



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XI. LETNIK — 2. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV IN FIZIKOV SRS

LJUBLJANA, AVGUST 1964

VSEBINA

Članki	Stran
Galileo Galilei, njegova osebnost in znanstveno delo (F. Dominko) . . .	49
Cauchyjeva metoda reševanja algebraičnih enačb (A. Suhadolc) . . .	58
O nekaterih prostorih analize (J. Grasselli)	62
Novice	
Notranje trenje v kovinah (A. Čadež)	73
Rentgenska svetloba iz vesolja (J. Strnad)	76
Novo poimenovanje mezonov in barionov (J. Strnad)	80
H ⁴ — še en izotop vodika (J. S.)	81
Šola	
Pouk moderne matematike v republiki Gvineji (A. Milenković) . . .	83
Domače vesti	
Seminar iz matematike (S. Uršič)	87
VI. mednarodna matematična olimpiada v Moskvi (J. Globevnik) . . .	90
Utrinka	
Statistika in znanost (J. Strnad)	92
Pismo o knjižnici »Sigma« (V. Likar)	94
Nove knjige	95

CONTENTS

Articles	Page
Galileo Galilei, His Personality and Scientific Work (F. Dominko) . .	49
Cauchy's Resolution Method of Algebraic Equations (A. Suhadolc) . .	58
About some Spaces of Analysis (J. Grasselli)	62
News	
Internal Friction in Metals (A. Čadež)	73
X Rays from Outer Space (J. Strnad)	76
A New Nomenclatur for Mesons and Barions (J. Strnad)	80
H ⁴ — Another Isotope of Hydrogen (J. S.)	81
School	83
Home News	87

GALILEO GALILEI,

NJEGOVA OSEBNOST IN ZNANSTVENO DELO

FRAN DOMINKO

V XVII. stoletju je nastal v človekovi miselnosti najgloblji in najpomembnejši preobrat od začetka napisane zgodovine: to je stoletje znanstvene revolucije. Sporadične klice, ki so nakazovale ta razvoj, so se jele pojavljati nekaj stoletij prej, posebno v pariški šoli terministov, z dokaj naglašenim kritičnim odnosom do nekaterih apriornih trditev vladajoče filozofije peripatetikov in z okrepljenim zanimanjem za naravne pojave. Pozornost duha se je postopoma odvracala od verskih problemov, od vprašanj eshatologije in deduktivne logike in se začela zanimati za vsakdanje fenomene, v katerih je slutila navzočnost zakonitosti, ki bi utegnili stopnjevati njegovo oblast nad materijo, če bi jih kdaj spoznal. Že pred Galilejem je na primer cela vrsta razmišljujočih na visokih šolah in drugod razglabljala o navidežno banalnem vprašanju, zakaj in kako telesa padajo. Kasneje je Kopernikova teza (1543), da je Zemlja le eden od planetov, opozarjala na možnost, da človek morda ni tako pooblaščen bitje v središču vesolja, za katerega naj bi bila ustvarjena narava, temveč njen organski del na enem od planetov in da so še morda druga osončja, drugi planeti in druga še neznana bitja, kakor je menil Giordano Bruno. Kopernikov nauk, ki je bil prvotno zamišljen le kot matematična hipoteza za enostavnejše izračunavanje leg planetov, je zaradi svojih implikacij posredno vzpodbujal k študiju narave in vesolja. Da bi pa dozorele okoliščine za znanstveno revolucijo, so se morali prej uresničiti nekateri pogoji: treba je bilo dokončno prekiniti z abstrakcijami in metodami izročene filozofije ter postaviti na njihovo mesto primerne nove pojme, izdelati in spopolniti jezik matematike — nenadomestljivo sredstvo za točen opis funkcionalnih zvez med veličinami, ki karakterizirajo potek naravnega pojava — ter pristopiti k smotrnemu eksperimentiranju.

Vso to razvojno pot je prehodil tudi sam Galilei v svojem postopnem zorenju in se z muko prebijal do jasnejših vidikov, dasi je do svoje smrti zadržal nekatere zastarele pojme, ki so ga ovirali pri prodoru v še neraziskano. Tako na primer ni opustil postulata peripatetikov o naravnem krožnem gibanju teles zunaj Zemlje in zato ni mogel do kraja prečistiti pojma vztrajnosti, ki ga je bil sam odkril. V Galilejevi duhovni drami in življenjski usodi se zrcalijo zmote, napor in stremljenja njegove dobe, in ker vidimo v njem utemeljitelja nove fizike in posredno celo sodobne civilizacije, je tudi danes proučevanje njegovega življenja in dela tako privlačno in poučno.

Samo močna osebnost s prodornim duhom, oprtim na vsestransko kulturo, in poglobljenim strokovnim znanjem je mogla vztrajati na tako velikem delu in ga z uspehom opraviti. V oblikovanju osnov bodoče Galilejeve osebnosti ima verjetno ne majhne zasluge njegov oče Vincenzo, ki si je sicer služil svoj vsakdanji kruh kot trgovec s platnom, je pa bolj znan kot originalen teoretik na področju muzike: proti tedaj vladajoči kontrapunktni polifoniji je skušal uveljaviti melodiko enega samega glasu in ga imajo zato za predhodnika italijanske

opere. Kot muzik je imel občutek za pomen matematike in bodril je sina k učenju te vede. Že v domači hiši je mladi Galilei vzljudil umetnosti in lep-slovje. Poročajo, da je v zrelih letih ob prostem času dokaj dobro sviral na lutnji; sam je baje izjavil, da bi se bil posvetil slikarstvu, če bi mu bila zaprta pot študija na univerzi. Ohranjeni so nekateri njegovi soneti in razpravi o Dantejevi Božanski komediji in o Ariostu. V govorništvu in dialektiki je bil mojster in njegovi spisi so stilno najlepše, kar je dala italijanska proza XVII. stoletja. Dobro je bil podkovan v teologiji in v vprašanih spoznavne teorije. Njegovo strokovno znanje pa je temeljilo predvsem na študiju del Evklida, Arhimeda iz Sirakuze in Apollonija iz Perge.

Galilejeva tvornost je še črpala sveže sokove iz tesne povezave s svetom tehnike in obrti. Na univerzah so profesorji gojili naravoslovje izhajajoč iz filozofije peripatetikov, ne ozirajoč se na probleme tehnične prakse, ki se je razvijala samostojno zgolj na podlagi izkušenj in brez vodstva teorije. Na dnevnem redu so pa tedaj bila pomembna vprašanja, na primer tehnika vod-nega strujanja in namakanja, vprašanja trdnosti gradbenega materiala, pro-blemi balistike kot posledica iznajdbe smodnika, vprašanje določanja zemljepisne dolžine za potrebe plovbe. Poleg poznavanja teorije je imel Galilei oster čut za uporabno znanost. Za časa bivanja v Padovi je pogostoma zahajal v beneško ladjedelnico in v steklarno v Muranu, kjer se je zanimal za tehnične procese. V svojem laboratoriju je konstruiral in tudi prodajal razne aparate, tako na primer termoskop (prva oblika termometra): kaplja pobarvane vode v kapilari je zapirala zrak v stekleni posodi; ob spremembi temperature se je zrak raztezal in premikal kapljo. Lega kaplje je bila sicer še odvisna od trenutnega atmosfer-skega tlaka, vendar so z njim zdravniki ocenjevali relativno spremembo tem-perature pri bolnikih. Mnogo zanimanja je bilo za Galilejevo proporcionalno šestilo, s katerim so na primer prerisovali načrte v poljubnem merilu, izraču-navali kvadrate, kube, obresti na kapital in podobno. Galilei je bil pri republiki tehnični referent za vprašanja namakanja; konstruiral je hidravlični stroj, za katerega mu je oblast izdala patent. Spopolnjeval je tako večino eksperimen-tiranja, tesneje povezoval delo rok z razglabljanjem uma in si osvajal najtežjo tehniko spoznanja: da iz zamotanih in »nečistih« eksperimentov izlušči pravilne abstraktne pojme in aksiome, na katerih je gradil tvorne delovne hipoteze.

Pri ocenjevanju skrajnih posledic Kopernikove hipoteze o heliocentrickem sestavu in posledic lastnih odkritij v astronomiji in mehaniki je spoznal, da se le-te ne morejo vključiti v tedanji splošno veljavni svetovni nazor, ki je v enotni organsko grajeni stavbi vseboval verski, socialni, kulturni in znanstveni aspekt družbe. Odločil se je na borbo za notranjo reformo tega nazora. V tej borbi je osebno podlegel, toda po zgodovinski nuji je šel razvoj pot, ki jo je bil nakazal Galilei. Ker sem na drugem mestu pisal o obsodbi Galilea od strani inkvizicije, se hočem tu zadržati samo na okolnosti, ki je za njegovo osebnost značilna. V nekaterih člankih ob proslavi 400-letnice njegovega rojstva smo lahko brali trditve, da je Galilei kriv za razkol med vero in znanostjo, ki je še danes živa in preti obstoju civilizacije. Neglede na morebitne v tej trditvi nakazane pos-ledice in v kolikor ima sploh smisla govoriti o krivdi, Galilei subjektivno te krivde zagotovo nima. Galilei je bil veren mož zato, ker je čutil potrebo po enotnosti kulture, ki zajema tudi religijo. Osebno se je prizadeval pri svetem oficiju, da ne bi ta obsodil in prepovedal Kopernikovega nauka in s tem impli-citno tudi nove fizike; ohraniti je hotel življenjsko silo cerkve z vključitvijo novega nauka v njeno idejno stavbo. Samo v tej luči je razumljivo njegovo

obnašanje pred sodiščem inkvizicije in njegova ponižujoča, toda disciplinirana odpoved. Krivda bi torej prej bila na svetem oficiju, ki bi bil lahko izjavil, da uradno ne zavzema stališča do teorij, ki so v stadiju hipoteze. Ker pa so Galilejeva prizadevanja bila za cerkev nesprejemljiva, je obsodba Kopernikovega nauka mimo prvotnega namena samega Galileja objektivno privedla do povsem nasprotnih posledic: naravoslovje se je osvobodilo pokroviteljstva teologije in spon verskega dogmatizma, prekinilo vezi z religijo in sprejelo spoznavno raziskovalno metodo, ki jo je bil izdelal Galilei.

Strokovna in znanstvena dela. Od rojstva dne 14. II. 1564 (po starem koledarskem stilu) do leta 1585 je živel Galilei v rojstnem mestu Pizi. Nato je študiral štiri leta v Firenci, kamor se je bila družina preselila. Od leta 1589 do 1592 je bil predavatelj za matematiko na univerzi v Pizi. Iz te dobe so dela »La bilancetta« (= Mala tehtnica), razprava »O težišču trdnih teles« in fragmentarni spis »De motu« (= O gibanju). Dela so krožila med strokovnjaki v rokopisu; prvo od imenovanih je bilo natisnjeno šele leta 1891, drugo leta 1854. Obe deli sta nastali pod vplivom Arhimedovih spisov. Z delom o težišču si je pridobil priznanje astronoma Claviusa v Rimu (ki je imel prvo besedo pri reformi koledarja leta 1582) in pri uglednem statiku Guidobaldo del Monte, ki ga je kasneje priporočil za nastavitve na univerzi v Padovi. V delu »O gibanju« naletimo na prve iskric dvoma v veljavnost mehanike peripatetikov. V Padovi je prebil 18 let (od 1592 do 1610), ki so bila za njegov strokovni razvoj morda najbolj pomembna. V to dobo spadajo njegova osnovna odkritja v mehaniki, ki jih pa tedaj ni objavil, in začetek aktivnega zanimanja za astronomijo. V predavanjih na univerzi se ni oddaljeval od izročila. Iz seznamov predavanj, ki so ohranjeni, je razvidno, da je dociral Evklidovo geometrijo, aristotelsko mehaniko, o sferi (kozmozografijo) in teorijo gibanja planetov. V predavanjih iz astronomije se je držal teksta Angleža Johna Holywooda s polatijnjenim imenom Sacrobosco, ki je prvič izšel leta 1244 in je doživel 144 izdaj. Galilejeva skripta so izšla pod naslovom »Trattato della sfera« po njegovi smrti leta 1654. Leta 1594 je nastal spis »Le meccaniche«, v katerem obravnava enostavne in sestavljene mehanske stroje. (Knjiga je izšla leta 1634 v francoščini v Parizu in šele leta 1649 v italijanščini v Ravenni.) Pri izpeljavi pogojev ravnotežja uporablja Galilei po E. Machu (Die Mechanik str. 46) prvič v zgodovini načelo virtualnih premikov, ali virtualnih hitrosti; to so hitrosti, ki bi jih pridobile točke mehanskega sistema v skladu z vezmi v trenutku, ko bi ravnotežje pretrpelo infinitezimalno motnjo. Načelo omogoča obravnavanje problemov statike z metodami dinamike. Galilei sicer ne precizira, da morajo biti ti premiki infinitezimalni, toda pri obravnavi enostavnih strojev ta omejitev ni potrebna. Galilei daje ta-le zgled: na klancu z dolžino enako dvakratni višini ($l = 2h$) je teža P v ravnotežju s težo Q , če je $P = Q/2$. Če telo P pade po vertikali v enoti časa za dolžino s , se premakne Q po strmini tudi za s , v višino pa samo za $s/2$, tako da sta produkta Ps in $Qs/2$ med seboj enaka, ker je $Ps = s \cdot Q/2$. Galilei je spoznal, da moremo določiti pogoje ravnotežja ne samo iz tež, temveč še iz njihovih možnih premikov (oziroma iz razmerja možnih hitrosti) glede na Zemljino središče. Danes bi mi iz teh ugotovitev zaključili, da s stroji ne pridobimo nič na delu. Galilei pa ni poznal še fizikalnih pojmov sile in dela. Njegova formulacija »zlatega pravila mehanike« je: »kar pridobimo na lahkosti, izgubimo na poti, času in počasnosti«.

Leta 1604 se je pojavila druga supernova zvezda v Galaksiji; zablestela je na nebu svetla kakor Jupiter ob opoziciji in čez nekaj mesecev ugasnila. Danski

astronom Tycho Brahe je bil že pri prvi supernovi leta 1572 ugotovil, da je mnogo bolj oddaljena od Zemlje kakor Luna. Galilei je v tem videl močan argument proti postulatu peripatetikov, da so nebesna telesa grajena iz nespremenljive in večne snovi, ni se pa še upal tega stališča odločno javno zastopati in je dopuščal možnost, da gre le za odbito sončno svetlobo od gostega oblaka zemeljskih hlapov (torej kvarne in »elementarne« snovi), ki je zašla onstran Mesečeve poti.

Okolnost pa, ki je Galileja za desetletja odtegnila od raziskav na problemih mehanike, je bila vest o iznajdbi daljnogleda. Daljnogledi, ki so tedaj krožili, so imeli kvečjemu trikratno povečavo, Galilei je znal doseči mnogo več. V muzeju zgodovine znanosti v Firenci sta ohranjena dva daljnogleda in en razbit objektiv brez okularja. Daljnogleda imata 14-kratni, oziroma 20-kratni zveček, razbiti objektiv bi pa z okularjema prvih dveh dal 18-kratni oziroma 35-kratni zveček. Galilei je izbiral primerna stekla, ki mu jih je nabavljal prijatelj Sagredo iz steklarne v Muranu, vadal se je v brušenju leč in dosegel krivine, ki se močno približujejo teoretičnim optimalnim pogojem, dasi takrat ni bil znan niti zakon svetlobnega loma. Segal je po delnem diafragmiranju objektivu, da bi dobil jasnejše slike. Pred njim je bila pri raziskovanjih prepovedana raba leče kot lupe, češ da daje lažne informacije o stvareh, o očesu in vidu so pa imeli nejasne in zastarele poglede. Galilei je napravil iz daljnogleda znanstveni instrument za raziskave, odstranil postopoma še obstoječa nezaupanja in posredno pospešil razvoj geometrične optike.

Svoja astronomska odkritja je objavil v knjižici »Sidereus nuntius« (Zvezdni vestnik), ki je izšla leta 1610 kot »bestseller« in je Galilejevo ime razglasila po vsej kulturni Evropi. To je v zgodovini prva znanstvena razprava napisana v sodobnem duhu: avtor poroča v njej o svojih ugotovitvah stvarno in brez leposlovnih olupšav, ki so tedaj bile v navadi. Najpomembnejše ugotovitve so: (1) Relief Meseca je podoben zemeljskemu; na Mesecu so gorovja, doline in ravnine. Zato, zatrjuje Galilei, ne gre izključevati možnosti, da bi tudi Zemlja bila nebesno telo, kakor domneva Kopernik. Gore na Mesecu so razmeroma višje kot na Zemlji. Njihovo višino je določeval tako-le: privzemimo, da je Mesec v prvem krajcu, ko je osvetljena le polovica njegove ploskve. Ločnico med osvetljeno in neosvetljeno poloblo imenujemo »terminator«. Na temnem delu ploskve blizu terminatorja utegnemo zapaziti majhne svetle pege. Svetloba prihaja, tako je menil Galilei, od vrhov, ki jih sončni žarki osvetlujejo, ker Sonce tam pravkar vzhaja. Izbral je eno med njimi in izmeril razdaljo s od terminatorja v delih Mesečevega premera in jo nato izrazil v kilometrih, saj je polmer r znan. Iz pravokotnega trikotnika, ki mu je hipotenuza $r + h$ in kateti r in s ter iz zveze $s^2 + r^2 = (r + h)^2$ je izračunal višino hriba h . (2) Drugo odkritje, o katerem poroča, je naslednje: zapazil je, da se okrog Jupitra gibljejo štirje sateliti ali lunice, ki so stalno v njegovi bližini, dasi se Jupiter giblje okoli Sonca. Ne drži torej, sklepa Galilei po analogiji, argumentiranje peripatetikov, da mora Zemlja mirovati, ker če bi krožila okrog Sonca, bi bila že zdavnaj izgubila svojo luno.

Kopernik je izhajal iz kinematične ekvivalentnosti gibanja Sonca in Zemlje ter dokazoval, da je tolnačenje navideznih gibanj planetov in račun njihovih leg enostavnejši pri privzetku, da Zemlja kroži okrog Sonca. Za Galileia pa predstavlja Jupiter z lunicami miniaturni fizikalni model osončja, kakršnega si zamišlja Kopernik, in postavlja tako prvič vprašanje fizikalne realnosti Kopernikovega sestava.

Oktober istega leta je še odkril, da ima Venera mene. V Ptolomejevem sestavu se giblje Venera po krogu-epiciklu, središče epicikla pa po drugem krogu-deferencu okoli Zemlje tako, da je ves epicikel znotraj sončnega tira. Tudi pri tem modelu osončja bi morala kazati Venera spremembe v fazi, ki so pa različne od tistih, ki jih v resnici opazujemo, tako na primer je ne bi mogli nikoli zaslediti v fazi blizu ščipa ali s polno osvetljeno ploskvico. Iz tega je sklepal Galilei, da mora biti Sonce znotraj epicikla Venere, kakor zatrjuje Kopernik.

Leta 1613 je objavil Galilei »Pisma o sončnih pegah«; v njih poroča o svojih opazovanjih in dokazuje, da so pege tvorbe na samem Soncu in da se Sonce suče okoli lastne osi. To je bil nov argument zoper astronomijo peripatetikov: tudi Sonce je iz kvarne, elementarne snovi, posebne nebesne tvarine ni. Pater Scheiner, s katerim Galilei v tem spisu ostro polemizira, pa je menil, da krožijo v sončni bližini manjša temna telesa, ki jih oko projicira na sončno ploskev.

Med tem je bil nadvojvoda toskanski poklical leta 1610 Galilea v Firence in ga postavil za matematika primarija in filozofa pri svojem dvoru ter za matematika primarija na univerzi v Pizi. V Firenci je Galilei deloval do svoje smrti leta 1642.

Sveti oficij je leta 1616 proglasil Kopernikov nauk za krivoverski in prepovedal, da bi ga kdo zastopal ali branil. Galilei je tedaj sklenil napisati obširno delo, v katerem bi primerjal med seboj pomanjkljivosti in odlike ptolomejskega svetovnega sestava in kopernikanskega tako, da bi bile vidne prednosti slednjega. Dokazovanje naj bi slonelo na novih odkritjih v astronomiji in predvsem na novi mehaniki. Delo je izšlo leta 1632 z naslovom: »Dialogi o dveh največjih sestavih Ptolomejevem in Kopernikovem...« in je razdeljeno v štiri poglavja ali »dneve«. Prvega dne navaja Galilei dokaze, da je materija v vesolju enotna in da ni razlike med nebesno (kvintesenco) in zemeljsko (elementarno) snovjo. Drugi in tretji dan sta posvečena vprašanju sukanja Zemlje okoli osi in kroženja okoli Sonca. Pri tedanjem stanju razvoja mehanike ni mogel Galilei dati fizikalnih dokazov gibanja Zemlje. (Da se Zemlja suče, moremo izpeljati iz centrifugalnega pospeška, iz Foucaultovega eksperimenta z nihalom, iz raznih merljivih posledic Coriolisovega pospeška in iz dnevne aberacije; da se Zemlja giblje okoli Sonca, moremo izpejati iz raznih učinkov, ki so posledica končne hitrosti širjenja svetlobe, iz obstoja zvezdnih paralaks in iz splošnega zakona gravitacije. Ti pojmi in pojavi za časa Galileia še niso bili znani.) Z uspehom pa zavrača Galilei argumente, ki so jih peripatetiki navajali zoper možnost raznih gibanj Zemlje. Kateri so bili ti argumenti? Po učenju Aristotela je naravno gibanje nebesne snovi krožno, naravno gibanje elementarne snovi pa premočrtno. Elementarna snov streми v premočrtnem gibanju proti središču vesolja, kjer se je že zdavnaj zbrala in tvori našo Zemljo. Ker je v središču vesolja, ne more Zemlja imeti premega gibanja; ne more pa niti imeti krožnega gibanja (sukanja okoli lastne osi, na primer), ker je to naravno gibanje nebesne snovi. Torej Zemlja miruje. Drugi argumenti so še bili naslednji: če bi se Zemlja gibala (oziroma, če bi se opazovališče gibalo zaradi sukanja Zemlje), bi moralo telo pri prostem padu priti do tal zahodno od podnožja; izstrelek proti vzhodu bi moral zadeti tla v točki, ki je bližja topu, kot pa izstrelek proti zahodu, saj bi se v času potovanja izstrelka sam top z opazovališčem premaknil proti vzhodu. Ker teh učinkov ne opazujemo, moramo po mnenju peripatetikov sklepati, da Zemlja miruje.

Galilei jemlje tem argumentom dokazilno moč, oslanjajoč se na vztrajnost teles in na načelo, ki mu danes pravimo »Galilejev relativnostni princip«. Zaradi vztrajnosti ohrani izstrelek hitrost, ki jo ima skupaj s topom zaradi sukanja Zemlje in glede na opazovališče se pojavi odvijajo enako, bodisi da to miruje ali se pa premo in enakomerno premika.

Galilei sicer uporablja načelo vztrajnosti, toda ga nikjer v spisih aksiomatsko ne postavlja ali definira. Nekje pravi: »...stopnja hitrosti, ki jo ima gibajoče se telo, je v njem neuničljiva, dokler ne nastopijo zunanji vzroki, ki jo pospešujejo ali zavirajo... iz česar sledi, da je gibanje v horizontalni ravnini večno...«. Toda pod horizontom si Galilei ne predstavlja tangentne ravnine na površje Zemlje v točki opazovališča, temveč, kakor sledi iz drugega mesta v knjigi, nivojsko površino homocentrično s središčem Zemlje. Premega gibanja v neskončnost si ni mogel zamisliti, saj je vesolje po Aristotelu omejeno in premo gibanje bi v njem povzročilo nered. Kakor hitro se telo oddalji od Zemlje, pridobi naravno gibanje kozmosa, ki je krožno. Galilei torej ni dal pravilne formulacije zakona vztrajnosti, ker sam tega pojma ni bil še prečistil.

Svoj relativnostni princip pa tako-le pojasnjuje: »...gibanje, ki je vsem telesom nekega sistema skupno, ne vpliva na njihove medsebojne odnose in se zato ne more ugotavljati iz opazovanj na samih telesih znotraj sistema.« V tej formulaciji ni precizirano, da mora biti hitrost sistema prema in enakomerna (in mnogo manjša od svetlobne hitrosti). Pri zgledih, ki jih obravnava, traja pojav tako malo časa, da smemo smatrati gibanje opazovališča in laboratorija zaradi sukanja in kroženja Zemlje kot premočrtno in enakomerno. Zato so njegovi zaključki pravilni, formulacija načela pa je preveč splošna.

Te kritične pripombe ne zmanjšujejo vrednosti Galileijevega dela; po kažejo naj samo, s kakšnimi težavami so nastajali in se oblikovali osnovni pojmi mehanike in koliko truda je še bilo potrebno, da zadobijo ostro določene oblike, ki jih imajo danes.

Galilejevo vztrajanje na aristotelovski ideji krožnega (vztrajnostnega) gibanja nebesnih teles nam še morda vsaj delno pojasnjuje, zakaj ni priznaval repaticam, ki imajo močno oploščene tire, značaja nebesnih teles, in zakaj v svojih delih ne omenja Keplerjevih elips.

V četrtem poglavju svojih »Dialogov« obravnava Galilei pojav bibavice in ga skuša utemeljiti kot posledico istočasnega sukanja in kroženja Zemlje. Bibavica naj bi torej bila dokaz realnosti Kopernikovega sestava. Galilei tako-le preudarja: gibljivi masni element vode v oceanih nedaleč od ekvatorja ima zaradi sukanja Zemlje tangencialno hitrost, ki je okoli polnoči usmerjena kakor hitrost kroženja Zemlje okoli Sonca, okoli poldneva pa ima njej nasprotno smer. Zaradi razlike v rezultantnih hitrostih naj bi nastal sunek, ki povzroča bibavico. Taho te rezultantne hitrosti veljajo glede na Sonce; v kolikor pa smemo kroženje Zemlje okoli Sonca obravnavati kot premo in enakomerno, ne morejo vplivati na relativno gibanje vodnih delcev glede na središče Zemlje in to prav na osnovi relativnostnega načela, ki ga je postavil sam Galilei. Če pa sukanje in kroženje Zemlje obravnavamo kot enakomerno krožno gibanje (torej s centripetalnim pospeškom), nam pove račun, da je vpliv teh pospeškov na gibljive mase minimalen in nemerljiv.

Galileiu je v čast, da je kasneje spregledal šibkost lastne argumentacije: v izjavi pred sodiščem inkvizicije je navedel, da je poglavje o bibavici pomanjkljivo utemeljeno in da se namerava še poglobljati v to vprašanje.

Bibavica je posledica diferencialne privlačne sile od strani Meseca in Sonca na gibljive vodne mase glede na težišče Zemlje. Zanimivo je, da je Kepler izrazil domnevo, da je bibavica posledica nekega Mesečevega vplivanja (zaradi sovpadanja v časovnih presledkih med zaporednimi kulminacijami Meseca in zaporednimi nastopi plime na istem mestu). Galilei je domnevo velikega sodobnika odločno odbijal kot mistično in nefizikalno.

Po obsodbi od strani inkvizicije, ki mu je praktično prepovedala objavo nadaljnjih spisov iz področja astronomije, se je Galilei vrnil k študiju problemov mehanike. Zbiral je in urejeval svoje stare spise in beležke s padovanskih časov in leta 1638 izdal svoje poglobljeno znanstveno delo »Razgovori o dveh novih znanostih...«. Tudi ta knjiga je razdeljena na »dneve«. Prvega dne razpravlja o odpornosti in lomu pri trdnih telesih, so pa še poglavja o prostem padu ter o pojmu neskončno majhnih in neskončno velikih količin. Drugi dan je posvečen vprašanju kohezije. Tretjega dne obravnava enakomerno in enakomerno pospešena gibanja na sploh ter prosti pad posebej (po Galileiu: »movimento locale«). Četrtega dne razpravlja o prisilnem gibanju in o metu. (Petega in šestega dne, ki naj bi obravnavala vprašanje trka teles in določanja težišča, Galilei ni dokončal.) Galileia priznavamo za »očeta nove fizike« na podlagi dosežkov, ki so opisani tretjega in četrtega dne v tej knjigi. Ta odkritja najdemo danes na prvih straneh vsakega srednješolskega učbenika fizike.

1. Prosti pad. Peripatetiki so trdili, da težja telesa padajo hitreje od lažjih in da je pri padu gibanje pospešeno. Philoponos iz Aleksandrije je v šestem stoletju prvi podvomil v veljavnost te trditve ter izrazil domnevo, da padajo telesa približno z enako hitrostjo. Poglavja Aristotelove fizike o gibanju in padu teles so bila predmet kritične analize v pariški šoli »terministov« v XIII. stoletju. Galileiev predhodnik benečan Battista Benedetti (1585) je odkril logični paradoks v zvezi s problemom prostega pada. Težje in lažje telo zvežimo skupaj in prepustimo prostemu padanju. Po učenju peripatetikov bi moral skup teles padati z neko srednjo hitrostjo, ker težje telo pospešuje lažjega, ta pa zadržuje težjega. Toda po istih peripatetiki bi moral skup teles padati hitreje, ker je težji od posameznih teles, in hitrost bi morala biti večja od hitrosti, s katero padajo telesa posamič. Ker je oboje istočasno nemogoče, padajo telesa v vakuumu z enako hitrostjo. Galileieva razmišljanja o prostem padu so verjetno iznikla iz tega paradoksa. Prva zakonitost o prostem padu, ki so jo dojeli intuitivno (po nekaterih avtorjih) še pred Galileiem, je bila, da je pot pri padu sorazmerna kvadratu preteklega časa. Galilei jo je sprejel kot delovno hipotezo in jo skušal izpeljati iz bolj osnovnih postulatov. Vpeljal je pojem enakomerno pospešenega gibanja in v začetku privzel, da je trenutna hitrost *v* sorazmerna prehojeni poti, kasneje pa gradil na privzetku, da je hitrost sorazmerna času ($v = g \cdot t$). Iz geometričnih razmotrivanj na primernem grafiku je izpeljal izraz za povprečno hitrost ($\bar{v} = (0 + v)/2 = gt/2$). Intuitivna zveza, ali natančneje sorazmernost s kvadratom časa, je bila tako utemeljena (vrednost konstante $g/2$ mu ni bila znana in ni seveda imela pomena polovice težnostnega pospeška). Po tej teoretični utemeljitvi je bilo treba še dokazati, da telesa v resnici padajo po tem zakonu. Kot je znano, je Galilei spuščal kroglice različnih snovi, da so padale po klancu z blago strmino. Privzel je, da padajo telesa po klancu sicer z zmanjšano hitrostjo, toda po istih zakonitostih kakor pri prostem padu. Ker tedaj še ni bilo točnih ur, si je pomagal z »vodno uro«: iz zelo velike posode je iztekala voda skozi majhno odprtino na dnu v majhno posodo. Odprtino je s prstom odpiral in pustil, da voda izteka,

dokler ni kroglica pretekla določeno pot. Nato je tehtal vodo, ki je bila iztekla. Teža je bila sorazmerna časovnim presledkom. Potrdil je pravilnost izpeljanega sorazmerja poti s kvadratom časa in seveda pravilnost privzetka, da je trenutna hitrost sorazmerna času. Prosti pad je limitni slučaj padanja po klancu s strmino 90° ; rezultati veljajo torej tudi za prosti pad. Iz teh zakonitosti sledijo še druge, tako na primer, da pota, ki jih telo preteče v posameznih zaporednih sekundah, naraščajo kot vrsta lihih števil.

2. Nadalje je zapazil še naslednje: po padu po klancu z višine h je kroglico usmeril na drug klanec, da se je po njem dvigala. Pokazalo se je, da dosega kroglica na vseh klancih s poljubno strmino vedno višino, ki je le malo manjša od h . Razliko je pripisal Galilei uporu, ki ga je razčlenil v trenje na podlagi in vztrajnostni upor na zraku. Da bi to dokazal, se je poslužil nihala. Nihanje mase na (matematičnem) nihalu je Galilei smatral kot padanje po klancu, ki se mu strmina zvezno spreminja. Najprej se je prepričal, da je nihanje pri majhnih amplitudah izohrono in da je perioda neodvisna od količine, oblike in vrste snovi (mase). Zračni upor torej ni občutno vplival na potek nihanja. Pri prehodu nihala skozi vertikalno lego je s prstom poljubno zmanjševal dolžino nihala in zapazil, da opiše privezana masa sicer vsakič lok manjšega kroga, da pa vedno dosega isto višino nad mirovno lego. Torej tudi pri vzponu po klancu bi kroglica dosegla višino h , s katere je padla, če ne bi bilo uporov. (Iz podobnih razmotrivanj je kasneje nastal pojem konservativnega sistema sil.)

3. Iz zgornjih eksperimentov sledi, da bi kroglica, ki je pridobila hitrost v na vodoravni ravni to hitrost ohranila za vse čase, če ne bi bilo uporov in po nadaljnjem procesu posploševanja in abstrakcije sledi pojem vztrajnosti.

4. Galileieva ugotovitev, da padajo vsa telesa v vakuumu z enakim pospeškom, vsebuje še zaključek, da je inertna masa sorazmerna teži masi. Kasneje je Einstein postuliral njihovo strogo enakost in na tem gradil splošno relativnostno teorijo.

Z eksperimenti na nihalu je Galilei še odkril, da je nihajna doba sorazmerna kvadratnemu korenu dolžine nihala in da se pri dušenem nihanju ohranja perioda nihanja; zmanjšujejo se le amplitude nihajev.

4. **Vodoravni in poševni met.** Pred Galileiem so bile vse predstave o poti izstrelka popolnoma zgrešene. Peripatetiki so zatrjevali, da telo ne more opraviti dveh gibanj hkrati in so merili, da se izstrellek iz topa giblje premo v začetni smeri, dokler ne izgubi svojega »impetusa«, nato začne delovati teža in izstrellek pade po vertikali na cilj. Matematik Cardani je menil, da mora biti vsa pot izstrelka ukrivljena. Galilei je postavil radikalno nov postulat: telo lahko podlega hkrati raznim gibanjem, ki pa so med seboj neodvisna; telo se stvarno giblje po rezultanti med seboj neodvisnih gibanj (načelo superpozicije gibanj). Ugotovil je, da je vodoravni met rezultanta dveh enostavnih gibanj in dokazal, da se izstrellek giblje po loku parabole, ki se z Galileiem menda prvič pojavlja v fiziki.

V znanosti je prav tako pomembno odkriti načelo neodvisnosti dveh pojavov, kakor obliko odvisnosti med pojavi. Pomislimo samo na veliki pomen analognih neodvisnostnih načel, ki so jih kasneje odkrili v fiziki: Newtonov paralelogram sil, Sauveurjevo sestavljanje nihanj pri struni, in sestavljanje toplotnih gibanj po Fourieru. Metoda opisa pojava kot superpozicije med seboj neodvisnih delnih pojavov (= splošni integral kot vsota partikularnih) osvaja po Fourieru vse oblasti matematične fizike.

Možno je, da je Galilejevo načelo superpozicije neodvisnih gibanj daljni odsev Ptolemejevega obravnavanja gibanja planetov z deferenti in epicikli.

Galilei v svojih razpravah uporablja izraza »moment« in »impuls« gibanja, ki ju je prevzel iz srednjeveške fizike, ju pa bolj določeno uporablja zdaj kot vzrok, zdaj kot nekakšno intenziteto gibanja: Moment in impuls sta pri Galileiu zbirna izraza in pojma, ki vsebujeta vzrok in posledice gibanja. Šele generacije po Galileiu so ta pojem razčlenile v dva: v pojem sile in pojem količine gibanja.

Druge Galilejeve raziskave:

1. Da bi dokazal peripatetikom, kako ni absolutno lahkih teles, je Galilei skušal določiti specifično težo zraku. V zaprto posodo z zrakom pri normalnem tlaku je nasilno vbrizgal večjo količino vode in stisnil zrak v čim manjši prostor. Stehtal je posodo, in nato odprl pipico, da je zrak iztekel iz posode, dokler ni v njej zavladal normalni tlak. Posodo je spet stehtal. Razlika v teži predstavlja težo zraka, ki je zajel prostor enak prostornini vode, ki jo je bil zbrizgnil v posodo. Našel je za specifično težo vode okoli dvakrat preveliko vrednost.

2. Dokazal je eksperimentalno, da je višina tona odvisna od števila nihajev v časovni enoti in razložil pojav akustične resonance. Dognal je, da je višina tona napete strune odvisna od njene dolžine, od mase dolžinske enote in od napetosti same strune.

3. Izrazil je domnevo, da je hitrost širjenja svetlobe končna in jo skušal izmeriti.

Vrednotenje astronomskih in fizikalnih odkritij Galileia ne zadostuje, da bi dojeli bogato kompleksnost njegove osebnosti in njegovo osrednjo vlogo v kulturno znanstveni revoluciji XVII. stoletja. Prodreti bi bilo treba globlje v njegov umski laboratorij, odkrivati njegove psihološke in spoznavne prvine, ter bližje določevati zunanje faktorje, ki so nanj vplivali. Množica del, razprav in analiz, ki so v zadnjih letih izšla o Galileiu ter razlike v sodbah so priča, da Galilei še nima dokončnega splošno priznanega mesta v zgodovini znanstvene misli in kulture.

CAUCHYJEVA METODA REŠEVANJA ALGEBRAIČNIH ENAČB*

ANTON SUHADOLC

Znani slovenski matematik Franc Močnik, čigar stopetdesetletnico rojstva obhajamo letos, je poleg res ogromnega števila matematičnih učbenikov za najrazličnejše šole napisal tudi matematično razpravo o Cauchyjevi metodi določevanja realnih korenov algebraičnih enačb. Razprava je izšla v nemškem jeziku v obliki knjige v Gorici l. 1839. V času, ko je razprava nastajala, je bival v Gorici tudi francoski matematik Cauchy. Močnik je Cauchyja osebno poznal, kot je razvidno iz uvoda k razpravi. Ker je Cauchy poročal v francoski akademiji o svoji metodi le približno eno leto prej, kot je izšla Močnikova razprava, smemo sklepati, da je Močniku posredoval to metodo Cauchy sam! Odprto pa ostane vprašanje, koliko je Močnik morda prispeval k razvitju metode. Značilno za Močnikov izreden pedagoški dar pa je zadnje poglavje v razpravi, v katerem avtor poda osnove Cauchyjeve metode na povsem elementaren način.

Zdi se, da je omenjena metoda prišla v pozabo. Ker pa metoda le ni brez zanimivosti, si bomo v naslednjem ogledali njene osnovne ideje.

Dana je enačba

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

kjer so koeficienti a_k realna števila. Metoda je uspešna za izračunavanje pozitivnih korenov enačbe (1), kar pa ni omejitev: negativne korene enačbe (1) dobimo tako, da v enačbo (1) vpeljemo novo neznanko $y = -x$. Dobljena enačba ima za pozitivne korene absolutne vrednosti negativnih korenov prvotne enačbe. Metoda zahteva, da najprej najdemo interval, v katerem leže vsi pozitivni koreni. Postopek, ki ga navaja Močnik, ne bomo obdelali, ker za Cauchyjevo metodo ni pomemben.

Postavimo se na stališče, da smo našli interval (a, b) na pozitivni strani osi x , v katerem so vsi pozitivni koreni enačbe (1), če enačba pozitivne korene sploh ima.

Bistvo Cauchyjeve metode je v naslednjem premisleku: vzemimo, da imamo polinoma $h(x)$ in $H(x)$ z lastnostma:

a) v krajišču $x = a$ imajo vsi polinomi $h(x)$, $H(x)$ in $f(x)$ isto vrednost $f(a)$,

b) na intervalu (a, b) naj velja $h(x) < f(x) < H(x)$.

Naj ima polinom $f(x)$ na intervalu (a, b) kakšno ničlo! Bodi ta v točki x_1 ! Če jih ima polinom na intervalu (a, b) več, bodi x_1 najmanjša ničla. Sedaj ločimo več primerov: naj bo npr. $f(a) > 0$! Tedaj ima tudi polinom $h(x)$ kakšno ničlo na intervalu (a, x_1) , saj zavzame $h(x)$ na krajišču a pozitivno vrednost, pri $x = x_1$ pa že negativno, ker velja zaradi lastnosti b) $h(x_1) < f(x_1) = 0$.

* Članek je posvečen spominu stopetdesetletnice rojstva slovenskega matematika Franca Močnika.

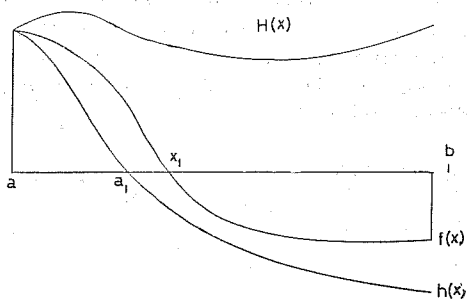
Potem mora biti $h(x)$ vsaj enkrat na intervalu (a, x_1) enak 0. Označimo z a_1 ničlo polinoma $h(x)$ na intervalu (a, x_1) , oziroma najmanjšo ničlo, če jih ima polinom na intervalu več! (Glej tudi sliko 1!)

Podobno premišljujemo v primeru, če je $f(a) < 0$. Tedaj mora imeti polinom $H(x)$ na intervalu (a, x_1) vsaj eno ničlo; to označimo spet z a_1 . V obeh primerih seveda velja $a_1 < x_1$.

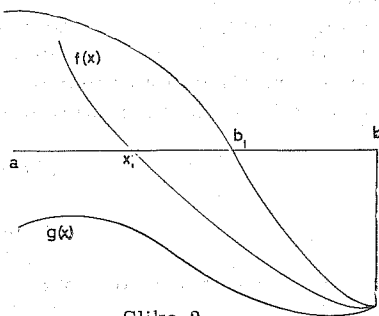
Sedaj gledamo še drugo krajišče intervala (a, b) . Vzemimo, da imamo spet dva polinoma $g(x)$ in $G(x)$ z lastnostma:

- a) $g(x)$, $G(x)$ in $f(x)$ imajo v krajišču b isto vrednost $f(b)$,
- b) na intervalu $a < x < b$ naj velja $g(x) < f(x) < G(x)$.

Bodi npr. $f(b) < 0$! (Glej sliko 2!) Če ima $f(x)$ kakšno ničlo na intervalu (a, b) , potem ima tudi polinom $G(x)$ kakšno ničlo na intervalu (x_1, b) . Največjo ničlo polinoma $G(x)$ na tem intervalu označimo z b_1 . Podobno seveda velja, da ima polinom $g(x)$ ničlo na intervalu (x_1, b) , če je $f(b) > 0$ in če ima $f(x)$ kakšno ničlo na intervalu (a, b) . Ničlo polinoma $g(x)$ spet označimo z b_1 . V vseh štirih primerih velja $a < a_1 < x_1 < b_1 < b$, če le ima polinom $f(x)$ kakšno ničlo na intervalu (a, b) .



Slika 1.



Slika 2.

Dosedanje moremo povzeti takole: interval (a, b) , v katerem so vse pozitivne ničle polinoma $f(x)$, nadomestimo z intervalom (a_1, b_1) , ki leži v notranjosti intervala (a, b) in tudi vsebuje vse pozitivne ničle polinoma $f(x)$, ali, a_1 in b_1 sta boljše približki za najmanjši oziroma največji koren na intervalu (a, b) , kot sta a in b . Vse to velja le pri predpostavki, da na intervalu (a, b) res eksistira kakšen koren polinoma $f(x)$.

Če znamo poiskati k polinomu $f(x)$ polinome

$$h(x) < f(x) < H(x)$$

$$\text{za } a < x < b$$

$$g(x) < f(x) < G(x)$$

$$h(a) = f(a) = H(a), g(b) = f(b) = G(b)$$

moremo poiskati boljši meji za koren x_1 , ki leži na intervalu (a, b) , če le znamo rešiti enačbe $h(x) = 0$, $H(x) = 0$, $g(x) = 0$, $G(x) = 0$.

Postopek sedaj ponovimo z intervalom (a_1, b_1) in z novimi polinomi $h_1(x), \dots, G_1(x)$. Dobili bomo nove, boljše približke a_2, b_2 za koren x_1 .

Če je na intervalu (a, b) le en koren enačbe $f(x) = 0$, potem konvergirajo naši približki $a_1, a_2, \dots$ in $b_1, b_2, \dots$ proti korenu x_1 . Pri tem je vedno $a_k < x_1 < b_k$. Razlika $b_k - a_k$ je istočasno merilo, kako natančno smo koren x_1

že izračunali. Če je na intervalu (a, b) več korenov enačbe $f(x) = 0$, konvergirajo približki $a_1, a_2, \dots$ proti najmanjšemu pozitivnemu korenu enačbe (1), približki $b_1, b_2, \dots$ proti največjemu korenu enačbe (1) na intervalu (a, b) . V tem primeru žal nimamo možnosti ugotoviti iz približkov a_k, b_k , kako natančno smo korene že izračunali.

Bralec si je gotovo že sam zastavil vprašanje, kako dobiti polinome $h(x), \dots, G(x)$ in kako rešiti pripadajoče enačbe $h(x) = 0, \dots, G(x) = 0$. Cauchy je pokazal dva načina; enkrat izbere za polinome $h(x), \dots$ kar linearne polinome, drugič pa kvadratične. V obeh primerih ni težav pri izračunavanju korenov $h(x) = 0, \dots, G(x) = 0$.

Ogledali si bomo le linearno Cauchyjevo metodo. Tako namreč imenujemo metodo, ki smo jo doslej spoznali, če jemljemo za polinome $h(x), \dots$ linearne polinome.

V enačbi (1) so nekatere potence x -a pomnožene s pozitivnimi koeficienti, druge z negativnimi. Del polinoma, v katerem nastopajo pozitivni koeficienti, označimo z $p(x)$, del polinoma $f(x)$, v katerem so potence x -a pomnožene z negativnimi koeficienti, pa z $-q(x)$. Potem seveda velja $f(x) = p(x) - q(x)$. Polinoma $p(x)$ in $q(x)$ imata same pozitivne koeficiente, zato velja $p(a) < p(b)$ in $q(a) \leq q(b)$. Pri tem smo privzeli, da $q(x)$ ni identično enak 0. Primer $q(x) \equiv 0$, ali polinom $f(x)$ ima same pozitivne koeficiente, ni zanimiv, ker tedaj enačba (1) gotovo nima pozitivnega korena. Tudi za odvode $p'(x)$ in $q'(x)$ velja $p'(a) < p'(b)$ in $q'(a) < q'(b)$, odkoder neenačbi

$$\begin{aligned} p'(a) &< p'(x) < p'(b) \\ q'(a) &< q'(x) < q'(b) \end{aligned} \quad a < x < b$$

Neenačbi odštejemo in dobimo

$$p'(a) - q'(b) < p'(x) - q'(x) < p'(b) - q'(a), \quad a < x < b$$

Ker je srednji člen ravno enak $f'(x)$, velja na intervalu (a, b) ocena

$$p'(a) - q'(b) < f'(x) < p'(b) - q'(a) \quad (2)$$

Znani Lagrangev izrek pravi: če je funkcija $f(x)$ na intervalu (a, b) odvedljiva, velja

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(y), \text{ kjer je } a < y < x < b. \quad (3)$$

Člen $f'(y)$ nadomestimo enkrat z izrazom $p'(a) - q'(b)$, drugič z izrazom $p'(b) - q'(a)$. Dobimo tako linearna polinoma

$$\begin{aligned} h(x) &= f(a) + (x - a) [p'(a) - q'(b)] \\ H(x) &= f(a) + (x - a) [p'(b) - q'(a)] \end{aligned} \quad (4)$$

Zaradi neenačbe (2) imata polinoma $h(x)$ in $H(x)$ res zahtevane lastnosti na intervalu (a, b) , namreč $h(a) = H(a) = f(a)$ in $h(x) < f(x) < H(x)$ za vsak x na intervalu (a, b) .

Po podobnem premisleku definiramo še polinoma $g(x)$ in $G(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(b) + (x-b)[p'(b) - q'(a)] \\ G(x) &= f(b) + (x-b)[p'(a) - q'(b)] \end{aligned} \quad (5)$$

Tudi polinoma $g(x)$ in $G(x)$ zadoščata postavljenima zahtevama.

Presečišča z osjo x polinomov $h(x)$, $H(x)$, $g(x)$, $G(x)$ so po vrsti

$$\begin{aligned} a_1 &= a - \frac{f(a)}{p'(a) - q'(b)} & b_1 &= b - \frac{f(b)}{p'(b) - q'(a)} \\ A_1 &= a - \frac{f(a)}{p'(b) - q'(a)} & B_1 &= b - \frac{f(b)}{p'(a) - q'(a)} \end{aligned}$$

Enačbo (1) rešujemo sedaj takole:

Najprej določimo interval (a, b) , na katerem so vsi pozitivni koreni enačbe $f(x) = 0$. Potem ločimo 4 primere glede na to, kakšen je znak $f(a)$ in $f(b)$. Vzemimo najprej, da je npr. $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Torej ima enačba (1) res najmanj en koren na intervalu (a, b) . Iz dosedanjega vemo, da imata v tem primeru na intervalu (a, b) vsaj po en koren tudi polinoma $h(x)$ in $G(x)$. Ta korena označimo z a_1 in B_1 :

$$a < a_1 < x_1 < B_1 < b$$

Namesto intervala (a, b) vzamemo interval (a_1, B_1) , konstruiramo novi funkciji $h_1(x)$ in $G_1(x)$ po receptu (4) in (5). Dobimo novi meji a_2 in B_2 , $a < a_1 < a_2 < x_1 < B_2 < B_1 < b$. Postopek nadaljujemo, dokler ni koren x_1 (če je na (a, b) en sam koren) izračunan želeno natančno, ali, dokler nista korena x_1 in x_2 , ki sta najmanjši in največji koren na intervalu (a, b) , izračunana želeno natančno, če je na intervalu (a, b) več korenov.

Vzemimo še primer $f(a) > 0$, $f(b) > 0$. Tedaj ima enačba $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) sodo število korenov, ali pa nobenega. Zaporedne približke računamo kot prej, le sedaj moramo upoštevati le polinoma $h(x)$ in $g(x)$. (Če bi bilo $f(a) < 0$, $f(b) < 0$, bi morali upoštevati le polinoma $G(x)$ in $H(x)$.) Dobimo zaporedne približke $a, a_1, a_2, \dots$ in $b, b_1, b_2, \dots$. Kako se obnašajo približki, če enačba $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) nima korenov? Tedaj približki ne konvergirajo; zgodi se namreč, da sta nova približka a_{k+1} in b_{k+1} izven intervala (a_k, b_k) , ali pa je približek a_{k+1} večji od približka b_{k+1} . Če pa so koreni na intervalu (a, b) , konvergirajo približki a_k proti najmanjšemu, približki b_k pa proti največjemu korenu enačbe (1) na intervalu (a, b) .

Ocenimo še Cauchyjevo metodo računanja korenov v primerjavi z znano Newtonovo (tangentsno) metodo! Newtonova metoda zahteva manj računskega dela, ima pa to slabo stran, da nas varno pripelje do korena le tedaj, ko smo vzeli že precej dober začetni približek. Cauchyjeva metoda te pomanjkljivosti nima: vsak korak nam da boljši meji za korene na intervalu (a, b) ; če na tem intervalu korenov ni, vidimo to po končno korakih iz obnašanja približkov samih.

V primeru, da sta a in b bolj slaba približka za koren (korene) na intervalu (a, b) , je konvergenca Cauchyjeve metode počasna. Če pa sta a in b dobri spodnja oz. zgornja meja za koren x_1 , konvergirata Cauchyjeva in Newtonova metoda približno enako hitro.

O NEKATERIH PROSTORIH ANALIZE

JOŽE GRASSELLI

Uvod

Matematična analiza je vzkliła in se razrasla v obsežno in pomembno disciplino na množici realnih števil. Vsak izsledek realne analize nam odkriva neko lastnost realnih števil in je na koncu le posledica tistih osnovnih zakonitosti, ki so značilne za realna števila. Nekatero od teh zakonitosti pa so izpolnjene tudi pri drugačnih objektih, kot so realna števila. Prav tako so mnogi pojmi realne analize takšni, da pri njihovi vpeljavi niso uporabljene vse lastnosti realnih števil. Poraja se zato vprašanje, ali ni možno tudi za takšne množice elementov, ki nimajo vseh karakterističnih lastnosti realnih števil, zgraditi podobne teorije, kot je realna analiza za množico realnih števil. Veliko je doseženega v tej smeri in še vedno prihajajo nova odkritja. O tem poročati, ni namen teh vrstic. Zastavimo si bolj skromen in lažje dosegljiv cilj: Ogledati si hočemo, kako se dajo najpreprostejši pojmi analize vpeljati v nekatere množice. Izkaže se, da je to možno, če so na elementih množice definirane računske operacije s primernimi lastnostmi. Konkretna narava elementov ni prav nič važna, čeprav bi na prvi pogled to pričakovali. Zato v definicijah linearnih prostorov ne bo nobene besede o tem, kaj so njihovi elementi, temveč samo, kakšnim operacijam elementi ustrezajo.

Linearen prostor

Na kratko moremo reči, da je linearen prostor taka skupnost elementov, ki je v sebi zaprta za seštevanje in odštevanje elementov ter za množenje elementov s števili. Te operacije ustrezajo podobnim zakonom, kot veljajo za računanje s števili. Natančen opis linearnega prostora daje naslednja definicija.

Množica X , ki jo sestavljajo elementi $x, y, z, \dots$, je realen linearen prostor, če ustreza naslednjim zahtevam:

A. Vsaka dva elementa x, y iz množice X se dasta sešteti in njuna vsota $x + y$ je spet element iz množice X .

B. Vsak element x iz množice X se da množiti z vsakim realnim številom a in produkt ax je spet element iz množice X .

C. Pri seštevanju elementov in množenju elementov z realnimi števili $a, \beta, \dots$ so v množici X izpolnjeni pogoji:

$$C_1. \quad x + y = y + x \quad (\text{komutativnost vsote})$$

$$C_2. \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{asociativnost vsote})$$

$C_3.$ V množici X je takšen element 0 , da je $x + 0 = x$ za vsak $x \in X$ (obstoj elementa nič v množici X).

$C_4.$ K vsakemu elementu $x \in X$ obstaja v množici X takšen element $-x$, da je $x + (-x) = 0$ (obstoj inverzne operacije k seštevanju).

C₅. $1 \cdot x = x$ (množenje z 1 elementa ne spremeni).

C₆. $a(\beta x) = (a\beta)x$ (asociativnost množenja glede na številski faktor).

C₇. $(a + \beta)x = ax + \beta x$ (distributivnost množenja glede na številski faktor).

C₈. $a(x + y) = ax + ay$ (distributivnost množenja glede na faktor iz X).

Teh osem lastnosti mora seveda veljati pri poljubnih elementih x, y, z iz množice X in pri poljubnih realnih številih a, β .

Navedimo nekaj zgledov za linearen prostor: množica realnih števil, množica trodimenzionalnih vektorjev, množica polinomov stopnje ≤ 5 z realnimi koeficienti, množica vseh realnih konvergentnih zaporedij, množica vseh na skupnem intervalu zveznih funkcij, množica rešitev homogenega sistema n linearnih enačb z n neznankami (koeficienti realni), množica vseh realnih matrik iste oblike, vse realne rešitve kake dane homogene linearne diferencialne enačbe. Bralec se lahko pri vsakem teh zgledov hitro prepriča, da vsakikrat pogoji A, B, C res drže.

V zgornjih zgledih imajo elementi še najrazličnejšo naravo in si na prvi pogled niso prav nič podobni. Popolnoma pa se ujemajo v tem, kako se obnašajo pri seštevanju in pri množenju s števili. Prav to pa je — vsaj z matematičnega stališča — daleč najvažnejše. Tako nam pojem linearnega prostora omogoča obravnavati pod istim vidikom objekte, ki se zde sicer močno narazen. Lastnosti, ki jih študij abstraktnega linearnega prostora odkrije, veljajo seveda za vse njegove konkretne primere. Teh lastnosti ne mislimo opisovati, čeprav so zanimive in pomembne. Pač pa hočemo pokazati, kako je možno, izhajajoč iz linearnega prostora X , konstruirati nove linearne prostore. Važna vloga pripade pri tem nekim funkcijam linearnega prostora.

Navadne funkcije ene spremenljivke imajo definicijsko območje in zalogo vrednosti v množici realnih števil. Za funkcije, ki nastopajo v zvezi z linearnim prostorom, so razmere bolj pester. Najprej imamo funkcije, ki preslikavajo iz množice realnih števil v linearen prostor. Take funkcije imenujemo parametrične. Če je x_0 fiksni element iz X , x pa teče po realnih številih, je ax_0 že primer parametrične funkcije. Nadalje imamo funkcije, pri katerih sta definicijsko območje in zaloga vrednosti oba v prostoru X . To so operatorji. Če gre x po vsem prostoru X , je vsak od izrazov $2x$, $x_0 + x$ operator. Končno so še funkcije, ki upodabljajo iz prostora X v množico realnih števil. Te vrste funkcij pravimo funkcionali. Če npr. priredimo vsakemu elementu $x \in X$ število 1, je s tem že dan neki funkcional. Za nas bodo važni linearni funkcionali.

Naj bo $f(x)$ funkcional. Za vsak element x iz prostora X je torej $f(x)$ neko realno število. Funkcional $f(x)$ je linearen, če je za vsako realno število a in za vsak par elementov x, y iz X

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

$$f(ax) = af(x) \quad (2)$$

Pri linearnem funkcionalu je torej z vrednostima pri elementih x in y že tudi njegova vrednost pri elementih $ax, x + y$ določena. V enačbi (1) se izraža aditivnost, v enačbi (2) pa homogenost linearnega funkcionala.

Preprost zgled linearnega funkcionala dobimo, če vsak element prostora X preslikamo v število 0. Takoj se vidi, da sta v tem primeru enačbi (1) in (2) iz-

polnjeni. Ta linearni funkcional imenujemo funkcional nič. Dokazati je mogoče, da obstajajo v X še drugi, od funkcionala nič različni linearni funkcionali. V konkretnih zgledih, ki smo jih zgoraj navedli, je pa to očitno. Tako je npr. za množico vseh realnih števil $f(x) = ax$, a realna konstanta, že linearen funkcional. Ker smemo za a vzeti poljubno realno število, smo tako našli kontinuum mnogo linearnih funkcionalov te množice. Podobno je v prostoru trodimenzionalnih vektorjev izraz $f(x) = ax_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$, kjer so a, β, γ realne konstante, x_1, x_2, x_3 pa komponente vektorja x , linearen funkcional.

Označimo z X^* množico vseh linearnih funkcionalov, ki so definirani na linearnem prostoru X . V množico X^* moremo na preprost način vpeljati seštevanje in množenje z realnimi števili. Če sta f, g iz X^* , sta $f(x), g(x)$ za vsak x iz X realni števili in je torej tudi $f(x) + g(x)$ realno število. Opredelimo vsoto $f + g$ kot funkcional, pri katerem velja vsak $x \in X$ enačba

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (3)$$

Podobno postavimo, naj bo pri $f \in X^*$ in realnem številu β

$$(\beta f)(x) = \beta f(x) \quad (4)$$

za vsak element x iz X . Po opredelitvah (3) in (4) sta vsota $f + g$ in produkt βf funkcionala, saj preslikata prostor X v množico realnih števil. Pomembno pa je dejstvo, da sta obe te preslikavi linearna funkcionala. Naslanjajoč se na (3) in (4) vidimo to iz računov

$$\begin{aligned} (f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = \\ &= (f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned}$$

$$(f + g)(ax) = f(ax) + g(ax) = af(x) + ag(x) = a(f + g)(x)$$

$$\begin{aligned} (\beta f)(x + y) &= \beta(f(x + y)) = \beta(f(x) + f(y)) = \beta f(x) + \beta f(y) = \\ &= (\beta f)(x) + (\beta f)(y) \end{aligned}$$

$$(\beta f)(ax) = \beta(f(ax)) = \beta(af(x)) = a(\beta f(x)) = a(\beta f)(x)$$

Množica X^* je torej za vpeljano seštevanje in množenje z realnimi števili zaključena, v njej sta izpolnjeni zahtevi A in B. Prav lahko pa se je prepričati, da drži tudi zahteva C. Potemtakem je množica X^* vseh linearnih funkcionalov linearnega prostora X spet linearen prostor. Za prostor X^* je v rabi ime adjungiran (tudi konjugiran ali dualen) prostor k X . Ker je X^* linearen prostor, mu lahko poiščemo adjungirani prostor. Le-tega zaznamujemo z X^{**} in ga imenujemo drugi adjungirani prostor k X . Postopek je seveda možno nadaljevati.

Normiran prostor

Za potrebe analize je pojem linearnega prostora še preveč splošen. V analizi igrajo namreč poleg algebrskih operacij važno vlogo tudi razne limitne operacije. Teh zadnjih pa na linearen prostor ni mogoče prenesti. Na zgledu limite to takoj vidimo. Število a — tako pravi definicija — je limita zaporedja

$a_1, a_2, a_3, \dots$, če zajame vsaka okolica števila a vse dovolj pozne člene tega zaporedja. Ker v linearnem prostoru nimamo pojma okolice elementa, te definicije ne moremo uporabiti. Da bo postal linearen prostor dostopen metodam analize, ga je treba opremiti z dodatnimi lastnostmi. Načinov, kako te lastnosti izbrati, je več. Najpreprostejši način je vpeljava norme.

Norma $\| \cdot \|$ je funkcija, ki prireja vsakemu elementu $x \in X$ realno število $\|x\|$ in ustreza pri vseh elementih $x, y \in X$ ter pri vsakem realnem številu a zahtevam:

D. $\|x\| \geq 0$

E. $\|ax\| = |a| \|x\|$ (5)

F. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

G. Če je $\|x\| = 0$, je $x = 0$ (element nič v X).

Linearen prostor, v katerem je dana norma, imenujemo normiran prostor. Videli smo že, da je množica trodimenzionalnih vektorjev linearen prostor. Dolžina vektorja pa ima očitno vse lastnosti (5). Množica trodimenzionalnih vektorjev je torej normiran prostor, z dolžino vektorja kot normo. Prav tako je množica realnih števil, če vzamemo za normo absolutno vrednost števila, normiran prostor. Nekaj nadaljnjih zgledov bomo še omenili. Pred tem pa se hočemo seznanimi z nekaterimi lastnostmi in pojmi normiranega prostora.

Ugodno je, da najprej vpeljemo razdaljo. Če sta x, y poljubna elementa normiranega prostora, naj bo njuna razdalja $\varrho(x, y)$ enaka normi razlike $x - y$, torej

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

Zaradi zahtev D in G je razdalja pri $x \neq y$ pozitivna, le pri $x = y$ pa enaka nič. Iz zahteve E sledi, da je razdalja simetrična $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.

Na običajen način pridemo zdaj do pojma okolice v normiranem prostoru. Za fiksni element x_0 in fiksno število $\varepsilon > 0$ pomeni okolica ε elementa x_0 množico vseh tistih elementov, ki so od x_0 oddaljeni za manj kot ε . Če zaznamujemo to okolico z $U(x_0, \varepsilon)$, so torej v njej vsi tisti elementi x normiranega prostora, za katere je $\|x - x_0\| < \varepsilon$. Vse okolice elementa x_0 dobimo, če zavzame ε vse možne pozitivne vrednosti. Vse okolice vseh elementov pa sestavljajo skupnost okolic normiranega prostora. Vsak element x_0 ima kontinuum mnogo okolic. Med njimi so tudi okolice $V_1 = U(x_0, 1)$, $V_2 = U(x_0, 1/2)$, ..., $V_n = U(x_0, 1/n)$, ..., kjer gre n po vseh naravnih številih. Takoj se vidi, da vsaka okolica $U(x_0, \varepsilon)$ obsega vse okolice V_n z dovolj velikim indeksom n .

Definiciji limite in stekališča v normiranem prostoru sta zdaj na dlani. Element x_0 je pač limita zaporedja $x_1, x_2, x_3, \dots = \{x_n\}$, če vsaka okolica elementa x_0 zajame iz zaporedja vse elemente od dovolj poznega naprej. Zaporedje, ki ima limito, je konvergentno. Imejmo kakšno množico M elementov iz normiranega prostora X . Element $x_0 \in X$ je stekališče množice M , če je v vsaki njegovi okolici neskončno elementov množice M . Brez težav se prepričamo, da je vsako stekališče množice M limita zaporedja elementov iz M . Naj bo namreč x_0 kakšno stekališče množice M . Vzemimo okolice $V_1, V_2, V_3, \dots$, ki smo jih omenili v prejšnjem odstavku. V vsaki od njih je neskončno elementov iz M . Izberimo

en tak element $x_1 \in M$ v V_1 , element $x_2 \in M$ v V_2 , element $x_3 \in M$ v V_3 in tako naprej. Dobljeno zaporedje vsebuje samo elemente iz M in konvergira proti x_0 .

Zaporedje $\{x_n\}$ elementov normiranega prostora je Cauchyjevo, če se da pri vsakem $\varepsilon > 0$ najti takšen indeks n_0 , da je $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ pri vseh indeksih $n, m > n_0$. Vsako konvergentno zaporedje je tudi Cauchyjevo. O tem se kaj lahko prepričamo. Če ima namreč zaporedje $\{x_n\}$ limito x_0 , je pri vsakem $\varepsilon > 0$ mogoče dobiti takšen indeks n_0 , da za vse $n > n_0$ velja $\|x_0 - x_n\| < \varepsilon/2$. Od tod sledi pri indeksih $n, m > n_0$ z upoštevanjem lastnosti F, da je $\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_0 + x_0 - x_m\| + \|x_0 - x_m\| < \varepsilon$. Konvergentno zaporedje je torej zmeraj Cauchyjevo. Narobe pa ne. Če je kako zaporedje Cauchyjevo, v splošnem še ne moremo trditi, da je konvergentno. To kažejo razni zgledi. Po drugi strani pa se dajo dobiti taki primeri normiranega prostora, kjer ima vsako Cauchyjevo zaporedje limito (npr. množica realnih števil z absolutno vrednostjo kot normo). Za normiran prostor, v katerem stremi vsako Cauchyjevo zaporedje elementov proti nekemu elementu tega prostora, pravimo, da je poln. V polnem normiranem prostoru pomeni Cauchyjevo zaporedje prav isto kot konvergentno zaporedje. Drugo ime za poln normiran prostor je Banachov prostor (po poljskem matematiku Štefanu Banachu 1892—1945). Omenimo naj, da je možno normiran prostor, ki ni poln, s privzemom nekih elementov zmeraj spremeniti v Banachov prostor. Zato predpostavka, da je normiran prostor poln, ne pomeni za teorijo bistvene omejitve. Odpadejo pa s tem razna konvergenčna razmotrivanja, ki bi bila sicer potrebna.

V Banachovem prostoru X obstaja na primer vsota za neskončno vrsto

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots, x_n \in X \text{ za vsak } n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

kakor hitro konvergira pripadajoča ji vrsta iz norm členov

$$\|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \dots \quad (7)$$

Oglejmo si zaporedje delnih vsot vrste (6)

$$s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, \dots, s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n, \dots$$

Ker je vrsta (7) konvergentna, velja za vse dovolj velike indekse n, m pri poljubnem $\varepsilon > 0$ ocena

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \dots + \|x_n\| < \varepsilon$$

Zaporedje delnih vsot vrste (6) je potemtakem Cauchyjevo. Zaradi polnosti prostora X pa je s tem že zagotovljen obstoj limite za to zaporedje. Ta limita je obenem vsota vrste (6).

Ko imamo v normiranem prostoru opredeljeno limito, moremo zgraditi pojme, ki se nanašajo na funkcije: zveznost, odvod in integral.

Brez težav se da vpeljati zveznost. Naj bo $x(a)$ parametrična funkcija. Kot smo videli, je parametrična funkcija definirana na neki množici realnih števil a , njene vrednosti $x(a)$ pa so elementi iz normiranega prostora X . Funkcija $x(a)$ je zvezna pri argumentu a_0 , če za vsako zaporedje števil $\{a_n\}$, ki stremi proti a_0 , zaporedje elementov $\{x(a_n)\}$ konvergira proti elementu $x(a_0)$.

Podobna je definicija zveznosti pri operatorjih in funkcionalih. Operator $A(x)$ (oziroma funkcional) je zvezen pri elementu x_0 , če ima pri vsakem zaporedju elementov $\{x_n\}$ z limito x_0 zaporedje slik $\{A(x_n)\}$ limito $A(x_0)$. Funkcijo, ki je zvezna pri vsakem posameznem elementu definicijskega območja, imenujemo zvezno.

Ugotovimo za zgled zveznost norme. V ta namen moramo pokazati, da iz $\{x_n\} \rightarrow x_0$ zmeraj sledi $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$. Ker gre $\{x_n\} \rightarrow x_0$, velja $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ pri $n \rightarrow \infty$. Po lastnosti norme F pa je

$$\|x_n\| = \|x_n - x_0 + x_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|x_0\|$$

in torej

$$\|x_n\| - \|x_0\| \leq \|x_n - x_0\|$$

Če zamenjamo vlogo elementov x_n in x_0 , dobimo

$$\|x_0\| - \|x_n\| \leq \|x_n - x_0\|$$

Imamo tedaj oceno

$$|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0$$

za $n \rightarrow \infty$. Torej je $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$. Zveznost norme je dokazana. Podobno se dožene zveznost množenja elementov s števili in seštevanja elementov.

Pomudimo se zdaj še pri odvodu in integralu v normiranem prostoru X . Razširjavo obeh pojmov na parametrične funkcije dosežemo precej. Če je namreč parametrična funkcija $x(a)$ definirana povsod v kaki okolici fiksnega števila a_0 , je za vsako dosti majhno od nič različno število τ tudi element

$$y_\tau = [x(a_0 + \tau) - x(a_0)]/\tau$$

vsebovan v X . Če obstaja limita elementov y_τ , ko gre τ kakorkoli proti nič, jo imenujemo odvod parametrične funkcije $x(a)$ pri $a = a_0$. Parametrična funkcija $x(a)$ je odvedljiva, če ima odvod za vsako število a iz definicijskega območja.

Vzemimo zdaj zvezno parametrično funkcijo $x(a)$, ki naj bo definirana na intervalu (γ, δ) realne osi. Za vsako razdrobitev tega intervala na podintervale s točkami $\gamma = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = \delta$ je vsota

$$(a_1 - a_0) x(a_0) + (a_2 - a_1) x(a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) x(a_{n-1})$$

element iz prostora X . Pokazati je mogoče, da obstaja limita teh elementov, ko se z nadaljevanjem drobitve dolžina podintervalov krči proti nič. Ta limita je integral parametrične funkcije $x(a)$ na intervalu (γ, δ) .

Tudi za operatorje in funkcionale je možno vpeljati odvod, vendar je njegova definicija v teh primerih bolj komplicirana. Da po običajni poti ne gre več, je lahko videti. Argument funkcije je zdaj namreč element prostora X . Ker pa tu deljenja elementov nimamo, običajnega diferenčnega kvocienta ne moremo tvoriti. Kako se da izogniti tej težavi, pa ne bomo opisovali. Očitno je nadalje, da pri operatorjih in funkcionalih tudi zgornja definicija integrala

ni uporabna. Za te funkcije je možno integral vpeljati sele, ce ima normirani prostor dodatne lastnosti, tako npr., ako je v njem dana mera.

Zglede za normiran prostor je prav lahko najti. Iz vsakega od zgledov, ki smo jih navedli za linearen prostor, more bravec s primerno izbiro norme dobiti zgled za normiran prostor.

V množici matrik drugega reda

$$= x \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

kjer so $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ realna števila, je možno npr. za normo matrike vzeti kar vsoto absolutnih vrednosti členov, torej $\|x\| = |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$. Da so tukaj res izpolnjene zahteve (5), ki jim mora norma ustrezati, je očitno. Prav tako se hitro vidi, da je ta normirani prostor poln.

V množici $\mathcal{C}$ vseh zveznih funkcij $x(\tau)$ na zaprtem intervalu (α, β) lahko vzamemo za normo maksimum absolutne vrednosti funkcije, torej

$$\|x(\tau)\| = \max |x(\tau)|, \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

Tudi to je Banachov prostor. Če je namreč $\{x_n(\tau)\}$ Cauchyjevo zaporedje tega prostora, velja

$$\|x_n(\tau) - x_m(\tau)\| = \max |x_n(\tau) - x_m(\tau)| \rightarrow 0, \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

pri $n, m \rightarrow \infty$. To pomeni, da je zaporedje funkcij $x_n(\tau)$ na intervalu (α, β) enakomerno konvergentno. Njegova limita je zato zvezna funkcija na intervalu (α, β) in tedaj vsebovana v množici $\mathcal{C}$.

Videli smo, kako se da k abstraktnemu linearnemu prostoru konstruirati nov linearen prostor, namreč adjungirani prostor. Uporabimo zdaj podoben postopek, izhajajmo pa iz normiranega prostora. Naslonili se bomo na linearne funkcionalne normiranega prostora.

Funkcional, definiran na normiranem prostoru X , je linearen, če je: 1. aditiven, 2. homogen, 3. zvezen. Za vse elemente $x, y, x_0 \in X$ in za vsako realno število α velja tedaj:

$$\text{aditivnost:} \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

$$\text{homogenost:} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (2)$$

$$\text{zveznost:} \quad \text{iz } x \rightarrow x_0 \text{ sledi } f(x) \rightarrow f(x_0) \quad (7)$$

Naj pomeni X^* množico vseh linearnih funkcionalov normiranega prostora X . Vemo že, da je X^* linearen prostor. Funkcionalne iz X^* seštevamo in množimo s števili po enačbah (3) in (4). Toda v prostor X^* je mogoče vpeljati tudi normo.

Naj bo $f \in X^*$. Za vsak element $x \in X$ je $f(x)$ realno število. Pustimo, da preteče x vse elemente z normo $\|x\| = 1$. Absolutne vrednosti števil $f(x)$, ki jih pri tem dobimo, tvorijo neko množico nenegativnih števil M . Trdimo, da je ta množica M navzgor omejena. V nasprotnem primeru bi za vsako naravno število

n obstajal v takšen element x_n z normo $\|x_n\| = 1$, pri katerem bi bilo $|f(x_n)| > n$. Za $n = 1, 2, 3, \dots$, bi torej dobili tako zaporedje elementov $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, da bi bilo $|f(x_1)| > 1$, $|f(x_2)| > 2, \dots$, $|f(x_n)| > n, \dots$ in torej $|f(x_n)| \rightarrow \infty$ pri $n \rightarrow \infty$. Zaporedje elementov $\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{|f(x_n)|} x_n \right\}$ pa bi konvergiralo proti

elementu 0, saj je $\|y_n\| = \frac{1}{|f(x_n)|}$. Zato bi iz zveznosti funkcionala f sledilo

$f(y_n) \rightarrow 0$. Po drugi strani pa bi bilo $|f(y_n)| = 1$ in torej tudi $|f(y_n)| \rightarrow 1$. To protislovje kaže, da je množica M navzgor omejena. Natančna zgornja meja množice M

$$\sup |f(x)|, \quad x \in X, \quad \|x\| = 1$$

je torej končno število. Na ta način pripada vsakemu funkcionalu $f \in X^*$ ne-negativno število. Da ima ta prirejenost vse lastnosti (5), ki jih zahtevamo od norme, se brez težav uvidi. Prostor X^* lahko torej naredimo za normiran prostor tako, da postavimo za vsak $f \in X^*$

$$\|f\| = \sup |f(x)|, \quad x \in X, \quad \|x\| = 1 \quad (8)$$

Adjungiran prostor normiranega prostora je potemtakem spet normiran prostor. Ugotovimo pa lahko še več: adjungiran prostor k normiranemu prostoru je v normi (8) Banachov prostor.

Za linearen funkcional $f(x)$ velja pri elementih $x \in X$ z normo $\|x\| = 1$ po (8) ocena

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad (9)$$

Toda ta ocena je veljavna za vse $x \in X$. Očitno je, da drži (9) za element nič. Naj bo zdaj element x takšen, da je $x \neq 0$ in $\|x\| \neq 1$. Potem ima element $x/\|x\|$ normo 1 in je

$$f(x/\|x\|) = f(x)/\|x\|$$

oziroma — spet upošteva (9) —

$$|f(x)| = |f(x/\|x\|)| \|x\| \leq \|f\| \|x\|$$

S tem je ocena (9) dokazana za vse $x \in X$.

Zdaj pa hitro pridemo do spoznanja, da je prostor X^* poln. Vzemimo kakšno Cauchyjevo zaporedje $\{f_n\}$ funkcionalov $f_n \in X^*$. Ko indeksa m, n neprenehoma rasteja $m, n \rightarrow \infty$, gre $\|f_m - f_n\| \rightarrow 0$ in po oceni (9) velja za vsak $x \in X$

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |(f_m - f_n)(x)| \leq \|f_m - f_n\| \|x\| \rightarrow 0$$

Torej je za vsak element $x \in X$ zaporedje števil $\{f_n(x)\}$ konvergentno in pri $n \rightarrow \infty$ obstaja

$$\lim f_n(x) = g(x) \quad (10)$$

$g(x)$ je seveda neki funkcional nad normiranim prostorom X . Pomembno pa je, da je funkcional $g(x)$ linearen. Njegova aditivnost, homogenost in zveznost slede neposredno od tod, ker imajo vsi funkcionali f_n te lastnosti. Ker so v X^* vsi

linearni funkcionali, definirani na normiranem prostoru X , je tudi $g \in X^*$ ali — X^* je Banachov prostor. Naj še omenimo, da tukaj prostor X^* zmeraj vsebuje netrivialne linearne funkcionale.

Obrnimo zdaj pozornost na neko dejstvo, ki smo ga doslej pustili v nemar. V dan linearen prostor X je v splošnem mogoče vpeljati normo na več načinov. Denimo, da imamo dve normi $\|\cdot\|_1$ in $\|\cdot\|_2$, ki naj se po vrednosti ne ujemata pri vseh elementih x . Dobimo dva normirana prostora X_1, X_2 , ki se v elementih skladata, ni pa treba, da sta identična, saj so zaradi različnih okolic konvergenčne razmere v vsakem od obeh prostorov lahko drugačne. V tej zvezi je zanimivo vprašanje, kdaj je možno že iz obeh norm sklepati na identičnost prostorov X_1 in X_2 . Odgovor je: prostora X_1 in X_2 sta identična — torej se ujemata razen v elementih tudi v topologiji — natančno takrat, kadar obstajata takšni pozitivni konstanti m in M , da je za vse elemente $x \in X$

$$m \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M \|x\|_2 \quad (11)$$

Normi, za kateri velja pogoj (11), imenujemo ekvivalentni. V množici trodimenzionalnih vektorjev $x = (x_1, x_2, x_3)$ naj bo npr. $\|x\|_1$ dolžina vektorja $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\|x\|_2$ pa naj bo vsota absolutnih komponent vektorja $\|x\|_2 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$. Ni se težko prepričati, da je v tem primeru za $M = 1$ in $m = \frac{1}{3}$ neenačbi (11) ustrezno. Ti dve normi sta torej ekvivalentni in med prostoroma X_1, X_2 ni bistvenih razločkov.

Dostikrat pa dve normi za vsak $x \in X$ namesto (11) izpolnjujeta samo šibkejši pogoj

$$\|x\|_1 \leq M \|x\|_2 \quad (12)$$

V tem primeru se lahko prostora X_1 in X_2 , kar se konvergence tiče, že zelo raznoliko obnašata. Vzemimo množico vseh funkcij $x(\tau)$, ki so na intervalu $I: 0 \leq \tau \leq 1$ zvezne in zvezno odvedljive. Ta množica je linearen prostor. Če predpišemo normi

$$\|x(\tau)\|_1 = \max |x(\tau)|$$

$$\|x(\tau)\|_2 = \max |x(\tau)| + |x'(1)|$$

pri čemer je vzeti maksimum glede na vse τ intervala I , je $\|x(\tau)\|_1 \leq \|x(\tau)\|_2$. Pogoj (12) je tukaj izpolnjen. Oglejmo si zaporedje funkcij $x_n = \tau^n/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, ki so vse iz naše množice. Iz ocen

$$\|x_n(\tau) - x_m(\tau)\|_1 = \max |\tau^n/n - \tau^m/m| = |1/n - 1/m|$$

$$\|x_n(\tau) - x_m(\tau)\|_2 = \max |\tau^n/n - \tau^m/m| + |1 - 1| = |1/n - 1/m|$$

vidimo, da je to zaporedje v obeh normah Cauchyjevo. V normi $\|\cdot\|_1$ konvergira proti funkciji $x(\tau) \equiv 0$. Njegova limita v normi $\|\cdot\|_2$ pa gotovo ni $x(\tau) \equiv 0$, saj je vedno $\|x_n(\tau)\|_2 = 1/n + 1 > 1$. Dejansko v drugi normi zaporedje sploh nima limite. Limitna funkcija $x(\tau)$ bi namreč morala za $n \rightarrow \infty$ ustrezati pogoju

$$\|x_n(\tau) - x(\tau)\|_2 = \max |\tau^n/n - x(\tau)| + |1 - x'(1)| \rightarrow 0.$$

To pa bo izpolnjeno le, če bo $x(\tau) = 0$ za vsak τ iz intervala I in poleg tega tega $x'(1) = 1$. Takšne funkcije, ki bi bila povsod na intervalu I enaka 0 in njen odvod pri $\tau = 1$ enak 1, pa ni.

Vsako zaporedje, ki konvergira v normi $\|\cdot\|_2$, konvergira po (12) tudi v normi $\|\cdot\|_1$. Sam pogoj (12) pa ne preprečuje, da ne bi dve zaporedji, ki v normi $\|\cdot\|_2$ konvergirata proti različnima elementoma, v normi $\|\cdot\|_1$ limitirali proti istemu elementu. Kaj takega pa se ne more zgoditi, če sta normi uglaseni. Normi $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, ustrezajoči pogoju (12), sta uglaseni, če vsako v obeh normah Cauchyjevo zaporedje konvergira proti elementu nič v obeh normah, kakor hitro konvergira proti elementu nič v eni od njiju.

Števno normiran prostor

Imejmo linearen prostor X . V njem naj bo danih števno mnogo nepadajočih in uglasenih norm

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \dots \leq \|x\|_p \leq \dots \quad (13)$$

Ko pravimo, da so norme (13) uglasene, hočemo reči, da so paroma uglasene. Vsaka teh norm ustvarja v prostoru X svojo topologijo. O tem smo že govorili. Poglejmo še, kako se da v prostor X vpeljati neka topologija s pomočjo vseh norm (13).

Če je x_0 kakšen fiksni element iz X , ε pozitivno število in p naravno število, sestavljajo okolico $U(x_0, \varepsilon, p)$ elementa x_0 vsi tisti elementi x iz X , ki ustrezajo neenačbi $\|x - x_0\|_p < \varepsilon$. Vse okolice v X dobimo, da x_0 , ε in p na vse možne načine spreminjamo.

Element $x_0 \in X$ je limita zaporedja $\{x_n\}$, če vsaka njegova okolica zajame vse razen kvečjemu končno mnogo členov tega zaporedja. Z upoštevanjem, kaj nam zdaj okolica pomeni, dobimo: element x_0 je limita zaporedja $\{x_n\}$, če moremo za vsako naravno število p in za vsak pozitiven ε najti takšen indeks n_0 , da je $\|x_0 - x_n\|_p < \varepsilon$ za vse indekse $n > n_0$.

Podobno govorimo, da je zaporedje $\{x_n\}$ v prostoru X Cauchyjevo, če za vsak naraven p velja $\|x_m - x_n\|_p \rightarrow 0$, ko gresta $m, n \rightarrow \infty$. Ako ima vsako Cauchyjevo zaporedje prostora X limito v prostoru X , pravimo, da je prostor X poln. Linearen prostor X , ki je poln glede na števno mnogo nepadajočih uglasenih norm, imenujemo števno normiran prostor.

Omenimo vsaj en zgled števno normiranega prostora. Naj pomeni $K(a)$ množico vseh na realni osi neskončnokrat odvedljivih funkcij, ki so zunaj intervala $|\tau| \leq a$ enake nič. Tako je, npr. funkcija

$$x_1(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{za } |\tau| \geq a \\ e^{1/(\tau^2 - a^2)} & \text{za } |\tau| < a \end{cases}$$

že v množici $K(a)$. Množica $K(a)$ je linearen prostor, saj pri seštevanju funkcij iz $K(a)$ in pri množenju teh funkcij s števili dobimo spet funkcije iz $K(a)$. Vzemimo takole zaporedje norm

$$\|x(\tau)\|_p = \max \{ |x(\tau)|, |x'(\tau)|, |x''(\tau)|, \dots, |x^{(p-1)}(\tau)| \}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Zaporedje teh norm je nepadajoče. Prav nič težko ni spoznati, da so te norme ugašene. Pokazati se pa tudi da, da je prostor $K(\alpha)$ poln.

Če so vse norme (13) med sabo enake, je števno normiran prostor očitno Banachov prostor. V splošnem pa je pojem števno normiranega prostora širši od pojma Banachovega prostora. Če je npr. v (13) neskončno neekvivalentnih norm, tak števno normiran prostor nikakor ni Banachov prostor. Zato seveda marsikake lastnosti Banachovega prostora ni več najti v števno normiranem prostoru. Naj eno takih lastnosti opišemo.

Vzemimo v Banachovem prostoru enotno kroglo, tj. množico M vseh tistih elementov, katerih norma ne presega 1. Za vsak element $x \in M$ je torej $\|x\| \leq 1$. Naj bo y kakšen tak element Banachovega prostora, da ni v M . Če pomnožimo vsak element množice M s številom $\|y\|$, bodo v tako dobljenem večkratniku množice M vsi elementi $\|y\|x$, $x \in M$, tedaj vsi elementi prostora z normo $\leq \|y\|$. Torej je tudi element y v tem večkratniku obsežen. V Banachovem prostoru je potemtakem mogoče prekriti vsak element s primernim večkratnikom enotne krogle. To pa ne gre več pri takem števno normiranem prostoru, ki se ne reducira na Banachov prostor. V njem namreč eksistira — dokaz opuščamo — element y , za katerega je $\|y\|_n > n$ pri vsakem $n = 1, 2, 3, \dots$. Očitno noben večkratnik enotne krogle števno normiranega prostora (sestavljajo jo vse elementi, za katere je $\|x\|_n \leq 1$ pri vseh $n = 1, 2, 3, \dots$) ne pokrije elementa y . Če je namreč m še tako veliko število, so v m -kratniku enotne krogle vsi elementi z normami $\|x\|_n \leq m$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Toda y v tej krogli ni vsebovan, saj je za vse $n > m$ tudi $\|y\|_n > m$. Ta »pomanjkljivost« števno normiranega prostora ima daljnosežne posledice.

Linearen funkcional $f(x)$ števno normiranega prostora X je aditivna, homogena in zvezna funkcija, ki upodablja števno normiran prostor v množico realnih števil. Definicija je prav ista kot v normiranem prostoru, zveznost je seveda razumeti v topologiji števno normiranega prostora. Iz $\{x_n\} \rightarrow x_0$ v prostoru X , sledi torej $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$ v množici števil.

Množica X^* vseh linearnih funkcionalov števno normiranega prostora X je linearen prostor. Seštevanje in množenje s števili je za funkcionalne pri tem predpisano z enačbama (3) in (4). Prostor X^* vsebuje zmeraj poleg trivialnega še druge linearne funkcionalne. Tega dejstva pa ne bomo dokazovali. Nadaljnja naloga bi bila, opremiti prostor X^* z okolicami in s tem odpreti vrata analizi v ta prostor. Tudi temu se bomo odrekli.

Za analizo so najbolj pomembni števno normirani prostori, katerih elementi so funkcije, definirane na kakem intervalu. Prostor $K(\alpha)$, ki smo ga zgoraj omenili, je že takšen. Vsak števno normiran prostor take vrste imenujemo osnovni prostor. Linearni funkcionalni, definirani na primernem osnovnem prostoru, so distribucije. Ker dobivajo distribucije tudi v uporabah vse večji pomen, števno normiran prostor in njemu adjungiran prostor nista samo teoretično zanimiva.

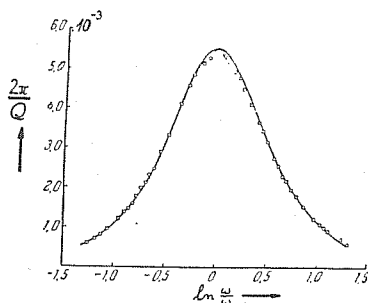
Literatura:

I. M. Gelfand i G. E. Šilov, Prostranstva osnovnyh i oboščennyh funkcij. Moskva 1958.

N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators I. New York 1958.

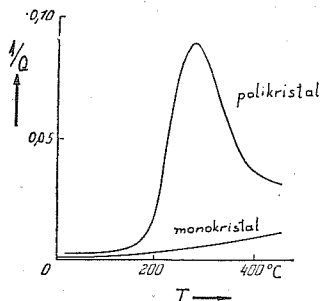
NOTRANJE TRENJE V KOVINAH

Znano je, da ni nobena snov idealno trdna (elastična) — niti steklo in nekatere kovine ne, čeprav se te snovi najbolj približujejo idealu. Napetost v snovi namreč ni odvisna samo od deformacije, ampak tudi od hitrosti, s katero deformacijo izvršimo. Natančne meritve so pokazale tudi, da ostane v snovi po vsaki deformaciji neka trajna deformacija. Posledice obeh opisanih pojavov je, da porabimo za deformacijo več dela kot ga dobimo nazaj, če se



Sl. 1. Odvisnost koeficienta notranjega trenja ($1/Q$) od frekvence v medenini. Izraziti vrh nastane zaradi izgub pri prevajanju toplote. Ta krivulja se precej dobro ujema s tisto, ki so jo teoretično napovedali.

snov povrne v nenapeto stanje. Obstoji pa še neki pojav, ki nam zapravlja delo v obliki toplote. Telo, ki ga stisnemo, se namreč segreje. Če počakamo dovolj dolgo, se temperatura telesa v glavnem s prevajanjem izenači s temperaturo okolice. Torej je nekaj mehanskega dela odteklo v obliki toplote.



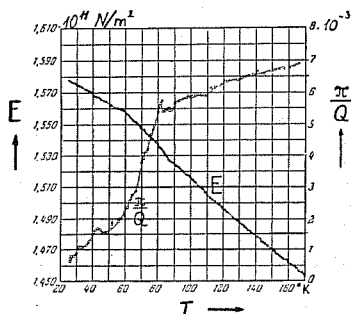
Sl. 2. Temperaturna odvisnost koeficienta notranjega trenja ($1/Q$) v aluminiju. Na tej krivulji se dobro vidi razlika med monokristalom in polikristalom.

Večkrat slišimo, da je absorpcija mehanske energije zaradi naštetih vzrokov posledica notranjega trenja. Koeficient notranjega trenja pa definirajo takole: $1/Q = \Delta W / 2 \pi W$. Tu je W energija, ki smo jo vložili v deformacijo, ΔW pa razlika med to energijo in med energijo, ki smo jo dobili nazaj, ko se je snov povrnila v nenapeto stanje. Navadno merijo koeficient notranjega trenja tako, da vzbujajo v snovi valovanje. V tem primeru moramo vzeti za dovedeno

in za absorbirano energijo tisto energijo, ki smo jo dovedli, oziroma tisto, ki se je absorbirala v snovi, v enem nihanem času.

Oglejmo si, kako je s koeficientom notranjega trenja pri ravnem valu, ki se širi po palici v smeri osi x ! Zaradi dušenja velja za odmik enačba: $u = u_0 e^{-x} \sin(\omega t - kx)$. Za povprečno gostoto energije, ki je sorazmerna kvadratu odmika, pa velja $\overline{w} = w_0 e^{-2\beta x}$. V plast s presekom S in debelino dx priteče v nihanem času energija $j(x) S/\nu$, pri čemer je j povprečna gostota energijskega toka — $j = \overline{w} \cdot c$. Iz plasti pa odteče energija $j(x + dx) S/\nu$. Absorbirano energijo v plasti dobimo iz razlike obeh zapisanih energij: $dW = -(\delta j/\delta x) dx \cdot S/\nu$. Odtod sledi za koeficient notranjega trenja $1/Q = \Delta W/2\pi W = 2\beta c/\omega$.

Koeficient $1/Q$ je pri ultrazvočnih frekvencah navadno precej manjši kot 10^{-2} , je torej majhna količina. Niti $1/Q$, niti β pa nista konstanti, ampak sta odvisna od pogojev, pri katerih ju merimo. Koeficient notranjega trenja $1/Q$



Sl. 3. Temperaturna odvisnost koeficienta notranjega trenja ($1/Q$) in prožnostnega modula (E) v monokristalu medenine, ki je bil pred poskusom deformiran za 3,25 %. Na abscisno os je nanešena absolutna temperatura, na desni je nanešen na ordinatni osi $1/Q$, na levi pa je prožnostni modul (E).

navadno raste s frekvenco. Močno je odvisen tudi od temperature, pri kristalih pa še od gostote napak v kristalni mreži. Če je amplituda valovanja velika, postane koeficient notranjega trenja odvisen še od amplitude.

Nastopi vprašanje, kako merijo notranje trenje. Na tem mestu si bomo ogledali nekaj metod za merjenje koeficienta notranjega trenja v kovinah. Te metode lahko razdelimo v glavnem na naslednje tri skupine: metode s torzijskim nihalom, metode resonančnih nihanj in metode ultrazvočnih impulzov.

Metoda s torzijskim nihalom. Na žico iz kovine, ki jo hočejo preiskati, pritrdijo vztrajnik in tako dobljeno torzijsko nihalo zanihajo v vakuumu. Zaradi notranjega trenja v torzijski žici je nihanje dušeno. Za sučni kot takega nihala velja enačba $\varphi = \varphi_0 e^{-\gamma t} \sin \omega t$. Za koeficient notranjega trenja pa dobimo $1/Q = 2\gamma/\omega = \Delta/\pi$, pri čemer je Δ logaritemski dekrement $\Delta = \ln[\varphi(t = 1/\gamma)/\varphi(t = 2/\gamma)]$.

Tako torzijsko nihalo ima navadno lastno frekvenco reda velikosti 1 s^{-1} . Zato se uporablja omenjena metoda za merjenje koeficienta notranjega trenja pri nizkih frekvencah. Pri teh frekvencah je v kovinah notranje trenje zelo majhno in je zato majhno tudi dušenje. Pri kovinah z zelo majhnim notranjim trenjem se zato lahko primeri, da sonihanje pritrdišča, posebno pa netogost vztrajnika precej popačita rezultate.

Vztrajnik torzijskega nihala je navadno železen, tako da ga lahko vzbudijo z izmeničnim magnetnim poljem; na primer kar tako, da pod njim sučno zanihajo paličast magnet.

Metode resonančnih nihanj. Pri tej metodi merijo lahko na dva načina. Lahko vzbudijo v vzorcu v obliki palice stoječe valovanje (lastno nihanje) in merijo dušenje s časom, lahko pa vsiljujejo vzorcu nihanje in premerijo resonančno krivuljo. V prvem primeru izračunamo notranje trenje iz logaritemskega dekrementa dušenja pri lastnem nihanju, v drugem pa iz širine resonančne krivulje.

Ker je koeficient notranjega trenja zelo majhno število, velja za palico iz trdne snovi naslednja valovna enačba:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

(Tej enačbi ustreza tudi prej omenjena rešitev za ravni val.) Enačba da za osnovno lastno nihanje rešitev $u(x, t) = u_0 e^{-\beta c t} \cos(\pi x/l) \sin(\pi c t/l)$. Logaritemski dekrement pri tem lastnem nihanju je tedaj: $\Delta = \ln[u(x, t = 1/\nu) u(x, t = 2/\nu)] = 2\pi\beta c/\omega$. Če ta rezultat primerjamo z rezultatom, ki smo ga dobili za ravni val pri dušenju, ugotovimo, da je koeficient notranjega trenja kar sorazmeren z logaritemskim dekrementom: $1/Q = \Delta/\pi$.

V primeru pa, da hočemo izračunati koeficient notranjega trenja iz širine resonančne krivulje, moramo rešiti zgornjo diferencialno enačbo za vsiljeno nihanje. Če vzbujamo palico na mestu $x = 0$, dobimo za amplitudo namestu $x = l$ naslednji izraz:

$$|u| = u_0 \delta [\delta^2 + (1 - \delta^2) \sin^2 kl]^{1/2} / [1 - (1 - \delta^2) \sin^2 kl], \quad \delta = \beta l, \quad k = \omega/c,$$

ki je hkrati enačba za resonančno krivuljo.

Iz tega izraza lahko izračunamo koeficient $1/Q$ in dobimo zanj vrednost $1/Q = (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$. Tu je ω_0 krožna frekvenca pri resonanci, ω_1 in ω_2 pa manjša in večja krožna frekvenca, pri katerih pade amplituda nihanja na $u_{\text{maks}}/\sqrt{2} = u_0/\delta\sqrt{2}$.

Metode resonančnih nihanj uporabljajo za merjenje koeficienta notranjega trenja pri ultrazvočnih frekvencah od nekaj 10 kHz pa do približno 1 MHz.

Prvi način — merjenje logaritemskega dekrementa — je ugoden predvsem za merjenje notranjega trenja v kovinah, ki imajo zelo majhen koeficient notranjega trenja. Meritev izvedejo takole: iz kovine, ki jo hočejo preiskati naredo palico. To palico potem na sredini vpnejo in ji vsiljujejo nihanje z osnovno lastno frekvenco. Ko je amplituda nihanja dovolj velika, prekinejo vzbujanje in beležijo časovni potek amplitude. Iz časovnega poteka amplitude lahko po opisani poti izračunajo koeficient notranjega trenja.

Oglejmo si nekaj načinov vzbujanja takih palic. V nekaterih primerih vzbujajo tako, da približajo palici kovinsko elektrodo, pri čemer tvorita osnovna ploskev palice in elektrode skupaj ploščati kondenzator. Na ta kondenzator priključijo izmenično napetost. Sila, ki se pojavi med obema ploščama, to je med koncem palice in med elektrodo, je dovolj velika, da vzbudi palico k nihanju. Amplitudo nihanja merijo pa tako, da merijo spremembo kapacitete kondenzatorja, ki ga tvori konec palice z dodatno elektrodo.

Včasih pa vzbujajo palico tako, da prilepijo na konec palice tanko fero-magnetno ploščico (npr. iz mehkega železa), ki jo zanihajo z izmeničnim magnet-

nim poljem. Amplitude odmika ugotovijo tako, da merijo časovno spremembo induktivnosti dodatne tuljavnice zaradi primikanja in odmikanja železne ploščice.

Še en način vzbujanja je: na konec palice prilepijo piezoelektrični kristal in ga vzbujajo z izmeničnim električnim poljem. Ker je kristal prilepljen na palico, nihata skupaj kot eno telo. Odmike določijo pri tem z merjenjem piezoelektrične napetosti na kristalu.

Vse navedene metode so precej ugodne za merjenje notranjega trenja, ker je merjenec razmeroma dobro ločen od okolice. Ves sistem dajo v vakuum, da se energija ne bi prenašala na zrak. Palice pritrdijo vedno v vozlih stoječega valovanja, da se energija ne more prenašati iz palice na okolico; vzbujanje in merjenje je izvedeno tako, da merjenec praktično nima stika z okolico razen preko tanke žice.

Drugi način merjenja, to je merjenje širine resonančnega vrha, je ugodnejši, če moramo izmeriti notranje trenje v snovi, ki nima tako majhnega koeficienta notranjega trenja, čeprav je slej ko prej $1/Q$ dosti manjši od 1. Način vzbujanja je tu piezoelektrični; kremenov kristal prilepijo na trdno podlago, na drugi konec kristala pa prilepijo palico iz snovi, ki jo preiskujejo. Amplitudo na nasprotnem koncu palice se lahko meri preko kapacitete, ki jo tvori palica z dodatno elektrodo.

V tem primeru ni treba tako paziti, da je preizkušanec zelo dobro izoliran od okolice, važno je samo to, da ne nastopi v bližini resonance v palici še kakšna resonančna absorpcija v okolici. To se da doseči s primernimi dimenzijami podlage. Slaba stran te metode pa je, da se rade vzbudijo v nihanje še višje harmonične frekvence, če je notranje trenje premajhno. V takem primeru je meritev brez vrednosti, ker pogoji, pri katerih smo merili, niso natančno definirani.

Metoda ultrazvočnih impulzov. Do sedaj naštetе metode niso uporabne za merjenje notranjega trenja pri zelo visokih frekvencah. Zato postopajo pri merjenju pri frekvencah med 1 MHz in 50 MHz drugače. Vzorec v obliki palice preko vpetega kristala zanihajo za zelo kratek čas in merijo amplitudo valovanja, ki se razširi do prostega konca palice, ali pa amplitudo valovanja, ki se odbije na prostem koncu in se vrne do vpetega konca. Koeficient notranjega trenja tu lahko izračunajo, ker se razširja v palici kar ravni val in velja $u = u_0 e^{-\beta x} \sin(\omega t - kx)$. Vsiljevanje in merjenje amplitude izvedejo tudi tu s piezoelektričnimi kristali.

Literatura:

F. Cvelbar: Elastičnost — plastičnost — viskoznost. Obz. mat. fiz. 6, 11 (1957).

D. Niblett, Dž. Wilks: Vnutrennee trenie v metallah — prevod. Usp. fiz. nauk 80, 125 (1963).

Andrej Čadež

RENTGENSKA SVETLOBA IZ VESOLJA

Zemeljsko ozračje prepušča samo ultravijolično, vidno in infrardečo svetlobo ter radijske valove, od vsega elektromagnetnega spektra torej samo sorazmerno ozek pas med valovnima dolžinama 3000 Å in 16μ ter nekoliko širši pas med valovnima dolžinama 25 cm in 20 m.¹ Dokler so bile opazovalne in merilne naprave vezane na dno zračnega morja, so lahko opazovali le ultravijolično, vidno in infrardečo svetlobo ter radijske valove, ki so prihajali iz

vesolja. Šele ko se je posrečilo spraviti merilne naprave nad ozračje, se je ponudila možnost za opazovanje pri valovnih dolžinah, ki jih ozračje ne prepušča. Zadostuje, da ponese raketa naprave za kratek čas nad višino 80 km, nad katero je le še stotisoči del mase zraka. Seveda so taka merjenja težavna in zahtevajo skrajnje izpopolnjene naprave.

Ameriški fiziki so se v povezavi z raketnim izstreliščem White Sands v New Mexicu namenili preučiti rentgensko svetlobo z Lune* in ugotoviti morebitne druge izvire rentgenske svetlobe. V ta namen so posebej opremili tri rakete tipe Aerobee in jih izstrelili po vrsti junija 1962, oktobra 1962 in junija 1963.^{2, 3} Vse rakete so dosegle višino okoli 230 km in so bile okoli 6 minut nad višino 80 km. Izstrelili so jih v smeri, ki se je samo za nekaj stopinj razlikovala od navpičnice. Med poletom so se rakete dvakrat na sekundo zavrtle okoli svoje vzdolžne osi.

Vsaka izmed raket je nosila po tri Geigerjeve števec, ki so bili občutljivi za mehke rentgenske žarke z valovno dolžino od 2 do 8 Å. Števci so imeli so razmerno velika okenca iz tanke sljude (10 cm^2 ali 20 cm^2). Vsak Geigerjev števec je tičal v posebnem plastičnem scintilacijskem števcu, ki ni bil občutljiv za rentgenske žarke. Scintilacijski števec je imel obliko lonca in je bil v anti-koincidenčnem stiku z Geigerjevim števcem, s čimer se je zmanjšalo število registriranih nabitih delcev.

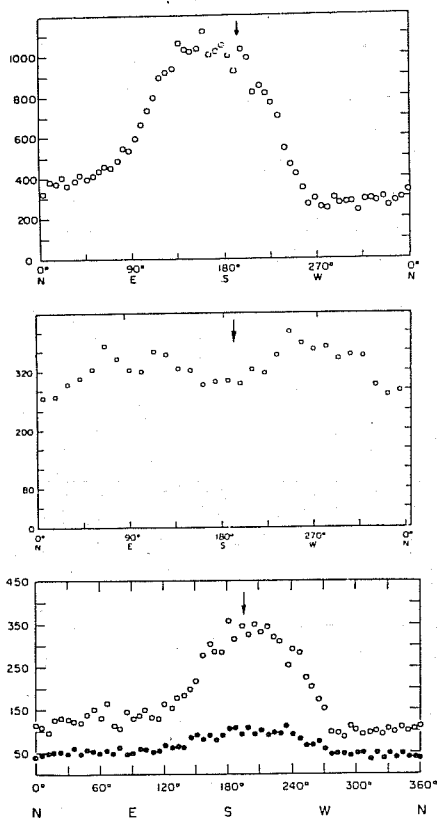
Pravokotnica na okence števca je tvorila oster kot z vzdolžno osjo rakete. Medtem ko se je raketa enkrat zavrtela okoli te osi, je števec ravno otipal vse strani neba. Eksperimentatorje je namreč predvsem zanimalo, s katere strani neba prihajajo rentgenski žarki. Reči hočemo, da jih je zanimala porazdelitev rentgenskih žarkov po kotu med pravokotnico na okence števca in med neko izbrano smerjo. Rakete so izstrelili ponoči, da bi se ognili rentgenskim žarkom s Sonca. Izbrali pa so noči s polno luno, tako da se je posebna optična naprava v raketi lahko orientirala po Luni. Vsako zavrtitev rakete okoli vzdolžne osi so razdelili na 60 enakih intervalov po 6° , začenši od smeri, ko je bila svetloba z Lune v optični napravi najmočnejša. Vsak števec je imel elektronsko napravo, ki je razvrščala sunke po teh kotnih intervalih in jih beležila ločeno za vsak interval. Tako je nastala porazdelitev sunkov po posameznih kotnih intervalih in od tod porazdelitev števila rentgenskih žarkov po smereh.

Pri prvi raketi sta pravilno delovala dva števec, prvi s tanjšim, drugi z debelejšim sljudnim okencem. Pri drugi in tretji raketi je deloval samo po en števec. Porazdelitve sunkov po smereh, ki so jih dali števci z vseh treh raket, so na sliki. Pri tem so proti vsakokratnemu položaju Lune izmerjene kote pre-računali v azimut, merjen od severa proti vzhodu. Privzeli so, da so števci zares registrirali v glavnem rentgenske žarke. Iz dobljenih podatkov so se najprej lahko prepričali, da je rentgenskih žarkov dosti več, kot so jih pričakovali in ne prihajajo z Lune, da pa jih je iz določenih smerih več kot iz drugih. Števec s tanjšim okencem je registriral dosti več sunkov kot števec z debelejšim. To je pomenilo, da so bili rentgenski žarki pretežno mehki. Ti žarki so imeli izrazit maksimum pri azimutu 195° .

Za nadaljnji račun so predpostavili, da je nekje pri navedenem azimutu točkast monokromatičen izvir rentgenskih žarkov. Iz dobljenih porazdelitev, geometrijskih elementov poleta in absorpcijskih koeficientov za zrak in sljudo

* Na Lunini površini se sipa rentgenska svetloba, ki jo oddaja Sonce. Račun pokaže, da prispeva to na vrhu ozračja $0,1$ do 1 foton/ cm^2 pri valovni dolžini od 2 do 8 Å.

so ocenili valovno dolžino rentgenske svetlobe in višino izvira nad obzorjem. Z omenjenima nekoliko samovoljnima predpostavkama so dobili za efektivno valovno dolžino smiselno vrednost $3 \text{ \AA}$, za višino izvira pa bolj negotovo vrednost med 10° in 20° . Ugotovljeni položaj izvira (azimut 195° , višina nad obzorjem 10°) je približno sovpadal s trenutnim položajem središča Galaksije. Porazdelitev števila rentgenskih žarkov po smereh je poleg omenjenega izrazitega



Porazdelitve rentgenskih žarkov po azimutu, ki so jih dali Geigerjevi števeci s prve (spodaj), z druge (v sredini) in s tretje (na vrhu) rakete. Na ordinatno os je nanešeno število registriranih sunkov na en kotni interval ($dn/d\theta$, $d\theta = 6^\circ$), na abscisno os pa azimut. Puščica kaže azimut smeri zemeljskega magnetnega polja. Medtem ko je bil glavni maksimum pri prvem poskusu simetričen na to smer (kar ni izključilo možnosti, da gre za nabite delce, ki se gibljejo pod vplivom zemeljskega magnetnega polja), je pri zadnjem poskusu maksimum jasno nesimetričen na to smer (to se pravi, da ne gre za nabite delce). Pike na spodnji sliki ustrezajo rezultatom, ki jih je dal Geigerjev števec z debelejšim okencem, krožci pa rezultatom, ki jih je dal števec s tanjšim okencem.

maksimuma pokazala še dva manj izrazita, vendar položaja ustreznih izvirov niso mogli z gotovostjo določiti. Po vsej verjetnosti pa ležita nekje v ozvezdju Kasiopeje in Laboda.

Drugi poskus so izvedli ob času, ko je bilo središče Galaksije pod obzorjem. Po pričakovanju v porazdelitvi rentgenskih žarkov po straneh neba zdaj ni bilo izrazitega maksimuma, ampak sta se pokazala samo oba manj izrazita.

Rezultati, ki so jih dobili z obdelavo podatkov tretjega poskusa, so se ujemali s prejšnjimi. S tem se je utrdilo prepričanje o obstoju ostro omejenega in izdatnega izvira rentgenske svetlobe v bližini središča Galaksije in dveh manj izrazitih izvirov z manj natančno določenima položajema.

Naposled so odstranili vsak dvom o oddaljenosti izvirov. Najprej se njihov položaj ni ujemal s položajem Lune ali kakega planeta, na katerem bi se lahko sipali rentgenski žarki s Sonca. Nadalje je ena izmed raket prepotovala v vodoravni smeri razdaljo okoli 75 km proč od izvira, ne da bi se to poznalo pri pogostosti štetja. Od tod so sklepali, da izvir ne more biti niže kot 1000 km. S tem je odpadla možnost, da bi izvirali rentgenski žarki od severnega sija, kajti ta nastane v višinah pod 200 km. Vse to in še glavno dejstvo, da je položaj izvirov stalen glede na Galaksijo, priča, da prihajajo rentgenski žarki iz globin vesolja.

Slednjič je bilo treba opravičiti še začetno predpostavko, da so registrirali števci v glavnem samo rentgenske žarke. Elektroni bi morali namreč imeti energijo večjo kot 80 keV in protoni energijo večjo kot 2 MeV, da bi mogli preiti skozi okence. Vendar bi, četudi bi bilo dovolj nabitih delcev z navedeno energijo, le-ti ne mogli dati tako ostrega maksimuma. Upoštevati je treba, da zemeljsko magnetno polje ukrivi tire nabitih delcev in da tudi absorpcija v okencu vpliva na razširitev maksimuma. Po drugi strani pa so z dvema scintilacijskima števčema, ki ju je tudi nosila ena izmed raket, dokazali, da je nabitih delcev tako malo, da celo pri slabi antikoincidenčni zaščiti ne bi mogli bistveno vplivati na rezultate. Možno je, da so zaradi štetja nabitih delcev in rentgenskih žarkov iz ozračja merski rezultati obremenjeni z nekajodstotnimi napakami. Vendar to ne vpliva na končno ugotovitev o vesoljskih izvirih rentgenske svetlobe. Za močnejši izvir so celo lahko določili, da daje na vrhu ozračja 21 do 28 fotonov/scm² z valovno dolžino okoli 3 Å. Za oba preostala izvira pa ni bilo mogoče izračunati teh podatkov.

Vsiljuje se zanimivo vprašanje, kako nastanejo opazovani rentgenski žarki. Mehki rentgenski žarki ne morejo izvirati od temperaturnega sevanja, saj bi to zahtevalo temperature nekaj milijonov stopinj. Menili so, da bi rentgenski žarki lahko nastali pri gibanju elektronov z zelo veliko energijo v prečnem magnetnem polju v medzvezdnem prostoru. Zaradi radialnega pospeška pride namreč pri tem do zavornega sevanja, tako imenovanega sinkrotronskega sevanja. Vendar bi morala biti v tem primeru gostota elektronov nenavadno velika. Ena izmed nadaljnjih možnosti za nastanek rentgenskih žarkov je sipanje fotonov vidne svetlobe na elektronih z zelo veliko energijo. Pri tem se energija fotona zveča na račun energije elektrona, ravno obratno kot pri navadnem Comptonovem pojavu.⁴ Predlagajo še druge možnosti za nastanek opazovanih rentgenskih žarkov, vendar nobena od njih še ni dodobra utemeljena. Tudi dejstvo, da so izviri rentgenske svetlobe menda v bližini znanih radijskih izvirov, še ni pripomoglo do rešitve problema.

J. Strnad

Literatura:

- ¹ S. Breskvar: Radioastronomija. Obz. mat. fiz. 4, 105 (1956).
- ² R. Giacconi, H. Gursky, F. R. Paolini, B. B. Rossi: Evidence for X Rays from Sources outside the Solar System. Phys. Rev. Letters 9, 439 (1962).
- ³ H. Gursky, R. Giacconi, F. R. Paolini, B. B. Rossi: Further Evidence for the Existence of Galactic X Rays. Phys. Rev. Letters 11, 530 (1963).
- ⁴ J. E. Felten, P. Morisson: Recoil Photons from Scattering of Starlight by Relativistic Electrons. Phys. Rev. Letters 10, 453 (1963).

V zadnjem času se je število mezonov in barionov tako povečalo, da jih je težko obdržati v spominu. Pregled nad novo odkritimi delci je še otežkočalo različno označevanje. Zdaj so G. F. Chew, M. Gell-Mann in A. H. Rosenfeld predlagali nov način poimenovanja za mezone in barione. Novo poimenovanje seveda ne bo ne zvečalo ne zmanjšalo znanja o delcih, le knjigovodstvo bo olajšalo in ustavilo poplavo novih črk. Čeprav je v bistvu torej čisto vseeno, kateri simbol pripišemo kakemu delcu, bomo predstavili novo poimenovanje, ker je preprosto in omogoča boljši pregled. Lahko si ga je zapomniti, ker gradi na poimenovanju, ki smo ga v naši reviji uporabljali od vsega začetka.

Po seznamu osnovnih delcev ni težko ugotoviti, da se število lahkih delcev (leptonov: elektronski in mionski nevtrino, elektron in mion, skupaj z antidelci 8 članov) že dalj časa ni spremenilo, če izvajamo potrebo po razločevanju elektronskega in mionskega nevtrina, ki se je pokazala pred nekaj leti. Močno je naraslo le število mezonov in barionov. Zato prevladuje mnenje, da mezoni in barioni niso elementarni v prvotnem pomenu besede, saj jih tudi pri nekaterih računih lahko obravnavajo kot sestavljene tvorbe. Zaradi tega zanje vse bolj opuščajo pridevek elementarni, nadomeščajo ga s pridevkom fundamentalni ali pa se temu sploh izognejo. Najbrž po naše ni narobe govoriti »osnovni delci« in se pri tem zavedati izraženih pomislekov. To in pa unitarna simetrija,* ki je vnesla nekaj reda med mezone in barione, je razlog, da je novo poimenovanje omejeno na mezone in barione.

Navedimo vse količine (kvantna števila), s katerimi označujemo mezone in barione! To so: naboj, spin, (notranja) parnost, barionsko število, izospin in hipernaboj. Omenimo še količino G , ki je $+1$ ali -1 in jo navajajo samo za mezone s hipernabojem nič. Vse našete količine se ohranjajo pri močni interakciji, ki je značilna za mezone in barione. Nadaljnja važna količina je mirovna masa delcev m ali ustrezna mirovna energija mc^2 . Navedenih količin ni treba posebej pojasnjevati, saj so se bralci »Obzornika« o njih lahko poučili v prejšnjih člankih.

Z vrednostjo teh količin (ali samo nekaterih od njih) je vsak mezon in barion popolnoma določen. Seveda pa bi bilo zamudno in nepregledno zmeraj navajati vse hkrati. Zato posamezne kombinacije barionskega števila (B), hipernaboja (Y) in izospina (I) okrajšajo s črko grške abecede. Za barione ($B = 1$) uporabijo veliko, za mezone ($B = 0$) pa majhno črko. Pri barionih je za zdaj znanih samo 6 kombinacij: Ω ($Y = -2, I = 0$), Ξ ($Y = -1, I = 1/2$), Σ ($Y = 0, I = 1$), Λ ($Y = 0, I = 0$), N ($Y = 0, I = 1/2$), Δ ($Y = 1, I = 3/2$), pri mezonih pa samo 3: η ($Y = 0, I = 0$), π ($Y = 0, I = 1$), κ ($Y = 1, I = 1/2$). Antidelce, pri katerih imata B in Y nasprotni znak kot pri delcih, označijo s črtico nad simbolom npr. $\bar{\kappa}$ ($Y = -1, I = 1/2$).

Našeti simboli še ne zadostujejo za opredelitev delcev. Treba je navesti še maso delca, spin in parnost. To store tako, da v oklepaju za simbolom navedejo mirovno energijo v MeV in spin z eksponentom $+$ za sodo in eksponentom $-$ za liho parnost. Seznam vsebuje znane mezone in barione in tiste, ki jih napoveduje unitarna simetrija pri mirovnih energijah pod 2000 MeV (z vprašajem) z novimi in starimi oznakami.

* Novi osnovni delci, Obz. mat. fiz. 10, 22 (1963); Pomen raziskovanja osnovnih delcev za razvoj moderne fizike, Obz. mat. fiz. 10, 116 (1963); Mezoni in barioni, Obz. mat. fiz. 10, 179 (1963); Odkritje delca Ω^- , Obz. mat. fiz. 11, 26 (1964).

Barioni		Mezoni	
Nova oznaka	Stara oznaka	Nova oznaka	Stara oznaka
Ω (1676, 3/2 ⁺)	Ω	κ (888, 1 ⁻)	K^{*+}, K^{0*}
ε (1970,) ?		κ (496, 0 ⁻)	K^+, K^0
ε (1600,) ?		π (750, 1 ⁻)	ϱ
ε (1530, 3/2 ⁺)	ε^*	π (137, 0 ⁻)	π
ε (1318, 1/2)	ε	η (1250, 2 ⁺)	f
Σ (1890,) ?		η (1020, 1 ⁻)	Φ
Σ (1660, 3/2)	Σ^{**}	η (782, 1 ⁻)	ω
Σ (1385, 3/2 ⁺)	Σ^*	η (548, 0 ⁻)	η
Σ (1193, 1/2) ⁺	Σ		
Λ (1815, 5/2)	Λ^{***}		
Λ (1520, 3/2 ⁻)	Λ^{**}		
Λ (1405,)	Λ^*		
Λ (1115, 1/2 ⁺)	Λ		
N (1688, 5/2)	N^{**}		
N (1512, 3/2)	N^*		
N (939, 1/2 ⁺)	N (nukleon)		
Δ (1920, 7/2)	Δ^{**}		
Δ (1238, 3/2 ⁺)	Δ^*		

Mezoni η (1020, 1⁻) in η (782, 1⁻) se ujemata v vsem razen v masi, prvi je unitarnospinski singlet, drugi pa član unitarnospinskega okteta. Zato ju je težko razločevati, pa ne samo to: prvi dobi v določeni meri lastnosti drugega in obratno. Član unitarnospinskega okteta bi moral imeti mirovno energijo 925 MeV. Pač pa je $\frac{1}{2}(728 \text{ MeV})^2 + \frac{1}{2}(1020 \text{ MeV})^2 = (910 \text{ MeV})^2$, kar je blizu $(925 \text{ MeV})^2$.

G. F. Chew, M. Gell-Mann, A. H. Rosenfeld: Strongly Interacting Particles, Scientific American, 210, 74 (No. 2, 1964).

J. Strnad

H⁴ — ŠE EN IZOTOP VODIKA

V »Obzorniku« smo brali o novem izotopu vodika H⁵.^{*} Že nekaj časa pred odkritjem H³ pa so italijanski fiziki poročali o odkritju izotopa vodika H⁴. Odkritje H⁴ je bilo manj presenetljivo, kajti H⁴ v nasprotju s H⁵ ni obstojen proti oddaji nevtrona.

Za zdaj so znani torej tile izotopi vodika:

- navadni vodik H¹ je obstojen, v naravnem vodiku ga je 99,985 %,
- težki vodik (devterij) H² je obstojen, v naravnem vodiku ga je 0,015 %,
- tritij H³ razpade z oddajo delca β^- z razpadnim časom okoli 18 let,
- izotop H⁴ razpade z oddajo nevtrona, razpadni čas ni natančno znan, za grobo oceno lahko navedemo okoli 10^{-20} s,
- izotop H⁵ razpade z oddajo delca β^- z razpadnim časom okoli 0,16 s.^{**}

Od vseh teh je H⁴ zdaleč najneobstojejši. Zato je zanimivo, kako so ugotovili njegov nastanek in razpad.

Poskuse so izvedli s sinkrociklotronom za elektrone z energijo do 1 GeV v Frascatiju. V curek rentgenskih žarkov, ki so nastali po zaviranju elektronov v tarči, so postavili difuzijsko Wilsonovo celico s helijem pod tlakom 9 kp/cm².

* A. Miklavc: Nov izotop vodika — H⁵? Obz. mat. fiz. 10, 171 (1963).

** Obstoj vodikovega izotopa H⁵ z razpadnim časom okoli 0,2 s je po novejših merjenjih zelo dvomljiv.

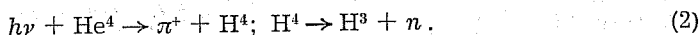
Taka celica je omogočila neprekinjeno opazovanje in ni bilo treba plina v njej pred vsakim poskusom ponovno razpenjati. Celica je stala v močnem magnetnem polju, zaradi česar so lahko ugotovili naboj delcev.

V tej celici so stereoskopsko fotografirali 15 tisoč reakcij fotonov z jedri helija. Iz množice fotografiranih dogodkov so najprej odbrali 590 dogodkov, pri katerih sta bili opazni po dve izhajajoči sledi pozitivno nabitih delcev. V ožjo presojno pa so sprejeli le 96 dogodkov, pri katerih je bila prva izmed sledi zelo šibka, druga pa zelo izrazita.

S tem so dobili vse dogodke, za katere so menili, da ustrezajo reakciji



Šibka sled je namreč pripadala pozitivnemu pionu, izrazita sled tritonu (jedru tritija), medtem ko nevtron ni zapustil vidne sledi. Že vnaprej so sumili, da vse opazovane reakcije niso potekle naravnost, kot kaže enačba (1), ampak da je včasih nastalo jedro H^4 . Vendar je jedro H^4 tako hitro razpadlo dalje, da njegove sledi sploh ni bilo možno opaziti:



Da bi se prepričali, ali je sum upravičen, so premerili za vsak dogodek posebej kote med sledmi. Poleg tega so določili velikosti gibalnih količin piona in tritona za tiste dogodke, pri katerih je to bilo izvedljivo. Postopek, ki so ga uporabili pri računanju s temi podatki, spominja od daleč na postopek pri ugotavljanju izredno kratkoživih »osnovnih« delcev — resonanc. Če namreč zares nastane jedro H^4 , mora biti skupna gibalna količina vseh delcev, ki nastanejo pri njegovem razpadu, v težiščnem sistemu, v katerem je jedro mirovalo, enaka nič. Ta omejitve pa ne velja, če ne pride do nastanka jedra H^4 . V opisanem primeru omenjenega postopka niso mogli uporabiti neposredno. Ker je spektrum zavnih fotonov zvezen, namreč niso mogli določiti niti energije fotona, ki je sprožil reakcijo; vrhu tega pa nevtron ni zapustil vidne sledi in zato niso mogli določiti niti gibalne količine nevtrona.

Preučevanje izmerjenih kotov pa je navzlic nepopolnim podatkom pokazalo, da dela dogodkov ne morejo pojasniti drugače kot z nastankom jedra H^4 . Ocenili so tudi, da je približno polovica vseh opazovanih dogodkov potekla z nastankom jedra H^4 (2), druga polovica pa naravnost (1). Ugotovili so še, da je mirovna energija H^4 za 3,5 do 7 MeV večja od skupne mirovne energije tritona in nevtrona.

O stanju, v katerem nastane jedro H^4 , ne vedo nič podrobnega. Verjetno gre za stanje, ki je sorodno z vzbujenim stanjem He^4 z energijo 24 MeV. V vrsto obeh navedenih stanj (pri H^4 z dvema presežnima nevtronoma in pri He^4 z enakima številoma protonov in nevtronov) spada še tretje sorodno stanje, v katerem pričakujejo doslej neznani izotop Li^4 (z dvema presežnima protonoma). Nekaj upanja je bilo, da bodo Li^4 opazili pri istem poskusu, kjer naj bi nastal takole $h\nu + \text{He}^4 \rightarrow \pi^- + \text{Li}^4$. Vendar Li^4 niso mogli ugotoviti, zaradi česar so sklepali, da je nastanek Li^4 dosti manj verjeten kot nastanek H^4 .

J. Strnad

Literatura:

P. E. Argan, G. Bendiscioli, A. Piazzoli, V. Bisi, M. I. Ferrero, G. Piragino: Photo-production of π^+ Mesons in He^4 . Phys. Rev. Letters **9**, 405 (1962).

POUK MODERNE MATEMATIKE V REPUBLIKI GVINEJI

Republika Gvineja je prejšnja francoska kolonija v Zahodni Afriki, ki se je osvobodila 1958. leta. Po osvoboditvi je 3 milijonski narod imel 400.000 šolo-obveznih otrok, šolo pa jih je obiskovalo le 40.000. Na univerzah v tujini, predvsem v Franciji in v Dakru je bilo 80 gvinejskih študentov, v srednjih šolah pa okoli 500, dočim se jih je šolalo v domačih srednjih šolah 850. Ker je večina francoskih strokovnjakov iz vseh področij — tako tudi iz prosvete — ob osvoboditvi odšla iz Gvineje, se je ta mlada republika znašla pred težkimi in po mnenju mnogih, nerešljivimi nalogami. Kako zvečati število šolarjev, ko pa je domačih učiteljev komaj nekaj desetini?

In vendar se je število učencev v dveh letih po osvoboditvi podvojilo. Pouk v osnovnih šolah so prevzeli skoraj izključno domači učitelji, ki so sami dovršili komaj 8. ali 9. razred. Na poziv gvinejske vlade so se vrnil študentje iz Francije in Dakra, čeprav svojega študija niso dokončali, in začeli poučevati na srednjih šolah. Ker jih je bilo premalo, so prijateljske evropske države poslale svoje strokovnjake v pomoč. Iz naše države je v jeseni leta 1960 odšla tja prva skupina profesorjev, da je omogočila pouk še v nekaterih srednjih šolah, predvsem v notranjosti dežele.

Ministrstvo za prosveto v Conatryu, glavnem mestu Gvineje, je stari učni načrt, ki ga je podedovalo od francoskih kolonizatorjev, reformiralo.

Pouk zgodovine in književnosti so temeljito spremenili, tako da je prišla v njem do izraza črnsko-afriška kultura, ki je bila do tedaj zapostavljena.

Uvedli so pouk angleščine in arabščine, da bi se afriški narodi laže med seboj sporazumevali. Učni jezik je ostal francoski.

Da bi dobili čimprej domač tehnični kader, potreben za kulturni in ekonomski razvoj države, so racionalizirali pouk s tem, da so uvedli namesto dotdanjega 12-letnega, samo 11-letno osnovno in srednje šolanje.

Modernizacija učnega načrta pa je prišla do izraza predvsem v pouku matematike. Profesorji matematike smo bili presenečeni, ko nam je spomladi leta 1961 ministrstvo za prosveto poslalo novi učni načrt, po katerem naj poteka odslej pouk matematike v srednjih šolah. Spremembo v njem je ministrstvo podprlo z dopisom, ki ga navajam v skrajšani obliki.

Moderna matematika v nižjih razredih

Pouk matematike najbolj vpliva na bodoči razvoj znanosti vsakega naroda, torej na njegovo najbližjo bodočnost, ker omogoča ustvariti širok naraščaj inženirjev in znanstvenikov, ki jih primanjkuje po vsem svetu.

Vsak dan slišimo, da se velik del mladine ne zanima za eksaktne vede, ker mnogi od njih že v 7. ali 8. razredu, to je prav v letih, ko se odločajo za poklice, zasovražijo matematiko, ker je ne razumejo. Da bi ta pojav omilili, skušajo nekateri pedagogi to abstraktno vedo prikazati mladini direktno uporabno. Zato ni redek pojav, da matematiki jemljejo naloge iz fizike. V zvezi s tem so na konferenci fizikov »Unesca« že predlagali, da naj bi bil profesor matematike tudi fizik, kar bi koristilo pouku obeh predmetov.

Zamisel, da bi ponazorili pouk matematike in ga tako približali učeči se mladini, nikakor ni nasprotna z idejo, ki se pojavlja danes, da bi začeli s poučevanjem najnovejših abstrakcij moderne matematike v šolah že zelo zgodaj. Dobro poznavanje abstraktne matematike ne izključuje njene konkretne uporabe na vseh stopnjah poučevanja.

V mnogih deželah, posebej pa v Belgiji, so pedagogi prišli do zaključka, da je treba čimprej seznaniti učence z najnovejšimi pridobitvami moderne matematike. Zakaj naj bi mladi možgani sledili vsem ovinkom človeškega napredka! Ker je matematika dospela do velikih sintez, ker je dosegla najgloblje logične principe, zakaj ne bi začeli poučevati njenega bistva?

Pa pogledjmo, zakaj so teorije, ki so jih doslej normalno načenjali šele v letih visokošolskega študija matematike, odslej dosegljive mladini in celo otrokom.

Znani pedagogi so pri svojih poskusih na različnih stopnjah pouka podajali določene pojme. Hoteli so uvesti pouk, izoblikovan po novi metodi, ki bi trajal teorijo množic v odlomkih, da bi dognali, na kateri stopnji učenci lahko osvojijo določene pojme. Hoteli so uvesti pouk, izoblikovan po novi metodi, ki bi trajal več let. Njihovo namero je bilo težko uresničiti, ker bi učenci, ki bi sledili pouku moderne matematike, morali po končanem šolanju polagati izpite iz klasične matematike. Razumeti moramo namreč, da ne gre za razširitev že dokaj obširnega učnega načrta matematike. Pouk moderne matematike naj bi nadomestil številna tradicionalna poglavja. In prav zaradi tega se pojavljajo težave ob reformi, pri uvajanju novih in ukinjanju starih poglavij.

Kako so se bodoče vzgojiteljice učile moderne algebre

Prve poskuse s poukom moderne algebre so izvedli v Belgiji, v vzgojiteljski šoli. Odkod ta ideja, da so prilagodili pouk moderne algebre prav mladim vzgojiteljicam? V Belgiji je na učiteljski poseben oddelek za vzgojiteljice otrok. Te po končani šoli ne delajo izpita iz matematike, ki je pozneje v svojem poklicu ne potrebujejo, ampak se je učijo samo zaradi vežbanja logičnega mišljenja. To šolo so izbrali za eksperimentalno. Po treh šolskih letih poučevanja moderne algebre in geometrije bi iz prejšnjih rezultatov lahko sklepali, kakšen je uspeh novega pouka. Ta izbira za pedagoški poskus ima še to prednost, da učenke, ki so si izbrale ta poklic, niso iz vrst za matematiko nadarjene mladine in po večini tudi ne iz vrst najboljših učencev. Če bo kljub temu poskus uspel, bo to dovolj prepričljiv dokaz, da snov za drugo stopnjo šolanja ni pretežka.

Že po prvem letu nove pedagogike v učiteljski šoli v Berkendaelu v predmestju Bruslja so bili izidi na izpitih presenetljivo dobri. Revolucionarni pouk se je obnesel. Učenke, ki so dosegle slab uspeh v matematiki, so bile slabe tudi v ostalih predmetih. Morda imamo sedaj v rokah sredstvo, da se izognemo klasičnemu neravnovesju v ocenah nekaterih učencev, ki so v vseh drugih predmetih odlični, v matematiki slabi.

Uspeh je tudi dokaz, da je najvišja logika matematike lahko razumljiva povprečno nadarjenemu učencu srednje šole.

Bistven razlog za modernizacijo pouka

Teorija množic je vsestranska: aplicira se na vsak predmet, pa naj bo to karkoli. Je splošnejša od aritmetike in algebre, kakor tudi od geometrije, ki obravnava le posamezne primere množic, množice točk v ravnini ali prostoru.

S teorijo množic se je razvila logika, ki izhaja iz matematike, dočim se je Aristotelova logika razvila neodvisno od matematike. Teorija množic daje končni okvir absolutno strogi logiki. Splošni pojmi, ki so veljavni v logiki, so veljavni v aritmetiki, algebri, kakor tudi v geometriji. S tem, da smo dosegli matematično logiko, smo prišli do najbolj bistvenih virov razumevanja. Če pravimo, da množice pripadajo druga drugi, da se izključujejo, da nam dajejo diferenco, uporabljamo najosnovnejšo govorico, ki obstoji, govorico, ki je človeku prirojena, na katero se človek opira intuitivno, kadarkoli hoče dokazati kaj, kar je v zvezi s števili, z liki v prostoru, s kupi krompirja ali s filozofskimi idejami.

Presenetljivo je, da tako preproste umske operacije spadajo v področje matematike, ki ji pravimo moderna matematika, ker je bila tako pozno odkrita. In še to, da so najnaprednejši matematiki prišli do najpreprostejših pojmov, do jedra pojmovanja in vsega dokazovanja. In vendar je tako. Matematik Georg Cantor, po rodu Rus, je l. 1870 prvi zasnoval teorijo množic, katerih elementi pa so bili le točke v ravnini ali prostoru, ki so ustrezale določenim pogojem. Francoski matematik Maurice Frechet pa je l. 1878 posplošil teorijo množic na abstraktne množice, katerih elementi so poljubni predmeti.

Če je merilo za težavnost kakšne znanosti to, da so jo pozno odkrili, je tembolj nepričakovano dejstvo, da je teorija množic otrokom razumljiva tako zgodaj, kot so to dokazali poskusi v Belgiji. Ni se treba torej obotavljati, da nudimo otrokom, preden dorastejo, resnice, ki so jih matematiki odkrili tako pozno.

Zgodovina matematike je v bistvu pot k abstrakciji. Število samo je abstrakcija in še več, število 33 vsebuje dve abstrakciji. Prva je število 3, druga pa vrstni red števil, ki jim spremeni pomen. Algebra s svojimi x -i in y -i predstavlja še en korak k abstrakciji. Ti črki pomenita katerokoli število, ki je lahko neznano, lahko pa predstavlja popolnoma drugo stvar kot je število, odnose med neznankami, to je funkcije.

Teorija množic premaga še eno oviro k abstrakciji, abstrahira operacije. Osnovni pojmi, kot so unije, preseki in difference množic, so zares logičen mehanizem, uporaben za zelo zamotana dokazovanja. Klasične operacije, seštevanje, odštevanje itd. so le posebni primeri, aplicirani na števila.

Teorija množic je ozadje vseh vej matematike, ki so le poseben primer njene uporabe. Osnovne operacije množic znatno olajšajo vsa izvajanja v matematiki. Navedena dejstva so vodilo pobudnikom novega poučevanja, ki menijo, da zaradi poznega odkritja najosnovnejših operacij ni treba odlašati s posredovanjem le-teh mladini. Ni treba da mladina sledi vsem korakom razvoja matematike, ki so jih prešle pretekle generacije.

Teorija množic je splošen okvir za vsa izvajanja v matematiki, algebri in geometriji, kakor tudi v sami logiki, zato je razumljivo, da so nekateri revolucionarni pedagogi mnenja, da je potrebno »začeti z začetkom«.

Revolucija v pouku matematike je naletela na pripombe, da je to pretežko za otroke. Res je, da se je treba poglobiti v to novo disciplino, sicer nastane zmeda zaradi uporabe nove terminologije in novih pojmov. Za tistega, ki se je seznanil s tem, nov pouk ni težak, kar so dokazali omenjeni poskusi.

»Množičarji«, to so pobudniki novega pouka, stremijo za tem, da bi se učencem vcepila čimprej logična osnova teorije množic. Njihov namen je, da se otroci seznanijo z novimi idejami istočasno, ko spoznavajo prve pojme matematike. Učenkam vzgojiteljske šole beseda »množica« ni delala težav. Uporabljale so jo, ne da bi pri tem izgledale kot »naučene papige«, kajti dosti iger je možnih

na temo te matematike. Lahko se namreč pokaže množica s skupino otrok ali z zbirko predmetov, ki so povezani z vrvjo.

Prehod iz konkretnih primerov množic na njihovo grafično upodobitev z zaprto figuro na tabli tudi ni težak. Tudi puščice, ki predstavljajo odnose med elementi, so razumljive, saj so v nekaterih razredih učenci sami predlagali njihovo uporabo. Če učenci, katerih razum je še v razvoju, lahko obvladajo nove pojme, potem ne bo težav, če jih postopoma vpeljemó v vse razrede. V algebri in geometriji bodo izpeljave in dokazovanja lažja, ker bomo zanje lahko uporabljali pojme, ki so v dijakih zasidrani že od malega. Dokazi pa bodo tudi bolj jasni in bolj eksaktni. Profesorji, pobudniki novega pouka, navajajo za primer dokaz za skladnost figur. Spominjajo se, da sami kot učenci teh dokazov s pomočjo obračanja figur niso nikoli povsem dojeli. Vzrok so iskali v nesposobnosti svojega razuma. Danes pa s ponosom trdijo, da je bil njihov razum na pravi poti, ko se je branil sprejeti tako dvomljive dokaze za razumljive. Če skladnost figur dokazujemo z množico točk, simetrično ležečih glede na katerokoli premico točkam dane figure, so vsi dokazi te vrste skrajno eksaktni in popolnoma razumljivi.

»Evklidska tiranija«

Ne tajimo, da je nov način poučevanja težak, posebno v prehodni dobi. Na novo je treba premisliti ves program. V tem pogledu pedagogi »množičarske« revolucije obtožujejo predvsem to, kar imenujejo »trikotnikovo tiranijo«. Ugotavljajo, da učenci srednje šole mislijo, da se vsa geometrija vrti okoli trikotnika. Čemu služijo pravila za skladnost trikotnikov v uporabni matematiki? Prav ničemur! Koristna so le za reševanje problemov v srednji šoli, ki pa so nalašč za njih uporabo sestavljeni. Namesto teh vaj uvedemo z veliko večjo koristjo vaje iz teorije množic.

Najboljši argument, ki govori v prid tej reformi, so težavna preusmerjanja, ki jih terjamo danes od mladine med šolanjem. Naravnost brutalna je preusmeritev, ki ji je podvržen dijak pri prehodu iz gimnazije na študij višje matematike. Vzemimo npr. vpeljavo vektorjev v srednjo šolo! Evklidska geometrija ni orientirana. Zanjó sta daljici AB in BA eno in isto. Vpeljava orientiranih daljic pa terja napor in učenci imajo vtis, da so vektorji poseben primer daljic, medtem ko so za ponazarjanje narave vektorji splošnejši pojem. Zakaj bi vztrajali že dve stoletji pri poučevanju evklidske geometrije, ki se je kljub temu, da je bil Evklid tako velik genij, danes že preživela! Nov pouk naj bi že v začetku upošteval usmerjenost daljic in dijaku bi bilo jasno, da AB ni ekvivalentno BA . Skratka, prehod od najsplošnejših primerov na posebne primere je mnogo lažji kot prehod v obratni smeri. Posebni primeri so med seboj neodvisni in zahtevajo za razumevanje vsakega posebej težavno vadbo razuma; da se povzpne od njih do splošne abstrakcije, pa je potreben velik napor.

*

Na gvinejske šole smo prispeli profesorji skoraj iz vseh krajev sveta. Doma smo poučevali po različnih učnih načrtih, tu pa smo dobili novega, ki nam je bil tuj. Marsikdo izmed nas je z nezaupanjem gledal na prva poglavja o teoriji množic. Zgoraj navedena okrožnica pa je precej pripomogla, da smo svoje nazore o pouku matematike spremenili. Po enoletnem poučevanju po novih navodilih pa smo bili z uspehi zadovoljni.

A. Milenkovič

SEMINAR IZ MATEMATIKE

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko in Zavod za napredek šolstva SRS sta priredila za učitelje matematike srednjih šol seminar o osnovnih pojmi sodobne matematike.

Seminar je bil junija letos in se ga je udeležilo 80 učiteljev matematike, in sicer 46 profesorjev in 34 predmetnih učiteljev. Seminar je bil namenjen le profesorjem oziroma predmetnim učiteljem, ne pa učiteljem nestrokovnjakom.

Namen seminarja je bil seznaniti udeležence z nekaterimi osnovnimi pojmi in osnovnimi strukturami sodobne matematike, posebno s tistimi pojmi, ki se pojavljajo že pri pouku matematike po novem učnem načrtu. Gre tu predvsem za pojme iz matematične logike, algebre, topologije in verjetnostnega računa, ki jih profesorji matematike, ki so diplomirali na ljubljanski univerzi po starem učnem načrtu, med študijem niso spoznali.

Po drugi strani pa je matematika v zadnjih 50 letih izredno napredovala. Ne samo, da so bili rešeni nešteti problemi klasične matematike, temveč se je pojavilo mnogo novih pojmov in nastale so povsem nove teorije. Ta napredek je imel daljnosežen pomen za vso zgradbo matematike, tudi za njene osnove. Vplival pa bo seveda prav tako na pouk matematike v srednjih šolah, kjer postaja posebno pereče vprašanje, kako modernizirati pouk matematike na srednji šoli in kako premostiti prepad med dosedanja srednješolsko matematiko in matematiko, ki se predava na univerzah.

Program in predavatelji so bili:

Doc. dr. Niko Prijatelj: Uvod v teorijo množic in logiko.

Osnovne logične povezave izjav. Pravilnostne tabele. Univerzalnostni in eksistencialni operator. Zgledi simboličnih zapisov izjav.

Intuitivna in aksiomatična teorija množic. Russelova antinomija. Definicija enakosti dveh množic in aksiom ekstenzionalnosti. Podmnožice. Aksiom o podmnožicah. Prazna množica. Aksiom o paru. Unija množic in aksiom o uniji. Presek množic. Razlika dveh množic in komplementarne množice. Potenčna množica in aksiom o potenčni množici. Kartezični produkt množic.

Binarne relacije. Relacije ekvivalence, ekvivalenčni razredi in faktorske množice. Splošna definicija funkcije kot preslikave. Subjektivne, injektivne in bijektivne preslikave. Inverzna funkcija. Kartezični produkt poljubne družine množic. Aksiom izbora. Delno urejene množice. Zgornja in spodnja meja, supremum in infimum. Mreža in polna mreža. Maksimalni in minimalni elementi.

Prof. dr. Ivan Vidav: Osnovni pojmi abstraktne algebre.

Notranja in zunanja operacija. Algebrske strukture. Splošni pojem homomorfizma. Pojem polgrupe in grupe. Osnovne lastnosti grupe in zgledi. Pojem kolobarja in obsega. Splošne lastnosti kolobarjev in obsegov. Zgledi.

Podgrupe, podgrupe edinke. Podkolobarji in ideali. Faktorska grupa in faktorski kolobar.

Homomorfizem in izomorfizem grup in kolobarjev.

Vložitev polgrupe v grupo in kolobarja v obseg.

Pojem modula in vektorskega prostora. Homomorfizem in endomorfizem vektorskih prostorov. Pojem algebre. Algebra endomorfizmov. Delno urejene množice. Pojem mreže. Distributivne mreže. Booleova algebra. Modulske mreže.

Doc. dr. Rajko Jamnik: Verjetnostni račun.

Statistična definicija verjetnosti. Relacije in operacije med dogodki, obseg dogodkov. Osnovne lastnosti verjetnosti. Klasična definicija verjetnosti. Aksiomatična utemeljitev verjetnostnega računa. Pogojna verjetnost. Formula za verjetnost produkta, neodvisni in odvisni dogodki. Neodvisni poskusi, Bernoullijeva in Laplaceova formula. Slučajne spremenljivke. Porazdelitvena funkcija. Slučajni vektorji. Številске karakteristike slučajnih spremenljivk. Zakon velikih števil. Centralni limitni izrek.

Doc. dr. France Križanič: O pojmu prostora v matematični analizi.

Metrični prostori. Razdalja in okolica. Odprte in zaprte množice. Topološki prostori. Polni metrični prostori. Realna števila.

Zvezne funkcije. Kompaktnost. Lastnosti zveznih funkcij. Prostor zveznih funkcij.

Topološke grupe, topološki vektorski prostori. Normirani prostori.

Banachov in Hilbertov prostor.

Transformacijske grupe. Homogeni prostori. Geometrije. Upodobitev grup.

Pitagorov izrek, Fourierova analiza, razcep upodobitev.

Poleg tega je bil na programu še razgovor o študiju matematike na ljubljanski univerzi in ogled računskega centra.

Na koncu seminarja smo izvedli anketo, ki naj bi pomagala organizatorjem še bolje pripraviti bodoče tovrstne seminarje. Na anketo je odgovorilo 42 udeležencev. Navajamo nekatere značilne odgovore:

Prvo vprašanje se je glasilo: Kako ste zadovoljni z letošnjim seminarjem?

Skoraj vsi udeleženci so odgovorili pozitivno, in sicer, da so zelo zadovoljni s programom, le štirje so navedli, da je bil program prenatrpan. O programu so posamezniki takole izrazili svoje mnenje:

— Zelo sem zadovoljna. V preobilici dela na šoli človek ne vidi kaj se dogaja z našo matematiko. Zato je prav, da nas na takih seminarjih s tem seznanijo.

— Dobro bi bilo še bolj ilustrirati snov s pogledi na šolsko matematiko. Morda bi kdo izmed naprednih profesorjev s srednjih šol po predhodnem vprašanju v snov pripravil take ilustracije.

— Program naj bi bil dovolj zgodaj objavljen, da bi se udeleženci na snov tudi nekoliko pripravili; vseboval naj bi po možnosti nekaj napotkov v zvezi z literaturo, ki bi bila primerna in dosegljiva.

— Program je bil preobširen in smo nazadnje že težko sledili, zlasti še, ker so predavatelji na koncu zaradi časovne stiske preveč hiteli z razlago.

Z izvedbo seminarja so bili zadovoljni, nekateri celo zelo — »dvomim, da bi bila lahko izvedba boljša, kot je bila«. Posebno so pohvalili nekatere posamezne predavatelje. Le eden pravi, da ni povsem zadovoljen z izvedbo, nič pa ne pove zakaj, drugi pa ugotavlja, da so bila nekatera predavanja podana prehitro in je bilo včasih pretežko slediti. In še:

— Izredno bi bilo koristno, če bi predavatelji pripravili k snovi majhne zbirke nalog, morda s formulami, oziroma pojasnili, potrebnimi za reševanje.

— Morda bi bilo bolj koristno, če bi bili taki seminarji ločeni za profesorje in predmetne učitelje. Profesorji imajo le večji obseg znanja. Tudi glede učne snovi so na boljšem, ker predavajo zahtevnejšo snov, kot mi na osnovni šoli.

Na vprašanje ali smatrajo, da je tak seminar koristen, so vsi udeleženci odgovorili pozitivno.

Naslednje vprašanje je bilo: Kateri čas se vam zdi najbolj ugoden za šestdnevni seminar? Odgovori so bili: zimske počitnice (10), konec pouka (16), pred začetkom pouka (13), med poukom (2).

Od 42 udeležencev, ki so odgovorili na anketo, jih 27 meni, naj bi bili seminarji vsako leto, češ da je zelo važen stalni stik z razvojem matematične vede, ostalih 15 pa predlaga seminar vsake dve leti. Ker skoraj vsi profesorji srednjih šol predavajo poleg matematike tudi fiziko, bi bilo morda najbolje, da bi se ta dva predmeta izmenjala vsako leto.

Na zadnje vprašanje, kaj naj bi taki seminarji še obravnavali, smo dobili precej predlogov:

— Način obravnavanja vektorjev v gimnaziji.

— Snov za srednje šole v teoriji in praksi.

— Modernizacija pouka matematike na srednji šoli in seznanjanje s situacijo na tujih šolah.

— Obravnavana snov naj bi bila bolj naslonjena na praktično uporabo v šolah druge stopnje. Vključena naj bi bila tudi ocena novih učbenikov in predlogi praktikov za sestavo novih učbenikov.

— Novejši dosežki matematike.

— Enostavnejše vaje z računskimi stroji.

— Predvsem naj bi bili seminarji manj obsežni in naj bi nudili več aktivnega sodelovanja slušateljev. Dve uri skupaj iste snovi nista preveč primerni. Skripta — poslana prej — pa bi bila zelo dobrodošla. Že letošnji program, ki smo ga dobili, je nudil precej orientacije.

— Seminarji naj bi bili planirani dolgoročno, globlje naj bi obravnavali izbrano matematično disciplino.

— Program iz numeričnih vej aritmetike.

— Transformacije v geometriji.

— Poleg novosti, kot na tem seminarju, bi bilo dobro še enkrat — predvsem z metodичne strani — obdelati nekatera poglavja, ki so v novem učnem načrtu ali katerih obravnava je nova.

— Predavanja naj bi bila bolj strnjene celote, ne pa cel spekter matematičnega znanja.

— Več seminarjev naj bi bilo za predmetne učitelje, da bi izpopolnili svoje znanje. Poleg strokovnih področij naj bi poslušali tudi novejša dognanja iz metodike.

— Metodičen pristop pri uvajanju aksiomatične metode v matematiki za srednjo šolo.

— Poglobiti letos načeta poglavja.

Predlogov je res veliko in vsi bodo koristno napotilo organizatorjem prihodnjega seminarja.

Stanko Uršič

V socialističnih državah posvečajo vedno večjo pozornost vzgoji mladih matematikov. Da bi njihovo delo še bolj vzpodbudili, prireajo vsako leto matematične olimpiade — mednarodna tekmovanja, na katerih sodelujejo mladi matematiki iz teh držav. Ker se je letos Jugoslavija že drugih udeležila tega tekmovanja, je prav, da o njem napišem nekaj vrstic.

Letošnja matematična olimpiada, že šesta po vrsti, je bila 4. in 5. julija t. l. v Moskvi. Sodelovalo je devet držav: Bolgarija, Romunija, Madžarska, Češko-slovaška, Poljska, DR Nemčija, Sovjetska zveza, Mongolija in Jugoslavija. Vsaka izmed teh držav je izbrala ekipo na svojih matematičnih tekmovanjih. Tako je bilo tudi pri nas. Sedemnajst najboljših z zveznega matematičnega tekmovanja se nas je zbralo 3. junija v Pionirskem gradu pri Beogradu na priprave za olimpiado. Priprave so trajale 12 dni. Imeli smo dvakrat na dan po dve uri predavanj s tistih področij elementarne matematike, ki smo jih v šoli manj podrobno obravnavali (planimetrija, stereometrija, trigonometrija, kombinatorika, elementarne neenakosti, elementarna teorija števil). Naredili smo tudi precej nalog. Predavali so asistenti z beograjske univerze. Predavanja so bila dobro organizirana in smo z njih, ne glede na poznejši neuspeh v Moskvi, mnogo odnesli. Po enem tednu smo imeli tri izbirna tekmovanja, na katerih so nas dokončno določili devet za olimpiado. Medtem ko je ostalih osem odšlo domov, sm imeli mi predavanja še naprej.

Dva dni pred odhodom v Moskvo, 26. junija, smo se ponovno zbrali v Beogradu, kjer smo imeli še nekaj predavanj in naredili nekaj nalog. Tik pred odhodom so nam sporočili sestavo uradne ekipe, ki so jo sestavljali: Bojan Popović, Boško Jovanović in Zoran Gonda, vsi iz Beograda, Viktor Urumov in Smiljka Zdravkovska iz Skopja, Stane Vrščaj, Veljko Bole in Josip Globevnik iz Ljubljane, medtem ko naj bi S. Lazarevičeva iz Beograda tekmovala individualno.

S prof. Stojanovićevo, ki je šla z nami, smo prispeli v Moskvo 30. junija zvečer. Na postaji nas je pričakala prof. Dajovićeva, ki je kot član strokovne komisije na olimpiadi odšla v Moskvo že pred nami, mladi profesor na moskovski univerzi Zorić (ki je znal srbsko in ki nam je pozneje razkazal Moskvo) in edini slovenski študent na moskovski univerzi Žiga Knap, s katerim smo se posebno Slovenci veliko pomenili in ki nam je marsikaj povedal o študiju na univerzi. Takoj so nas odpeljali na univerzo (»Lomonosov«), kjer smo ves čas bivanja v Moskvi stanovali in na kateri je potekala tudi olimpiada.

Do olimpiade, ki je bila 4. in 5. julija, smo imeli še tri dni časa, ki smo ga izkoristili za ogled Moskve in za kopanje.

Tretjega julija popoldne je predsednik strokovne komisije, univerzitetni profesor in namestnik ruskega prosvetnega ministra A. Markuševič uradno otvoril olimpiado. Tekmovanje samo se je začelo naslednji dan dopoldne. Imeli smo štiri ure časa za tri naloge:

1. a) Za katere n (n je naravno število) je izraz $2^n - 1$ deljiv s 7?
- b) Dokaži, da za noben naraven n izraz $2^n + 1$ ni deljiv s 7!
2. a , b in c so stranice trikotnika. Dokaži, da velja: $a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$!
3. V trikotnik z danimi stranicami a , b , c vrtamo krog in potegnemo nanj tangente, vzporedne stranicam trikotnika. V vsakega izmed nastalih treh novih trikotnikov vrtamo krog. Kolika je vsota plosčin vseh štirih krogov?

Naloge same po sebi niso bile težke, vendar jih je bilo zelo težko tako natančno izdelati, da bi prinesle največje možno število točk (20). Ker nas je sorazmerno precej naloge dobro rešilo, je tekmovalna komisija zvišala najnižje število točk, potrebnih za osvojitve tretje nagrade, z 21 na 27.

Tudi drugi dan olimpiade smo dobili tri naloge, za katere smo imeli štiri ure časa. Kljub temu, da so te naloge štele skupaj 20 točk — toliko kot prvi dan, pa so bile znatno težje. Naloge so bile naslednje:

4. 17 znanstvenih delavcev si med seboj dopisuje; vsak izmed njih si dopisuje z ostalimi šestnajstimi. Dopisujejo si samo o treh temah, poljubna dva pa si med seboj dopisujeta le o eni temi. Dokaži, da si najmanj trije izmed njih med seboj dopisujejo o eni in isti temi!

5. V ravnini je dano 5 točk. Iz vsake izmed njih je treba potegniti normale na vse premice, ki jih določajo ostale 4 točke. Koliko je največje možno število točk, v katerih se normale sekajo med seboj, če ne upoštevamo danih 5 točk?

6. Dan je tetraeder ABCD. Zvežimo težišče osnovne ploskve D_1 z vrhom D! Premice skozi oglišča osnovne ploskve, vzporedne DD_1 , prebodejo ravnine nasprotnih stranskih ploskev tetraedra v točkah A_1, B_1, C_1 .

a) Dokaži, da sta prostornini tetraedrov $A_1B_1C_1D_1$ in ABCD v razmerju 3:1!

b) Ali velja to tudi, kadar je točka D_1 poljubna točka v trikotniku ABC?

Zanimivo je, da je bila četrta naloga verjetno najtežja, kljub temu, da jo je komisija smatrala za lahko; je namreč nekaj posebnega, ker njena rešitev temelji izključno na logičnem sklepanju.

Sama olimpiada in ostali program med našim bivanjem v Moskvi sta bila zelo dobro organizirana. Temeljito smo si ogledali Moskvo, bili smo na razstavi dosežkov sovjetske tehnike, ogledali smo si Leninov muzej pri Moskvi, bili smo v Leninovem mavzoleju in v Kremlju, kjer smo si tudi ogledali balet »Labodje jezero«. Marsikaj smo se pomenili z ostalimi udeleženci olimpiade in se spoznali z nekaj ruskimi študenti.

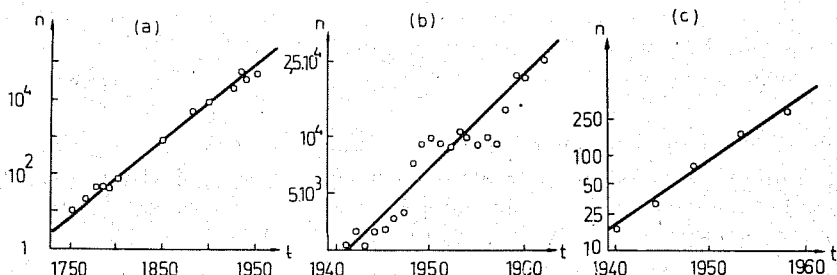
Potem ko je komisija pregledala vse izdelke, je bila 9. julija zaključna svečanost in podelitev nagrad. V ekipni uvrstitvi je bila najboljša Sovjetska zveza, druga je bila Madžarska in tretja Poljska. Jugoslavija je bila z istim številom točk, ki ji je lani na olimpiadi v Vroclavu prineslo četrto mesto, zadnja, čeprav je Viktor Urumov (31 točk) osvojil drugo, Stane Vrščaj (29 točk) pa tretjo nagrado, in čeprav so člani naše ekipe vložili vse sile na tekmovanju, ki je bilo zelo naporno, zlasti ker med prvim in drugim dnevom tekmovanja ni bilo vsaj enega dneva odmora. Sodelovanje jugoslovanske ekipe na olimpiadi je bilo vse kaj drugega kot izlet, kakor se sprašuje neodgovorni člankar v »Mladini«.

Kljub temu, da smo odšli v Moskvo dobro pripravljeni, ekipno nismo uspeli. Nisem poklican, da bi razpravljaj o vzrokih neuspeha. Moram pa povedati, da je bila konkurenca huda, posebno zato, ker v drugih državah s precej večjim interesom kot pri nas gledajo na matematiko in pri tem posvečajo največjo in stalno skrb vzgoji matematičnega naraščaja.

Vsi, z našim vodstvom vred, smo odnesli nekaj dragocenih izkušenj, tako s priprav v Beogradu, kakor tudi s same olimpiade. Ni dvoma, da bo naša ekipa, obogatena s temi izkušnjami, drugo leto na olimpiadi v Berlinu bolje uspela.

Josip Globevnik

Ali je možno s statistično obdelavo podatkov ugotoviti kaj kvantitativnega o razvoju znanosti? Za to bi bilo treba predvsem najti količino, s katero bi neposredno merili znanost. Take količine ni, pač pa je več količin, ki jih uporabljajo v ta namen kot približek. To so npr. število znanstvenih revij (ali član- kov ali strani), ki izidejo v enem letu, število ljudi, ki so zaposleni v zna- nosti, število važnih znanstvenih dognanj v enem letu ipd. Časovni potek teh količin je presenetljivo blizu eksponentnemu (sl. 1). Čas podvojitve je dostikrat okoli 10 do 20 let. Zato govorijo o eksponentnem »zakonu« za razvoj znanosti. Vendar moramo upoštevati, da teh količin ni mogoče enolično definirati, da vse revije, znanstveniki, članki ipd. zagotovo niso enakovredni in še več drugih ugovorov.

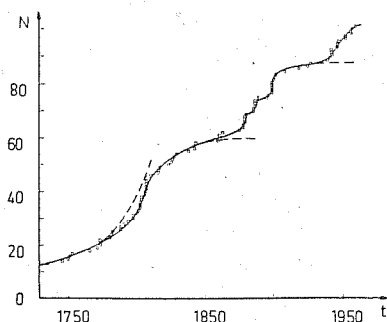


Sl. 1. Eksponentno narašča s časom število revij, ki izidejo na leto¹ (a), število člankov s fizikalno vsebino (po Physics Abstracts), ki izidejo na leto (b), število strani pri preglednih člankih o izotopih (Isotope Reports, Rev. Mod. Phys.) (c). Skala na ordinatni osi, kamor nanašamo število (n), je logaritmična!

Ne glede na ugovore pa pridemo do zanimivega sklepa. Če bi namreč eksponentni potek trajal dovolj dolgo, bi privedel do nevzdržnosti. V sto ali dve sto letih bi npr. število ljudi, ki naj bi bili zaposleni v znanosti, preseglo število vseh ljudi, ki bodo takrat živeli. Seveda bo naraščanje že dosti prej prenehalo biti eksponentno. Sodijo, da se bo to zgodilo že okoli leta 2000. Nekatere spremembe, ki naj bi bile s tem v zvezi, se nakazujejo že zdaj; tako npr. ponekod močno primanjkuje strokovnjakov. Razumljivo pa je, da se bodo v razvitih deželah občutile te spremembe prej kot v nerazvitih.

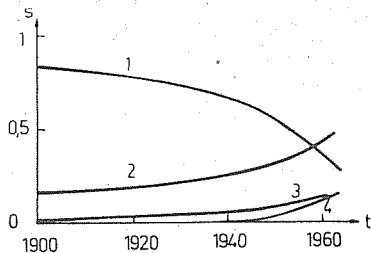
Eksponentni »zakon« naj bi slonel na dejstvu, da so za razvoj odločilne relativne spremembe. Tako npr. naj bi bilo za znanstvenika približno enako težavno napisati drugi članek, če je prvega že napisal, kot napisati še deset člankov, če jih je napisal že deset. Potem je eksponentni »zakon« pač linearni približek ($dn/n = adt$). Kadar ta odpove, je treba upoštevati še drugi člen ($dn/n = = adt - btdt$) in na mesto eksponentne stopi Gaussova funkcija. V splošnem lahko nastopa vsota več Gaussovih funkcij. Naraščanje števila znanih kemičnih elementov zares kaže napovedani potek (sl. 2), le da v diagramu ni naneseno število kemičnih elementov, ki so jih odkrili vsako leto ($n(t)$), temveč skupno število vseh elementov ($N(t) = \int ndt$).² Vendar take in podobne spekulacije ne vzbujajo prevelikega zaupanja. Zaradi raznovrstnih podatkov pa je možno utemeljevati take ali drugačne »rezultate«.

Drugi zaključki, ki jih dobimo s statistično obdelavo podatkov, nimajo neposredne zveze z eksponentnim »zakonom«. Nekaj o načinu znanstvenega dela npr. pove število problemov, ki jih raziskujejo posamezniki, dvojice, trojice znanstvenikov itd.³ Časovni potek posameznih deležev (sl. 3) nas prepriča, da delež člankov z enim avtorjem v zadnjem času močno pojema, medtem ko narašča vloga mošttev.²

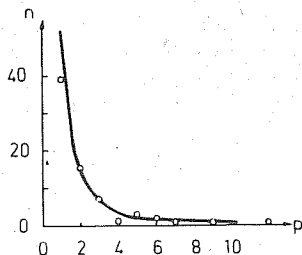


Sl. 2. Tako je naraščalo število znanih kemičnih elementov (N).

Dalje lahko določimo uteži posameznih znanstvenikov, če raziščemo njihovo produktivnost, to je število v določenem času objavljenih člankov. Dobljene porazdelitve števila avtorjev (n) po številu člankov (p) se dajo dostikrat idealizirati s porazdelitvijo $n(p) = k/n^2$. Za le-to velja npr., da napišejo polovico vseh člankov avtorji z več kot $p_0^{1/2}$ članki, pri čemer je p_0 maksimalno število član-



Sl. 3. Približni časovni potek deležev (s), ki so jih v znanstveni literaturi prispevali: en avtor (1), dva avtorja (2), trije (3) ter štirje avtorji in več (4).²



Sl. 4. Porazdelitev avtorjev (n) po številu objavljenih člankov (p) v Obzorniku za matematiko in fiziko od 1. do 11. letnika (čeprav Obzornik ni znanstvena revija), izvečena je porazdelitev $n = 50/p^2$, ki je zaradi risarskih razlogov narisana zvezno, čeprav je v resnici diskretna.

kov enega avtorja. Avtorjev z več kot $p_0^{1/2}$ članki pa je $n_0^{1/2}$, če je n_0 število vseh avtorjev. Od tod sledi, da v glavnem polnijo revije sicer maloštevilni, a sorazmerno produktivni avtorji² (sl. 4). Podobne porazdelitve se dobijo tudi za uteži dežel, če upoštevamo npr. število izdanih revij, in za uteži revij, če upoštevamo npr. število citatov tiste revije.

J. Strnad

¹ J. D. Price: The Exponential Curve of Science. Discovery 17, 240 (1956).

² J. D. Price: A Calculus of Science. Intern. Science and Technology. No. 15, 37 (1963).

Spoštovani tovariš urednik!

Sem dijak tretjega razreda gimnazije. Zelo se zanimam za fiziko in matematiko, zato sem se namenil, da Vam napišem svoje mnenje o knjižnici Sigma.

Povedati Vam moram, da sem zelo navdušen nad Vašimi knjigami. Imajo zelo privlačno zunanjo obliko. Mislim, da njihova vsebina kar nekako ustreza znanju, ki si ga pridobiva dijak med srednješolsko izobrazbo, in zato bi morale vaše knjige prodreti predvsem v ta krog. Čeprav dijaki običajno niso posebno navdušeni za matematiko in fiziko, se v vsakem razredu najde nekaj takiñ, ki se za to zanimajo.

Načel pa bi rad še neko vprašanje. Ne vem, ali je Vaša knjižnica izključno matematična ali pa je tudi fizikalna. Ker izdaja te knjige Društvo matematikov in fizikov, me zanima, zakaj ne izdate nobenega dela s področja fizike. Dandanes je fizika med najbolj popularnimi znanostmi na svetu, predvsem je mnogo zanimanja za jedrsko fiziko. Gotovo je, da bi šle knjige s področja fizike še bolj v prodajo kot matematične, čeprav ste tudi s temi dosegli lepe uspehe. Vsekakor sem vesel, da smo Slovenci dobili knjige, ki nas seznanjajo z matematiko, saj si brez ogromnega matematičnega aparata, ki se je razvijal dolga stoletja do današnje stopnje, sploh ni mogoče predstavljati napredka tehnike. Lahko smo ponosni, da imamo tudi mi tako odlične strokovnjake, kot sta dr. Ivan Vidav, dr. France Križanič in drugi. Predvsem sta mi pri srcu omenjena učenjaka, ker mnogo pišeta o matematiki in to na dostopen in izredno zanimiv način. Oba imata lep slog in bralca uglašeno vodita skozi matematično področje. Slovenskih fizikov ne poznam (razen dr. Čermelja in teh, ki so spisali šolske knjige), vendar sem prepričan, da bi se tudi tu našel kdo, ki je strokovnjak in vešč pisanja in bi nam pokazal tudi fiziko. Tudi glede fizikalne tematike ni treba skrbeti, tém je res mnogo. Naj Vam jih nekaj napišem, npr.: osnove valovne mehanike, pospeševalniki atomskih delcev, Einsteinova relativnostna teorija, sodobne teorije o strukturi materije, valovna, korpuskularna in kvantna teorija svetlobe, kvantna mehanika na splošno in tako dalje. Mislim, da je ena izmed glavnih nalog znanstvenika, da razlaga ljudem razne teorije, da jim odpira vrata lastnega znanja, da povzdiguje tehnično izobrazbo in kulturo. Poglejte npr. De Broglija, Gamova, Frischa in druge! Sami ugledni znanstveniki in zelo plodni popularizatorji znanosti. Teh velikih mož ni prevzela zavest, da so tedaj, ko so postali ugledni fiziki, že opravili svojo nalogo, nasprotno, čutili so in še čutiljo globoko potrebo, da široke množice seznanjajo s sodobnimi pojmovanji v znanosti.

Morda bi lahko v Vašo knjižnico uvrstili tudi dela s področja astronomije in s tem izpolnili eno največjih vrzeli v naši poljudnoznanstveni literaturi. Skratka, Vaša knjižnica naj bi postala nekakšna biblioteka poljudnoznanstvene literature s področja matematike, fizike in morda astronomije. Tako bi Vaša knjižnica postala res popularna in predvsem mladina bi rada segala po Vaših knjigah.

Iskreno Vas pozdravlja

Vojo Likar

NOVE KNJIGE

- Bakarić, Zora: Kombinatorika, determinanta, vektorski račun, analitička geometrija prostora. Zagreb, (Sveučilište) 1963. (III) + 123 str. 4°.
- Berezin, I. S. — N. P. Žitkov: Numerička analiza. Numeričke metode. (Metody vychislenij.) Beograd, Naučna knjiga 1963. VIII + 424 str. 8°.
- Bronštejn, J. N. — K. A. Semendjajev: Matematični priročnik za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol. (Spravočnik po matematiki dlja inženirov i učaščihsja vtuzov.) Prevedel Albin Žabkar. V Ljubljani, Življenje in tehnika (1963). 700 str. s slikami. 8°.
- Comparison of spectra from $AI^{27}(n, y)^{28}$, AI and $AI^{27}(d, p) AI^{28}$. (Reported at the Yugoslav-Polish Symposium in Krakow, May 1963.) Ljubljana, (Nuklearni inštitut Jožef Stefan) 1963. 5 str. s slikami. 4°. (NIJS Report R-420.)
- Čepinac, Nikola: Geometrija za VIII oddeljenje. Skopje, Izdavačko pretprijatie »Prosvetno delo« 1963. 178 + (I) str. 8°. (cir.)
- Gosar, P. — D. Justin: Impurity conduction. Ljubljana, (Nuklearni inštitut Jožef Stefan) 1963. (II) + 16 str. 4°. (NIJS Report R-419.)
- Ivanović, Dragiša — Vlastimir M. Vučić: Atomska i nuklearna fizika. (Fizika III.) Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 365 str. s slikami. 8°.
- Izpitna vprašanja iz fizike. Ljubljana, (Univerzitetna založba) 1963.
- Komnenić, Brankica — Stanka Lakić: Matematika za II razred trgovinskih škola za učenike u privredi. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 94 str. s slikami. 8°.
- Krsmanović, Ljubisav: Zadaci iz mehanike fluida. 2. izdanje. Beograd, Savez studenata Mašinskog fakulteta 1963. 231 + (III) str. s slikami. 8°.
- Matematička terminologija za osnovnu i srednje škole. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 38 + (I) str. 8°. (cir.)
- Mihailović, Zdravko — Radomir Čivović: Algebra za učenike škola u privredi i škola sa praktičkom obukom. 2. izmenjeno izdanje. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 148 str. 8°. (cir.)
- Milojević, Stanoje V. — Boško V. Pavlović: Praktikum računskih vežbanja iz fizike. Beograd, Naučna knjiga 1963. (VIII) + 297 + (II) str. s slikami. 8°.
- Mintaković, Stjepan: Zbirka zadataka iz algebre sa uputama i rezultatima. 1. dio. (Prema programu I razreda škole drugog stepena.) 3. prerađeno izdanje. Sarajevo, Zavod za izdavanje udžbenika (1963). 228 str. 8°.
- Mitrinović, D(ragoslav) S.: Indukcija — binomna formula — kombinatorika. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 79 str. 8°. (Matematička biblioteka. 26.)
- Muren, Hinko: Mehanska tehnologija. Ljubljana, (Univerzitetna založba) 1962. III + (III) + 160 str. + slike k tekstu. 4°.
- Neki nereseni problemi u matematici. Posvećeno Josipu Plemelju povodom devedesetogodišnjice njegova rođenja. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 193 + (II) str. 8°. (Matematička biblioteka. 25.)
- Obradović, Radoje: Geometria. Manual pentru clasa a V-a elementara. Panciova, Libertatea 1963. 87 + (II) str. s slikami. 8°.
- Obradović, Radoje: Geometria pre V. ročnik základnych škôl. Báč. Petrovec, Obzor 1963. 79 + (I) str. s slikami. 8°.
- Obradović, Radoje: Mértan az elemi iskolák V. osztalya számára. Subotica, Kiadja a Minerva könyvkiadó vallalat 1963. 82 + (I) str. s slikami. 8°.
- Pešić, Božidar: Algebra za I razred ekonomske škole. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 174 str. 8°. (cir.)
- Poniž, Rajko: Uporabne naloge za učenje elektrostroke vajenskih in industrijskih šol. Ljubljana, Državna založba Slovenije 1963. 208 str. s slikami. 8°.
- Praktične vaje iz fizike, kemije, biologije in geografije v srednjih šolah. (Poročilo.) Ljubljana, Zavod za napredek šolstva 1963. I + 60 str. + priloge. 4°.

- Prvanović, Stanko: Numaram, masuram si socotim. Manual pentru elevii clasei a II-a elementare. Panciova, Libertatea 1963. 94 str. s slikami. 8°.
- Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome VI-VII. 1937-1938. Belgrade 1938. (Reproduit 1963.) XXX + 325 str. 8°.
- Ralević, Rajko M.: Matematika za IV razred ekonomske škole. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 118 + (I) str. 8°. (cir.)
- Rashajski, Borivoje N.: Algebră p r klas n e I gimnaz. Beograd, Enti p r botimin e teksteve i Republik s Socialiste t  S rbise 1963. 165 + (III) str. 8°.
- Salević, Jovanka: Zbirka re enih zadataka iz elementarne nacrtne geometrije. Beograd, Građevinska knjiga 1963. 116 str. s slikami. 4°.
- Sevdić, Milenko: Matematika. Zagreb, Privreda 1963. 195 + (I) str. 8°. ( skolski leksikon. 12.)
- Slivić, Sreten — Dragi a M. Ivanović — Boris M. Markov: Fizika p r klas n e II gimnaz drejtimi shoquoro-gjuhsor. Beograd, Enti p r botimin e teksteve i Republik s Socialiste t  Serbis 1963. 132 str. s slikami. 8°.
- Slivić, Sreten — Dragi a M. Ivanović — Boris B. Markov: Fizika p r klasen e IV gimnaz drejtimi i shkencave natyrore. Beograd, Enti p r botimin e teksteve i Republik s Socialiste t  Serbis 1963. 148 + (II) str. s slikami. 8°.
- Šnajder, Vera: Predavanja iz racionalne mehanike s uvodom u tenzorski račun. Sarajevo, (Univerzitet) 1963. X + 287 str. 8°.
- Šnajder, Zagorka — Vesna Tomašić: Gjeometrija deskriptive p r klas n eII gimnaz drejtimi i shkencave natyrore. Beograd, Enti p r botimin i teksteve i Republik s Socialiste t  Serbis  1963. 106 str. s slikami. 8°.
-  najder, Vera — Vesna Toma i : Nacrtna geometrija za III razred gimnazije prirodno-matematičkog smeru. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 136 str. s slikami. 8°. (cir.)
- Šuklje, Lujo: Osnove tehnične mehanike. Predavanja na Univerzi v Ljubljani. 2. del: Trdnost. Ljubljana, (Univerzitetna založba) 1963. IV + 189 str. s slikami. 4°.
- Telebakovi , Velimir: Fizica. Manual pentru clasa a VIII-a elementara. Panciova, Libertatea 1963. 241 + (II) str. s slikami. 8°.
- Telebakovi , Velimir: Fizica pentru clasa a VII-a elementara. Panciova, Libertatea 1963. 222 + (II) str. s slikami. 8°.
- Telebakovi , Velimir: Fizika. Az elemi iskol k VIII. oszt lyu sz m ra. (Novi Sad), F rum k nyvkiad  (1963). 235 + (III) str. s slikami. 8°.
- Telebakovi , Velimir: Fyzika pre VIII. ro n k z kladn j  koly. Ba . Petrovec, Obzor 1963. 226 + (VI) str. s slikami. 8°.
- Tibor, Neverkla: Elementarna matematika za prijemni ispit na visoko skolskim ustanovama, a mogu je koristiti i učenici sredn jih  kola. Subotica, Radnički univerzitet 1963. IV + 167 str. s slikami. 8°.
- Vadnal, Alojzij: Elementarni uvod u račun verovatnoće. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije 1963. 128 str. s slikami. 8°. (Nauka. Tehnika. Umetnost. 13.)
- Vasić, Petar — Milan Vrzi : Matematika za podoficirske  kole JNA. Beograd, Vojno delo 1963. 268 + (I) str. s slikami. 8°.
- Zbirka zadataka iz matematike za studente Tehnološko-metalur skog fakulteta. Beograd, Skriptarnica Saveza studenata Tehnološko-metalur skog fakulteta 1962. (III) + 187 str. 8°.
- Zlatković, Desimir D.: Matemati ki prirui nik. (Piro , Novinska ustanova »Sloboda« 1963.) 32 str. 8°.
-  ivkovi , Miroslav: Aritmetika az elemi iskolák V. oszt lyu számára. Subotica, Kiadja a Minerva könyvkiadó vallalat 1963. 128 str. s slikami. 8°.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bilten, Sarajevo 1964, št. 7.

Bulletin Scientific, Zagreb 1964, T. 9, No. 1-2.

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1964, št. 1-2.

Nastava matematike i fizike, Beograd 1962, T. XI, No. 1-4.

Sodobna pedagogika, Ljubljana 1964, št. 3-4, 5-6.

Ukrainskij matematičeskij žurnal, Kiev 1964, Tom XVI, No. 3, 4.

Uspehi matematičeskikh nauk, Moskva 1964, Tom XIX, Vyp. 3, 4.

Varilna tehnika, Ljubljana 1964, št. 1.

Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1964, št. 3, 4-5, 6-7.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod oznako »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, J. Strnad, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 400 din, za zasebnike 500 din, za šole 1000 din, za ustanove in podjetja 2000 din in za inozemstvo 1500 din. Čekovni račun Obzornika je 600-14-608-314.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: