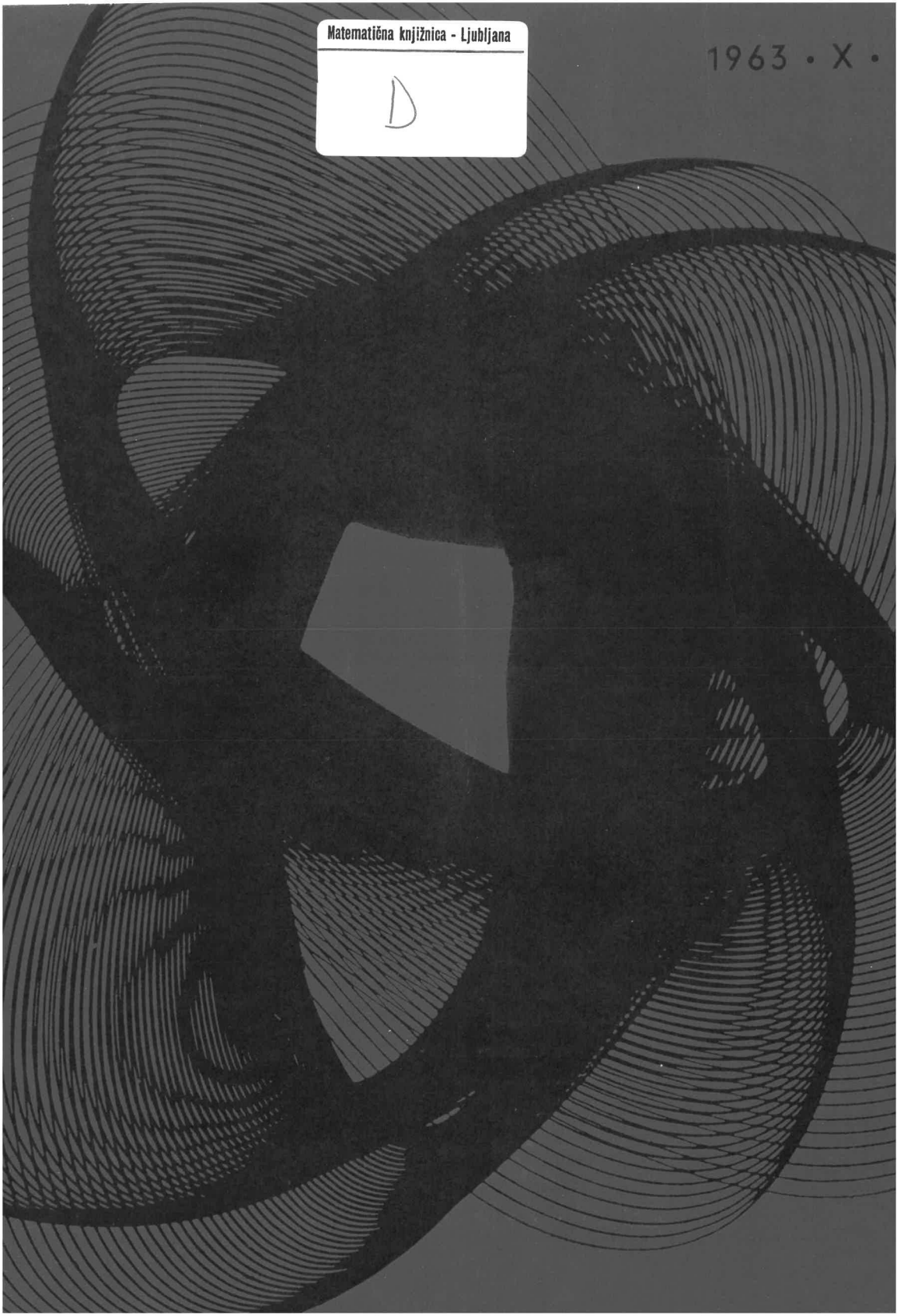
Matematična knjižnica - Ljubljana

D

1963 • X •



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

X. LETNIK — 2. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV IN FIZIKOV SRS

LJUBLJANA, AVGUST 1963

VSEBINA

Članki Stran

O rekurzivnih funkcijah (Ivan Vidav) 49

Moderna matematika in pouk na srednji šoli (Jean Dieudonné, Paris — prev. N. Prijatelj) 63

Nastajanje barvnih centrov v plastično deformiranih ionskih kristalih (Viktor Kraševec) 72

Novice

Kako bi se pokazalo relativistično skrčenje hitro se gibajočih teles (Janez Strnad) 79

Šola

Fizikalna zbirka na gimnaziji (France Avsec) 81

Domače vesti

Posvetovanje o fiziki 86

Resolucija o matematiki, fiziki in mehaniki 88

Od razrednih tekmovanj do matematične olimpiade (Stanko Uršič) . . 90

Za mlade matematike in fizike 95

CONTENTS

Articles Page

On Recursive Functions (Ivan Vidav) 49

Modern Mathematics and the Teaching in the Secondary School (Jean Dieudonné, Paris — transl. N. Prijatelj) 63

Formation of the Color Centers in Plastically Deformed Ionic Crystals (Viktor Kraševec) 72

News

The Visual Appearance of the Lorentz Contraction of Rapidly Moving Objects (Janez Strnad) 79

School 81

Home News 86

Knjižnica katedre za matematiko Ljubljana
Inv. št.

O REKURZIVNIH FUNKCIJAH

IVAN VIDAV

1. Eden izmed najpomembnejših pojmov v matematiki je brez dvoma pojem funkcije oziroma splošni pojem preslikavanja: Imamo dve množici A in B. Če je dan kak predpis, po katerem pripada vsakemu elementu iz množice A natančno določen element iz množice B, pravimo, da smo s tem predpisom preslikali množico A v množico B. Imenujmo ta predpis f. Preslikavanje označimo potem na kratko takole $f\colon A \to B$. Kadar je A množica vseh realnih števil nekega intervala (a, b), B pa množica vseh realnih števil, pomeni preslikavanje $f\colon A \to B$ funkcijo $y = f(x)$ v običajnem smislu, pri čemer je interval (a, b) njeno definicijsko območje. Zanimiv bo za nas primer, ko je A množica vseh naravnih števil, h kateri bomo zmerom privzeli še število 0, B pa je množica naravnih, realnih ali celo kompleksnih števil. Tako dobimo funkcijo, ki je njeno definicijsko območje množica naravnih števil. Imenujemo jo številsko teoretično funkcijo in označimo z $f(n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Dostikrat zapišemo tako funkcijo tudi v obliki zaporedja, pri čemer postavimo $a_n = f(n)$. Ta zapis uporabljamo takrat, kadar si mislimo funkcijske vrednosti postavljene v istem redu kakor naravna števila.

Oglejmo si funkcijo $f(x) = x^2$ in funkcijo $g(x)$, ki ima vrednost 0 za racionalen x ter vrednost 1 za iracionalen x. Obe sta natančno definirani za vsak x. Med njima pa je neka bistvena razlika. Vrednost prve $f(x) = x^2$ lahko pri danem x zmerom izračunamo. Kadar je znan x le približno, dobimo tudi za funkcijsko vrednost neki približek, ki pa je tako dober, kakor želimo, če smo le izbrali za x dovolj natančen približek. Funkcijsko vrednost $f(\pi) = \pi^2$ moremo npr. izračunati skoraj z isto natančnostjo, kakor je znano število π. Drugače je pri funkciji $g(x)$. Takoj sicer dobimo, da je $g(\frac{1}{2}) = 0$ in $g(\sqrt{2}) = 1$, ker je $\frac{1}{2}$ racionalno in $\sqrt{2}$ iracionalno število. Prav tako je $g(\pi) = 1$, ker je dokazano, da je π iracionalen. V splošnem pa moramo najprej določiti naravo števila x, če hočemo najti vrednost $g(x)$. Dognati, ali je dano število x racionalno ali iracionalno, je po navadi težek problem. Ne poznamo nobene metode, po kateri bi bilo mogoče, vsaj v principu, ta problem rešiti za vsako realno število. Vzemimo npr. $x = C$, pri čemer je $C = 0{\cdot}577\ldots$ Eulerjeva konstanta, ki je definirana z limito

$$C = \lim \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right), \quad n \to \infty$$

Koliko je $g(C)$? Ne vem, ker mi ni znana narava števila C. Četudi izračunamo z elektronskim računalnikom C na desettisoč decimalk, ne bomo zaradi tega poznali vrednosti $g(C)$ prav nič bolje kakor prej. Pri funkciji x^2 pa nam seveda boljši približki za $x = C$ omogočajo dobiti boljše približke za $f(C) = C^2$. So torej take funkcije, katerih vrednosti moremo izračunati za vsak x, kjer so definirane, in take, pri katerih ne moremo vselej izračunati funkcijske vrednosti,

ker je treba prej rešiti kak matematični problem. Za praktično uporabo pride seveda v poštev samo prva sorta funkcij.

Tudi med številsko teoretičnimi funkcijami nahajamo take, katerih funkcijskih vrednosti ne moremo zmerom izračunati. Definirajmo funkcijo $f(n)$ recimo takole: Naj bo $f(n) = 1$, če je enačba

$$(*) \qquad x^n + y^n = z^n$$

rešljiva s celimi od nič različnimi števili x, y, z. V nasprotnem primeru, ko ta enačba ni rešljiva, pa naj bo $f(n) = 0$. Funkcija $f(n)$ ima na primer za $n = 2$ vrednost 1, ker je $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ rešitev enačbe $x^2 + y^2 = z^2$. Pač pa je $f(4) = 0$, ker enačba $x^4 + y^4 = z^4$ ni rešljiva s celimi števili. Podobno je tudi $f(3) = f(5) = 0$. Prepričani smo, da je pri vsakem eksponentu n enačba (*) bodisi rešljiva bodisi nerešljiva. Zato je vrednost $f(n)$ za vsak n nedvoumno določena. Poiskati vrednost $f(n)$ pri danem n pa se pravi, rešiti problem, ali je enačba (*) za tisti eksponent n rešljiva ali ne. Zato lahko trdimo, da vrednosti te funkcije ne moremo izračunati. Če bi se Fermatova domneva izkazala za pravilno — po tej domnevi enačba (*) ni rešljiva s celimi od nič različnimi števili, kadar je eksponent $n > 2$ — potem bi s tem dognali, toda ne »izračunali«, da je $f(n) = 0$ za vsak $n > 2$.

2. Nas bodo odslej zanimale take številsko teoretične funkcije, katerih vrednosti so nenegativna cela števila in pri katerih eksistira neka metoda, s katero moremo, vsaj v principu, izračunati funkcijsko vrednost $f(n)$ za vsako vrednost argumenta n. Kako so zgrajene take funkcije in kako jih definiramo? Vzemimo za primer funkcijo $f(n) = 2^n + 3n^2 - 1$. Njene vrednosti izračunamo z vstavljanjem argumenta n v izraz na desni. Pri računanju uporabljamo seštevanje, odštevanje, množenje in potenciranje naravnih števil. Vemo, da se da prevesti potenciranje na množenje, množenje pa na seštevanje. Kaj pa seštevanje? Vsota $a + b$ naravnih števil a in b je pravzaprav funkcija dveh spremenljivk. Pa pišimo $f(n) = a + n$, kjer smatramo a za konstanto. Funkcijo $f(n)$ določata predpisa

$$(a) \qquad f(0) = a, \quad f(n+1) = f(n) + 1$$

S tem smo seštevanje reducirali na preprostejšo funkcijo $f(n) = n + 1$, ki priredi vsakemu naravnemu številu n njegov naslednik $n + 1$.

Pri znani vsoti definiramo produkt $f(n) = an$ takole

$$(b) \qquad f(0) = 0, \quad f(n+1) = f(n) + a$$

Podobno uvedemo potenco $f(n) = a^n$ z dano osnovo a:

$$(c) \qquad f(0) = 1, \quad f(n+1) = af(n)$$

Imenovane operacije so s temi predpisi določene le za naravna števila. Vemo, da se dajo razširiti tudi na realna in kompleksna števila. Z limitnim procesom pa dobimo potem v analizi še najrazličnejše funkcije. Tako smo spoznali, da se dajo reducirati polinomi, racionalne funkcije, eksponentne, kotne, eliptične funkcije itd. vse na enostavno funkcijo $f(n) = n + 1$.

Definicije (a), (b), (c) imajo nekaj skupnega: V vsaki je najprej navedeno, koliko je $f(0)$, potem pa je podano pravilo, po katerem izračunamo $f(n + 1)$,

če že poznamo vrednost $f(n)$. Imenujemo jih rekurzivne definicije. Splošno se taka definicija funkcije glasi

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} f(0) &= c \\ f(n+1) &= g[n, f(n)] \end{aligned}$$

Tu pomeni c neko dano število, $g(n, m)$ pa neko že znano funkcijo dveh spremenljivk m in n. Funkcija $f(n)$ je s shemo (I) očitno določena za vsako naravno število n. Prva enačba pove, koliko je $f(0)$. Druga pa vsebuje pravilo za računanje $f(n+1)$ pri znani vrednosti $f(n)$. Od tod računamo korak za korakom $f(1), f(2), f(3), \ldots$ Funkcijo $f(n)$, definirano s shemo (I), imenujemo *primitivna rekurzivna funkcija.*

Zgled. Naj bo

$$f(0) = 0, \quad f(n+1) = n + f(n)$$

Tu je $c = 0$ in $g(x, y) = x + y$. Iz druge enačbe dobimo najprej, da je $f(1) = 0 + f(0) = 0$, nato $f(2) = 1 + f(1) = 1$, $f(3) = 2 + f(2) = 3$ itd. Splošno velja

$$f(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

o čemer se prepričamo z metodo popolne indukcije.

Včasih je rekurzivna funkcija odvisna od enega ali več parametrov. Pri vsoti $a + n$ in produktu an je že bilo tako. V tem primeru se shema (I) za funkcijo $f(a, n)$ glasi

$$\text{(I*)} \qquad \begin{aligned} f(a, 0) &= c(a) \\ f(a, n+1) &= g[a, n, f(n)] \end{aligned}$$

Spet je $c(a)$ znana funkcija parametra a, $g(a, x, y)$ pa znana funkcija treh spremenljivk a, x, y. Če je rekurzivna funkcija f odvisna od več parametrov, sta tudi c in g odvisni od istih parametrov. Naj bo npr.

$$f(a, 0) = 1, \quad f(a, n+1) = af(a, n) + 1$$

Od tod dobimo $f(a, 1) = a + 1$, $f(a, 2) = a(a+1) + 1$ itd. Z metodo popolne indukcije dokažemo splošno formulo

$$f(a, n) = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Tu pa mora biti $a \neq 1$.

Pri obeh zgledih smo našli za funkcijo $f(n)$ neko formulo zgrajeno iz elementarnih funkcij. Funkcijske vrednosti potem izračunamo z vstavljanjem. Take formule pa pri nekaterih rekurzivnih funkcijah ni. Kar oglejmo si funkcijo, ki jo določa shema

$$f(0) = 1, \quad f(n+1) = n^{f(n)} + 1$$

Tu je

$$f(1) = 1, \; f(2) = 2, \; f(3) = 2^2 + 1 = 5, \; f(4) = 3^5 + 1 = 244,$$
$$f(5) = 4^{244} + 1, \ldots$$

Funkcijske vrednosti očitno izredno hitro naraščajo. Zato bi zaman iskali formulo, ki bi dala vrednosti te funkcije za vsak n in bi se izražala z elementarnimi funkcijami v zaključeni obliki. Nobena taka formula ne narašča z n tako hitro kakor zgornje zaporedje $f(n)$.

V shemi (I), ki definira rekurzivno funkcijo, nastopa funkcija $g(x, y)$, ki mora biti že prej znana. Če vzamemo za g konstanto, dobimo tudi za $f(n)$ konstanto. Zato samo z rekurzivno definicijo ne moremo priti do nobene funkcije, ki ni konstantna. Vsaj eno osnovno funkcijo moramo imeti. Za osnovno funkcijo vzamemo, kakor smo omenili, funkcijo, ki priredi vsakemu naravnemu številu n njegov naslednik $n + 1$. Ta funkcija pa nastopa že v sami definiciji (I) v argumentu $n + 1$ pri $f(n + 1)$. Iz te funkcije dobimo najprej vsoto $a + n$, potem produkt an, nato potenco a^n itd. Vse funkcije, ki jih tako korak za korakom uvedemo, so prave primitivno rekurzivne funkcije. Od tod v posebnem sledi, da mora biti v shemi (I) tudi $g(x, y)$ primitivno rekurzivna funkcija. Zato naslednja funkcija, čeprav jo formalno prav tako dobimo, ni primitivno rekurzivna: Naj bo

$$f(0) = 1, \quad f(n + 1) = h[f(n)] + 1$$

pri čemer ima $h(n)$ vrednost 1, kadar je enačba (*) rešljiva, in vrednost 0, kadar ni rešljiva. V tem primeru $g = h(y) + 1$ ni rekurzivna funkcija, torej $f(n)$ tudi ne.

3. Oglejmo si zdaj nekaj preprostih rekurzivnih funkcij, ki jih v tej teoriji stalno uporabljamo. Prvo zaznamujemo z $\delta(n)$ in jo definirajmo takole:

$$\delta(0) = 0, \quad \delta(n + 1) = n$$

Tu dobimo zaporedoma $\delta(1) = 0$, $\delta(2) = 1$ itd., tako da je splošno $\delta(n) = n - 1$, če je $n > 1$. $\delta(n)$ pomeni torej predhodnika števila n.

Pri znani funkciji $\delta(n)$ uvedemo funkcijo $\delta(a, n)$, in sicer je

$$\delta(a, 0) = a, \quad \delta(a, n + 1) = \delta[\delta(a, n)]$$

Kaj pomeni $\delta(a, n)$? Najprej dobimo $\delta(a, 1) = \delta(a) = a - 1$, če je $a \geqq 1$, in $\delta(a, 1) = 0$, če je $a = 0$. Nadalje je $\delta(a, 2) = \delta[\delta(a, 1)] = \delta(a - 1) = a - 2$, če je $a \geqq 2$, in $\delta(a, 2) = 0$, če je $a < 2$. Prav tako ugotovimo, da je $\delta(a, 3) = a - 3$ za $a \geqq 3$ in $\delta(a, 3) = 0$ za $a < 3$. Splošno je $\delta(a, n)$ enak $a - n$ za $n \leqq a$ in enak 0 za $n > a$. Funkcija $\delta(a, n)$ ima torej vrednost, ki je enaka večjemu izmed števil 0 in $a - n$. Zato lahko zapišemo

$$\delta(a, n) = \tfrac{1}{2}(|a - n| + a - n)$$

ker je tudi izraz na desni enak večjemu izmed števil $a - n$ in 0.

Naj bo $f(n)$ znana funkcija. Vsota $f(0) + f(1) + \ldots + f(n)$ vseh zaporednih vrednosti in produkt $f(0) f(1) f(2) \ldots f(n)$ teh vrednosti funkcije $f(n)$ sta neki novi funkciji, ki ju označimo s $S(n)$ in $\Pi(n)$. Prvo definiramo rekurzivno takole

$$S(0) = f(0), \quad S(n + 1) = S(n) + f(n + 1)$$

Res dobimo od tod

$$S(n) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Funkcijo $\Pi(n)$ pa določimo z enačbama

$$\Pi(0) = f(0), \quad \Pi(n+1) = f(n+1)\,\Pi(n)$$

Od tod je

$$\Pi(n) = f(0)\,f(1)\,f(2)\ldots f(n) = \prod_{k=1}^{n} f(k)$$

V elementarni teoriji števil srečamo najrazličnejše funkcije, ki se drugod v analizi precej redko pojavljajo. Naštejmo nekatere. Celi del kvocienta n/a — označnimo ga z $[n/a]$ — je največje celo število, ki ne presega števila n/a. Ostanek pri deljenju $n:a$ je potem enak razliki $n - \left[\frac{n}{a}\right] a$. Zaznamovali ga bomo z $\varrho(n, a)$. Potem je

$$n = \left[\frac{n}{a}\right] a + \varrho(n, a)$$

Ostanek $\varrho(n, a)$ in $[n/a]$ sta primitivno rekurzivni funkciji. Isto velja za največjo skupno mero dveh števil in najmanjši skupni večkratnik. Rekurzivna definicija teh funkcij pa ni preprosta in je zato tu ne bomo navajali. Prav tako sta rekurzivni funkciji $\pi(n)$, ki pomeni število praštevil do n, ter $f(n) = p_n$, kjer je p_n n-to praštevilo. Tu je $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ itd. Navedimo še en zgled. Vemo, da se da vsako naravno število n v bistvu na en sam način razstaviti v produkt prafaktorjev

$$n = p^{\alpha}\, q^{\beta} \ldots r^{\varepsilon}$$

Tu so eksponenti $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ naravna števila. Če dopuščamo tudi eksponent nič, lahko zapišemo vsako naravno število n kot produkt

$$n = p_1^{\nu_1}\, p_2^{\nu_2}\, p_3^{\nu_3} \ldots$$

pri čemer so $p_1, p_2, p_3, \ldots$ zaporedna praštevila, tedaj $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ itd. Če kako praštevilo p_k v n ne nastopa kot faktor, je seveda ustrezni eksponent ν_k v tej izražavi enak nič. V vsakem primeru pa je eksponent ν_k z n določen in zato pišemo $\nu_k = \nu(n, k)$. Dobimo tako celo zaporedje številsko teoretičnih funkcij $\nu(n, k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Razcepitev števila n se potem glasi

$$n = 2^{\nu(n,1)} \,.\, 3^{\nu(n,2)} \,.\, 5^{\nu(n,3)} \ldots \tag{1}$$

Ker je npr. $12 = 2^2 \,.\, 3$, je $\nu(12, 1) = 2$, $\nu(12, 2) = 1$ in $\nu(12, k) = 0$ za $k > 2$. Funkcija $\nu(n, 1)$ pomeni eksponent najvišje potence števila 2, ki gre v n. Zato je $\nu(n, 1) = 0$ za vsako liho število n. Dokazati se da, da so eksponenti $\nu(n, k)$ primitivno rekurzivne funkcije argumenta n.

Navedimo še dva primera rekurzivnih funkcij. Prva naj bo $f(n) = [\sqrt{n}]$, kjer je spet $[x]$ največje celo število, ki ne presega realnega števila x. Torej je

$f(n)$ največje naravno število, katerega kvadrat ni večji od n. Tako je $f(3) = 1$, $f(4) = f(5) = 2$ itd. Funkcija $f(n)$ se da rekurzivno definirati takole

$$(2) \qquad f(0) = 0, \quad f(n+1) = f(n) + \delta\,[n+2, (f(n)+1)^2]$$

Tu je $\delta(x, y)$ funkcija, ki smo jo že prej uvedli in ki je enaka večjemu izmed števil $x - y$ ter 0. Da določa shema (2) funkcijo $[\sqrt{n}]$, ugotovimo s popolno indukcijo. Naj bo pri nekem n res $f(n) = [\sqrt{n}]$. Potem velja ocena

$$[f(n)]^2 \leqq n < [f(n)+1]^2$$

Zdaj je treba razločevati dve možnosti: a) $[f(n)+1]^2 = n+1$, torej $\sqrt{n+1} = f(n)+1$. Ker je $f(n)$ celo število, imamo $[\sqrt{n+1}] = f(n)+1$. Desna stran v (2) pa je enaka $f(n) + \delta(n+2, n+1) = f(n)+1$. Zato je $f(n+1) = [\sqrt{n+1}]$. b) $[f(n)+1]^2 > n+1$, torej $[\sqrt{n+1}] = f(n)$. Desna stran v (2) pa je tudi enaka $f(n)$, ker je $\delta\,[n+2, (f(n)+1)^2] = 0$. Tudi v tem primeru imamo $f(n+1) = f(n) = [\sqrt{n+1}]$. Ker je $f(0) = 0 = [\sqrt{0}]$, sklepamo z metodo popolne indukcije, da je splošno $f(n) = [\sqrt{n}]$.

Število e, ki je osnova naravnih logaritmov, je iracionalno. Definiramo ga lahko z vsoto vrste

$$(3) \qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Oglejmo si funkcijo $f(n) = [en]$, ki spet pomeni največje celo število, ki ne presega večkratnika en. Ali je tudi ta funkcija rekurzivna? Iz vrste (3) dobimo

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$$

Drugi del vsote na desni ocenimo takole

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{n!\,n}$$

Torej leži e v mejah

$$(4) \qquad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n}$$

Postavimo zdaj

$$(5) \qquad g(n) = \frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!}$$

$g(n)$ je očitno celo število, ki je obenem z n izredno veliko. Ker je

$$g(n+1) = \frac{(n+1)!}{0!} + \frac{(n+1)!}{1!} + \ldots + \frac{(n+1)!}{n!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} =$$

$$= (n+1)\left[\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \ldots + \frac{n!}{n!}\right] + 1$$

velja za funkcijo $g(n)$ rekurzijska formula

$$g(0) = 1, \quad g(n+1) = (n+1)\, g(n) + 1 \tag{6}$$

Oceno (4) lahko zdaj zapišemo

$$\frac{g(n)}{(n-1)!} < en < \frac{g(n)}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

Število $g(n)/(n-1)!$ se razlikuje od najbližjega večjega celega števila za neki večkratnik ulomka $1/(n-1)!$. Ker je $1/n! < 1/(n-1)!$, vsota na desni tega najbližjega večjega celega števila še ne dosega. Zato imajo števila en, $g(n)/(n-1)!$ in $g(n)/(n-1)! + 1/n!$ isti celi del, torej je

$$[en] = \left[\frac{g(n)}{(n-1)!}\right]$$

Funkcije $g(n)$, $n!$ in prav tako celi del ulomka $[n/a]$ so rekurzivne. Zato velja isto za funkcijo $[en]$.

Z vsakim iracionalnim številom $a > 0$ lahko tvorimo funkcijo $[a\,n]$. Ali je to zmerom rekurzivna funkcija kakor pri $a = e$? Odgovor je negativen. Brez posebnih težav se da namreč dokazati, da je vseh primitivno rekurzivnih funkcij le števno mnogo. Seveda se tu omejimo na tiste, katerih vrednosti so naravna števila. Funkcij $f(n) = [a\,n]$ pa je toliko, kolikor iracionalnih števil, torej neštevno mnogo. Od tod sledi, da so med njimi skoraj vse take, ki niso rekurzivne. Če pa je a algebraično število, je ustrezna funkcija $[a\,n]$ zmerom rekurzivna.

4. Doslej smo si ogledali le najpreprostejšo rekurzivno shemo. Pa definirajmo funkcijo $f(n)$ takole

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad f(n+1) = f(n) + f(n-1) \tag{7}$$

Iz zadnje enačbe dobimo $f(2) = f(1) + f(0) = 2$, $f(3) = f(2) + f(1) = 3$, $f(4) = 2 + 3 = 5$ itd. Predpisi (7) torej natančno določajo vse funkcijske vrednosti. Zaporedna števila 1, 1, 2, 3, 5, . . ., ki jih tako dobimo, se imenujejo Fibonaccijeva števila. V tem zaporedju je vsako število vsota prejšnjih dveh. Funkcija $f(n)$ se da izraziti z razmeroma komplicirano formulo, ki se glasi

$$f(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{8}$$

Dokažemo jo lahko s popolno indukcijo.

Splošna definicija take funkcije $f(n)$ je

$$f(0) = c_0, \quad f(1) = c_1, \quad f(n+1) = g\,[n, f(n), f(n-1)] \tag{II}$$

pri čemer so c_0, c_1 dana števila, $g(x, y, z)$ pa znana funkcija vseh treh spremenljivk. c_0, c_1 in funkcija g bi smeli biti odvisni še od morebitnih parametrov. Očitno so s shemo (II) določene vse vrednosti funkcije $f(n)$. Pri računanju

$f(n+1)$ moramo poznati dve prejšnji vrednosti $f(n)$ in $f(n-1)$. Včasih je odvisna vrednost $f(n+1)$ tudi od večjega števila prejšnjih vrednosti.

Shema (II) nas ne privede iz okvira funkcij, ki jih lahko dobimo s primitivno rekurzijo. Da to dokažemo, postavimo

$$F(n) = p_1^{f(1)} p_2^{f(2)} \ldots p_n^{f(n)} \tag{9}$$

pri čemer pomenijo $p_1, p_2, \ldots$ zaporedna praštevila 2, 3, 5, ... Pri znani funkcijski vrednosti $F(n)$ dobimo vse vrednosti $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, če razstavimo število $F(n)$ na prafaktorje. In sicer je

$$f(k) = \nu[F(n), k], \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

kar ugotovimo iz primerjave enačbe (9) z enačbo (1). Izračunajmo zdaj

$$F(n+1) = F(n)\, p_{n+1}^{f(n+1)}$$

Ker je po shemi (II)

$$f(n+1) = g[n, f(n), f(n-1)] = g[n, \nu(F(n), n), \nu(F(n), n-1)]$$

se rekurzivna definicija za funkcijo $F(n)$ glasi

$$F(0) = 1, \quad F(n+1) = F(n)\, p_{n+1}^{g[n, \nu(F(n), n), \nu(F(n), n-1)]} \tag{11}$$

Omenili smo, da je p_n primitivno rekurzivna funkcija argumenta n. Ker se izraža $F(n+1)$ z znanimi funkcijami argumentov $F(n)$ in n, je $F(n)$ primitivno rekurzivna funkcija. Vrednosti prvotne funkcije pa se dobe iz enačbe (10). S tem smo spoznali, da nas shema (II) ne privede iz okvira funkcij, ki jih dobimo s primitivno rekurzijo. Podobno bi ravnali, če bi se $f(n+1)$ izražal z večjim številom vrednosti med $f(1)$ in $f(n)$. Seveda je ta redukcija le teoretičnega pomena, zakaj funkcije $F(n)$ in $\nu(n, k)$ so zelo komplicirane.

Ker se dajo različne rekurzijske sheme reducirati na prvotno shemo (I), je umestno vprašanje, ali so vse številsko teoretične funkcije, katerih vrednosti moremo izračunati za vsako naravno število n, primitivno rekurzivne. Rekli smo že, da je množica vseh primitivno rekurzivnih funkcij števna. To se pravi, da je mogoče zapisati zaporedje

$$f_1(m), f_2(m), f_3(m), \ldots \tag{12}$$

ki obsega vse primitivno rekurzivne funkcije. S tem smo te funkcije numerirali. To numeracijo je moč efektivno izvesti, torej za vsak n lahko izračunamo, katera je n-ta funkcija $f_n(m)$. Zato pa je določena tudi funkcija

$$\varphi(n) = f_n(n) + 1$$

Njena vrednost se da izračunati pri vsakem n: najprej poiščemo v zaporedju n-to funkcijo $f_n(m)$ in določimo njeno vrednost za $m = n$. Funkcija $\varphi(n)$ pa ni primitivno rekurzivna. Če bi bila, bi jo morali najti nekje v zaporedju (12), saj to zaporedje vsebuje vse take funkcije. Pa vzemimo, da bi bila ta funkcija

k-ta v zaporedju, tedaj $\varphi(n) = f_k(n)$. Za $n = k$ bi dobili od tod $\varphi(k) = f_k(k)$, torej $f_k(k) = f_k(k) + 1$. To protislovje dokazuje, da niso vse funkcije, katerih vrednosti moremo računati, primitivno rekurzivne. Zato je odgovor na zgornje vprašanje negativen.

5. Oglejmo si še na kratko splošen pojem rekurzivne funkcije. *Splošna rekurzivna funkcija* $f(n)$ je definirana z nekim sistemom enačb, v katerem nastopajo razen funkcije $f(n)$ samo znane funkcije. Ta sistem mora biti tak, da se da iz njega z vstavljanjem in računanjem vrednosti znanih funkcij izračunati vrednost $f(n)$ za vsak dan n. Kot primer si oglejmo tole shemo

$$f(n^2) = n, \quad f(n) = f(n+1) - \delta[(f(n+1))^2, n] \tag{13}$$

Ali je s to shemo funkcija $f(n)$ določena in če je, kako računamo njene vrednosti? Brez težave ugotovimo, da ustreza shemi (13) kvečjemu ena funkcija. Za kvadrate $n = 0, 1, 4, 9, \ldots$ dobimo njene vrednosti iz prve enačbe (13). Kadar n ni kvadrat, izrazimo $f(n)$ z $f(n+1)$ po drugi enačbi. Če število $n+1$ tudi še ni kvadrat, izrazimo $f(n+1)$ z $f(n+2)$ itd. Po nekaj korakih bomo prišli do števila $n+k$, ki je kvadrat, npr. $n + k = m^2$. Potem je $f(n+k) = m$. Zdaj pa računamo vrednosti nazaj od $f(n+k-1)$ do $f(n)$. Vprašanje je še, če so vrednosti $f(n)$ nedvoumno določene. Kajti k lahko na različne načine tako izberemo, da je $n + k$ kvadrat. Ker pa je na dlani domneva, da je $f(n) = [\sqrt{n}]$, zadošča, če dokažemo, da ta funkcija res ustreza shemi (13): Iz ocene $[\sqrt{n+1}]^2 \leqq n + 1$ izhajata dve možnosti: a) $[\sqrt{n+1}]^2 = n + 1$. V tem primeru je $\delta([\sqrt{n+1}]^2, n) = \delta(n+1, n) = 1$ in $[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] - 1$. Torej za tak n funkcija $f(n) = [\sqrt{n}]$ ustreza drugi enačbi (13). b) Naj bo $[\sqrt{n+1}]^2 \leqq n$. Zdaj je $\delta([\sqrt{n+1}]^2, n) = 0$ in $[\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}]$. Tudi v tem primeru ustreza $f(n) = [\sqrt{n}]$ drugi enačbi (13). Prvi enačbi pa ta funkcija zmerom ustreza. Zato določa shema (13) funkcijo $f(n) = [\sqrt{n}]$.

6. Doslej smo obravnavali le funkcije ene spremenljivke. Z rekurzivno definicijo pa moremo uvesti tudi funkcije več spremenljivk. Pri tem je rekurzija lahko še zelo komplicirana. Oglejmo si za zgled funkcijo dveh spremenljivk $f(m, n)$, ki naj ustreza naslednjim predpisom

$$f(0, n) = n + 1 \tag{a}$$

$$f(1, 0) = 2, \quad f(2, 0) = 0, \quad f(m, 0) = 1, \quad m > 2 \tag{b}$$

$$f(m+1, n+1) = f[m, f(m+1, n)] \tag{c}$$

Na prvi pogled morda niti ni vidno, da ti predpisi enolično določajo $f(m, n)$. Pa denimo, da funkcija $f(m, n)$ eksistira. Pri danem m je odvisna vrednost $f(m, n)$ še od n in jo kot tako označimo takole:

$$f(m, n) = \psi_m(n)$$

Iz enačbe (a) najprej dobimo, da je $\psi_0(n) = f(0, n) = n + 1$. Recimo, da že poznamo vrednosti za $\psi_m(n)$ za vsak n pri nekem danem $m \geqq 0$. Iz zadnje enačbe sledi

$$\psi_{m+1}(n+1) = \psi_m[\psi_{m+1}(n)]$$

Posebej za $m = 0$ imamo

$$\psi_1 (n + 1) = \psi_1 (n) + 1$$

Ker je po enačbi (b) $\psi_1 (0) = f (1, 0) = 2$, je funkcija $\psi_1 (n)$ določena s to primitivno rekurzijo. Brez težave izračunamo, da je $\psi_1 (n) = n + 2$. Potem dobimo za funkcijo $\psi_2 (n)$ rekurzijsko shemo

$$\psi_2 (0) = 0, \quad \psi_2 (n + 1) = \psi_2 (n) + 2$$

Od tod sledi $\psi_2 (n) = 2 n$. Tako zaporedoma računamo funkcije $\psi_0 (n)$, $\psi_1 (n)$, $\psi_2 (n), \ldots$ In sicer velja za $\psi_{m+1} (n)$ rekurzijska shema

$$\psi_{m+1} (0) = 1, \quad \psi_{m+1} (n + 1) = \psi_m [\psi_{m+1} (n)], \quad m > 1$$

S tem so vse funkcije $\psi_m (n)$ nedvoumno določene in z njimi tudi prvotna funkcija $f (m, n)$.

Izračunajmo še $\psi_3 (n)$ in $\psi_4 (n)$. Najprej je

$$\psi_3 (0) = 1, \quad \psi_3 (n + 1) = 2 \psi_3 (n)$$

Rešitev se tu glasi $\psi_3 (n) = 2^n$. Ko poznamo $\psi_3 (n)$, določimo $\psi_4 (n)$ iz enačb

$$\psi_4 (0) = 1, \quad \psi_4 (n + 1) = 2^{\psi_4 (n)}$$

Zaporedne vrednosti so

$$\psi_4 (1) = 2, \quad \psi_4 (2) = 2^2, \quad \psi_4 (3) = 2^{2^2} \text{ in splošno } \psi_4 (n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \; n\text{-krat}$$

Funkcija $\psi_4 (n)$ izredno hitro narašča, saj je $\psi_4 (3) = 16$, $\psi_4 (4) = 2^{16} = 65\,536$ ter $\psi_4 (5) = 2^{65\,536}$, kar je ogromno število. Še hitreje narašča naslednja funkcija $\psi_5 (n)$. Ta je definirana takole:

$$\psi_5 (0) = 1, \quad \psi_5 (n + 1) = \psi_4 [\psi_5 (n)]$$

Od tod dobimo najprej $\psi_5 (1) = \psi_4 [\psi_5 (0)] = 2$, nato $\psi_5 (2) = \psi_4 (2) = 2^2$, $\psi_5 (3) = \psi_4 (4) = 2^{16}$, $\psi_5 (4) = \psi_4 (2^{16})$. Iz pomena funkcije $\psi_4 (n)$ dobimo, da je

$$\psi_5 (4) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

kjer je v stolpu na desni natanko 65 536 dvojk! Število $\psi_5 (4)$ je torej tako veliko, da nimamo na vsem svetu dovolj papirja, na katerega bi ga mogli napisati. Nadaljnja vrednost $\psi_5 (5)$ s e tudi izraža s stolpom zaporednih potenc števila 2, samo dvojk je zdaj $\psi_5 (4)$. Funkcije z večjim indeksom naraščajo seveda še hitreje.

Postavimo zdaj $\varphi (n) = f (n, n) = \psi_n (n)$. Vse funkcijske vrednosti $\varphi (n)$ se dajo v principu izračunati. Začetne vrednosti so

$$\varphi (0) = 1, \quad \varphi (1) = 3, \quad \varphi (2) = 4, \quad \varphi (3) = 2^3, \quad \varphi (4) = 2^{16}$$

$\varphi(5) = \psi_5(5)$ je prej omenjeno orjaško število. Vrednosti $\varphi(n)$ torej katastrofalno naraščajo. Dokazali so, da se funkcija $f(n, n)$ ne da definirati s primitivno rekurzijo, ker hitreje narašča kakor katera koli primitivno rekurzivna funkcija. Pri tem pa so začetne pogoje (b) nekoliko drugače izbrali.

7. Spoznali smo, da eksistirajo najrazličnejše rekurzivne funkcije, definirane s primitivno in splošndo rekurzivno shemo. Zanimivo je, da se dajo vse izraziti z dvema popolnoma določenima funkcijama. Eksistira namreč neka univerzalna primitivno rekurzivna funkcija $\psi(n)$ in neka primitivno rekurzivna funkcija treh spremenljivk $\tau(n, m, w)$, ki ima lastnost, da je za nekatere vrednosti števila n enačba

$$\tau(n, m, w) = 0$$

rešljiva na w in sicer pri poljubnem m. Najmanjšo vrednost w, ki ustreza tej enačbi, označimo z $\mu_w[\tau(n, m, w) = 0]$. Ta vrednost je pri izbranem n odvisna še od števila m. Naj bo zdaj $f(m)$ poljubna splošna rekurzivna funkcija. Vsaki taki funkciji pripada neko naravno število n, da velja za vsak m enačba

$$f(m) = \psi(\mu_w[\tau(n, m, w) = 0]) \tag{14}$$

Torej se vsaka rekurzivna funkcija izraža s funkcijama $\psi(n)$ in $\tau(n, m, w)$ v obliki enačbe (14).

8. Ker vsebuje rekurzivna funkcija v svoji definiciji navodilo, kako računamo njene vrednosti, smemo pričakovati, da bomo mogli zgraditi računski stroj, ki bo avtomatično računal njene vrednosti. Res so dokazali, da je mogoče, vsaj v principu, konstruirati za vsako dano rekurzivno funkcijo $f(n)$ tako imenovani Turingov stroj*, ki računa vrednosti $f(n)$. Narobe pa tudi velja: Če se da konstruirati za kako številsko teoretično funkcijo $f(n)$ Turingov stroj, ki avtomatično računa njene vrednosti, je $f(n)$ splošno rekurzivna funkcija.

9. Teorija rekurzivnih funkcij je izredno pomembna v raziskovanju osnov matematike in v matematični logiki. Oglejmo si zato še nekoliko natančneje definicijo, ki je podana s shemo (I). Iz nje najprej zvemo, koliko je $f(0)$, nato pa dobimo navodilo, kako izračunamo vrednost $f(n + 1)$, če že poznamo vrednost za $f(n)$. Shema (I) je le na videz preprosta definicija. V resnici je kratek zapis za neskončno definicij, ki se glase takole:

$$f(0) = c, \quad f(1) = g(0, c), \quad f(2) = g[1, f(1)], \quad f(3) = g[2, f(2)], \ldots$$

Rekurzivna definicija se torej bistveno razlikuje od navadne eksplicitne definicije, kakor je npr. $f(n) = 2^n - n$, kjer pravzaprav pomeni $f(n)$ le krajše zapisan izraz na desni.

Omenili smo, da eksistirata dve taki univerzalni primitivno rekurzivni funkciji $\psi(n)$ in $\tau(n, m, w)$, s katerima se da vsaka druga rekurzivna funkcija izraziti v obliki enačbe (14). Če sta torej te dve funkciji dani, lahko navedemo za vsako drugo rekurzivno funkcijo eksplicitno definicijo z enačbo (14). Toda funkciji $\psi(n)$ in $\tau(n, m, w)$ sta razmeroma komplicirani, pa tudi moramo uvesti najprej druge rekurzivne funkcije, da pridemo do teh dveh. V nekaterih pri-

* O tem, kaj je Turingov stroj, glej članek M. Vencelj: Povezava teorije algoritmov s teorijo aritmetičnih računalnikov. OMF IX, str. 169—178.

merih se nam je posrečilo izraziti funkcijo $f(n)$, ki jo določa rekurzivna shema, z znanimi elementarnimi funkcijami. Tako smo npr. dobili formulo (8), ki daje zaporedje Fibonaccijevih števil. Vedno pa to ne gre. Ne poznamo nobene formule, ki bi dala vrednosti funkcije $f(n) = n!$ in bi vsebovala samo elementarne računske operacije v končnem številu. Tu nas ne sme motiti dejstvo, da je za vsak dan n vrednost $f(n) = 1 . 2 . 3 \ldots n$ enaka produktu končnega števila faktorjev, kajti število faktorjev ni za vsak n isto. Za primerjavo si oglejmo funkcijo $f(n)$, ki daje vsoto zaporednih lihih števil $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$. Pri danem n je $f(n)$ vsota končnega števila sumandov, toda število sumandov se z n spreminja. Če pa pišemo $f(n) = n^2 = n . n$, velja ta formula za vsak n in sta v njej samo dva faktorja. Podobne formule za $n!$ ne poznamo.

Najosnovnejši aritmetični funkciji sta vsota $a + n$ in produkt an. Uvedemo ju neposredno z rekurzijo, ne da bi potrebovali kako pomožno funkcijo. Vseh rekurzivnih funkcij pa žal ne moremo eksplicitno definirati s formulo, ki bi bila zgrajena s končnim številom teh dveh funkcij. Izredno pomembno za raziskovanje osnov v matematiki pa je dejstvo, da nam kljub temu v aritmetiki te dve funkciji v principu že zadoščata, ker moremo vsako drugo rekurzivno funkcijo eksplicitno definirati, čeprav, kakor rečeno, ne v obliki neke formule, ki bi vsebovala le seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja v končni množini. Kako je sploh to mogoče? Oglejmo si najprej tale zgled:

Naj bo L neka lastnost, ki je smiselna za naravna števila. Dana je npr. neka funkcija $f(n)$ in število n ima lastnost L, kadar je $f(n) = 0$. Pa denimo, da eksistira eno in samo eno naravno število z lastnostjo L. Imenujmo to število c. S tem smo c natančno definirali, čeprav ga morda ne poznamo. Včasih namreč dokažemo eksistenco kakega števila tako, da privedemo nasprotno trditev do protislovja.

Naj bo zdaj L neka relacija med dvema naravnima številoma m in n. Denimo, da eksistira k vsakemu naravnemu številu n natanko eno naravno število m, ki je z n v tej relaciji L. Ker pripada vsakemu številu n en sam m, lahko postavimo $m = f(n)$. Tako smo definirali neko funkcijo $f(n)$, čeprav morda njenih vrednosti za nekatere n ne znamo izračunati. Naj bo na primer relacija L podana z enačbo $2m = n(n + 1)$. Za vsak n ima ta enačba eno samo rešitev m. Tu je $f(n) = \frac{1}{2} n(n + 1)$.

Včasih je več naravnih števil z lastnostjo L. Eno med njimi pa je najmanjše. To je potem natanko določeno. Oglejmo si primer. Naj bosta a in b pozitivni celi števili. Enačba

$$a = by + x \tag{15}$$

je zmerom rešljiva z nenegativnimi celimi števili x in y. Ena rešitev je že kar $x = a$ in $y = 0$. Zato eksistira rešitev, pri kateri je x najmanjši. Najmanjši x je očitno ostanek, ki ga dobimo pri deljenju števil a in b. Ta ostanek smo označili z $\varrho(a, b)$. Rekli smo tudi, da je $\varrho(a, b)$ rekurzivna funkcija. Zdaj pa lahko definiramo ostanek $\varrho(a, b)$ kot najmanjši x, pri katerem je enačba (15) rešljiva s celim številom y. To je eksplicitna definicija za funkcijo $\varrho(a, b)$. V enačbi (15), ki je bila osnova za to definicijo, nastopata samo vsota in produkt. Tako smo spoznali primer za eksplicitno definicijo rekurzivne funkcije, pri čemer pa te funkcije nismo izrazili z neko formulo.

Vzemimo zdaj poljubno rekurzivno funkcijo $f(n)$, ki jo določa shema (I)

$$f(0) = c, \quad f(n + 1) = g[n, f(n)] \tag{16}$$

c je tu dano število, $g(n, m)$ pa znana funkcija. Eksplicitno definicijo za $f(n)$ je našel K. Gödel takole: Postavil je $a_k = f(k)$ in vzel $n + 1$ členov zaporedja

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{17}$$

To zaporedje je tako, da velja $a_0 = c$ in $a_{k+1} = g(k, a_k)$ za $k < n$. Naloga je zdaj ta, poiskati zaporedje (17) z nenegativnimi celimi števili, ki ustreza tem pogojem. Izberimo najprej neko dovolj veliko naravno število d tako, da so si členi aritmetičnega zaporedja

$$1 + d, \quad 1 + 2d, \quad \ldots, \quad 1 + nd, \quad 1 + (n + 1)d$$

med seboj tuji in da so vsi večji od členov zaporedja (17). Ni težko uvideti, da tako število d res eksistira, lahko npr. vzamemo kar $d = n!r$, pri čemer je r dovolj velik. Zdaj nam pa teorija števil zagotavlja*, da eksistira naravno število x, ki reši vse kongruence

$$x \equiv a_0, (1 + d), \quad x \equiv a_1, (1 + 2d), \quad \ldots, \quad x \equiv a_n, (1 + (n + 1)d)$$

Ker je a_k manjši od števila $1 + (k + 1)d$, je zaradi teh kongruenc a_k enak ostanku, ki ga dobimo pri delitvi števila x s številom $1 + (k + 1)d$. Če upoštevamo, kako so povezani členi a_k med seboj, lahko zdaj formuliramo naslednji izrek:

Izrek L. Za vsako naravno število n eksistirata dve taki naravni števili d in x, da je

1. $\varrho(x, 1 + d) = c$

in da velja za vsak $k < n$ zveza

2. $\varrho(x, 1 + (k + 2)d) = g[k, \varrho(x, 1 + (k + 1)d)]$.

Veljavnost tega izreka moremo dokazati tudi s popolno indukcijo popolnoma neodvisno od gornjega sklepanja. Števil x in d, katerih eksistenco zagotavlja ta izrek, je neskončno. Zaznamujmo s $h(n)$ najmanjše izmed števil d. Potem seveda eksistira tak x, pri katerem je

$$\varrho(x, 1 + h(n)) = c \tag{18 a}$$

in za vsak $k < n$ velja

$$\varrho(x, 1 + (k + 2)h(n)) = g[k, \varrho(x, 1 + (k + 1)h(n))] \tag{18 b}$$

Spet je nešteto x-ov, ki pri danem n ustrezajo temu pogoju. Označimo najmanjšega med njimi z $j(n)$ in zdaj postavimo

$$f(n) = \varrho(j(n), (n + 1)h(n) + 1) \tag{19}$$

$f(n)$ je ostanek, ki ga dobimo pri deljenju števila $j(n)$ s številom $(n + 1)h(n) + 1$. Z našimi predpisi smo $f(n)$ natančno definirali za vsak n. Brez težave dokažemo,

---

* Glej npr. knjigo J. Plemelj, Algebra in teorija števil, str. 143.

da ta funkcija ustreza rekurzivni shemi (16). To je iskana eksplicitna definicija funkcije $f(n)$. Pri tej definiciji moramo poznati razen funkcij $g(m, n)$ in $\varrho(a, b)$ le seštevanje in množenje, kar je razvidno iz enačb (18 a, b) in (19). Funkcija $g(m, n)$ mora biti dana, $\varrho(a, b)$ pa smo že prej eksplicitno definirali. Nazadnje se še spomnimo na pomen relacije $k < n$: Število k je manjše od števila n, kadar eksistira tako naravno število $z > 0$, da je $n = k + z$.

Oglejmo si kot primer potenco $f(n) = a^n$. Tu je $c = f(0) = 1$ in $g(m, n) = am$. Izrek L se zdaj glasi:

Vsakemu naravnemu številu n pripada najmanj en par naravnih števil d in x, da je

$$\varrho(x, 1 + d) = 1$$

in da velja za vsak $k < n$ zveza

$$\varrho(x, 1 + (k + 2)\, d) = a\, \varrho(x, 1 + (k + 1)\, d)$$

Tako smo spoznali, da sta nujno potrebni za zgradbo aritmetike le rekurzivni definiciji za vsoto in produkt, vse druge primitivno rekurzivne funkcije pa se dajo vsaj teoretično nadomestiti z eksplicitno definicijo.

Literatura:

D. Hilbert — P. Bernays: Grundlagen der Mathematik. I. Berlin 1934.

R. Peter: Rekursive Funktionen. Budapest 1951.

R. C. Buck: Mathematical Induction and Recursive Definitions. The Amer. Math. Monthly 70. 1963, str. 128—135.

Knjižnica katedre za matematiko Ljubljana

MODERNA MATEMATIKA IN POUK NA SREDNJI ŠOLI

JEAN DIEUDONNÉ, Pariz[1] — Prev. NIKO PRIJATELJ

Predavanje na 27. zborovanju za gojitev stikov med univerzo in srednjo šolo v Münstru (Westfalija), dne 26. 5. 1961.

I. RAZVOJ MATEMATIKE IN RAZVOJ POUKA

Pred kratkim so mi pripovedovali o mnenju nekega učitelja »Mathématiques spéciales« (to so sklepni srednješolski matematični kurzi, ki pripravljajo dijake za sprejem na vélike francoske tehnične visoke šole, predvsem na Ecole Polytechnique): Menda je iskreno prepričan, da se ni matematika v zadnjih petdesetih letih prav nič spremenila! Prav gotovo vi, spoštovani poslušalci, niste tega mnenja, saj ste se vendar zbrali tukaj zato, da bi slišali moje predavanje. Pa tudi dobro vam je poznano, da je bila izvršena v letih 1920—1940 popolna preobrazba v klasifikaciji različnih področij matematike, izzvana z novimi predstavami o samem bistvu matematičnega mišljenja, ki so izhajale iz del CANTORJA in HILBERTA. Z njima začenja sistematična aksiomatizacija celokupne matematične znanosti in fundamentalni pojem matematične strukture.

Toda morda ne veste, da doživlja matematika prav zdaj svojo drugo revolucijo, ki v nekem smislu dopolnjuje delo prve s tem, da osvobaja matematiko njenih pretesnih vezi s pojmom »množice«. To je teorija kategorij in funktorjev, za katero je še prerano, da bi ocenili njeno daljnosežnost in pregledali njene nasledke. Nedvomno pa bo vodila do reorganizacije in do nove izgradnje sodobnih matematičnih teorij.

Razume se, da matematični pouk na univerzi ne more v nedogled ignorirati takih preobrazb, če naj izpolnjuje svojo najodličnejšo nalogo, služiti napredku današnje znanosti, s tem da seznani mlade raziskovalce z najboljšimi in najučinkovitejšimi sredstvi. In zares vidimo, da so se zamisli iz let 1920—1940, o katerih sem pravkar govoril, po začetnih neogibnih nasprotovanjih, razširile povsod po svetu ter predstavljajo sedaj osnovo matematičnega študija na večini velikih univerz.

V koliki meri pa naj tudi pouk na srednji šoli odseva te spremembe? Preden odgovorimo na to vprašanje, je morda primerno, da pojasnimo cilje matematičnega pouka na tej stopnji. Pri tem je vsekakor potrebno ločiti dijake v dve skupini: eni (in ti so v večini, najmanj 80 %) ne bodo matematike (razen elementarne aritmetike) nikoli rabili; drugi pa bodo kasneje nadaljevali študij na tehničnih visokih šolah ali na naravoslovnih fakultetah univerz in je zato matematika zanje bolj ali manj nujno potrebno sredstvo. Za prve more imeti pouk matematike (kakor tudi pouk drugih strok) komaj kakšen drugačen cilj, kot da nekoliko prispeva k njihovi splošni izobrazbi. Zato smemo reči, da je vsebina tega, kar jim na tem področju podajamo, nasploh brez odločilnega

[1] Jean Dieudonné je eden izmed »mojstrov« sodobne francoske matematične šole. Posebno je poznan po svojih delih s področja funkcionalne analize. (Opomba prevajalca.)

pomena. Za te dijake reforma matematičnega pouka morda res ni neogibno potrebna. Kljub temu pa bi človek mislil, da je bolj smiselno, če jim omogočimo vpogled v matematiko 20. stoletja (toliko, kolikor je to pač mogoče), kot pa da jih bremenimo z zastarelimi teorijami. Saj bi bilo prav tako malo razumno, če bi se pouk fizike in biologije omejeval izključno le na spoznanja 18. in 19. stoletja, ne da bi sploh omenjal pojem elektrona ali celice.

Vse drugačen in še kako nujen pa je ta problem za bodoče študente naravoslovja. Le o njih naj bo govora v naslednjem. V prejšnjem predavanju so vam pokazali na osnovi statističnih podatkov, kako porazen je izid prvoletnega študija matematike. Zelo znaten del študentov obupa pred jezikom in načinom mišljenja, na katera niso bili z ničemer pripravljeni in zato spremeni smer svojega študija. Tako število uspešnih študentov v matematiki nikakor ne raste, čeprav prihaja na univerzo vedno več mladih ljudi. V našem času, ko postaja raba matematičnega jezika na številnih področjih vse bolj neogibna, tiči v tem zelo resna nevarnost, kateri se moramo čimprej zoperstaviti Ker si univerza ne more dovoliti, da bi zaostajala, je zato naloga srednje šole, da brž ko mogoče prilagodi svoje učne programe spremenjeni situaciji.

II. ZASTARELI NAČIN MATEMATIČNEGA POUKA NA SREDNJI ŠOLI

Mnogi učitelji se čudijo, in ne brez razloga, nad tem, da naj bi zdaj nenadoma postala nujna temeljita reforma matematičnega pouka. Saj navsezadnje so vendar obstoječi učni programi v zadnjih 100 letih komajda kdaj trčili na ugovor pa tudi nikoli še niso vodili do takega prepada med srednješolskim in visokošolskim poukom, kakor ga danes zapažamo. Razlog tiči v tem, da je matematika sicer tudi v vsem 19. stoletju napredovala z ogromnimi koraki, da pa je vendar v bistvu ostala »klasična«. To pomeni, da so bile njene osnovne koncepcije še zmeraj iste, kot so jih učili tudi v srednji šoli. Napredek se je odvijal »v višinah» in sicer tako, da so se vedno novi izsledki dodajali že poznanim, medtem pa le-ti niso imeli nikakršnega vpliva na osnovni pouk. Toda razvoj v tem smislu je bil naposled zaključen s tem, da je privedel do pravkar opisane preobrazbe, ki je bila brezpogojno potrebna za nadaljnje napredovanje. In v luči teh novih pojmovanj je nastalo spoznanje, da je postal elementarni matematični pouk s svojimi nespremenjenimi metodami in učnimi programi živi fosil, ki je zaradi svojega zastarelega jezika, svojih ozkih in zaostalih pojmovanj, svojih neverjetno nerodnih in nezadostnih metod povsem odrezan od današnjih matematičnih raziskovanj. Navedimo nekaj zgledov teh fosilij!

A. Zastareli jezik

Način izražanja in označbe teorije množic so medtem prodrla na vsa področja matematike. Vendar pa se skrbno čuvamo, da jih ne bi vpeljali tudi v srednjo šolo. Še naprej govorimo o »geometrijskem mestu« namesto o »podmnožici«. Nikoli ne uporabljamo simbolov teorije množic ali logičnih simbolov kot: $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, E, $\forall$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, niti ne vpeljemo splošnih pojmov, ki jih ti simboli izražajo. Mimo tega bi imeli tudi v šoli neprestano priliko, da seznanimo dijake s primeri grupe, obsega ali ekvivalenčne relacije. Vendar jih nikoli ne imenujemo s temi imeni, dokler se ni učenec, tako obsojen na nevednost, prisiljen na univerzi takoj navaditi na njihovo stalno rabo.

B. Zaostala pojmovanja

Pod ta naslov bi mogli spraviti skoraj celotni srednješolski učni načrt. Zdi se, kakor da bi naravnost stremeli za tem, kako bi se vsake reči lotili

kolikor mogoče z napačnega konca in skrbno se varujemo izhajati takoj na začetku iz nadrejenih gledišč, ki bi mogla služiti za to, da bi razložila uporabljene metode. Kakor bomo kmalu videli, zadeva to predvsem geometrijo. Tukaj se želimo omejiti le na en primer iz algebre. Poglavitni problem algebre v srednji šoli je numerično reševanje enačb $f(x) = 0$. In kakor sem imel priliko že večkrat ugotoviti, ohranijo inženirji in fiziki v spominu kot resnično bistvo dolgih let, v katerih so se s tem namučili v šoli pa tudi izven nje, da je reševanje enačb identično s problemom, kako najdemo tak »analitični izraz«, ki daje rešitev kot funkcijo parametrov, od katerih je odvisen tudi f. To smešno naziranje je usedlina dolgih mesecev, v katerih so se ubadali edino in samo s kvadratno enačbo in njeno slovito rešitveno formulo. Seveda pa smo skrbno pazili, da jim ne bi povedali, da gre pri tem le za izjemen primer, ki je povsem nezanimiv za nadaljnji razvoj algebre in da »razrešiti« enačbo ne pomeni nič drugega, kot poiskati neskončne aproksimativnostne postopke za korene!

C. Okorne metode

19. stoletje, zlata doba »geometrije«, je bilo polno nesmiselnih prepirov med zagovorniki različnih »geometrij«: »čista geometrija«, »analitična geometrija«, »projektivna geometrija«. Pripadnik vsake teh sekt je porabljal svoj čas za to, da si je razbijal glavo, kako bi uspel s svojimi metodami dokazati prav toliko izrekov kakor njegovi tekmeci! Vse to je prodrlo tudi v osnovni pouk, ki je ostal vse do danes razcepljen na prav toliko različnih disciplin, h katerim moramo seveda dodati še trigonometrijo. Še danes lahko najdete univerze, ki prirejajo predavanja o »brezkoordinatni projektivni geometriji« von Staudtovega kova! Na vso srečo za matematike so ideje GRASSMANNA, KLEINA in HILBERTA odpravile to nerazrešljivo zmedo, tako da se nam vidi spor »geometrov« 19. stoletja enako nerazumen, kakor prepir Bizantincev o spolu angelov! Kajti danes vemo, da so vse te geometrične »psevdoteorije« samo različni vidiki ene same veje algebre in sicer linearne algebre nad obsegom realnih števil, če se omejimo na 2 in 3 dimenzije. Morda je prav, če spomnimo tukaj brž aksiome te teorije, ki so v svoji občudovanja vredni preprostosti pokazali naposled »kraljevsko pot«, po kateri so nekoč zaman spraševali Evklida. Izhajajoč iz nedefiniranih pojmov kakor so: vektor, vsota $x + y$ dveh vektorjev, produkt $k \,.\, x$ vektorja x s skalarjem k in skalarni produkt $x \,.\, y$ dveh vektorjev, določimo njihove lastnosti z aksiomi, ki se dele v dve skupini:

I.

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. eksistira vektor 0, ki ima lastnost, da je
$$0 + x = x,$$
za vsak vektor x
4. $k \,.\, (x + y) = k \,.\, x + k \,.\, y$,

za vsak skalar k (izreki o premičju!)

5. $(k + m) \,.\, x = k \,.\, x + m \,.\, x$ in
6. $(km) \,.\, x = k \,.\, (m \,.\, x)$,

za poljubna skalarja k in m

7. $1 \,.\, x = x$.

Končno pride še aksiom, ki omeji dimenzijo (maksimalno število linearno neodvisnih vektorjev) na 2 ali 3.

II.

1. $x \cdot y = y \cdot x$
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
3. $(k \cdot x) \cdot y = k \cdot (x \cdot y)$,

za vsak skalar k

4. $x \cdot x > 0$,

za vsak vektor $x \neq 0$.

Iz prve skupine aksiomov izpeljemo na nekaj straneh vse potrebne definicije in izreke afine geometrije. Če pa privzamemo še drugo skupino aksiomov, dobimo enako preprosto vso evklidovo geometrijo. (Naj tukaj posebej opozorimo na to, da je pri klasični porazdelitvi nemogoče izvršiti to važno ločitev, saj je »afini« pojmi, kakor na priliko pojem »vzporednice«, že od vsega začetka prepletajo z »metričnimi« pojmi, kakor sta dolžina in pravokotnost, v nerazpletljiv klobčič.) Pomnite prosim: takojšnja vpeljava pojma baze vodi nemudoma ne le do tradicionalne »analitične geometrije«, ampak hkrati tudi v teorijo matrik in determinant 2. in 3. reda. Po drugi strani pa dobimo s študijem grupe ravninskih podobnostnih transformacij istočasno in na povsem naraven način kompleksna števila in trigonometrijo, pri čemer se izkaže oboje le kot dvoje interpretacij istih algebraičnih dejstev.

Glede na to teorijo, ki je vendar tako enostavna in elementarna, kakor si jo le moremo želeti, v kateri izhaja vse skoraj samo po sebi iz osnovnih principov, se zdi nerazumljivo, da še naprej izgubljamo dragocena leta s tem, da z neskončnim trudom postavljamo na noge stavbo evklidove geometrije in se izrecno ukvarjamo s »skladnimi trikotniki«, »podobnimi trikotniki« in drugimi otročarijami, ki ne bodo, v kolikor izginejo, zapustili v univerzitetnem pouku niti najmanjše vrzeli. Zato pa naj bi raje v zadnjih letih na srednji šoli prišli vse do osnovnih zamisli linearne algebre, na katere smo zgoraj spomnili, in ki niso le temeljne, kakor smo pokazali, v elementarni matematiki, temveč obvladujejo tudi celotno moderno algebro, ki se poučuje na univerzi. Težko bi našli boljši primer za to, kako vpregamo v šoli plug pred vola... Treba je še dodati, da sloni ta starinska in okorna stavba, kakor vsi vemo, na nezadostnih osnovah, kjer se prepletata aksiomatika in »intuicija« na način, ki je gotovo primeren, da vzame pogum mladi glavi, ki stremi po strogosti in jasnosti. Vendar pa naj bi glavni očitek, ki ga lahko uperimo proti tej stari šari, po mojem mnenju ne bil nujno v tem. Meni se zde veliki napori, s katerimi se zdaj trudijo različna učiteljska združenja, kot na priliko »School mathematics Study group« v ZDA, da bi postavili tradicionalno šolsko matematiko na zadovoljive logične temelje, tratenje časa in energije. Ti reformatorji, ki jim gotovo ne manjka dobre volje, so preprosto prezrli, da bi morali poskušati srednješolsko matematično učno snov zopet pravilno vskladiti s celotno sodobno matematiko. Namesto tega pa jo obravnavajo kot nekaj, kar je samo v sebi zaključeno in s tradicijo tako posvečeno, da je treba brezpogojno spoštovati. V resnici pa bi bilo edino razumno, če bi to črvivo zgradbo popolnoma podrli in začeli znova graditi na zanesljivih osnovah, tako da bi mogli pripeljati učenca brez zamude na prag »višje« matematike, s katero se bo srečal na univerzi.

III. NEKAJ NAČEL

Preden očrtamo program, ki bi izpolnil te želje, je primerno, da spomnimo na nekaj temeljnih načel, ki jih le preradi spregledamo:

1. Vsak izurjen matematik ve, da »nazornost« kakega predmeta ne pomeni nič drugega, kot da nam je ta predmet postal zadosti domač. Nove pojme je

treba zato dovolj pogosto uporabljati, da jih naposled »dojamemo«. Dokler tega ne dosežemo, lahko sicer korak za korakom preverimo logično pravilnost kakega dokaza, vendar smo nesposobni, da bi dokaz sami izpeljali. Manjka nam zmožnost vživetja, ki bi nam dalo slutiti veljavne zveze in pota, po katerih bi jih dokazali.

2. Brez dvoma je ta proces počasnega vživljanja tudi v šoli pomemben. Gotovo so mimo tega doraščajočemu slike, »konkretne« predstave matematičnih objektov, v veliko pomoč in na poti k abstrakciji skoraj neogibne. Načelno moremo tedaj reči, da naj se v nasprotju z univerzo ne uvajajo na srednji šoli pojmi, ki ne dopuščajo ponazoritve. Tako se moramo na primer v linearni algebri omejiti na realne dvo- in tridimenzionalne prostore, ki edini dovoljujejo grafično ponazoritev. In šele ko je učenec tako dojel v tem posebnem primeru mehanizem aksiomov in dokazov, mu pač ne bo več težko preiti v 1. študijskem letu k splošnim vektorskim prostorom poljubnih dimenzij. Če pa bi, kakor zagovarjajo nekateri, že prej vpeljali n-dimenzionalne prostore ali algebro polinomov, bi se utegnilo zgoditi, da bi dosegli prav nasprotno od tega, kar želimo, ker bi preplašili učence z abstrakcijo, katere potrebo na tej stopnji še ne morejo razumeti.

3. Celo pri »poklicnem matematiku« se ta le na pol zavestni psihološki proces, s katerim doseže zaželeno domačnost z novim pojmom, ne izpolni tako, da sledi strogi aksiomatski shemi, temveč s tem, da se vedno jasneje zaveda, kaj lahko upravičeno pričakuje v zvezi z ustreznim matematičnim objektom. Še toliko bolj naj velja v šoli osnovno načelo, da obravnavamo aksiomatično le take reči, ki so učencem na pol eksperimentalni osnovi že dolgo poznane, pri čemer se moremo poslužiti tudi primerov iz fizike. V aritmetiki ravnamo tako že od nekdaj: učijo se je že šestletniki, vendar pa jo dokazujemo navadno šele v zadnjem razredu srednje šole. To načelo naj bi bilo upoštevano na vseh področjih, predvsem tudi v geometriji, kjer more prezgodnja (in mimo tega nepopolna) aksiomatika, kakršna je danes v navadi, imeti za posledico, da zmede predstave o tem, kaj pomeni nekaj dokazati.

IV. OSNUTEK NAČRTA

Načrt, ki ga hočemo tu predlagati v grobih potezah, sloni na pravkar omenjenih načelih in ima za cilj, da vpelje v šolski pouk postopoma in v kolikor mogoče primerni obliki pojme, ki jih v modernem matematičnem visokošolskem pouku razvijamo in posplošujemo. Vse kar spada v tista področja matematike, ki so bila sicer nekoč v polnem razcvetu, pa so zdaj presežena in nič več ne prispevajo k »živi« matematiki, moramo brez usmiljenja črtati, da bi pridobili prostor za reči, ki so neprimerno večjega pomena. To zadeva predvsem »čisto geometrijo«, ki je sedaj neverjetno napihnjena z vsemi mogočimi prismodarijami, kakor so »geometrija trikotnika«, »goriščne lastnosti stožernic«, »šopi krogov«, »inverzije« in še in še..., ki pomenijo v moderni matematiki le slepo ulico. Skoraj isto velja za klasično »projektivno geometrijo«, prav tako dedinjo 19. stoletja, ki nima v srednji šoli prav nič opraviti in je celo pri predavanjih na visokih šolah odveč, če ne gre za specialna predavanja (na primer priprava za doktorski izpit), namenjena bodočim algebraičnim geometrom. Algebraična geometrija je namreč dejansko požela plodove dela naših očetov v projektivni geometriji in hkrati nedopovedljivo razširila nauk o krivuljah in ploskvah nižjega reda ter iz njega ustvarila teorijo, ki je prav tako očarljiva kot veličastna, pri tem pa tako težka in

abstraktna, da more v njo prodreti le majhen krog nadpovprečno nadarjenih študentov. Mimo tega gre pri tem za področje »čiste« matematike v najglobljem pomenu te besede, ki še ne kaže nobene možnosti uporabe in zato ni razloga, da bi jo posredovali bodočim fizikom in inženirjem.

Poleg tega cilja matematičnega pouka v srednji šoli, ki meri izključno le na kasnejše možnosti uporabe, pa je nujno, da naučimo dijaka uporabljati aksiomatično metodo. V tem je neogibna priprava na univerzitetni pouk, ki sloni danes povsem na tej metodi. Če upoštevamo torej zgoraj navedena načela, vidimo, da mora srednješolski matematični pouk vsekakor vsebovati dve komponenti: Treba je učiti matematično »prakso«, ne da bi vztrajali pri pretirani strogosti. To pomeni, da smemo sicer brez dokaza, kar pa moramo izrecno poudariti, pritegniti določene rezultate, ki jih pri računih neogibno potrebujemo. In treba je dosledno razvijati aksiomatiko, s tem da se naslonimo na pojme, ki so postali zaradi stalne rabe že povsem domači.

Zdaj pa pojdimo v podrobnosti in upoštevajmo pri tem različne starosti učencev:

1. Pred 14. letom. Izgleda zagotovljeno, da pred to starostjo razum otroka ni sposoben misliti abstraktno. Matematika, ki jo poučujemo na tej stopnji, ne sme tedaj vsebovati nobenih aksiomatičnih področij, marveč se mora odvijati povsem na »eksperimentalni« ravni. V algebri se je treba brž ko mogoče seznaniti z negativnimi števili in z računanjem z občimi števili in treba je znati reševati linearne enačbe z več neznankami. Vse to pa, ne da bi učitelj poskušal kaj dokazovati; v nasprotju z nekaterimi učbeniki, ki velikopotezno naznanjajo, da dokazujejo izreke o »ekvivalenci« enačb, medtem ko niti ne omenjajo aksiomov realnih števil! Tudi geometrijo je treba učiti kot neke vrste »fiziko obdajajočega prostora«, da se učenec spozna s pojmi, ki jih bo moral kasneje uporabljati. Seveda pa je neogibno, da je ta »eksperimentalni« pouk s premislekom tako zasnovan, da se otrok ne seznanja s tako izumetničenimi in nepomembnimi podobami kot je trikotnik (že ime bi bilo treba pregnati iz vsega pouka!), ampak s tako temeljnimi pojmi kot so vektor, translacija, rotacija, simetrija, podobnost itd. Naposled je treba že na tej stopnji seznaniti učenca z matematičnim jezikom in simboli teorije množic in logike, razume se, da brez vsakršne teorije, marveč na enak način, kakor smo ga seznanili s simboli in pojmi algebre. Prav gotovo ni nič abstraktnega ali nerazumljivega v rabi besed »grupa« ali »kolobar«, če s tem opišemo lastnosti celih (pozitivnih in negativnih) števil ali translacij oziroma podobnostnih transformacij.

2. Od 14. do 15. leta. Na področju »prakse« je treba razširiti v prejšnjih letih pridobljeno znanje na začetke »analitične geometrije« v obliki »grafičnega predočanja funkcije«, ki jo je mogoče v enostavnih primerih vpeljati tudi že prej, na »enačbe« enostavnih krivulj, kot sta premica in krog (ne da bi stremeli po strogih dokazih), in na zvezo med konstrukcijo krivulj $y = f(x)$ ter reševanjem enačb $f(x) = a$, kar je treba vedno skupaj obravnavati.

Kar »aksiomatike« tiče, se mi zdi v skladu s prej izraženimi načeli smotrno, da začnemo s tistimi pojmi, ki so učencu najbolj poznani, namreč z aritmetičnimi, s katerimi se ukvarjajo že od svojega šestega leta naprej.

Drugače povedano: prvi sistem aksiomov mora biti za naravna števila (»PEANOVI aksiomi«), ki se odlikuje po tem, da je najenostavnejši in najbolj neposredno razviden. Razume se, da bomo aksiome vpeljali šele tedaj, ko bodo

učenci toliko zreli, da bodo spoznali njihovo nujnost. Eksperimentalni izvor pojma naravnega števila jih je seveda pripravil do tega, da sprejemajo brez globljega premisleka ali ugovora lastnosti teh števil. »Nazorno je očitno«, da je na primer $3 \neq 3 + 1$. Vendar jih je treba pripraviti do spoznanja, da so tej razvidnosti spodmaknjena tla, brž ko gre za zelo velika števila. Na osnovi katerih dejstev moremo trditi, da je $10^{1000} + 1 \neq 10^{1000}$ in kakšen smisel ima sploh taka vrsta znakov? Šele kadar taka vprašanja enkrat resnično razumejo, postane odgovor, ki je dan z aksiomi, čisto naraven. Potem moremo iti še korak naprej in dokazati najvažnejše lastnosti naravnih števil (na priliko, da je $x \cdot y = y \cdot x$), kar je odlična vaja v uporabi načela popolne indukcije, ki je temeljno sredstvo v vsej matematiki.

3. Od 15. do 16. leta. V tem obdobju naj bi se »eksperimentalna« matematika nadaljevala z začetnimi pojmi diferencialnega računa in sicer v obliki računanja odvodov, tangent, maksimov in minimov, aproksimativnih metod za izračunavanje korenov enačb ipd. To so reči, ki so neogibne pri »grafičnih« metodah, katere smo vpeljali leto prej. Z »aksiomatičnega« vidika pa je napočil čas, da razvijemo algebrski račun, ki je učencem te starosti že dolgo domač, iz aksiomov realnih števil. Pri tem seveda ne mislimo na abstraktno izgradnjo, ki izhaja iz racionalnih števil v smislu CANTORJA in DEDEKINDA. Take konstrukcije naj bi ne učili niti na univerzi, razen tiste študente, ki hočejo postati »poklicni matematiki«. Pa tudi v tem primeru le tedaj, kadar jih opravičimo s splošnimi odnosi (»polnost« prostora v topologiji). Toliko manj je zato njihovo mesto v srednji šoli. Nasprotno pa moremo brez najmanjših težav našteti aksiome obsega realnih števil (urejen, arhimedov, poln obseg) in iz tega izpeljati osnovne lastnosti. Ob tem se moremo celo omejiti na aksiom, ki je nekoliko šibkejši od »aksioma polnosti«, da ima namreč vsak polinom z realnimi koeficienti med dvema točkama, v katerih zavzame vrednosti različnih predznakov, vsaj eno ničlo.

4. Od 16. do 17. leta. Uporaba diferencialnega računa naj bi že tako napredovala, da bi dovoljevala obravnavo ravninskih krivulj, ki so dane v parametrični obliki $x = f(t)$, $y = g(t)$. Pri tej starosti bi mogli tudi že podati prvi očrt integralnega računa in pokazati njegovo uporabo pri izračunavanju enostavnih ploščin.

V »aksiomatični« smeri pa je čas, da navedemo aksiome linearne algebre za 2 dimenziji, katere smo že omenili, in da potegnemo iz njih potrebne zaključke. (Vso znano »šaro« »čiste geometrije« je treba seveda neusmiljeno črtati!) Če je bila v prejšnjih letih »eksperimentalna« priprava na te aksiome dobro izvedena, ne bi smela zdaj njihova vpeljava povzročati nikakršnih težav več in odkrivanje logičnih posledic teh aksiomov bo potekalo preprosto in z lahkoto. Od tega hipa naprej je treba seveda uperiti vso pozornost na pojem linearne transformacije, ki jo razložimo s številnimi poznanimi primeri, in na matrični račun 2. reda, ki je njen ustrezni analitični izraz.

5. Od 17. do 18. leta. »Prakso« dopolnimo z rabo polarnih koordinat v ravnini in s pojmom (realnega ali kompleksnega) eksponenta, seveda v povezavi z »aksiomatično« platjo, ki vodi, na osnovi v prejšnjem letu začetega študija grupe rotacij v ravnini, hkrati v trigonometrijo in do računanja s kompleksnimi števili. Naposled bo zdaj tudi lahko, na istem modelu kakor prej za 2 dimenziji, razviti tridimenzionalno algebro in prve osnove teorije

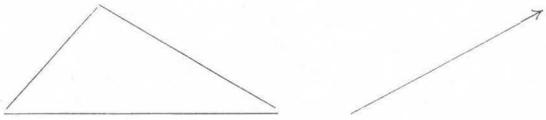
bilinearnih in kvadratnih form v 2 in 3 dimenzijah, ki naj nadomestijo stožernice in ploskve drugega reda stare geometrije.

Po vsem tem bo učenec kar najbolje pripravljen, da pristopi brez odlašanja in brez pretiranih naporov k »abstraktni« matematiki na univerzi.

V. UGOVORI IN KRITIKA

Zgornji program povsem očitno trči ob stoletja stare navade in prelamlja s tradicijo. Zato moramo biti pripravljeni, da bo naletel pri mnogih matematikih in vzgojiteljih na bolj ali manj žilav odpor.

1. Vsekakor se mnogi boje, da je geometrija v obliki »linearne algebre« preveč abstraktna za srednješolca. Ta ugovor bi bil tedaj umesten, če bi hoteli že od vsega početka vpeljati pojem splošnega vektorskega prostora. Prav res bi rad vedel, zakaj naj bi bila od obeh tukaj narisanih »podob« leva »konkretna«, desna pa »abstraktna«.



Za vsakogar, ki je brez predsodkov, je leva gotovo umetelnejša! Iz strahu pred tako imenovano »abstrakcijo« vztrajajo nekateri pri različnih poizkusih, da bi vpeljali vektorske pojme kot »nasledke« »osnovnejših« (ali vsaj »nazornejših«) pojmov, kot so »vzporednica« ali »dolžina«. Zato predlagajo, da bi začeli z le-temi in nekim ad hoc postavljenim sistemom aksiomov, iz česar bi potem izpeljali aksiome vektorskega prostora. Le da je tem izpeljavam, ki delajo sicer čast ostroumnosti njihovih avtorjev, mnogo teže slediti kot pa računu linearne algebre; tako postavljajo v resnici z ogromnim trudom le neko ogrodje, ki ga sicer takoj zopet pozabimo, da bi z njim zakrili stavbo, ki je mnogo enostavnejša in lepša. Prepričan sem, da aksiomi linearne algebre ne smejo povzročati šestnajstletnikom nobenih resnih težav več, če so bili na nje pri »eksperimentalnih« vajah v prejšnjih razredih v zadostni meri pripravljeni. Prav rad priznam, da je težko dojeti pojem transformacije v vsej splošnosti, vendar sem prepričan, da izvira ta težava v tem, kakor v vsakem drugem primeru, le iz pomanjkljivega poznanstva s predmetom in da more postopno navajanje na ta pojem, skupaj s spretno izbranimi in večkrat ponovljenimi primeri, premagati te začetne psihološke težave.

2. Nekateri moji tovariši matematiki bi bili užaloščeni, ko bi videli odpravljene prenekatere izreke klasične geometrije. Otožno se spominjajo na »krog devetih točk« ali na »DANDELINove krogle«, ki so nekoč vplivale na njihovo prvo veliko estetsko doživetje matematike. Priznati moram, da nikakor nisem neobčutljiv nasproti takim argumentom, saj sem bil tudi sam deležen tega veselja, da, celo objavljal sem dela o »geometriji trikotnikov«! Nikakor ne zanikam, da pomeni velika iznajdljivost, ki je potrebna pri reševanju kakega elementarnogeometričnega problema s sredstvi »čiste geometrije«, za bodočega matematika učinkovito pobudo in mu omogoča spoznati njegov pravi poklic. In če bi imeli za matematični pouk v šoli na razpolago 10 ali 15 let, bi ne videl nič slabega v tem, če bi posvetili tudi tem estetskim vidikom primerem čas. Toda ne glede na to, da moremo najti brez truda na vsakem področju moderne matematike (med drugim tedaj tudi v načrtu, ki ga predlagam) »lepe« probleme in izreke, moramo vsekakor imeti v vidu dvoje dejstev: a) Prav gotovo ni

naloga šolskega pouka, ki je vendar namenjen velikemu številu učencev, da bi se ukvarjal s pripravo bodočih matematikov, ki predstavljajo le zelo majhen del vseh učencev. To je izključno naloga univerze, ki jo uresničuje z izredno specializiranim poukom, omejenim le na nekaj področij. b) Za vse druge (za katere je vsekakor nevarnost, da ostanejo neobčutljivi napram »estetskim« argumentom), pa je komaj čas, da se naučijo v nekaj letih tiste matematike, ki jo bodo rabili kasneje pri svojem poklicnem delu kot inženirji ali naravoslovci. Potemtakem učitelji nimamo pravice, da bi zanemarjali svojo dolžnost do velike večine, s tem da bi se predvsem ukvarjali le z bodočimi matematiki.

5. Preostane nam še poglavitni prigovor »konservativcev«, po mnenju katerih mora matematični pouk za vsako ceno ohranjati »tradicijo«. Ni mi znano, kdo je prvi izrekel to neumnost, ki se neugnano ponavlja in za katero zadostuje kratek premislek, da se razblini v nič. Ne zanikam, da ima beseda »tradicija« na določenih področjih človeške dejavnosti docela častitljiv smisel, ki ji po pravici pripada. Toda vse od KARTEZIJA naprej velja temeljna resnica, da je v naravoslovju možen napredek le tedaj, če se načelno ne brigamo za to, kar nam posreduje tradicija, in če se lotimo iskanja resnice brez vnaprejšnjih sodb. Najprevratnejša znanstvena spoznanja zadnjih tri sto let pričajo brez izjeme, da so nastala zato, ker so se njihovi »očetje« uprli pojmovanjem svojih prednikov. Zakaj naj bi bilo to, kar za naravoslovje nedvomno velja, brez vrednosti za pouk naravoslovja? Miselni postopek je isti in v matematiki je, prav tako kakor drugje ,naravna reakcija na že obstoječa pojmovanja poskus, da bi le-ta poenostavili in natančneje določili ter tako olajšali tudi pouk. Če naj verjamemo zagovornikom »tradicije« pri pouku, je otroška duševnost takšna, da mora, zato da bi sprejela nove ideje, po neke vrste osnovnem biogenetskem zakonu najprej preiti korak za korakom iste etape, kakor so jih naši predniki v zgodovini. Vendar nisem nikoli dejansko doživel kaj takega, kar bi to mnenje potrjevalo. Nasprotno, kadarkoli smo, moji tovariši ali jaz, vpeljali nove pojme v visokošolskem pouku, smo opazili, da je pojmovna poenostavitev zelo olajšala tudi razumevanje »klasičnih« rezultatov, ki jih je bilo mogoče opisati mnogo bolj naravno in jasno. Sicer pa so v resnici tudi sami zagovorniki »tradicije« daleč od tega, da bi ravnali po svojih lastnih načelih. Če hočemo otroka naučiti kolesarjenja, ali ga tudi silimo, da se najprej priuči »drezini« iz let 1820 ali pa strašilom z ogromnim sprednjim kolesom iz leta 1890, češ, da je treba slediti zgodovinskemu razvoju teh vozil? Že dolgo so si v kemiji na jasnem, da vpeljava atomskih pojmov na začetku predavanj pomembno olajša razumevanje reakcij, čeprav so se ti pojmi uveljavili šele po enem stoletju zmed in zmot. In, da se povrnemo k matematiki, ali se upajo zagovorniki »tradicije« učiti elementarno algebro (na primer teorijo kvadratnih enačb) v slogu 15. stoletja, ko še niso poznali VIETOVIH označb in je bilo treba izraziti vsebino kake formule z besedami? Ali naj bi tudi integralni račun začeli z metodo »indiviziblov« pod pretvezo, da je bila zgodovinska predhodnica NEWTONOVEGA in LEIBNITZEVEGA dela?

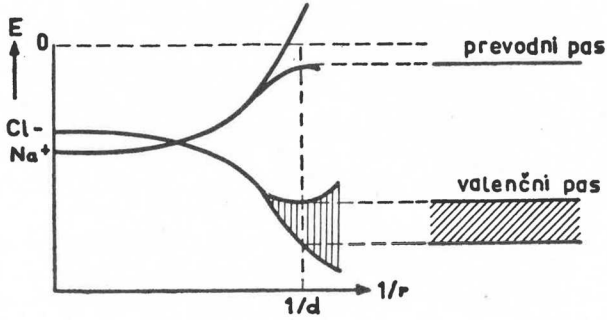
Do takih nesmislov utegnemo zlahka priti, če izhajamo iz neosnovanih predpostavk. STIEFELa in CAVALIERIja smo brez oklevanja spravili na podstrešje zgodovine matematike. Zakaj hočemo potem, če ne zaradi neodgovorne duševne vztrajnosti, da naj bo pri tem edino EVKLID izjema?

NASTAJANJE BARVNIH CENTROV V PLASTIČNO DEFORMIRANIH IONSKIH KRISTALIH

KRAŠEVEC VIKTOR

(Nuklearni inštitut »Jožef Stefan« v Ljubljani)

Ionske kristale imenujemo tako zaradi tega, ker njihovo kristalno mrežo tvorijo ioni. Atomi enega elementa oddajo enega ali več elektronov atomom drugega elementa. Taki ionski kristali so na primer natrijev klorid, kalijev klorid, litijev fluorid itd. Osnovne celice teh kristalov so ploskovno centrirane kocke. To pomeni, da ima vsak kation šest sosedov anionov in obratno, vsak anion šest sosedov kationov. V realnih kristalih pa ni vedno tako. V kristalni mreži je namreč mnogo najrazličnejših defektov. Če manjka na primer kation



Slika 1

ali anion, pravimo takemu defektu kationska, oziroma anionska luknja. Ion lahko tudi uide iz predpisanega položaja v kristalni mreži ter se vrine med ostale ione. Dobimo vrinjeni (intersticialni) ion in ionsko luknjo. Če se več lukenj združi, nastane kompleks lukenj. Poleg teh defektov so lahko v kristalni mreži tudi dislokacije, večvalentni kationi in razne ostale primesi. Vse te nepravilnosti kvarijo idealno kristalno mrežo.

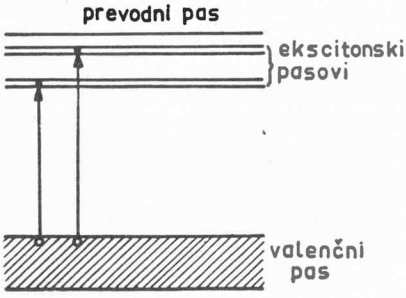
Ionske luknje v kristalni mreži, ali skupki teh lukenj, predstavljajo pasti, v katerih se lahko ujamejo elektroni ali elektronske vrzeli. Take tvorbe imenujemo barvne centre.

Poglejmo si nekoliko natančneje elektronske energijske nivoje v idealnem ionskem kristalu in nato v kristalu z defekti. Vzemimo kot poseben primer kuhinjsko sol — natrijev klorid. Kristalno mrežo tvorijo kationi Na^+ in anioni Cl^-. Atom natrija odda svoj edini elektron 3 s, iz zunanje lupine M, atomu klora, ki ima na zunanji lupini M dva elektrona 3 s in pet elektronov 3 p in mu torej manjka ravno en elektron 3 p, da bi bila lupina M polna. Natrijev atom postane torej kation z elektronsko strukturo neona in nezasedenim energijskim nivojem 3 s, klorov atom pa postane anion Cl^- z elektronsko strukturo argona ter zasedenim energijskim nivojem 3 p. Energijske nivoje obeh stanj ter njihovo

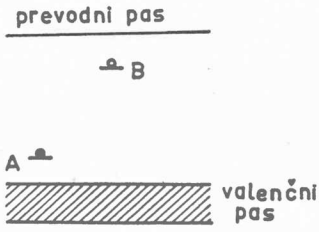
spreminjanje z medionsko razdaljo d nam kaže sl. 1. Vidimo, da se pri zmanjševanju medionske razdalje d energija višjega nivoja niža, nižjega pa viša, dokler ne postane končno energija nivoja 3 p nižja od energije nivoja 3 s. Oba nivoja se pri tem razširita v energijska pasova končne širine. Z elektroni je zaseden le nižji pas 3 p, ki mu pravimo tudi valenčni pas. Višji pas 3 s, ali kot ga tudi imenujemo prevodni pas, pa ostane prazen.

Če elektron v valenčnem pasu dobi dovolj energije, na primer z absorpcijo fotona, lahko preide v prevodni pas. V valenčnem pasu pa s tem nastane elektronska vrzel. Elektroni v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu sodelujejo pri prevajanju električnega toka. Opraviti imamo s fotoprevodnostjo. Absorpcijski spektri, ki jih povzročajo taki prehodi elektronov leže v ultravioličnem delu spektra.

Absorpcija fotonov pa ne povzroči vedno fotoprevodnosti (npr. absorpcija na dolgovalovni strani spektra in na prvem absorpcijskem maksimu), kar pomeni, da elektron ne preide vedno v prevodni pas, temveč, da obstajajo vmesna energijska stanja. Ti vmesni energijski nivoji tvorijo ekscitonske pasove. Eksciton si predstavljamo kot tvorbo iz elektrona v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu. Tvorba je podobna vodikovemu atomu. Elektron



Slika 2



Slika 3

je vezan na vrzel in obratno. Oba delca se nikoli ne oddaljita daleč eden od drugega. Zaradi medsebojnega privlačevanja elektrona in vrzeli leži energija kombinacije med valenčnim in prevodnim pasom (sl. 2). Eksciton ni obstojna tvorba. Njegova življenjska doba je približno 10^{-8} sekunde. Kljub kratki življenjski dobi eksciton lahko potuje v kristalni mreži in ji po razpadu odda svojo energijo.

Oglejmo si sedaj še, kako mrežni defekti, kationske in anionske luknje vplivajo na energijske nivoje elektronov v natrijevem kloridu. Elektron 3 p klorovega iona v bližini kationske luknje ni tako močno vezan kot sicer. Kationska luknja ima negativen efektivni naboj, kar povzroči, da pride laže do vzbuditve elektronov, ki leže v bližini take luknje. Lahko tudi rečemo, da elektron, ki je v bližini kationske luknje, ne leži v valenčnem pasu, temveč nekoliko nad njim (sl. 3). Če nastane na kakršenkoli način elektronska vrzel v zasedenem pasu, se le-ta lahko ujame na dvignjenem nivoju A. To pomeni, da elektron iz zasedenega nivoja A in elektronska vrzel iz valenčnega pasu zamenjata mesti. Tako tvorbo lahko smatramo za nevtralen klorov atom v bližini kationske luknje — imenujemo jo tudi center V_1. Stanje okrog anionske luknje lahko obravnavamo podobno. Anionska luknja zniža nezasedeni ener-

gijski nivo 3 s nekoliko pod prevodni pas (nivo B). Ker je efektivni naboj anionske luknje pozitiven, se lahko ujame v njej elektron iz prevodnega pasu. To tvorbo imenujemo center F.

Pojavijo se novi absorpcijski pasovi, ki so sorazmerni gostoti mrežnih defektov. Kristali, ki vsebujejo centre F, so obarvani. Natrijev klorid je rjavorumen, kalijev klorid moder, litijev fluorid rožnat itd.

Center F sestoji torej iz anionske luknje in v njej ujetega elektrona.[1] Poskusimo izračunati, kakšne energije ima lahko elektron v anionski luknji! Anionsko luknjo lahko v prvem približku nadomestimo s potencialno jamo kroglaste oblike z zelo visokimi stenami. Gibanje elektrona v taki potencialni luknji nam dobro ponazori valovna funkcija

$$\psi(r) = \frac{\sin kr}{r} \qquad k = \frac{\sqrt{2\, m^* E}}{\hbar} \tag{1}$$

kjer je $\hbar$ Planckova konstanta deljena z 2π, m^* efektivna masa elektrona, E kinetična energija elektrona in r polmer luknje. Ob potencialnih stenah mora imeti funkcija vrednost nič, kar pomeni, da elektron ne more iti skozi zelo visoko potencialno steno. Torej $\psi = 0$ pri $r = d$, kjer je d radij luknje. Pogojem je zadoščeno, kadar je produkt kd mnogokratnih števila π, torej

$kd = l\pi$, kjer je l celo število. Iz tega dobimo za energijo elektrona

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\, m^* d^2} \cdot l^2 \tag{2}$$

Elektron v anionski luknji ima torej diskretne energije. Absorpcija svetlobe v centrih F ustreza prehodu elektrona iz osnovnega na prvi višji energijski nivo. Iz (1) dobimo za frekvenco prehoda

$$\nu_F = \frac{3\, \pi\, \hbar}{4\, m^* d^2} \tag{3}$$

Maksimum absorpcijskega spektra centrov F leži v vidnem delu spektra, pri 4650 Å. Pri sobni temperaturi je širina spektralne črte $H_{1/2}$ enaka 0,47 eV in je v splošnem odvisna od temperature. Zvezo med koncentracijo centrov F in optično absorpcijo nam da Smakulova formula

$$N \cdot f = \frac{18\, m}{e^2\, h} \cdot \frac{n}{(n^2 + 2)^2} \cdot \mu_{\text{maks}} \cdot H_{1/2}$$

kjer je N — koncentracija centrov F (cm^{-3}), f — oscilatorska moč centra F (Supek, Teorijska fizika II., str. 269), n — lomni količnik natrijevega klorida, μ_{maks} — absorpcijski koeficient na maksimu absorpcijske krivulje (cm^{-1}).

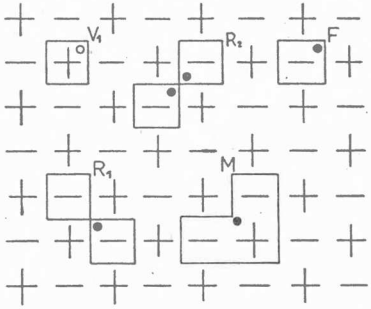
Z merjenjem optične absorpcije torej lahko določimo koncentracijo centrov F.

Poleg teh dveh osnovnih centrov V_1 in F nastopajo tudi kompleksni centri obeh tipov (sl. 4), tako, da se osnovnemu centru priključi eden ali več defektov. Če se na primer centru F priključi anionska luknja, nastane s tem center R_1,

ali centru F se priključi še en center F, nastane center R_2, ali center F in par kationska luknja — anionska da center M itd.

Doslej nismo še nič spregovorili o pogojih, pri katerih se kristali obarvajo in o mehanizmu nastajanja barvnih centrov. Rekli smo samo, da se elektron ali elektronska vrzel ujame v ionski luknji. Da se to lahko zgodi, mora elektron od nekje dobiti dovolj energije za prehod iz valenčnega pasu na više ležeči nivo. Take prehode lahko povzroči kakršnokoli ionizirajoče žarkovje, ki pade na kristal (alfa, gama, X). Pravimo, da ionizirajoče žarkovje kristal obarva. Toda ne samo to. Pod vplivom ionizirajočega žarkovja celo nastajajo v kristalu novi defekti in iz njih novi barvni centri.

Na sl. 5 vidimo, kako se obarvajo sintetični kristali natrijevega klorida, če jih obsevamo z žarki gama iz Co^{60}. Na absciso je nanesen čas obsevanja, na ordinato pa absorpcija na enoto debeline za različne vzorce. Absorpcija je bila merjena pri 4650 Å, to je na absorpcijskem maksimu centrov F.



Slika 4

Na krivuljah obarvanja ločimo dve stopnji:[3] stopnjo hitrega obarvanja — začetni, strmi del krivulje — in stopnjo počasnega obarvanja — drugi, položnejši del krivulje. V prvi stopnji se polnijo z elektroni anionske luknje, ki so bile že pred obsevanjem v kristalu. Hitrost nastajanja barvnih centrov v prvi stopnji je torej sorazmerna številu lukenj, ki se lahko obarvajo. Ta stopnja doseže v sintetičnih kristalih nasičenje pri koncentraciji približno 10^{17} cm^{-3} centrov F, je pa močno odvisna od termične zgodovine kristala. Mnogo hitreje, na primer, se obarva kristal, ki je bil hitro hlajen z visoke temperature, kot kristal, ki je bil počasi hlajen.

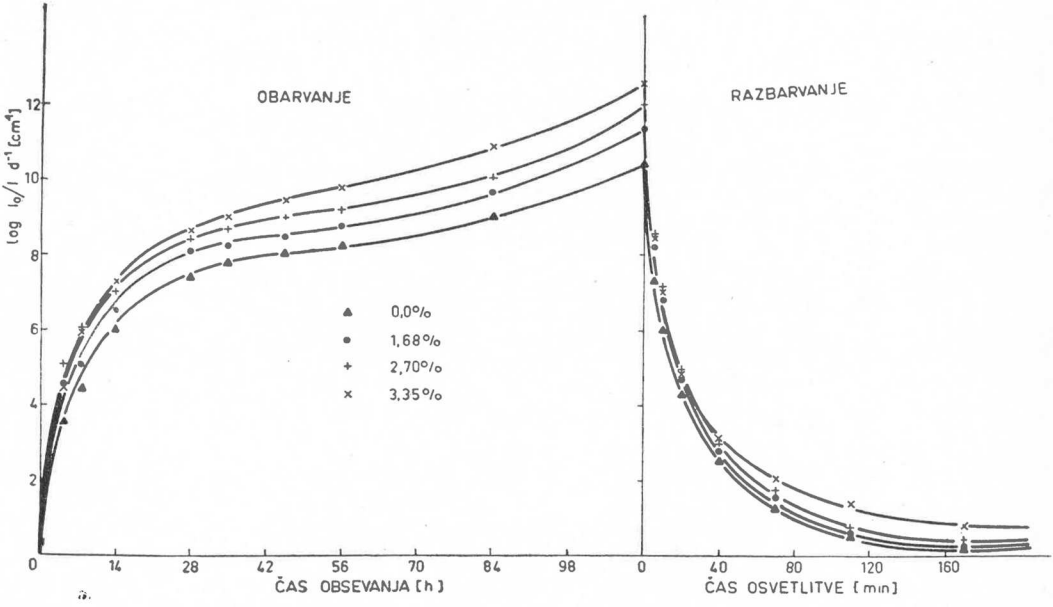
Stopnja počasnega obarvanja kaže konstantno naraščanje koncentracije centrov F. To si razlagamo tako, da med obsevanjem nastajajo nove luknje in iz njih novi centri F. Tvorbena energija centra F je v drugi stopnji obarvanja približno 500-krat večja kot v prvi. Izračunamo jo iz strmine krivulje, ki nam da število nastalih barvnih centrov v časovni enoti, in absorbirane energije v časovni enoti. Počasno obarvanje je močno odvisno od števila dislokacij v kristalu.

Sam mehanizem nastajanja lukenj in novih barvnih centrov med obsevanjem pa kljub mnogim teorijam še ni zadovoljivo pojasnjen. Po Seitzu[4] luknje in barvni centri nastajajo ob dislokacijah. Ionizirajoče žarkovje tvori ekscitone in proste elektrone. Ekscitoni potujejo skozi kristalno mrežo, srečajo dislokacije, se ujamejo v njih in oddajo svojo energijo kristalni mreži. Na relativno majhnem območju koncentrirana energija se porabi zato, da ion iz kristalne mreže

preide na rob vrinjene dislokacijske ravnine, nastala luknja pa difundira v mrežo.

Po Varleyu[5] ionizirajoče žarkovje dvakrat ionizira klorov ion in ga pretvori v klorov kation Cl^+. Klorov kation je v nestabilnem stanju. Odbojne coulombske sile sosednjih kationov ga izrinejo v vmesni položaj. V mreži nastane anionska luknja, v katero se ujame elektron, tvoreč center *F*.

Ker niti prvi niti drugi mehanizem ne pojasnita zadovoljivo vseh eksperimentalnih dejstev, so Mitchell, Wiegand in Smoluchowski[6] predlagali mehanizem, ki je v grobem kombinacija obeh gornjih. Po tej teoriji lahko luknje nastajajo v kristalu v bistvu na oba omenjena načina.



Slika 5

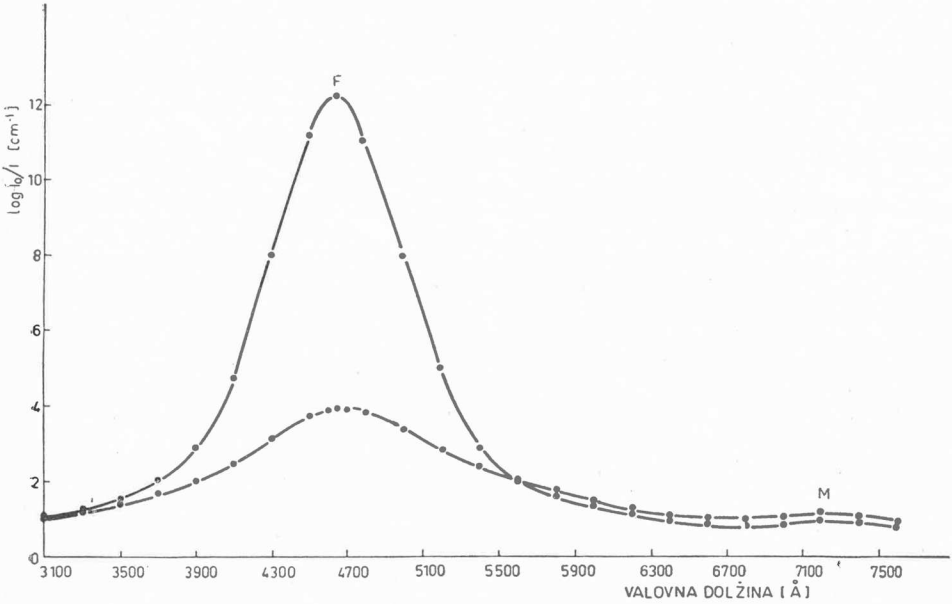
Na oddelku za fiziko trdne snovi na nuklearnem inštitutu »Jožef Stefan« v Ljubljani smo skušali ugotoviti kvantitativno zvezo med obarvanjem in plastično deformacijo. Poleg tega smo raziskovali tudi vpliv smeri deformacije na obarvanje in odvisnost razbarvanja od plastične deformacije. V ta namen so bile z merjenjem optične absorpcije pri 4650 Å posnete krivulje obarvanja kristalov natrijevega klorida z žarki gama iz Co^{60} v odvisnosti od stopnje in smeri plastične deformacije. Kristali so bili deformirani s stiskanjem. Optična absorpcija je bila merjena pri sobni temperaturi.

Vzorci so bili nacepljeni iz sintetičnega monokristala (Physikalishes Labor Karl Körth). Pred deformacijo so bili kristali v električni peči popuščani, to je počasi segrevani na 650° C in nato počasi ohlajani na sobno temperaturo. S tem smo hoteli doseči, da bi imeli vsi vzorci približno enako število dislokacij in da bi bila porazdelitev dislokacij v posameznem vzorcu enakomerna. V posebni napravi za deformacijo so bili kristali plastično deformirani z enakomerno hitrostjo 0,005 mm/minuto. Iz deformiranih kristalov so bile nacepljene približno 1 mm debele ploščice in pritrjene na aluminijaste okvirčke, ki so zagotovili,

da je bila ekstinkcija merjena vedno na istem mestu. Vzorci so bili razbarvani s svetlobo iz živosrebrne visokotlačne svetilke.

Na sl. 5 vidimo karakteristične krivulje obarvanja za različno deformirane vzorce. V drugi stopnji je jasno viden vpliv deformacije, medtem ko deformacija v prvi stopnji vpliva samo na končno koncentracijo barvnih centrov v tej stopnji, ne pa tudi na hitrost nastajanja, kar je razvidno iz primerjave krivulj obarvanja za nedeformiran kristal in deformirane kristale.

Krivulje razbarvanja prav tako kažejo dve stopnji: stopnjo hitrega in stopnjo počasnega razbarvanja. Druga stopnja razbarvanja kaže vpliv plastične deformacije, podobno kot druga stopnja obarvanja. Stresanje rezultatov pa je



Slika 6

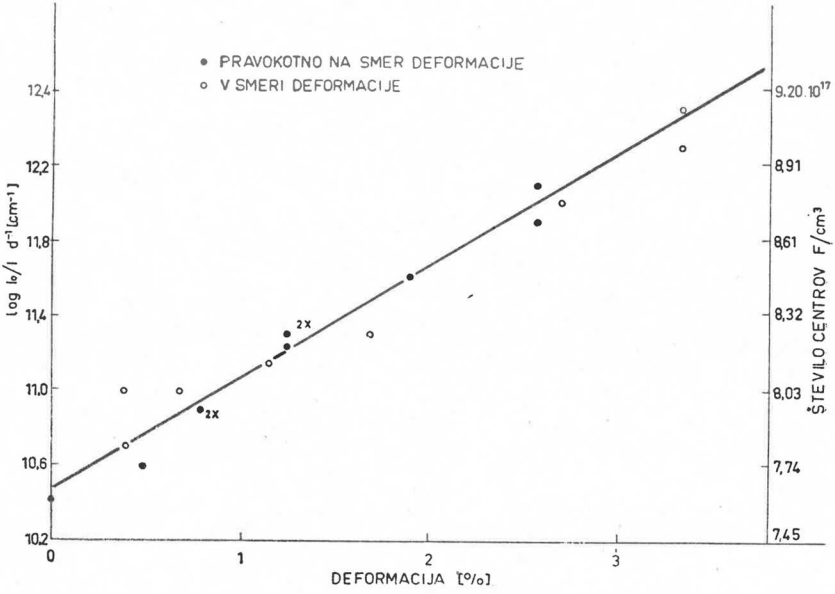
zaradi neenakih debelin ploščic preveliko, da bi mogli ugotoviti pri teh meritvah sistematično zvezo med deformacijo in razbarvanjem v drugi stopnji. Vzrok za to je različna hitrost razbarvanja pri različno debelih ploščicah.

Sl. 6 prikazuje celoten absorpcijski spekter deformiranega vzorca po končnem obarvanju in po delnem razbarvanju s svetlobo *F* (4650 Å). Na dolgovalovni strani je ločljiv absorpcijski pas *M* pri 7200 Å. Iz absorpcijskega spektra po delnem razbarvanju je razviden porast absorpcije na dolgovalovni strani pasu *F* (med *F* in *M*) ter porast absorpcijskega pasu *M*. Pri razbarvanju nastajajo iz enostavnih centrov *F* kompleksni centri *R* in *M*, vendar je pri sobni temperaturi širina pasu *F* tako velika, da prekriva pasove *R*, ki ležijo med pasovoma *F* in *M*. Pri razbarvanju absorpcija v pasu *M* najprej hitro naraste, v dveh do treh minutah doseže maksimum, ki je odvisen od stopnje deformacije, in nato počasi pada.

Pri stiskanju kristalov natrijevega klorida v smeri (001) prihaja do drsenja v dveh drsnih sistemih (101) in (011). Drsenje se navadno začne v enem sistemu, doseže določeno stopnjo in se nato nadaljuje v drugem sistemu. Končna de-

formacija je rezultat drsenja v obeh sistemih, pri čemer je običajno en sistem privilegiran.[7] Pri različno odcepljenih ploščicah bi tedaj pričakovali razlike v obarvanju zaradi razlik v številu in vrsti dislokacij. Na sl. 7, ki kaže odvisnost obarvanja od stopnje deformacije, pa vidimo, da je to obarvanje v mejah merske napake enako za različno odcepljene vzorce.

Za zaključek torej lahko rečemo, da je odvisnost koncentracije barvnih centrov od stopnje plastične deformacije v območju od 0 do 3,35 % linearna in da obarvanje ni odvisno od smeri stiskanja. Podobne linearne odvisnosti razbarvanja od stopnje plastične deformacije ni bilo mogoče ugotoviti zaradi eksperimentalnih težav pri cepitvi kristalov.



Slika 7

Literatura:

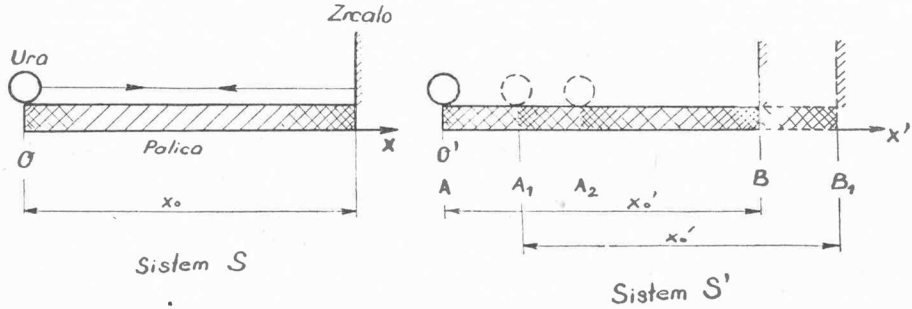
1. A. J. Dekker: Solid State Physics (1959).
2. F. Seitz: Solid State Physics, New York, London (1940).
3. R. B. Gordon, A. S. Nowick: Phys. Rev., 101, 977 (1956).
4. F. Seitz: Rev. Mod. Phys., 26, 7 (1954); 18, 383 (1946).
5. J. H. O. Varley, J. Nucl: Energy, 1, 130 (1954).
6. P. V. Mitchell, D. A. Wiegand, R. Smoluchowski: Phys. Rev., 177, 442 (1960).
7. S. Mendelson, J.App: Phys., 7, 1175 (1962).

NOVICE

KAKO BI SE POKAZALO RELATIVISTIČNO SKRČENJE HITRO SE GIBAJOČIH TELES

Po specialni teoriji relativnosti je sočasnost dveh pojavov vezana na sistem, v katerem pojava opazujemo.* Posledica tega je, da je tudi rezultat pri merjenju dolžin odvisen od sistema, v katerem merimo. Že res, da je za dolžine, ki so pravokotne na smer gibanja, rezultat merjenja v vseh inercialnih sistemih isti. Za dolžine v smeri gibanja pa to ne velja, o čemer naj nas prepriča miselni poskus.

V sistemu S hočemo izmeriti lastno dolžino x_0 palice, ki v njem miruje. To pomeni, da moramo sočasno odčitati razdaljo dveh točk od izbranega izhodišča. Sočasnost dveh pojavov si zagotovimo z uporabo svetlobnih signalov. Zato merimo dolžine na podoben način, kot smo merili čase.* Prvo krajišče palice na-



Sl. 2. Slike hitro se gibajoče kocke pravokotno na smer gibanja

mestimo v izhodišče, kjer sta še ura in z njo povezana bliskovna luč, na drugem krajišču palice na osi x pa namestimo zrcalo. Merjenje lastne dolžine palice ni težavno. Svetlobni blisk potuje od prvega krajišča do drugega, se tam na zrcalu odbije in povrne v prvo krajišče; ura pokaže za lastni čas potovanja svetlobe $t = 2\,x_0/c$.

Sistem S naj se v inercialnem sistemu S' giblje z enakomerno hitrostjo v v smeri osi x', ki sovpada z osjo x. V trenutku $t = 0$, ko je bil izsevan blisk, naj sovpadata tudi izhodišči obeh sistemov. Opis potovanja svetlobe za opazovalca v S' je nekoliko bolj zapleten. Ob izsevanju bliska je zanj prvo krajišče palice v položaju A, drugo pa v položaju B; ko se blisk odbije, se drugo krajišče premakne do B_1 in prvo do A_1; slednjič ob povratku bliska prvo krajišče prispe do A_2 (sl. 1). Čas, ki ga je potrebovala svetloba za potovanje do zrcala, je za opazovalca v S' enak $t_1' = AB_1/c$, saj je tudi v S' hitrost svetlobe enaka c. V tem času je svetloba napravila daljšo pot, ker se je zrcalo premaknilo za vt_1': $AB_1 = x_0' + v\,AB_1/c$, kjer je x_0' dolžina palice v sistemu S'. Pri povratku je za opazovalca v S' svetloba v času $t_2' = B_1A_2/c$ napravila krajšo pot $B_1A_2 = x_0' - v\,B_1A_2/c$. Celotni čas potovanja svetlobe v sistemu S' je $t' = t_1' + t_2' =$

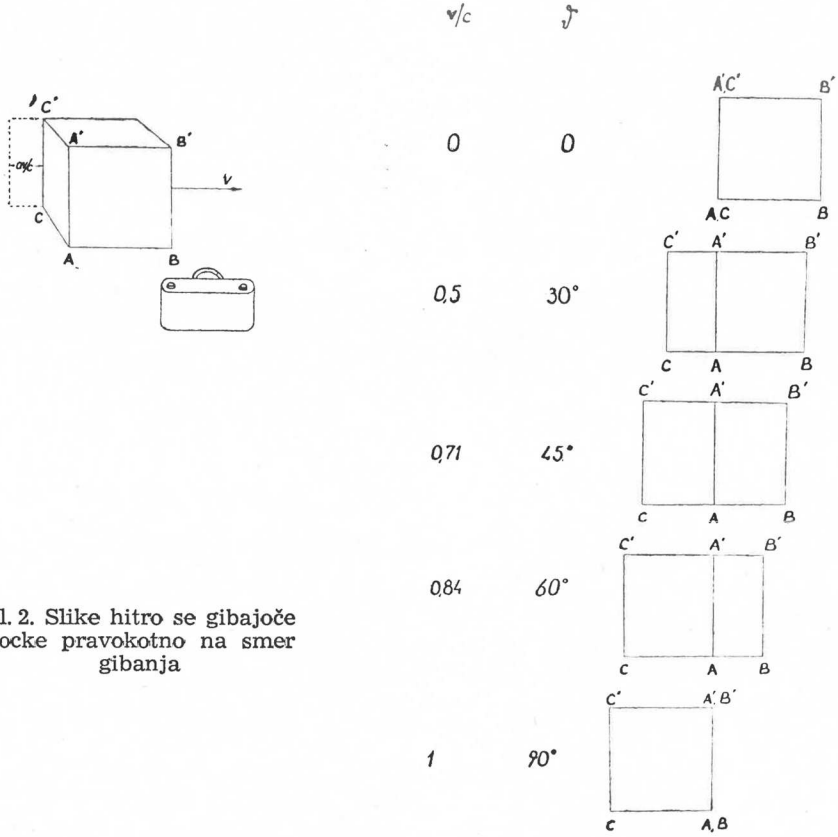
* Glej članek »Paradoks ur v teoriji relativnosti«, Obz. mat. fiz. 9, 128 (1962).

$= x_0' (1 - v^2/c^2)^{-1}$. Upoštevati moramo še* $t' = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} t$ in $t = 2 x_0/c$, pa smo pri končnem rezultatu[1]

$$x_0' = (1 - v^2/c^2)^{1/2} x_0 . \qquad (1)$$

Če meri opazovalec dolžino gibajočega se telesa v smeri gibanja, nameri torej manj od ustrezne lastne dolžine. Temu pojavu pravijo relativistično (Lorentzovo) skrčenje.

Do nedavnega so menili, ne da bi o tem dosti razmišljali, da bi se zelo hitro gibajoča se telesa na fotografijah zaradi zveze (1) morala zdeti skrčena



Sl. 2. Slike hitro se gibajoče kocke pravokotno na smer gibanja

v smeri gibanja. Slika krogle npr. bi bila elipsa z malo osjo v smeri gibanja. Podrobnejši premislek o tem, kakšne bi bile fotografije teles pri hitrostih, ki niso majhne v primeri s svetlobno, pa je privedel do nekoliko spremenjenega zaključka.[2] Razprava o tem je samo načelna, ker v laboratoriju pri makroskopskih telesih ni mogoče doseči tako velikih hitrosti in tudi ni fotografskega zaklopa, ki bi zmogel nekaj milijardink sekunde ali manj trajajoče osvetlitve.

Mislimo si, da fotografiramo telo, ki ga vidimo pod zelo majhnim zornim kotom, in da sveti telo samo ali pa ga osvetljuje stalen zunanji izvir svetlobe! Za fotografijo je odgovorna svetloba, ki v istem trenutku vstopi skozi odprti zaklop fotografskega aparata. Te svetlobe pa niso izsevale vse točke telesa istočasno, ampak bolj oddaljene prej, bližje pa pozneje.

Naj bo telo kocka, ki se giblje v smeri enega izmed robov, in fotografirajmo pravokotno na smer gibanja! Da bo razpravljanje lažje, vzemimo, da je slika predmeta enako velika kot predmet sam. Vse točke čelne ploskve ($ABB'A'$ na sl. 2) so enako oddaljene od objektiva. Dva robova (AB in $A'B'$) ležita v smeri gibanja in sta zato skrčena po (1) od dolžine a na dolžino $a' = a\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Druga dva robova sta pravokotna na smer gibanja in zato ohranita svojo dolžino a. Slika čelne ploskve je torej pravokotnik z osnovnico a' in višino a.

Skozi zaklop fotografskega aparata pa prispe tudi svetloba od roba CC', ki je bila izsevana za čas a/c prej kot pa svetloba s čelne ploskve. V tistem trenutku pa je bil ta rob za av/c bolj proti levi. Tako vidimo na sliki tudi ploskev $AA'C'C$ kot pravokotnik z osnovnico av/c in višino a. Po tem uvidimo, da se kocka na sliki ne zdi skrčena, temveč zasukana za kot Θ okoli osi, ki je pravokotna na smer gibanja in na smer opazovanja ($av/c = a \sin \Theta$; $a\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} = a \cos \Theta$).

Enako razmišljanje velja tudi za kroglo, saj si lahko predstavljamo, da smo jo včrtali kocki. Pokazalo se je celo, da velja to za kroglo tudi pri večjih zornih kotih. To pomeni, da je slika krogle vselej krog, tudi pri hitrostih, ki niso majhne v primeri s svetlobno.

1. I. Supek: Teorijska fizika i struktura materije I. Zagreb (Školska knjiga), 1952.
2. J. Terrell: Invisibility of the Lorentz Contraction, Phys. Rev. **116**, 1041 (1959);
V. F. Weisskopf: The Visual Appearance of Rapidly Moving Objects, Phys. Today **13**, 24 (No. 9, 1961);
G. Gamow: Remarks on Lorentz Contraction, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **47**, 728 (1961).

J. Strnad

ŠOLA

FIZIKALNA ZBIRKA NA GIMNAZIJI

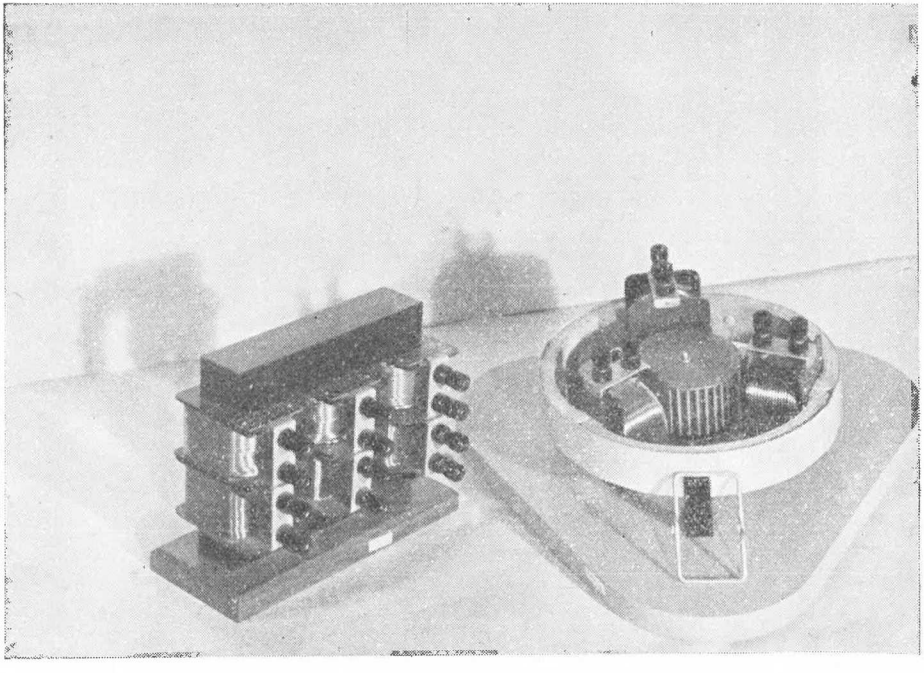
Kdor se sprehodi po naših šolah in poizve, kako je z opremo za pouk fizike, je večkrat nemilo presenečen. Saj nekatere nimajo fizikalnih kabinetov, prav tako ne predavalnic in še manj laboratorijev. Tabla in kreda sta ponekod še vedno skoraj edina pripomočka za pouk tega predmeta.

Ne bi bilo prav, če bi krivdo za takšne in podobne slabosti iskali samo drugje, ampak jo iščimo tudi v nas samih! Na naših šolah skoraj ni pravega profesorja fizike; poučujemo jo v glavnem diplomirani matematiki in včasih nam celo očitajo, da nismo usposobljeni za ta predmet; tako izgubljamo veselje za delo, ki ga opravljamo. — Potem slišimo opravičilo: ni sredstev. — Morda jih res ni bilo, toda danes več ne moremo tako govoriti. Denar je, tako na naših šolah, kot tudi drugje; manjkajo nam samo ljudje, ki bi ga pred zbori upravljavcev zahtevali in te zahteve znali utemeljiti. Seveda terja to od nas dodatnih naporov.

Z nadaljnjimi in še večjimi težavami se srečamo ob nakupovanju opreme; saj na našem trgu ni mnogo fizikalnih učil za šole srednje stopnje; deviznih sredstev, s katerimi bi si na tujem trgu preskrbeli prepotrebne rekvizite, pa nimamo. Prenekateri izmed nas se je ustrašil obsežnega dela, pred katerim se je znašel; morda si je celo v olajšanje odgovoril, da ni on tisti, ki naj bi reševal

probleme republiškega, da ne rečem federativnega karakterja. Mnogi so tako zašli na napačno pot, saj so ustvarili iz fizike katekizem. Šola je zaradi tega postala še bolj stara in skorajda sholastično usmerjena.

Zavedati se pa moramo, da izvirajo spoznanja o svetu, ki nas obdaja, navsezadnje le iz opazovanja pojavov in poskusov. Zato pri študiju fizike ni nadomestila za eksperimentiranje. Njegov namen je, da razjasni fizikalne principe, ali pa, da prikaže zanimive aplikacije, ki naj vzbude v dijakih samostojno raz-



Sl. 1 Trofazni transformator in model asinhronskega motorja, izdelek IKŠ iz Kranja.

mišljanje. Samo praktično delo pa ostri dijaku opazovalno sposobnost. Zato moramo dijaka v šoli individualno zaposliti, ga vsestransko aktivizirati, da ne bo samo pasivno sprejemal. Vse dotlej, dokler ne bomo rešili materialnih problemov, zaradi katerih je pouk fizike tak, kot je, pa uporabljajmo vsaj to, kar imamo!

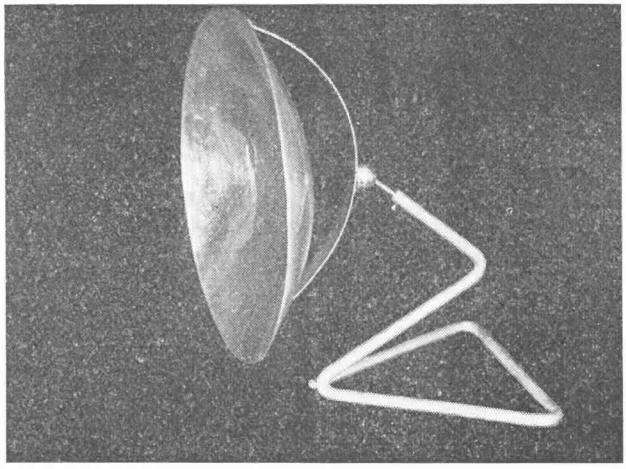
*

Ker je bila izražena želja, naj napišem, kako smo se znašli glede pouka fizike pri nas, sem se odločil za le-te vrstice. Že vnaprej pa prosim, naj jih bralec ne jemlje kot neko hvalisanje in še manj kot najboljšo rešitev problemov, ki so pred nami.

Ko sem prišel na šolo, so me imenovali za varuha kabineta. Izraz za funkcijo ni ustrezen. Vendar sem se tega zavedel šele kasno, potem, ko sem se dodobra razgledal po zbirki. Našel sem le staromodna učila, ki datirajo v 19. stoletje in v prvo desetletje 20. stoletja. Še za časa rajnke Ogrske je bilo vse to nakupljeno za neko šolo (naša gimnazija takrat še ni obstajala), od takrat naprej pa so varuhi samo »varovali«, morda niti ne dosti uporabljali.

Spoznal sem, da ni moja naloga samo paziti, da se kaj ne pokvari, temveč predvsem ohranjati, razvijati ter izpopolnjevati kabinetne naprave z izdelki našega časa. Zamotanost problemov, pred katerimi sem se znašel, pa nisem na mah pravilno ocenil. Medtem ko sem prebredel vse naše trgovine z učili po vsej Jugoslaviji, sem se šele zavedel težavnosti naloge, ki jo je bilo treba rešiti. Razen Battestinove mehanike in izdelkov zagrebške Tovarne učil ni bilo kvalitetnih izdelkov na trgu. Sicer pa sem naletel še na množico takih, ki ne ustrezajo potrebam in zahtevam pouka.

Kaj ukreniti? Učila smo kljub vsemu potrebovali. Zaprosil sem za sredstva, s katerimi sem najprej nakupil nekaj orodja in materiala. Izmed dijakov sem izbral spretnejše za pomoč in tako so med šolskim letom, vzporedno s predavanji, nastala prva učila: demonstracijski nonij in mikrometrski vijak, manometri različnih konstrukcij in območij, obločnica z napravami za demonstracijo fotoefekta, Kundtova cev, Meissnerjev električni nihajni krog s frekvencami



Sl. 2. Parabolično zrcalo, izdelek dijakov naše gimnazije (2 r = 50 cm).

od 1 Hz navzgor, parabolična zrcala, Lecherjev sestav, demonstracijski kondenzator, in še bi lahko našteval pomembnejše in manj pomembne izdelke. (Nekatere naštetih prikazujejo slike.)

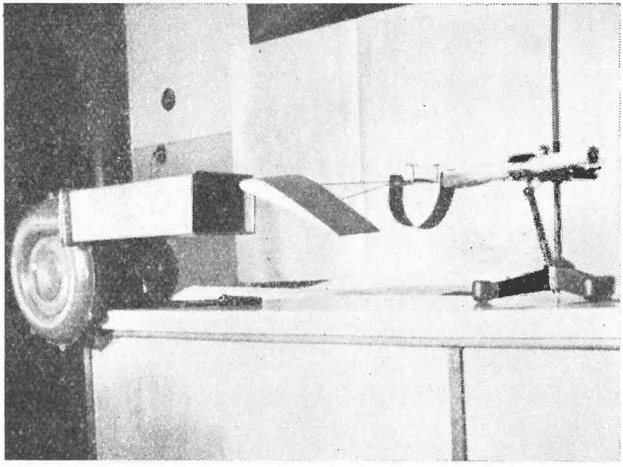
Z reorganizacijo mature sem lahko svoje delo v kabinetu še izboljšal. Fiziki diplomanti so, seveda pod mojim nadzorstvom in z mojim sodelovanjem ter z denarjem ustanove za material, kot prilogo nalogi izdelali marsikatero učilo. Tako so nastali: razni higrometri, naprave za preverjanje Hookovega zakona, modeli kinoprojektorja, televizije, komplet naprav za aerodinamiko z aerodinamskimi modeli, s tehtnico za merjenje upora in vzgona pa Venturijevo Brandtlovo cevjo z zračnim tunelom vred, naprave za demonstracijo radioaktivnih efektov: Wilsonska celica, scintilacijski efekt itd.

Vsega pa doma ni bilo moč narediti. Marsikateri poskus je povezan s kompliciranimi in tehnično dovršenimi napravami. Uspelo mi je nabaviti vakuumsko pumpo (0,01 mm Hg). Dijakom sem z njo odkril nova poglavja v fiziki: razelektrenje v razredčenih plinih, zanimive pojave vrenja pri znižanem pritisku, prosti pad v vakuumu . . .

Tudi katodni osciloskop je lahko koristno učilo, ne samo za raziskavo pojavov v elektriki, temveč tudi v mehaniki in akustiki. Zadovoljimo se lahko z najenostavnejšim. Za različne merske vaje iz elektrike sem nabavil tudi voltmetre, ampermetre in wattmeter. Z njimi smo si lahko naredili: ohmmeter, merilec za merjenje kapacitete kondenzatorja, napravo za merjenje cos φ itn.

Moja skrita želja pri vsem tem pa je bila, da bi dijakom odkril čim več področij uporabne fizike. Po našem naročilu so nastala v industrijski šoli Iskre v Kranju naslednja učila: trofazni transformator, asinhronski motor, trofazni generator..., sami pa smo izdelali triodni rele, foto rele, ojačevalec, različne usmernike (100 V, 200 V, in od 0-300 V, 0,5 mA), preprostejšo obliko elektrofiltra, elektroskopski števec elementarnih delcev, flotacijsko napravo, radiosprejemnik in oddajnik. Sestavili smo tudi röntgenski aparat.

Vse to smo dolga leta nosili iz razreda v razred, dokler nam ni uspelo dobiti prostor za fizikalno predavalnico. Tedaj so nastale nove težave. »Klasični



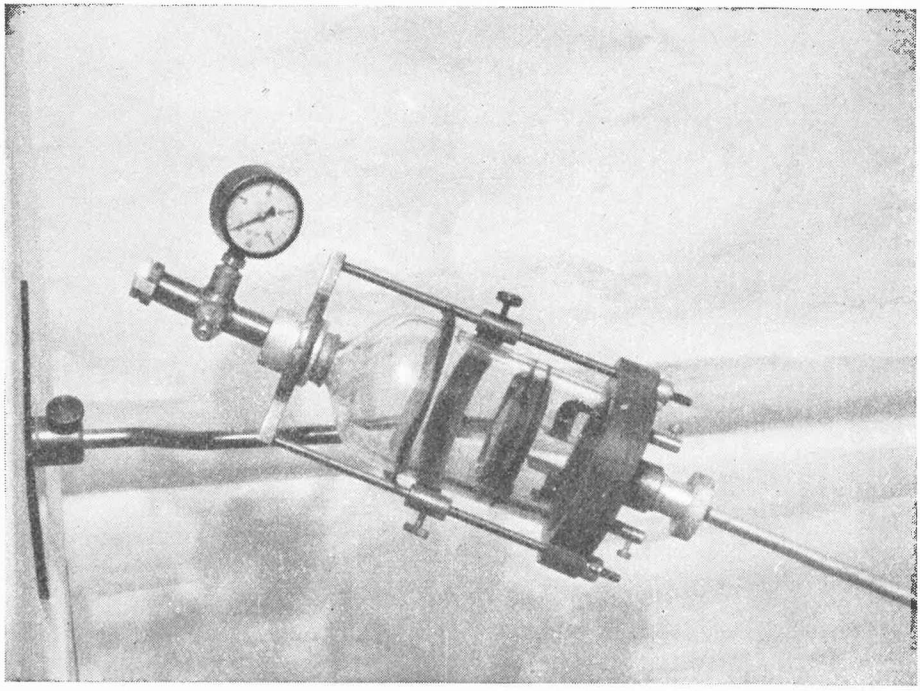
Sl. 3. Tehtnica za merjenje aerodinamičnega vzgona (Priloga k maturitetni diplomski nalogi).

tip fizikalne predavalnice več ne odgovarja sodobnemu pouku fizike«, tako so govorili nekateri, ki pa sami ne poučujejo. Skupinski pouk pravijo, da je moderen. Sam sem si ga ogledal na VPŠ v Zagrebu, pa le pri kemiji; pri fiziki, tako so mi rekli strokovnjaki, ga bo bolj težko vpeljati, če se nočemo odreči sistematiki pri pouku, saj je organizacija fizikalnih eksperimentov neprimerno bolj zamotana od kemijskih, vsaj na tej stopnji. Poleg tega pa so naši razredi še vse preštevilni za tako organiziran pouk, sredstva, ki jih imamo na razpolago, pa še vse premajhna.

Tako smo ostali pri prostoru za fizikalno predavalnico z neamfiteatralno razporejenimi sedeži. Zaenkrat smo jo opremili le z najnujnejšim. Ker nimamo v zgradbi plinske napeljave, uporabljamo butan iz jeklenk, kar prav tako ustreza našim potrebam. Marsikateri pojav lahko sedaj z mnogo manj truda demonstriramo. Za eksperimente iz elektrike pa imamo v predavalnici na razpolago močne izvore električnega toka. Napetost pa reguliramo s pomočjo sodobnih

variac tranformatorjev, le-te po potrebi povežemo s selenskimi usmerniki za nizko in visoko napetost, tako da lahko dokaj gibčno demonstriramo množico električnih pojavov.

V prihodnjem šolskem letu nameravamo uvesti laboratorijske vaje, ki bodo, kombinirane s predavanji v fizikalnici, vsaj začasno odpravile z dnevnega reda želeni skupinski pouk. Mislim, da nam rešitev v tej varianti bolj ustreza v primerjavi z nesistematičnim skupinskim poukom, kjer bi uvedba sistematič-



Sl. 4. Wilsonska celica (Priloga k maturitetni diplomski nalogi).

nega dela zahtevala znatnejša sredstva ali pa tudi težko izvedljive organizacijske sremembe. S svojimi strokovnimi kolegi želimo še mnogo razpravljati o tehniki izvajanja laboratorijskega dela, o najekonomičnejših formacijah grup, materialni organizaciji itn. Morda bi bilo prav to mesto v Obzorniku najprimernejše za taka paberkovanja.

Moj zaključek bi bil: izdelajmo enotne načrte za učila in organizirajmo njihovo proizvodnjo, enako za fizikalne predavalnice in laboratorije. Individualne gradnje so predrage, od predavatelja pa terjajo preveč napora! Vsega tega smo se tudi mi zavedali že od prvega dne, toda čakati, pomeni izgubiti bitko, saj je minilo že preveč dragocenega časa.

France Avsec, gimnazija v Murski Soboti

DOMAČE VESTI

POSVETOVANJE O FIZIKI

Zvezni svet za znanstveno delo ter Skupnost jugoslovanskih univerz sta za 17. in 18. december 1962 sklicala posvetovanje o pouku, znanstvenem delu in kadrih v fiziki, ki se ga je udeležilo okrog 40 zastopnikov kateder in oddelkov za fiziko fakultet in raziskovalnih institutov, poleg tega pa še zastopniki Zvezne komisije za nuklearno energijo, Zveznega zavoda za pospeševanje šolstva, Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov, republiških svetov za znanost ter Sveta za znanstveno delo JLA. Referati in del diskusije na tem posvetovanju so objavljeni v Biltenu zveznega sveta za znanstveno delo (št. 5, 1962). Na koncu posvetovanja so udeleženci sprejeli naslednje

zaključke:

Današnja tehnika in industrija se v veliki meri oslanjata na dosežke fizikalnega raziskovanja, ki predstavljajo stalen izvir novih spoznanj in ki velikokrat, v krajšem ali daljšem času, vodijo do pomembnih praktičnih rezultatov. Nekatere teh spoznanj sprožijo razvoj novih področij tehnike in včasih tudi celih industrijskih panog. Kot primera iz novejšega časa lahko navedemo razvoj nuklearnih področij ter tehnično izkoriščanje polprevodnikov.

Ta vloga fizike je eden glavnih vzrokov za to, da danes v mnogih državah zelo negujejo fiziko in da vlagajo ogromna sredstva v fizikalna raziskovanja ter v vzgojo fizikov. Število fizikov v kaki državi brez dvoma znatno vpliva na možnosti njenega nadaljnjega industrijskega razvoja. Raziskovalno delo na področju fizike je eden izmed členov v verigi, ki teče od osnovnih raziskovanj preko aplikativnih raziskav, razvojno tehnološkega dela in izdelave projekta do neposredne produkcije v industriji.

Razen te neposredne koristi za razvoj vedno boljših pogojev v proizvodnji in za povečanje produktivnosti dela, ter za odpiranje novih področij proizvodnje, ima fizika odločilno vlogo pri vzgoji in oblikovanju visokokvalificiranih kadrov za delo na univerzah, v raziskovalnih institutih ter v industrijskih razvojnih in merilnih laboratorijih. Zato je jasno, da moramo v interesu nadaljnjega dviga našega splošnega kulturnega in znanstvenega nivoja, kakor tudi industrijskega razvoja naše države, na vse načine podpirati razvoj fizike pri nas.

Dosedanje delo na področju fizike je prineslo več omembe vrednih rezultatov, posebno v nuklearnih institutih. To opravičuje zaupanje, da je naš raziskovalni kader na področju fizike sposoben, da vodi mlajše raziskovalce in da skupaj z njimi v ustvarjalnem delu pospešuje fizikalno znanost in njeno uporabo. Pri tem je izredno pomembno sodelovanje med znanstvenimi instituti in univerznimi centri za fiziko ter je izboljšanje tega sodelovanja eden izmed važnih pogojev za nadaljnje delo.

Udeleženci tega posvetovanja se zavedajo potrebe, da se planira nadaljnji razvoj na področju fizikalnih znanosti, da se povečajo raziskovalne kapacitete zlasti v novih perspektivnih področjih fizike in da se trajno koordinira delo, s čimer naj se omogoči racionalno izkoriščanje kadrov in materialne baze. Na posvetovanju je bila predložena vrsta referatov, ki so dokumentirano obdelala poedina ključna vprašanja raziskovalnega in šolskega dela na področju fizike, izčrpna diskusija pa je dala še precej novih elementov.

Na osnovi tega so se udeleženci zedinili za vrsto sugestij in predlogov za nadaljnji dvig dela, med katerimi so najpomembnejši naslednji. Predlagamo Zveznemu svetu za znanstveno delo, da prouči možnost formiranja jugoslovanskega odbora za fiziko, v katerem bi bila zastopana glavna področja fizike, ki so interesantna za našo državo. Med kompetence tega odbora bi spadalo planiranje koordiniranega raziskovalnega dela in predlaganje potrebnih ukrepov za realizacijo plana, zlasti pa ukrepov za povečanje števila in za specializacijo kadrov, predlaganje ukrepov za sodobno opremljanje laboratorijev, ukrepov za razdeljevanje sredstev za izgradnjo novih in za izkoriščanje obstoječih laboratorijev, ter predlaganje smernic za razdelitev delovnih področij ter koordinacijo dela.

Nadalje je treba zagotoviti potrebna sredstva za raziskovalno delo obstoječih institutov in oddelkov za fiziko ter ravno tako za šolsko delo kateder za fiziko na fakultetah. Upoštevajoč, da mora biti pouk na univerzi nerazdružno zvezan z raziskovalnim delom, pa tudi zaradi racionalnega izkoriščanja kadrovskih in materialnih možnosti bi bilo treba institute za fiziko vezati na univerzne centre. Posebno pomembno bi bilo, da se najdejo bolj prikladne oblike financiranja osnovnih raziskav, kar naj bi omogočilo kontinuirano, stabilno in dolgoročno delo na področju fizike.

Udeleženci želijo poudariti odločilno vlogo prirodoslovno-matematičnih fakultet, ki z vzgojo šolskega in raziskovalnega kadra vplivajo tako na splošni kulturno izobraževalni nivo, kakor tudi na vrhunsko raziskovalno dejavnost v družbi. Posledice tega dela se po eni strani kažejo v nivoju strokovnjakov, ki so šli skozi to vzgojo, po drugi strani pa visok nivo raziskovalnega dela ustvarja okolje, v katerem se morajo dvigniti tudi aplikativne in razvojne raziskave, kakor tudi končno sama proizvodnja. V obeh pogledih ima fizika ključno vlogo, še posebej pa je treba poudariti njen pomen za vse druge osnovne naravoslovne in aplikativne znanosti.

Udeleženci posvetovanja so poudarili, da je treba zagotoviti čim višji nivo vseh oblik pouka fizike, še posebej pa rednega pouka na fakultetah, kakor tudi višjih specializacij. Pri tem je treba stimulirati učiteljski poklic ter ukreniti, kar je potrebno, da se poveča število študentov fizike tako za učiteljski poklic kakor tudi za poklic raziskovalnega delavca.

Glavni problemi pouka fizike prvih dveh stopenj na fakultetah so zagotovitev sredstev za študentske laboratorije, pomanjkanje prostorov ter pomanjkanje učiteljskega in asistentskega kadra. Posebno vlogo pri vzgoji samostojnega fizika ima diplomsko delo na koncu 2. stopnje študija, kakršno bi moralo obstajati na vseh fakultetah.

Razvoj znanstveno raziskovalnega dela ter vzgoja visokokvalificiranega kadra fizikov sta v tesni zvezi z uvedbo študija 3. stopnje. Ta stopnja rednega študija naj bi dajala predvsem kadre za delo na znanstvenih institutih in na fakultetah ter tudi v industrijskih merilnih in razvojnih laboratorijih. Med problemi, ki so se pokazali pri uvedbi te stopnje študija, je treba posebej poudariti koordinacijo in koncentracijo moči v najbolj primernih centrih, tesno povezovanje z znanstvenimi instituti, potrebo po znatno večjih materialnih sredstvih za izvajanje tega pouka, ter potrebo po izmenjavi domačih in tujih strokovnjakov. Sedanje izkušnje kažejo na velike težave s tistimi študenti, ki so v rednem delovnem razmerju; zato je nujno, da se zagotovi večje število štipendij za slušatelje te stopnje.

Za fizike na fakultetah in znanstvenih institutih bi bilo treba zagotoviti potrebna sredstva za specializacijo v tujini, posebno v primerih, kjer je treba

začeti z delom na novih področjih fizike. Enako velja tudi za sredstva za udeležbo fizikov na znanstvenih konferencah v državi in v tujini, kakor tudi za občasna študijska potovanja.

Smatramo, da bi realizacija navedenih predlogov lahko znatno približala cilje, ki jih želimo doseči z organiziranimi oblikami prenašanja in razvijanja znanja in izkušenj na sploh, posebno pa v fiziki. Doslej zbrane izkušnje, posebno pa dosežena visoka kvalifikacija določenega števila strokovnjakov in raziskovalcev v okoliščinah, ki še niso najbolj ugodne, kažejo, da lahko z zaupanjem pričakujemo realizacijo teh predlogov, če se bo delo razvijalo v ugodnih materialnih in drugih pogojih v okviru dobro usklajenega dolgoročnega in stabilnega plana znanstveno raziskovalne dejavnosti.

RESOLUCIJA O MATEMATIKI, FIZIKI IN MEHANIKI

Svet za znanost LRS se je letos izčrpno ukvarjal z vprašanjem razvoja matematike, fizike in mehanike pri nas. Sklepi so bili zbrani v obliki resolucije, ki opozarja na glavne težave in predlaga najnujnejše ukrepe, ki bi jih bilo treba podvzeti. Ker je resolucija nedvomno zanimiva za bralce našega lista, jo v naslednjem objavljamo.

*

Svet za znanost je obravnaval okvirni načrt za razvoj matematike, fizike in mehanike v LRS. Ta področja uživajo vedno večjo podporo Ljudske skupščine LRS, kar se posebej kaže v pripravah za investicije, ki naj omogočijo gradnjo institutske in šolske stavbe za navedene stroke. Vendar pa mora Svet za znanost ugotoviti, da so matematika, fizika in mehanika pri nas še vse premalo razvite, kar se kaže v hudem pomanjkanju kadra, preobremenjenosti tega kadra s šolskim delom in v nezadostno razviti znanstveni dejavnosti. Te pomanjkljivosti so sicer pri fiziki maj očitne kot pri matematiki in mehaniki, vendar je treba upoštevati, da se je v fiziki močneje razvilo v glavnem le eno samo področje, to je jedrska fizika. Svet smatra, da so potrebni posebni ukrepi, ki naj omogočijo in čim bolj pospešijo razvoj širše raziskovalne dejavnosti na področju matematike, fizike in mehanike. Svet sodi, da je treba sistematično spremljati razvoj matematike, fizike in mehanike v svetu in da moramo premagati našo zaostalost na teh področjih ter doseči raven, ki je potrebna za naš gospodarski in kulturni razvoj.

V tej zvezi je Svet za znanost sprejel naslednja priporočila:

1. Vzgoji in znanstvenemu razvoju kadrov za osnovna raziskovanja je treba posvetiti čim večjo skrb. Posebno pažnjo je treba posvetiti raziskovalcem na področjih, ki so pomembna, toda pri nas premalo razvita. V ta namen bo Svet za znanost:
   a) priporočil univerzi, naj ukrene vse potrebno za čimprejšnjo organizacijo študija tretje stopnje na področju matematike, fizike in mehanike;
   b) podpiral prizadevanja za izboljšanje pouka teh predmetov na šolah vseh stopenj;
   c) priporočil takšno politiko štipendiranja, ki bi omogočila nadarjenim strokovnjakom s področja matematike, fizike in mehanike večletno izpopolnjevanje v inozemstvu, in to v mlajših letih;

d) iskal možnosti in sredstva za stimulativno štipendiranje študentov teh strok.

2. Svet opozarja, da se raziskovalno delo lahko uspešno razvija samo ob stalnem kontaktu z raziskovalci v drugih centrih, ki delajo na sorodnih problemih. Zato je treba omogočiti čim širšo izmenjavo strokovnjakov ter udeležbo na konferencah. Svet tudi priporoča sodelovanje z drugimi centri pri konkretnih raziskovalnih delih.
3. Svet za znanost meni, da je posebno na področju osnovnih znanosti že za same izvajalce objavljanje izsledkov raziskovalnega dela izredno pomembno. Zato bo podprl vse korake, ki bodo napravili take izsledke čim bolj dostopne vsem interesentom. Poleg tega pa bo podpiral tudi načrtno izdajanje učbenikov, strokovne in poljudne literature iz matematike, fizike in mehanike ter uporabo drugih sredstev za informiranje javnosti o pomenu, načinu in o rezultatih raziskovalnega dela v svetu in pri nas.
4. Svet bo pri skladih, ki financirajo raziskovalno delo, skušal zagotoviti zadostna sredstva za delo na področjih matematike, fizike in mehanike, ter bo priporočil prožno poslovanje teh skladov, z namenom, da se omogoči hitro delo na novo obetajočih področjih.
5. Ker zavisi napredek vseh raziskovalnih dejavnosti v veliki meri tudi od opreme, bo Svet za znanost podpiral vsa prizadevanja za nabavo najbolj nujne opreme za taka osnovna raziskovanja, ki so posebno važna za naš gospodarski in znanstveni razvoj.
6. Svet bo podpiral opremljanje računskega centra v okviru Instituta za matematiko, fiziko in mehaniko z ustreznim elektronskim računalnikom.
7. Takoj je treba sklicati posvetovanje zastopnikov s področja osnovne in uporabne mehanike, na katerem bi obravnavali naslednja vprašanja:
   a) problematika raziskovanj na posameznih področjih uporabne in osnovne mehanike, pomen teh področij za gospodarski in duhovni napredek;
   b) raziskovalno delo v preteklosti in načrti za prihodnost; vskladitev načrtov in razširitev raziskovalne dejavnosti na neobdelana področja;
   c) oblika sodelovanja: čim bolj trajna koordinacija dela, izmenjava izkušenj, dokumentacija, stiki z drugimi središči doma in v tujini;
   č) izbira primernih kadrov za osnovne in aplikativne raziskave;
   d) vzgoja raziskovalnih kadrov: postdiplomski tečaji, štipendiranje in informiranje o doseženem napredku doma in v tujini.
8. V skladu z rezultati posvetovanj in dogovorov naj bi univerzitetni svet proučil položaj Instituta za matematiko, fiziko in mehaniko, njegovo organizacijsko strukturo in njegovo mesto na univerzi kot skupnosti fakultet. Sodelavci naj bodo vezani na istitut z delovno pogodbo, ne pa z vpisom. Sodelovanje v institutu naj pomeni delovno mesto ali del delovnega mesta.
   Univerzitetni svet naj precizira odnose med tem institutom in katedrami za iste predmete.
9. Svet je mnenja, da je treba delo na področju fizike obravnavati z enotnega vidika, zato priporoča tesno kooperacijo in razmejitev dela na tem področju med Institutom za matematiko, fiziko in mehaniko ter Nuklearnim institutom »Jožef Stefan«.

OD RAZREDNIH TEKMOVANJ DO MATEMATIČNE OLIMPIADE

Lahko rečemo, da je bila letošnja bilanca tekmovanj mladih matematikov pozitivna. Naši dijaki so prešli preko ožjih tekmovanj na šoli do republiškega in zveznega tekmovanja in nekateri med njimi se bodo udeležili še medarodnega tekmovanja v Varšavi. Vsa ta tekmovanja so temeljita preizkušnja znanja matematike ter stimulans učencem za to področje. Tako se jim že zgodaj zviša nivo znanja matematike ter poveča interes za ta predmet v taki meri, da se opredelijo in usmerijo svojo življenjsko pot v to ali v sorodno področje. To pa je tudi namen prirediteljev vseh teh tekmovanj.

Nekatere šole so izvedle predtekmovanje, druge pa so poslale najboljše dijake-matematike po presoji profesorja, ki je učil v razredu.

Republiško tekmovanje

Letošnja udeležba na tekmovanju v Ljubljani, ki je bilo 21. aprila, je bila rekordna. Iz posameznih šol se je udeležilo: I. gimn. Ljubljana — 12, II. gimn. Ljubljana — 28, V. gimn. Ljubljana — 15, VII. gimn. Ljubljana — 5, TSŠ Ljubljana — 6, I. gimn. Maribor — 6, II. gimn. Maribor — 13, Brežice 1, Celje 4, Idrija 3, Kamnik 4, Kočevje 3, Koper 1, Kranj 6, Gorica 8, Novo mesto 9, Postojna 1, Ptuj 5, Ravne 3, Stična 6, Škofja Loka 5, Trbovlje 3, Črnomelj 1. Skupaj 148 kandidatov. Tekmovanje je bilo po razredih. Iz posameznih razredov se je udeležilo: 33 dijakov iz prvega razreda, 51 iz drugega, 36 iz tretjega ter 28 iz četrtega razreda.

Naloge za I. razred

1. Izračunaj vrednost izraza

$$y = \frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

za $x = 2 + \sqrt{3}$!

2. V enakokrakem trapezu z osnovnicami a in c ter višino v zveži razpolovišči obeh osnovnic z oglišči trapeza! Izračunaj ploščine sedmih likov, ki tako nastanejo! Poseben primer za $a = 280$, $c = 112$ in $v = 105$.

3. Izračunaj obseg in ploščino romba, ako je dana višina v in ena diagonala e! Romb konstruiraj!

4. Naj bo dan poljuben trikotnik ABC. Izberi na stranici AB poljubno točko D, na stranici BC poljubno točko E in na stranici AC poljubno točko F. Če narišeš kroge, ki gredo skoze točke A, D, F oziroma B, E, D oziroma C, F, E, se ti trije krogi sekajo v eni točki. Zakaj?

Naloge za II. razred

1. Razreši enačbo

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

2. Dokaži brez uporabe logaritemskih tabel, da je

$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} > 2$$

3. Pravilna pokončna tristranična prizma ima osnovni rob a. Točke D, E, F leže vsaka na drugem stranskem robu in so za $a/2$, $a/3$, $2a/3$ oddaljene od osnovne ploskve. Določi ploščino preseka skozi točke D, E, F.

4. Pravilna pokončna štiristranska prizma ima osnovni rob $a = 10$, stranski rob $b = 40$. Koliko so oglišča oddaljena od ene izmed telesnih diagonal?

Naloge za III. razred

1. Dokaži, da sta enačbi

$$x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}} \quad \text{in} \quad x = a + \sqrt{x}$$

ekvivalentni, če so vsa števila v njih realna, kvadratni koreni pa imajo nenegativno vrednost. Reši drugo enačbo in ugotovi, kdaj ima en, kdaj dva in kdaj sploh nima korenov!

2. Dokaži, da ima vsaj ena izmed enačb

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0 \quad \text{in} \quad x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

realna korena, če zadoščajo koeficienti p_1, p_2, q_1, q_2 pogoju

$$p_1 p_2 = 2 (q_1 + q_2)$$

3. Pretvori izraz

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$$

v produkt in določi vse med 0^0 in 180^0 ležeče kote, za katere je ta izraz enak nič!

4. Piramida ima za osnovno ploskev romb. Dve njeni stranski ploskvi sta pravokotni na osnovni ploskvi. Kolik kot oklepata ostali stranski ploskvi z osnovno ploskvijo, če je plašč piramide m-krat tolik kakor ploščina osnovne ploskve?

Naloge za IV. razred

1. Reši enačbo

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 2 \sin 2x (1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots)$$

Za katere kote je enačba nesmiselna?

2. Eno oglišče trikotnika je v točki A (2, — 4), dve kotni simetrali pa sta na premicah z enačbama $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$. Kje sta ostali dve oglišči trikotnika? Na katerih premicah leže stranice? Kje je središče trikotniku včrtane krožnice in kolik je njen polmer?

3. V trikotniku tvorijo kotangensi notranjih kotov aritmetično zaporedje. Dokaži, da tvorijo aritmetično zaporedje tudi kvadrati nasprotnih stranic!

4. Dve ravni zrcalni ploskvi oklepata pravi kot. Na eno ploskev pade curek svetlobe tako, da tvori z njo naklonski kot α ($= 60^0$), projekcija žarka na to ploskev pa s presečnico obeh zrcalnih ploskev kot β ($= 45^0$). Po odboju na prvi zrcalni ploskvi napravi curek pot 20 cm do drugega zrcala, kjer se spet odbije. Nariši primerno sliko! Izračunaj a) naklonski kot drugič odbitega curka in drugega zrcala, b) kot projekcije drugič odbitega curka s presečnico obeh zrcal in c) oddaljenost prvega in drugega vpadišča od presečnice zrcal!

Izid republiškega tekmovanja mladih matematikov

1. nagrada: Stane Vrščaj, dijak 3. razreda gimnazije Ljubljana-Vič,

2. nagrada: Valentin Fidler, gimnazija Celje (2. razred),
Franc Dacar, TSSS Ljubljana (3. razred),
Josip Globevnik, gimnazija Ljubljana-Vič (3. razred),
Marta Knific, gimnazija Kranj (2. razred),
Marija Gerželj, gimnazija Celje (2. razred),

3. nagrada: Stane Hrovat, gimnazija Kranj (3. razred),
Boris Butina, II. gimnazija Ljubljana (2. razred),
Janez Bratko, II. gimnazija Ljubljana (2. razred).

Knjižne nagrade:
Petek Peter, I. gimnazija Ljubljana (4. razred),
Franc Biber, II. gimnazija Ljubljana (2. razred),
Rudi Tomažič, gimnazija Nova Gorica (2. razred),
Vesna Sila, gimnazija Kranj (2. razred),
Matija Burgar, gimnazija Novo mesto (2. razred),
Pavla Lah, gimnazija Kamnik (1. razred),
Aleš Brinar, II. gimnazija Ljubljana (2. razred).

Za zvezno tekmovanje v Beogradu so bili izbrani naslednji dijaki:
Stane Vrščaj,
Franc Dacar,
Josip Globevnik,
Stane Horvat,
Peter Petek.

Franc Dacar, dijak 2. letnika tehniške šole za strojno stroko v Ljubljani je tekmoval v 3. razredu. Njegova želja je bila, da bi se udeležil tudi zveznega tekmovanja. Ta želja se mu je tudi izpolnila, in to v obilni meri, ker se bo udeležil tudi zveznega tekmovanja v Varšavi.

Zvezno tekmovanje

Zvezno tekmovanje iz matematike je bilo 12. maja v Beogradu v zgradbi naravoslovno-matematične fakultete.

Tekmovanje je bilo v dveh skupinah: za 3. razred in za 4. razred gimnazije. Skupno število udeležencev je bilo 20 v 3. razredu in 18 v 4. razredu. Po posameznih republikah so se udeležili tekmovanja: iz Srbije 14 (7 + 7), Hrvatske 7 (3 + 4), Slovenije 5 (4 + 1), Bosne 4 (1 + 3), Makedonije 6 (4 + 2) in Črne gore 2 (1 + 1).

Na prvem sestanku je zvezna komisija izbrala naslednje naloge:

III. razred

1. Dokaži, da vsak realen koren x_1 enačbe

$$x^2 + p x + q = 0 \qquad (p \text{ in } q \text{ sta realni števili})$$

zadošča pogoju

$$x_1 \geqslant \frac{4 q - (p + r)^2}{4 r}$$

če je r pozitivno število!

2. Reši in diskutiraj neenačbo

$$\frac{x}{x-a} - \frac{-2a}{x+a} > \frac{-8a^2}{x^2-a^2}$$

če je a realno število!

3. Trikotnik ima stranice a, b in c in kote α, β, γ. Pokaži, da ostri koti x, y, z določeni z enačbami

$$\cos x = \frac{a}{b+c}, \quad \cos y = \frac{b}{a+c}, \quad \cos z = \frac{c}{a+b}$$

zadoščajo enakostima

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = 1 \qquad \text{ter}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}!$$

4. Osnovna ploskev piramide je paralelogram. Skozi osnovni rob ter srednico stranske ploskve, ki je nasproti osnovnemu robu povlečemo ravnino. V kakšnem razmerju deli ta ravnina prostornino piramide?

IV. razred

1. Iz kvadrata s stranico $2a$ izreži 4 enakokrake trikotnike, ki imajo za osnovnico stranico kvadrata in višino x. Preostali del kvadrata predstavlja mrežo pravilne četverostrane piramide.

a) Izrazi volumen V te piramide kot funkcijo parametra x!

b) Določi x tako, da je volumen največji!

c) Skiciraj grafik funkcije $V(x)$!

2. Pokaži, da velja v enakokrakem trikotniku z osnovnico c in krakoma a ter simetralo t kota ob osnovnici zveza

$$t^2 = c^2 \frac{a(2a+c)}{(a+c)^2}$$

(Predlog Slovenije)

3. Krožnica k, s premerom AB in polmerov r leži v ravnini Σ. Točka S leži na normali ravnine Σ v točki B. Skozi točko S postavimo ravnino Σ_1 tako, da je pravokotna na ravnino ABS in da tvori z ravnino Σ kot $\frac{\pi}{3}$.

a) Določi mejne vrednosti za $x = \mathrm{BS}$, tako da ravnina Σ_1 seče krožnico k v dveh točkah C in D!

b) Dokaži, da sta kota SCA in SDA prava kota!

c) Določi vsoto kvadratov robov tetraedra SDAC v funkciji x in R!

d) Od te vsote določi geometrijsko mesto ekstremov te funkcije, če se R spreminja!

4. Odsek gibljive tangente parabole $y^2 = 2px$ omejujeta stalni tangenti na to parabolo. Ta odsek projeciramo na premico vodnico parabole tako, da je dolžina te projekcije konstantna. Dokaži!

Komisija je predložila naslednje kandidate za nagrade in pohvale, ki so bile podeljene še isti dan na svečanem sprejemu v veliki avli naravoslovno-matematične fakultete:

III. razred: Prvo nagrado sta prejela Stane Vrščaj in Franc Dacar, oba iz Ljubljane. Druga nagrada ni bila podeljena, tretjo pa je prejel Josip Globevnik iz Ljubljane. Pohvaljeni so bili: Stane Horvat (Kranj), Dragomir Arsov (Skopje) in Zoran Gonda (Beograd).

IV. razred: Prvo nagrado sta prejela Valerijan Bijelik (Vinkovci) in Mila Mrševič (Beograd). Drugo nagrado je prejel Ivan Boljevski (Pirot). Tretjo nagrado sta prejela Peter Petek (Ljubljana) in Katica Stevanović (Niš). Pohvaljeni so bili Ferenc Kalmar (Sombor), Branko Lazić (Zagreb) in Dobroslav Zrelec (Brčko).

Nagrade so bile od 10 do 50 tisoč dinarjev. Valerijan Bijelik pa je prejel še 4-letno štipendijo za študij matematike na katerikoli univerzi v Jugoslaviji.

Komisija je tudi izvedla anketo med kandidati zveznege tekmovanja z namenom, da spozna, kakšne so njihove želje za nadaljnji študij. Na fakulteti bo študiralo matematiko 9, tehnično matematiko 3, fiziko 2, elektrotehniko 15, gradbeništvo 2, arhitekturo 2, aeronautiko 1, biokemijo 1, 3 pa so še neodločeni.

Za 5. mednarodno matematično olimpiado v Varšavi je bilo izbranih 6 najboljših kandidatov iz 4. razreda, in sicer Valerijan Bijelik, Mila Mrševič, Ivan Boljevski, Peter Petek in Katica Stevanović ter dva najboljša iz 3. razreda — Stanko Vrščaj in Franc Dacar.

Našim tekmovalcem želimo vsi mnogo uspeha v Varšavi.

S. Uršič

P. S.:

Pred izidom revije smo prejeli rezultate s tekmovanja na Poljskem. Tekmovanje ni bilo v Varšavi, kakor smo prvotno mislili, ampak v Wroclawu. Naši dijaki so dosegli naslednje rezultate: Franc Dacar — 1. nagrado, Ivan Boljevski in Peter Petek — 2. nagrado ter Mila Mršević — 3. nagrado. Stane Vrščaj je žal zbolel in je v bolnici pisal nalogo. Kljub tej oviri je dosegel 15 točk. Kot ekipa se je naša država uvrstila na 4. mesto. Na prvem mestu so bili tekmovalci iz Sovjetske zveze. Tekmovalo pa je 64 kandidatov iz 8 dežel. Na mednarodni olimpiadi tekmuje poleg posameznikov ekipa z osmimi udeleženci. Tekmovanje je dvodnevno z enodnevnim vmesnim presledkom. Vsakokrat rešujejo po tri naloge. Maksimalno število dosegljivih točk je 40. Letos ni nihče dosegel 40 točk. Naš Dacar si je priboril 39 točk. Prvo nagrado dobi kandidat, ki doseže vsaj 35 točk, drugo nagrado od 28 do 34 točk, tretjo pa od 21 do 27 točk. Vrstni red ekipe pa se določi tako, da se seštejejo dosežene točke vseh osmih tekmovalcev.

Sicer nam bodo o tem kaj več poročali v prihodnji številki naši nagrajenci.

ZA MLADE MATEMATIKE IN FIZIKE

Na zadnji seji je uredniški odbor odločil, da bo Obzornik objavljal naloge, ki so primerne za boljše dijake matematike in fizike vseh srednjih šol. Te naloge objavljamo z namenom, da bi se naši mladi matematiki in fiziki urili v znanju teh predmetov in tako pripravljali na bodoča tekmovanja. Videli smo, da so dosegli zavidljive uspehe na raznih tekmovanjih tisti dijaki, ki so samostojno reševali tudi bolj zapletene naloge, kot so v naših srednješolskih učbenikih. Posebno lepe rešitve nalog bomo tudi priobčili v naslednji številki. Objavili pa bomo tudi naloge, ki nam jih bodo posredovali dijaki, profesorji ali ljubitelji matematike in fizike. Za vsako nalogo, ki nam jo pošljete, napišite tudi rešitev.

Vse profesorje matematike in fizike na srednjih šolah prosimo, da posredujejo te naloge dijakom ter jih napotijo, da sodelujejo v našem kotičku.

Matematika.

1. naloga. Dokaži, da je

$$2 \cos 99^0 \sin 66^0 + 33^0 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}!$$

(Stane Vrščaj — Ljubljana)

2. naloga. Dokaži, da je v četverokotniku vsota obeh diagonal manjša od obsega in večja od njegove polovice! (Peter Petek — Ljubljana)

3. naloga. Seštej n členov vsote $5 + 55 + 555 + \ldots$!

(Predlog za zvezno tekmovanje)

4. naloga. Dokaži, da je

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$$

ako je $a + b + c = 0$! (Tekmovanje v Bolgariji)

5. Dan je kvadrat ABCD s stranico a. Daljica d se giblje tako, da sta krajni točki vedno na obsegu kvadrata.

a) Kakšen lik opiše sredina daljice med svojim gibanjem?

b) Diskusija! (Olimpiada v Budimpešti)

6. Določi vsa realna števila p, za katere je

$$x^2 - 2(p + 4)x + p^2 + 6p = 0$$

ako a) sta oba korena različna in negativna,

b) je en koren negativen in drugi pozitiven!

(Olimpiada v Pragi)

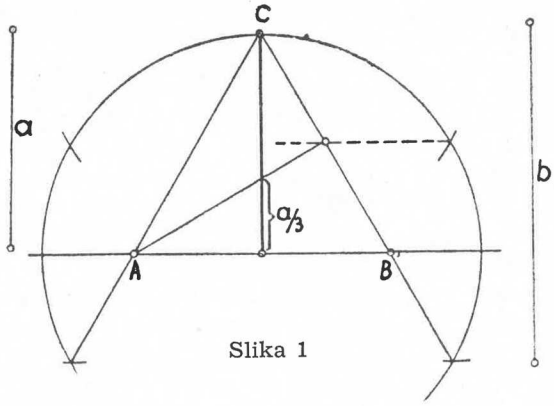
In še nekaj rešitev nalog iz zbirke III, ki jo je izdalo Društvo matematikov in fizikov SRS za šolsko leto 1961/62.

1. Razdeli dano daljico na tri enake dele s pomočjo lastnosti enakostraničnega trikotnika!

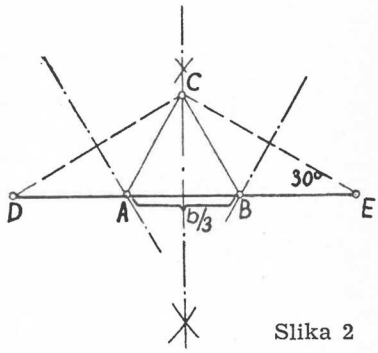
Rešitev Franca Dacarja iz Ljubljane:

a) Dano daljico vzamemo za višino v enakostraničnem trikotniku. Druga višina jo deli v razmerju 2 : 1. (Glej sliko 1!)

b) Dano daljico vzamemo za obseg trikotnika in s tem podatkom načrtamo enakostraničen trikotnik. (Glej sliko 2!)



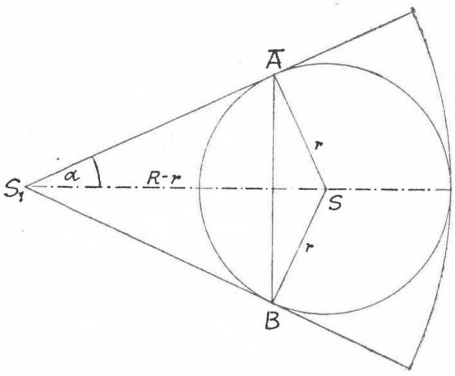
Slika 1



Slika 2

2. V krožni izsek kroga s polmerom R je včrtan krog s polmerom r. Kolika je dolžina tetive, ki veže dotikališči včrtanega kroga s polmeroma večjega kroga, ki tvorita ta krožni izsek?

Rešitev Josipa Globevnika iz Ljubljane:



Iščem tetivo AB = t

$$\frac{t}{2} = r \cos \alpha \qquad \sin \alpha = \frac{r}{R - r}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{r^2}{(2 - r)^2} = \frac{(R - r)^2 - r^2}{(R - r)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - 2\,Rr}}{R - r} \qquad \frac{t}{2} = r \cos \alpha$$

$$t = \frac{2\,r\,\sqrt{R^2 - 2\,Rr}}{R - r}$$

3. V aritmetičnem zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ velja enačba $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$

(S_k je vsota prvih k členov zaporedja)

Dokaži, da je $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2\,m - 1}{2\,n - 1}$!

Rešitev Alojza Kodreta z Jesenic:

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \qquad \frac{m\,[2\,a_1 + (m - 1)\,d]}{n\,[2\,a_1 + (n - 1)\,d]} = \frac{m^2}{n^2}$$

Če naj v ulomku na levi res obvelja le kvadratno razmerje, mora veljati $2\,a_1 - d = 0$; $a_1 = \frac{d}{2}$

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{d/2 + (m - 1)\,d}{d/2 + (n - 1)\,d} = \frac{1 + 2\,(m - 1)}{1 + 2\,(n - 1)} = \frac{2\,m - 1}{2\,n - 1}$$

Stanko Uršič

Izšla je informativna brošura

ŠTUDIJ FIZIKE NA UNIVERZI V LJUBLJANI

ki sta jo izdala *Katedra za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo* in *Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani.* Brošuro, v kateri je zbrano vse o študiju fizike — od pravilnikov in določb do učnih programov in načrtov — dobe interesenti po ceni 300 din pri vratarju na Katedri za fiziko, Ljubljana, Jadranska 26.

RAZPRODAJA STARIH LETNIKOV »OBZORNIKA« PO ZNIŽANI CENI

Na zalogi imamo večje število »Obzornikov za matematiko in fiziko« vseh letnikov razen številk 1/I (1. št. I. letnika), 4/II in 1/VI. Da ne bi časopis brez koristi ležal v skladišču, smo se odločili razprodati večji del zaloge po znatno znižani ceni, in sicer vse letnike od I—IX po ceni 120 din letnik ali 30 din številka.

Kdor želi izkoristiti to priliko, naj piše dopisnico na naslov: »Obzornik za matematiko in fiziko«, Ljubljana, poštni predal 227, z navedbo želenih letnikov.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-608-34.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.