-a \leq 0$. Če pa je tudi $-a \in X_+$, torej $0 \leq -a$, je zaradi antisimetričnosti delne urejenosti $-a = 0$, torej tudi $a = 0$.

c) Zgoraj smo videli, da iz $0 \leq a$ in $0 \leq b$ sledi $0 + 0 \leq a + b$. S tem pa je trditev c) dokazana.

d) Če je $0 \leq a$, je $-x = 0 + (-x) \leq a + (-x)$, potem pa je tudi $0 = x + (-x) \leq x + a + (-x)$.

Te štiri lastnosti pa so tudi karakteristične za množico pozitivnih elementov delno urejene grupe. Velja namreč naslednje: če je X poljubna grupa in X_+ taka podmnožica množice X , ki ustreza pogojem a), b), c) in d), potem eksistira ena in samo ena taka delna urejenost grupe X , da je X_+ ravno množica vseh pozitivnih elementov grupe X . Dokažimo to trditev!

Najprej pokažimo, da je največ ena taka delna ureditev! Vzemimo, da že imamo tako relacijo, ki delno ureja grupo X , da je izbrana množica X_+ natančno množica pozitivnih elementov! Vzemimo poljubna elementa $a, b \in X$, ki sta v relaciji $a \leq b$! Očitno velja $0 = a + (-a) \leq b + (-a)$, torej je $b + (-a) \in X_+$. Velja pa tudi obratno: če je $b + (-a) \in X_+$, torej $0 \leq b + (-a)$, je $a \leq b$. Tako smo ugotovili: če sploh eksistira kaka delna urejenost grupe X , ki ima X_+ za množico pozitivnih elementov, potem je ta delna urejenost enolično določena s predpisom: $a \leq b$ tedaj in le tedaj, ko je $b + (-a) \in X_+$. Prepričajmo se, da je s tem predpisom res definirana delna urejenost grupe X ! Najprej moramo preizkusiti veljavnosti aksiomov A), B) in C) iz razdelka 1.

A) Ker je $a + (-a) = 0 \in X_+$, velja res $a \leq a$ za vsak element $a \in X$.

B) Naj trije poljubni elementi $a, b, c \in X$ ustrezajo relacijama $a \leq b$ in $b \leq c$! Tedaj velja $b + (-a) \in X_+$ in $c + (-b) \in X_+$. Po lastnosti c) množice X_+ je tudi $[c + (-b)] + [b + (-a)] = c + (-a) \in X_+$. To pa pomeni, da je $a \leq c$.

C) Naj bo $a \leq b$ in $b \leq a$! Velja torej $b + (-a) \in X_+$ in $a + (-b) \in X_+$. Ker pa je $a + (-b) = -[b + (-a)]$ — velja namreč $[a + (-b)] + [a + (-b)] = = [b + (-a)] + [a + (-b)] = 0$ — je $b + (-a) = 0$ (po lastnosti b) množice X_+). Iz te enačbe in enačbe $(-a) + b = 0$ (ki jo dobimo, če na obeh straneh prve enačbe z leve prištejemo $-b$, z desne pa b) pa sledi, da je $b = -(-a) = a$.

Množica X z dano relacijo res ustreza aksiomom delne urejenosti. Zdaj se moramo prepričati, da je X delno urejena grupa. Naj bosta elementa a in b v relaciji $a \leq b$! Vzemimo poljuben $x \in X$ in poskusimo primerjati elementa $a + x$ in $b + x$! Ker je $(b + x) + [-(a + x)] = (b + x) + [(-x) + (-a)] = b + (-a) \in X_+$, je res $a + x \leq b + x$. Kaj pa elementa $x + b$ in $x + a$? Izračunajmo spet $(x + b) + [-(x + a)] = x + [b + (-a)] + (-x)$. Ta element pa je po lastnosti d) množice X_+ spet v X_+ , ker je $b + (-a) \in X_+$.

Tako smo res dobili delno urejeno grupo. Ta ima množico X_+ za množico pozitivnih elementov. Kar vzemimo poljuben pozitiven element $a: 0 \leq a$! To pomeni: $a + (-0) = a \in X_+$. Očitno velja tudi obratno: če je $a \in X_+$, je $0 \leq a$. Dokaz je tako končan.

Delno urejenost grupe X moremo torej definirati tako, da podamo podmnožico $X_+ \subset X$, ki ustreza aksiomom a), b), c) in d). Ta način je tako priročen, da se ga bomo vedno držali. S to metodo moremo namreč definirati delno urejenost v algebralnem jeziku, saj v zgornjih aksiomih nastopajo samo algebraini pojmi. To pa je zelo ugodno, ker algebro dosti bolje obvladamo kot teorijo urejenosti.

Če je grupa komutativna, je aksiom d) avtomatično izpolnjen, tako da je odveč. Linearno urejeno grupo bomo definirali tako, da bomo aksiomom a), b), c) in d) dodali še aksiom e). Velja namreč trditev: delna urejenost, ki jo uvedemo z množico pozitivnih elementov, ki ustreza aksiomom a), b), c) in d), je linearna urejenost tedaj in le tedaj, ko velja

e) za vsak $a \in X$ je $a \in X_+$ ali $-a \in X_+$.

Dokažimo! Če je grupa X linearno urejena, velja za vsak $a \in X: 0 \leq a$ ali $a \leq 0$. Druga relacija je ekvivalentna naslednji: $0 \leq -a$. Velja torej $0 \leq a$ ali $0 \leq -a$, to je $a \in X_+$ ali $-a \in X_+$. Naj bo obratno izpolnjen aksiom e)! Vzemimo poljubna elementa $a, b \in X$! Po e) je $b + (-a) \in X_+$ ali $-[b + (-a)] = a + (-b) \in X_+$, torej je $a \leq b$ ali $b \leq a$. Trditev je dokazana.

Elemente $a \in X$, ki ustrezajo relaciji $a \leq 0$, imenujemo *negativne*. Element a je negativen tedaj in le tedaj, ko je $-a$ pozitiven. Zato lahko linearno urejeno grupo definiramo takole: to je delno urejena grupa, v kateri je vsak element pozitiven ali negativen.

Oglejmo si zdaj kak primer! Množica naravnih števil, označimo jo z N , je definirana s petimi Peanovimi aksiomi. Aksiom o neskončnosti iz teorije množic nam zagotavlja, da taka množica res eksistira. Samo iz Peanovih aksiomov izhajamo, ko definiramo v množici N operaciji seštevanja in množenja. Obe sta asociativni in komutativni, veže pa ju distributivnostni zakon. Naj bo S množica, ki sestoji iz dveh elementov, ki ju bomo označili s simboloma $+$ in $-$: $S = \{+, -\}$. Tvorimo direktni produkt $S \times N$, to je množico vseh možnih parov $(+, n)$ in $(-, n)$, kjer je n poljubno naravno število! Dodajmo množici $S \times N$ še en element, ki ga označimo s simbolom 0 ! Množico, ki jo tako dobimo, označimo z Z in imenujmo množico celih števil: $Z = (S \times N) \cup \{0\}$! S pomočjo seštevanja, ki je definirano v množici N , bomo definirali seštevanje celih števil. Postavimo: $(+, n) + 0 = (+, n)$; $(-, n) + 0 = (-, n)$; $(+, n) + (-, n) = 0$; $(+, m) + (+, n) = (+, m + n)$; $(-, m) + (-, n) = (-, m + n)$; $(+, m) + (-, n) = (+, k)$, če je $n + k = m$ in $(+, m) + (-, n) = (-, k)$, če je $m + k = n$. Množica Z s tako definiranim seštevanjem je komutativna grupa. Celó število 0 je element 0 grupe, celi števili $(+, n)$ in $(-, n)$ sta si nasprotna elementa. Če priredimo vsakemu naravnemu številu n celó število $(+, n)$, dobimo povratno enolično preslikavo med množico N in množico

celih števil oblike $(+, n)$. Če upoštevamo še, kako se cela števila te oblike seštevajo, ugotovimo, da smemo element $(+, n)$ pravzaprav identificirati z naravnim številom n . Tako lahko rečemo, da je N podmnožica grupe Z . Namesto $(+, n)$ bomo zato pisali kar n , simbol $(-, n)$ pa bomo nadomestili z $-n$. Grupa Z je najmanjša grupa, ki izomorfno vsebuje množico naravnih števil, kajti vsaka grupa, ki vsebuje vsa naravna števila, mora vsebovati vsaj še vse njim nasprotnne elemente in element 0.

Poskusimo grupo Z linearno urediti. Definirajmo: množica Z_+ naj sestoji iz vseh zastopnikov naravnih števil in števila 0! Preizkusiti moramo veljavnost aksiomov od a) do e). Aksioma a) in d) sta trivialno izpolnjena, aksiom b) velja, ker nobeno naravno število ni nasprotno nobenemu naravnemu številu, aksiom c) pa, ker je vsota dveh naravnih števil tudi naravno število. Ker sestoji grupa Z le iz naravnih števil, iz števila 0 in iz elementov, katerih nasprotni elementi so naravna števila, je izpolnjen tudi aksiom e). Zato izbrana množica Z_+ res definira linearno urejenost grupe Z . To je kar običajna urejenost celih števil »po velikosti«. Imenovali jo bomo naravna urejenost množice celih števil. Uvod o izvoru celih števil smo napravili zato, da ne bi kdo ugovarjal, češ, saj smo najprej morali poznati urejenost celih števil, da smo lahko definirali množico Z_+ kot množico naravnih, to je »pozitivnih« celih števil. Tako pa smo pokazali, da lahko množico naravnih števil v grupi celih števil karakteriziramo tudi brez urejenosti grupe Z .

Lahko pa bi grupo Z uredili tudi kako drugače. Za Z_+ bi npr. mogli vzeti tudi množico vseh nasprotnih elementov naravnih števil (in seveda število 0). Dobili bi spet linearno urejeno grupo, ki bi bila različna od tiste, ki smo jo definirali prej. Delno urejenost pa lahko uvedemo v grupo Z na zelo mnogo načinov.

Oglejmo si še R^3 , to je tridimenzionalni vektorski prostor! Kot vemo, je tudi to komutativna grupa za seštevaje. Delno urejenost bomo definirali takole: R_+^3 naj sestoji iz vektorjev prvega oktanta, to je iz vektorjev, ki imajo vse tri komponente nenegativne. Nič težko ni dokazati, da množica R_+^3 ustreza aksiomom a), b), c) in d). Tako postane R^3 delno urejena grupa. Linearno urejena pa ni, ker npr. vektor s komponentami $(1, -1, 0)$ ni niti pozitiven niti negativen.

Delno urejenost lahko definiramo v vsaki grupi. Če je X poljubna grupa, lahko namreč vzamemo, da X_+ sestoji samo iz elementa 0. Vsi aksiomi so trivialno izpolnjeni. Trivialen je tudi rezultat: v delno urejeni grupi X je vsak element primerljiv samo s seboj.

Bodi a poljuben strogo pozitiven element delno urejene grupe X ! Iz relacije $0 < a$ očitno sledi $0 < a + a = 2a$, $0 < 2a + a = 3a$ itd. S popolno indukcijo brez težave dokažemo, da je $0 < na$ za vsako naravno število n . Od tod pa sledi, da ima vsak strogo pozitiven element neskončen red (red elementa a je najmanjše tako naravno število n , da je $na = 0$; če pa je $na \neq 0$ za vsako naravno število n , pravimo, da ima a neskončen red). Isto velja za strogo negativne elemente, saj je red elementa $-a$ enak redu elementa a . Periodična grupa (grupa, v kateri ima vsak element končen red) zato ne dopušča nobene delne ureditve razen trivialne.

Poglejmo, kako je s polnostjo delne urejene grupe! Če je v grupi X samo element 0, je X gotovo polna mreža. Če pa ima X poleg 0 vsaj še en element a , ne more biti polna. Imamo namreč dve možnosti: ali je samo 0 pozitiven element, ali pa jih je več. V prvem primeru grupa gotovo ni polna, ker že

množica, ki sestoji iz elementov 0 in a , nima najmanjše zgornje meje. Ta dva elementa namreč nista primerljiva med seboj, pa tudi noben tretji element ni primerljiv z njima. Poglejmo, kako je, če je v X_+ še kak od 0 različen element b ! Če je grupa polna, eksistira tudi $u = \sup X$. Ker je tudi $u + b \in X$, je $u + b \leq u$. Po drugi strani pa iz $u \leq u$ in $0 < b$ sledi $u + b > u$, kar nam da protislovje. Grupa X torej ni polna. Lahko pa je delno urejena grupa pogojno polna.

Naj bo X poljubna delno urejena grupa, A pa njena podmnožica: $A = \{x_\xi \in X : \xi \in \Xi\}$! Velja naslednji izrek: če eksistira $\sup_{\xi \in \Xi} x_\xi$, potem eksistira tudi $\inf_{\xi \in \Xi} (-x_\xi)$ in velja $\inf_{\xi \in \Xi} (-x_\xi) = -\sup_{\xi \in \Xi} x_\xi$. Dokažimo! Naj torej eksistira $x = \sup_{\xi \in \Xi} x_\xi$! Ker tedaj za vsak $\xi \in \Xi$ velja $x_\xi \leq x$, je $-x \leq -x_\xi$. Element $-x$ je torej spodnja meja množice vseh elementov $-x_\xi$. Vzemimo zdaj poljubno drugo spodnjo mejo te množice: naj bo $y \leq -x_\xi$ za vsak ξ ! Tedaj velja $x_\xi \leq -y$, spet za vsak ξ . Element $-y$ je torej zgornja meja množice A , zato je $x \leq -y$. Od tod pa sledi $y \leq -x$. S tem pa je že dokazano, da je $-x = -\sup_{\xi \in \Xi} x_\xi = \inf_{\xi \in \Xi} (-x_\xi)$. Izrek velja tudi v obratni smeri: če eksistira $\inf_{\xi \in \Xi} x_\xi$, eksistira tudi $\sup_{\xi \in \Xi} (-x_\xi) = -\inf_{\xi \in \Xi} x_\xi$. To dobimo, če v prejšnjem izreku zamenjamo x_ξ z $-x_\xi$.

V linearno urejeni pogojno polni grupi ima vsaka navzgor omejena množica pozitivnih elementov supremum. Videli bomo, da velja tudi obratna trditev. Naj ima torej v linearno urejeni grupi X vsaka omejena množica pozitivnih elementov najmanjšo zgornjo mejo! Če je $A \subset X$ poljubna navzgor omejena množica in presek $A \cap X_+$ ni prazen, ima A najmanjšo zgornjo mejo: $\sup A = \sup (A \cap X_+)$. Naj bo zdaj A spet poljubna množica pozitivnih elementov. Dokazali bomo, da eksistira $\inf A$. Označimo z A^i množico vseh spodnjih mej množice A ! Množica A^i je očitno navzgor omejena in presek $A^i \cap X_+$ ni prazen, saj je $0 \in A^i$. Zato eksistira $x = \sup A^i$. Vsak element množice A je zgornja meja za množico A^i , zato je x manjši od vseh elementov množice A . To pomeni, da je tudi x spodnja meja množice A . Očitno je $x = \inf A$. Vzemimo zdaj poljubno množico negativnih elementov B ! Tudi ta množica ima najmanjšo zgornjo mejo. Množica $-B = \{x \in X : -x \in B\}$ ima namreč same pozitivne elemente, zato eksistira $\inf (-B)$, potem pa po zgoraj dokazanem izreku eksistira tudi $\sup B = -\inf (-B)$. Podobno dokažemo, da ima vsaka navzdol omejena množica negativnih elementov in sploh vsaka navzdol omejena množica največjo spodnjo mejo. Tako smo res dokazali: potreben in zadosten pogoj, da je linearno urejena grupa pogojno polna, je, da ima vsaka njena navzgor omejena podmnožica pozitivnih elementov najmanjšo zgornjo mejo. Prav isti izrek velja za poljubno delno urejeno grupo, le za dokaz potrebujemo malo več sredstev.

Vsaka delno urejena pogojno polna grupa ustreza Arhimedovemu aksiomu: če je $0 \leq a$ in če eksistira tak element $b \in X$, da za vsako naravno število n velja $na \leq b$, potem je $a = 0$. Vzemimo, da je res za nek pozitiven element a množica $A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$ navzgor omejena z elementom b ! Ker je grupa X po dogovoru pogojno polna, eksistira $x = \sup A$. Za vsako naravno število n velja torej $na \leq x$, pa tudi $(n+1)a \leq x$, saj je $n+1$ tudi naravno število. Če na obeh straneh zadnje neenačbe z desne prištejemo $-a$, dobimo:

$na \leq x + (-a)$. To pomeni, da je tudi element $x + (-a)$ zgornja meja množice A . Ker je x najmanjša zgornja meja, je $x \leq x + (-a)$. Po drugi strani pa iz $x \leq x$ in $-a \leq 0$ sledi $x + (-a) \leq x$. Zato je $x = x + (-a)$ in $a = 0$.

Obratna trditev ne drži. Arhimedovemu aksiomu ustrezajo tudi delno urejene grupe, ki niso pogojno polne.

3. Delno urejeni kolobarji

Pojdimo zdaj za korak dalje! Ogledali si bomo, kako se struktura delne urejenosti povezuje z algebraično strukturo kolobarja.

Množico X imenujemo *kolobar*, če je komutativna aditivna grupa, če je torej v njej definirano seštevanje, ki ustreza aksiomom 1., 2., 3. in 4. iz razdelka 1., in če je poleg seštevanja definirana v X še ena operacija, ki jo imenujemo množenje: vsakemu urejenemu paru (a, b) , $a, b \in X$, je enolično prirejen nek element $c \in X$, produkt elementov a in b : $c = ab$, pri čemer je izpolnjen aksiom:

5. za poljubne elemente $a, b, c \in X$ velja $(a + b)c = ac + bc$ in $c(a + b) = ca + cb$ (distributivnost množenja).

Če kolobar X ustreza aksiomu

6. za poljubne elemente $a, b, c \in X$ velja $(ab)c = a(bc)$, imenujemo kolobar *asociativen*, če pa je v njem izpolnjen aksiom

7. pri poljubnih $a, b \in X$ je $ab = ba$, je X komutativen kolobar. Včasih je v kolobarju izpolnjen tudi naslednji aksiom:

8. v kolobarju X je nek tak element e , da za poljuben $a \in X$ velja $ae = ea = a$.

Tak element e imenujemo *enoto* kolobarja. Kolobar ima kvečjemu eno enoto. Podmnožico $Y \subset X$ imenujemo *podkolobar* kolobarja X , če velja:

- i) če sta $a, b \in Y$, je tudi $a + b \in Y$;
- ii) če je $a \in Y$, je tudi $-a \in Y$;
- iii) če sta $a, b \in Y$, je tudi $ab \in Y$.

Naj bo X poljuben kolobar! Rekli bomo, da je X *delno urejen kolobar*, če je najprej delno urejen kot aditivna grupa, če je torej v X izbrana podmnožica X_+ , ki ustreza aksiomom a), b) in c) iz razdelka 2. (aksiom d) je avtomatično izpolnjen), in če je poleg teh izpolnjen še aksiom

f) če sta a in b poljubna elementa v X_+ , je $ab \in X_+$.

Če velja poleg tega še aksiom e), je X_+ linearno urejen kolobar.

Oglejmo si nekaj osnovnih pravil za množenje v delno urejenem kolobarju! Po aksiomu f) je produkt dveh pozitivnih elementov pozitiven. Očitno je pozitiven tudi produkt dveh negativnih elementov: če sta elementa a in b negativna, sta $-a$ in $-b$ pozitivna, zato je $(-a)(-b) = ab \in X_+$. Produkt pozitivnega in negativnega elementa pa je vedno negativen. Res: naj bo $0 \leq a$ in $b \leq 0$! Ker je $0 \leq -b$, je $ab = -[a(-b)] \leq 0$ in $ba = -[(-b)a] \leq 0$. Ker je tako produkt dveh pozitivnih kot produkt dveh negativnih elementov pozitiven, je v linearno urejenem kolobarju kvadrat vsakega elementa pozitiven, saj so v takem kolobarju samo pozitivni in negativni elementi. V linearno urejenem kolobarju, ki ima enoto e , je ta prav gotovo pozitivna, ker je $e = e^2$. Na osnovi teh ugotovitev se prav lahko prepričamo, da kolobarja kompleksnih števil (z običajnim seštevanjem in množenjem) ni mogoče linearno urediti.

Če bi namreč imeli kako linearno ureditev kolobarja kompleksnih števil, bi bili števili 1 in -1 obe pozitivni ($1 = 1^2$, $-1 = i^2$). To pa ni mogoče.

Naj bo X poljuben delno urejen kolobar in $a, b \in X$. Bodi $a \leq b$! Tedaj velja $0 \leq b - a$ in, če je c poljuben pozitiven element, je $0 \leq (b - a)c$ in $0 \leq c(b - a)$, zato je $ac \leq bc$ in $ca \leq cb$. Na enak način vidimo, da pri negativnem c iz $a \leq b$ sledi $ac \geq bc$ in $ca \geq cb$.

Oglejmo si zdaj kak primer! Označimo s C množico vseh realnih funkcij, zveznih na končnem intervalu $[a, b]$! Ker so vsota, razlika in produkt dveh zveznih funkcij spet zvezne funkcije, je množica C kolobar, seveda asociativen in komutativen. Poskusimo ta kolobar delno urediti! Poiskati moramo tako množico C_+ , ki bo ustrezala aksiomom a), b), c) in f). Vzemimo npr. za C_+ množico vseh tistih funkcij, ki imajo v vsaki točki intervala $[a, b]$ nenegativno vrednost. Ker sta vsota in produkt dveh takih funkcij spet nenegativni funkciji, ustreza ta množica C_+ vsem štirim aksiomom in nam zato res definira delno urejenost kolobarja C . Očitno je ta urejenost takale: če sta f in g dve poljubni funkciji iz C , je $f \leq g$ tedaj in le tedaj, ko velja $f(x) \leq g(x)$ (v običajnem smislu) za vsak x med a in b . Ni pa to edina možna delna ureditev kolobarja C . Za C_+ bi lahko vzeli npr. množico vseh funkcij, ki so na intervalu $[a, b]$ nenegativne in nepadajoče. Z enakim premislekom kot prej se prepričamo, da nam tudi ta razred C_+ definira delno urejenost kolobarja C , ki je seveda različna od prejšnje. Zdaj relacija $f \leq g$ pomeni, da je vrednost $f(x)$ povsod na intervalu $[a, b]$ manjša od $g(x)$, poleg tega pa, da je razlika $g(x) - f(x)$ najmanjša v točki a .

Vzemimo zdaj tridimenzionalni vektorski prostor R^3 ! To je kolobar, če vzamemo za produkt vektorjev a in b vektorski produkt $a \times b$. Kot vemo, ni ta kolobar niti asociativen niti komutativen. Izberimo poljuben od 0 različen vektor a in definirajmo: $R_+^3 = \{\lambda a : \lambda \geq 0\}$! Množica R_+^3 ima res vse lastnosti množice pozitivnih elementov delno urejenega kolobarja. Drugačne možnosti za delno ureditev kolobarja R^3 pa ni. Kar vzemimo poljubno množico R^3 , ki ustreza aksiomom a), b), c) in f)! Bodita $a, b \in R_+^3$! Po aksiomu f) je tedaj $a \times b \in R_+^3$ in $b \times a = -(a \times b) \in R_+^3$, to pa je mogoče le, če je $a \times b = 0$. Vektorja a in b sta torej kolinearna.

Oglejmo si spet grupo celih števil Z ! Če operacijo množenja, ki je definirana na množici naravnih števil, razširimo na vso množico Z : $(+, m)(+, n) = (+, mn)$, $(+, m)(-, n) = (-, mn)$, $(-, m)(-, n) = (+, mn)$, dobimo asociativen in komutativen kolobar, ki ga bomo označevali prav tako s simbolom Z . Prej smo linearno uredili grupo Z tako, da smo vzeli za Z_+ množico vseh naravnih števil in število 0. Ker pa je produkt dveh naravnih števil spet naravno število, nam ista množica Z_+ linearno ureja tudi kolobar Z . Zanimivo je, da je to sploh edina možna linearna ureditev kolobarja celih števil. Kolobar Z ima namreč enoto, to je število 1. Kot smo prej ugotovili, mora biti $0 < 1$. Potem pa so pozitivni elementi tudi števila $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ itd. Ker z zaporednim prištevanjem števila 1 lahko dobimo vsako naravno število, morajo biti vsa naravna števila pozitivna. Poleg njih je pozitiven element le še število 0, ker bi sicer bila v množici pozitivnih elementov vsaj dva nasprotna si elementa, različna od 0. Pač pa eksistira še mnogo delnih ureditev kolobarja celih števil. Za Z_+ lahko vzamemo npr. vsa soda naravna števila in število 0. Ta množica ustreza vsem aksiomom množice pozitivnih elementov delno urejenega kolobarja, ker sta vsota in produkt dveh sodih števil spet sodi števili. Podobno bi lahko sestavili Z_+ iz tistih naravnih števil, ki so deljiva s 3 itd.

4. Urejena polja

Kolobar X z enoto e imenujemo *obseg*, če poleg aksiomov 1), 2), 3), 4), 5) in 8) izpolnjuje še naslednjega:

9) vsak od 0 različen element $a \in X$ ima v X inverzni element, to je tak element a^{-1} , da je $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Vsak element v obsegu ima en sam inverzni element. Element a je inverzen elementu a^{-1} .

Podkolobar Y obsega X , to je tako podmnožico $Y \subset X$, ki ustreza aksiomom i), ii) in iii) iz razdelka 3., imenujemo *podobseg*, če je izpolnjen še aksiom

iv) če je $a \in Y$ in $a \neq 0$, je tudi $a^{-1} \in Y$.

Asociativen in komutativen obseg bomo imenovali *polje*, podobsegu polja pa bomo rekli *podpolje*.

Malo podrobneje si bomo ogledali urejena polja. Naj bo torej P polje, v katerem množica P_+ , ki ustreza aksiomom a), b), c), e) in f), definira relacijo linearne urejenosti. Če je element $a \in P$ strogo pozitiven, potem je a^{-1} tudi strogo pozitiven, kajti če bi bil negativen, bi bila tudi enota $e = a^{-1}a$ negativna, to pa ni mogoče. Inverzni element strogo negativnega elementa pa je tudi sam negativen.

Poskusimo za primer urediti polje racionalnih števil $\mathbb{Q}$! Racionalna števila so, kot je znano, definirana takole: najprej tvorimo direktni produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ množice celih števil same s seboj, to je množico vseh urejenih parov (a, b) , pri čemer sta a in b poljubni celi števili. Pare (a, b) , pri katerih je $b \neq 0$, bomo imenovali *ulomke*. Množico vseh ulomkov označimo s $\mathbb{Q}_0$! Namesto običajnega zapisa para (a, b) uporabljamo za ulomke rajši simbol a/b . V množici $\mathbb{Q}_0$ definiramo zatem ekvivalenčno relacijo: ulomek a/b je ekvivalenten ulomku c/d , če je $ad = bc$. Ta relacija nam množico $\mathbb{Q}_0$ razdeli na več ekvivalenčnih razredov; ekvivalenčni razred, to je množica vseh med seboj ekvivalentnih ulomkov. Vsak element množice $\mathbb{Q}_0$ je potem v enem in samo v enem ekvivalenčnem razredu. Množico vseh ekvivalenčnih razredov označimo s $\mathbb{Q}$ in imenujemo množico racionalnih števil. Vsako racionalno število je torej mogoče predstaviti z nekim parom celih števil ali ulomkom a/b , pri čemer dva ulomka a/b in c/d predstavljata isto racionalno število tedaj in le tedaj, ko je $ad = bc$. Racionalno število, ki ga predstavlja ulomek a/b , bomo kratko označili z $[a/b]$.

V množici $\mathbb{Q}$ lahko definiramo seštevanje in množenje. Bodita $[a/b]$ in $[c/d]$ poljubni racionalni števili! Vsoto in produkt definiramo takole: $[a/b] + [c/d] = [ad + bc/bd]$, $[a/b][c/d] = [ac/bd]$. Izkaže se, da je ta definicija enolična, to je, vsota in produkt nista odvisna od tega, s katerima ulomkoma predstavimo racionalni števili, ki ju seštevamo oziroma množimo. Seštevanje in množenje racionalnih števil sta asociativni in komutativni operaciji, ustrezata pa tudi distributivnostnemu zakonu. Število $[0/a]$, kjer je a poljubno od 0 različno celo število, je element 0 za seštevanje, element $[1/1]$ pa enota za množenje. Vsako racionalno število ima nasprotni element: za število $[a/b]$ je to $[-a/b]$; eksistira tudi inverzni element za vsako od 0 različno racionalno število: inverzni element števila $[a/b]$ je $[b/a]$. Tako smo v množici $\mathbb{Q}$ definirali strukturo polja.

Če priredimo vsakemu celemu številu a racionalno število $[a/1]$, je vsoti celih števil $a + b$ prirejeno racionalno število $[a + b/1] = [a/1] + [b/1]$, pro-

duktu ab pa število $[ab/1] = [a/1][b/1]$. To pomeni, da je s preslikavo $a \rightarrow [a/1]$ podan algebraični izomorfizem kolobarja Z na podkolobar polja Q . Ker izomorfne strukture lahko identificiramo, smemo reči, da je Z podkolobar polja Q . Racionalna števila oblike $[a/1]$ bomo v prihodnje imenovali kar cela števila.

Vzemimo, da imamo neko linearno ureditev polja Q , ki jo definira razred pozitivnih elementov Q_+ . Ta ureditev inducira tudi v Z kot podmnožici množice Q neko linearno urejenost. Jasno je, da je za to ureditev Z linearno urejen kolobar z množico $Z_+ = Z \cap Q_+$ kot množico pozitivnih elementov. Ugotovili pa smo, da je mogoče kolobar Z urediti samo na en način: Z_+ mora biti ravno množica vseh naravnih števil in število 0. Tako smo ugotovili: če je sploh mogoče polje Q na kak način linearno urediti, potem vsebuje Q_+ vsa naravna števila. Pa denimo, da eksistira neka linearna ureditev polja Q ! Vzemimo poljuben strogo pozitiven element $[a/b]$! Če ga pomnožimo z naravnim številom $[b^2/1]$, ki je tudi pozitivno, moramo dobiti spet pozitiven element. Ta produkt, $[a/b][b^2/1] = [ab/1]$, pa je celo število, zato je pozitivno le, če je ab naravno število. Velja tudi obratno: če je ab naravno število, je $[ab/1] \in Q_+$, prav tako je v Q_+ število $[1/b^2]$ kot inverzni element naravnega števila; zato je $[ab/1][1/b^2] = [a/b] \in Q_+$. Vidimo torej: če sploh eksistira kaka ureditev polja Q , je ena sama in je določena s predpisom: v Q_+ so natančno tista racionalna števila $[a/b]$, pri katerih je ab naravno število ali 0. Ta definicija točno določa za vsako racionalno število, ali je v Q_+ ali ne, ne glede na to, s katerim ulomkom predstavimo racionalno število: naj bo $[a/b] = [c/d]$; po definiciji ekvivalence ulomkov je tedaj $ad = bc$. Pomnožimo to enačbo na obeh straneh z bd : $(ab)d^2 = (cd)b^2$! Ker sta b^2 in d^2 naravni števili, velja: če je eden od produktov ab in cd naravno število ali 0, je tudi drugi. Tako smo dokazali, da je naša definicija množice Q_+ smiselna. Zdaj pa pokažimo, da Q_+ ustreza aksiomom množice pozitivnih elementov urejenega kolobarja! Aksiom a) je jasno izpolnjen.

b) Naj bo $[a/b] \in Q_+$ in $-[a/b] = [-a/b] \in Q_+$! Ker oba produkta, ab in $(-a)b = -(ab)$, ne moreta biti naravni števili, je $ab = 0$. Ker je $b \neq 0$, je $a = 0$ in $[a/b] = 0$.

c) Bodita $[a/b], [c/d] \in Q_+$! Vsota teh dveh števil je $[ad + bc/bd]$, to pa je spet element množice Q_+ , saj je $(ad + bc)(bd) = (ab)d^2 + b^2(cd)$ prav gotovo naravno število ali pa 0.

e) Če je $[a/b]$ poljubno racionalno število, je ab ali $(-a)b$ naravno število ali 0, zato je $[a/b]$ ali $-[a/b]$ v Q_+ .

f) Če sta ab in cd naravni števili ali 0, je tudi $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ naravno število ali 0. Zato iz $[a/b] \in Q_+$ in $[c/d] \in Q_+$ sledi $[a/b][c/d] \in Q_+$.

Tako smo res uspeli definirati linearno urejenost polja Q . To urejenost imenujemo naravno urejenost množice racionalnih števil.

Vzemimo zdaj poljubno urejeno polje P ! Ker je enota e strogo pozitiven element, je $ne \neq 0$ in $(-n)e = n(-e) \neq 0$ za vsako naravno število n . To smo ugotovili že pri študiju delno urejenih grup. Zato eksistira $(ne)^{-1}$ pri vsakem od 0 različnem celem številu n . Označimo s P^0 množico vseh elementov polja P , ki jih lahko zapišemo v obliki $(me)(ne)^{-1}$, kjer sta m in n poljubni celi števili, $n \neq 0$. Poglejmo najprej, kdaj dve taki izražavi pomenita isti element! Naj bo $(me)(ne)^{-1} = (pe)(qe)^{-1}$! Če to enačbo pomnožimo na obeh straneh z $(ne)(qe)$, dobimo: $(me)(qe) = (ne)(pe)$. Izrazi me, ne, pe, qe so vsote, zato lahko uporabimo distributivnostni zakon: $(me)(qe) = (mq)e^2 = mqe$. Tako dobimo $mqe = npe$, oziroma $(mq - np)e = 0$. Kot smo že prej rekli, je to

mogoče le, če je $mq = np$. Naj bo obratno $mq = np$, $n \neq 0$, $q \neq 0$! Ves račun lahko napravimo tudi v obratni smeri: iz $mqe = npe$ sledi po distributivnosti $(me)(qe) = (ne)(pe)$. Ker eksistirata $(qe)^{-1}$ in $(ne)^{-1}$, sledi iz zadnje enačbe $(me)(ne)^{-1} = (pe)(qe)^{-1}$. Tako smo prišli do naslednjega kriterija: $(me)(ne)^{-1} = (pe)(qe)^{-1}$ tedaj in le tedaj, ko je $mq = np$.

Priredimo ulomku m/n element $(me)(ne)^{-1}$ množice P^0 ! Kot smo videli, je s tem dvema ekvivalentnima ulomkoma prirejen isti element v P^0 ; obratno, če dvema ulomkoma pripada po zgornjem predpisu isti element množice P^0 , sta ulomka ekvivalentna. To pa pomeni, da nam predpis $[m/n] \rightarrow (me)(ne)^{-1}$ definira povratno enolično preslikavo množice racionalnih števil na množico P^0 .

Izračunajmo vsoto dveh poljubnih elementov množice P^0 ! Vzemimo štiri poljubna cela števila m, n, p, q , $n \neq 0$, $q \neq 0$! Kot smo ugotovili, je $(me)(ne)^{-1} = (mqe)(nqe)^{-1}$ in $(pe)(qe)^{-1} = (npe)(nqe)^{-1}$, zato je $(me)(ne)^{-1} + (pe)(qe)^{-1} = (mqe + npe)(nqe)^{-1} = [(mq + np)e][(nq)e]^{-1} \in P^0$. Podobno ugotovimo za produkt: $[(me)(ne)^{-1}][(pe)(qe)^{-1}] = [(me)(pe)][(ne)(qe)]^{-1} = [(mp)e][(nq)e]^{-1} \in P^0$. Ker poleg tega lahko element 0 zapišemo v obliki $(0e)(1e)^{-1}$, enoto pa v obliki $(1e)(1e)^{-1}$, ker je element $[(-m)e](ne)^{-1}$ nasprotni, element $(ne)(me)^{-1}$ pa inverzni element elementa $(me)(ne)^{-1}$, velja: množica P^0 je podpolje polja P in sicer najmanjše podpolje, kajti vsako podpolje vsebuje hkrati z enoto polja vse elemente oblike ne , zato pa tudi vse elemente oblike $(me)(ne)^{-1}$, torej vse podpolje P^0 . Če pa upoštevamo še, kako izračunamo vsoto in produkt dveh elementov polja P^0 , vidimo, da je povratno enolična preslikava med poljema P^0 in Q , ki smo jo definirali zgoraj, algebraični izomorfizem. Podpolje P^0 bomo zato imenovali *racionalno podpolje* polja P , elemente podpolja P^0 pa *racionalne elemente* polja P .

Ker v algebri ne delamo razlik med izomorfnimi strukturami, lahko polji P^0 in Q identificiramo. Smemo torej reči, da vsako urejeno polje vsebuje polje racionalnih števil kot podpolje. Zdaj pa upoštevajmo res še, da je polje P urejeno. Do zdaj namreč tega vsaj bistveno še nismo potrebovali. Urejenost polja P inducira urejenost tudi v svojem podpolju Q . Očitno je Q za to ureditev urejeno polje. Ugotovili pa smo, da je mogoče polje Q urediti na en sam način. Zato velja: možne so samo take ureditve polja P , ki v racionalnem podpolju inducirajo naravno urejenost racionalnih števil; ali: vsako urejeno polje vsebuje polje racionalnih števil kot svoje urejeno podpolje.

5. Urejena pogojno polna polja

Čeprav proučujemo delno urejene algebraične strukture, se že ves čas ukvarjamo samo z algebro, kajti tudi definicijo delne urejenosti v algebraični strukturi smo prevedli v algebraični jezik, delno urejenost znamo definirati s samimi algebraičnimi pojmi. Polnost oziroma pogojna polnost pa sta tipično urejenostna pojma, ne znamo ju formulirati algebraično. Ker smo že prej dokazali, da delno urejena grupa ne more biti polna, tudi ne more eksistirati urejeno polno polje. Poglejmo, kaj lahko povemo o urejenih pogojno polnih poljih!

Naj bo P poljubno urejeno pogojno polno polje! Ker je to obenem urejena pogojno polna grupa, velja v njem Arhimedov aksiom: če sta a in b poljubna strogo pozitivna elementa, je relacija $na \leq b$ izpolnjena kvečjemu za končno mnogo naravnih števil n . Od tod pa sledi: če je x poljuben strogo pozitiven element polja P , eksistira tak racionalen element $a \in P^0$, da velja $0 < a < x$.

Za neko naravno število n je namreč $e < nx = (ne)x$, torej je $e(ne)^{-1} < x$, tako da lahko vzamemo $a = (ne)^{-1}$. Vzemimo zdaj dva poljubna pozitivna elementa x in y ! Naj bo $x < y$, torej $0 < y - x$! Kot smo pravkar videli, za neko naravno število n velja $(ne)^{-1} < y - x$. Fiksirajmo to število n ! Po Arhimedovem aksiomu velja neenačba $me \leq (ne)x$ kvečjemu za končno mnogo naravnih števil m , zato eksistira tako naravno število m , da velja $(m-1)e \leq (ne)x < me$. Tako imamo $x < (me)(ne)^{-1}$, iz relacij $[(m-1)e](ne)^{-1} \leq x$ in $(ne)^{-1} < y - x$ pa sledi še $(me)(ne)^{-1} = [(m-1)e + e](ne)^{-1} < (y-x) + x = y$. Dokazali smo torej: pri poljubnih pozitivnih x in y , ki sta v relaciji $x < y$, eksistira najmanj en tak racionalen element a , da velja $x < a < y$. Očitno velja ta trditev tudi, če sta x in y poljubna elementa polja P in je $x < y$.

Bodi $x \in P$ poljuben strogo pozitiven element! Označimo s P_x množico vseh strogo pozitivnih racionalnih elementov, ki so pod x : $P_x = \{a \in P^0 : 0 < a \leq x\}$! Kot smo videli, množica P_x za noben strogo pozitiven x ni prazna. Če velja $0 < x \leq y$, je očitno $P_x \subset P_y$; pri tem množici P_x in P_y ne moreta biti enaki, če x in y nista enaka. Kajti, če je $x < y$, eksistira vsaj en racionalen a , ki je večji od x , pa manjši od y . Ta a je torej v množici P_y , ne pa tudi v P_x . Očitno velja tudi obratna implikacija: če je $P_x \subset P_y$, je $x \leq y$. Na osnovi tega prav lahko dokažemo naslednje pravilo: $x = \sup P_x$. Po definiciji je namreč x nad vsakim elementom množice P_x ; če pa je še kak element $y \in P$ večji od vsakega elementa množice P_x , je $P_x \subset P_y$; od tod pa sledi $x \leq y$.

Če sta A in B poljubni podmnožici polja P , naj pomeni: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$!

Izračunajmo zdaj $\sup(P_x + P_y)$! Vzemimo poljuben element $(a+b) \in (P_x + P_y)$, $a \in P_x$, $b \in P_y$! Ker iz $a \leq x$ in $b \leq y$ sledi $a + b \leq x + y$, je $x + y$ zgornja meja množice $P_x + P_y$. Naj bo z poljubna zgornja meja te množice! Za poljubna $a \in P_x$, $b \in P_y$ bo torej veljalo $a + b \leq z$. Fiksirajmo b ! Ker velja $a \leq z - b$ za vsak $a \in P_x$, je $z - b$ zgornja meja množice P_x . Vsaka zgornja meja pa je večja od supremuma množice, zato je $x = \sup P_x \leq z - b$. Od tod pa sledi $b \leq z - x$ in, ker ta relacija velja za vsak $b \in P_y$, je $z - x$ zgornja meja množice P_y ; velja torej $\sup P_y = y \leq z - x$ ali $x + y \leq z$. Element $x + y$ je torej najmanjša zgornja meja množice $P_x + P_y$. Podobno dokažemo, da je $xy = \sup(P_x P_y)$: element xy je večji od vseh produktov ab , $a \in P_x$, $b \in P_y$, ker je razlika $xy - ab = x(y - b) + b(x - a)$ pozitivna. Če pa je še kak element z večji od vseh produktov ab , $a \in P_x$, $b \in P_y$, velja za vsak fiksen b relacija $a \leq zb^{-1}$, torej je tudi $x \leq zb^{-1}$. Za vsak b velja torej $b \leq zx^{-1}$, zato je tudi $y \leq zx^{-1}$ ali $xy \leq z$.

Dokazali bomo zanimiv in važen izrek: *poljubni dve urejeni pogojno polni polji sta algebraično in urejenostno izomorfni*.

Bodita res P in R dve poljubni urejeni pogojno polni polji! Kot smo ugotovili, sta njuni racionalni podpolji P^0 in R^0 algebraično in urejenostno izomorfni polju racionalnih števil, zato sta tudi med seboj izomorfni. Ta izomorfizem $\varphi: P^0 \rightarrow R^0$ je, kot vemo, definiran takole: če je e enota polja P , element f pa enota polja R , je $\varphi[(me)(ne)^{-1}] = (mf)(nf)^{-1}$. Poizkusimo izomorfizem φ razširiti do izomorfizma polja P na polje R ! Naj bo x poljuben strogo pozitiven element polja P ! Označimo: $B_x = \varphi(P_x) = \{\varphi(a) : a \in P_x\}$! Ker velja $x < x + e$, eksistira tak element $c \in P^0$, da je $x < c < x + e$. Racionalni element c je torej zgornja meja množice P_x . Ker je φ urejenostni izomorfizem, je $\varphi(c)$ zgornja meja množice B_x . Ta je torej navzgor omejena in, ker je R pogojno polna mreža, eksistira $\sup B_x$. Definirajmo: $\psi(x) = \sup B_x$! Če posta-

vimo še $\psi(0) = 0$, smo definirali neko enolično preslikavo $\psi: P_+ \rightarrow R_+$. Poglejmo, kaj je $\psi(x)$, če je x racionalen element! V tem primeru je x element množice P_x in je seveda njen največji element. Zato je element $\varphi(x)$ največji v množici B_x , torej je $\psi(x) = \sup B_x = \varphi(x)$. Preslikava ψ se torej na P^0 ujema s preslikavo φ . Naj bo, obratno, $\psi(x) = b \in R^0$! Za inverzno sliko $\varphi^{-1}(b) = a$ imamo tri možnosti: ali je $a < x$, ali $a = x$, ali $x < a$. Prva možnost je izključena, kajti če bi bilo $a < x$, bi v P^0 eksistiral tak element c , da bi veljalo $a < c < x$; zato bi bilo tudi $\varphi(a) = b < \varphi(c)$. To pa ni mogoče, kajti $b = \sup B_x$, element $\varphi(c)$ pa je v B_x . Poglejmo, kaj sledi iz predpostavke $x < a$! Spet bi eksistiral tak element $c \in P^0$, da bi veljali relaciji $x < c < a$. Element c bi bil tedaj zgornja meja množice P_x , torej bi bil $\varphi(c)$ zgornja meja za B_x . To pa spet ni mogoče, ker iz $c < a$ sledi $\varphi(c) < \varphi(a) = b$, element b pa je najmanjša zgornja meja množice B_x . Edina možnost je torej $a = x$. Tako smo ugotovili, da iz $\psi(x) \in R^0$ sledi $x \in P^0$ in $\psi(x) = \varphi(x)$.

Vzemimo zdaj spet poljuben strogo pozitiven element $x \in P$ in postavimo $y = \psi(x)$! Vzemimo poljuben element $b \in R_y = \{a \in R^0: 0 < a \leq y\}$! Ta je manjši ali pa enak y . Kot smo pravkar ugotovili, iz $b = y = \psi(x)$ sledi $b = \varphi(x) \in B_x$. Če pa je $b < y$, eksistira v B_x tak element a , da je $b < a$. Tedaj je tudi $\varphi^{-1}(b) < \varphi^{-1}(a) \leq x$ in zato $\varphi^{-1}(b) \in P_x$ ter $b \in B_x$. Vidimo, da je $R_y \subset B_x$. Ker pa je obenem $B_x \subset R_y$, saj je $y = \sup B_x$, velja: za vsak $x > 0$ je $\psi(P_x) = R_{\psi(x)}$. Od tod pa očitno sledi, da je preslikava $\chi: R_+ \rightarrow P_+$, ki je definirana s predpisoma: $\chi(y) = \sup \varphi^{-1}(R_y)$ in $\chi(0) = 0$, inverzna preslikavi ψ : za vsak $x \in P_+$ velja $\chi(\psi(x)) = x$ in za vsak $y \in R_+$ je $\psi(\chi(y)) = y$. Preslikava ψ je torej povratno enolična. Ugotovili bomo, da je monotona. Naj bo $y_1 = \psi(x_1)$ in $y_2 = \psi(x_2)$! Kot vemo, iz relacije $x_1 \leq x_2$ sledi $P_{x_1} \subset P_{x_2}$. Tedaj pa velja tudi $R_{y_1} = \varphi(P_{x_1}) \subset \varphi(P_{x_2}) = R_{y_2}$ in zato $y_1 \leq y_2$. Preslikava ψ je torej res monotona. Prav tako dokažemo, da je monotona inverzna preslikava χ , zato velja: ψ je urejenostni izomorfizem.

Razširimo zdaj definicijsko območje preslikave ψ na vse polje P ! Postavimo: če je $x < 0$, bodi $\psi(x) = -\psi(-x)$! Očitno tako razširjena preslikava ostane povratno enolična. Pa tudi urejenostni izomorfizem je še vedno. Kar vzemimo poljubna elementa $x_1, x_2 \in P$, ki sta v relaciji $x_1 \leq x_2$! Postavimo $\psi(x_1) = y_1$, $\psi(x_2) = y_2$! Primer, ko sta x_1 in x_2 strogo pozitivna, smo že obravnavali. Vzemimo, da velja $x_1 \leq 0 \leq x_2$. Tudi zdaj bo $y_1 \leq y_2$, saj je y_1 negativen, y_2 pa pozitiven. Bodita končno x_1 in x_2 negativna! Ker sta $-x_1$ in $-x_2$ pozitivna in ker velja $-x_2 \leq -x_1$, je $-y_2 = \psi(-x_2) \leq \psi(-x_1) = -y_1$, torej je spet $y_1 \leq y_2$. Enako se prepričamo, da je monotona inverzna preslikava. Razširjena preslikava ψ je torej res urejenostni izomorfizem.

Končno bomo ugotovili, da je ψ algebraični izomorfizem. Naj bosta x in y strogo pozitivna elementa polja P ! Ugotovili smo, da je $\sup P_{x+y} = x + y = \sup(P_x + P_y)$. Ker je ψ urejenostni izomorfizem, je tudi $\sup \psi(P_{x+y}) = \sup \psi(P_x + P_y)$. Leva stran te enačbe je enaka $\psi(x + y)$, desno stran pa lahko izrazimo takole: $\sup \psi(P_x + P_y) = \sup \varphi(P_x + P_y) = \sup [\varphi(P_x) + \varphi(P_y)] = \sup [R_{\psi(x)} + R_{\psi(y)}] = \psi(x) + \psi(y)$. Tako smo dobili identiteto $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$, ki velja, če sta x in y pozitivna. Za taka x in y dobimo čisto analogno še $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$. Obe identiteti pa veljata tudi v splošnem primeru, to je pri poljubno izbranih $x, y \in P$. Naj bo npr. $y < 0 < x$, $0 \leq x + y$! Označimo $z = x + y$! Ker je $0 < -y$ in velja $x = z + (-y)$, je $\psi(x) = \psi(z) + \psi(-y) = \psi(z) - \psi(y)$ ali $\psi(z) = \psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$. Na podoben način dokažemo veljavnost te formule v ostalih primerih. Tudi za formulo

$\psi(xy) = \psi(x) \psi(y)$ dokažemo brez težave, da velja čisto splošno. Preslikava $\psi: P \rightarrow R$ je torej res urejenostni in algebraični izomorfizem in tako je naš izrek dokazan.

6. Realna števila

Zdaj se pojavi vprašanje, če sploh eksistira kako urejeno pogojno polno polje. Če eksistira, potem je v bistvu samo eno, kot nam zagotavlja prejšnji izrek. Oglejmo si polje racionalnih števil! Hitro bomo videli, da to polje ni pogojno polno. Označimo z E množico vseh pozitivnih racionalnih števil, katerih kvadrat je manjši od 2! Ker je $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, velja za pozitivni števili a in b relacija $b^2 \leq a^2$ tedaj in le tedaj, ko je $b \leq a$. Množica E je zato navzgor omejena, saj je že $2^2 > 2$. Če je Q pogojno polna mreža, mora eksistirati $x = \sup E$. Ker $x^2 \neq 2$ — dokaz, da kvadrat nobenega racionalnega števila ni enak 2, je zelo znan in ga tukaj ne bomo ponavljali — mora biti $x^2 < 2$ ali $x^2 > 2$. Vzemimo najprej, da je $x^2 < 2$! Postavimo $y = (2 - x^2)/6$! Ker je $x \leq 2$ in $y < 2$, je $2x + y < 6$. Zato je $y(2x + y) < 2 - x^2$. Tako dobimo $(x + y)^2 = x^2 + y(2x + y) < 2$. To pomeni, da je $x + y \in E$, potem pa x ne more biti zgornja meja množice E . Do protislovja pridemo tudi, če vzamemo, da je $2 < x^2$: ugotovimo lahko, da pri $z = (x^2 - 2)/6$ velja $(x - z)^2 > 2$; tudi število $x - z$, ki je manjše od x je torej zgornja meja množice E , zato x ne more biti najmanjša zgornja meja. Polje Q zato ni pogojno polno.

Pa poskusimo polje racionalnih števil dopolniti z novimi elementi tako, da bomo dobili urejeno pogojno polno polje! Postopek je znan, to je običajna konstrukcija realnih števil z Dedekindovimi preseki, zato bomo pot samo nakazali.

Naj bo P poljubno urejeno pogojno polno polje! Množico vseh strogo pozitivnih racionalnih elementov polja označimo s P_{++}^0 ! Videli smo, da imamo povratno enolično korespondenco med strogo pozitivnimi elementi $x \in P$ in množicami $P_x = \{a \in P_{++}^0 : a \leq x\}$. Poskusimo dobiti kakšno drugo karakterizacijo množice P_x , ki bo izražena samo z lastnostmi racionalnih elementov, nič pa z elementom x ! Naj bo A poljubna navzgor omejena podmnožica množice P_{++}^0 ! Označimo z A^s množico vseh racionalnih zgornjih mej množice A , z A^i pa množico vseh strogo pozitivnih racionalnih spodnjih mej množice A (slednja je lahko prazna)! Množica $A^{si} = (A^s)^i$ je torej množica vseh elementov množice P_{++}^0 , ki so pod vsako racionalno zgornjo mejo množice A . Očitno je $A \subset A^{si}$. Za nekatere množice A pa je $A = A^{si}$. Take množice A bomo imenovali razrede množice P_{++}^0 . Hitro se lahko prepričamo, da je pri poljubni navzgor omejeni množici $A \subset P_{++}^0$ množica A^{si} razred, in sicer je to najmanjši razred, ki vsebuje množico A .

Vsak razred je navzgor omejena množica, zato ima v polju P najmanjšo zgornjo mejo. Brez težave lahko ugotovimo: če je A razred in je $x = \sup A$, je $A = P_x$. Velja tudi obratno: za vsak strogo pozitiven $x \in P$ je množica P_x razred. To pomeni, da eksistira povratno enolična korespondenca med razredi množice P_{++}^0 in množico strogo pozitivnih elementov polja P . To nam da idejo, kako konstruirati razširitev polja Q , ki jo potrebujemo.

Označimo s T množico vseh razredov množice Q_{++} strogo pozitivnih racionalnih števil! V množici T lahko definiramo operaciji seštevanja in množenja. Naj bosta A in B poljubna razreda v Q_{++} ! Označimo kot prej: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$! Množica $A + B$ sicer ni

razred, je pa navzgor omejena, zato lahko tvorimo množico $(A + B)^{si}$, ki je razred. Ta razred bomo imenovali vsoto razredov A in B . Da bomo to vsoto, to je vsoto razredov A in B kot elementov množice T , razlikovali od množice $A + B$, jo bomo označili z $A \oplus B$. Po definiciji je torej $A \oplus B = (A + B)^{si}$. Analogno definiramo produkt razredov A in B , ki ga bomo označili $A \circ B: A \circ B = (AB)^{si}$. Takoj se bomo prepričali, da sta ti definiciji smiselni. Vzemimo poljuben element $x \in Q_{++}$! Množica $Q_x = \{a \in Q_{++}: a \leq x\}$ je, kot vemo, razred in velja $x = \sup Q_x$. Pa tudi obratno drži: če za nek razred A eksistira $\sup A = x$, je $A = Q_x$. Zato nam predpis $x \rightarrow Q_x$ definira povratno enolično preslikavo množice Q_{++} na množico tistih razredov, ki imajo najmanjšo zgornjo mejo. Zato smemo množico Q_{++} šteti za podmnožico množice T . Pa vzemimo dve racionalni števili $x, y \in Q_{++}$ in izračunajmo $Q_x \oplus Q_y = (Q_x + Q_y)^{si}$! Kot smo že prejdokazali, je $x + y = \sup (Q_x + Q_y)$. Zato velja $(Q_x + Q_y) \subset Q_{x+y}$. Ker se Q_{x+y} razred, $(Q_x + Q_y)^{si}$ pa je najmanjši razred, ki vsebuje množico $Q_x + Q_y$, velja $Q_x + Q_y \subset (Q_x + Q_y)^{si} \subset Q_{x+y}$. Ker pa je $\sup (Q_x + Q_y) = \sup Q_{x+y} = x + y$, velja tudi $x + y = \sup (Q_x + Q_y)^{si}$. Zato je $(Q_x + Q_y)^{si} = Q_{x+y}$ in velja $Q_x \oplus Q_y = Q_{x+y}$. Podobno dobimo $Q_x \circ Q_y = Q_{xy}$. Seštevanje in množenje v T se torej na racionalnih razredih, to je na razredih, ki so zastopniki racionalnih števil v T , ujema z običajnim seštevanjem in množenjem v Q . Ker za poljubna razreda A in B velja $A + B = B + A$, $AB = BA$ itd., sta seštevanje in množenje v T asociativni in komutativni operaciji in prav tako velja zanju distributivnostni zakon. Razred Q_1 je očitno enota za množenje v T , razred $(A^s)^{-1} = \{a^{-1}: a \in A^s\}$ pa je inverzen razredu A .

Zdaj pa tvorimo najmanjši kolobar, ki vsebuje množico T ! Ta kolobar konstruiramo prav tako, kot smo izhajajoč iz naravnih števil konstruirali kolobar celih števil: označimo $S = \{+, -\}$, izberimo še nek poseben element 0 in definirajmo: $R = (S \times T) \cup \{0\}$! Če na smiseln način razširimo seštevanje in množenje na vso množico R , dobimo ne le kolobar, ampak celo polje. Imenujemo ga polje realnih števil. Polje R linearno uredimo, če vzamemo množico $T \cup \{0\}$ za množico pozitivnih elementov. Dokažemo lahko, da je za to ureditev polje R pogojno polno. Kot smo povedali že pri delno urejenih grupah, zadostuje, če pokažemo, da ima vsaka navzgor omejena množica pozitivnih elementov najmanjšo zgornjo mejo. Vzemimo dva razreda A in B ! Če je $A < B$, potem po definiciji urejenosti v R eksistira tak razred C , da je $B = A \oplus C = (A + C)^{si}$. Ker pa v množici $A + C$ eksistira vsaj en element, ki je večji od vsakega elementa množice A , je očitno, da je $A \subset B$ in $A \neq B$. Ker pa za dva razreda A in B vedno velja $A \subset B$ ali $B \subset A$, je urejenost, ki jo v T inducira urejenost polja R , identična z urejenostjo razredov po vključitvi. Pa vzemimo poljubno množico razredov $\{A_\xi \in T: \xi \in \Xi\}$, ki je navzgor omejena: eksistira razred B , da velja $A_\xi \subset B$ za vsak ξ . Tedaj je $A = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi \subset B$ in eksistira A^{si} . Ker je A najmanjša množica, ki vsebuje vse množice A_ξ , A^{si} pa je najmanjši razred, ki vsebuje množico A , je A^{si} najmanjši razred, ki je nad vsemi razredi A_ξ , torej je $A^{si} = \sup_{\xi \in \Xi} A_\xi$.

Realna števila tvorijo urejeno pogojno polno polje. To trditev smo zdaj dokazali, lahko pa bi jo vzeli tudi za definicijo realnih števil, saj smo dokazali, da eksistira eno samo (do izomorfizma) urejeno pogojno polno polje. Tako bi mogli realna števila definirati direktno. Racionalna, cela in naravna števila lahko potem definiramo takole: Q je najmanjše podpolje polja R , Z najmanjši

podkolobar, ki vsebuje enoto 1, naravna števila pa so strogo pozitivni elementi kolobarja Z (za ureditev, ki jo inducira urejenost polja R). Ta definicija ima to pomanjkljivost, da ne znamo dokazati, da polje R sploh eksistira. Prej smo to sicer dokazali, vendar tako, da smo zaporedoma konstruirali cela, racionalna in realna števila. Dokaza za eksistenco urejenega pogojno polnega polja, ki bi bil neodvisen od omenjene konstrukcije realnih števil, ne poznamo, zato nam ta konstrukcija ostane osnovna, pravzaprav edina pot pri definiciji števil.

SIMETRIJA IN OHRANITVENI ZAKONI*

E. P. WIGNER

Ni dvoma, da so vprašanja simetrije in invariantnosti, posebno pa ohranitveni zakoni igrali važno vlogo v mišljenju fizikov od časov Galileija, Newtona in morda že prej. Toda tem vprašanjem niso pripisovali posebnega pomena, poredko so jih izrekli in še takrat samo za posebne primere. Newtonov zakon ni vezan na kak izbran koordinatni sistem, zato pusti vse točke in vse smeri v prostoru enakovredne. Danes pravimo, da je ta zakon invarianten proti premikom in zavrtitvam. Isto velja za Newtonov gravitacijski zakon. Tako ni bilo potrebe, da bi se kdo ukvarjal z možnostmi zakonov z nižjo simetrijo. Znano pa je, da so intuitivno spoznali in uporabljali zakon o ohranitvi mehanske energije celo pred Galileijem.¹

Zakonov o ohranitvi gibalne in vrtilne količine v splošni obliki niso uporabljali, čeprav je zakon o ohranitvi vrtilne količine v posebnem primeru centralnega gibanja eden od Keplerjevih zakonov. Večina knjig za mehaniko ob prelomu stoletja ali celo pozneje ne omenja splošnega zakona o vrtilni količini.² V resnici pa so morali ta zakon poznati tudi v splošni obliki, saj so ga pri reševanju problema treh teles uporabljali kot samo po sebi umevnega, le da mu niso posvečali nobene pozornosti.

Odnos do vprašanj o invariantnosti enačb se je bistveno spremenil zaradi Einsteinovih teorij. Einstein je jasno izrazil postulata o simetriji prostora, to je o enakovrednosti vseh točk in vseh smeri v prostoru.³ V nekoliko spremenjeni obliki je ponovno dokazal tudi enakovrednost mirujočih in enakomerno se gibajočih koordinatnih sistemov.

Pomen ohranitvenih zakonov je postal še bolj očiten, ko je Bohru z uporabo zakona o ohranitvi vrtilne količine uspel model atoma. Živel sem v tistih dneh in se spominjam, kako se je povečalo zaupanje do tega zakona in do drugih ohranitvenih zakonov. To zaupanje ni bilo neosnovano, saj je Hamel že 1904 dokazal zvezo med ohranitvenimi zakoni in osnovnimi simetrijami prostora in časa.⁴ Večina fizikov njegovega dela ni poznala, ohranitvenim zakonom pa je le zaupala, kot da bi vedela za ta dokaz. To je še en zgled, da je fizikov nagon močnejši od njegovega znanja.

Od preloma stoletja do danes se je stališče do ohranitvenih zakonov popolnoma spremenilo. Danes izide malo člankov o osnovnih vprašanjih fizike, v katerih se ne sklicujejo na postulate invariantnosti. Povezavo med ohranitve-

* Članek »Symetry and Conservation Laws«, ki je izšel v marčni številki revije Physics Today (17, 34 (No. 3, 1964)), je posnet po predavanju oktobra 1963 ob stoletnici ameriške Državne akademije znanosti. Zahvaljujemo se profesorju Wignerju in uredništvu revije Physics Today, ki sta ljubeznivo dovolila prevod. S podobno tematiko se ukvarjata še dva Wignerjeva članka. Prvi — »Events, Laws of Nature, and Invariance Principles«, Science 145, 995 (1964), je posnet po predavanju ob svečani podelitvi Nobelove nagrade, drugi — »Invarianzprinzipien in der Naturphilosophie«, Physikalische Blätter 20, 393 (1964), pa po predavanju ob desetletnici letne šole v Varenni. Članek »Simetrija in ohranitveni zakoni« je prevedel J. Strnad.

nimi zakoni in načeli invariantnosti so sprejeli morda celo nekoliko preveč splošno.⁵ Poleg tega so pojma simetrije in invariantnosti razširili na novo področje, kjer so njune korenine manj povezane z neposrednimi izkušnjami kot na klasičnem področju simetrije prostora in časa. Zato ne bo napak, če najprej omenimo medsebojno povezavo pojavov, zakonov narave in načel invariantnosti. Ta povezava ni čisto enaka pri klasičnih načelih invariantnosti — imenovali jih bomo geometrična — in pri novih, ki jih bomo imenovali dinamična. Nekoliko bolj elementarno, kot je v navadi, bi rad omenil še povezavo med ohranitvenimi zakoni in načeli invariantnosti.

Pojavi, zakoni narave, načela invariantnosti (simetrije)

Problem povezave teh pojmov ni nov in je že dolgo zaposloval ljudi, sprva skoraj podzavestno. Zanimivo pa je razpravljati o njem ob naših večjih izkušnjah in — upajmo — zrelejšem razumevanju.

Z abstraktnega gledišča sta povezava med zakoni narave in pojavi na prvi in povezava med načeli simetrije in zakoni narave na drugi strani zelo podobni. Začnimo s prvo povezavo, to je s povezavo med zakoni narave in pojavi!

Če bi poznali lego planeta ob vsakem času, zakoni fizike o gibanju tega planeta ne bi imeli več česa povedati. To velja tudi bolj splošno: če bi z gotovostjo poznali vse pojave na svetu povsod in ob vsakem času, ne bi imeli kaj početi z zakoni fizike ali sploh s katerokoli drugo znanostjo. Pri tem zastopamo razumljivo stališče, da so zakoni narave koristni zato, ker bi brez njih vedeli o svetu še manj. Če bi poznali lego planeta za vsak trenutek, bi bile matematične zveze, ki jih dajo zakoni o gibanju planetov za lege, nekoristne. Navzlic temu bi nas te zveze utegnile zanimati. Morda bi nas razmišljanje o njih navdalo z zadovoljstvom ali celo z začudenjem, čeprav ne bi dale nobene nove informacije. Nekomu, ki bi o legi planeta trdil kaj drugega, bi lahko bolj utemeljeno oporekali, če se njegove trditve ne bi skladale z zakoni o gibanju planetov (če zaupamo zakonom narave, ki so osnova za zakone o gibanju planetov).

Posvetimo se zdaj povezavi med načeli simetrije ali invariantnosti in zakoni narave! Če poznamo zakon narave, npr. enačbe elektrodinamike, podatek o kaki posebni lastnosti teh enačb ne prispeva ničesar k njihovi vsebini. Zanimivo je npr., da so korelacije, ki jih enačbe napovedujejo med pojavi, iste za mirujočega ali enakomerno se gibajočega opazovalca. Toda vse korelacije med pojavi so vsebovane že v enačbah samih in omenjena ugotovitev o invariantnosti enačb ne poveča števila korelacij in ne spremeni njihovega značaja. Bolj splošno: če bi poznali vse zakone narave ali univerzalni zakon, lastnosti invariantnosti teh zakonov ne bi dale novih informacij. Lahko da bi nas navdale z zadovoljstvom ali celo z začudenjem, ko bi o njih razmišljali, a prispevale ne bi nobene nove informacije. Nekomu, ki bi predložil drugačen zakon narave, bi lahko bolj utemeljeno oporekali, če ta zakon ne bi bil v skladu z načeli invariantnosti (ob predpostavki, da zaupamo načelom invariantnosti).

Seveda je zgornja primerjava nekoliko površna. O tem bi se dalo popisati zelo mnogo strani. Kolikor pa lahko presodim, novi pogledi, ki bi se pri tem odprli, ne bi ovrgli podobnosti med obema povezavama, to je med povezavo zakonov narave s pojavi ter povezavo načel invariantnosti z zakoni narave. Nasprotno, potrdili bi, da so načela invariantnosti ogrodje zakonov narave, ravno tako kot so zakoni narave ogrodje množice pojavov.

Geometrična in dinamična načela invariantnosti

Kako se razlikujejo stara in dognana geometrična načela od novih dinamičnih načel invariantnosti? Geometrična načela invariantnosti so sicer ogrodje zakonov narave, a izražamo jih s pojavi samimi. Tako pravi neka oblika invariantnosti proti izbiri časovnega začetka npr.: korelacija med pojavi je odvisna samo od časovnih intervalov med njimi, ne pa od časa, ko se je zgodil prvi pojav. Če so P_1, P_2, P_3 lege planeta v časih t_1, t_2, t_3 , bi bile lahko to tudi lege v časih $t_1 + t, t_2 + t, t_3 + t$, kjer je t precej poljuben. Nasprotno pa so nova dinamična načela invariantnosti izražena z zakoni narave in se nanašajo na posamezne interakcije, ne pa na korelacije med pojavi. Pravimo, da je elektromagnetna interakcija invariantna proti gradientni transformaciji in se pri tem sklicujemo na znani zakon, ki določa elektromagnetno polje nabojev in vpliv elektromagnetnega polja na gibanje nabojev.

Dinamična načela invariantnosti so torej vezana na obstoj raznih interakcij. Pred dolgi mčasom so upali, da se bodo vse interakcije dale prevesti na mehansko. Nato so ob začetku stoletja menili, da je elektromagnetna interakcija vzrok vseh drugih interakcij. Še pozneje je bilo treba upoštevati gravitacijsko interakcijo in tudi to je precej dobro uspelo. Danes pa razločujemo štiri ali pet interakcij: gravitacijsko, elektromagnetno, eno ali dve močni (jedrski) ter šibko interakcijo, ki povzroča razpad β , razpad miona in še nekatere podobne pojave. Vsaj začasno smo torej opustili upanje, da obstoji ena sama osnovna interakcija. Vsaki interakciji ustreza dinamična grupa invariantnosti, npr. gradientna grupa elektromagnetni interakciji.

S tem je omejen obseg našega znanja. Ne smemo pa pozabiti, da problem interakcij še ni rešen. Utiyama⁶ je začel plodno raziskovanje, ki je pokazalo, kako lahko sklepamo na interakcijo, če poznamo njeno grupo. Ni pa načina, s katerim bi mogli najti, koliko je takih grup, torej koliko je različnih interakcij. Grupe, ki karakterizirajo posamezne interakcije, so različne in med njimi ni nobene povezave, prav tako ni nobene povezave tudi med temi grupami in dobro znano in definirano grupo geometrične simetrije.

Geometrična načela in ohranitveni zakoni

Priporočljivo je, da ostanemo čim dalje pri znanih stvareh, zato začnimo z geometričnimi načeli invariantnosti! Ustrezno grupo je prvi spoznal Poincarè, zato jo imenujemo Poincarèjevo grupo.⁷ Njen polni pomen in važnost je ugotovil šele Einstein v specialni teoriji relativnosti. Ta grupa vsebuje: prvič — premike v prostoru in času. To pomeni, da so korelacije med pojavi enake povsod in ob vseh časih; zakoni narave, ki so zbirke korelacij, so isti ne glede na to kje in kdaj jih uporabimo. Če bi ne bilo tako, sploh ne bi mogli odkriti zakonov narave.

Tu velja poudariti, da se zakoni simetrije nanašajo na zakone narave (ki izražajo korelacije med pojavi), in ne na pojave same. Pojavi so seveda lahko od točke do točke različni, če opazujemo npr. lege kamna, ki smo ga vrgli v zrak, v treh zaporednih trenutkih, pa pridemo do zveze med legami, ki bo enaka povsod na Zemlji.

Drugič — in ta simetrija ni tako očitna kot prva: predpostavlja enakovrednost vseh smeri. Preden jo sprejmemo, moramo uvideti, da je privlačna sila Zemlje vzrok za razliko med spodaj in zgoraj. Drugače povedano: zakoni

narave ne vzpostavijo zveze med tremi legami kamna, ampak med tremi legami kamna glede na Zemljo.

Zadnja simetrija — neodvisnost zakonov narave od enakomernega gibanja — pa že sploh ni očitna.⁸ Iz nje sledi, da zakoni narave ne določajo hitrosti, ampak pospešek telesa. Hitrost je namreč različna v koordinatnih sistemih, ki se gibljejo z različnimi hitrostmi, pospešek pa je enak, če je le gibanje sistemov drugega proti drugemu enakomerno. Načela o enakovrednosti enakomerno se gibajočih in mirujočih koordinatnih sistemov seveda niso mogli poznati pred Newtonovim zakonom. Čim pa je Newton odkril ta zakon, je takoj spoznal tudi omenjeno načelo. Temu načelu nekaj časa niso zaupali zaradi nekaterih elektromagnetnih pojavov, dokler ga ni Einstein ponovno dokazal v nekoliko spremenjeni obliki.

Omenili smo, da so ohranitveni zakoni za energijo, ter vrtilno in gibalno količino neposredne posledice naštetih simetrij. Najlažje se da to uvideti v kvantni mehaniki, kjer zadostuje za izpeljavo kinematika in se ni treba sklicevati na kak dinamičen zakon, npr. na Schrödingerjevo enačbo. O tem pozneje. — V klasični teoriji je položaj dosti bolj zapleten. Najpreprostejši dokaz sloni tu ravno na ugotovitvi, da je klasična teorija mejni primer kvantne. Zato velja vsaka enačba kvantne teorije za katero koli vrednost Planckove konstante h in tudi v limiti $h = 0$. Elementarno pa izpeljemo ohranitvene zakone z uporabo enačb gibanja, to je Newtonovega zakona, ob predpostavki, da imajo sile potencial, ki je odvisen samo od medsebojne razdalje delcev. Pojem potenciala je v tej zvezi nekoliko tuj, zato naredijo običajno drugače. Tako je npr. Mach predpostavil, da deluje na delec rezultanta, ki je vsota sil med tem delcem in med vsemi drugimi delci.⁹ Ta predpostavka vsebuje implicitno zakon o vzajemnem učinku, v nasprotnem primeru bi namreč nasprotni sile ne imele nobenega smisla. Ta ali kaka sorodna predpostavka je v klasični teoriji zares potrebna. Ob omenjenih predpostavkah sledi ohranitveni zakon za gibalno količino naravnost iz zakona o vzajemnem učinku. Ta zakon pa je tudi potreben za veljavnost ohranitve gibalne količine. Vse to je ugotovil že Newton.

Pomen izotropije prostora za zakon o ohranitvi vrtilne količine, ki so ga 60 let po Newtonovih principih odkrili Euler, Bernoulli in d'Arcy, je lahko razumeti. Če bi namreč smer sile med dvema delcema ležala izven njune zveznice, ne bi bilo invariantnosti proti vrtenju okoli zveznice. Zato so pri sprejetih predpostavkah dopustne samo centralne sile. Navor takih sil je nič, če so sile med seboj nasprotno enake, tako da sledi od tod zakon o vrtilni količini. Ta zakon pa ne bi sledil, če bi bile sile odvisne od leg treh ali več delcev.

V kvantni mehaniki izpeljemo ohranitvene zakone z uporabo osnovnih kinematičnih pojmov. Stanjem ustrezajo tu vektorji v abstraktnem prostoru, fizikalnim količinam (npr. legi, gibalni količini) pa operatorji, ki delujejo na te vektorje. Iz invariantnostip rotiz avrtitvam sledi npr. tole: če je φ neko dano stanje, obstoji drugo stanje φ_a . Stanje φ_a naj bo v sistemu koordinat, ki ga dobimo po zavrtitvi za kot a okoli osi z , enako kot stanje φ (v prvotnem koordinatnem sistemu); $\varphi_a = Z_a \varphi$. Nadalje naj bo $H_\tau \varphi$ stanje, v katerega preide po času τ stanje φ (shema na sl. 1). Zaradi invariantnosti proti zavrtitvam preide v istem času φ_a v $H_\tau \varphi_a$, ki je v zavrtinem koordinatnem sistemu enako kot $H_\tau \varphi$ (v prvotnem koordinatnem sistemu). Zato lahko dobimo stanje $H_\tau \varphi$ s transformacijo Z_a

$$H_\tau \varphi_a = H_\tau Z_a \varphi = Z_a H_\tau \varphi$$

To velja za vsako stanje φ , tako da je tudi

$$H_\tau Z_a = Z_a H_\tau$$

Operator Z_a torej komutira s H_τ , kar je pogoj, da je ustrezna količina konstanta gibanja. V resnici je operator vrtilne količine okoli osi z limita $\frac{1}{a}(Z_a - 1)$, če gre a proti nič. Važno je, da igrajo operatorji transformacij dvojno vlogo: ustrezajo tudi količinam, ki se ohranijo.

S tem zaključujemo razpravljanje o geometričnih načelih invariantnosti. Pri tem nismo omenili zrcaljenja, ki privede npr. do vpeljave parnosti, ker ga mislimo omeniti na koncu. Prav tako nismo omenili bolj splošnega načela invariantnosti, ki je osnova splošni teoriji relativnosti. To pa zato, ker menim, da gre pri vsem za dinamično in ne geometrično načelo.

Dinamična načela invariantnosti

Pri razpravljanju o dinamičnih načelih invariantnosti smo večidel na še neznanem področju. Navzlic temu bi nekaj pripomb ne škodovalo, saj so nekateri poskusi, da bi razvili ta načela, bistroumni in tudi uspešni ter je predmet v središču pozornosti. Začnimo z elektromagnetno interakcijo, ki je najlažje umljiva.

Za opis interakcije nabojev z elektromagnetnim poljem, moramo najprej vpeljati elektromagnetna potenciala, s katerima opišemo elektromagnetno polje. Iz potencialov se da izračunati komponente elektromagnetnega polja, ne pa obratno. Še več: polje ne določa enolično potencialov, nekateri potenciali (tisti, ki se razlikujejo za gradient neke količine) dajo isto polje. Zato potenciali ne morejo biti merljivi, ampak so merljave samo količine, ki so invariantne proti transformacijam v zvezi z nedoločenostjo potencialov. Ta invariantnost je umetna. Na podobno invariantnost bi naleteli, če bi vpeljali v kako enačbo koordinate neke prikazni. Enačba bi morala biti potem invariantna proti spremembam koordinat te prikazni. Jasno je, da uvedba koordinat prikazni prav nič ne koristi.

Podobno je z nadomestitvijo komponent polja s potencialoma, dokler ostane vse drugo nespremenjeno. Toda potem storimo odločilni korak: vsak prehod od niza potencialov h kakemu drugemu, ki da isto elektromagnetno polje, povežemo z neko transformacijo polja delcev. Skupnost teh dveh transformacij: prve — na elektromagnetnih potencialih in druge — na poljih delcev se imenuje gradientna transformacija (angl. gauge transformation).^{*} Ta transformacija pušča fizikalni položaj nespremenjen, zato morajo biti proti njej invariantne elektromagnetne enačbe. To pa seveda ne velja za nespremenjene enačbe gibanja. Če bi namreč enačbe gibanja pustili nespremenjene, bi imele nesmiselno lastnost, da se dve situaciji, ki sta popolnoma enaki, s časom razvijeta v dve različni situaciji. Zato pa je treba prilagoditi tudi enačbe gibanja. To storimo najpreprosteje z računskim prijemom, ki se mu pravi prilagoditev

^{*} Transformacija na elektromagnetnih potencialih je, zapisana v štiridimenzionalni obliki, $A \rightarrow A + (1/e_0) \square a$, transformacija polja delcev, to je valovne funkcije pa $\psi \rightarrow \psi e^{iaZ}$. Pri tem je A vektor četverec $A = (\mathbf{A}, i\Phi/c)$, pri čemer sta $\mathbf{A}$ vektorski in Φ skalarni potencial, $\square = (\nabla, i\partial/\partial t)$, a skalarna funkcija kraja in časa in Z naboj delca v osnovnih nabojih e_0 (op. prev.).

Lagrangeve funkcije. Najpreprostejša prilagoditev, ki ustreza zahtevi po invariantnosti, privede do znanih in preizkušenih enačb elektrodinamike.

Ne da bi navajal podrobnosti, naj povem, da je podoben postopek možen pri gravitacijski interakciji. Namig o tem je že v delu Utiyame.⁶ V tem primeru je treba vpeljati generalizirane koordinate, ki privedejo podobno kot potenciali do nepotrebnih zapletljajev. Enačbe pa morajo potem biti invariantne proti vsem transformacijam splošne teorije relativnosti. To ne spremeni vsebine teorije, pač pa predstavlja vpeljavo bolj gibčnega izražanja, v katerem je možnih več enakovrednih opisov iste fizikalne situacije. Predpostaviti je treba tudi, da se dejansko polje transformira kot metrično polje in prilagoditi enačbe, da bi ohranili njihovo invariantnost. Najpreprostejša prilagoditev ali vsaj ena od najpreprostejših prilagoditev vodi do Einsteinovih enačb.

Zgornja interpretacija invariantnosti splošne teorije relativnosti kaže, da pri tem ne gre za geometrično invariantnost. To je prvi opazil ruski fizik Fock.¹⁰ Nekoliko poenostavljeno lahko trdimo: geometrična invariantnost predpostavlja, da se dve fizikalno različni situaciji (kot na sl. 1) s časom razvijeta v situaciji, ki se razlikujeta tako kot začetni. Pri splošni teoriji relativnosti pa je drugače: predpostavimo samo, da se dva različna opisa iste situacije s časom razvijeta v dva opisa, ki tudi dasta isto fizikalno situacijo. Tu je očitna podobnost z elektromagnetnimi potenciali.

Na nesrečo je položaj prid rugih interakcijah popolnoma različen. O šibkejši od obeh močnih interakcij (tako imenovani zmerno močni) vemo še zelo malo. Močnejša od obeh močnih interakcij in šibka interakcija pa imata grupi, ki sta predvsem dosti manjši od grupe gradientnih transformacij ali grupe splošnih koordinatnih transformacij.¹¹ Namesto neskončnega števila generatorjev obeh nazadnje navedenih grup imata grupi močne in šibke interakcije samo končno število (osem) generatorjev. Ti pa zares v veliki meri določajo interakcijo in dovoljujejo izpeljavo nekaterih podobnih izrekov kot v spektroskopiji. Le-ti dajo približne zveze med hitrostmi reakcij in med energijami, torej tudi med masami. Slika 2 kaže oktet težkih mas. Njegovi člani so med seboj povezani z najpreprostejšo netrivialno reprezentacijo ustrezne grupe, ki se ujema s kompleksno konjungirano.

Med grupama simetrije elektromagnetizma in gravitacije na eni in grupo močne interakcije na drugi strani pa je še neka razlika. Operacije prvih ostanejo operacije simetrije, četudi upoštevamo druge interakcije. Simetrija močne interakcije pa se poruši zaradi drugih interakcij. Reči hočemo, da so operacije grupe močnih interakcij operacije simetrije le, če lahko druge interakcije zanemarimo. Grupa simetrije omogoči v vsakem primeru določitev operatorjev interakcije. Toda medtem ko so vse interakcije invariantne proti grupi elektromagnetne ali gravitacijske interakcije, je močna interakcija invariantna samo proti grupi te interakcije.

Uvideli smo, da so operacije grupe geometrične simetrije v tesni zvezi z ohranitvenimi zakoni. Ali velja to tudi pri operaciji grup dinamične simetrije? Kaže, da je pri tem razlika med posameznimi grupami dinamične invariantnosti. Prevladuje mnenje, da je zakon o ohranitvi električnega naboja posledica gradientne invariantnosti, to je grupe elektromagnetne interakcije. O ohranitvenih zakonih, ki ustrezajo grupi splošne teorije relativnosti, je možno za zdaj samo ugibati. Nekaj je morda tudi na predpostavki, da se da ohranitvene zakone za število barionov in leptonov izpeljati iz grup močne in šibke interakcije.¹¹ Če pa bi bilo to res, bi se morali sprijazniti z destvom, da pravih grup

teh interakcij še ne poznamo. V prid tej trditvi lahko navedemo dvoje: Prvič: za zdaj se ohranitvenih zakonov¹³ še ni posrečilo izpeljati iz lastnosti simetrije teh interakcij in ni verjetno, da se bo to posrečilo.¹⁴ Drugič: te lastnosti simetrije ne veljajo strogo, saj jih porušijo druge interakcije. Kako bi lahko strogi ohranitveni zakoni sledili iz približnih simetrij, pa ni razumljivo, in vse kaže, da veljata ohranitvena zakona za število barionov in leptonov strogo.¹³ Pri-
pomnimo naj še to, da predstave o dinamičnih načelih invariantnosti niso niti približno tako dognane kot pri geometričnih načelih.

Na koncu naj omenim načelo, ki ga brez oklevanja štejem k načelom simetrije in ki tvori prehod med geometričnimi in dinamičnimi načeli. To so prekrizane zveze (angl. crossing relations), ki se nanašajo na amplitude za reakcije. Vzemimo reakcijo

$$A + B + \dots \rightarrow X + Y + \dots \quad (3)$$

Amplituda je funkcija invariant, ki jih lahko tvorimo iz vektorjev četvercev gibalnih količin za vpadle i nizhajajoče delce. Eno od načel zrcaljenja, »invariantnost proti obratu časa«, trdi, da amplituda za (3) na zelo preprost način določa amplitudo za obrnjeno reakcijo

$$X + Y + \dots \rightarrow A + B + \dots \quad (4)$$

Ce namreč obrnemo smeri hitrosti in zamenjamo prihodnost s preteklostjo (to je ravno definicija časovnega obrata), preide (4) v (3), tako da sta amplitudi za obe reakciji v bistvu enaki. Tudi amplituda za reakcijo

$$\bar{A} + \bar{B} + \dots \rightarrow \bar{X} + \bar{Y} + \dots \quad (5)$$

(pri čemer smo s črticami zaznamovali antidelce), je dana z amplitudo za (3), ker dobimo (5) iz (3) (po interpretaciji Leeja in Yanga) po zrcaljenju prostora. Podobno dobimo amplitudo za reakcijo

$$\bar{X} + \bar{Y} + \dots \rightarrow \bar{A} + B + \dots \quad (6)$$

Zveze med amplitudami za reakcije od (3) do (6) slone na geometričnih načelih invariantnosti. Iz amplitude za reakcijo (3) pa je možno sklepati tudi na amplitudo za reakcijo

$$\bar{X} + B + \dots \rightarrow \bar{A} + Y + \dots \quad (7)$$

Vendar pri tem niti račun niti rezultat (prekrižana zveza) nista več preprosta. Treba je vzeti odvisnost amplitude za (3) kot analitično funkcijo invariant iz gibalnih količin delcev v (3) in razširiti to analitično funkcijo k vrednostim spremenljivk, ki nimajo fizikalnega pomena za reakcijo (3), a dajo amplitudo za (7). Podobno dobimo z analitičnim nadaljevanjem amplitude za (3) ali za kako drugo reakcijo še amplitudo za nekatere druge reakcije. Namesto A in X bi lahko v (7) zamenjali A in Y .

Prekrižane zveze imajo dve lastnosti geometričnih načel invariantnosti: ne nanašajo se na kako izbrano interakcijo in večina fizikov meni, da veljajo splošno. A čeprav jih lahko izrazimo s pojavi, temelji njihova formulacija na posebnem zakonu narave, namreč na matematičnem (analitičnem) izrazu za reakcijsko amplitudo ene izmed omenjenih reakcij. Upamo, da bodo lahko prekrižane zveze koristile pri iskanju povezave med geometričnimi in dinamičnimi načeli invariantnosti, ki so za zdaj ločena.

Literatura:

¹ G. Hamel omenja v svoji knjigi *Theoretische Mechanik*, Leipzig (Teubner), 1912, na strani 130, da je Jordanus de Nemore (okoli leta 1300) vedel za bistvene lastnosti količine, ki jo danes poznamo kot mehansko energijo, in da je Leonardo da Vinci predpostavljal nemožnost perpetuum mobile.

² F. Cajori mu v knjigi *History of Physics*, New York (Macmillan), 1929, posveča ravno pol vrstice (na strani 108).

³ A. Einstein: *Relativitätstheorie*, Braunschweig (Vieweg), 1956.

⁴ F. Engel, *Ges. d. Wiss. Göttingen*, 1916, stran 270; G. Hamel, *Z. Math. Phys.* **50**, 1 (1904).

⁵ E. P. Wigner, *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)* **11**, 437 (1954); Y. Murray, *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)* **11**, 441 (1954); D. M. Greenberger, *Ann. Phys. (N. Y.)* **25**, 290 (1963).

⁶ R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956); C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).

⁷ H. Poincaré, *Compt. Rend.* **140**, 1504 (1905); *Rend. Circ. Math. Palermo* **21**, 129 (1906).

⁸ Aristotel je v svoji *Fiziki* predpostavil, da je za gibanje potrebno nepretrgano delovanje nekega vzroka. Zato bi se vsa telesa absolutno ustavila, če bi prenehal vzrok, zaradi katerega imajo hitrost (primerjaj A. C. Crombie: *Augustine to Galileo*, London (Falcon Press), 1952, stran 42 ali 244!). To ne more veljati za koordinatne sisteme, ki se gibljejo drug proti drugemu. Koordinatni sistemi, za katere bi to veljalo, bi bili odlikovani.

⁹ E. Mach: *The Science of Mechanics*, Chicago (Open Court Publ. Co), poglavje III, odstavek 3.

¹⁰ V. A. Fock: *Teorija prostranstva, vremeni i tjaqotenja*, Moskva (Gostehizdat), 1955.

¹¹ Močna interakcija: Y. Ne'eman, *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961); M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962). Šibka interakcija: R. P. Fynman, eM. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **109**, 193 (1958); E. C. G. Sudarshan, R. E. Marshak *Phys. Rev.* **109**, 1960 (1958); S. S. Gerštej, Ja. B. Zeljdovič, *ŽEFT* **29**, 698 (1955).

¹² Ohranitveni zakon za število barionov in močna interakcija: E. P. Wigner, *Proc. Am. Phil. Soc.* **93**, 521 (1949); *Proc. Nat. Acad. Sci.* **38**, 449 (1952). Ohranitev barionov je prvi predpostavil E. C. G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* **11**, 299 (1938).

¹³ Eksperimentalna potrditev teh in drugih ohranitvenih zakonov: G. Feinberg, M. Goldhaber, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **45**, 1301 (1959). Ohranitev leptonov so predložili G. Marx, *Acta Phys. Hung.* **3**, 55 (1953); Ja. B. Zeljdovič, *DAN SSSR* **91**, 1317 (1953); E. J. Konopinski, H. M. Mahmoud, *Phys. Rev.* **92**, 1045 (1953).

¹⁴ Za ohranitev barionov in močno interakcijo je to s poudarkom pokazal v zelo zanimivem članku J. J. Sakurai, *Ann. Phys. (N. Y.)* **11**, 1 (1960); za ohranitev leptonov G. Marx, *Z. Naturforschg.* **9a**, 1051 (1954).

¹⁵ M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **99**, 979 (1955); M. L. Goldberger, K. M. Watson: *Collision Theory*, New York (Wiley), 1964, poglavje 10.

NOV USPEH V FIZIKI DELCEV?

Uvod. Obzornik je v glavnih potezah zasledoval napredek pri raziskovanju delcev v močni interakciji, to je mezonov in barionov (= *hadronov*). Eden izmed največjih uspehov je bila *unitarna simetrija* (*osmerna pot*, $SU(3)$).^{1,2} Pred kratkim so napravili še korak dalje. V kratkem opisu ne moremo slediti zapletenim teoretskim prijemom. Lahko samo približno nakažemo misli, ki so privedle do tega, in naštejemo nekatere rezultate.

Vsakemu ohranitvenemu zakonu ustreza invariantnost enačb gibanja za delce proti kaki transformaciji.³ Zakon o ohranitvi *naboja* spravimo v zvezo z invariantnostjo proti množenju valovne funkcije za delec z $\exp(iaZ)$, pri čemer je a konstanta in Z naboj delca v osnovnih nabojih: enačbe gibanja so invariantne proti transformacijam, ki tvorijo v enodimenzionalnem abstraktnem prostoru grupo $U(1)$. — Pri močni interakciji se ohrani *izospin*. V zvezi s tem je invariantnost proti transformacijam, ki tvorijo grupo $SU(2)$.^{*} Po izospinu razvrstimo hadrone v *izospinske multiplete*, znotraj katerih razločujemo delce po tretji komponenti izospina (I_z). Zaradi elektromagnetne interakcije, pri kateri se izospin ne ohrani, vsi člani istega izospinskega multiplleta nimajo enake mirovne energije. — Pri močni interakciji se ohrani še *hipernaboj*. To spravijo v zvezo z invariantnostjo proti transformacijam, ki tvorijo grupo $SU(3)$. Toda invariantnost proti $SU(3)$ je samo približna; če bi bila namreč natančna, bi se moral ohraniti *unitarni spin* — količina z osmimi komponentami. Tri komponente unitarnega spina so istovetne s tremi komponentami izospina in ena s hipernabojem. Pokaže se, da se preostale štiri komponente celo v okviru močne interakcije ne ohranijo. Hadrone uredijo v *unitarnospinske (unitarne) multiplete*, ki imajo po 1, 8, 10... članov. Ker je invariantnost proti $SU(3)$ prekršena, imajo člani istega unitarnospinskega multiplleta — razločujemo jih npr. po hipernaboju in I_z , različne mirovne energije in so te razlike znatno večje od razlik zaradi elektromagnetne interakcije. Vsi člani istega unitarnospinskega multiplleta pa imajo enako *barionsko število* (so ali barioni, ali antibarioni ali mezoni), enako (*notranjo*) *parnost* in enak *spin*.

SU(6). V unitarni simetriji nastopa spin kot zunanji parameter. Morda bi lahko neposredno vključili spin, če bi predpostavili invariantnost proti transformacijam, ki tvorijo grupo v abstraktnem prostoru z večjo dimenzijo? Taka razširitev se je obnesla že v prejšnjih primerih. Matematični formalizem za spin se ne razlikuje od formalizma za izospin, za katerega smo ugotovili, da mu ustreza grupa $SU(2)$. Z združitvijo $SU(3)$ (unitarna simetrija) in $SU(2)$ (za spin) so prišli do $SU(6)$. Vendar je invariantnost proti $SU(6)$ lahko samo približna. Stroga invariantnost bi pomenila, da interakcija med dvema hadronoma ni nič odvisna od spina delcev, da torej ni tenzorskih sil in sklopitve spin-tir. Poleg tega je približna že sama unitarna simetrija, ki smo jo predpostavili.

V resnici so vpeljali $SU(6)$ nekoliko drugače in z izdatnejšimi teoretskimi opravičili. Pri tem so izhajali od nekdanje Wignerjeve predpostavke⁴, da so

^{*} $SU(2)$ pomeni *specialna* (unimodularna, to je z absolutno vrednostjo determinante 1) *unitarna* (prostor je kompleksen) *grupa*. V oklepaju je navedena dimenzija prostora.

v najnižjem približku sile med pari nukleonov neodvisne od spina in izospina. V tem primeru je enačba gibanja za nukleone v jedru invariantna proti transformacijam, ki se tičejo spina in izospina ter tvorijo grupo $SU(4)$. Na podlagi te grupe je možna klasifikacija stanj nukleonov na neki lupini, ki jo določa tirno kvantno število l . Zaradi motnje, ki je odvisna od spina (in tudi od izospina), pa imajo stanja na isti lupini nekoliko različno energijo. Seveda je ta model dober približek samo za stanja blizu osnovnega stanja, ko sklopitev spin-tir ni bistvena.

Pri prehodu od nukleonov k čudnim delcem je treba upoštevati še hiper-naboj. Če izvedejo to posplošitev in poleg spina in izospina vključijo tudi hiper-naboj, preide $SU(4)$ v $SU(6)$.

Supermultipleti. Več fizikov si je prizadevalo za posplošitev unitarne simetrije. Kaže, da je to v zadovoljivi obliki uspelo Gürseju, Radicatiu in Paisu⁵⁻⁷; neodvisno od njih pa še Sakiti^{8*}. Grupnoteoretska razglabljanja na podlagi invariantnosti $SU(6)$ privedejo do razvrstitve hadronov na večje skupine — *supermultiplete*. Barionsko število in parnost članov istega supermultipleta sta enaki. Toda spin za člane istega supermultipleta ni enak; nastopijo tudi vsa možna spinska stanja. Če ima namreč delec spin s , je glede na neko prednostno smer možnih $2s + 1$ orientacij. Tabela 1 kaže celotno število

Celotno število stanj	Število stanj z enakim spinom	Spin s	Celotno število spinskih stanj
1	1	0	1
6	3	1/2	6
15	6	0	6
	3	1	9
20	8	1/2	16
	1	3/2	4
21	3	0	3
	6	1	18
35	8	0	8
	1	1	3
	8	1	24
56	8	1/2	16
	10	3/2	40
70	1	1/2	2
	8	1/2	16
	10	1/2	20
...	8	3/2	32

Tabela 1. Supermultipleti $SU(6)$ in njihov sestav. Število stanj z enakim spinom v drugem stolpcu se ujema s številom članov v unitarnospinskih multipletih. Celotno število spinskih stanj v zadnjem stolpcu dobimo tako, da število stanj z enakim spinom iz drugega stolpca pomnožimo s pripadajočo vrednostjo $2s + 1$.

* Pri Sakiti ima osnovni supermultiplet mezonov 20 stanj, kar je privedlo do nekaterih težav.

stanj v najnižjih supermultipletih SU (6) in njihov sestav. Navedeno je število delcev z enakim spinom (ti delci tvorijo že znane unitarnospinske multiplete), pripadajoči spin in število spinskih stanj.

Pri unitarni simetriji doslej v naravi niso zasledili teoretsko dopustnega tripleta *kvarkov*.⁹ Kaže, da tudi vsi supermultipleti SU (6) ne nastopajo v naravi. Zanimiva sta predvsem supermultipleta s 35 in 56 stanji. Prvega sestavljajo unitarnospinski oktet s spinom 0, unitarnospinski singlet s spinom 1 in unitarnospinski oktet s spinom 1. Na ta mesta neprisiljeno razvrstimo znane mezone (z barionskim številom 0) z negativno parnostjo — oktet s spinom* 0: K^+ , K^0 ; π^+ , π^0 , π^- ; η ; $\bar{K}^0$, K^- , singlet s spinom 1 φ in oktet s spinom 1: K^{*+} , K^{*0} ; ϱ^+ , ϱ^0 , ϱ^- ; ω ; $\bar{K}^{*0}$, K^{*-} . Supermultiplet s 56 stanji sestavljata unitarnospinski oktet s spinom 1/2 in unitarnospinski deкупlet s spinom 3/2. Na ta mesta neprisiljeno razvrstimo znane barione (barionsko število 1) s pozitivno parnostjo — oktet s spinom 1/2: p , n ; Σ^+ , Σ^0 , Σ^- ; Λ ; Ξ^0 , Ξ^- in deкупlet s spinom 3/2: Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- ; Σ^{*+} , Σ^{*0} , Σ^{*-} ; Ξ^{*0} , Ξ^{*-} ; Ω^- . Pri tej razvrstitvi, ki v bistvu ni nič novega, je spin delcev določen vnaprej, Z njim je določena tudi absolutna vrednost barionskega števila — mezoni imajo celoštevilčen, barioni pa polovičen spin. Zadostuje, da poznajo parnost enega samega razvrščenega delca, pa je določena parnost vseh stanj supermultipleta.

Preostalih znanih delcev ne moremo tako zlahka razvrstiti na druge supermultiplete, česar so delno krivi najbrž tudi nepopolni eksperimentalni podatki. Barionski supermultiplet s 70 stanji vsebuje unitarnospinski singlet s spinom 1/2, unitarnospinski oktet s spinom 1/2, unitarnospinski deкупlet s spinom 1/2 in unitarnospinski oktet s spinom 3/2. Znana resonanca Λ (1405) bi utegnila biti ta unitarnospinski singlet, če je njen spin zares 1/2. Njena parnost bi morala biti po podatkih od reakcij delcev K^- na protonih negativna. S tem bi bila določena parnost za ves supermultiplet. Nepopolni oktet N (1512), Λ (1520?), Σ (1660), Ξ (1810?) bo morda zasedel prosto mesto okteta s spinom 3/2. Sodeč po nekaterih eksperimentih, imata N in Λ verjetno spin in parnost 3/2⁻, za Σ pa to ni izključeno. O delcih, ki bi pripadali napovedanemu oktetu 1/2⁻ in napovedanemu deкупletu 1/2⁻, ni podatkov.⁶

Zveze med mirovnimi energijami (masne formule). Največja opora unitarne simetrije so bile zveze med mirovnimi energijami za delce istega unitarnospinskega multipleta. Tudi v okviru invariantnosti proti SU (6) izpeljejo take zveze, kjer nastopajo stanja istega supermultipleta.

Ena izmed zvez za mezonski supermultiplet s 35 stanji je⁶

$$m_{\rho}^2 - m_{\pi}^2 = m_{K^{*2}} - m_K^2.$$

Ta zveza je izpolnjena z natančnostjo, s katero je določena mirovna energija mezona ϱ . Druga zveza je¹⁰

$$m_{\omega}^2 m_{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (m_{\pi}^2 + m_{K^{*2}} - m_K^2) (3 m_{K^{*2}} - m_{\rho}^2 + m_K^2 - m_{\pi}^2) - \\ - \frac{1}{6} (4 m_{K^{*2}} - m_{\rho}^2) (5 m_{K^{*2}} - m_{\rho}^2 + m_{\pi}^2 - m_K^2 - 2 m_{\omega}^2 - 2 m_{\varphi}^2).$$

Tudi ta zveza je izpolnjena z zadovoljivo natančnostjo. Pojasnili so tudi, zakaj se izmerjena mirovna energija mezona ω ni ujemala z napovedjo unitarne

* Delce zaznamujemo po starem (resonance po večini z zvezdicami). Le v primerih, pri katerih bi lahko nastal dvom, je simbolu pripisan oklepaj z mirovno energijo delca v MeV ali s spinom in parnostjo ali z obojim.¹¹

simetrije.¹¹ Pokazalo se je, da sta valovni funkciji resničnih mezonov φ in ω mešanici dveh stanj ψ_{φ^0} in ψ_{ω^0} , ki nastopata v računih:^{12,10}

$$\psi_{\omega} = (\psi_{\varphi^0} + \sqrt{2} \psi_{\omega^0}) / \sqrt{3} \quad \text{in} \quad \psi_{\varphi} = (-\sqrt{2} \psi_{\varphi^0} + \psi_{\omega^0}) / \sqrt{3}.$$

To nas ne preseneča, saj se oba delca ujemata v hipernaboju in I_z in sta člana istega supermultiplleta. Nekaj podobnega so ugotovili tudi pri tistih delcih, ki so člani unitarnospinskega okteta $1/2^-$ in unitarnospinskega deкупleta $1/2^-$ v barionskem supermultipletu s 70 člani in se ujemajo v hipernaboju in I_z .^{12,13}

Za deкупlet v barionskem supermultipletu s 56 stanji so izračunali za razliko mirovni energij med sosednjimi izospinskimi multiplleti okoli 130 MeV. Izmerjena vrednost 145 MeV se z izračunano precej dobro ujema. Za deкупlet v barionskem supermultipletu s 70 člani pa naj bi ustrezna razlika bila —60 MeV. Negativni znak pomeni, da naj bi imel od vseh desetih članov najnižjo mirovno energijo delec Ω^- ($1/2^-$).⁶ Poleg tega so izpeljali še več zvez med mirovnimi energijami za delce tega deкупleta.^{12,13} Seveda pa ni podatkov, da bi te zveze lahko preverili.

V okviru invariantnosti proti SU(6) so upoštevali tudi elektromagnetno interakcijo in dobili v barionskem supermultipletu s 56 stanji zveze med mirovnimi energijami članov istega izospinskega multiplleta,^{14,15} npr.:

$$m_{\Delta^+} - m_{\Delta^0} = m_{\Sigma^{*+}} - m_{\Sigma^{*0}} = m_p - m_n = m_{\Sigma^+} - m_{\Sigma^0},$$

$$m_{\Xi^{*-}} - m_{\Xi^{*0}} = m_{\Delta^-} - m_{\Delta^0} = m_{\Sigma^{*-}} - m_{\Sigma^{*0}} = m_{\Xi^-} - m_{\Xi^0} = m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^0}$$

Eksperimentalno so znane te razlike: $(m_p - m_n) c^2 = -1,3$ MeV, $(m_{\Sigma^+} - m_{\Sigma^0}) c^2 = -2,9$ MeV, $(m_{\Xi^-} - m_{\Xi^0}) c^2 = 6$ MeV in $(m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^0}) c^2 = 5$ MeV. Čeprav ujemanje po zgornjih enačbah ni najboljše, je še vedno zadovoljivo.

Drugi rezultati. V okviru invariantnosti proti SU(6) so preiskali tudi stanja s hipernabojem 2, to je resonance dveh barionov.¹⁶ Take resonance tvorijo lahko dva supermultiplleta s 490 in s 1050 stanji. Ugotovili so, da imajo najbrž člani prvega supermultiplleta manjšo mirovno energijo in jih bo lažje odkriti. Za šest stanj s čudnostjo 0 so ugotovili podatke, ki so zbrani v tabeli 2.

Spin	Izospin	Sestav	Mirovna energija	
1	0	} $n - p$	1880 MeV	{ devteron
0	1			
2	1	} nukleon — Δ	2160	{ $p + p \rightarrow (N\Delta)^{++} + \pi^0$
1	2			
3	0	} $\Delta - \Delta$	2350	{ $p + p \rightarrow (\Delta\Delta)^+ + \pi^+$
0	3			
				$+ \pi^- + \pi^-$

Tabela 2. Barionska stanja s hipernabojem 2 in čudnostjo 0. V zadnjem stolpcu sta za prvi dve stanji navedeni imeni, za resonance pa zgled za reakcijo, pri kateri bi jih mogli odkriti.

Prvi dve stanji sta že dolgo znani, tretje so že zasledili neodvisno od napovedi, a v njeno potrditev, o preostalih treh pa še ni nič znanega.

Poleg tega so ugotovili, da sta reakciji

$$\pi + N \rightarrow N + n\pi + \varphi \quad \text{in} \quad N + \bar{N} \rightarrow n\pi + \varphi$$

manj verjetni kot reakciji

$$\pi + N \rightarrow N + n\pi + \omega \quad \text{in} \quad N + \bar{N} \rightarrow n\pi + \omega,$$

medtem ko sta reakciji

$$K^- + p \rightarrow \Lambda + n\pi + \varphi \quad \text{in} \quad K^- + p \rightarrow \Lambda + n\pi + \omega$$

približno enako verjetni.¹⁷ Poskusi ta rezultat potrjujejo (za zadnji reakciji glej sl. 2 na s. 136⁹!).

S podobnim prijemom kot razliko mirovnih energij zaradi elektromagnetne interakcije so izračunali še razmerje med magnetnima momentoma dveh barionov iz supermultiplleta s 56 člani. Tako so dobili za razmerje med magnetnim momentom nevtrona in protona $-2/3$, medtem ko je razmerje izmerjenih vrednosti $-0,684$. Magnetni momenti drugih barionov so izmerjeni preveč nezanesljivo ali sploh niso izmerjeni, tako da ni možnih več primerjav.^{17, 15}

Lupinski model barionov. Nekateri fiziki je uporabnost SU (6) navedla na misel, da bi bil tudi za delce uporaben nekak lupinski model. Osnovni gradniki delcev naj bi bili kvarki. Ker kaže, da kvarki niso resnični delci, gre pri tem za tvegano ugibanja. Poleg tega je treba sprejeti še dodatne nenavadne predpostavke, da se dobijo delno zadovoljivi rezultati. Treba je privzeti, da so osnovni gradniki delcev člani unitarnospinskega tripleta s spinom $1/2$ in naboji $2/3 e_0$, $-e_0/3$, $-e_0/3$ ter imajo barionsko število $1/3$ ali $1/9$. V prvem primeru sestavlja barion trojica teh delcev (kvarkov), v drugem pa devetorica (*barionetov*).¹⁸ Alternativna predpostavka je, da imajo osnovni gradniki delcev barionsko število $1/3$, a nimajo spina $1/2$, tako da imajo valovne funkcije, ki ustrezajo tem delcem (*parakvarkom*), posebne lastnosti.¹⁹

Omejitve SU (6). Z invariantnostjo proti SU (6) neposredno ne morejo obseči barionskih stanj s spinom, večjim od $5/2$. Večji spini delcev so vsekakor znak sklopitve spin-tir. Tako sklopitev pričakujejo pri delcih z mirovnimi energijami nad 2000 MeV. Pri teh energijah je uporaba SU (6) močno otežkočena, podobno kot uporabnost SU (4) pri jedrskih stanjih visoko nad osnovnim stanjem. Toda če je slika Rileya in Kycie⁹ (glej sl. 1 na s. 135⁹) pravilna, je možno, da zaradi sklopitve spin-tir nastopita supermultiplleta barionov s 56 in 70 stanji z za 2 zvečanim celotnim spinom. Oktet s spinom $1/2$ naj bi tedaj nastopil še enkrat s spinom $5/2$.⁶

Višje simetrije. Dosedanji razvoj vzpodbuja še nadaljnjo razširitev simetrije za hadrone, se pravi iskanje še večjih multiplletov in novih masnih formul. Med grupami, ki so jih v ta namen preiskovali, je treba omeniti grupo, ki je direktni produkt dve unitarnih grup U (6).^{20, 21} Po tej grupi združujejo

I. multiplet: oktet 0^- , singlet 1^- , oktet 1^- skupaj supermultiplet s 35 stanji), singlet 0^- , singlet 0^+ , oktet 0^+ , singlet 1^+ , oktet 1^+ ,

II. multiplet: triplet $\frac{1}{2}^+$ (kvarki),

III. multiplet: oktet $\frac{1}{2}^+$, deкупlet $\frac{3}{2}^+$ (skupaj supermultiplet s 56 stanji), singlet $\frac{1}{2}^+$, oktet $\frac{3}{2}^+$, oktet $\frac{1}{2}^+$, deкупlet $\frac{1}{2}^+$ (skupaj supermultiplet s 70 stanji).

V I. multiplet lahko razvrstimo znane mezonske unitarnospinske multiplete: oktet 0^- , singlet 1^- in oktet 1^- . Zasedba preostalih mest je dvomljiva,⁹ mezon η (960) se ponuja za singlet 0^- , mezon B (tudi π (1220)) bi bil lahko član okteta 1^+ , mezon κ (752) pa član okteta 0^+ . Pri III. multipletu barionov so težave s parnostjo. Medtem ko kažejo eksperimentalni podatki, da je parnost supermultipleta s 70 stanji negativna, je po tej shemi pozitivna. To nasprotje tolmačijo takole: če bi bila nova simetrija natančno izpolnjena, bi bila masa vseh barionov nič, v resnici pa se zaradi prekršene simetrije mirovna energija supermultipleta s 56 člani poveča, supermultipleta s 70 stanji pa zmanjša, se pravi: postane negativna. Mirovno energijo na novo definirajo kot pozitivno, pri čemer pa morajo parnost privzeti kot negativno.

Za barione so v novi simetriji že izračunali tri nove masne formule:

$$\begin{aligned} m_{\Xi} - m_{\Sigma} &= m_{\Xi(1810, \frac{3}{2}^-)} - m_{\Xi(1620, \frac{3}{2}^-)}, \\ m_{\Sigma^*} m_{\Sigma} - m_N - m_{\Xi} &= m_{\Delta(1703, \frac{1}{2}^-)} + m_{N(1512, \frac{3}{2}^-)} - 2 m_{N(1488, \frac{1}{2}^-)}, \\ m_{\Sigma} - m_{\Lambda} &= 4 [m_{\Delta(1793, \frac{1}{2}^-)}] - 2 [m_{\Sigma(1941, \frac{1}{2}^-)} + \\ &+ m_{\Sigma(1696, \frac{1}{2}^-)} - m_{\Lambda(1405, \frac{1}{2}^-)} m_{\Lambda(1663, \frac{1}{2}^-)}]. \end{aligned}$$

Te formule so kar dobro izpolnjene. Če jih pomnožimo s c^2 , dobimo na levi strani in na desni strani po vrsti: 130 MeV, 150 MeV; 315 MeV, 329 MeV; 75 MeV, 82 MeV. V prvi formuli nastopajo delci, ki so jim določili mirovno energijo z merjenjem, v drugi in tretji pa so mirovne energije nekaterih še neugotovljenih delcev izračunane iz SU(6) (to je posebej označeno z vprašajem).

Druga grupa, ki so ji posvetili nekaj pozornosti, je U(12).²² Tu nastopijo večji multipleti s 143, 364, ... stanji. Ti po vrsti ustrezajo supermultipletom SU(6) s 35, 56 ... stanji. S to grupo, ki jo imajo za relativistično posplošitev SU(6), so izračunali absolutno vrednost magnetnega momenta protona, kar se s SU(6) ni posrečilo. Dobili so $\mu_p = (1 + 2m) \mu_j$, pri čemer je m povprečna masa okteta mezonov s spinom 1. Če vzamejo $mc^2 = 1000$ MeV, kar ni daleč od izmerjene vrednosti, dobijo za magnetni moment protona nekaj več kot 2,8 jedrskih magnetov, to je izmerjeno vrednost.

Medtem ko je uspeh unitarne simetrije, to je SU(3), splošno priznan in ni možno zatajiti vsaj delnega uspeha SU(6), je uvedba novih simetrij naletela pri nekaterih fizikih na dvom. Počakati bo treba, da se bo položaj razjasnil in bo možno dokončno soditi o teh simetrijah.

J. Strnad

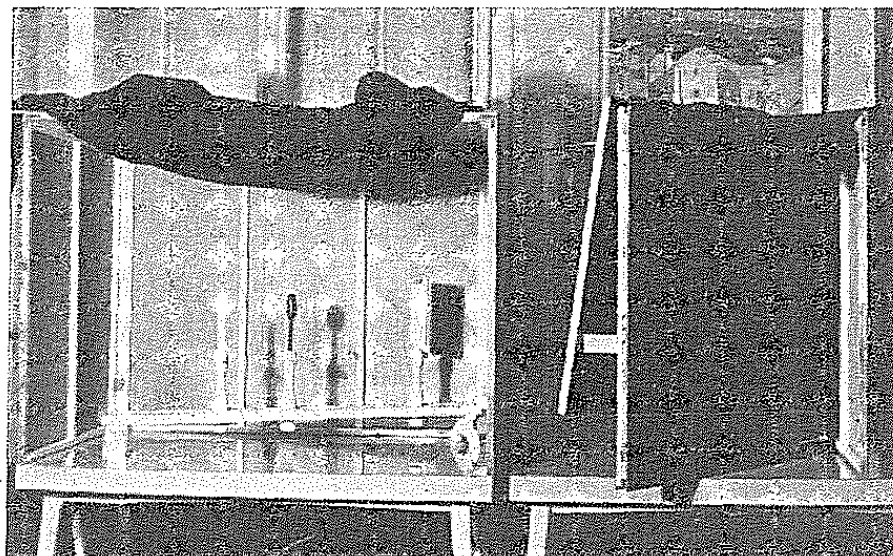
Literatura:

- ¹ Mezoni in barioni, Obz. mat. fiz. **10**, 159 (1963).
- ² Odkritje delca Ω^- , Obz. mat. fiz. **11**, 26 (1964).
- ³ E. P. Wigner: Simetrija in ohranitveni zakoni — prevod. Obz. mat. fiz. **12**, (1965).
- ⁴ E. Wigner: On the Consequences of the Symmetry of the Nuclear Hamiltonian on the Spectroscopy of Nuclei. Phys. Rev. **51**, 106 (1937).
- ⁵ F. Gürsey, L. A. Radicati: Spin and Unitary Spin Independence of Strong Interactions. Phys. Rev. Letters **13**, 173 (1964).
- ⁶ A. Pais: Implications of Spin-Unitary Spin Independence. Phys. Rev. Letters **13**, 175 (1964).
- ⁷ F. Gürsey, A. Pais, L. A. Radicati: Spin and Unitary Spin Dependence of Strong Interaction. Phys. Rev. Letters **13**, 299 (1964).
- ⁸ B. Sakita: Supermultiplets of Elementary Particles. Phys. Rev. **136**, B 1756 (1964).

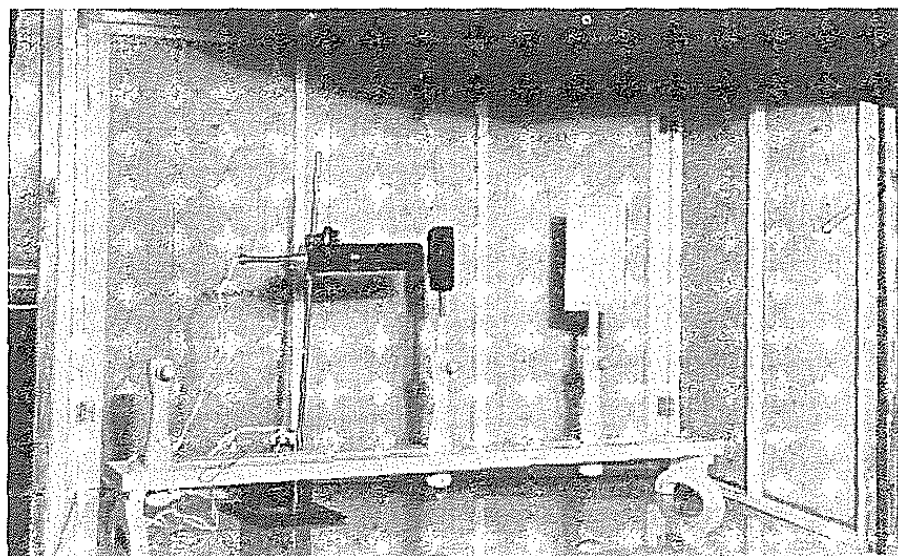
- ⁹ Nekaj novic iz fizike visokih energij, Obz. mat. fiz. **11**, 134 (1964).
- ¹⁰ M. A. B. Beg, V. Singh: Splitting of Spin-Unitary Spin Supermultiples. Phys. Rev. Letters **13**, 418 (1964).
- ¹¹ Novo poimenovanje mezonov in barionov: Obz. mat. fiz. **11**, 80 (1964).
- ¹² T. K. Kuo, T. Yao: Mass Formulas in the SU(6) Symmetry Scheme. Phys. Rev. Letters **13**, 415 (1964).
- ¹³ M. A. B. Beg, V. Singh: Splitting of the 70-plet of SU(6). Phys. Rev. Letters **13**, 509 (1964).
- ¹⁴ C. H. Chan, A. Q. Sarker: Electromagnetic Mass Correction in the SU(6) Symmetry. Phys. Rev. Letters **13**, 713 (1964).
- ¹⁵ B. Sakita: Electromagnetic Properties of Baryons in the Supermultiplet Scheme of Elementary Particles. Phys. Rev. Letters **13**, 643 (1964).
- ¹⁶ F. J. Dyson, N.-H.-Xuong: $Y = 2$ States in SU(6) Theory. Phys. Rev. Letters **13**, 815 (1964).
- ¹⁷ M. A. B. Beg, B. W. Lee, A. Pais: SU(6) and Electromagnetic Interaction. Phys. Rev. Letters **13**, 514 (1964).
- ¹⁸ P. G. O. Freund, B. W. Lee: Shell Model of Barions. Phys. Rev. Letters **13**, 592 (1964).
- ¹⁹ O. W. Greenberg: Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons. Phys. Rev. Letters **13**, 598 (1964).
- ²⁰ R. P. Feynman, M. Gell-Mann, G. Zweig: Group U(6) U(6) Generated by Current Components. Phys. Rev. Letters **13**, 678 (1964).
- ²¹ K. Bardakci, J. M. Cornwall, P. G. O. Freund, B. W. Lee: Intrinsically Broken U(6) U(6) Symmetry for Strong Interaction. Phys. Rev. Letters, **13**, 698 (1964); Experimental Implications of U(6) U(6) Invariance for Barions, Physics Letters **15**, 97 (1965).
- ²² A. Salam, R. Delbourgo, J. Strathdee: The Covariant Theory of Strong Interaction Symmetries. Proc. Roy. Soc. A **284**, 146 (1965).

PRIPOMOČEK ZA POSKUSE IZ OPTIKE

Praktične vaje iz fizike na gimnaziji so se zadnje leto kar dobro uveljavile. Po začetnih težavah s prostori in učili so sedaj že skoraj vse gimnazije uredile učilnice za fizikalne vaje ter izpopolnile zbirko učil. Vendar težave se še pojavljajo. Odpravljati jih skušamo tako, da na eksperimentalnih gimnazijah — to so tiste šole, kjer preizkušajo nov učni načrt iz fizike s predpisanimi vajami — uvajamo nove metode dela.



V eksperimentalnem razredu na gimnaziji v Celju, kjer uči prof. Ivanka Habe, dela v učilnici za praktične vaje iz fizike istočasno 30 dijakov 15 različnih eksperimentov. Pri optiki so nastopile težave, ker je bilo treba zatemniti učilnico pri nekaterih eksperimentih, to pa je motilo ostale eksperimentatorje, ki so potrebovali osvetljeno učilnico. Problem so rešili tako, da so napravili nekaj kabin, kakor jih prikazujemo na sliki. Vsaka kabina je dolga 120, široka 75 in visoka 90 cm. Tri stene kabine so iz vezanih plošč in prav tako tudi strop. Sprednja stena pa je iz črnega blaga, ki je nekoliko nabrano



in daljše od sprednje stene. Za njim se skrije eksperimentator nekako tako, kakor so to delali prvi fotografi. Na prvi fotografiji vidite postavljeno kabino in (na desni strani) že skoraj spravljen. Druga pa prikazuje notranjost kabine s pripravljenim eksperimentom.

Kabine so v lanskem šolskem letu že uporabljali na gimnaziji v Celju ter ugotovili, da so zelo primerne za eksperimentalno delo. Še posebno razveseljivo je to, da se dajo zelo lahko razstaviti in spravljene zavzemajo zelo malo prostora.

Stanko Uršič

VPRAŠANJE

Vesoljska postaja, ki miruje v breztežnem prostoru, ima obliko tankega obroča z maso 500 ton in radijem 10 m. Kako se bo gibala postaja, ko začne delovati raketni motor na obodu? V motorju nastane vsako sekundo 5 kg izpušnih plinov, ki izhajajo v tangentialni smeri in imajo glede na motor hitrost 3 km/s.

J. S.

NOVE KNJIGE NA DOMAČEM TRGU

Pri Mladinski knjigi sta izšli nadaljnji dve knjigi iz matematične zbirke »SIGMA«:

10. Rajko Jamnik: Uvod v teorijo informacij. 1965. 1200 (1400) din.

11. Ivan Vidav: Števila in matematične teorije. 1965. 880 (1100) din.

Člani Društva matematikov, fizikov in astronomov lahko dobijo ti knjigi, kakor tudi druge knjige zbirke »SIGMA«, z 20-odstotnim popustom v matematični knjižnici, Ljubljana, Trg revolucije 11.

Ciril Velkovich

REVUE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI KATEDRE ZA MATEMATIKO

Reviski del knjižnice katedre za matematiko je bil že prej precej bogat, v zadnjem letu pa se je še povečal. Predvsem je bil urejen, napisana je bila kartoteka vseh 189 naslovov revij, kolikor jih danes knjižnica premore; revije stojijo v policalih po abecednem redu. Med temi revijami pa jih je 87 takih, ki so prenehale izhajati že davno ali v zadnjem času, ali pa jih ne naročamo več. Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko pa nam je z gmotno pomočjo omogočil naročiti več starejših letnikov revij, ki niso bile kompletne. Le-teh smo prejeli do danes že 106 zvezkov in skoraj kompletirali volume naslednjih revij:

1. DUKE mathematical journal, Durham, ZDA.
 2. The COMPUTER journal, London, Velika Britanija.
 3. ELEMENTE der Mathematik, Basel, Švica.
 4. ILLINOIS mathematical journal, Urbana, ZDA.
 5. JOURNAL des mathématiques pures et appliquées, Paris, Francija.
 6. JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, Nemčija.
 7. JOURNAL of the association for computing machinery, Baltimore, ZDA.
 8. MATHEMATICAL Reviews, New York, ZDA.
 9. MATHEMATISCHE Annalen, Berlin, Nemčija.
 10. MATHEMATISCHE Zeitschrift, Berlin, Nemčija.
 11. NUMERISCHE Mathematik, Berlin, Nemčija.
 12. PACIFIC journal of mathematics, Los Angeles, ZDA.
 13. PROCEEDING of american mathematical society, Menasha, ZDA.
 14. ZEITSCHRIFT für angewandte Mathematik und Physik, Berlin, Nemčija.
- Pri urejevanju in kompletiranju pa smo redno vezali vse polne letnike in volume, ki smo jih prejeli. Tako smo lansko leto iz knjižgovernice prejeli 446 vezanih kosov. Tu je bilo tudi mnogo takih revij, ki so bile v knjižnici že več let nevezane. Danes poseduje knjižnica 1687 vezanih kosov in še precej nevezanih posameznih števil.
- Ob manjših reklamacijah redno dobivamo 102 revij, in to: 57 revij naroča za nas Državna založba Slovenije, Ljubljana, eno Mladinska knjiga — Ljubljana, in 17 Mladost — Zagreb.
- (V oklepaju prvi oz. zadnji letnik revije, ki jo imamo.)

1. ACTA mathematica, Uppsala, Švedska, 1899—1964, vol. 111, 112.
2. ADVANCED in mathematics, New York, ZDA, 1961.
3. AMERICAN journal of mathematics, New York, ZDA, 1949—1964, vol. 86, Nu. 3.
4. AMERICAN mathematical monthly, Menasha, ZDA, 1948—1964, vol. 71, Nu. 8.
5. ANNALS de l'institut Fourier, Grenoble, Francija, 1963—1964, T. 14, F. 1.
6. ANNALS Polonici mathematici, Krakow, Poljska, 1958—1964, vol. 15.
7. ANNALES scientifiques l'école normale supérieure, Paris, Francija, 1864—1964, T. 81, F. 2.
8. ANNALI di matematica pura ed applicata, Bologna, Italija, 1959—1964, T. 65.
9. ANNALS of mathematics, ser. 2, Baltimore, 1930—1964, vol. 80, No. 2.
10. ARCHIV der Mathematik, Basel, Švica, 1948—1964, vol. 15.
11. ARCHIV for history exact sciences, Berlin, Nemčija, 1960—1964, vol. 2, Nu. 2.
12. BULLETIN on the american mathematical society, Menasha, ZDA, 1930—

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 400 din, posamezna številka 100 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-181-608-324.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, Z. Bohte, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, J. Strnad, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP Ljudska pravica v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 400 din, za zasebnike 500 din, za šole 1000 din, za ustanove in podjetja 2000 din in za inozemstvo 1500 din. Čekovni račun Obzornika je 600-14-608-314.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, ...