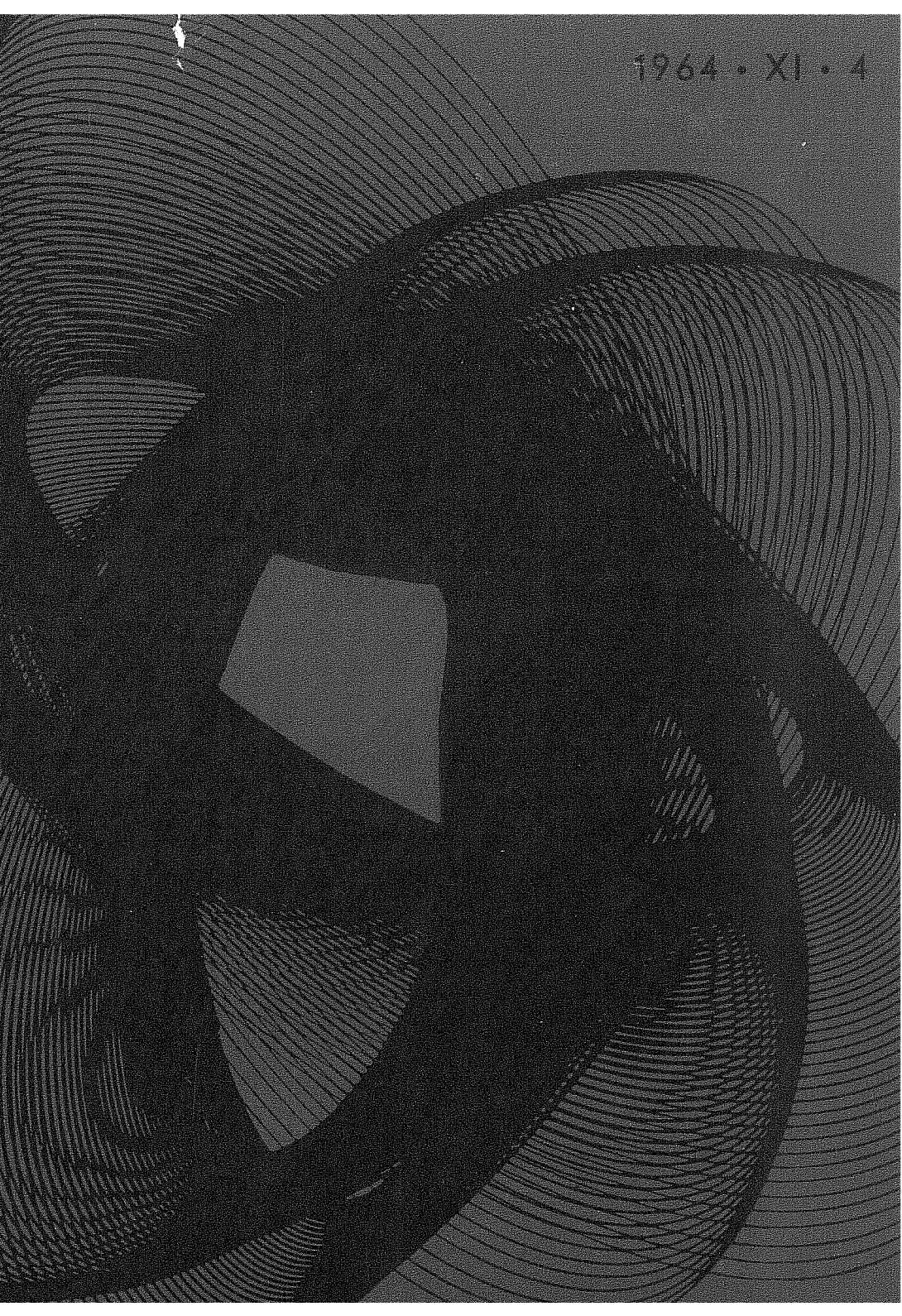




OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XI. LETNIK — 4. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS
LJUBLJANA, DECEMBER 1964

VSEBINA

Članki

Stran

Računski center IMFM (T. Skubic)	145
Elektronski računalnik Z-23 (E. Zakrajšek)	150
Biblioteka podprogramov računskega centra (M. Vencelj)	154
Diagrami poteka (Z. Bohte)	163
Plazma (S. Poberaj)	172

Novice

Zelo močna magnetna polja (B. Lavrenčič)	179
Magnetni naboji (J. Strnad)	181
Zakasneli protoni (J. Strnad)	184

Utrinek	186
-------------------	-----

Domače vesti

Ob 150-letnici rojstva Franca Močnika (J. Povšič)	187
Koliko fizike znajo študenti matematično-fizikalnega oddelka v 1. letniku (J. S., M. H., M. G.)	189

Nove knjige	191
-----------------------	-----

CONTENTS

Articles

Page

Computing Centre IMFM (T. Skubic)	145
Electronic Computer Z-23 (E. Zakrajšek)	150
The Library of Subroutines of the Computing Centre (M. Vencelj)	154
Flow Charts (Z. Bohte)	163
Plasma (S. Poberaj)	172

News

Strong Magnetic Fields (B. Lavrenčič)	179
Magnetic Monopoles (J. Strnad)	181
Delayed Protons (J. Strnad)	184

Home News	187
---------------------	-----

OBZORNIK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1964

LJUBLJANA

LETNIK XI

Uredniški odbor:

Robert Blinc, Peter Gosar, France Križanič, Ivan Kuščer, Anton Moljk, Niko Prijatelj, Janez Strnad, Stane Uršič, Ivan Vidav, Franc Kvaternik (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov in fizikov Socialistične republike Slovenije
Natisnila tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani

VSEBINA

Članki

O kategorijah in funktorjih (I. Vidav)	1
Nevtrino v astrofiziki (J. Strnad)	13
Fizikalne metode za napovedovanje potresov (I. Levstek)	18
Galileo Galilei, njegova osebnost in znanstveno delo (F. Dominko)	49
Cauchyjeva metoda reševanja algebraičnih enačb (A. Suhadolc)	58
O nekaterih prostorih analize (J. Grasselli)	62
Mooreove družine (N. Prijatelj)	97
Fizika fotonov in elektronov pri visokih energijah — zdaj in v prihodnje (W. Panofsky — prev. J. Strnad)	105
Plazma (S. Poberaj)	113, 172
Števci Čerenkova (G. Lahajnar)	121
Udarni valovi v trdnem sredstvu — nova pot do kontroliranega zlivanja jeder? (J. Strnad)	128
Računski center IMFM (T. Skubic)	145
Elektronski računalnik Z-23 (E. Zakrajšek)	150
Biblioteka podprogramov računskega centra (M. Vencelj)	154
Diagrami poteka (Z. Bohte)	163

Novice

Še en model za osnovne delce (J. Strnad)	23
Odkritje delca Ω^- (J. Strnad)	26
Pirolizni grafit — najbolj anizotropna snov (B. Lavrenčič)	28
Notranje trenje v kovinah (A. Čadež)	73
Rentgenska svetloba iz vesolja (J. Strnad)	76
Novo poimenovanje mezonov in barionov (J. Strnad)	80
H^4 — še en izotop vodika (J. S.)	81
Nekaj novic iz fizike visokih energij (J. S.)	134
Zelo močna magnetna polja (B. Lavrenčič)	179
Magnetni naboji (J. Strnad)	181
Zakasneli protoni (J. Strnad)	184

Šola

Katodni oscilograf pri šolskem pouku (F. Kvaternik)	31
Pouk moderne matematike v republiki Gvineji (A. Milenkovič)	83
Koliko fizike znajo študenti matematično-fizikalnega oddelka v 1. letniku (J. S., M. H., M. G.)	190

Domače vesti

Republiško tekmovanje v matematiki (S. Uršič)	43
Republiško tekmovanje v fiziki (F. Ahlin)	45
Iz fizike so diplomirali	48
Seminar iz matematike (S. Uršič)	87
VI. mednarodna matematična olimpiada v Moskvi (J. Globevnik)	90
Plenum Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov SFRJ (J. Povšič)	140
Naš pohod v Cerkno in Idrijo (F. Šušteršič)	141
Ob 150-letnici rojstva Franca Močnika (J. Povšič)	187

Utrinki	92, 94, 144, 186
--------------------------	------------------

Nove knjige	95, 191
------------------------------	---------

Za mlade matematike in fizike	144
--	-----

RAČUNSKI CENTER MIFM

TOMISLAV SKUBIC

Od konca leta 1961 deluje v okviru Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) Univerze v Ljubljani Računski center. Ustanovili so ga z namenom, da bi uvajal in širil računsko tehniko v Sloveniji. O njegovem življenju in delu je bila že nekajkrat obveščena naša javnost, ničesar pa še nismo o njem brali v Obzorniku. Zato je pričujoča številka glasila Društva slovenskih matematikov, fizikov in astronomov posvečena Računskemu centru.

V začetku je bila dejavnost Računskega centra zelo skromna, saj ni imeli elektronskega računalnika niti potrebnih sodelavcev in finančnih sredstev. Vidnejše uspehe je dosegel šele v zadnjem času. Sedaj ima 11 članov, ki so njegovi redni uslužbenci ali pa člani fakultet naše univerze. Nekaj zelo prizadevnih sodelavcev je tudi iz vrst študentov matematike.

Od novembra 1962 imamo v Ljubljani digitalni elektronski računalnik ZUSE Z-23, ki je skupna last Nuklearnega inštituta Jožef Stefan (NIJS) in IMFM. Devizna sredstva za nakup računalnika v višini 90.000 dolarjev je zagotovil Zvezni izvršni svet. Ker naš inštitut ni imel denarja, je dal dinarska sredstva v znesku 114 milijonov NIJS. S tem je plačal svojo polovico računalnika, obenem pa je založil denar za našo polovico. Šele pred kratkim nam je Zvezni sklad za znanstveno delo v Beogradu odobril 57 milijonov dinarjev posojila, da smo lahko uredili finančne obveznosti do svojega partnerja.

Nuklearni inštitut uporablja računalnik za reševanje svojih internih nalog, Računski center pa opravlja pedagoško in raziskovalno delo ter rešuje probleme za raziskovalne in gospodarske organizacije.

Med pedagoške naloge centra spada najprej izobraževanje njegovih članov. Ti morajo dobro poznati notranjo zgradbo in delovanje računalnika in se morajo naučiti z njim delati. Seznanjati se morajo z numeričnimi metodami in z uporabo matematike sploh. Med te naloge sodi tudi izobraževanje slušateljev matematike in drugih strok ter strokovnjakov iz inštitutov in industrije. Omeniti je treba še popularizacijo moderne računske tehnike in seznanjanje ljudi s principi dela na računalnikih.

V raziskovalne naloge sodijo med drugim študij in izboljšava numeričnih metod, izdelava raznih podprogramov, študij aritmetičnih in logičnih postopkov ter raznih jezikov za računalnike.

V zvezi z reševanjem nalog za operativno smo trenutno sposobni izdelovati programe po predloženih matematičnih metodah, to je, nuditi računske usluge.

Oglejmo si sedaj, kaj je Računski center doslej že naredil in kako opravlja svojo družbeno vlogo.

Pedagoško delo

Tečaji za programiranje

Ker mora biti računalnik čim bolj izkoriščen, smo seznanili sodelavce naših organizacij z možnostmi, ki jih nudi uporaba računalnika za reševanje

zahtevnejših problemov. V ta namen smo priredili tečaje za programiranje, ki so večinom trajali po teden dni.

Prvi tečaj je bil decembra 1962 v Ljubljani. Organizirala ga je Iskra, izvedli pa so ga člani Računskega centra. Tečaj je imel okrog 80 udeležencev. Poleg nekaterih sodelavcev IMF, NIJS in Iskre so se ga udeležili tudi sodelavci naše univerze, zastopniki 18 raziskovalnih in gospodarskih organizacij ter slušatelji tretje stopnje iz nuklearne tehnike.

Velik odziv na prvi tečaj in zanimanje udeležencev za uporabo računalnika Z-23 sta dala pobudo za prirejanje nadaljnjih tečajev, ki jih je priredil in izvedel Računski center sam. To so bili: tečaj za člane geodetsko komunalnega oddelka FAGG Univerze v Ljubljani in za člane Geodetskega zavoda SRS (decembra 1962, 21 udeležencev), za slušatelje tretje stopnje na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani (decembra 1962 in januarja 1963, 17 udeležencev), za člane IMF (januarja 1963, 25 udeležencev), tečaja za študente 3. in 5. semestra matematike (zimski semester šol. leta 1962/63), tečaj za zastopnike naše univerze, raziskovalnih in gospodarskih organizacij iz Slovenije (februarja 1964, 42 udeležencev), za zastopnike univerz, raziskovalnih in gospodarskih organizacij iz drugih republik (februarja 1964, 31 udeležencev) in tečaj za profesorje in dijake ljubljanskih srednjih šol (maja in junija 1964, 24 udeležencev).

Poleg predavanj in teoretičnih vaj so imeli udeleženci tudi praktične vaje na računalniku v več skupinah.

Sedaj pripravljamo za delo z računalnikom Z-23 bodoče sodelavce računskega centra, ki ga bodo ustanovili prihodnje leto v Zagrebu. Pred kratkim se je končal tečaj za programiranje, ki je trajal tri tedne in je imel 12 udeležencev. Temu bodo sledili tečaji za osnovni program, interni kod in logiko računalnika ter tečaj za programiranje v Algolu. Nato bodo ostali udeleženci na večtedenski praksi v našem centru.

Vzgojanje programerjev in operaterjev

Doslej smo usposobili 13 samostojnih programerjev in operaterjev za delo z računalnikom. Programerji morajo znati napisati po predloženem diagramu poteka program za srednje težak problem. Kdor nima operatorskega izpita, ne sme sam upravljati z računalnikom. Zato mora vsak operater opraviti izpit, na katerem mora pokazati, da zna računalnik vključiti in izključiti, da zna ravnati s komandnim pultom in da ve, kako se podatki in programi dajo v računalnik, kako se testirajo programi in kako se izdajajo rezultati.

Seminarji

Od začetka leta 1963 prireja Računski center interni seminar za svoje člane. Doslej smo študirali numerično analizo, čitalni program in programe za aritmetične operacije, letos pa imamo seminar iz aproksimativnih metod matematične analize.

Ostala pedagoška dejavnost

Na našem računalniku imajo redno praktične vaje slušatelji matematike in tisti slušatelji Fakultete za elektrotehniko, ki poslušajo predavanja iz programiranja za elektronske računalnike. Letos se ta predmet predava tudi na tretji stopnji. Praktične vaje so imeli tudi slušatelji tretje stopnje FNT in Fakultete za strojništvo.

Aritmetična enota ima 16 celic, ki opravljajo različne naloge. Celica 4 (akumulator) in celica 3 služita kot osnova za izvrševanje aritmetičnih operacij, celice 0, 1 in 15 kot dostop k vhodnim in izhodnim enotam, celica 2 kot posebna celica za testiranje predznaka, celica 13 kot števec pri premikanju vsebine akumulatorja in pri bločnih prenosih in podobno.

Izhodna enota računalnika Z-23 je teleprinter z vgrajenim luknjačem za perforiran trak, ali pa hitri luknjač (znamke Facit) za luknjanje perforiranega traku z zmogljivostjo do 300 znakov na sekundo.

Poleg opisanih zmogljivosti moremo na Z-23 priključiti še dodatne aparature:

vrstični printer za hitro tiskanje rezultatov z zmogljivostjo do 5 vrstic na sekundo,

čitalec in luknjač kartic (po sistemu IBM),

dodatni feritni spomin (4096 ali 8192 celic),

dodatni spomin na magnetnem traku ($4 \times 8191 \times 128$ besed).

Z vsemi dodatnimi aparaturami se seveda poveča cena računalniku, zato pa, vsaj po velikosti, lahko tekmuje tudi z večjimi in modernejšimi računalniki.

Kljub velikemu številu možnih ukazov more aritmetična enota opravljati le najosnovnejše operacije, kot so prenašanje vsebin celic, premikanje vsebine v levo ali desno, preprosta seštevanja in odštevanja in podobno. Čitanje, tiskanje in računanje s števili v plavajoči vejici že presega zmognosti aritmetične enote, zato so za te naloge potrebni posebni programi. Vsi ti programi (čitalni program, program za tisk in programi za aritmetične operacije v plavajoči vejici) tvorijo osnovni program računalnika, ki je stalno shranjen v spominu in zavzema bobenske celice od 0 do 1051. Ker imamo osnovni program stalno na razpolago in se lahko vedno nanj sklicujemo, je s tem programiranje, predvsem čitanje in izpis rezultatov, precej poenostavljeno. Po drugi strani pa tak osnovni program zavira hitrost računanja. Mnogi računalniki imajo namreč »program« za aritmetične operacije v plavajoči vejici že vgrajen in so zato običajno hitrejši. Z-23 ima namesto tega res pravi program in zato zmore približno le 77 seštevanj ali odštevanj in 30 množenj ali deljenj v sekundi. Vendar pa je moč s skrbnim programiranjem in racionalno uporabo sicer majhnega hitrega spomina prav presenetljivo skrajšati računski čas.

Uporabnikom računalnika Z-23 je poleg obširne biblioteke programov na razpolago prevajalec — »compiler« za delno poenostavljen ALGOL-60, ki pa zaradi specifičnosti računalnika (hitri in počasni spomin) ni zelo primeren za uporabo. Bolj uporaben je poseben simboličen jezik »Formelübersetzer«, ki je bil sestavljen prav za potrebe uporabnikov računalnika Z-23.

BIBLIOTEKA PODPROGRAMOV RAČUNSKEGA CENTRA

MARI VENCELJ

V vsak računalnik je vgrajenih nekaj operacij, ki so zanj osnovne. Računalnik lahko rešuje le naloge, ki se dajo iz teh osnovnih operacij sestaviti. Majhni računalniki — mednje spada tudi Z-23 — imajo vgrajenih v logiko le nekaj najpreprostejših operacij, kot so: seštevanje vsebin dveh celic v dvojiškem kodu, logična unija, logični presek itd. Eksistirajo pa tudi računalniki, pri katerih spada med osnovne operacije računanje transcendentnih funkcij ali celo reševanje diferencialnih enačb.

Vsaki osnovni operaciji je prirejen ukaz. Z danim ukazom uglasimo računalnik na želeno operacijo in predpišemo operand.

Prav gotovo je najvažnejša odlika računalnika avtomatično delovanje, ki ga omogoča programsko upravljanje. Program sestoji iz zaporedja ukazov in predstavlja navodilo za delo računalnika pri reševanju dane naloge. S podatki vred ga preberemo v spomin, računalniku pa preostane le skrb, da izpolni operacije v takem vrstnem redu, kot ga predpisuje program.

Pogosto ima kak del programa samostojen pomen. Zgled za to bi bilo npr. računanje vrednosti kakšne funkcije, ki jo potrebujemo na določenem mestu programa. Lahko se tudi zgodi, da potrebujemo takle samostojen kos programa na več mestih v glavnem programu. Zato navadno tak program izdelamo posebej in ga uredimo tako, da ga lahko uporabimo na poljubnem mestu v glavnem programu, po izvršenem računu pa se glavni program nadaljuje. Tako urejen samostojen del programa imenujemo podprogram.

Med podprogrami zavzemajo najvidnejše mesto standardni podprogrami. To so podprogrami za reševanje tipičnih nalog, kot so: računanje najpogostejših funkcij, naloge iz analize, linearne algebre itd., kakor tudi standardni računi v fiziki, kemiji, tehniki in podobno. Nekateri veliki stroji imajo, kot smo že omenili, številne standardne podprograme že kar vgrajene kot osnovne operacije, druge pa jih hranijo v tako imenovanih bibliotekah. Seveda se biblioteke posameznih računskih centrov lahko med seboj močno razlikujejo. Tako računski center pri kakem jezikoslovnem inštitutu prav gotovo ne hrani v svoji biblioteki podprogramov za reševanje fizikalnih nalog in narobe. Namen tega članka je, seznaniti bralce, s kakšnimi standardnimi podprogrami razpolaga Računski center v Ljubljani.

Kot smo že omenili, ima naš računalnik Z-23 zelo skromen sistem osnovnih operacij. Tako spadajo že osnovne štiri aritmetične operacije med standardne podprograme. Skupno s podprogrami za množenje z -1 , korenjenje, branje podatkov in programov ter izpis rezultatov so ti štirje podprogrami združeni v osnovni program računalnika; tega seveda hranimo v biblioteki, razen tega pa stalno zaseda prvih 1024 celic počasnega spomina, tako da lahko omenjene operacije, vsaj kar se programiranja tiče, privzamemo v sistem osnovnih operacij računalnika. Vse ostale podprograme hranimo le v biblioteki in jih moramo pred uporabo prebrati v spomin.

Ob nakupu računalnika nam je firma ZUSE poslala tudi večino podprogramov, s katerimi je tedaj razpolagala. V dveh letih, kolikor je stroj v Ljubljani, je zbirka stalno naraščala. Delno jo je dopolnjevala firma ZUSE, še več pa so k njej prispevali člani Računskega centra v Ljubljani. Nekatera področja numerične matematike so že zelo dobro obdelana, na drugih pa smo šele na začetku. Sicer pa kar pogledjmo, za katere probleme so programi že izdelani!

*

Zaradi lažjega pregleda bi biblioteko razdelili na skupine sorodnih podprogramov. Omenim naj še to, da manj važnih podprogramov v seznamu ni in da je marsikateri omenjeni podprogram narejen v več variantah.

Razširjene osnovne aritmetične operacije

Kompleksna aritmetika. Ta podprogram združuje naslednje operacije s kompleksnimi števili: seštevanje, odštevanje, deljenje, množenje, množenje z -1 , korenjenje, računanje absolutnih vrednosti in izpis kompleksnih števil. Pri tem je kompleksno število zapisano v dveh celicah, v eni celici realna, v drugi imaginarna komponenta.

Dvojna dolžina. Večkrat se zgodi, da pride pri kaki nalogi do tolikšne izgube natančnosti, da normalna natančnost, tj. devet decimalnih mest, za računanje ne zadošča. V takih primerih uporabimo podprogram za računanje v dvojni dolžini. Prvotni program je domače izdelave, kasneje pa smo dobili podobnega tudi od firme ZUSE. Z obema je možno seštevati, odštevati, množiti, deliti, koreniti, brati in tiskati v dvojni dolžini, domači pa še prevaja števila iz enojne v dvojno dolžino in narobe. Pri obeh sega število preko dveh celic, in sicer zaseda mantisa 70 bitov, čemur ustreza približno 20 decimalnih mest, 8 bitov pa je rezerviranih za eksponent. Obseg števil ostane torej isti kakor pri enojni dolžini $\pm 10^{98}$.

Velika aritmetika. Nasprotno od prejšnjega primera nam kdaj zadošča manjša natančnost, a bi želeli povečati obseg števil. Zato smo izdelali program za računanje s števili, kjer zaseda mantisa 26 binarnih mest (okrog 7 decimalnih), eksponent pa 14, kar poveča obseg števil na $\pm 10^{2450}$.

Povečana dolžina z razširjenim obsegom. Podprogram združuje lastnosti obeh prejšnjih podprogramov. Po njem računamo s števili, kjer pripada mantisi 64 bitov (18 decimalnih mest), eksponentu pa 14.

Elementarne transcendentne funkcije

Podprograme te skupine smo dobili iz Nemčije. Vsi računajo funkcijske vrednosti iz polinomov, ki na določenih intervalih zadosti natančno aproksimirajo dano funkcijo. V vsak program je tudi vključena redukcija argumenta na potrební interval. Tak način računanja je posebno ugoden zato, ker računanje funkcijske vrednosti časovno ni odvisno od velikosti argumenta in lahko računski čas vnaprej ocenimo.

Trigonometrične funkcije. S tem podprogramom računamo vrednosti funkcij $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ pri danem argumentu, ki je lahko podan v ločni meri, stopinjah ali gradih, le da je $|x| < 2^9$. Računski čas za $\sin x$ in $\cos x$ je 0,15 do 0,16 sekunde, za $\operatorname{tg} x$ in $\operatorname{ctg} x$ pa 0,42 sekunde. Funkcijo $\sin x$ računa iz

prvih sedmih členov Taylorjeve vrste, kar je zadosti natančno za $|x| < \frac{\pi}{2}$, druge argumente pa najprej reducira na ta interval in nato uporabi isto formulo. Druge tri funkcije računa iz $\sin x$.

Arc sin x. Podprogram aproksimira funkcijo z aproksimacijskim polinomom 21 stopnje, ki določa funkcijo $\arcsin x$ z zaželeno natančnostjo na intervalu

$$\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]. \text{ Za } \frac{1}{2}\sqrt{2} < |x| < 1 \text{ napravi transformacijo}$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

in računa po isti formuli. Računski čas: v najslabšem primeru 0,35 sekunde.

EkspONENTNA funkcija. Funkcijsko vrednost računa iz prvih 13 členov Taylorjeve vrste, kar je dobra aproksimacija za $|x| \leq 1$. Za večje argumente vpelje novo spremenljivko m na naslednji način:

$$x = m \cdot 2^n, \quad \frac{1}{2} \leq |m| < 1$$

Potem je

$$e^x = e^{m \cdot 2^n} = (\underbrace{(e^m)^2}_{n \text{ krat}})^{2^n}$$

Ker mora biti zaradi omejenega obsega števil $|x| < 88,0296912$, je n kvečjemu 7.

Logaritem. Podprogram izračuna logaritem v 0,15 sekunde po Hastingsovi formuli z natančnostjo $3 \cdot 10^{-8}$. Najprej napravi transformacijo

$$\ln x = \ln(m \cdot 2^n) = (n-1) \ln 2 + \ln 2m$$

nato pa izračuna drugi sumand iz vrste

$$\ln 2m = \sum_{k=1}^8 a_k (2m-1)^k$$

kjer so a_k Hastingsovi koeficienti za logaritem.

Iz te skupine so še omembe vredni podprogrami za $\arctg x$ za realen argument in eksponentna funkcija, $\sin z$ ter $\cos z$ za kompleksne argumente. Pri zadnjih treh so uporabljeni že omenjeni programi.

Višje transcendentne funkcije

Besselove in Neumannove funkcije s polovičnim indeksom. Po tem programu je mogoče računati vrednost poljubne Besselove ali Neumannove funkcije

s polovičnim indeksom $\frac{2n+1}{2}$ za poljuben pozitiven argument. Računski čas:

od 0,3 sekunde dalje.

Besselove funkcije s celim indeksom. Podprogram je domače izdelave in ga odlikuje izredna točnost. Računa po rekurentni formuli, pri čemer je izbira začetnega indeksa odvisna od velikosti argumenta.

Naša sta tudi podprograma za funkcijo $\Gamma(x)$ in za polne eliptične integrale $E(k)$ in $K(k)$. Oba sta izdelana po Hastingsovi metodi, in sicer je funkcija $\Gamma(x)$ aproksimirana s polinomom osme stopnje, kar nam da natančnost 10^{-6} , $E(k)$ in $K(k)$ pa oba s formulo oblike

$$\sum_{i=0}^3 a_i y^i - \left(\sum_{i=0}^3 b_i y^i \right) \ln y$$

kjer je $y = 1 - k^2$, a_i in b_i pa so Hastingsovi koeficienti.

Verjetnostni integral. Uporabili so spet eno Hastingsovih formul

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \approx 1 - \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^6 a_i x^i\right)^{16}}$$

Natančnost računanja je $3,5 \cdot 10^{-7}$, računski čas $t \leq 0,38$ sekunde.

Hermitovi in Legendrovi polinomi. Pri danem argumentu x in indeksu n računata podprograma funkcijsko vrednost po rekurzivni formuli.

Linearna algebra

S tega področja smo dobili od firme celo zbirko drobnih podprogramov za *transponiranje*, *seštevanje*, *odštevanje* ali *množenje matrik*, bodisi pravokotnih, bodisi trikotnih. Nekaj podprogramov pa ima večjo vrednost, in sicer:

Gaussov algoritem. Važna naloga linearne algebre je reševanje sistemov linearnih algebraičnih enačb. Ta podprogram rešuje to nalogo po Gaussovem algoritmu z izbiro glavnega elementa, vendar ne izbira največjega koeficienta po vsej matriki, ampak le po vrstici. Zaradi majhne kapacitete računalnika ne more biti število enačb večje od 82.

Naslednji trije podprogrami so namenjeni drugi važni nalogi linearne algebre, to je iskanju lastnih vrednosti dane matrike, medtem ko za računanje lastnih vektorjev nismo dobili od firme nobenega podprograma. Prvi je podprogram za *iskanje karakterističnega polinoma matrike po metodi Krylova*, drugi za *lastne vrednosti simetrične matrike po Jacobijevi metodi* in tretji je podprogram za *računanje maksimalne lastne vrednosti matrike s potenčno metodo*.

Tudi mi smo posvetili precej pozornosti problemom linearne algebre in izdelali nekaj dobrih podprogramov. Za reševanje sistemov linearnih enačb smo izdelali naslednje programe:

Gaussova metoda z izbiro glavnega elementa. Tukaj je izbira glavnega elementa res popolna po vsej matriki. Maksimalen red sistema je 70.

Metoda kvadratnih korenov. Podprogram služi za reševanje sistema linearnih algebraičnih enačb z normalno matriko po metodi kvadratnih korenov. Maksimalen red sistema je 107.

Tridiagonalni sistem. S tem programom rešujemo sistem linearnih enačb, če ima le-ta tridiagonalno matriko, in sicer z eliminacijo. Maksimalen red sistema je 1140.

Za iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike smo izdelali naslednje programe:

Leverierova metoda. Program služi za določanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrik, ki imajo le realne in med seboj različne lastne vrednosti. Sestoji iz treh delov:

- a) določevanje karakterističnega polinoma po Leverierovi metodi,
 - b) reševanje karakteristične enačbe s programom za same realne korene (glej algebro),
 - c) določevanje lastnih vektorjev po metodi Krylova.
- Maksimalni red matrike je 35.

Jacobijeva metoda. Od nemške verzije se ta podprogram razlikuje po tem, da dobimo z njim tudi lastne vektorje dane matrike. Maksimalni red je 57.

Metoda Danilevskega. Od vseh treh podprogramov za lastne vrednosti in vektorje je ta najbolj splošen. Z njim lahko obravnavamo poljubno matriko, katere red je manjši od 40. Lastne vrednosti so lahko tudi kompleksne, edina pomanjkljivost je v tem, da se pri večkratnih lastnih vrednostih natančnost močno zmanjša. Opis metode:

- a) karakteristični polinom po Danilevskem,
- b) lastne vrednosti po vrednosti po podprogramu Muller-Newton (glej algebro),
- c) lastne vektorje računa iz pripadajočih Frobeniusovih matrik z metodo zasledovanja.

Algebra

Sem spadajo podprogrami za reševanje algebraičnih in transcendentnih enačb ter za reševanje sistemov nelinearnih enačb. V to področje smo vložili največ truda, in sicer predvsem v problem reševanja algebraičnih enačb. Na poti do res dobrega podprograma smo izdelali številne podprograme, ki rešujejo to nalogo na bolj ali manj uspešen način.

Newtonova metoda. Podprogram rešuje poljubno algebraično enačbo po Newtonovi metodi. Dokler je natančnost približka za koren manjša od 10^{-6} , računa po prirejeni Newtonovi metodi, nato pa nadaljuje v dvojni dolžini po navadni Newtonovi metodi do natančnosti 10^{-16} . Maksimalna stopnja enačbe je 29.

Mullerjeva metoda. S tem podprogramom lahko rešujemo tudi enačbe s kompleksnimi koeficienti. Metoda je primerna tudi za reševanje enačb visokih stopenj, ker v računu ne potrebujemo odvoda kot pri Newtonovi metodi. Maksimalna stopnja enačbe je pri realnih koeficientih 98, pri kompleksnih pa 48. Ločljivost korenov je 10^{-5} , natančnost 10^{-8} . Pri večkratnih korenih hitrost konvergence in natančnost računanja močno padeta.

Kombinirana Muller-Newtonova metoda. Obe prejšnji metodi imata določene pomanjkljivosti. Pri Newtonovi je zamudnejše računanje začetnega približka, Mullerjeva metoda pa počasneje konvergira v bližini korena. S kombinacijo obeh metod smo dosegli zadovoljivo rešitev naloge. Začetni približek izračuna program po Mullerjevi metodi z natančnostjo 10^{-4} , nato pa nadaljuje z Newtonovo metodo v dvojni dolžini do natančnosti 10^{-10} . Seveda pa se težave glede hitrosti konvergence in natančnosti pri večkratnih korenih niso dale odpraviti. Maksimalna stopnja enačbe je 50.

Enačbe s samimi realnimi koreni. Kadar vnaprej vemo, da ima algebraična enačba same realne korene, je uporaba splošnega programa za algebraične enačbe izguba računskega časa. Zato smo priredili tangentno metodo tako, da dobimo korene take enačbe optimalno hitro, poleg tega pa še avtomatično

urejene po velikosti. Metoda odpove le v primeru večkratnih korenov. Maksimalna stopnja enačbe je 48. Ločljivost korenov je približno 10^{-5} , natančnost pa 10^{-8} .

Iskanje realnih korenov poljubne algebraične enačbe. Recimo, da bi želeli izračunati le realne korene dane algebraične enačbe, če jih enačba sploh ima. Na tako nalogo naletimo npr. pri problemu lastnih vrednosti matrik. Ker tangentna metoda ni prišla v poštev, smo postopali na naslednji način. Najprej smo izdelali podprogram za določitev števila realnih korenov algebraične enačbe po Sturmovi metodi, nato pa še program za lokalizacijo korenov, to je za iskanje takih intervalov, na katerih leži točno po en realni koren dane enačbe. Oba programa smo potem povezali s sekantno metodo za določevanje realnih korenov poljubne enačbe z enostavnimi koreni. Program funkcionira hitro in lahko z njim rešujemo enačbe do štiridesete stopnje.

Enačbe do vključno četrte stopnje. Uporabili smo direktne formule, in sicer Cardanovo za kubično in Ferrarijevo za bikvadratno enačbo. Program je zelo hiter.

Sekantna metoda. Najbolj splošna metoda za reševanje transcendentne enačbe $f(x) = 0$ je sekantna metoda. Pri izdelanem programu moramo podati podprogram za računanje funkcije $f(x)$ in interval, na katerem leži koren.

Newtonova metoda za sistem nelinearnih enačb. Program rešuje sistem nelinearnih enačb

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

po Newtonovi metodi pri danem začetnem približku. Podati je treba podprogram za funkcije f_i in vse parcialne odvode $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$. Konvergenca metode je precej negotova in zavisi od kvalitete začetnega približka. Maksimalni red sistema je 50.

Analiza

Sem spadajo podprogrami za aproksimacijo funkcij, za numerično reševanje diferencialnih enačb, numerično odvajanje in integriranje.

Za *aproksimacijo funkcij* smo dobili nekaj podprogramov od firme ZUSE, pa tudi sami imamo v programu temeljito obdelavo tega področja. Trenutno razpolagamo z naslednjimi podprogrami:

Aproksimacija tabele s polinomom. Program aproksimira tabelo

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

s polinomom k -te stopnje ($n > k$) po metodi najmanjših kvadratov. Podati je treba tabelo, število točk n in stopnjo aproksimacijskega polinoma k . Rezultati so koeficienti iskanega polinoma.

Fourierova analiza funkcije, ki je podana s podprogramom. Funkcija $f(x)$, ki ji želimo po tem podprogramu poiskati Fourierovo vrsto, mora biti normirana tako, da leži perioda v intervalu $(0, 2\pi)$. Seveda moremo dobiti le končno število Fourierovih koeficientov, vendar lahko to število še poljubno predpišemo. Podati je treba podprogram za računanje funkcije $f(x)$, stopnjo Fourierove vrste in natančnost, s katero želimo računati.

Fourierova analiza funkcije podane s tabelo. Podprogram je uporaben le za funkcije s periodo 2π , ki so podane z ekvidistantno tabelo s $4n + 1$ točkami.

Za reševanje diferencialnih enačb so pri firmi ZUSE izdelali nekaj podprogramov po metodi Runge-Kutta, ki pa še zdaleč ne zadoščajo potrebam Računskega centra. Naš namen je temeljito obdelati to področje. Z delom smo že pričeli in izdelali doslej nekaj podprogramov za reševanje diferencialnih enačb po Mersonovi metodi.

Metoda Runge-Kutta za diferencialne enačbe I. reda. Program služi za numerično reševanje diferencialnih enačb I. reda

$$y'(x) = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

po metodi Runge-Kutta. Podati je treba podprogram za računanje funkcije $f(x, y)$, začetni vrednosti x_0, y_0 , interval, na katerem želimo dobiti rešitev, in korak h , ki pove, kako gosta naj bo tabela rešitve. Napaka računanja je sorazmerna h^5 .

Runge-Kutta za sistem enačb I. reda. Program rešuje sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} y_i' &= f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_i(x_0) &= y_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Kot pri prejšnjem podprogramu je treba podati podprograme za vse funkcije f_i , začetne približke, interval in korak h . Tudi za napako velja ista ocena. Maksimalni red sistema je 40.

Runge-Kutta za diferencialne enačbe II. reda. Z njim rešujemo diferencialne enačbe oblike

$$y'' = f(x, y, y') \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

Glede podatkov velja vse isto kot pri prejšnjih dveh programih, rezultat je prav tako tabela. Zanimivost programa: po želji dobimo funkcijo, ki je rešitev enačbe, tudi narisano.

Programi, izdelani po Mersonovi metodi v Računskem centru, so naslednji: *Mersonova metoda za enačbe prvega reda, Mersonova metoda za sistem enačb prvega reda in program za reševanje diferencialnih enačb višjih redov po Mersonovi metodi.* Z zadnjim programom lahko rešujemo enačbe do reda 20. Te programe odlikuje pred programi tipa Runge-Kutta lastnost, da je natančnost računanja poljubna. Program sam izbere korak, ki je potreben za predpisano natančnost.

Za numerično odvajanje in integriranje obstajajo programi:

Odvajanje tabele. Program odvaja ekvidistantno tabelo

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

po formulah za odvajanje z upoštevanjem pet točk.

Integriranje funkcije po Simpsonovi metodi. Če želimo s tem programom izračunati

$$\int_a^b f(x) dx$$

moramo podati podprogram za funkcijo $f(x)$, obe meji a in b ter natančnost, s katero želimo računati.

Integriranje po Gaussovi formuli. Program računa po formuli

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=1}^n c_k f(a + (b-a) u_k)$$

kjer so u_k in c_k Gaussovi koeficienti. Za n si lahko izberemo eno od števil 6, 12, 24, 48.

Dvojni integral po Simpsonu. Integracijsko polje je lahko poljuben pravokotnik. Podati je treba njegove meje in podprogram za računanje integranda.

Drugi podprogrami

Korelacija. Program služi za določanje koeficientov

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^m x_{ik} x_{jk} \quad \begin{array}{l} i, j = 1, 2, \dots, n \\ n \leq m \end{array}$$

in desnih strani

$$B_j = \sum_{k=1}^m x_{jk} y_k$$

normalnega sistema enačb. Podati je treba matriko x_{ij} in vektor y_i .

Linearno programiranje. Program računa po znani simplex-metodi minimum linearnega funkcionala

$$L(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

kjer so neznanke x_i med seboj vezane s sistemom linearnih enačb oziroma neenačb

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}' x_k \geq b_i' \quad i = p+1, p+2, \dots, p+q$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}'' x_k = b_i'' \quad i = p+q+1, \dots, p+q+r$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

V biblioteki je tudi nekaj podprogramov za reševanje nalog iz statike, kot so: izračun gredi na togih in elastičnih podporah brez obtežitev in s poljubno mnogo obtežitvami, izračun statično določenih in statično nedoločenih predalčij, izračun ostrešij, premičnih stopnic in podobno.

Nadalje omenimo še nekaj splošnih računalnikovih podprogramov. Ekstira cel kup raznih čitalnih programov in programov za izpis, nekateri pa služijo kot pomoč pri programiranju. Taki programi so:

Adresirni program. Pri programiranju se večkrat skličemo na kakšno mesto v programu, in sicer tako, da povemo naslov celice, kjer je zapisan

začetni ukaz tistega dela programa, ki se nanj sklicujemo. Dokler program ni dokončno izdelan, naslovi niso fiksno določeni, ampak se s popravljanjem programa, to je z vstavljanjem novih in črtanjem starih ukazov, še spreminjajo. To povzroča programerju določene težave, katerim se lahko izogne z uporabo adresirnega programa, ki omogoča vpeljavo simboličnih naslovov. Pred mesto v programu, na katero se želimo sklicati, napišemo simbol (definiranje simbola) in potem namesto z naslovi operiramo kar s simboli.

Prevajalec formul. Ta program omogoča programiranje v kodu, v katerem delamo z direktnimi matematičnimi formulami. Prevajalec formul prevede tako izdelan program v interni jezik računalnika. Kod še zdaleč ni tako obsežen in splošen kot ALGOL. Izdelan je bil posebej za Z-23 in je uporaben le za algoritme, ki sestoje iz preprostih formul.

Alcorette. Program prevaja ALGOL 60 v jezik računalnika Z-23, in sicer zaradi majhne kapacitete računalnika s precejšnjimi omejitvami.

DIAGRAMI POTEKA

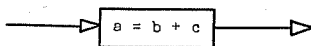
ZVONIMIR BOHTE

V zadnjih letih se je močno razširila uporaba računalnikov. Danes že skoraj povsod po svetu uporabljajo avtomatične računalnike za vse količkej komplicirane računske operacije. Hiter razvoj sodobne računske tehnike je seveda močno vplival na razvoj matematike in na uporabo matematičnih metod v drugih vedah. Vsak dan znanstveniki odkrivajo nove računske metode tako za reševanje dobro znanih starih problemov kot tudi za reševanje na novo postavljenih problemov. Za opisovanje računskih postopkov ali algoritmov za reševanje danih problemov je bil do nedavnega v rabi le navaden matematični jezik, pomešan z vsakdanjim jezikom. Vse računske operacije so avtorji opisovali s formulami, potek računa in morebitne omejitve ali razvejitve postopka pa z besedami. Programer, ki je želel na ta način opisano metodo uporabiti na svojem računalniku, je moral opraviti še polno dela. Ves postopek je moral razdrobiti na posamezne elementarne korake, dobro premisliti ves potek računa in se vprašati po morebitnih omejitvah veljavnosti postopka. Nato pa je moral prevesti ves algoritem v jezik konkretnega računalnika, tj. sestaviti program. Kmalu so postale programerjeve težave tako splošno znane, da so začeli znanstveniki na razne načine olajševati programiranje. Velik napredek je bil dosežen v smeri avtomatizacije programiranja z izpopolnjevanjem sistemov osnovnih operacij pri posameznih računalnikih in z uvedbo posebnih simboličnih jezikov. S takim jezikom se dajo opisovati algoritmi na dokaj enostaven način. V simboličnem jeziku sestavljen program pa računalnik sam prevede v navaden interni program s posebnim prevajalnim programom. Skoraj vsak računalnik ima danes že svoj simbolični jezik. V zadnjih petih letih pa se je razvil tudi univerzalni simbolični jezik ALGOL (ALGOritmic Language), ki kaže, da bo sprejet po vsem svetu. Zadnje čase se v literaturi vse pogostejše pojavljajo že izdelani programi v ALGOL. Tak program je na žalost še vedno precej nepregleden in nerazumljiv za vsakogar, ki jezika ne pozna.

Namen tega članka je seznaniti bralca s povsem drugačnim načinom opisovanja algoritmov, ki se zadnje čase vse bolj in bolj uveljavlja v tehnični in znanstveni literaturi. To opisovanje je bolj nazorno, saj je delno tudi grafično. Potek računa z vsemi potrebnimi formulami sestavimo v sliko, ki jo imenujemo diagram poteka (angl. flow chart, nem. Flußdiagramm). Diagram poteka je sestavljen iz raznih likov — predalčkov, v katere napišemo operacije, ki jih je treba na danem mestu izvršiti, in iz ravnih ali lomljenih črt, ki povezujejo te predalčke in enolično določajo potek računa. V tem članku se bomo seznanili z osnovnimi principi risanja diagramov poteka. Pri tem si bomo raje ogledali več zgledov, kot pa da bi skušali razviti »teorijo«. Dejstvo je, da pri tem risanju ni togih pravil, pač pa ima ponavadi vsak posameznik svoja pravila.

Diagrami poteka imajo za osnovni sestavni del predalček v obliki pravokotnika. V njem izpisane operacije se po vstopu v predalček izvršijo, nakar se račun nadaljuje v liku, v katerega kaže puščica pri izhodu. Operacije v liku

lahko opišemo s formulami ali besedami. Diagram poteka je tem bolj podroben, čim bolj elementarne so te operacije. Vzemimo preprost primer:



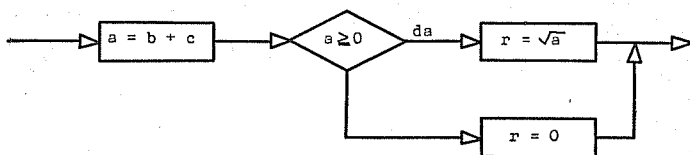
Pred vstopom v pravokotnik moramo imeti podani števili b in c . V njem določimo po opisanem postopku novo število a , ki postane s tem znano in ga moremo uporabiti v nadaljnjih računih. Novo količino smemo v principu izraziti kot poljubno funkcijo že prej določenih ali podanih količin. Posamezni pravokotniki smejo vsebovati več operacij hkrati ali celo samostojen računski proces, npr. rešitev sistema linearnih enačb. Nekateri uporabljajo pri opisovanju operacij namesto enačaja puščico, npr. $b + c \rightarrow a$, kar se pokaže za ugodno predvsem takrat, kadar damo rezultatu operacije oznako enega izmed operandov. Tak je primer $S + a_k \rightarrow S$ in $k + 1 \rightarrow k$, kar pomeni, da vsoto imenujemo spet S , nato pa indeks k povečamo za 1. V naših diagramih bomo uporabljali enačaj tudi v takih primerih. Pisali bomo $S = S + a_k$ in $k = k + 1$.

Dva posebna predalčka si rezervirajmo za začetek in konec računa. To sta



Začetek mora biti en sam, konec pa je lahko več, če je potek računa razvejan.

Poleg pravokotnih predalčkov bomo uporabljali tudi predalčke v obliki rombov, ki imajo bistveno drugačen učinek. Rabili jih bomo za razvejitev poteka. V takem rombu postavimo vprašanje in glede na odgovor potem izberemo enega od dveh možnih izhodov. En izhod (označen z da) velja v primeru pritrdilnega odgovora na vprašanje, drugi pa v primeru nikalnega odgovora. Kot zgled si oglejmo račun za izraz $r = \sqrt{(a + |a|)/2}$, kjer je $a = b + c$. Diagram poteka sestavimo takole:



Več črt lahko staknemo skupaj, kar pomeni, da se v več ločenih primerih postopek skupno nadaljuje.

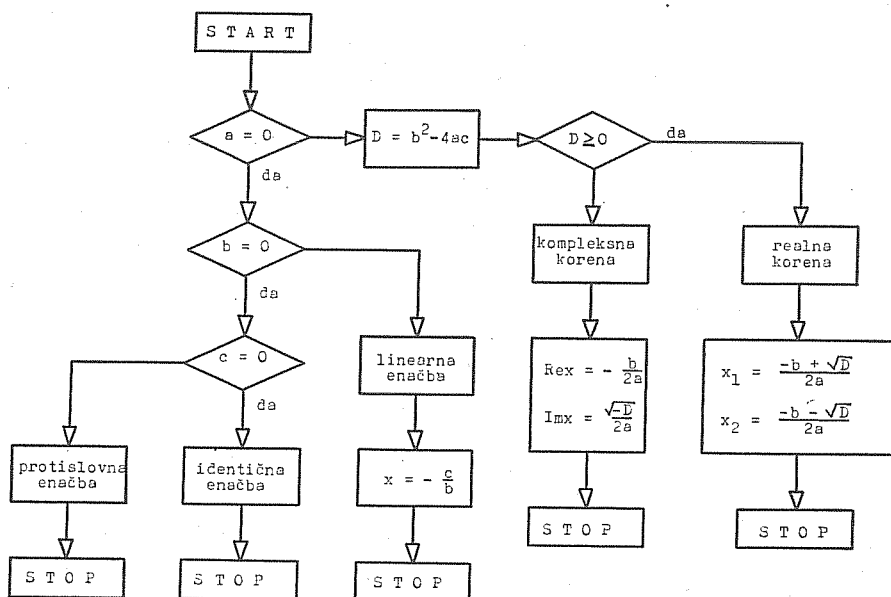
Če je diagram poteka zelo obširen in je treba povezati oddaljene dele diagrama, si lahko pomagamo s posebnimi oznakami, ki jih zapišemo v kroge in jih postavimo na ustreznih mestih. S tem se izognemo zelo dolgim črtam, ki bi ovirale preglednost diagrama.

Oglejmo si sedaj nekaj konkretnih zgledov za diagrame poteka, pri katerih bomo sproti opozarjali na podrobnosti konstrukcije in pojasnili pomen oznak.

Kvadratna enačba

Dani naj bodo koeficienti kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, ki so lahko poljubna realna števila. Poleg korenov želimo imeti kot rezultat še signal

o naravi enačbe ali korenov. Ta signal bomo sporočili v obliki teksta. Formulo za korene kvadratne enačbe poznamo, paziti pa moramo na posebne izrojene primere, ki morejo nastopiti pri splošnih koeficientih. Diagram poteka je narisana na sl. 1. To je zgled za direktni, a razvejeni proces. Pri danih koeficientih a, b, c poteka račun prek ene od petih možnih vej. V tem preprostem primeru je razlaga očitno odveč.



Slika 1

Skalarni produkt dveh vektorjev

Dana sta dva n -razsežna vektorja

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{in} \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

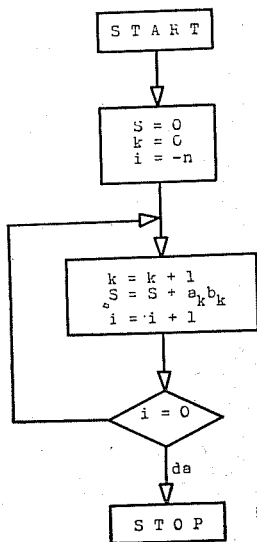
Izračunati je treba skalarni produkt teh dveh vektorjev:

$$S = (a, b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Tu imamo opravka s števili, ki imajo indekse. Pri tem smatramo, da je število s svojim indeksom enolično podano. V računalniku shranjujemo vektorske količine po določenem pravilu (največkrat damo komponente v zaporedne celice), tako da je indeks števila v tesni zvezi z naslovom celice, v kateri je to število. Zato moramo v diagramih poteka najprej indekse definirati, nato pa šele smemo uporabiti število z danim indeksom. Diagram poteka za računanje skalarnega produkta dveh vektorjev je narisana na sl. 2.

Število n je podano, a je sicer poljubno naravno število. Zato število sumandov v skalarnem produktu ni vedno isto. Skalarni produkt dobimo

z n -kratno ponovitvijo iste operacije: povečanje delne vsote S za produkt isto-
ležnih komponent $a_k b_k$. Pri tem moramo indeks k povečevati za 1 in obenem
šteti ponovitve te osnovne operacije. Vlogo števca ima število i . Ponavljanje
iste operacije imenujemo cikel. Pred vstopom v cikel moramo določiti začetne
vrednosti spreminjajočih se količin: delne vsote, indeksa števil in števca, v ciklu



Slika 2

samem pa jih ustrezno spreminjamo. Pri izhodu iz cikla ima S vrednost skalar-
nega produkta, indeks k je enak n , števec i pa ima vrednost 0. Cikle moremo
organizirati tudi drugače. Posebnemu števcu bi se sploh lahko izognili, saj bi
za štetje lahko izkoristili kar indeks k . Ko postane k enak n , je cikla konec.
Vendar se izkaže iz praktičnih programerskih razlogov za ugodno, da števce
ločimo od indeksov, ki v bistvu pomenijo naslove nastopajočih števil.

Oglejmo si še en primer za enociklični proces.

Vrednost funkcije $\sin x$ iz vrste

Naloga je izračunati vrednost vsote

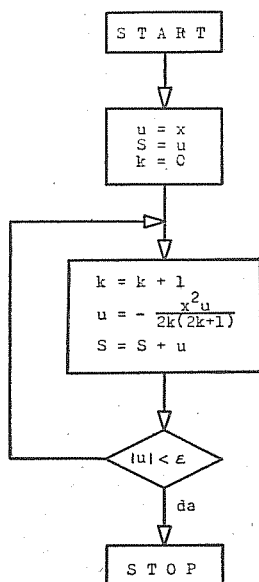
$$S = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

pri danem argumentu x in številu ε . V formuli moramo število n izbrati tako,
da je člen $x^{2n+1}/(2n+1)!$ prvi, ki je po absolutni vrednosti manjši od ε . Tako
definirano število S nam da vrednost funkcije $\sin x$ z absolutno napako pod ε .
Računanje števila S si bomo uredili takole:

$$u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k, \quad s_{k+1} = s_k + u_k$$

$$k = 1, 2, \dots$$

pri čemer je $u_1 = x$ in $s_1 = u_1$. Račun prenehamo, čim je $|u_{k+1}| < \varepsilon$. Tu pomeni u_k k -ti člen v vrsti, s_k pa k -to delno vsoto. Diagram poteka za ta račun je na sl. 3.



Slika 3

Tudi tu imamo ciklični proces, pri katerem pa v začetku računa še ne vemo, kolikokrat se bodo operacije v ciklu ponovile. Število ponovitev v ciklu je odvisno od podatka x . Ko postane spremenljajoče se število u po absolutni vrednosti manjše od danega ε , je računa konec in rezultat je število S .

Zdaj pa si oglejmo zgled za bolj kompliciran proces s tremi cikli.

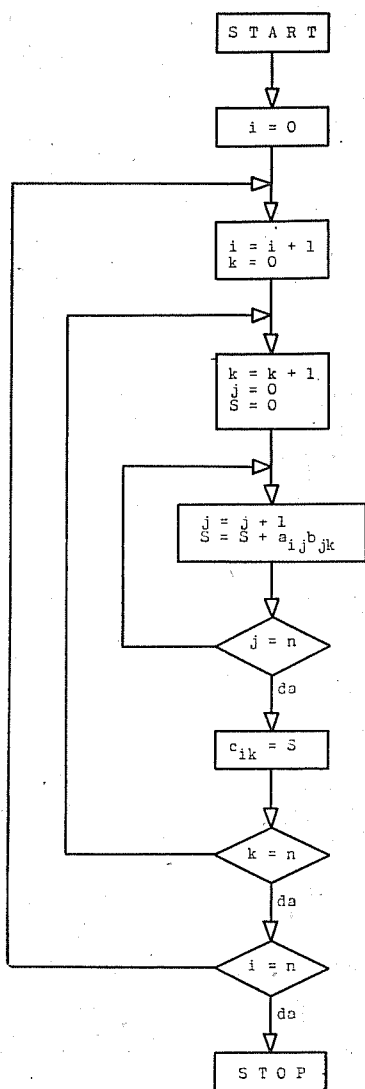
Produkt dveh matrik

Naj bosta dani kvadratni matriki $A = \{a_{ik}\}$ in $B = \{b_{ik}\}$, ki naj bosta obe reda n . Naloga je izračunati produkt teh dveh matrik $A \cdot B$, tj. matriko $C = \{c_{ik}\}$, kjer je

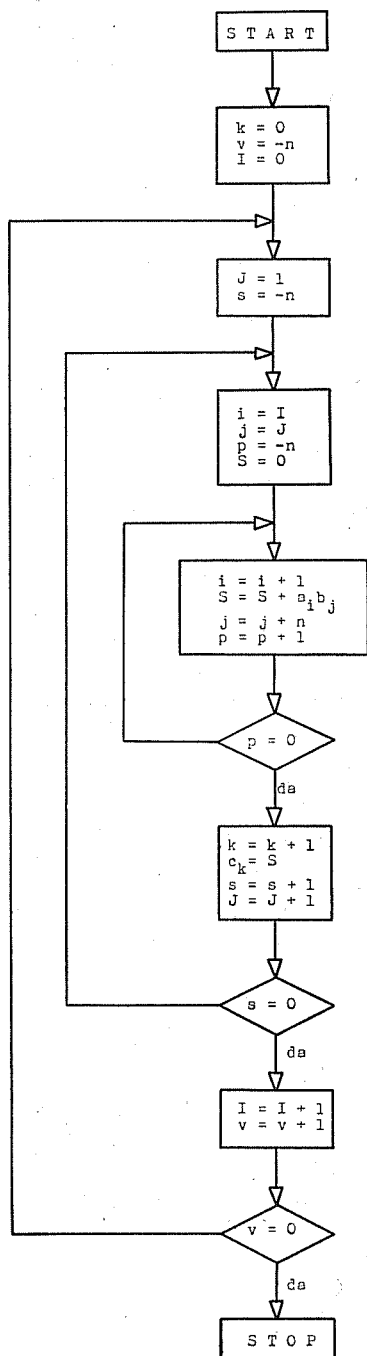
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

Za to na videz preprosto operacijo ni tako enostavno narisati diagrama poteka. Če upoštevamo, da so elementi matrik popolnoma podani z obema indeksoma, potem je diagram poteka še dokaj preprost (sl. 4).

To je zgled za trociklični proces. Notranji cikel je namenjen računanju skalarnega produkta i -te vrstice prve matrike s k -tim stolpcem druge matrike. Srednji cikel je za množenje i -te vrstice prve matrike z vsemi stolpci druge matrike, zunanji cikel pa za množenje vseh vrstic matrike A z matriko B .



Slika 4



Slika 5

V tem primeru smo za štetje v ciklih porabili kar indekse elementov. Operacije v zunanjem ciklu se ponove n -krat, v srednjem n^2 -krat, v notranjem pa n^3 -krat.

Diagram na sl. 4 ima to slabost, da moramo števila izbirati po dveh podanih indeksih. V računalnikih so števila shranjena v celicah spomina, vsako število je podano z naslovom celice, v kateri je shranjeno. Zato so že po konstrukciji spomina v bistvu števila podana le z enim indeksom, tj. s svojim naslovom. Če želimo shraniti v spomin neko matriko, navadno shranimo elemente v zaporedne celice po vrsticah. S tem pa dobimo namesto kvadratne sheme linearno. Zato moremo v primeru, da poznamo indeksa i in k elementa a_{ik} , doseči ta element le, če najprej izračunamo njegov naslov po formuli:

$$\text{naslov}(a_{ik}) = \text{naslov}(a_{11}) + n(i-1) + k - 1$$

To računanje naslovov bi bilo po našem diagramu (sl. 4) potrebno dvakrat v notranjem ciklu (a_{ij} in b_{jk}) ter enkrat v srednjem ciklu (c_{ik}), kar zneso točno $(2n^3 + n^2)$ -krat. To pa povzroči pri količkah velikem n veliko izgubo časa.

Oglejmo si sedaj, kako bi se dalo sestaviti diagram poteka za produkt dveh matrik, če sta matriki A in B podani z »vektorjema« $a_1, a_2, \dots, a_n$ in $b_1, b_2, \dots, b_n$, matriko $C = A \cdot B$ pa iščemo v obliki $c_1, c_2, \dots, c_n$. V vseh treh primerih je prvih n števil prva vrstica matrike, drugih n števil druga vrstica itd. Po pravilu za množenje matrik bomo vsako vrstico prve matrike skalarno množili z vsakim stolpcem druge matrike. Stolpci matrike imajo v tej pisavi elemente po n mest narazen.

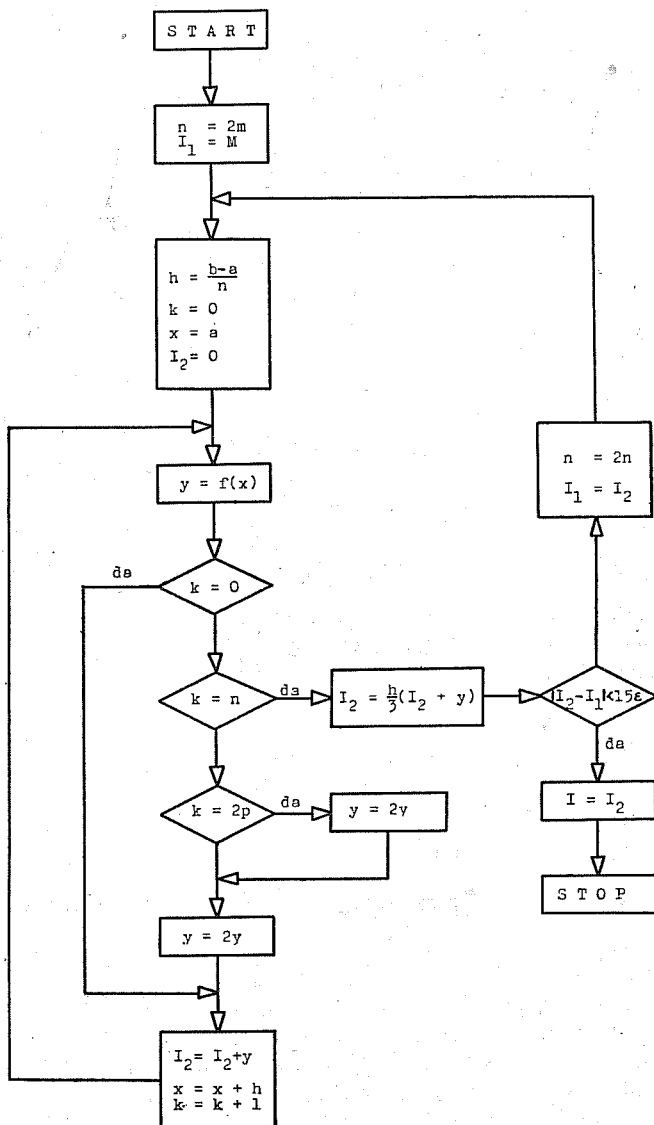
Izberimo si najprej indekse in števce. Za elemente matrike A naj bo indeks i , za matriko B indeks j in za C indeks k . Števec za vrstice matrike A naj bo v , za stolpce matrike B naj bo s in za sumande v skalarnem produktu p . Izkaže se, da je smiselno uvesti še dva pomožna indeksa, s katerima bomo pravilno postavljali začetne vrednosti indeksov i in j . Imenujmo ju I in J . S temi pojasnili je bralcu, upam, možno razumeti diagram na sl. 5.

Doslej smo imeli v glavnem le »šolske« primere problemov. Vzemimo sedaj za spremembo zaključen numerični problem.

Vrednost določenega integrala po Simpsonovi formuli

Naloga je izračunati približno vrednost določenega integrala $I = \int_a^b f(x) dx$ z absolutno napako pod ε . Poleg števil a, b, ε in funkcije $f(x)$ naj bo dano tudi neko sodo število $2m$, ki nam pove, na koliko intervalov naj v začetku razbijemo interval (a, b) . Numerični postopek je takle: najprej izračunamo funkcijske vrednosti $y_k = f(a + kh)$, kjer je $h = (b - a)/(2m)$ za $k = 0, 1, \dots, 2m$, nato pa izraz $I_1 = (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})h/3$. Potem število $2m$ podvojimo, tj. razpolovimo korak h in po istem postopku izračunamo vrednost I_2 . Iz ocene za napako Simpsonove formule sledi, da je $|I - I_2| \leq |I_2 - I_1|/15$. Če izraz $|I_2 - I_1|$ ni manjši od 15ε , tedaj korak h spet razpolovimo in ta proces nadaljujemo toliko časa, da je absolutna razlika zadnjih dveh približkov za integral pod 15ε . Tedaj je I s predpisano natančnostjo enak izračunani vrednosti I_2 (tj. vrednosti pri najmanjšem koraku). Računanje si zaradi enostavnejšega poteka priredimo tako, da vzamemo v začetku za I_1 najprej neko veliko število M (npr. 10^{20}), tako da bo prva primerjava

obvezno pokazala potrebo po razpolovitvi koraka. Zmedo, ki smo jo napravili s kompliciranim opisom postopka, lahko takoj odpravimo, če narišemo diagram poteka (sl. 6).



Slika 6

V notranjem delu diagrama ugotavljamo s pomočjo indeksa k , s kolikšnim faktorjem (1, 2 ali 4) je treba pomnožiti izračunano vrednost y . Dobljeno vrednost prištejemo k delni vsoti I_2 . Velja pripomniti, da vrednost $4y$ računamo v diagramu kot $2(2y)$, kar pa ne pomeni znatne izgube časa, saj je v binarnih računalnikih množenje z 2 najenostavnejša operacija. Vprašanje $k = 2p$ pomeni:

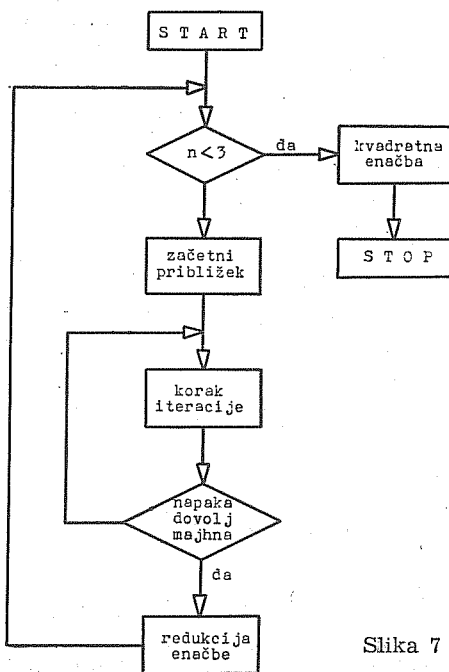
ali je k sodo število? Indeks k imamo tudi za števec. Ko je enak n , dobimo končno vrednost približka za integral. Če primerjava dveh zaporednih približkov pokaže potrebo po razpolovitvi koraka, podvojimo število intervalov n in ponovno izračunamo h .

Vse doslej smo imeli opravka s primeri podrobno izdelanih diagramov poteka. Včasih pa je ugodno, posebno pri obsežnejših in kompliciranejših problemih, izdelati najprej grob diagram poteka, kjer v posameznih predalčkih nakažemo posamezne dele celega procesa, nato pa obravnavati vsak del zase.

Kot zgled za grob diagram poteka si oglejmo proces reševanja algebrائية enačbe stopnje n po kaki iteracijski metodi za kompleksne korene.

Reševanje algebrائية enačbe

Posebej obravnavamo kvadratno enačbo, sicer pa najprej določimo začetni približek, računamo zaporedne približke po dani metodi toliko časa, da je napaka dovolj majhna, koren natiskamo, enačbo reduciramo za linearni ali kvadratični delitelj itd. Diagram (sl. 7) smo sestavili tako, da smo v predalčkih z besedami opisali, kako si sledijo glavne faze celotnega postopka. Druge podrobnosti pa pridejo na vrsto, ko si izberemo konkretno metodo.



Slika 7

Dovolj je zgledov. Res je, da diagrami poteka niso dosti bolj pregledni od drugače opisanih postopkov, pač pa so v veliko oporo pri programiranju. Če imamo za določeno nalogo sestavljen dober diagram poteka, je napisati program res enostavno. Največ koristi od diagramov poteka pa ima seveda tisti, ki ga nariše, sam. Šele pri risanju se pokaže, katerih podrobnosti nismo dobro premislili in kaj bi kazalo v metodi izboljšati ali spremeniti.

PLAZMA

SAVO POBERAJ

II. DEL

NEKATERI OSNOVNI PARAMETRI V FIZIKI PLAZME

Temperatura plazme

Temperatura za plazmo v termodinamskem ravnotežju ima običajen termodinamski pomen. V večini primerov pa imamo opravka s plazmo, ki ni v takem ravnovesju. V takih primerih je zelo uporaben pojem kinetične temperature T_k , ki je definirana z izrazom

$$\frac{3}{2} kT_k = \frac{1}{2} \int m v^2 f(v) d^3 v \quad (32)$$

$f(v)$ je porazdelitev ionov po hitrostih in je normirana tako $\int f(v) d^3 v = 1$. Če je hitrostna porazdelitev Maxwelllova, se seveda kinetična temperatura ujema s termodinamsko.

V močnejših električnih poljih in pri majhnih gostotah plazma niti približno ni v termodinamskem ravnovesju. V takih primerih sploh ne moremo govoriti o temperaturi plazme, temveč le o elektronski in ionski temperaturi. Da bo stvar bolj razumljiva, si oglejmo temperaturne razmere v navadni fluorescenčni žarnici. Zaradi večje gibljivosti si elektroni med dvema zaporednima trkoma v povprečju naberejo več energije kot manj gibljivi ioni. Toda pri elastičnem trku z ionom more elektron z energijo E_e oddati ionu v najboljšem primeru le energijo $\Delta E = 2(m_e/m_i) E_e$. Ker je $m_e/m_i \sim 10^{-3}$, izgubi elektron pri takem trku komaj tisočinko svoje energije. Energija elektronov ne more stalno naraščati že zaradi neelastičnih trkov. Očitno pa je, da je njihova povprečna energija, torej tudi kinetična temperatura, višja od ionske. Elektronska temperatura je npr. v navadnih fluorescenčnih žarnicah približno 20 000 °C, temperatura ionov pa je praktično enaka temperaturi okolice.

Razliko v temperaturah moremo oceniti takole: V stacionarnem stanju odda elektron v 1 sek toliko energije s trki, kot jo v električnem polju pridobi. Torej

$$e v_e E = \frac{3}{2} k (T_e - T_i) \cdot 2 (m_e/m_i) \nu_{ei} \quad (33)$$

kjer je v_e hitrost elektrona, ν_{ei} pa frekvenca trkov elektronov z ioni. Iz gornje formule dobimo

$$\Delta T/T_e = (T_e - T_i)/T_e = \left(\frac{3}{2} k T_e\right)^{-1} e v_e m_i E / 2 m_e \nu_{ei} \quad (34)$$

Frekvenca trkov je $\nu_{ei} = v_e/\lambda_{ei}$, kjer je λ_{ei} srednja prosta pot elektronov pri trkih z ioni. Hitrost elektronov je $v_e = \mu_e \cdot E = eE/m_e \nu_{ei}$. Pri tem je μ_e elektronska gibljivost. Vstavimo te izraze v (34), pa dobimo

$$\Delta T/T_e = (m_i/4 m_e) \left(\frac{3}{2} k T_e\right)^{-2} (\lambda e E)^2 \quad (35)$$

V mnogih primerih ne moremo govoriti o termodinamskem ravnovesju plazme, smemo pa govoriti o termodinamskem ravnovesju elektronske in ionske komponente v taki plazmi. Pod vplivom zunanega električnega polja imata

npr. elektronski in ionski plin različni kinetični temperaturi. Ko polje odstranimo, zadošča že nekaj trkov med enakimi delci, za vzpostavitev Maxwelllove porazdelitve. Obe komponenti bosta vsaka zase v termodinamskem ravnovesju pri temperaturah T_e in T_i . Za vzpostavitev termodinamskega ravnovesja med obema komponentama pa je zaradi velikih razlik v masah delcev potrebno nekaj tisoč trkov med ioni in elektroni. Čas za vzpostavitev termodinamskega ravnovesja je približno tisočkrat daljši od časa, v katerem se doseže ravnovesje za posamezno komponento.

Debyeova dolžina

Plazma skuša ostati vsaj približno električno nevtralna. To je ena od njenih osnovnih lastnosti. Vsako večje odstopanje od nevtralnosti povzroči namreč močne elektrostatske sile, ki skušajo odstopanje od nevtralnosti zmanjšati. Večje odstopanje od nevtralnosti more nastopiti le na manjšem področju, npr. v plasti med plazmo in stenami, ki jo omejujejo. Debelina take plasti je v zvezi z Debyeovo dolžino. Debyeova dolžina je v teoriji plazme med najvažnejšimi parametri, zato si jo bomo nekoliko podrobneje ogledali.

V termodinamsko ravnovesni plazmi si izberimo en ion in pogledjmo, kakšna je porazdelitev elektronov in ostalih ionov v njegovi okolici! Z n_i in n_e označimo povprečni ionski in elektronski koncentraciji. Naboj ionov naj bo Ze . Zaradi odbojnih sil med ioni in privlačnih med ioni in elektroni koncentraciji obojih delcev v okolici izbranega iona nekoliko odstopata od povprečnih vrednosti. V razdalji r od iona sta po Boltzmannovem zakonu enaki: $n_i' = n_i \exp(-Ze\varphi/kT)$ in $n_e' = n_e \exp(e\varphi/kT)$, kjer je $\varphi(r)$ potencial izbranega iona. Gostota prostorskega naboja je $\rho = e(Zn_i' - n_e')$. V to relacijo vstavimo zapisano izraza za n_i' in n_e' ter upoštevajmo, da so eksponenti pri dovolj visokih temperaturah majhni in da je v nevtralni plazmi $Zn_i = n_e$! Za ρ dobimo $\rho = e^2 n_e (Z + 1) \varphi/kT$. To vstavimo v Poissonovo enačbo $\nabla^2 \varphi = \rho/\epsilon_0$, pa dobimo

$$\nabla^2 \varphi = n_e (Z + 1) e^2 (\epsilon_0 kT)^{-1} \varphi \quad (36)$$

Vpeljimo oznako

$$\lambda_D^2 = \epsilon_0 kT / [(Z + 1) e^2 n_e] \quad (37)$$

Zaradi homogenosti plazme je potencial φ funkcija r . Z uporabo krogelnih koordinat in s substitucijo $\varphi r = u$ sledi iz (36) $d^2 u/dr^2 = u/\lambda_D^2$. Z rešitvijo te enačbe in z napisano substitucijo dobimo $\varphi = c_1 e^{r/\lambda_D}/r + c_2 e^{-r/\lambda_D}/r$. Ker velja $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$, mora biti $c_1 = 0$. Drugo konstanto, c_2 pa določimo iz pogoja da je v neposredni okolici iona potencial coulombski. Torej je $(\varphi r)_{r \rightarrow 0} = Ze/4\pi\epsilon_0$. Za potencial iona v plazmi dobimo formulo

$$\varphi(r) = (Ze/4\pi\epsilon_0) e^{-r/\lambda_D}/r \quad (38)$$

Parameter λ_D imenujemo Debyeova dolžina.

Prostorski naboj v okolici iona je enak

$$\rho(r) = (Ze/4\pi\epsilon_0 \lambda_D^2) e^{-r/\lambda_D}/r \quad (39)$$

Navadno govorimo, da je ion obdan z oblakom nabojev, ki ima gostoto (39). V resnici pa v okolici kateregakoli iona ni nobenega oblaka nabojev. Pri

izpeljavi zgornjih formul smo si izbrali en sam ion, ki smo ga s tem odlikovali, samo zaradi računskega udobja. Drugačna analiza bi nam pokazala, da obstoja samo določena verjetnost korelcije leg za poljuben par nabojev. Formula (38) podaja statistično vrednost potenciala iona v plazmi. Če že ravno hočemo ostati pri pojmu oblaka, pa povejmo to takole: vsak naboj ima okrog sebe oblak nabojev, pri tem pa je sam sestavni del podobnih oblakov. Vsak naboj je torej zasenčen z naboji nasprotnega znaka.

Debyevo dolžino, ki so jo prvič vpeljali v teorijo močnih elektrolitov, daje približno oceno o velikosti prostora, v katerem se more n_e znatno razlikovati od Zn_i . Z Debyevo dolžino moremo plazmo definirati tudi takole: plazma je tak sistem pozitivnih in negativnih nabojev, v katerem je Debyeova dolžina mnogo manjša od dimenzij sistema. To je stroga definicija plazme v termodinamskem ravnovesju, vendar je zelo primerna tudi za neravnovesno stanje. V takih primerih moramo za temperaturo v izrazu za λ_D vstaviti kinetično temperaturo.

Frekvenca plazme

V teoriji plazme je izredno važen parameter frekvenca plazme. Pri računu frekvence si mislimo plazmo v obliki neskončne plošče z debelino l . Zanimamo toplotno gibanje ionov in elektronov ($T = 0$) in premaknimo elektrone v smeri pravokotno na ploščo za $x \ll 2l$. Zaradi takega premika nastaneta na obeh straneh plošče površinska naboja z gostoto $\pm en_e x$. Jakost električnega polja, ki ga ta površinska naboja ustvarita v plazmi, je — podobno kot v ploščnem kondenzatorju — enaka $E = e n_e x / \epsilon_0$. To polje skuša elektrone spraviti nazaj v ravnovesno lego. Enačba za gibanje elektronov se glasi $m_e n_e l d^2x/dt^2 = -n_0 l (e n_e / \epsilon_0) x$. Ta enačba pa opisuje nihanje s kotno frekvenco

$$\omega_p = (e^2 n_e / m_e)^{1/2}, \quad (40)$$

ki ji pravimo frekvenca plazme.

Opisano nihanje je najpreprostejše nihanje, ki je možno v plazmi. Značilno zanj je to, da ostane strogo lokalizirano. Valovanje dobimo le, če upoštevamo tudi toplotno gibanje nabojev.

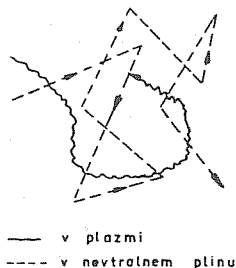
Videli smo, da je Debyeova dolžina merilo za razsežnost prostora, v katerem morejo nastopiti znatna odstopanja od nevtralnosti. Z recipročno vrednostjo ω_p pa ocenimo čas, v katerem elektrostatske sile v plazmi vzpostavijo porušeno nevtralnost. Z lahkoto se prepričamo, da je $1/\omega_p$ ravno čas, v katerem elektron s hitrostjo $v = (kT/m_e)^{1/2}$ preleti Debyevo dolžino.

Trki v plazmi

V močno ionizirani kratkoživi plazmi (življenjska doba je nekaj μs , s tako plazmo delajo pri nekaterih poskusih v zvezi s termionuklearno fuzijo) so trki med delci (tako imenovane individualne interakcije), popolnoma prekriti s kolektivnimi interakcijami med delci. Take kolektivne interakcije so npr. nihanja in cela vrsta nestabilnosti. Nasprotno pa so v šibko ionizirani plazmi in v močno ionizirani dolgoživi plazmi trki med delci zelo važni.

Trke delimo na prožne in neprožne. Med neprožne trke spadajo vzbujanje, ionizacija, zamenjava nabojev itd. Tukaj nas bodo zanimali samo prožni trki med nabitimi delci (coulomski trki).

V nevtralnem plinu so med molekulami Van der Walsove sile, ki pojemajo z razdaljo približno sorazmerno z r^{-6} . Te sile imajo kratek doseg, zato so trki med nevtralnimi delci dobro definirani. Če gostota ni prevelika, močno prevladujejo binarni trki. V plazmi pa delujejo med delci coulombske sile, ki pojemajo sorazmerno z r^{-2} in imajo velik doseg. Trk med dvema osamljenima nabojema je seveda tudi v tem primeru dobro definiran, težave pa nastopijo pri gostotah, pri katerih vpliva zaradi coulombskih sil z velikim dosegom na naboj istočasno več sosedov. V tem primeru ne moremo več govoriti o kakem binarnem trku. Zaradi sil velikega dosega so poti delcev v popolnoma ionizirani plazmi drugačne kot v nevtralnem plinu, kar vidimo na sl. 7.

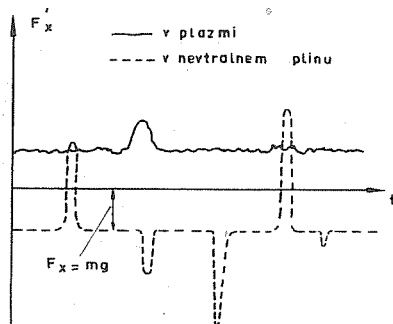


Sl. 7. Pot molekule v nevtralnem plinu in naboju v popolnoma ionizirani plazmi

Enačba gibanja naboja v plazmi ima obliko

$$mdv/dt = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s \quad (41)$$

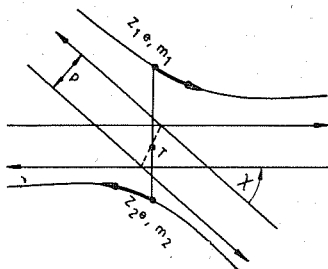
kjer je $\mathbf{F}$ neka sila, ki je zvezna v kraju in času, npr. teža $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, sila v električnem polju $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ ipd. $\mathbf{F}_s$ je hitro spremenljiva stokastična sila, to je sila, ki jo lahko opišemo samo statistično. Ta sila vsebuje trke. Časovni potek ene od komponent trenutne sile $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s$ v plazmi in nevtralnem plinu je narisana na sl. 8.



Sl. 8. Časovni potek ene komponente trenutne sile v nevtralnem plinu in popolnoma ionizirani plazmi

Geometrija binarnega coulombskega trka v težiščnem sistemu je na sl. 9. Vpadna razdalja p je razdalja med asimptotama obeh tirov. Pomen odklonskega kota χ razberemo s slike. Zanj velja

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \chi = Z_1 Z_2 e^2 / (4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2 p) \quad (42)$$

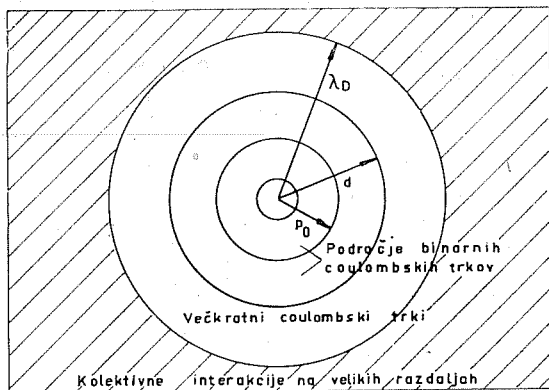


Sl. 9. Geometrija coulombskega binarnega trka v težiščnem sistemu

pri čemer je $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$, $g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ pa je relativna hitrost delcev, ko sta še izven območja trka. Za diferencialni sipalni presek za coulombske trke dobimo Rutherfordovo formulo

$$\sigma(\chi) = Z_1 Z_2 e^2 / 4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2)^2 (2 \sin^2 \frac{1}{2} \chi)^{-2} \quad (43)$$

Zasledujemo gibanje enega elektrona skozi plazmo! Navada je, da tak poljubno izbran delec imenujemo poskusi delec (angl. test particle). Ostali naboji, ki jih bomo imenovali poljski delci (angl. field particles), povzročajo na mestu poskusnega delca spremenljivo električno polje. To polje povzroča spreminjanje smeri in velikosti hitrosti poskusnega delca, torej trke. Nekaj reda poskusimo v zelo nepregledno situacijo vpeljati s štirimi značilnimi razdaljami (glej sl. 10). To so 1. Debyeve dolžina λ_D , 2. povprečna razdalja med delci $d =$



Sl. 10. Sistematizacija coulombskih trkov

$= n^{-1/3}$, 3. vpadni parameter p_0 , pri katerem se elektron odkloni za $\chi = 90^\circ$ in 4. povprečna prosta pot λ za elektron, ki je definirana kot razdalja, na kateri

se ta odkloni za 90° od prvotne smeri. V vseh važnih oblikah nekvantne in nerelativistične plazme velja $p_0 \ll d \gg \lambda_D \ll \lambda$.

Če je $p \ll d$, gre za nekak binarni trk, ker je trk s kakim delcem že končan, preden se drugi delec približa na razdaljo manjšo od d . Vendar smemo take trke le približno imeti za binarne, kajti na delec deluje razen partnerja pri trku še mnogo drugih delcev, čeprav je vpliv letih dosti manjši. Take trke delimo v dve skupini: v prvo skupino spadajo tesni trki, pri katerih je $p \leq p_0$, v drugo pa prav gotovo ne moremo imeti niti približno za binarne, Trkov z $d \leq p < \lambda_D$ pa prav gotovo ne moremo imeti niti približno za binarne, ker nastopi več takih trkov istočasno. Odklone poskusnega delca povzročajo v tem primeru statistične fluktuacije nabojev v krogli s polmerom λ_D . Delci v polju izven Debyeve krogle pa nimajo zaradi zasenčenja na obnašanje poskusnega delca praktično nobenega vpliva.

Ker trki v plazmi niso tako dobro definirani kot v nevtralnem plinu, je razumljivo, da v plazmi ne moremo definirati časa med zaporednima trkoma in povprečne prosti poti tako kot v nevtralnem plinu. Povprečni čas τ med dvema zaporednima trkoma definiramo v plazmi kot časovni interval, v katerem se naboj zaradi trkov z ostalimi naboji odkloni od prvotne smeri za 90° ali več.

Čas τ izračunamo takole: Poskusni delec z nabojem $Z_1 e$ in maso m_1 naj se giblje med mirujočimi poljskimi delci, ki imamo maso m_2 in naboj $Z_2 e$. Oglejmo si najprej tesne trke, to je tiste, pri katerih je $p \leq p_0$. Vpadni parameter p_0 , ki ustreza odklonskemu kotu $\chi = \frac{1}{2} \pi$ dobimo iz (42):

$$p_0 = Z_1 Z_2 e^2 / (4 \pi \epsilon_0 \mu v_1^2) \quad (44)$$

Število tesnih trkov v 1 sekundi je $\nu_0 = 1/\tau_0 = n_2 v_1 \pi p_0^2$ ali

$$\nu_0 = n_2 (Z_1 Z_2 e^2)^2 / (16 \pi \epsilon_0^2 \mu^2 v_1^3) \quad (45)$$

Sedaj pa izračunajmo število preostalih trkov! Pri teh trkih so odklonski koti majhni, zaradi velikega števila trkov pa je njihov skupni učinek mnogo večji od manj pogostih tesnih trkov. Oceno za frekvenco $\nu = 1/\tau$ teh trkov dobimo takole. Delec dobi pri trku pravokotno na smer gibanja pred trkom neko gibalno količino. Zato se gibalna količina delcev v prvotni smeri spremeni za $m_1 v_1 (1 - \cos \chi) = 2 m_1 v_1 \sin^2 \frac{1}{2} \chi$. Če upoštevamo, da so odklonski koti majhni, smemo $\sin \frac{1}{2} \chi$ zamenjati s $\text{tg } \frac{1}{2} \chi$. Z zvezo (42) dobimo za spremembo gibalne količine delca v prvotni smeri izraz

$$\Delta (m_1 v_1) = - 2 m_1 v_1 (Z_1 Z_2 e^2 / 4 \pi \epsilon_0 \mu v_1^2 p)^2$$

Upoštevati pa moramo vse vpadne parametre, tako da dobimo za spremembo gibalne količine delca v eni sekundi enačbo

$$\Delta (m_1 v_1) / \Delta t = - (m_1 v_1) 4 \pi n_2 v_1^{-3} (Z_1 Z_2 e^2 / 4 \pi \epsilon_0 \mu)^2 \int dp/p \quad (46)$$

Za spodnjo mejo v integralu postavimo p_0 za zgornjo pa λ_D . V času $\Delta t = \tau$ je $\Delta (m_1 v_1) = - m_1 v_1$, kajti po definiciji časa τ se sedaj delec giblje pravokotno na prvotno smer. Iz (46) torej sledi $\Delta (m_1 v_1) / \Delta t = - m_1 v_1 / \tau$, od tod pa

$$\nu = 1/\tau = 4 \pi n_2 v_1^{-3} (Z_1 Z_2 e^2 / 4 \pi \epsilon_0 \mu)^2 \Lambda \quad (47)$$

kjer je

$$\Lambda = \ln (\lambda_D / p_0) \quad (48)$$

tako imenovani coulombski logaritem. Vrednost za Λ leži skoraj pri vseh važnih primerih med 10 in 20.

S primerjanjem izrazov za τ iz (45) in (47) vidimo, da je τ več desetkrat krajši od τ_c . Tesni trki torej zares manj vplivajo na gibanje delca kot pa veliko število šibkih trkov.

V elektronskem plinu s koncentracijo n_e in temperaturo T_e ter hitrostjo elektronov $v_1 = (3 k T_e / m_e)^{1/2}$ dobimo s strožjo analizo, v kateri upoštevamo tudi gibanje poljskih delcev, za frekvenco trkov med elektroni formulo

$$\nu_{ee} = 1/\tau_{ee} = 0,714 e^4 n_e (3 k T_e / m_e)^{-3/2} (\pi \epsilon_0^2 m_e^2)^{-1} \Lambda \quad (49)$$

S τ_{ee} ocenimo čas, v katerem se izravnavajo anizotropije v hitrostni porazdelitvi. Podobno dobimo za ione

$$\nu_{ii} = 1/\tau_{ii} = 0,714 Z^4 e^4 n_i (3 k T_i / m_i)^{-3/2} (\pi \epsilon_0^2 m_i)^{-1} \Lambda \quad (50)$$

Povprečne proste poti izračunamo iz relacij $\lambda_{ee} = v_e \cdot \tau_{ee}$ in $\lambda_{ii} = v_i \cdot \tau_{ii}$.

Pri interakciji toplejšega elektronskega plina s hladnejšim ionskim se bosta temperaturi obeh izenačili. Potek izenačenja je opisan z enačbo $dT_e/dt = - (T_e - T_i)/\tau_{eq}$.

Relaksacijski ali ekviparticijski čas τ_{eq} je enak

$$\tau_{eq} = \epsilon_0 m_e m_i (3 k T_e / m_e + 3 k T_i / m_i)^{1/2} (\frac{1}{8} \pi)^{1/2} / (Z^2 e^4 n_i \Lambda) \quad (51)$$

Ekiparticijski čas je mnogo daljši od časov τ_{ii} in τ_{ee} , o čemer smo že govorili v zvezi s temperaturo plazme.

Literatura:

¹ Chandrasekhar, S., Principles of Stellar Dynamics, Chicago (University Press). 1942.

ZELO MOČNA MAGNETNA POLJA

Malo je področij v eksperimentalni fiziki, kjer ne bi potrebovali magnetnih polj. Pogosto shajajo s polji, ki imajo manjšo gostoto kot 1 Vs/m^2 , večkrat pa so zaželeni polja s čim večjo gostoto. Sestavek skuša dati skop pregled načinov za doseganje magnetnih polj z gostotami nad 2 Vs/m^2 .¹

Najbolj vsakdanje dobimo magnetno polje z elektromagnetom, ki ima železno jedro z rezo. Gostota magnetnega polja B v dovolj ozki reži s širino b je dana z zvezo $bB/\mu_0 = NI$, pri čemer je N število ovojjev okoli jedra s stalnim presekom in I električni tok. To zvezo dobimo, če izpišemo zakon o magnetni napetosti po sklenjeni poti in izpustimo člen $sB/(\mu\mu_0)$, kjer je s srednji obseg jedra. Navedeni člen smemo izpustiti, če je permeabilnost železa μ še dovolj velika, če torej železo še ni magnetno nasičeno.

Večje gostote polja dosežejo, če pola na obeh straneh reže izoblikujejo v prisekana stožca. Magnetni pretok ostane nespremenjen, zmanjša pa se presek magnetnega polja, tako da naraste njegova gostota. Tako dosežejo polja z gostoto do 3 Vs/m^2 . Večjo gostoto je tedaj lažje doseči, če je reža ozka in če sta pola zožena, se pravi, če je prostornina magnetnega polja (v zraku) majhna. Izkušnja uči, da je dosegljiva gostota polja približno linearno odvisna od logaritma razmerja med prostornino železa in med prostornino magnetnega polja (v zraku). Za polja z zelo velikimi gostotami zato magneti z železnim jedrom niso primerni, saj bi za 10 Vs/m^2 v 2 mm široki reži potrebovali desettisočtonski magnet.

Drugo možnost predstavlja magnet brez jedra, prazna tuljava, po katerem teče velik električni tok. Pri tem ni omejitev zaradi nasičenja. Zaradi velikega toka pa je treba dovajati veliko električno moč in odvajati velik toplotni tok. Taki magneti so uporabni nekako od 4 Vs/m^2 navzgor. Električna moč, ki jo je treba dovajati, narašča približno sorazmerno s kvadratom gostote magnetnega polja in obratno sorazmerno z linearnimi razsežnostmi tuljave (»Hudsonova formula« $B = k (P/r_1)^{1/2}$ $k \approx 10^3 \text{ Vs/m}^2 (\text{W/m})^{-1/2}$, r_1 je notranji radij tuljave). Odvajanje toplotnega toka postane pri velikih gostotah kritično, saj je treba npr. pri 10 Vs/m^2 odvesti iz vsakega kubičnega centimetra žice okoli 4 kW. Vendar dosežejo na ta način polja z gostoto do 25 Vs/m^2 , pri čemer potrebujejo za hlajenje magneta tudi več kot 200 litrov vode na sekundo. Posebno velike gostote je dosegel Bitter², s svojo »tuljavo«, ki jo sestavljajo debeli kolobarji bakra. Ti kolobarji in plasti izolacijskega materiala so naloženi drug vrh drugega, pri čemer je med dvema bližnjima kolobarjema na določenem mestu kovinski vstavek. Kolobarji in izolatorji imajo luknje, po katerih teče voda za hlajenje vzporedno s cevjo »tuljave«.

Privlačna je misel, da bi s hlajenjem do nizkih temperatur zmanjšali upor žice in s tem potrebno električno moč. Vendar praktično tega ni lahko izvesti, ker je treba pri nizkih temperaturah odvajati še vedno znaten toplotni tok. Delo pri temperaturah tekočega vodika bi sicer nekaj obetalo, vendar govorijo proti hlajenju s tekočim vodikom razlogi varnosti.

Pri velikih gostotah magnetnega polja nastopita še dve težavi. Pod vplivom magnetnega polja se poveča specifični upor kovin. S poskusi so ugotovili, da je relativni prirastek specifičnega upora $\Delta\zeta/\zeta$ odvisen od razmerja B/ζ . Pri kovinah

je za majhne gostote polja ta prirastek sorazmeren z $(B/\zeta)^2$, pri večjih gostotah pa je odvisnost od kovine do kovine drugačna. Pri nekaterih ostane prirastek $\Delta\zeta/\zeta$ kvadratna funkcija B/ζ , pri drugih, npr. pri natriju, je linearna funkcija, pri indiju in aluminiju pa se bliža specifični upor z naraščajočo gostoto B neki stalni vrednosti. Za vodnike pri magnetih z zelo velikimi gostotami za zdaj največ obetata natrij in aluminij. Poskušajo z magnetom, ki ima kot vodnik natrij v nerjavečih jeklenih ceveh.

Druga nevšečnost, ki jo je treba pri močnih poljih tudi upoštevati, je sila, s katero deluje polje na vodnik z električnim tokom. Gostota magnetne sile je $f = jB$, če je magnetno polje pravokotno na tok, pri čemer je j (ploskovna) gostota električnega toka. Pri običajnih šibkih poljih v tuljavah ni treba posvečati pozornosti magnetnim silam, ki jih polje drugih ovojev izvaja na neki ovoj in na njegovo notranjost. Pri zelo velikih gostotah pa dosežejo tlaki zaradi teh magnetnih sil velikostno stopnjo nateznih trdnosti nekaterih kovin, npr. pri 10 Vs/m^2 je tlak okoli 8 kp/mm^2 . To je eden izmed razlogov, zaradi katerih morajo namestiti pri omenjenem poskusnem magnetu natrij v jeklene cevi.

Korak dalje so supraprevodni magneti. Vendar navadni supraprevodniki (»supraprevodniki 1. vrste«) niso uporabni za magnetne z veliko gostoto polja, saj prenehajo biti supraprevodni, če preseže gostota določeno prav nizko mejo, npr. $2 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/m}^2$ pri okoli 6° K za svinec.³ Nekateri supraprevodniki, ki so jih odkrili v zadnjem času, npr. Nb_3Sn (»supraprevodniki 2. vrste«), pa dopuščajo gostote okoli 50 Vs/m^2 in še čez.⁴ Dokler je temperatura takega supraprevodnika pod preskočno temperaturo — najvišja znana preskočna temperatura meri 18° K —, teče po supraprevodniku tok, ki so ga v njem bili vzbudili z indukcijo, ne da bi zato bilo potrebno pozneje še dovajati moč. Vseeno pa tudi pri supraprevodnih magnetih ne gre popolnoma brez dovajanja moči, saj je treba celotno napravo hladiti. Navzlic temu pa si od raziskav supraprevodnih magnetov največ obetajo, če gre za stacionarna magnetna polja z veliko gostoto.

Večkrat pa potrebujejo pri poskusih magnetno polje z izredno veliko gostoto, a samo za kratek čas. Pri magnetih, ki jih uporabljajo v ta namen (prazni toroidi pri navadni temperaturi) in ki delajo v sunkih, odpadejo glavne skrbi zaradi hlajenja. Potrebno energijo da običajno baterija kondenzatorjev. Napetost U , na katero morajo nabiti kondenzator s kapaciteto C , da dobijo magnetno polje z gostoto B , lahko ocenimo, če izenačimo energijo magnetnega polja z energijo kondenzatorja: $\frac{1}{2} B^2 V / \mu_0 = \frac{1}{2} C U^2$, pri čemer je V prostornina magnetnega polja. Seveda je dejanska potrebna energija nekolikokrat večja, ker nastopajo tudi tu precejšnje izgube zaradi gretja vodnikov. Na ta način za $0,01 \text{ s}$ že dosežejo polja z gostoto 100 Vs/m^2 .⁵

Drugi način, pri katerem dobijo zelo kratkotrajna magnetna polja z izredno velikimi gostotami, še ni posebno star. Pri tem izkoristijo pojav, da se magnetni pretok, ki ga ustvari tuljava, v prevodnem valju znatno ne spremeni v času, manjšem od L/R , četudi valj stisnejo. L je induktivnost valja in R njegov upor. Najučinkoviteje opravijo stiskanje valja z eksplozivom: namestijo ga okoli valja in aktivirajo. Gostota magnetnega polja se poveča od prvotne B_0 na $B = B_0 (r_0/r)^2$, če je r_0 začetni in r končni radij valja. Valj se krči, dokler se tlak zaradi magnetne sile ne izravna z zunanjim tlakom v plinu zgorelega eksploziva. Tako v zelo majhnem prostoru za nekaj mikrosekund že dosežejo gostote okoli 1800 Vs/m^2 .

Borut Lavrenčič

Literatura:

- ¹ J. L. Olsen: Strong Magnetic Fields. Contemporary Phys. 5, 161 (1964).
- ² D. de Klerk, C. J. Gorter: A Criterion for the Efficiency of Iron Core Electromagnets. Appl. Sci. Res. B 8, 265 (1960).
- ³ F. Cirkler: Supraprevodnost, prevod. Obz. mat. fiz. 3, 155 (1953), L. N. Cooper: Teorija supraprevodnosti, prevod. Obz. mat. fiz. 9, 61 (1962).
- ⁴ J. E. Kunzler, E. Buehler, F. S. L. Hsu, J. H. Wernick: Superconductivity in Nb₃Sn at High Current Density in a Magnetic Field of 88 kgauss. Phys. Rev. Letters 6, 89 (1961).
- ⁵ P. Kapica. Proc. Phys. Soc. 42, 425 (1930).
- ⁶ F. Bitter, Brit. J. Appl. Phys. 14, 759 (1963).

MAGNETNI NABOJI

V Maxwellovih enačbah za prazen prostor nastopajo magnetne in električne količine simetrično: če zamenjamo magnetne količine z ustreznimi električnimi (jakost H in gostoto B magnetnega polja z jakostjo E in gostoto D električnega polja) in obratno, se spremeni kvečjemu predznak. Simetrija pa se poruši, če so prisotni električni naboji: upoštevati je treba še gostoto nabojev in gostoto toka zaradi gibanja nabojev, a ustreznih magnetnih količin ni. Zakaj ni popolne simetrije, to se pravi, zakaj ni magnetnih nabojev? Vprašanje ni tako utemeljeno, kot bi morda kdo sodil na prvi pogled. V kvantni mehaniki namreč stojimo na stališču, da se dogajajo v naravi z večjo ali manjšo verjetnostjo vsi pojavi, ki jih izrecno ne prepoveduje kateri od ohranitvenih zakonov. Ohranitvenega zakona, ki bi prepovedoval nastanek delcev z magnetnim nabojem, pa ne poznamo niti v klasični niti v kvantni fiziki. Zaradi tega bo v elektrodinamiki vrzel, dokler tega zakona ne bodo utemeljili. Druga možnost pa je, da magnetni naboji zares obstojijo, čeprav za zdaj razen razmišljanja o simetriji nič ne govori za njihov obstoj. V zadnjem času so posvetili temu problemu precej pozornosti. Tudi drugače je možnost, da magnetni naboji obstojijo, prav zanimiva, zato se nekoliko pomudimo ob njej.

Delce z magnetnimi naboji bi lahko iskali z večjim upanjem, če bi slutili njihove lastnosti. Pri napovedovanju teh lastnosti fiziki niso bili v zadregi. Prve račune je napravil že pred dobrimi tremi desetletji Dirac.¹ Teh in drugih zapletenih računov ne moremo navajati. Do približnih podatkov pa lahko poskusimo priti z ugibanjem in raznimi približki.

Enota za magnetni naboj je Vs, saj velja, da dobimo enoto za kako magnetno količino, če v enoti za ustrezno električno količino zamenjamo A z V in V z A . V enačbi, v kateri se pojavi magnetni naboj, morajo električne in magnetne količine nastopati simetrično. Najpreprostejši simetrični izraz je produkt električnega in magnetnega naboja z enoto $As \cdot Vs = Js$. Enota tega izraza se ujema z enoto za Planckovo konstanto h , ki nastopa v enačbah kvantne mehanike. Če se ne oziramo na morebitne numerične faktorje, utegne tedaj biti omenjeni produkt enak h . Električni naboj je kvantiziran, osnovni električni naboj je $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As. Od tod bi lahko sklepali, da je tudi magnetni naboj kvantiziran (Φ_0) in da velja morda enačba $e_0 \Phi_0 = h$. V resnici se enačba, ki smo jo uganili, ujema z izpeljano. Osnovni magnetni naboj naj bi tedaj bil $\Phi_0 = h/e_0 = 4,14 \cdot 10^{-15}$ Vs.

Podobno kot poznamo električni naboj dveh znakov — pozitivni in negativni, bi bili tudi magnetni naboji dvojni — severni in južni. Istoimenski naboji bi se odbijali, raznoimenski pa privlačevali. Sile med dvema magnetnima

nabojema ni težko izračunati, saj je treba samo prepisati Coulombov zakon za magnetni primer $F = \Phi_1 \Phi_2 / 4 \pi \mu_0 r^2$. Sila med dvema osnovnima magnetnima nabojema bi bila $(\Phi_0^2 / \mu_0) / (e_0^2 / \epsilon_0) = (h/e_0^2 \mu_0 c)^2 = 4690$ -krat večja kot sila med dvema osnovnima električnima nabojema v enaki razdalji. (V enotah cgs je osnovni magnetni naboj $(4690)^{1/2} = 68,5$ -krat večji od osnovnega električnega naboja.) Ta sila bi bila večja od sil med protoni in nevtroni v atomskih jedrih in bi bila sploh najmočnejša sila v naravi. Sklicujoč se na to, lahko domnevamo o masi delca, ki nosi en osnovni magnetni naboj, saj je po izkušnji v splošnem masa delcev tem večja, čim močnejše so sile med enakimi delci. Po tem bi utegnila biti masa tega delca okoli 4690-krat večja od mase najlažjega delca z enim osnovnim električnim nabojem, to je elektrona. Tudi druga preprosta domneva, da imata elektron in delec z osnovnim magnetnim nabojem enaka klasična radija ($e_0^2 / 8 \pi \epsilon_0 m_0 c^2 = \Phi_0^2 / 8 \pi \mu_0 m' c^2$) privede do iste vrednosti. Zato menijo, da bi utegnila mirovna energija tega delca ležati v bližini 2400 MeV.

V magnetnem polju deluje na magnetni naboj sila $\mathbf{F} = \Phi_0 \mathbf{H}$. V električnem polju na mirujoč magnetni naboj ne deluje nobena sila; če pa se delec z nabojem giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$, deluje nanj sila $\mathbf{F} = \Phi_0 \mathbf{D} \times \mathbf{v}$. Obe enačbi sta analogiji k ustreznima enačbama, ki veljata za električni naboj. Iz druge enačbe lahko izračunamo silo, s katero deluje električno polje na magnetni naboj, ki se giblje skoraj s hitrostjo svetlobe: $F = \Phi_0 c D = (\Phi_0 \epsilon_0 c / e_0) e_0 E = (h / \mu_0 c e_0^2) e_0 = 68,5 e_0 E$. Sila je torej 68,5-krat večja od sile na električni osnovni naboj v električnem polju. To pa pomeni, da bi lahko interakcijo zelo hitrega delca z magnetnim nabojem pri prehodu skozi snov primerjali z interakcijo delca z nabojem $68,5 e_0$. Tak delec bi npr. pri prehodu skozi 1 cm debelo plast iz snovi z gostoto 1 g/cm^3 izgubil kar okoli 8 GeV energije. Sled takega delca v fotografski emulziji bi bila skoraj tako izrazita kot sledi jeder, ki nastaneta pri cepitvi uranovega jedra. Take sledi bi pri opazovanju komaj lahko spregledali. Pri majhnih hitrostih pa bi delec z osnovnim magnetnim nabojem izgubljal energijo predvsem pri prožnih takih.

Kakšna sila deluje med delcem z magnetnim nabojem in osamljenim atomom? Poteka te sile v odvisnosti od medsebojne razdalje ni težko oceniti. Atom z lastnim magnetnim momentom enega Bohrovega magnetona $M_m = e_0 h / 4 \pi m_0$ postavimo v nehomogeno magnetno polje z gostoto $B = \Phi_0 / 4 \pi r^2$! Na atom bo delovala sila $F = (M_m + dM_m) dB/dr$, pri čemer smo že upoštevali, da se magnetni moment atoma spremeni zaradi polja.* Sprememba dM_m je v preprostem modelu posledica za $e_0 v B$ zmanjšane centripetalne sile na elektron, ki kroži okoli jedra. Zaradi tega se spremeni frekvenca za $-e_0 B / 2 m_0$, tako da je približno $dM_m = -e_0^2 r_1^2 B / 4 m_0$, kjer je r_1 radij atoma. V celoti deluje med atomom, ki ima lasten magnetni moment, in magnetnim nabojem Φ_0 torej približno sila $F = -(h^2 / 8 \pi^2 m_0) (r^{-3} - \frac{1}{4} r_1^2 r^{-5})$. Zato lahko pride do vezanega stanja, pri čemer ima razdalja med atomom in med delcem z magnetnim nabojem velikostno stopnjo atomovega radija in je ustrezna vezalna energija nekaj eV. Če atom nima lastnega magnetnega momenta, je sila vseskozi odbojna in ni vezanega stanja. O vezanem stanju med jedrom in delcem z magnetnim nabojem ni možno reči nič določenega. Vendar imajo tako vezano stanje za neverjetno, če delec z magnetnim nabojem nima tudi jedrske interakcije z nukleoni.

* Glej npr. I. Supek: Teorijska fizika i struktura materije. Zagreb (Naučna knjiga), 1954.

Kar smo ugotovili za osamljen atom, velja približno tudi za atome in molekule v plinih in v tekočinah. Tudi tu utegne nastati šibko vezano stanje. V magnetnem polju bi taka sestavljena tvorba potovala zaradi sile $F = \Phi_0 H$, v dovolj močnem polju pa bi se delec z magnetnim nabojem osamosvojil. Nekoliko drugače je v kristalih. V čistih diamagnetnih kristalih delec z magnetnim nabojem ne bi imel vezanih stanj. V resničnih diamagnetnih kristalih pa je vedno nekaj paramagnetnih središč, ki bi lahko vezala ta delec, pri čemer vezalna energija ne bi presegla 1 eV. V paramagnetnih kristalih bi utegnil biti ta delec z nekoliko večjo vezalno energijo vezan na kako mesto v kristalni mreži. V feromagnetnem kristalu pa bi bil delec vezan na površini kristala ali na meji dveh sosednjih feromagnetnih domen z energijo nekaj sto eV. Te energije ni težko oceniti, če vzamemo idealno mehak feromagnetni kristal z ravno mejo. Polje zaradi magnetnega naboja v določeni razdalji od meje približno opišemo s poljem dveh nasprotnoimenskih nabojev, ki sta simetrična na mejo. Vezalna energija za naboj ima potem velikostno stopnjo $2 \int_{-\infty}^R (\Phi_0^2/4 \pi \mu_0 r^2) dr = \Phi_0^2/2 \pi \mu_0 R$, če je $R = (\Phi_0/4 \pi B_n)^{1/2}$ razdalja od magnetnega naboja, v kateri ima polje ravno gostoto nasičenja B_n (za jeklo je npr. $B_n = 2,2 \text{ Vs/m}^2$). V tem primeru bi bilo potrebno polje z gostoto nekaj Vs/m^2 v pravi smeri, da bi odtrgali delec z osnovnim magnetnim nabojem.

Take in podobne misli so vodile fizike, ki so iskali delce z magnetnimi naboji. Ti delci naj bi nastajali v parih, če domnevamo, da velja za magnetni naboj podoben ohranitveni zakon kot za električni, pri reakcijah med protoni ali žarki γ z veliko energijo in nukleoni v jedru. Preseka za take reakcije se ne da zanesljivo napovedati. Če bi bile take reakcije možne, bi morali delci z magnetnim nabojem tvoriti znaten delež kozmičnih žarkov. Seveda pa bi samo tisti od njih, ki imajo dovolj veliko začetno energijo, lahko prišli do dna zračnega morja.

Začetne poskuse je delal Malkus. Lahko je ugotovil le to, da je gostota toka delcev z magnetnim nabojem v kozmičnih žarkih manjša kot $10^{-10}/\text{cm}^2 \text{ s}$ in da je presek za tvorbo takih delcev pri reakciji med protoni in nukleoni manjši kot $3 \cdot 10^{-35} \text{ cm}^2$ ($3 \cdot 10^{-11}$ barna). Purcell in sodelavci³ so poskušali odkriti delce z magnetnim nabojem pri reakcijah protonov z energijo 30 GeV iz brookhavskega sinkrotrona. Pri tem so izkoristili del naprav od drugih poskusov. Sredi pospeševalne cevi je bila tarča iz kake lahke kovine (berilija, ogljika ali aluminija). Če bi pri reakcijah med protoni in nukleoni v tarči nastali delci z magnetnim nabojem s pričakovano maso, bi odleteli približno v smeri prvotnega curka protonov z energijo okoli 7,4 GeV. Na poti teh delcev, nekoliko umaknjena od osi, a še vedno v pospeševalni cevi, je bila aluminijasta posoda z oljem za vakuumske črpalke. V tej tekočini naj bi se delci zaustavili. Na zunanji strani posode že izven pospeševalne cevi, a v delno evakuiranem prostoru, je bila prečno postavljena daljša tuljava, katere polje z gostoto nekaj 0,01 Vs/m^2 bi posrkalo delce iz tekočine in jih pospešilo do velikih hitrosti. Potem delcev ne bi bilo težko zaznati bodisi po sledovih v fotografski emulziji bodisi s ksenonovim scintilacijskim števcem. Napravo so podrobno preskusili in se zavarovali proti vsem motilnim stranskim učinkom. Ugotovili niso nobenega delca z magnetnim nabojem. Postavili so naslednje meje: presek za tvorbo para takih delcev pri reakciji protonov z nukleoni je manjši kot $2 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^2$ ($2 \cdot 10^{-16}$ barn), pri reakciji žarkov γ z nukleoni v jedru ogljika pa

manjši kot 7.10^{-37} cm^2 (7.10^{-13} barn). Če obstojijo delci z magnetnim nabojem, imajo vsekakor večjo mirovno energijo kot 2900 MeV.

Delci z magnetnim nabojem v kozmičnih žarkih, ki bi prišli skozi ozračje, bi obtičali tik pod površino Zemlje. Goto in sodelavci so napravili poskus, da bi odkrili take delce, ki so obtičali na površini železnih rud.⁴ Tam bi bili delci namreč feromagnetno vezani. Zgradili so prenosno napravo, ki so jo najprej uporabili v pogorju Adirondack na žili magnetita. Evakuirana steklena posoda v obliki narobe obrnjene steklenice je imela okoli vratu tuljavo. Skozi tuljavo so praznili kondenzatorje, pri čemer je nastal v tuljavi sunek magnetnega polja, ki je imelo ob dnu gostoto 6 Vs/m^2 in 17 Vs/m^2 sredi tuljave. Takšno polje bi pri napovedanih lastnostih delcev z magnetnim nabojem vsekakor odtrgalo delce s površine rude. Polje bi jih tako pospešilo, da ne bi bilo težko zaznati njihovih sledi v skladovalnici fotografskih plošč. Na vrhu posode je bila še plast železnega prahu, kjer naj bi se magnetni naboji ujeli, da bi z njimi lahko delali še nadaljnje poskuse. Zaradi ozračja bi do železne rude prodrli samo delci z magnetnim nabojem z največjo energijo. Zato so na podoben način preiskali tudi železne meteorite. Ti bi bili namreč pri svoji blodnji po vsemirju izpostavljeni prav vsem delcem z magnetnim nabojem. A uspeha ni bilo ne v prvem ne v drugem primeru. Tako so lahko znižali mejo za gostoto toka delcev z magnetnim nabojem v kozmičnih žarkih na $10^{-13} \text{ cm}^2 \text{ s}$ (na površini Zemlje).

Položaj torej še ni čisto jasen. Vendar večina fizikov meni, da magnetnih nabojev ni. Zato se nadaljujejo teoretske raziskave o zakonu, ki prepoveduje nastanek magnetnih nabojev, a tudi eksperimentatorji ne počivajo in obljublajo nove, še natančnejše poskuse.

Literatura:

¹ P. A. M. Dirac: Quantized Singularities in the Electromagnetic Field. Proc. Roy. Soc. A **133**, 60 (1931).

² K. W. Ford: Magnetic Monopoles. Scientific American **209**, 122 (No. 6, 1963).

³ E. M. Purcell, G. B. Collins, T. Fujii, J. Hornbostel, F. Turkot: Search for the Dirac Monopole with 30 BeV Protons. Phys. Rev. **129**, 2326 (1963).

⁴ E. Goto, H. Holm, K. Ford: Search for Ferromagnetically Trapped Magnetic Monopoles of Cosmic-Ray Origin. Phys. Rev. **132**, 387 (1963).

J. Strnad

ZAKASNELI PROTONI

Atomsko jedro se lahko znebi odvečne energije z oddajo žarka γ (fotona), z notranjo konverzijo, pri kateri se energija porabi neposredno za izbitje elektrona iz ovojnice, z razpadom β , to je z oddajo delca β^- ali β^+ (negativnega ali pozitivnega elektrona), z zajetjem elektrona, pri čemer pogoltne jedro elektron iz ovojnice, s spontanim razcepom, pri čemer se jedro razcepi na dva skoraj enako velika dela, z razpadom α , to je z oddajo jedra He^4 , ali z oddajo nevtrona.

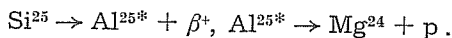
Zadnji pojav, tako imenovano nevtronsko radioaktivnost, je možno neposredno zasledovati samo v posebnem primeru. Razpadni čas za oddajo nevtrona meri namreč komaj toliko, kolikor trajajo jedrske reakcije, ki potekajo preko vmesnega jedra (velikostna stopnja za razpadni čas je okoli 10^{-20} s). Samo tedaj, ko nastane jedro v stanju, ki je neobstojno proti oddaji nevtrona, po razpadu β^- , se javljajo nevtroni z razpadnim časom za razpad β . Edino v tem

primeru je možno šteti nevtrone in meriti pojemanje njihovega števila v odvisnosti od časa. Ti »zakasneli« nevtroni igrajo zelo pomembno vlogo pri kontroliranju verižne reakcije.

Že pred leti pa so napovedali še eno možnost za oddajo presežne energije. Jedra, ki so neobstoja na oddajo protona ali dveh protonov hkrati, bi lahko oddajala protone z neposredno merljivim razpadnim časom. Protoni z dovolj majhno energijo v jedru bi morali namreč prehajati skozi Coulombov nasip (podobno kot delci α). Take protonske radioaktivnosti doslej še niso opazili. Pri večji energiji protonov v jedru pa bi bil podobno kot pri nevtronih razpadni čas za oddajo protona izredno majhen (velikostne stopnje okoli 10^{-20} s). Edino, če bi nastalo jedro v takem neobstoječem stanju po razpadu β^+ , bi lahko šteli protone in merili pojemanje njihovega števila v odvisnosti od časa.

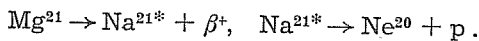
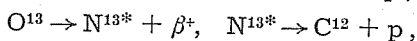
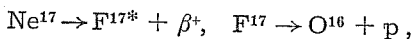
Se ni dolgo od tega, ko so neodvisno drugi od drugih prvič poročali o zakasnelih protonih ruski in kanadski fiziki. Prvi so v Dubni z ioni Ne^{20} z energijo 130 MeV obstreljevali nikljeve in tantalove tarče. Zaznavali so nabite delce, ki so odletavali iz tarče v nasprotni smeri od smeri vpadnega curka ionov. Pri tem so ugotovili, da zapuščajo tarčo protoni z energijo 3. do 4,5 MeV in z zakasnitvijo vsaj 0,1 sekunde. V tem prvem poročilu o zakasnelih protonih ni podrobnejših podatkov. Drugi so s protoni z energijo 97 MeV iz sinkrociklotrona obstreljevali razne tarče. S polprevodniškim števcem so zaznavali protone, ki so izhajali pod pravim kotom proti vpadnemu curku. Sinkrociklotron je dajal zelo kratkotrajne pljuske protonov po 400-krat na sekundo, števec pa je začel šteti 0,2 ms po pljusu in je štel 1,5 ms. Pri obsevanju tarče iz aluminija in kremenca so dobili protone z energijami 3,4; 4,7 in 4,1 MeV. Merili so tudi razpadni čas, s katerim so se javljali protoni. V ta namen so pustili teči sinkrociklotron 1 sekundo, nato pa so ga za eno sekundo izključili in v tem času opazovali pojemanje števila protonov. Pri tem so dobili za razpadni čas vrednost okoli 0,4 sekunde.

Pojav zakasnelih protonov so v zadnjem primeru pojasnili z nastankom doslej neznanega izotopa silicija Si^{25} . Ta izotop je nastal v aluminijasti tarči po reakciji $\text{Al}^{27} (p, 3n) \text{Si}^{25}$, v kremenasti pa po reakciji $\text{Si}^{28} (p, p3n) \text{Si}^{25}$. Nastali Si^{25} razpade z izmerjenim razpadnim časom (0,4 s) z oddajo pozitrona v stanja Al^{25} , ki so neobstoja proti oddaji protonov:



Z energijami vzbujenih stanj v Al^{25} so pojasnili tudi izmerjene vrednosti za energije zakasnelih protonov.

Zakasnele protone so opazili tudi, ko so ponovili poskus z drugimi tarčami. Pri tem je šlo verjetno za podobne reakcije:



Izotopov, ki so navedeni na začetku treh enačb, doslej niso poznali.

Dostavek ob korekturi. Medtem so postale znane podrobnosti ruskih eksperimentov (V. A. Karnauhov in sodelavci, *ŽETF* 45, 1280 (1963)) in novi podatki Kanadčanov (R. McPherson, J. C. Hardy, R. E. Bell: Delayed Proton Emission following the Decay of Ne^{17} . *Physics Letters* 11, 65 (1964)). Poleg tega

Izredno bogat je tudi seznam Močnikovih računnic in geometrijskih učbenikov za meščanske šole. Računice so nastajale v zvezi z učnim načrtom iz leta 1874, in to najprej v treh zvezkih, kasneje pa vsak zvezek ločeno za deške in dekliške oddelke. Naslednje izdaje so se vrstile zopet v treh združenih zvezkih, za nemško manjšino na Češkoslovaškem do leta 1929, v povojni Avstriji do leta 1928. Geometrijski učbeniki pa so izhajali na Dunaju, v Pragi in v Leipzigu vse do leta 1926.

Preosnova avstrijskega srednjega šolstva v letih 1849-52 je zahtevala nove učne knjige. Za nižje gimnazije je Močnik 1850 sestavil »Lehrbuch der Arithmetik«. Prvi del tega je po različnih predelavah izšel zadnjikrat leta 1923 v 45. izdaji, drugi del pa istega leta v 33. izdaji. Kasnejši pisci takih učbenikov za Avstrijo in za nemško manjšino na Češkoslovaškem so jemali za osnovo Močnikovega, ga predelovali in navajali njegovo ime na čelu knjig do leta 1937. Prvi del »Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasium« je Močnik sestavil leta 1852, drugi del pa leta 1853. Kasnejši predelovalci so izdajali ta učbenik pod njegovim imenom vse do leta 1937. Za nižje razrede realke je začel izdajati aritmetične učbenike leta 1851, geometrijske pa leta 1850, kasnejše izdaje teh so se vrstile in bile v rabi do prve svetovne vojne. — Za višje razrede srednjih šol je sestavil »Lehrbuch der Algebra« (1850, 35. izd. 1922, zadnji izdaji 1938 za gimnazije in 1931 za realke) in »Lehrbuch der Geometrie« (1950, 32. izd. 1928, zadnji izdaji 1935 za gimnazije in 1923 za realke).

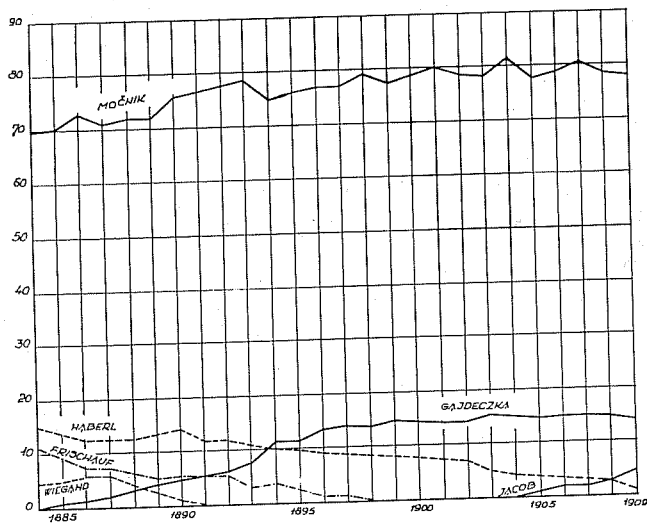


Diagram procentualne razširjenosti aritmetičnih učbenikov za višje razrede na avstrijskih srednjih šolah z nemškim učnim jezikom od l. 1884 do l. 1909 (po Ph. Freudu)

Močnik je leta 1878 začel izdajati še aritmetike in geometrije za učiteljska, in sicer ločeno za moške in ženske oddelke, ki sta zadnjikrat izšle leta 1907 oziroma leta 1908. — Za splošno porabo je leta 1858 sestavil šestdecimalne logaritemske tablice, ki so izšle zadnjikrat leta 1906; leta 1877 pa je izdal za

šolsko rabo petdecimalne logaritemske tablice, ki so izhajale do leta 1921. — Širšim slojem v avstrijskih deželah je leta 1858 namenil knjigo »Das Rechnen mit Rücksicht auf die neue österreichische Münzwährung«, v kateri je pojasnil novi avstrijski denarni sistem, leta 1875 pa podobno knjigo »Die neuen österreichischen Masse und Gewichte und das Rechnen mit denselben« in v njej razložil nove decimalne mere in uteži.

Po Močnikovi smrti so njegovim že častitljivim učbenikom pripomogli predelovalci, da so se obdržali, ker so znali slediti zahtevam in utripom novega časa. Učbeniki so sicer dobili novo podobo, ohranili pa so vrline prejšnjih izdaj.

Močnikovo ime bo ostalo v zgodovini matematičnega pouka pri tistih narodih, v katerih jezike so bile prevedene njegove knjige ter uvedene v njihove šole; teh jezikov je bilo dvanajst. Slovenci, Hrvati in Srbi smo v šolah uporabljali prevode njegovih knjig. Toda medtem ko so Hrvati in Srbi že takoj po letu 1850 vpeljali njegove učbenike za srednjo šolo, smo Slovenci smeli imeti takrat le njegova navodila za uporabo računic in računice za ljudsko šolstvo, samo za tega so v tistih časih avstrijski oblastniki dovoljevali naš jezik. Šele v šolskem letu 1882/83 smo lahko začeli uporabljati prevode njegovih aritmetik in geometrij in to le na treh nižjih gimnazijah na Kranjskem.

Kot šolski nadzornik za Kranjsko je dvignil zanemarjeno ljudsko šolstvo s tem, da je leta 1851 sestavil za glavne šole navodilo in učni načrt, v katerem je določil za slovenske otroke v prvem razredu osem ur pouka na teden v slovenskem jeziku, ki je bil do tedaj preziran. Po njegovih načrtih in navodilih so takrat sestavili slovenske abecednike in berila.

Za svoje zasluge za šolstvo je bil Močnik večkrat odlikovan, ob upokojitvi pa je postal vitez. Zaveza slov. učit. društev mu je 1894 odkrila spominsko ploščo na rojstni hiši.

Močnikova publicistična delavnost je obsegala, kakor razvidimo, sestavljanje aritmetičnih in geometrijskih učbenikov za ljudske, meščanske, srednje šole in učiteljišča. V tem je bil mojster kakor redkokdo. Kakor malokdo je odločilno vplival na nadaljnji razvoj metode za posredovanje matematike. Spodbude, ki jih je dal, so vodile k nadaljnjim raziskavam, k poglobljanju, dodelavanju in razčiščevanju metode. Natanko je vedel, kaj potrebuje posamezna šolska stopnja, in po kateri poti je treba kreniti za ciljem. Iz tega si moremo tudi razložiti nenavadni in trajni uspeh, ki ga je dosegel s svojimi učbeniki: bili so skoraj sto let, generaciji za generacijo učencev, vodnik po kristalni stavbi matematike.

Odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS je sklenil počastiti 150-letnico Močnikovega rojstva s tem, da sestavi njegovo bibliografijo. Pri tem pa ne gre le za pieteto do »pedagoškega genija matematične stroke« (tako ga imenuje jubilejni zbornik zveznega ministrstva za pouk avstrijske republike »200 Jahre österreichische Unterrichtsverwaltung 1760—1960«, ki je izšel leta 1960 na Dunaju) ali za historizem, marveč za revalorizacijo njegovega imena, za vzgojne razloge in za naše naloge v sedanosti in bodočnosti. Velike spremembe v pouku matematike v zadnjih desetletjih bomo prav razumeli, če jih ne gledamo statično, ampak v gibanju. In zato se je treba ozreti v preteklost, kajti prav Močnikova dediščina, ohranjena v nepregledni vrsti knjig, vsebuje toliko dragocenih metodičnih in praktičnih izkušenj, da kljub odmaknjenosti našemu času zasluži vso našo pozornost.

KOLIKO FIZIKE ZNAJO ŠTUDENTI MATEMATIČNO-FIZIKALNEGA ODDELKA V 1. LETNIKU

Navada je, da pišejo študenti ob začetku študija preskusno nalogo iz fizike I. Posebno zanimive podatke si obetamo od študentov, ki jim je fizika eden izmed glavnih predmetov. Enako kot lani* so dobili tudi letos študenti matematično-fizikalnega oddelka štiri naloge in štiri vprašanja. Za reševanje so imeli poldrugo uro časa, pri čemer so se lahko posluževali učbenikov in priročnikov. Preskusna naloga ni bila obvezna in poleg tega študentom tudi ni bilo treba navesti priimka.

Letos so bile naloge morda nekoliko bolj šablonske kot lani, vprašanja pa so bila podobna:

1. Z 10 m visokega balkona vržemo kamen navpično navzdol z začetno hitrostjo 5 m/s. Koliko časa pada kamen do tal? (55 %)

2. 0,5 kg alkohola s specifično toploto 0,6 kcal/kgst in temperaturo 20 °C zlijemo v 1 kg vode s temperaturo 100 °. Kolikšna je ravnovesna temperatura, če ne gre nič toplote v izgubo? (67 %)

3. Z voltmetrom, ki ima upor 60 Ω merimo lahko napetosti do največ 100 V. Kaj moramo narediti, da bomo s tem voltmetrom lahko merili še napetosti do največ 500 V? Nariši vezje! (62 %)

4. Predmet je 1 m oddaljen od razpršilne leče z goriščno razdaljo 0,5 m. Kolikšna je razdalja slike od leče? Nariši! (21 %)

5. V posodi z vodo plava kos ledu (vse pri 0 °C). Ali se gladina vode v posodi zviša ali zniža, ko se led stali? (29 %)

6. Naštej nekaj osnovnih delcev! (73 %)

7. Izračunaj $\left(-\sqrt[6]{125}\right)^4$ (53 %)

8. Kaj dobimo, če polijemo apnenec s solno kislino? (53 %)

V oklepajih je pri posameznih nalogah že naveden delež študentov (v odstotkih), ki so nalogo pravilno rešili. V skupini tehniških matematikov in študentov pedagoške študijske smeri matematika in fizika (skupaj 46 oddanih nalog) je uspeh v povprečju za nekaj manj kot 10 % slabši kot v skupini tehniških fizikov (32 oddanih nalog). V prvi skupini so od štirih nalog v povprečju rešili 1,8, v drugi pa 2,3 naloge.

Na vprašanje, ali so imeli v srednji šoli računske vaje iz fizike, je okoli 70 % študentov odgovorilo pritrdilno. V prvi skupini je jasno opazna povezava med računskimi vajami v srednji šoli in uspehom pri preskusni nalogi, saj so študenti, ki so v srednji šoli delali računske naloge, v povprečju rešili skoraj dvakrat več nalog kot tisti, ki računskih nalog niso delali. Pri drugi skupini ni bilo opazne povezave. Na vprašanje o infinitezimalnem računu je le polovica študentov odgovorila, da so spoznali infinitezimalni račun v srednji šoli.

Pri nalogah je bil uspeh boljši kot lani. Preseneča edino slab uspeh pri nalogi iz optike. Iz odgovorov na vprašanja pa lahko sklepamo podobno kot lani, da imajo študenti težave pri samostojnem presojanju, da pa verbalno dobro poznajo nekatere »modne« stvari. Kakih bolj splošnih zaključkov iz skromnih podatkov ni možno napraviti. Izrazimo naj samo tiho upanje, da iz leta v leto narašča število srednjih šol, na katerih delajo dijaki redno računske

* Obz. mat. fiz. 10, 142 (1963).

naloge iz fizike, in da bodo zaradi tega prihajali na univerzo iz leta v leto bolj pripravljeni začetniki.

Nekoliko bolj se lahko zamislimo nad uspehi iz fizike I ob koncu šolskega leta. Zdaj namreč že razpolagamo s podatki o uspehih za študente, ki so se v letih 1961/62, 1962/63 in 1963/64 vpisali v I. letnik na matematično-fizikalnem oddelku. V tabeli 1 je naveden odstotek tistih, ki so izdelali 1. letnik za tehniške fizike (TF), tehniške matematike (TM) in matematike-fizike (MF). Poleg tega je v oklepaju pripisano število študentov, ki so se vpisali v I. letnik. V tabeli 2 so navedene končne ocene v teh letih za iste skupine. Pri tem smo upoštevali poleg ocene ustnega izpita tudi oceno, ki jo dobi študent na podlagi uspeha pri pismenih nalogah skozi vse leto za vaje.

	TF	TM	MF		TF	TM	MF
61/62	47 % (43)	46 % (13)	42 % (12)	61/62	3,9	3,3	2,9
62/63	37 % (35)	26 % (19)	43 % (21)	62/63	3,5	3,8	2,7
63/64	41 % (54)	45 % (11)	10 % (49)	63/64	4,0	4,6	2,6

Tabela 1

Tabela 2

Ti tabeli marsikaj povesta, a saj poznate tisto zlobno stopnjevanje: laži, večje laži, statistika. Pri vsej potrebi previdnosti pa izvežban družboslovec ne bi mogel mimo ene ugotovitve: razmere pri pedagoški študijski skupini matematika in fizika utegnejo imeti porazne posledice. Iz te skupine bi morali namreč priti profesorji matematike in fizike na srednjih šolah. Kdo pa naj da srednješolcem trdne osnove iz fizike? Mar tisti, ki so se sami komaj pretolkli? Če iščemo vzrok za to, da boljši dijaki odhajajo na tehniško fiziko in na tehniško matematiko, najbrž ne moremo mimo negotovega in nespoštovanega družbenega položaja, ki ga ima profesor matematike in fizike na srednji šoli.

J. Strnad, M. Hribar, M. Gros

NOVE KNJIGE

NEKATERE DOSTOPNEJŠE NOVE KNJIGE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

1. Prijatelj N.: Matematične strukture I. Množice. Relacije. Funkcije. Ljubljana, Mladinska knjiga 1964. Zbirka SIGMA, 8°. (850 din)
2. Markušević, A. I.: Kompleksnye čisla i konformnye otobraženija. 2. izd. Moskva. Fizmatgiz 1960. 56 str. 8°. (cir.)
3. Golovina L. I.: Indukcija v geometriji. 2. izd. Moskva, Fizmatgiz 1961. 100 str. 8°. (cir.)
4. Thover G. M.: Trigonometrie. Classe de premiere. Paris, Librairie Vuibert (1963). 148 str. 8°.
5. Gordveskij L. Z.: Populjarnoe vvedenie v mnogomernuju geometriju. Har'kov, Izd-vo Harkovkogo Universiteta 1964. 200 str. 8°. (cir.)
6. James E. J.: The teaching of modern school mathematics. (London), Oxford University Press (1958). VIII + 276 str. 8°.
7. Zalogin N. S.: Konkursnye zadači po matematike. Kiev, Gostehizdat 1964. 616 str. 4°. (cir.)

8. Moritz R. E.: On mathematics and mathematicians. New York, Dover (1958). XIII + 410 str. 8°.
9. Phillips R.: Caliban's problem book. Mathematical, inferential and cryptographic puzzles. New York, Dover (1961). XI + 180 str. 8°.
10. Bowers H.: Arithmetical excursions. An enrichment of elementary mathematics. New York, Dover (1961). XI + 320 str. 8°.
11. Weiss M. J.: Higher algebra for the undergraduate. New York, J. Wiley (1962). IX + 171 str. 8°.
12. Bushaw D.: Elements of general topology. New York, J. Wiley (1963). VII + 166 str. 8°.
13. Hadwiger H.: Combinatorial geometry in the plane. New York, Holt (1964). VII + (III) + 113 str. 8°.
14. Atkinson R. C.: Studies in mathematical psychology. Stanford, Stanford University Press 1964. IX + 414 str. 8°.
15. Meschkowski H.: Nichteuklidische Geometrie. 2. Aufl. Braunschweig, Frieder. Vieweg 1961. IV + 80 str. 8°.
16. Meschkowski H.: Wandlungen des mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik. Braunschweig, Frieder. Vieweg 1964. VII + 141 str. 8°.
17. Teorija kodirovanija. Prevod iz angleščine. Moskva, MIR 1964. 256 + II str. 8°. (cir.)
18. Gnedenko B. V.: Elementarnoe vvedenie v teoriju verojatnostej. Moskva, Izd-vo NAUKA 1964. 142 str. + 1 pril. 8°. (cir.)
19. Mansfield M. J.: Introduction to topology. Princeton, D. Van Nostrand (1964). X + 116 str. 8°.
20. Brumfiel Ch. F.: Fundamental concepts of elementary mathematics. Reading, Addison Wesley (1962). XI + 340 str. 8°.
21. Alexander H. W.: Elements of mathematical statistics. New York, J. Wiley (1961). XI + 338 str. 8°.
22. Blumenthal L. M.: A modern view of geometry. San Francisco, Freeman (1961). XII + 191 str. 8°.
23. Moise E. E.: Elementary geometry from an advanced standpoint. Reading, Addison-Wesley (1963). X + 419 str. 8°.
24. Cornbellack W. J.: Introduction to elementary functions. New York, J. Wiley (1962). XVIII + 343 str. 8°.

REVIJE Z ZBIRKAMI MATEMATIČNIH NALOG

1. Matematika v škole. Moskva 1964. Vol. No. 1, 2, 3, 4, 5.
2. Elemente der Mathematik. Basel 1964. Bd. 19. No. 1, 2, 3, 4, 5.
3. The american mathematical monthly. Winsconsin Rapid, ZDA, 1964. Vol. 71. No. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

DENARNO POSLOVANJE »OBZORNIKA«

v poslovni dobi od 5. XI. 1963 do 20. X. 1964.

a) Poslovanje preko Narodne banke

Dohodki:

Lanski saldo	319 480 din
Prenos od Društva	352 730 din
Subvencija Sklada	900 000 din
Naročnine	337 025 din
	<u>1 892 378 din</u>

Izdatki:

Tiskarna	1 073 851 din
Honorarji	406 035 din
Bančni stroški	28 865 din
Dvig v ročno blagajno	130 000 din
	<u>1 638 751 din</u>

Saldo v Narodni banki 270 484 din

b) Poslovanje preko ročne blagajne

Dohodki:

Lanski saldo	3 588 din
Dvig iz Narodne banke	130 000 din
Stari letniki »Obzornika«	6 900 din
Naročnina	1 680 din
	<u>142 168 din</u>

Izdatki:

Administrativni stroški	93 121 din
Honorarji	32 100 din
	<u>125 221 din</u>

Saldo v ročni blagajni 16 947 din

SPOROČILO NAROČNIKOM ZBIRKE »SIGMA«

Za popularizacijo matematike in zbirke SIGMA je društvo MFIA omogočilo svojim članom nabavo vseh knjig iz te zbirke z 20 % popustom. Knjige lahko dobite osebno v matematični knjižnici, Ljubljana, Trg revolucije 11, ali pa vam jih pošljemo po pošti. Denar nakažite na žiro račun št. 600-14-608-34 in obenem sporočite, koliko izvodov posameznih knjig želite.

Doslej so izšle naslednje knjige:

I. Vidav: Rešeni in nerešeni problemi matematike, 1959	
A. Vadnal: Elementarni uvod v verjetnostni račun, 1959	620 din
N. Prijatelj: Uvod v matematično logiko, 1960	450 din
F. Križanič: Elektronski aritmetični računalniki, 1960	900 din
I. Vidav: Algebra, 1961	435 din
O. Sajovic: Normalna aksonometrija, 1962	700 din
F. Križanič: Vektorji, matrike, tenzorji, 1962	930 din
Z. Bohte: Numerično reševanje enačb, 1964	560 din
N. Prijatelj: Matematične strukture I., 1964	630 din

Op.: Navedene cene so brez 20 % popusta.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO - FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, J. Strnad, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 400 din, za zasebnike 500 din, za šole 1000 din, za ustanove in podjetja 2000 din in za inozemstvo 1500 din. Čekovni račun Obzornika je 600-14-608-314.