

MATEMATIČNA KNJIŽNICA - LJUBLJANA

1963 • X • 1

D

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

X. LETNIK — 1. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV IN FIZIKOV SRS

LJUBLJANA, APRIL 1963

VSEBINA

Članki	Stran
O teoriji mere (Anton Suhadolc)	1
Normalna števila (Jože Grasselli)	6
Lupinski model jedra (Mitja Rosina)	13
Novi osnovni delci (Janez Strnad)	22
Optično črpanje (Gozmir Lahajnar)	34
Novice	
Nova skala atomskih mas: $^{12}\text{C} = 12$ (Janez Lesjak)	44
Šola	
Nekaj o šolah na Poljskem (Stanko Uršič)	47

CONTENTS

Articles	Page
On the Theory of Measure (Anton Suhadolc)	1
On Normal Numbers (Jože Grasselli)	6
The Shell Model of the Nucleus (Mitja Rosina)	13
New Elementary Particles (Janez Strnad)	22
Optical Pumping (Gozmir Lahajnar)	34
News	
New Scale of Atomic Masses: $^{12}\text{C} = 12$ (Janez Lesjak)	44
School	47



O TEORIJI MERE

ANTON SUHADOLC

Problem, prirediti nekaterim ravninskim likom realno število, ki ga imenujemo ploščina, oziroma analogen problem za prostorska telesa, je že zelo star. Enostavnim likom so znali določevati ploščino že stari Babilonci, Egipčani in drugi narodi. Seveda zahtevamo od ploščine nekaj lastnosti: 1. ploščina naj bo pozitivna; 2. če lik po ravnini premikamo, ne da bi ga kaj deformirali, naj bo njegova ploščina ves čas ista; 3. če lik razdelimo na dva dela, naj bosta ploščini obeh delov skupaj enaki ploščini lika pred razdelitvijo. Za like, ki so omejeni npr. z zvezno odvedljivimi krivuljami, se da ploščina s temi lastnostmi konstruirati s pomočjo integralnega računa.

Pojem ploščine moremo posplošiti npr. na tale način. Vsaki omejeni množici M v n -dimenzionalnem prostoru iščemo neko enolično določeno nenegativno število — zaznamujemo ga z $\mu(M)$ — z lastnostmi:

a) Če je $M_1, M_2, M_3, \dots$ končno ali števno neskončno mnogo paroma nepresekaajočih se množic, katerih unija je tudi omejena množica, naj velja

$$\mu(M_1 \cup M_2 \cup \dots) = \mu(M_1) + \mu(M_2) + \dots$$

To lastnost mere μ izrazimo z besedami takole: mera naj bo števno aditivna funkcija množic.

b) Če nastane množica N iz množice M tako, da smo množico M premaknili v prostoru, naj bo $\mu(N) = \mu(M)$.¹

c) Mera enotne kocke naj bo 1. Enotna kocka je množica točk $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$, katerih koordinate zadoščajo neenačbam $0 \leq x_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, n$.

Ta problem je za vsak n nerešljiv, kakor je pokazano v [1]. Zadostuje dokaz, da ni nobene mere μ z lastnostmi a, b, c že na premici. Če namreč na premici ni take mere, je ni tudi v večdimenzionalnih prostorih, kot nam pokaže naslednji premislek:

Vzemimo, da bi imeli v n -dimenzionalnem prostoru mero μ' z lastnostmi a, b, c! Potem moremo v $(n-1)$ -dimenzionalnem prostoru definirati mero μ z lastnosti a, b, c takole: Naj imajo točke v n -dimenzionalnem prostoru koordi-

¹ »Premik« v n -dimenzionalnem prostoru je taka transformacija prostora vase, ki ohranja razdaljo med dvema poljubnima točkama. V pravokotnem koordinatnem sistemu se izražajo koordinate $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ točke po transformaciji s starimi koordinatami $x_1, x_2, \dots, x_n$ takole:

$$x'_k = \sum x_{kj} x_j + a_k,$$

pri čemer je matrika koeficientov $\|a_{kj}\|$ ortogonalna matrika.

nate $x_1, x_2, \dots, x_n$, v $(n-1)$ -dimenzionalnem prostoru pa koordinate $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Vsaki množici M v $(n-1)$ -dimenzionalnem prostoru priredimo množico M' , »valj« z osnovnico M in višino 1. Ta valj je skupnost točk $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kjer je točka $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ v množici M , x_n pa je med 0 in 1. Sedaj definirajmo $\mu(M) = \mu'(M')$. Prav lahko se prepričamo, da zadošča mera μ zahtevam a, b, c, če tem zahtevam ustreza mera μ' .

Od tod sledi: Če bi v kakšnem n -dimenzionalnem prostoru eksistirala mera z lastnostmi a, b, c, bi taka mera eksistirala tudi na premici. Če pa dokažemo, da na premici take mere ni, je gotovo ni tudi v večdimenzionalnih prostorih.

Pokažimo zdaj, da na premici res ni mere z lastnostmi a, b, c!

Na številski premici identificirajmo točke, ki se razlikujejo za celo število. Geometrično to pomeni, da smo premico navili na krog K , ki nastane, ako zvijemo daljico $[0, 1]$ v krog. Pri tem se pokrivajo točke, katerih koordinate se razlikujejo za celo število. Vzemimo na krogu K množico samih različnih točk $x, y, z, \dots$. To množico označimo s črko P_0 . Iz P_0 tvorimo množico P_1 tako, da vsem elementom množice P_0 prištejemo število α ; seveda ni nobena omejitev, če vzamemo, da je α število med 0 in 1. Geometrično je jasno, da nastane P_1 iz P_0 tako, da zavrtimo P_0 po krogu K v pozitivni smeri za lok z dolžino α . Ustrezni množici P_0 in P_1 na daljici $[0, 1]$ razdelimo takole:

$$B_0 = \{x; 0 \leq x < 1 - \alpha\}, \quad C_0 = \{x; 1 - \alpha \leq x < 1\}, \quad P_0 = B_0 \cup C_0.$$

Tu je točka x iz množice P_0 . Prav tako postavimo

$$B_1 = \{x; \alpha \leq x < 1\}, \quad C_1 = \{x; 0 \leq x < \alpha\}, \quad P_1 = B_1 \cup C_1,$$

pri čemer je x v množici P_1 . Množico B_1 dobimo, če premaknemo B_0 za α , C_1 pa, če premaknemo množico C_0 za $1 - \alpha$. Po zahtevi b imata množici B_0 in B_1 enako mero, prav tako pa C_0 in C_1 : $\mu(B_0) = \mu(B_1)$, $\mu(C_0) = \mu(C_1)$. Množici B_0 in B_1 nimata skupnih točk, množici C_0 in C_1 pa prav tako ne. Zato velja po zahtevi a:

$$\mu(P_0) = \mu(B_0) + \mu(C_0) = \mu(B_1) + \mu(C_1) = \mu(P_1).$$

Torej imata množici P_0 in P_1 enaki meri.

Razdelili bomo interval $[0, 1]$ na števno mnogo med seboj nepresekajočih se množic. Naj bo α iracionalno število. Vsakemu številu x priredimo števno množico P_x :

$$P_x = \{\dots, x - 2\alpha, x - \alpha, x, x + \alpha, x + 2\alpha, \dots\}$$

Na krogu z obsegom 1 moremo tolmačiti množico P_x kot oglišča mnogokotnika, ki se nikoli ne zaključí, ker je α iracionalno število. Če vzamemo dve različni točki x in y , imamo dve možnosti: razlika $x - y$ je večkratnik števila α , ali pa $x - y$ ni večkratnik števila α . V prvem primeru sta množici P_x in P_y identični, v drugem pa nimata skupne točke. Vse točke moremo zdaj razdeliti na razrede takole: Točki x in y sta v istem razredu, če je $P_x = P_y$, v različnih razredih pa, če je $P_x \neq P_y$. Takoj vidimo, da sta x in y v istem razredu tedaj in le tedaj, če je njuna razlika $x - y$ cel večkratnik

števila α . Iz vsakega razreda P_x si vzemimo po eno točko.² Tako dobimo množico točk $x, y, z, \dots$, ki jo označimo z A_0 . Tvorimo sedaj za vsako celo pozitivno ali negativno število m množico A_m takole:

$$A_m = \{x + m\alpha, y + m\alpha, \dots\}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dobljene množice tolmačimo na našem krogu K . Točke iz A_0 so na K same različne točke in isto velja za A_m , ker so točke iz A_m le za $m\alpha$ premaknjene točke množice A_0 . Dve množici A_m in A_n , $m \neq n$, se ne sekata. To dokažemo s protislovjem: Naj bi A_m in A_n imeli skupno točko! Potem bi bilo pri nekem x in nekem y iz A_0 $x + m\alpha = y + n\alpha$, ali $x = y + (n - m)\alpha$. To pomeni, da bi bili točki x in y iz istega razreda P_x , kar pa ni mogoče, ker smo točke v A_0 izbrali tako, da je v A_0 iz vsakega razreda le po ena točka. Torej se A_m in A_n , $m \neq n$, res ne sekata. Po drugi strani je vsaka točka x intervala $[0, 1)$ vsebovana vsaj v enem razredu P_x . To pomeni, da unija množic A_m , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, tolmačenih na krogu K , pokriva ravno ves K , oziroma da je unija zaporedja $A_0, A_1, A_{-1}, A_2, \dots$ paroma nepresekajočih se množic ravno interval $[0, 1)$.

Če bi na premici eksistirala mera μ z lastnostmi a, b, c, bi imeli po eni strani

$$\mu(M) = \mu(A_0 \cup A_1 \cup A_{-1} \cup A_2 \cup \dots) = \mu(A_0) + \mu(A_1) + \mu(A_{-1}) + \dots = 1$$

Množici A_0 in A_m imata po razmišljavi, ki smo jo napravili za množici P_0 in P_1 , enaki meri: $\mu(A_m) = \mu(A_0)$. Ker je A unija vseh A_m , velja

$$\mu(A) \geq \mu(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

saj je mera nenegativna funkcija množic. Po lastnosti a za n množic in ker je $\mu(A_m) = \mu(A_0)$, velja za vsako celo število n :

$$\mu(A) = 1 \geq n \cdot \mu(A_0) \quad \text{ali} \quad \mu(A_0) \leq 1/n.$$

To pomeni, da je $\mu(A_0)$ lahko samo 0. Potem je tudi $\mu(A_m) = 0$ za vsak m in $\mu(A) = \sum \mu(A_m) = 0$. To je v nasprotju z zgornjo ugotovitvijo, da bi moralo biti $\mu(A) = 1$. S tem protislovjem je dokazana trditev, da mera μ z lastnostmi a, b; c na premici ne eksistira.

Pripomnimo naj, da eksistira rešitev podobnega problema, pri katerem pa zahtevamo, da je definirana mera μ z lastnostmi a, b, c le za nekatere množice v n -dimenzionalnem prostoru. Množice, za katere je mera definirana, imenujemo merljive množice. Primer take mere je znana Lebesguova mera.

Spoznali smo torej, da problem mere v vsej splošnosti ni rešljiv. Vprašamo se lahko, ali eksistira morda rešitev problema, če npr. oslabimo zahtevo a v toliko, da zahtevamo aditivnost mere le za končno mnogo množic. Natančneje formuliramo novi šibkejši pogoj takole:

² Možnost tega nam zagotovi aksiom o izboru, ki ga moremo formulirati takole: če je dana družina $\{A_\alpha\}$ poljubno mnogo nepraznih množic A_α , eksistira množica A , ki ima iz vsake množice A_α natanko po en element x_α , drugih elementov pa v množici A ni. Brez uporabe tega ali ekvivalentnega aksioma se konstrukcija nemerljivih množic še ni posrečila.

a*) za omejeni nepresekajoči se množici A in B naj velja

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Zahtevi b in c naj ostaneta nespremenjeni.

Študij tega problema je privedel na celo vrsto nenavadnih dejstev. Ne-katere od teh si hočemo v nadaljnjem natančneje ogledati.

Površino enotne krogle v tridimenzionalnem prostoru je mogoče razdeliti na 4 množice A, B, C in D takole (glej [1], str. 469): Površina enotne krogle K je unija teh štirih množic, vse množice A, B, C, D so si paroma med seboj tuje. Množica D je števna množica in njena mera je zato 0. (Dokazati se da enostavno, da je mera vsake števne množice vedno 0.) Množice A, B, C pa imajo tele lastnosti: če zavrtimo enotno kroglo okoli določene osi za kot 120° , pokrije množica A množico B , množica B množico C , množica C pa množico A . Po zahtevi b sledi od tod, da je $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$. Po zahtevi a*, ki velja ne samo za dve nepresekajoči se množici, ampak tudi za končno mnogo takih množic, imamo $\mu(K) = \mu(A \cup B \cup C \cup D) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(D) = 3\mu(A)$ ali

$$\mu(A) = \frac{1}{3}\mu(K). \quad (1)$$

Če pa zavrtimo kroglo okoli neke druge osi za kot 180° , pokrije množica A unijo množic B in C ! Po zahtevi b imamo zopet $\mu(A) = \mu(B \cup C)$. Ker je po a* tudi $\mu(K) = \mu(A \cup B \cup C \cup D) = \mu(A) + \mu(B \cup C) = 2\mu(A)$, sledi od tod

$$\mu(A) = \frac{1}{2}\mu(K). \quad (2)$$

Enačbi (1) in (2) sta očitno mogoči le tedaj, ko je $\mu(A) = 0$ in potem tudi $\mu(B) = \mu(C) = 0$. Torej je $\mu(K) = 0$. Od tod pa lahko sklepamo, da je $\mu(M) = 0$ za vsako množico M v tridimenzionalnem prostoru. To pa je v protislovju z zahtevno c in tako smo pokazali, da je problem, kako najti mero z lastnostmi a*, b, c, v 3 in večdimenzionalnih prostorih, nerešljiv.

Bolj po domače bi mogli opisati zgornji paradoks takole: Če zanemarimo števno množico D , katere mera je itak 0, smo razdelili površino krogle na tri množice tako, da je vsaka istočasno polovica in tretjina cele površine krogle!

Gornji paradoks ničesar ne pove, kako je z eksistenco mere z lastnostmi a*, b in c v eno- in dvodimenzionalnem prostoru. Za čuda v teh dveh prostorih taka mera eksistira, kot je pokazano v [2]. Pač pa ima ta mera kaj čudne lastnosti, ki niso v skladu z našimi nazornimi predstavami o meri. Oglejmo si tale primer: Naj bosta A in B omejeni množici na premici. Rekli bomo, da je množica A manjša od množice B , če eksistira povratno enolična preslikava množice A na množico B , pri kateri se dve poljubni točki iz A preslikata v dve točki iz B z večjo medsebojno razdaljo. Nadalje bomo rekli, da je množica M »po razkosanju manjša« od množice N , če se dasta množici M in N razdeliti na končno število podmnožic M_k in N_k tako, da je

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n, \quad M_i \cap M_k = \emptyset, \quad \text{če } i \neq k,$$

$$N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n, \quad N_i \cap N_k = \emptyset, \quad \text{če } i \neq k$$

in da je vsaka množica M_k v zgornjem smislu manjša od množice N_k . Sedaj je mogoče dokazati, da je vsak interval na premici »po razkosanju manjši« od vsakega drugega intervala na premici. Torej mora imeti mera μ z lastnostmi a^* , b in c na premici tole lastnost: mera množice se pomanjša, če transformiramo množico z omenjeno transformacijo, ki vse razdalje poveča!

Omenimo naj, da Lebesguova mera, ki je definirana seveda le za nekatere množice, nima te patološke lastnosti.

Vendar s tem še nismo izčrpali vseh paradoksov, ki nastopajo v teoriji mere. V [3] je pokazana naslednja zanimiva lastnost množic v prostorih s tremi in več dimenzijami:

Kot je dobro znano, imenujemo dve množici A in B »po razkosanju enaki«, če je mogoče razdeliti množico A in množico B na n podmnožic A_k oziroma B_k , ki se paroma ne sekajo in imajo lastnost, da so si podmnožice A_k in B_k paroma skladne. (To pomeni, da dobimo množico B_k iz množice A_k tako, da množico A_k preslikamo z neko ortogonalno transformacijo.) Sedaj je mogoče dokazati izrek: poljubni množici A in B s tremi ali več dimenzijami, ki vsebujeta notranje točke, sta si »po razdelitvi enaki«. (Notranja točka neke množice A je taka točka, okoli katere se da opisati dovolj majhna kroglja, ki še vsa leži v množici A .) V posebnem primeru se da npr. krogli s polmeroma 1 in 2 razdeliti na končno mnogo podmnožic tako, da so si te podmnožice paroma skladne! Ta paradoks je zelo v nasprotju z našimi nazornimi predstavami. Seveda pa v eno- in dvodimenzionalnem prostoru tega paradoksa ni.

Ob vsem tem se nam vsiljuje vprašanje: splošna mera z lastnostmi a^* , b , c eksistira v eno- in dvodimenzionalnem primeru, v tro- in večdimenzionalnih prostorih pa ne. Ali morda spremeni evklidski prostor pri prehodu od 2 na 3 dimenzije svoj karakter? Na to težko vprašanje je odgovoril matematik John von Neumann takole ([4]): Za neeksistenco mere v tri- in večdimenzionalnih prostorih in za paradokse v tej zvezi ni »kriva« struktura prostora, ampak algebraična struktura grupe gibanj v teh prostorih. Pokazal je namreč, da je eksistenca splošne mere v *poljubnem* metričnem prostoru (ne samo v evklidskem prostoru) odvisna od algebraične strukture grupe gibanj, ki jo določa ta metrični prostor.

Literatura:

- [1] Hausdorff: Mengenlehre. Leipzig 1914.
- [2] Banach: Fundamenta Math. IV, 1923.
- [3] Banach, Tarski: Fundamenta Math. IV, 1923.
- [4] J. von Neumann: Fundamenta Math. XIII, 1929.

NORMALNA ŠTEVILA

JOŽE GRASSELLI

V množici realnih števil moremo razločevati razne podmnožice števil, ki se ujemajo v kaki lastnosti. Spomnimo se na dva znana zgleda.

Kot prvi primer omenimo racionalna in iracionalna števila. Racionalna števila definiramo kot tista realna števila, ki se dajo izraziti s kvociantom $\frac{a}{b}$ dveh celih števil a, b ($b \neq 0$). Vpeljava pojma »racionalno število« je smiselna, ker vsako realno število — npr. že $\sqrt{2}$ — ni racionalno. S to ugotovitvijo je pa obenem dana možnost, opredeliti iracionalna števila kot tista realna števila, ki niso racionalna.

Drugi zgled: algebrajska in transcendentna števila. Realna števila, ki ustrezajo kakšni algebrajski enačbi s celimi koeficienti, so algebrajska. Tako je $\sqrt{2}$ algebrajsko število, saj ustreza algebrajski enačbi $x^2 - 2 = 0$, ki ima za koeficiente cela števila. Spet ima pomen govoriti o algebrajskih številih, ker vsako realno število ni algebrajsko. Realna števila, ki niso algebrajska, imenujemo transcendentna števila. Znamenita primera transcendentnih števil sta osnova naravnih logaritmov e in razmerje med obsegom in premerom kroga π .

Lastnost, s katero opredelimo normalna števila, je v ozki zvezi z izražavo realnih števil v obliki neskončnih decimalnih števil. Realno število a se da zapisati v sistemu z osnovo 10 kot neskončno decimalno število

$$a = m, a_1 a_2 a_3 \dots \quad (1)$$

Tu je m celo število, $a_1, a_2, a_3, \dots$ pa so cifre med 0 in 9. Dejstvo, da je število racionalno, se v zapisu (1) pokaže tako, da je ustrezno neskončno decimalno število periodično. Iracionalna števila se pa izražajo kot neperiodična neskončna decimalna števila. V splošnem je možno vsako realno število pisati na en sam način v obliki (1). Le nekatera racionalna števila imajo dva različna takšna zapisa. Tako je npr. $\frac{1}{2} = 0,5000\dots = 0,4999\dots$. Ker sta v takih primerih oba zapisa periodična, nas ta dvojnost v nadaljnjem ne bo prav nič motila. Vsako realno število je možno predstaviti v obliki (1). Toda tudi vsak, na poljuben način tvorjen izraz (1), določa vedno neko realno število.

Pri različnih realnih številih so cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 za decimalno vejico na razne načine razporejene, pa tudi pogostost, s katero se javlja kakšna izbrana številka, je pri različnih številih različna. Zaznamujmo z A_n odsek prvih n cifr za decimalno vejico v izražavi (1) za število a , torej $A_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$. V tem odseku nastopajo cifre od 0 do 9, vsaka določeno mnogokrat. Če je b neka izbrana cifra med 0 in 9, hočemo z $N(b, A_n)$ označiti število, ki pove, kolikokrat se cifra b nahaja v odseku A_n . Očitno je $N(b, A_n)$ neko celo število med 0 in n . Možno je namreč, da cifre b v odseku A_n ni in je tedaj $N(b, A_n) = 0$. Lahko se pa zgodi, da so vse cifre v odseku A_n enake b in tedaj je seveda $N(b, A_n) = n$. Ko se dolžina odseka A_n veča, vrednost $N(b, A_n)$ narašča ali pa

Poglejmo zdaj, kaj se godi s količnikom $\frac{1}{n} N(b, A_n)$, ko narašča n preko vsake meje. Možnosti, ki bi mogle nastopiti pri raznih cifrah b in pri raznih številih a , so naslednje:

a) Za vsako cifro b eksistira $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(b, A_n)$, ko gre $n \rightarrow \infty$, in te limite so pri vseh b iste. V tem primeru je povprečna pogostost vsake od deset cifer v vseh zadosti dolgih odsekih števila α približno enaka in vrednost limite je $\frac{1}{10}$.

c) Za nekatere cifre b ne eksistira $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(b, A_n)$. Take cifre nastopajo v številu a neskončnokrat, vendar niso enakomerno porazdeljene, pač pa se na nekih mestih kopičijo, na drugih mestih jih pa ni.

$$\alpha_0 = 0,01234567890123456789 \dots$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(b, A_n) = \frac{1}{10} *$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(1, A_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(2, A_n) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(b, A_n) = \frac{1}{10}$$
[illegible]

7

To število je tvorjeno samo iz cifer 0 in 1. Njegova zgradba od tretje decimalke naprej je preprosta: izmenoma si slede skupine samih enojk in samih ničel; v prvi skupini so tri enojke, vsaka naslednja skupina pa je dvakrat tako dolga kot pred njo stoječa skupina. Od tretje decimalke naprej se vrste torej 3 enojke, 6 ničel, 12 enojk, 24 ničel, 48 enojk, 96 ničel, ... Jemljimo najprej v številu (2) odseke z dolžino $n' = 3 \cdot 2^k$, $k = 0, 2, 4, 6, \dots$. Dobimo, da je za vsak tak odsek $\frac{1}{n'} N(1, A_{n'}) = \frac{1}{3}$. Toda če jemljemo odseke z dolžinami $n'' = 3 \cdot 2^k$, $k = 1, 3, 5, 7, \dots$, pa vidimo, da je tedaj vedno $\frac{1}{n''} N(1, A_{n'') = \frac{2}{3}$. Pri številu (2) torej količnik $\frac{1}{n} N(1, A_n)$ niha med $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$, ko n narašča, in seveda nima limite. V številu (2) imamo tedaj zgled za možnost c).

Realna števila, ki se obnašajo tako kot a_0 , imenujemo enostavno normalna za osnovo 10. Število je torej enostavno normalno za osnovo 10, če je za vsako od desetih cifer b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(b, A_n) = \frac{1}{10}, \quad b = 0, 1, 2, \dots, 9$$

Do zdaj nas je zanimalo, kaj se godi s povprečno pogostostjo kake posamezne cifre b pri raznih realnih številih, ko dolžina odseka A_n neprenehoma raste. Toda prav isto vprašanje si je možno zastaviti v nekoliko splošnejši obliki. Zaznamujmo z B_k blok k cifer, ki so na kak način izbrane izmed cifer 0, 1, 2, ..., 9. Torej je B_1 blok, ki ga sestavlja ena sama cifra. Ker imamo na razpolago 10 cifer, je vseh blokov B_1 ravno 10. Blok B_2 vsebuje 2 cifri. Vseh blokov B_2 je 10^2 , toliko je namreč različnih parov, tvorjenih iz 10 cifer. Vseh blokov B_k je 10^k . Za število, ki pove, kolikokrat nastopa blok B_k v odseku A_n , bomo pisali $N(B_k, A_n)$. Pri številu 2,3151561583 je npr. $N(15, A_8) = 3$. Zdaj se lahko za vsak blok B_k pri vsakem številu a vprašamo, kaj se godi s povprečno pogostostjo bloka B_k v odseku A_n , ko n narašča čez vse meje. Število imenujemo normalno za osnovo 10, če je za vsak blok B_k , $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(B_k, A_n) = 10^{-k} \quad (3)$$

Pri normalnih številih torej limita (3) za vsak blok B_k obstaja in je razen tega za vse enako dolge bloke ista. To pomeni, da nastopajo v decimalnem zapisu normalnega števila vsi možni bloki B_k neskončnokrat in sicer se pojavljajo bloki z enako mnogo ciframi ob naraščanju odseka A_n relativno enako pogosto. Medtem ko pri enostavno normalnih številih za osnovo 10 nobena od desetih cifer ni tako privilegirana, da bi nastopala ves čas za decimalno vejico pogostejše od drugih, pa pri normalnih številih noben od enako dolgih blokov ni tako privilegiran.

Očitno je vsako normalno število za osnovo 10 tudi enostavno normalno za osnovo 10. Narobe pa ne drži. Za število $a_0 = 0,0123456789$ smo zgoraj ugotovili, da je enostavno normalno. Toda če vzamemo blok $B_2 = 11$, ga v številu a_0 nikjer ni in je zato tukaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(11, A_n) = 0$. To pa ni v skladu s (3) in vidimo, da število a_0 ni normalno.

Realna števila smo vzeli doslej izražena v številčnem sistemu z osnovo 10. Toda za osnovo številčnega sistema moremo vzeti poljubno naravno število $r \geq 2$. Pri vsakem takšnem r se vsako realno število a izraža z neskončnim decimalnim številom (1) , kjer pa so sedaj cifre $0, 1, 2, \dots, r-1$. Definiciji enostavno normalnega in normalnega števila za osnovo r se glasita enako kot pri osnovi 10. Imenujmo b poljubno izmed r cifer $0, 1, 2, \dots, r-1$, odsek prvih n cifer za decimalno vejico pa zaznamujemo tako kot prej z A_n . Potem velja definicija:

Realno število je enostavno normalno za osnovo r , če je za vsako cifro b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(b, A_n) = \frac{1}{r}, \quad b = 0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (4)$$

Naj pomeni B_k poljuben blok k cifer izmed cifer $0, 1, 2, \dots, r-1$. Definicija normalnega števila se glasi:

Realno število je normalno za osnovo r , če je za vsak blok B_k , $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(B_k, A_n) = r^{-k} \quad (5)$$

Definicijo, ki smo jo pravkar navedli, sta postavila pred nekaj leti I. Niven in S. Zuckerman. E. Borel, ki je normalna števila prvi vpeljal, jih je opredelil drugače. Po njem je realno število a normalno za osnovo r , če je vsako od števil

$$a, r a, r^2 a, r^3 a, \dots$$

enostavno normalno za vsako od osnov

$$r, r^2, r^3, r^4, \dots$$

Niven in Zuckerman sta ravno pokazala, da je Borelova definicija popolnoma enakovredna zahtevi (5). Mimogrede naj omenimo, da tako definicija (5) kot Borelova definicija vsebujeta odvečne zahteve. Ugotovljeno je, da izpolnjuje število a pogoj (5) za vsa naravna števila k že tedaj, če ga izpolnjuje za vsako naravno število iz kakšne neskončne podmnožice naravnih števil. Izkazalo se je tudi, da je vsako od števil $r a, r^2 a, r^3 a, \dots$ enostavno normalno za vsako od osnov $r, r^2, r^3, \dots$ tedaj, kadar je število a enostavno normalno za vsako osnovo $r, r^2, r^3, \dots$

Od obeh omenjenih definicij normalnega števila ima vsaka svoje prednosti. Borelova definicija je zelo prikladna, kadar rešujemo vprašanje, koliko je med realnimi števili normalnih števil. Niven-Zuckermanova definicija pa nam kaže, kako so v normalnem številu zastopani posamezni bloki cifer. Čeprav je definicija jasna, je koristno, ako ponazorimo njeno vsebino z nekim Borelovim zgledom.

Pisalni stroj ima določeno število znakov. Če upoštevamo male in velike črke, ločila, presledek itd., imamo nekako 90 znakov. Numerirajmo te znake s številkami od 0 do 89. Če natipkamó z našim strojem kakšen tekst in v tem tekstu namesto vsakega znaka postavimo ustrezno številko, dobimo blok števil v osnovi 90. Tudi vsaka knjiga, ki se da na tem stroju natipkati, predstavlja na ta način neki blok cifer. Na svetu je takih tekstov in knjig precej, v raznih jezikih in z najrazličnejšo vsebino. Zdaj pa vzemimo, da bi poznali kako nor-

malno število za osnovo 90. V zadosti dolgem odseku tega števila bi se našel vsak blok, ki predstavlja kakega od omenjenih tekstov. V njem bi bili bloki, ki pomenijo Shakespearovega Hamleta, pa tudi bloki z vsebino novoletne številke časopisa »Delo« za leto 1965. Seveda bi bili razen takih blokov vsebovani v odseku prav tako bloki, ki ne pomenijo nobenega smiselnega teksta ali pa se od smiselnih tekstov bolj ali manj oddaljujejo. Če so torej normalna števila, mora biti njihova zgradba iz cifer zelo komplicirana.

Sama definicija normalnega števila še nič ne zagotavlja, da taka števila res obstoje. Za nobeno realno število še tudi nismo preverili, da ima lastnosti, kakor jih od normalnega števila zahtevamo. Ali so normalna števila? Šele s pritrdilnim odgovorom na to vprašanje postane definicija normalnega števila utemeljena.

Razglejmo se nekoliko po številih! Takoj vidimo, da nobeno racionalno število ni normalno za nobeno osnovo. Racionalno število je predstavljivo v vsaki bazi s periodičnim decimalnim številom. Zato je pri racionalnem številu neskončno blokov B_k , ki se v njegovem zapisu nikdar ne pojavijo in ima zanje limita (5) vrednost 0 in ne r^{-k} . Normalna števila je iskati torej le med iracionalnimi števili. Ni pa vsako iracionalno število normalno. O tem se prepričamo že kar ob številu (2): ker to število ni periodično, je iracionalno, očitno pa ni normalno za osnovo 10. Tudi med transcendentnimi števili ni težko najti primerov števil, ki niso normalna za osnovo 10. Tako vidimo, da se pojem normalnega števila ne krije z nobenim od prej vpeljanih pojmov števil.

Najbolj direktna pot do rešitve gornjega vprašanja bi bila dokazati za kako število, da je normalno. Čeprav je tak dokaz dejansko izvedljiv, nas ne zadovolji popolnoma. Ne pove namreč, koliko je normalnih števil. Pomembnost pojma »normalno število« ostane pri takem dokazu zakrita. Gotovo pa tem bolj upravičeno vpeljemo neki nov pojem, čim splošnejša lastnost se z njim opisuje. K sreči se pri normalnih številih da ugotoviti, koliko jih je. S tem je obenem dokazan njihov obstoj. Preden pa kaj več o tem spregovorimo, moramo omeniti, kako karakteriziramo obsežnost množic.

Najenostavnejši je primer, ko ima množica končno mnogo elementov. Tedaj jih pač preštejemo in povemo, koliko jih je. Če ima množica neskončno elementov, ne moremo več tako ravnati. Važen zgled množice z neskončno elementi je množica N vseh naravnih števil. Zanj pravimo, da ima števno mnogo elementov. Če se da kakšna množica A enolično preslikati na množico N in je pri tem vsako število iz množice N slika ravno enega elementa iz A , je tudi v A števno mnogo elementov. Množica vseh realnih števil C vsebuje seveda prav tako neskončno mnogo števil. Ni pa med množicama C in N nobene enoenolične preslikave. Množica C ima več ko števno mnogo elementov, pravimo, da jih je kontinuum mnogo. Za vsako tako množico, ki se da enoenolično preslikati na množico C , velja potem, da je njenih elementov kontinuum mnogo. Tako lahko s pomočjo povratno enoličnih preslikav primerjamo, ali ima kakšna neskončna množica števno ali kontinuum mnogo elementov. Eksistirajo pa tudi množice, ki imajo več ko kontinuum mnogo elementov.

Obsežnost raznih množic števil pa se da karakterizirati še pod nekim drugim vidikom. Predočimo si realna števila na številski premici. Če imamo kakšno množico A realnih števil, pripada tej množici na številski premici neka množica točk. Pokrijmo to množico točk s končno ali s števno mnogo intervali. To je možno v splošnem napraviti še na najrazličnejše načine. Kadar moremo za vsak pozitiven ε najti takšno pokritje množice A , da je vsota dolžin intervalov

pokritja manjša od ε , pravimo, da ima množica A mero nič. Očitno ima vsaka števna množica števil mero nič. Števila imamo namreč zdaj numerirana, pa pokrijmo prvo število z intervalom dolžine $\varepsilon/2^2$, drugo število z intervalom dolžine $\varepsilon/2^3$, tretje število z intervalom dolžine $\varepsilon/2^4$, ... Vsota dolžin vseh intervalov, ki pokrijejo našo množico, je potem

$$\varepsilon/2^2 + \varepsilon/2^3 + \varepsilon/2^4 + \dots = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Moramo pa takoj poudariti, da so znane tudi množice s kontinuum mnogo števil, ki imajo mero nič. Da to ne velja za vsako množico kontinuum mnogo števil, kaže množica vseh realnih števil. Imejmo zdaj števno mnogo množic, vsako z mero nič. Unija teh množic ima mero nič. To vidimo prav tako kot pri množici števno mnogo števil.

Vzemimo zdaj kako lastnost, ki pripada nekaterim realnim številom. Naj bo B množica vseh tistih realnih števil, ki te lastnosti nimajo. Če ima množica B mero nič, rečemo, da imajo skoraj vsa realna števila to lastnost. Znano je, da je med realnimi števili števno mnogo racionalnih števil, vsa preostala števila pa so iracionalna. Lahko tedaj rečemo, da so skoraj vsa realna števila iracionalna.

Zdaj že lahko damo odgovor na vprašanje, koliko je normalnih števil. Takole se glasi: skoraj vsa realna števila so normalna glede na vse osnove r . Množica tistih realnih števil, ki vsaj za eno osnovo r niso normalna, ima torej mero nič. S tem je tudi pojasnjeno, zakaj imenujemo števila, ki ustrezajo pogoju (5), normalna. Pretežna večina realnih števil namreč izpolnjuje ta pogoj, tista števila, ki se tako ne obnašajo, so le redke izjeme. Da so med izjemami racionalna števila, je kriva njihova preprosta izražava, ki nam pa napravi ta števila tudi tako domača.

Osnovni izrek, ki smo ga ravnokar omenili, dolgujemo E. Borelu. Sredstva, ki so potrebna pri dokazu tega zanimivega izreka, so preprosta. Najprej se dokaže trditev — prav v njej je težavnost celotnega izreka —, da so skoraj vsa realna števila enostavno normalna za katerokoli osnovo r . Ker je dokaz za to trditev nekoliko dolg, ga tukaj ne bomo obnavljali. (Poznejši krajši dokaz gradi na teoriji mere in je torej glede sredstev zahtevnejši.) Poglejmo samo, kako se iz omenjene trditve pride do osnovnega izreka.

Če uporabimo Borelovo definicijo, nam je treba pač dokazati, da ima mero nič množica tistih realnih števil x , pri katerih števila

$$r, rx, r^2x, r^3x, \dots$$

niso vsa enostavno normalna za osnove

$$r, r^2, r^3, r^4, \dots$$

pri vseh $r \geq 2$.

Imenujmo $S(r)$ množico tistih realnih števil, ki niso enostavno normalna za osnovo r , $S(r^2)$ naj bo množica realnih števil, ki niso enostavno normalna za osnovo r^2 , ..., $S(r^n)$ naj pomeni množico realnih števil, ki niso enostavno normalna za osnovo r^n , itd. Vsaka od teh množic pa ima, kot smo zgoraj omenili, mero nič. Zato ima mero nič tudi njihova unija, to je množica tistih realnih števil, ki niso enostavno normalna vsaj za eno od osnov $r, r^2, r^3, \dots$. Če označimo to unijo z $V(r)$, ima torej množica $V(r)$ mero nič.

Pa pomnožimo vsako število iz množice $V(r)$ z r^{-m} , m naravno število. Dobljeno množico zaznamujmo z $r^{-m}V(r)$. Če množimo z r^{-m} krajišča vsakega

od intervalov, ki pokrijejo množico $V(r)$, dobimo pokritje množice $r^{-m}V(r)$. Obenem z množico $V(r)$ ima seveda tudi množica $r^{-m}V(r)$ mero nič. Kakšna števila pa so v množici $r^{-m}V(r)$? Naj bo $x \in r^{-m}V(r)$. Potem je število $r^m x \in V(r)$ in to pomeni, da število $r^m x$ ni enostavno normalno vsaj za eno od osnov $r, r^2, r^3, \dots$

Tvorimo zdaj množice $r^{-m}V(r)$ za $m = 0, 1, 2, \dots$. Ako označimo unijo teh množic z $W(r)$, so v množici $W(r)$ zapopadena ravno vsa tista realna števila x , za katera vsaj eno od števil

$$r, rx, r^2x, r^3x, \dots$$

ni enostavno normalno za vse osnove

$$r, r^2, r^3, r^4, \dots$$

Ker je $W(r)$ unija števno mnogo množic, katerih vsaka ima mero nič, je tudi mera množice $W(r)$ enaka nič. Tako smo našli, da ima množica realnih števil, ki niso normalna za osnovo r , mero nič. Ta izsledek pa lahko hitro razširimo.

Pustimo osnovo r teči po vseh naravnih številih od 2 naprej: $r = 2, 3, 4, \dots$. V uniji W množic $W(2), W(3), W(4), \dots$ bodo zajeta vsa realna števila x z lastnostjo, da vsaj eno od števil

$$r, rx, r^2x, r^3x, \dots$$

ni enostavno normalno za vse osnove

$$r, r^2, r^3, r^4, \dots$$

pri vseh $r \geq 2$. Potemtakem je W ravno množica vseh tistih realnih števil, ki niso normalna vsaj za eno od osnov $2, 3, 4, \dots$. Ker ima vsaka od množic $W(2), W(3), W(4), \dots$ mero nič, ima tudi njihova unija mero nič. S tem je pa že ugotovljeno, da so skoraj vsa realna števila normalna glede na vse osnove.

Čeprav normalna števila močno prevladujejo nad števili, ki niso normalna, je doslej znanih razmeroma malo normalnih števil. Števila, katerih decimalni zapis je tako preprost, da za vsako mesto za decimalno vejico poznamo ustrezno cifro, v glavnem niso normalna. Pri številih, ki so definirana z limitnimi postopki, sicer ni treba, da bi bila zgradba iz cifer preprosta; toda pri njih poznamo navadno le malo decimalok in se vprašanja o njihovi normalnosti niti lotiti ne moremo. Tako npr. o številih $\sqrt{2}$, e , π ne vemo, ali so za katero osnovo normalna. Pač pa se da dokazati, da je število

$$0,123456789101112131415\dots$$

ki nastane, če pišemo za decimalno vejico po vrsti vsa naravna števila, normalno za vsako osnovo r . To število je torej primer tako imenovanega absolutno normalnega števila. Pravimo namreč, da je število absolutno normalno, če je normalno za vsako osnovo r . Osnovni izrek kaže, da so skoraj vsa realna števila absolutno normalna. Ne vemo pa še, ali sledi absolutna normalnost kakega števila že iz dejstva, da je to število normalno za eno osnovo. Zgledi, ki bi kazali, da to ne more biti, niso znani; prav tako pa še ni dokazano, da je vsako število, ki je za kako osnovo normalno, tudi absolutno normalno. Če se bo kdaj našel na to vprašanje pritrdilen odgovor, bo to pomenilo, da je lastnost normalnosti neodvisna od osnove številskega sistema in je utemeljena v sami naravi realnega števila.

LUPINSKI MODEL JEDRA

MITJA ROSINA

1. Uvod

Že zgodaj so s sipanjem delcev na atomih odkrili, da je jedro skoncentrirano v zelo majhnem volumnu (premer jedra je reda velikosti nekaj fermijev*) in da zunaj tega volumna jedro deluje samo z elektromagnetnimi silami. Iz tega sklepamo, da so jedrske sile, ki vežejo sestavne dele jedra (nukleone), privlačne in imajo zelo kratek doseg, znotraj tega dosega pa so precej močnejše od odbojnih električnih sil.

Ob takih pogojih si lahko predstavljamo, da se nukleoni v jedru ne prestando zadevajo drug ob drugega in se prerivajo ali pa se zapleteno gibljejo kot čebele v panju. Zato na prvi pogled ni dosti upanja, da bi stanje jedra lahko pregledno opisali, tudi če bi bili zakoni gibanja za vsak posamezen nukleon preprosti.

Zakone za gibanje nukleonov moramo vzeti iz kvantne mehanike, ker je de Broglijeva valovna dolžina nukleonov istega reda velikosti, kot so dimenzije jedra. Smemo pa običajno še računati nerelativistično, ker so hitrosti nukleonov samo okrog desetinke svetlobne hitrosti.

Na težave naletimo že tedaj, če računamo gibanje dvojice nukleonov, ker ne poznamo dobro jedrskih sil (ne poznamo odvisnosti sile od razdalje med nukleonoma, od orientacije njunih spinov itd.). Še večje pa so težave računskega značaja pri gibanju mnogih nukleonov v jedru. Saj celo problema treh teles ne moremo niti v klasični mehaniki rešiti z znanimi funkcijami. Da bi pa eksaktno rešili sistem gibalnih enačb za mnogo nukleonov, je brezizgledno.

V takem primeru si moramo pomagati s poenostavitvijo, torej tako, da si zamislimo primeren model jedra. Pojem modela je znan že iz teorije atoma (spomnimo se samo na Bohrov model atoma), od prej pa že iz kemije. Kemikom je z zelo preprostim modelom uspelo pregledno opisati, kako so molekule sestavljene iz atomov. Predstavljajo si, da ima vsak atom neko določeno število ročk — valenc. Molekula je sestavljena tako, da se atomi držijo med seboj za te ročke. Tako lahko razložimo število in razporeditev atomov v molekulah. Čeprav vemo, da daje tak preprost model le zelo površno sliko, ga vendar lahko s pridom uporabljamo za določevanje marsikaterih lastnosti molekul.

Podobno lahko tudi pri jedru tako poenostavimo gibalne enačbe, da postane jedro podobno nekemu že znanemu fizikalnemu sistemu (npr. kaplji tekočine, mehurčku plina, atomu). Na ta način si ga s pomočjo analogij dosti lažje predstavljamo in ga znamo obdelati z že znanimi računskimi metodami. Tako se je posrečilo kvalitatивно in do neke mere kvantitativno razložiti mnogo lastnosti jeder.

* 1 fermi = 10^{-15} m.

Vsak model razloži nekaj lastnosti jedra dobro, nekaj pa slabo. Čim več lastnosti kak model razloži, za tem boljšega ga štejemo. Kriterij je torej ujemanje z eksperimentom.

Oglejmo si nekaj takih modelov.

2. Model kaplje

Jedro ima nekaj analognih lastnosti kot kaplja tekočine, kajti tudi molekule tekočine so povezane s silami kratkega dosega («van der Waalsovimi» silami) in se gibljejo tesno druga ob drugi. Analogijo smemo pričakovati zato, ker so pokazale meritve, da je pri jedru podobno kot pri tekočini volumen približno sorazmeren s številom nukleonov v jedru (gostota je neodvisna od množine snovi). Tudi vezavna energija jedra je približno sorazmerna s številom nukleonov, tako kot je notranja energija tekočine sorazmerna z množino tekočine.

S kapljičnim modelom dobimo precej dobre vrednosti za vezavno energijo jeder v osnovnem stanju. V prvem približku je vezavna energija kar sorazmerna s številom nukleonov A , torej $W_0 = w_0 A$, kjer je w_0 vezavna energija na posamezen nukleon. Ker je pri jedru precej nukleonov pri površini in imajo ti manj sosedov kot nukleoni na sredi jedra, ne prispevajo v polni meri k vezavni energiji. Podobno kot pri kapljici tekočine lahko tudi to izrazimo z energijo zaradi površinske napetosti: $W_{pov} = 4 \pi r^2 \sigma$.

Ker imajo protoni naboj, ima jedro tudi elektrostatsko energijo. Če upoštevamo, da je gostota naboja v jedru približno enakomerna, dobimo izraz $W_{el} = 3 e^2 Z (Z - 1) / (40 \pi \epsilon_0 r)$, kjer je Z število protonov.

Energiji W_{pov} in W_{el} moramo odšteti od W_0 . Če odštejemo še empirični izraz, ki je sorazmeren z $(A - 2Z)^2 / A$ in ki izraža težnjo jedra, da ima približno enako število nevtronov in protonov, dobimo tako imenovano Weizsäckerjevo formulo za vezavno energijo. Z njo se da, med drugim, precej pravilno napovedati, katera jedra so stabilna in kolikšne so energije radioaktivnih razpadov za nestabilna jedra.

Še eno oceno lahko dobimo iz kapljičnega modela: pove nam, pri katerem številu protonov jedro ni več stabilno, ampak se razcepi.¹ Če jedro deformiramo v ovalno obliko, ga skuša površinska napetost vrniti v okroglo obliko, medtem ko ga hoče odbojna elektrostatska sila še bolj raztegniti in končno razcepiti. Pri jedrih z manj kot približno 110 protonov zmaga površinska napetost, pri jedrih z več kot 110 protoni pa elektrostatska sila in jedro se momentano razcepi. Zato taka jedra niso obstojna in je s tem podana zgornja meja za velikost jedra. V resnici imamo spontan razcep že pri precej manjšem številu protonov. Jedro namreč lahko zaradi tunelskega efekta »uide« iz metastabilnega stanja z okroglo obliko v takó močno raztegnjeno stanje, da ga površinska napetost ne more več držati skupaj. Če pa jedro vzbudimo (npr. z nevtronom), da zaniha, se to še lažje zgodi.

S kapljičnim modelom se dajo razložiti tudi nekatera vzbujena stanja. Dobre rezultate so dobili za tista vzbujena stanja, ki se dajo opisati s površinskim valovanjem kaplje.

Kapljični model lahko razširimo tako, da namesto ene same tekočine vzamemo dve tekočini (protonsko in nevtronsko), ki se gibljeta pomešani druga z drugo. Podoben dvotekočinski model so uporabili npr. pri heliju pri nizkih temperaturah, kjer naj bi se gibal druga v drugi dve tekočini (normalna in

suprafluidna faza helija). Dvotekočinski model jedra razmeroma dobro opiše dipolno absorpcijo fotonov (veleresonanco),² pri kateri zanihajo v vzbujenem jedru vsi protoni na eno stran, nevtroni pa na drugo. Računi so dali približno pravilno lego veleresonance. Da bi pa kaj izvedeli o obliki resonančne krivulje, je ta model preprosto.

Kapljični model je neke vrste kolektivni model. Kolektivne modele imenujemo tiste, kjer namesto koordinat posameznih nukleonov vnesemo v gibalno enačbo »kolektivne koordinate«, ki opisujejo določene tipe gibanja celih množic nukleonov. Kolektivne koordinate pri kapljičnem modelu so npr. gostota in oblika kapljice.

S kapljičnim modelom lahko dobro razložimo nekaj takih lastnosti, ki so podobne za vsa jedra s približno isto maso. Če pa hočemo kaj izvedeti o individualnih lastnostih določenega jedra (kako se to jedro razlikuje od svojih sosedov v tabeli jeder), pa kapljični model popolnoma odpove.

3. Lupinski model atoma

V novejšem času je pokazal največ uspeha lupinski model jedra, zlasti v povezavi s kolektivnim modelom. Lupinski model je fizikom domač že od prej, ko so z njim računali lastnosti atomov. Zato si oglejmo najprej lupinski model pri atomu!

V prvem približku si predstavljamo, da se gibljejo elektroni v atomu neodvisno drug od drugega v skupnem elektrostatskem polju. To ni čisto elektrostatsko polje jedra, ker deloma še upoštevamo odbojne sile med elektroni. Ko opazujemo gibanje enega elektrona, si mislimo ostale elektrone razmazane okrog jedra kot neki prostorski naboj, ki ustvarja dodaten potencial. Ta povprečni potencial elektronov prištejemo potencialu jedra in poiščemo valovne funkcije in energijske nivoje za gibanje elektrona v tem potencialu.

Stanje posameznega elektrona je karakterizirano s štirimi kvantnimi števili: radialno kvantno število n_r (število vozlov v radialni smeri), azimutalno kvantno število l , ki določa velikost tirne vrtilne količine, magnetno kvantno število m , ki pove projekcijo tirne vrtilne količine na izbrano os ter spinsko kvantno število s , ki pove projekcijo spinske vrtilne količine. V atomski fiziki radi uporabljamo namesto n_r tako imenovano glavno kvantno število $n = n_r + l + 1$, ker je energija elektrona v grobem odvisna le od njega, v manjši meri pa od l . Kot primera se spomnimo, da je energija posameznega elektrona v polju golega jedra neodvisna od l , kajti tedaj je $E = -R_y h c Z^2/n^2$, kjer je R_y Rydbergova konstanta (sl. 1 a).

V povprečnem polju atoma pa je energija elektrona še odvisna od l , zlasti pri težjih atomih. Elektroni z večjim l imajo namreč višjo energijo iz naslednjega razloga: čim večji je l , tem več vozlov ima elektron ob jedru in s tem manjšo verjetnostjo pride v bližino jedra. Področje v bližini jedra pa ravno največ prispeva k negativni potencialni energiji, ker še ni zasenčeno od ostalih elektronov.

Za vsa stanja z isto energijo (istim n in l) pravimo, da so na isti podlupini. Množico stanj s približno isto energijo (z istim n) pa imenujemo lupino. Pri lahkih atomih so energijski nivoji v isti lupini blizu skupaj in je razmak med lupinami velik. Pri težjih atomih se pa zaradi močnega povprečnega potenciala elektronov višje sosednje lupine po energiji tako prekrivajo, da so za energijo

merodajne le še podlupine. Pri težjih atomih imamo največji energijski razmak med podlupino z $l = 1$ in naslednjo podlupino ($l = 0$), ne pa med dvema lupinama (glej sl. 1 b).

Doslej smo govorili o posameznem elektronu. Če jih imamo več, jih v osnovnem stanju kar po vrsti napolnimo v najnižje energijske nivoje (lupine in podlupine). Po Paulijevem principu smemo namreč v vsako stanje dati največ en elektron. V podlupino z danim l damo lahko največ $2(2l + 1)$ elektronov, ker je toliko možnih orientacij tirne in spinske vrtilne količine (vrednosti m in s). Lupine pa imajo po $2n^2$ stanj. Stanje atoma kot celote je torej karakterizirano, če povemo, po katerih nivojih (podlupinah) so elektroni porazdeljeni. S tem opišemo tako imenovano konfiguracijo atoma.

V tistih atomih, kjer so vse lupine z vrhno vred ravno napolnjene (pri težjih atomih mora biti napolnjeno do podlupine z $l = 1$), so elektroni tako lepo porazdeljeni, da je vezavna energija izredno nizka. »Vezi« med elektroni so tako nasičene, da so ti atomi (oz. elementi) kemično neaktivni (to so žlahtni plini). Njihova atomska števila so razvidna s slike 1 b, kjer so za posamezne podlupine in lupine v okroglih oklepajih napisana števila mest, v oglatih oklepajih pa skupna števila mest od najnižje lupine pa do dane podlupine. Kot vidimo, daje lupinski model prava atomska števila za žlahtne pline (${}_{2}\text{He}$, ${}_{10}\text{Ne}$, ${}_{18}\text{Ar}$, ${}_{36}\text{Kr}$, ${}_{54}\text{Xe}$, ${}_{86}\text{Rn}$).

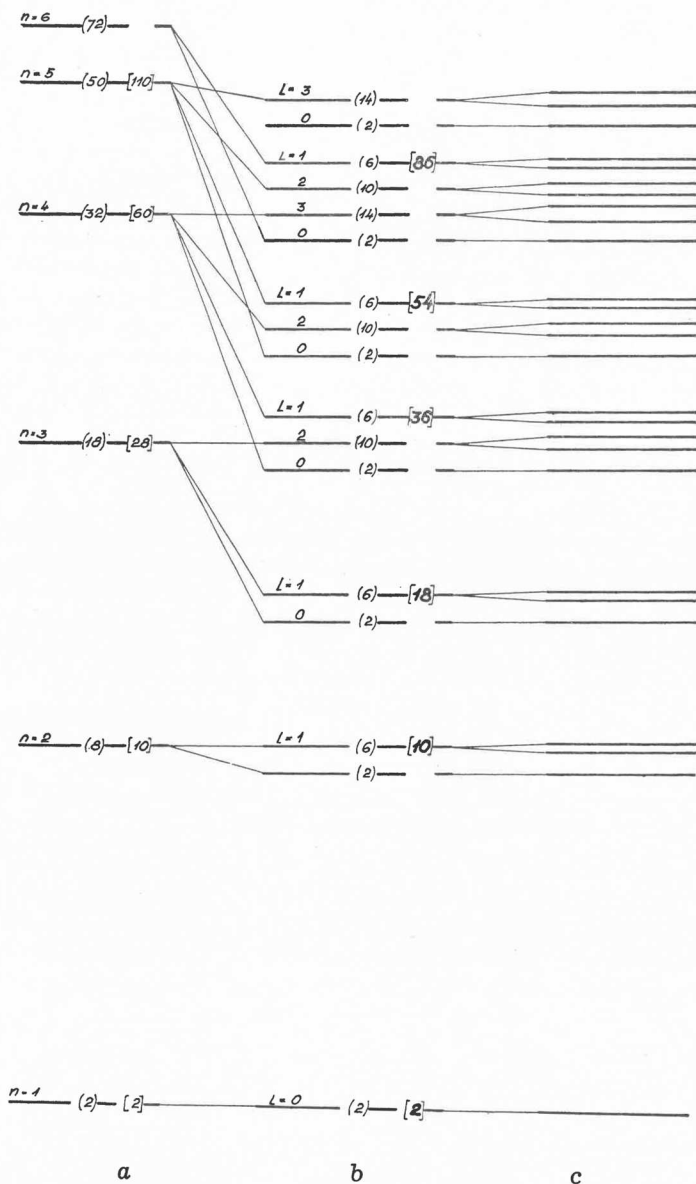
Pri natančnejšem obravnavanju energijskih nivojev atoma moramo še upoštevati sklopitev med spinsko in tirno vrtilno količino, ki podlupine še nekoliko razcepi (sl. 1 c). To je tako imenovana fina razcepitev, ki je sorazmerna z l in z Z^3 .

Račun s povprečno potencialno energijo »razmazanih« elektronov je seveda samo približek. Račun pa lahko izboljšamo s tem, da upoštevamo še residualno energijo, to je razliko med dejanskim potencialom elektronov in omenjenim povprečnim potencialom, kot majhno motnjo. Ta motnja povzroči, da atom lahko prehaja iz ene konfiguracije v drugo. Zato v stacionarnem stanju nimamo več čistih konfiguracij, ampak linearne kombinacije raznih konfiguracij, kar otežkoča račune in bi lahko napravilo rezultate nepregledne. Na srečo je pri atomu motnja zaradi residualnih sil majhna in so zato primesi k čistim konfiguracijam majhne.

Uspeh lupinskega modela atoma je v tem, da z njim lahko lepo razložimo naslednje:

1. atomska števila žlahtnih plinov (»magična« števila);
2. močno vezavno energijo in ionizacijsko energijo žlahtnih plinov ter zelo nizko ionizacijsko energijo alkalnih kovin;
3. periodni sistem elementov, tj. podobne fizikalne in kemične lastnosti atomov z enakim številom elektronov v vrhni lupini oz. podlupini (večina lastnosti je namreč odvisnih samo od »valenčnih elektronov«, to je elektronov v nezaključeni vrhni podlupini);
4. kvantitativno lahko izračunamo mnogo lastnosti atoma, npr. vrtilno količino, magnetni moment, ionizacijsko energijo, preseke za absorpcijo fotonov itd.

Oglejmo si, če nam da lupinski model nekaj podobnega tudi pri jedru!



Sl. 1. Shema energijskih nivojev elektrona v atomu: a) v polju golega jedra; b) v polju, popravljenem s povprečnim poljem elektronov (za težje atome); c) fina razcepitev nivojev zaradi sklopitve med tirno in spinsko vrtilno količino. Številke v () pomenijo število stanj v dani lupini oz. podlupini, številke v [] pa pomenijo vsoto teh števil od dna do vključno dane (pod)lupine. Zaradi preglednosti razmaki med nivoji niso pravi.

4. Lupinski model jedra

V začetku niso imeli zaupanja, da bi se dal uporabiti lupinski model tudi za opis jedra. Imeli so dva huda pomisleka.

1. V atomu je v sredi mirujoče težko jedro z dobro znanim poljem. Zato ne moti v prvem približku, če vzamemo za polje elektronov kar povprečno polje in še to približno, saj je manjše od polja jedra. V jedru pa nimamo nekega mirujočega močnega polja, ampak samo povprečno polje gibajočih se nukleonov, ki niti ni dobro znano. Tako že prvi približek ni zanesljiv.

2. Sile med nukleoni so zelo močne, razdalje med njimi pa mnogo manjše kot med elektroni v atomu. Zato residualne energije ne moremo več obravnavati kot majhno motnjo, temveč se zaradi nje lahko razne konfiguracije tako pomešajo med seboj, da se je bati, da postanejo računi nepregledni in da izgine lupinska struktura. To lahko povemo še drugače, s klasično sliko. Zaradi močnih sil in majhnih medsebojnih razdalj trčijo nukleoni zelo pogosto drug v drugega, tako da imajo zelo kratke proste poti. Stalno skačejo iz enega stanja v drugo, medtem ko lupinski model predpostavlja, da so vsak v svojem stacionarnem stanju.

Pogum so dali eksperimentalni podatki, ki so pokazali, da imajo jedra vse značilne lastnosti, ki jih pričakujemo od lupinskega modela. Najprej so opazili, da imamo, analogno kot žlahtne pline, tudi jedra z zelo močno vezavno energijo. To so jedra z »magičnim številom«^{3,4} protonov ali nevtronov: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.^{3,4} Njihovo močno vezavno energijo so bodisi izmerili, bodisi so sklepali nanjo iz velike pogostosti takih jeder v naravi. Jedra z magičnim številom protonov ali nevtronov imajo tudi zelo visoke pragove za reakcije (γ, p) in (γ, n) (»ionizacijsko energijo jedra«), medtem ko so ti pragovi za jedra z enim protonom oz. enim nevtronom več zelo nizki.

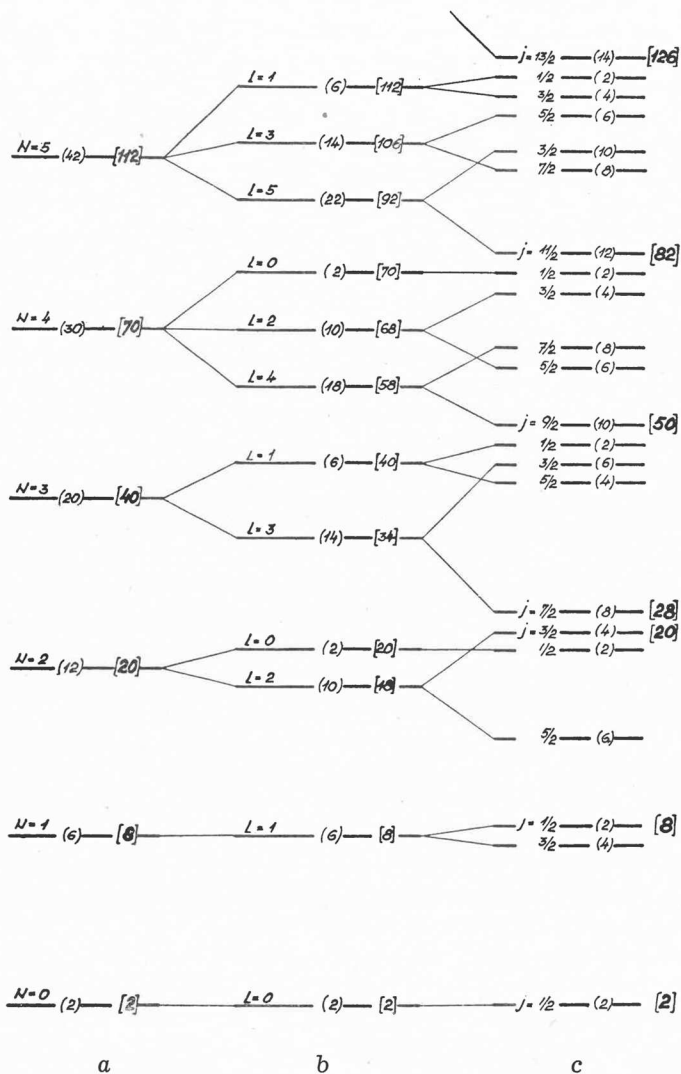
Kot vidimo, so magična števila pri jedru drugačna kot pri atomu. To si razlagamo s tem, da je potencial v jedru različen kot v atomu. Pri atomu ima potencial v sredini globoko jamo, v večji razdalji pa raste počasi; pri jedru pa je potencial znotraj jedra precej konstanten in na meji jedra strmo naraste.

Pri atomu izkoristi elektron v stanju z majhnim l globoko potencialno jamo v središču, ker je pri teh stanjih več verjetnosti, da najdemo elektron blizu središča, kot pa pri stanjih z večjim l . Zato pri danem n_r raste energija nivojev z l -om razmeroma hitreje pri atomu kot pri jedru. Po drugi strani pa raste pri danem l energija s številom radialnih vozlov n_r razmeroma hitreje pri jedru kot pri atomu. V stanjih z velikim n_r so namreč nukleoni daleč od središča in se že precej »izmuznejo«³ kratkemu dosegu jedrskih sil.

V skladu s tem premislekom pokažejo računi, da je pri atomu energija v grobem odvisna od vsote $n = n_r + l$, kot smo že videli, pri jedru pa od vsote $N = 2n_r + l$.

Za konkretne račune moramo najprej poiskati povprečni jedrski potencial. Ker ga ne znamo eksaktno izračunati, izberemo zanj v prvem približku kar neko enostavno obliko, s katero se da lahko računati (npr. ostro omejen potencialni lonec ali paraboloid). Pravi povprečni potencial leži bržkone nekje vmes med tema skrajnima oblikama.

Če vzamemo za povprečni jedrski potencial obliko paraboloidea (potential prostorskega harmoničnega oscilatorja), dobimo za energijo izraz $W = (N + 3/2) h \nu$, kjer je ν frekvenca oscilatorja. Energijski nivoji (lupine) si



Sl. 2. Shema energijskih nivojev nukleona v jedru: a) v polju tridimenzionalnega harmonskega oscilatorja; b) v pravem povprečnem polju nukleonov; c) razcepitev nivojev zaradi sklopitve med tirno in spinsko vrtilno količino. Številke v () pomenijo število stanj v dani (pod)lupini, številke v [] pa pomenijo število vseh stanj od dna do vključno te (pod)lupine. Zaradi preglednosti razmaki med nivoji niso pravi.

torej sledijo v enakomernih razmakih po $h\nu$ (sl. 2 a). Če pa izberemo ostro omejen potencialni lonec ali kak drug primeren potencial, energijski nivoji niso več v enakih razmakih in se nekoliko razcepijo (na podlupine), vendar se razporeditev nivojev ne spremeni znatno. Zato je za kvalitativno sliko precej vseeno, kakšen potencial izberemo za povprečni jedrski potencial. Razporeditev nivojev za neki tak potencial vidimo na sliki 2 b. Pri vsakem nivoju (podlupini) je napisano število možnih stanj. Pričakujemo, da je število stanj od dna do neke zaključene lupine enako magičnim številom. Toda čaka nas razočaranje — ne dobimo pravih magičnih števil. Naš približek torej še ni dober.

Da dobimo pravilna magična števila, moramo že v prvem približku upoštevati močno sklopitev med tirno in spinsko vrtilno količino. Energija je potem odvisna še od celotne vrtilne količine nukleona j , kjer je $j = l \pm \frac{1}{2}$. Na ta način dobimo razporeditev nivojev, kot jo kaže slika 2 c, ter pravilna magična števila.

Poglejmo sedaj, kaj nam pove lupinski model o vrtilni količini jedra! Vsa jedra s sodim številom protonov in nevtronov imajo vrtilno količino nič. To kaže na lastnost jedra, da se pari protonov ali nevtronov radi sklopijo tako, da je skupna vrtilna količina nič (»orientirajo se antiparalelno«). Ta lastnost je splošna in ni posledica lupinskega modela. Sedaj pa vzemimo jedra z lihim številom nukleonov. Vsi nukleoni se združijo v pare z vrtilno količino nič, edino en nukleon, ki ima najvišjo energijo, ostane brez partnerja. Celo jedro ima zato isto vrtilno količino kot ta zadnji nukleon. Če lupinski model velja, si vrtilne količine zaporednih jeder sledijo v istem vrstnem redu kot vrtilne količine j na sliki 1 c. Meritve so pokazale, da to drži za večino jeder.

Podobno kot za vrtilno količino bi pričakovali tudi za magnetni moment jedra, da je kar enak magnetnemu momentu zadnjega prostega nukleona. Toda pri magnetnih momentih je sklapljanje bolj komplicirano in to pravilo drži samo približno.

S pomočjo lupinskega modela lahko tudi precej dobro izračunamo energije raznih vzbujenih stanj, razpadni čas pri razpadu β in γ , presek za absorpcijo fotonov itd.

Uspehi lupinskega modela pri jedru kažejo, da pomisleki, ki smo jih navedli v začetku tega poglavja, le niso tako hudi. Po klasični sliki bi nukleoni ne-prestano trkali drug ob drugega. Toda večina takih trkov ni dovoljena zaradi Paulijevega principa, če so stanja, ki bi nastala po trku že zasedena. Zlasti v osnovnem stanju jedra in v nizkih vzbujenih stanjih imajo nukleoni tako redko priložnost za dovoljen trk (pri katerem sta končni stanji še nezasedeni), da so proste poti razmeroma velike. Zato lahko stanja nukleonov v prvem približku vzamemo za stacionarna, kot to predpostavlja lupinski model.

5. Lupinski model in kolektivna gibanja

V zadnjem času so se z lupinskim modelom uspešno lotili tudi kolektivnih vzbujenih stanj, npr. veleresonance.^{5, 6} Za lego veleresonance so dobili skoraj pravilne vrednosti, pa tudi o strukturi (razcepu) resonančne krivulje so dobili nekaj rezultatov, ki se kolikor toliko ujemajo z meritvami. To je mnogo več, kot je dal npr. kapljični model.

Na prvi pogled se zdi paradokсно, da lahko z lupinskim modelom opišemo tudi kolektivna gibanja. Saj je ravno osnovna predpostavka lupinskega modela ta, da se nukleoni gibljejo neodvisno drug od drugega brez kakršnekoli fazne

povezave. Stvar je v tem: kadar ta predpostavka drži, ima jedro čisto konfiguracijo. Čiste konfiguracije so torej uporabne za opis takih stanj, kjer je gibanje nukleonov nekoherentno. Stanja s koherentnim (kolektivnim) gibanjem pa lahko opišemo z *linearnimi kombinacijami konfiguracij*. Če je primešanih malo drugih konfiguracij, je fazna povezava šibka; če so pa konfiguracije zelo pomešane med seboj, je fazna povezava močna. Imamo torej dve možnosti: ali je dobro znano število nukleonov na posameznih nivojih, faze njihovega gibanja pa so čisto nekoherentne, ali pa poznamo fazno povezavo med nukleoni, ne vemo pa dobro, katere nivoje zasedajo. Med številom nukleonov v nekem stanju ter njihovo fazo vlada torej podoben princip nedoločenosti kot npr. med lego in gibalno količino delca.

Računi s čistimi konfiguracijami so enostavni in so omogočili uspeh lupinskega modela v primerih, kjer smemo šteti gibanja posameznih nukleonov za neodvisna. Računi z mešanicami konfiguracij pa so obsežni in zamudni in jih včasih komaj zmoremo z elektronskimi računskimi stroji. Zato so računi kolektivnih gibanj z lupinskim modelom omejeni na primere, ko ni treba mešati prevelikega števila konfiguracij.

Opisovanje kolektivnih gibanj zgolj s koherentno mešanico konfiguracij torej ni vedno idealna rešitev. Zato so lupinski model razširili in združili s kolektivnim modelom. Gibanje jedra kot celote opišemo s kolektivnimi koordinatami. Pri vrtenju jedra kot vrtavke so npr. kolektivne koordinate orientacija jedra ter njegova vrtilna količina. Notranje (relativno) gibanje nukleonov pa potem računamo podobno kot pri lupinskem modelu.

Valovno funkcijo lahko potem pišemo kot produkt dveh faktorjev. Prvi vsebuje kolektivne koordinate in opisuje kolektivno gibanje, drugi pa vsebuje notranje koordinate. Ker smo iz drugega faktorja v glavnem izločili kolektivno gibanje (fazno povezavo), nam predstavlja drugi faktor precej čisto konfiguracijo v tem razširjenem modelu, medtem ko bi morali v prvotnem lupinskem modelu računati z mešanico konfiguracij.

Literatura:

1. M. Osredkar: Spontana cepitev atomskega jedra, Obz. mat. fiz. 3, 22 (1953).
2. M. Kregar in M. Rosina: Fotonuklearna absorpcija, Obz. mat. fiz. 7, 174 (1960).
3. L. Bevc: Lupinasta struktura atomskega jedra, Obz. mat. fiz. 4, 72 (1955-56).
4. M. C. Mayer, J. H. D. Jensen: Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, New York, John Wiley & Sons (1955).
5. J. P. Elliott, B. H. Flowers, The Odd Parity States of ^{16}O and ^{16}N , Proc. Roy. Soc. A 242, 57 (1957).
6. G. E. Brown, L. Castillejo, J. A. Evans, The Dipole State, Nuclear Physics 22, 1 (1961).

NOVI OSNOVNI DELCI

JANEZ STRNAD

Uvod

Seznama osnovnih delcev¹ nekaj let ni bilo treba dopolnjevati, čeprav so teoretiki napovedovali nove osnovne delce. V zadnjih dveh letih pa se je zaradi napredka pri merjenju in obdelavi rezultatov število znanih osnovnih delcev precej povečalo.

Vsi novi delci so zelo kratkoživi, saj merijo razpadni časi 10^{-20} sekunde ali manj. V tem času prepotuje celo svetloba samo nekaj milijonink mikrona. Zato ni mogoče opazovati sledi teh delcev v mehurčnih celicah², ampak je treba delce drugače identificirati.

Pri razumevanju novega načina identificiranja je v pomoč znani pojav iz jedrske fizike. Da ne bi govorili preveč splošno, si oglejmo kar posebni primer: sipanje in reakcije nevtronov z nizko energijo na Li^7 ^{1,2}. Za majne vrednosti kinetične energije nevtronov W je celotni presek σ_t , to je presek za sipanje in reakcijo, sorazmeren z $W^{-1/2}$. Pri energiji $W_0 = 0,25 \text{ MeV}$ pa presek močno naraste. Njegov potek lahko zapišemo kot vsoto dveh delov: $\sigma_t(W) = \text{konst. } W^{-1/2} + \sigma_r(W)$ (sl. 1). Drugi del ima obliko resonančne krivulje

$$\sigma_r(W) = \text{konst.} [(W - W_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2]^{-1}. \quad (1)$$

Pojava ni težko pojasniti. Nevtron, ki bi obtičal v jedru Li^7 , bi poleg kinetične energije prispeval še vezalno energijo, v tem primeru $2,03 \text{ MeV}$. Zato bi nastalo jedro Li^8 bilo v vzbujenem stanju z energijo $W + 2,03 \text{ MeV}$. Jedro pa ne more imeti poljubne notranje energije, jedro Li^8 npr. more biti le v osnovnem stanju z energijo nič, v »prvem« vzbujenem stanju z energijo $2,28 \text{ MeV}$ itd. Samo v primeru, ko je imel zajeti nevtron kinetično energijo $0,25 \text{ MeV}$, lahko nastane Li^8 v prvem vzbujenem stanju: $0,25 \text{ MeV} + 2,03 \text{ MeV} = 2,28 \text{ MeV}$.

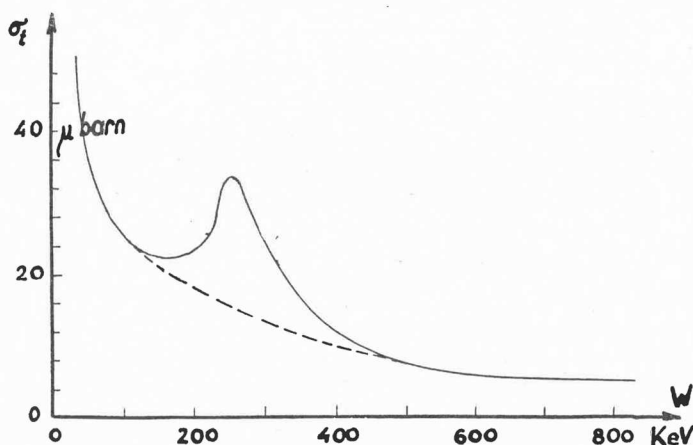
Nastalo stanje je nestabilno in razpade. Razpadni čas τ je po načelu nedoločenosti povezan z razpolovno širino resonance

$$\tau = \hbar/\Gamma. \quad (2)$$

Resonance so opazili tudi pri reakcijah med osnovnimi delci. Podobno kot v našem primeru smemo po njih sklepati na vezana stanja dveh ali več osnovnih delcev. Ta stanja je mogoče tolmačiti kot tesno spojene osnovne delce ali pa kot en sam nov osnovni delec. V resnici se meja med obema gledanjema zaradi izredno kratkega razpadnega časa zabriše. Saj celo za »tradicionalne« osnovne delce¹, ki živijo najmanj 10^{-10} sekunde, še ni jasno, kateri so zares osnovni in kateri sestavljeni — če je to vprašanje sploh smiselno. Da pa posebej poudarijo kratkoživost novih delcev, jim zaradi načina identificiranja pravijo resonančni delci ali krajše — resonance.⁴

Mezon ϱ

Resonanca, ki so jo prvo ugotovili, je pozneje dobila ime mezon ϱ . Obstoje mezona ϱ je napovedalo nekaj teoretikov.⁴ Opirali so se na rezultate, ki jih je dalo sipanje hitrih elektronov na nukleonih. Pokazalo se je namreč, da so zgrajeni nukleoni iz treh plasti.⁵ Srednja plast je pri protonu pozitivna, pri nevtronu pa negativna in je v njej približno polovica celotnega nukleonovega naboja (mase). Ta plast bi se dala pojasniti z domnevo, da seva nukleonska sredica poleg posameznih virtualnih pionov tudi skupaj po dva virtualna piona, ki sta med seboj v posebno močni interakciji — v resonanci. Ker je pri protonu predznak naboja v srednji plasti drugačen kot pri nevtronu, so predvidevali, da se pojavlja ta pionski dvojček — mezon ϱ — s pozitivnim ali negativnim nabojem ali tudi brez naboja torej, da obstajajo delci ϱ^+ , ϱ^0 in ϱ^- . To pomeni, da ima mezon ϱ izospin¹ 1.



Sl. 1. Izmerjeni totalni presek σ_t za nevtrone na Li^7 v odvisnosti od kinetične energije nevtronov W . Na sliki je razpolovna širina resonance okoli 100 keV. Z upoštevanjem popravkov dobijo za razpolovno širino približno 28 keV, iz česar sledi po (2) za razpadni čas približno 5.10^{-20} s .

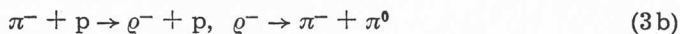
Prvič so na mezon ϱ naleteli Erwin in sodelavci⁶ pri preučevanju reakcij



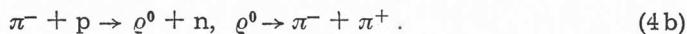
in



Če zares obstaja mezon ϱ , potem ne potekata reakciji zmerom naravnost, ampak nastane včasih mezon ϱ , ki potem razpade:



ali



Mezon ρ je zelo kratkoživ. Vendar živi v primeri s časom, v katerem potečejo reakcije, dovolj dolgo, da je omogočeno razločevanje med reakcijami (a) in (b). To si ponazorimo z granato, ki se lahko razleti v tri kose. Prvič naj se razleti najprej na dva dela, pri čemer naj ostaneta dva kosa skupaj in se razletita šele pozneje. Drugič naj se granata razleti kar takoj na tri kose. Če bi se gibalno vzporedno z granato, to je, če bi opazovali v njenem težiščnem sistemu, bi v prvem primeru odnesel vsak izmed delov nasprotno enako gibalno količino. Zato bi se tudi kinetična energija razdelila med oba dela zmeraj v istem razmerju, namreč v obratnem razmerju mas. Enako sklepamo tudi v težiščnem sistemu dela, ki se razleti potem na dva kosa. Če je torej v granati zmeraj enako razstreliva, ima vsak kos v ustreznem težiščnem sistemu natančno določeno kinetično energijo. Nasprotno pa se v primeru, ko se granata razleti takoj v tri kose, razdeli mednje gibalna količina lahko še na različne načine. Zato ima vsak izmed kosov v določenih mejah še poljubno kinetično energijo.

Prvemu primeru ustrezajo reakcije (b), drugemu pa reakcije (a). V prvem primeru mora vsota mirovnih in kinetičnih energij obeh izhajajočih pionov v njunem težiščnem sistemu

$$W' = 2 m_{\pi} c^2 + W_1 + W_2 \quad (5)$$

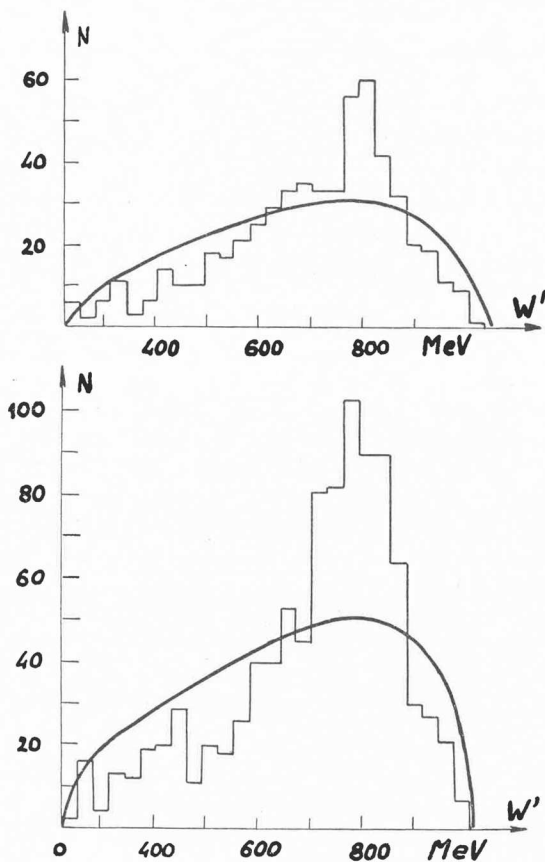
(W' se imenuje efektivna energija, W'/c^2 pa efektivna ali manjkajoča masa) sovpadati z mirovno energijo mezona ρ : $W' = m_{\rho} c^2$.

Erwin in sodelavci so curek negativnih pionov s kinetično energijo 1,76 GeV usmerili na 34 centimetrsko mehurčno celico s tekočim vodikom, ki je bila v močnem magnetnem polju. S stereoskopsko nameščenimi fotografskimi kamerami so posneli množico reakcij. Izmed posnetkov so izbrali tiste, pri katerih sta iz ene točke izvirali protonska in pionska ali dve pionski sledi. Na vsakem od teh posnetkov je posebna naprava ugotovila smer in velikost gibalnih količin za izhajajoče delce. Te podatke in zahtevo, da mora biti gibalna količina v težiščnem sistemu vseh izhajajočih delcev enaka nič in skupna mirovna in kinetična energija enaka 2,1 GeV (kolikor je v tem primeru merila mirovna in kinetična energija vpadlega piona in protona v njunem težiščnem sistemu), so vstavili v računski stroj. Računski stroj je izbral samo dogodke, pri katerih je bilo zahtevi zadoščeno le, če se je poleg protona in negativnega piona pojavil še en nevtralni pion ali poleg pionskega para še en nevtron. Nevtralni pion ali nevtron seveda v mehurčni celici nista zapustila vidne sledi.

Za vsakega izmed 104 izbranih dogodkov so izračunali efektivno energijo W' . Odločilnega pomena je porazdelitev števila dogodkov po W' . Ker so merjenja obremenjena s precejšnjimi napakami in je efektivna energija nenatančna na okoli 30 MeV, so razvrščali dogodke po W' v nekaj deset MeV široke intervale. Tako so namesto gladke porazdelitve dobili histogram. V histogramu vseh 104 dogodkov se je pokazala široka porazdelitev, ki se je v povprečju ujemala z napovedano porazdelitvijo za reakciji (3a) in (4a). Iz te pa je štrlela dokaj izrazita resonanca pri efektivni energiji približno 765 MeV. To je bil dokaz, da je pri delu dogodkov zares nastal mezon ρ z mirovno maso okoli $1500 m_0$, če je m_0 mirovna masa elektrona.

Ugotovili so tudi, da sta reakciji (3b) in (4b) približno enako pogosti (natančno vzeto je druga 1,4-krat pogostejša), kar govori za domnevo, da je

izospin mezona ρ enak 1. Razpolovne širine pri opazovanju resonanci ni bilo mogoče natančno opredeliti, ampak so jo samo grobo ocenili s 150 MeV. Potemtakem naj bi bil razpadni čas mezona ρ okoli $\frac{1}{2} \cdot 10^{-24}$ s. Število vseh obdelanih dogodkov je bilo precej majhno, zato so bili sklepi nesigurni.



Sl. 2. Porazdelitev števila N pionskih dvojic $\pi^- \pi^0$ (zgornji) in $\pi^+ \pi^-$ (spodnji diagram) po efektivni energiji W , (5) pri neprožnem sipanju negativnih pionov na protonih. Resonanci pričata o obstoju mezonov ρ^- (3 b) in ρ^0 (4 b).⁷ Gladke krivulje na tej sliki in na vseh naslednjih upoštevajo le pojave, ki potekajo naravnost brez tvorbe resonanc, in so dobljene s tako imenovano statistično teorijo za tvorbo delcev. Pri tem vzamejo matrični element ustreznega prehoda za konstanten, tako da določa verjetnost samo gostota končnih stanj v faznem prostoru. Več o tem lahko izve bralec iz pregledov, npr. S. Z. Belenkij in drugi, Fortschr. d. Phys. 6, 542 (1958) in R. Hagedorn, Fortschr. d. Phys. 9, (1961)

Natančnejše rezultate so dobili Pickup in sodelavci⁷, ki so preučevali iste reakcije na enak način kot Erwin in sodelavci, samo da so pregledali znatno večje število dogodkov. Od skupno 4000 dogodkov jih je 566 poteklo po (3) in 969 po (4) (sl. 2). Ugotovili so, da je razpolovna širina mezona ρ okoli 100 MeV.

Obstoj mezona ϱ so potrdili pri preučevanju neprožnega sipanja pozitivnih pionov na protonih⁸

$$\pi^+ + p \rightarrow p + \varrho^+, \quad \varrho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (6)$$

in

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \varrho^0, \quad \varrho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- . \quad (7)$$

Seveda tudi tu poteka del reakcij naravnost, ne da bi se tvoril mezon ϱ . Pri teh merjenjih, ki so v primeri s prejšnjimi precej bolj natančna, so za ϱ^0 izmerili mirovno energijo 750 MeV in razpolovno širino 100 MeV, za ϱ^+ pa mirovno energijo 770 MeV in razpolovno širino 130 MeV. Dejstvo ne preseneča, saj se tudi člani drugih izospinskih multipletov nekoliko razlikujejo med seboj po masi in razpadnem času, npr. nevtralni in nabiti pioni¹. Spin mezona ϱ je enak 1. O razpadih mezona ϱ še ne vedo dosti, zelo verjetno pa so najvažnejši navedeni razpadi (3b), (4b) in (6).

Mezon ω

Tudi obstoj mezona ω je napovedalo več teoretikov. Nekatere je kot pri mezonu ϱ vodila elektromagnetna struktura nukleonov. Zunanja plast, v kateri je približno četrtna celotnega naboja, ima namreč pri protonu in nevtronu isti predznak. Pojasniti bi jo mogli z domnevo, da srediča nukleona seva tudi skupaj po tri virtualne pione, ki so v posebno močni medsebojni interakciji. Iz povedanega sledi, da smemo pričakovati za pionski trojček — mezon ω — izospin nič.

Mezon ω je sorazmerno najlažje indentificirati pri anihilaciji antiprotonov⁹ s protoni, kjer v končnem stanju ni težkih delcev. Najpreprostejša reakcija, pri kateri lahko nastane mezon ω , je

$$p + \bar{p} \rightarrow \omega + \pi^+ + \pi^- ; \quad (8a)$$

takoj nato pa ω razpade

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^- . \quad (8b)$$

Zopet se je treba prepričati, da se kdaj pa kdaj rodi mezon ω (8a) in ne potekajo vse reakcije kar naravnost:

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^+ + \pi^- . \quad (8c)$$

Maglić in sodelavci¹⁰ so usmerili curek antiprotonov z energijo 930 MeV na 182 centimetrsko mehurčno celico s tekočim vodikom, ki je bila v močnem magnetnem polju. Iz množice stereoskopsko fotografiranih anihilacij so izbrali 2500 takih, pri katerih so iz ene točke izhajale štiri pionske sledi. Zopet so vsakega od teh dogodkov obdelali s posebno napravo, ki je določila smeri in velikosti gibalnih količin za četvorico pionov. Te podatke in zahtevo, da mora biti v težiščnem sistemu protonskega para skupna gibalna količina vseh izhajajočih delcev enaka nič, skupna mirovna in kinetična energija pa enaka 2,29 GeV (tolikšna je bila skupna mirovna in kinetična energija protonskega para v njegovem težiščnem sistemu), so posredovali računskemu stroju. Stroj je izbral dogodke, ki so bili združljivi s predpostavko, da je nastal še en nevtralni pion.

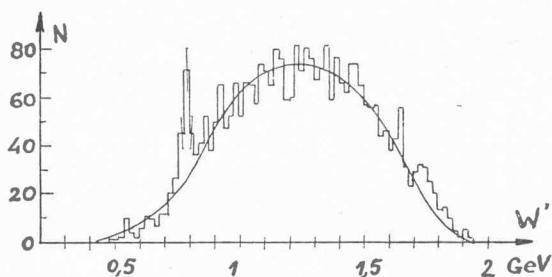
V tem primeru nastopi še dodatna težava, ker ni mogoče ugotoviti, katera trojica π^+ , π^0 , π^- je nastala pri razpadu mezona ω , temveč so pri vsakem

dogodku štiri možne take trojice. Zato so pri vseh 800 izbranih dogodkih upoštevali vse možne trojice π^+ , π^0 , π^- in zanje določili efektivno energijo

$$W' = 3 m_\pi c^2 + W_1 + W_2 + W_3 \quad (9)$$

v težiščnem sistemu vsake posamezne trojice. Zopet mora biti za vse tiste trojice, ki so nastale pri razpadu mezona ω , efektivna energija enaka mirovni energiji mezona ω : $W' = m_\omega c^2$. Za trojice, ki niso nastale pri razpadu mezona ω , pa lahko zavzame efektivna energija, pač v odvisnosti od naključne razdelitve gibalnih količin med pet delcev, v določenih mejah še poljubno vrednost.

V porazdelitvi števila trojic pa efektivni energiji W' so opazili zelo izrazito resonanco pri 787 MeV. To je dokaz, da je nekako pri 93 dogodkih od 800 zares nastal mezon ω z mirovno maso okoli $1540 m_0$ (sl. 3). Razpolovna širina resonance

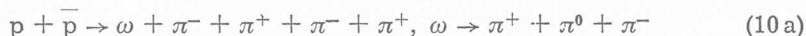


Sl. 3. Porazdelitev števila N pionskih trojic $\pi^+\pi^0\pi^-$ po efektivni energiji W' (9) pri anihilacijah protonskega para v pet pionov (8). Resonanca priča o obstoju mezona ω (8 a, b)¹⁰

je merila manj kot 30 MeV. To je tako blizu nenatančnosti, s katero so določili efektivno energijo (okoli 20 MeV), da je bilo mogoče postaviti samo zgornjo mejo za razpolovno širino in z njo spodnjo mejo za razpadni čas: $\Gamma < 30 \text{ MeV}; \tau > 4 \cdot 10^{-23} \text{ s}$.

V porazdelitvah števila trojic pionov po efektivni energiji za druge kombinacije nabojev izhajajočih pionov: $++-$ in $--+$ (po dve možnosti na vsak dogodek) ter $++0$ in $--0$ (po ena možnost) niso našli nobene resonance. Zato so sklepali, da nastopa mezon ω le v naboju nič (pravzaprav bi bilo treba pisati ω^0), kar pomeni, da je njegov izospin zares enak nič. Za spin mezona ω so ugotovili, da je enak 1.

Obstoj mezona ω sta potrdila Xuong in Lynch.¹¹ Proučevala sta reakcijo

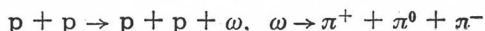


in ustrezno reakcijo brez tvorbe mezona ω

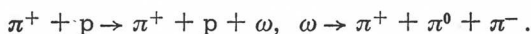


Uporabila sta iste posnetke kot Maglič in sodelavci. Izmed 551 šesterokrakih dogodkov je stroj izbral 228 takih, pri katerih je poleg šestorice nabitih pionov moral nastati še en nevtralni pion. Njuni rezultati so se ujemali z Magličevimi (sl. 4).

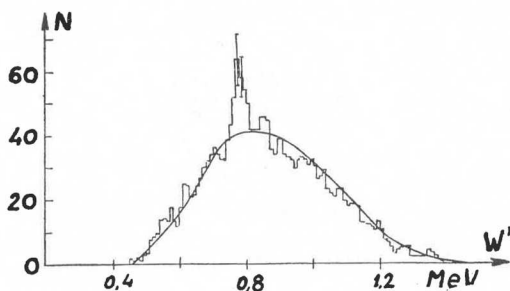
Pozneje so obstoj mezona ω še večkrat potrdili: pri neprožnem sipanju protonov na protonih¹²



in pri neprožnem sipanju pozitivnih pionov na protonih⁸

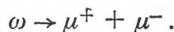
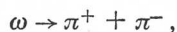
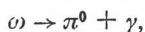


Mirovna energija, ki so jo pri raznih merjenjih ugotovili za mezon ω , se giblje od 766 do 788 MeV. Za razpolovno širino pa je eksperimentalno znana samo zgornja meja. Pač pa dopušča teorija oceno¹³, da je razpolovna širina



Sl. 4. Porazdelitev kot na sl.3 pri anihilaciji protonskega para v sedem pionov. Resonanca, ki ustreza mezonu ω , je razločnejša¹¹

velikostne stopnje 0,5 MeV, torej da je razpadni čas okoli 10^{-22} s. Razen v tri pione, naj bi mezon razpadal med drugim še na tele načine

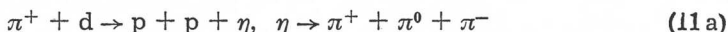


Razpad v tri pione (8b) pa je daleč najpogostejši.

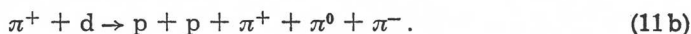
Mezon η

Izkazalo se je, da tudi mezona ω in ρ še ne moreta do kraja razložiti elektromagnetne strukture nukleonov. Ujemanje med merjenji in računi bi bilo boljše, če bi obstajala še ena tripionska resonanca, podobna mezonu ω , le z drugačno mirovno energijo¹⁴. To resonanco so že prej odkrili, pozneje pa so jo krstili za mezon η .

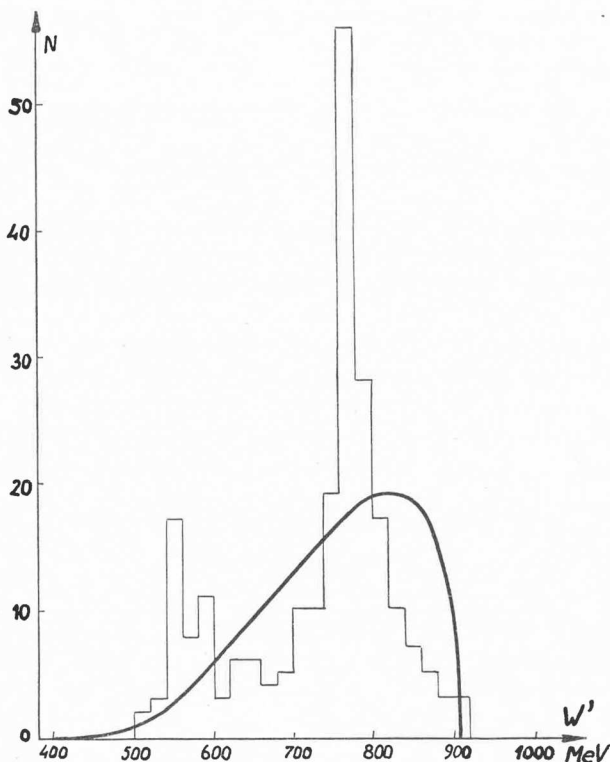
Pevsner in sodelavci so osredotočili pozornost na reakcijo



in na sorodno reakcijo, ki poteka brez tvorbe mezona η

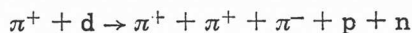


Pozitivne pione s kinetično energijo 1,1 GeV so vodili v 182 centimetrsko mehurčno celico, napolnjeno s tekočim devterijem. Računski stroj je iz množice obdelanih posnetkov izbral 233 dogodkov, pri katerih je moral poleg dveh protonov in pionskega para nastati še en nevtralni pion. Porazdelitev števila trojic po efektivni energiji (9) je pokazala zelo visoko resonanco pri 788 MeV, to je mezon ω . Opazili pa so še nekoliko šibkejšo resonanco pri efektivni energiji 546 MeV s približno enako razpolovno širino (sl. 5). Mezon η ima torej mirovno maso okoli $1100 m_0$. Za razpadni čas pa velja ista ocena kot za razpadni čas mezona ω .



Sl. 5. Porazdelitev kot na sl. 3 in 4 pri neprožnem sipanju pozitivnih pionov na devteronih. Zelo izrazita resonanca pri 788 MeV ustreza mezonu ω , nižja resonanca pri 546 MeV pa je dokaz o obstoju mezona η (11 a)¹⁵

V nasprotju z reakcijo (11) pa reakcija



ni kazala nobene resonance, kar dovoljuje sklep, da je izospin mezona η enak nič. Za spin mezona η navajajo vrednost 1.^{15, 16}

Tudi obstoj mezona η so potrdili pri neprožnem sipanju pozitivnih pionov na protonih⁸

$$^+\pi + p \rightarrow \pi^+ + p + \eta, \quad \eta \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-.$$

Nazadnje so njegov obstoj potrdili še pri reakcijah mezonov K s protoni¹⁷

$$K^- + p \rightarrow \Lambda + \eta, \quad \eta \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-, \quad (12a)$$

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 \quad \text{ali} \quad \eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0. \quad (12b)$$

Curek mezonov K^- s kinetično energijo 440 MeV so pustili padati na 182 centimetrsko mehurčno celico s tekočim vodikom. Nadaljnji postopek se je ujemal s postopkom pri identifikaciji mezona ω . Ugotovili so, da je razpolovna širina mezona η manjša kot 7 MeV in da so razpadi v nevtralne pione (12b) približno trikrat bolj pogosto kot razpadi v nabite pione (12a). Ugotovljena sta tudi še razpada $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ in $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$.

Mezon ζ

Nekoliko pozneje so odkrili še eno resonanco dveh pionov z izospinom 1 in jo imenovali mezon ζ (uporabljajo tudi ime mezon ξ). Obstoj mezona ζ še ni tako dognan kot obstoj mezonov η , ϱ in ω . Mezona ζ tudi niso pričakovali tako kot prejšnje tri mezone. Pač pa je mogoče s četvorico mezonov še nekoliko bolje razložiti elektromagnetno strukturo nukleonov. Ta četvorica mezonov kaže določeno simetrijo: ω in ϱ imata spin 1 in približno enako maso, η in ζ imata spin nič¹⁶ (spin mezona ζ še ni določen z gotovostjo) in približno enako maso, ω in η imata izospin 0, ϱ in ζ pa izospin 1.

Odkritje mezona ζ so naznanili Barloutaud in sodelavci¹⁸ pri preučevanju reakcije

$$\pi^+ + p \rightarrow \zeta^+ + p, \quad \zeta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0.$$

Ime resonance	Izospin	Spin	Mirovna energija	Razpolovna širina
η	0	0	550 MeV	7 MeV
ζ	1	0	560	70
ϱ	1	1	750	100
ω	0	1	780	12
$(\pi^+ \pi^-)$	1 ali 0		395	50
$(\pi^+ \pi^-)$			420	
$(\pi^+ \pi^-)$	1 ali 0		520	70
$f^0 (\pi^+ \pi^-)$	0	2	1250	100
$(\pi^- \pi^-)$			620	
$\alpha \left\{ \begin{array}{l} (\pi^+ \pi^0 \pi^-) \\ (\pi^+ \pi^+ \pi^-) \end{array} \right\}$	1	1	625	

Tabela 1. Pionske resonance

Pri treh različnih poskusih so vodili curek pozitivnih pionov s kinetičnimi energijami po 820, 900 in 1050 MeV v 35 centimetrsko mehurčno celico s tekočim vodikom. Postopali so na enak način, kot so postopali Pickup in sodelavci pri identificiranju mezona ϱ . V porazdelitvi števila pionskih dvojic po efektivni energiji (5) so opazili resonanco pri 746 MeV, to je mezon ϱ , in še novo resonanco pri 575 MeV. Mirovna masa mezona ζ je torej približno $1150 m_0$. S poskusom določena razpolovna širina ni večja kot 70 MeV. Alf in sodelavci⁸ pri svojih poskusih mezona ζ niso opazili.

Poleg mezonov ϱ , ω , η in ζ zasledimo še vesti o drugih podobnih resonancah, katerih obstoj pa je še slabše podprt z rezultati merjenj. Večinoma te resonance niso niti poimenovane in samo redke so obdelane s teoretičnega vidika.

Delec	izo-spin	čud-nost	resonance in način razpada		reakcija, kjer se pokaže resonanca
K (0,493,0)	$\frac{1}{2}$	1	$K^*(1,880)$ $\pi + K$		$K^- + p \rightarrow K^* + p$ $\pi^- + p \rightarrow K^* + \Sigma$
	0	0	$\varphi(., 1020,.)$ $K^0 + \bar{K}^0$, $K^+ + K^-$		$\pi^- + p \rightarrow \varphi + n$ $K^- + p \rightarrow \varphi + \Lambda$
	$\frac{1}{2}$	0	$N^*(\frac{3}{2}, 1510, 130)$ $\pi + N$	$N^{**}(\frac{5}{2}, 1690, 140)$ $\pi + N$	$\pi^- + p \rightarrow N^* + \pi$ $\pi^- + p \rightarrow N^{**} + \pi$
N ($\frac{1}{2}$, 930,0)	$\frac{3}{2}$	0	$\Delta^*(\frac{3}{2}, 1240, 145)$ $\pi + N$	$\Delta^{**}(., 1920, 185)$ $\pi + N$	$\pi^\pm + p \rightarrow \Delta^*$ $\pi^\pm + p \rightarrow \Delta^{**}$
Λ ($\frac{1}{2}$, 1115,0)	0	-1	$\Lambda^*(\frac{1}{2}, 1410, \text{od } 1 \text{ do } 50)$ $2\pi + \Lambda$, $\pi + \Sigma$	$\Lambda^{**}(\frac{3}{2}, 1520, 15)$ $\pi + \Lambda$ $\pi + \Sigma$ $K + N$	$K^- + p \rightarrow \Lambda^* + \pi$
Σ ($\frac{1}{2}$, 1192,0)	1	-1	$\Sigma^*(\frac{3}{2}, 1390, \text{od } 25 \text{ do } 50)$ $\pi + \Lambda$ $\pi + \Sigma$		$K^- + p \rightarrow \Sigma^* + \pi$ $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^* + K$
Ξ ($\frac{1}{2}$, 1351,0)	$\frac{1}{2}$	-2	$\Xi^*(\frac{1}{2}, 1530,.)$ $\pi + \Xi$		$K^- + p \rightarrow \Xi^* + K$

Tabela 1. Resonance mezonov K in barionov. Pri reakcijah in razpadih niso navedene vse možne kombinacije nabojev. Bralec jih lahko ugotovi sam, če upošteva ohranitev naboja in ohranitev čudnosti. Za pojasnilo glej besedilo na str. 32

Resonance mezonov K in barionov

Doslej smo se zadrževali le pri resonancah med samimi pioni. V močni interakciji¹ pa so poleg pionov še mezoni K in barioni, zato so možne tudi resonance med temi delci. Zares je že znana resonanca med mezonom K in pionom in resonanca med dvema mezonoma K, ki je edina znana resonanca brez piona. To slednjo imenujejo nekateri po Sakuraievem predlogu mezon φ , čeprav to ime še ni udomačeno.

Druga skupina so barionske resonance med barioni in pioni. Od barionov lahko stopijo v resonanco nukleoni s čudnostjo¹ nič ali hiperoni s čudnostjo različno od nič. Resonanca nukleona in piona N^* — imenovana izobar — je znana že dobrih deset let, odkar so jo Fermi in sodelavci opazili pri sipanju pionov na protonih. Danes je tudi v tej skupini znanih precejšnje število resonanc in to število še narašča. Resonance mezonov K in barionov so uvrščene v seznam (tabela 2), ki je sestavljen po podobnih seznamih.^{4, 16}

V tabeli so navedeni: delec, ki stopi s pionom v resonanco, izospin in čudnost resonance, vsaj ena reakcija, pri kateri so zasledili resonanco in važnejši načini razpada. V oklepaju so spin, mirovna energija v MeV in razpolovna širina v MeV. Za vse »tradicionalne« osnovne delce, ki so stabilni ali ki razpadejo po šibki ali elektromagnetni interakciji¹, je razpolovna širina zelo majhna v primeri z razpolovnimi širinami resonanc, ki razpadejo po močni interakciji. Marsikatera vrednost za spin in razpolovno širino pa tudi za mirovno energijo je še negotova.

Iz tabele razberemo, da tvorijo resonance družine z istim izospinom in isto čudnostjo. Do zelo grobe slike o sestavu resonance v družinah je mogoče priti s prav naivnimi predstavami. V klasični mehaniki je rotacijska kinetična energija dveh delcev, med katerima deluje centralna sila, glede na težišče enaka $W_r = I^2/2J$, Tu je I vrtilna količina in J vztrajnostni moment, oboje glede na težišče. V kvantni mehaniki je treba I^2 nadomestiti s $\hbar^2(l+1)l$, pri čemer je $l = 1, 2, 3 \dots$ obhodno kvantno število.¹⁹ Razlika energij za dve stanji, ki se razlikujeta le po $l - l' = 1$, je $\Delta W_r = m_\pi c^2 l$. Pri tem smo ocenili vztrajnostni moment piona glede na težišče resonance, to je približno glede na barion, z $J = m r^2$ in vstavili za povprečno razdaljo pionovo Comptonovo valovno dolžino deljeno z $2\pi : \hbar/m_\pi c$. Zaporedje spinov in naraščajoča mirovna energija v eni in isti družini resonanc navajata k domnevi, da je morda razlika mirovnih energij posledica razlike ΔW_r .

Ta domneva je na prvi pogled preuranjena iz dveh razlogov: za l smo pustili polcela števila, čeprav bi smel biti le cel, in za barione smo vzeli, da so sestavljeni iz dveh delcev, čeprav to še ni gotovo. Navzlic vsem tem pomanjkljivostim pa se dobljena izračunana razlika po velikostni stopnji ujema z razliko mirovnih energij iz tabele 2 za sosednje resonance iste družine. Ta slika vsebuje kal novega načina obravnavanja osnovnih delcev.¹⁶

Literatura:

¹ M. Gell-Mann, E. P. Rosenbaum: Osnovni delci, prevod. Obz. mat. fiz. 7, 62 (1960). Originalni članek je izšel 1957.

² N. Bežič: Celica s pregreto tekočino namesto wilsonske celice. Obz. mat. fiz. 4, 179 (1956).

³ W. L. Imhof, R. G. Johnson, F. J. Vaughn, M. Walt: Cross Section for the Li^7 (n, γ) Li^8 Reaction. Phys. Rev. 114, 1037 (1959).

- ⁴ R. D. Hill: Resonant Paraicles. Scientific American 208, 1, 39 (1963).
- ⁵ J. Strnad: Elektromagnetna struktura nukleonov, Obz. mat. fiz. 8, 120 (1961).
- ⁶ A. R. Erwin, R. March, W. D. Walker, E. West: Evidence for a $\pi - \pi$ Resonance in the $I = 1, J = 1$ State. Phys. Rev. Letters 6, 628 (1961).
- ⁷ E. Pickup, D. K. Robinson, E. O. Salant: Resonance in $\pi^- - p$ Interactions at 1,25 BeV. Phys. Rev. Letters 7, 192 (1961).
- ⁸ C. Allf, D. Berley, D. Colley, N. Gelfand, U. Nauenberg, D. Miller, J. Schultz, J. Steinberger, T. H. Tan, H. Brugger, P. Kramer, R. Plano: Production of Pion Resonances in $\pi^+ - p$ Interactions. Phys. Rev. Letters 9, 322 (1962).
- ⁹ B. Čujec: Antiproton. Obz. mat. fiz. 5, 21 (1956).
- ¹⁰ B. C. Maglić, L. W. Alvarez, A. H. Rosenfeld, M. L. Stevenson: Evidence for a $T = 0$ Three-Pion Resonance. Phys. Rev. Letters 7, 178 (1961).
- ¹¹ N. H. Xuong, G. R. Lynch: Evidence Confirming the $T = 0$ Three-Pion Resonance. Phys. Rev. Letters, 7, 327 (1961).
- ¹² E. L. Hart, R. I. Louttit, T. W. Morris: ω -Meson Production in Proton-Proton Interactions at 2,85 BeV. Phys. Rev. Letters 9, 133 (1962).
- ¹³ M. Gell-Mann, D. Sharp, W. G. Wagner: Decay Rates of Neutral Mesons. Phys. Rev. Letters 8, 261 (1962).
- ¹⁴ J. J. Sakurai: Existence of Two $T = 0$ Vector Mesons. Phys. Rev. Letters 7, 355 (1961).
- ¹⁵ A. Pevsner, R. Kraemer, M. Nussbaum, C. Richardson, P. Schlein, R. Strand, T. Toohig, M. Block, A. Engler, R. Gessaroli, C. Meltzer: Evidence for a Three-Pion Resonance near 550 MeV. Phys. Rev. Letters 7, 421 (1961).
- ¹⁶ J. B. Zeldovič: Problemi sovremenoj fiziki i astronomii. Uspehi fizičeskih nauk 78, 549 (1962).
- ¹⁷ P. L. Bastien, J. P. Berge, O. I. Dahl, M. Ferro-Luzzi, D. H. Miller, J. J. Murray, A. H. Rosenfeld, M. B. Watson: Decay Modes and Width of the η -Meson. Phys. Rev. Letters 8, 114 (1962).
- ¹⁸ R. Barloutaud, J. Heughebaert, A. Leveque, J. Meyer, R. Omnes: Evidence for a $T = 1$ Pion-Pion Resonance at 575 MeV. Phys. Rev. Letters 8, 32 (1962).
- ¹⁹ I. Supek: Teorijska fizika i struktura materije. Zagreb (Školska knjiga), 1957. S. 208.

OPTIČNO ČRPANJE

GOZMIR LAHAJNAR — Institut J. Stefan, Ljubljana

V termičnem ravnovesju je zasedenost energijskih nivojev atomov podana z Boltzmannovo statistiko. Razlike v zasedbi nivojev so majhne, če so razmaki med njimi majhni v primeri s kT^* . Na več načinov pa moremo pri dani temperaturi ustvariti razlike v zasedbi nivojev, ki so drugačne kot v termičnem ravnovesju. Med njimi je pomembna metoda optičnega črpanja. Posebnost optičnega črpanja je, da moremo pri dani temperaturi ustvariti na višjem energijskem nivoju večjo zasedbo kot na nižjem (»inverzija« v zasedbi obeh nivojev). Če porušimo termično ravnovesje in ustvarimo na primer na nekem hiperfinem podnivoju osnovnega stanja atoma precej večjo zasedbo kot na vseh ostalih podnivojih osnovnega stanja, pravimo, da smo atom polarizirali. Tako razen magnetne metode, s katero orientiramo paramagnetne atome v močnem magnetnem polju, predstavlja optično črpanje novo možnost polariziranja atomov.

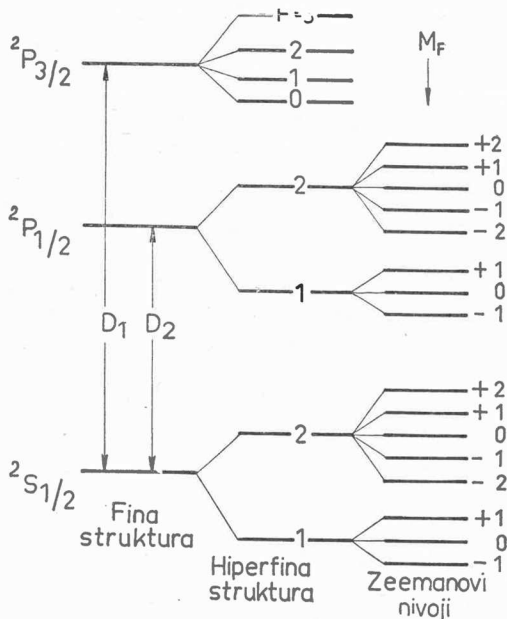
Neravnovesno razliko v zasedbi nivojev osnovnega stanja ustvarimo z optičnim črpanjem posredno preko nivojev vzbujenega stanja atoma. Možna sta dva načina. Eden je ta, da atome v zunanem šibkem magnetnem polju B_0 obsevamo z resonančno cirkularno polarizirano svetlobo (frekvenca svetlobe ustreza prehodu med osnovnim in vzbujenim stanjem, npr. pri natriju črta D_2). Foton desno cirkularno polarizirane svetlobe ima v smeri razširjanja projekcijo vrtilne količine $+1$. Naj bo v osnovnem in vzbujenem stanju atoma več energijskih nivojev (hiperfinih ali Zeemanovih nivojev, sl. 1). Z obsevanjem s svetlobo vzbujamo atome iz nivojev osnovnega stanja v nivoje vzbujenega stanja. Za prehode med nivoji velja izbirno pravilo $M_F = +1$, ker je svetloba desno cirkularno polarizirana. To pomeni, da pri prehodu dvignemo atom v nivo $M_F + 1$ vzbujenega stanja, če je bil pred absorpcijo v nivoju M_F osnovnega stanja (F je vsota vrtilne količine atoma J in vrtilne količine jedra I , M_F pa njena projekcija v smeri zunanjega magnetnega polja B_0). Ob spontani emisiji iz vzbujenega v osnovno stanje pa velja izbirno pravilo $\Delta F = 0, \pm 1$ in $\Delta M_F = 0, \pm 1$. Zato je verjetnost $2/3$, da bo atom po emisiji zasedel višji nivo osnovnega stanja kot pred absorpcijo. Ker atome stalno obsevamo, se ves proces ponavlja. S tem se večja zasedba višjih nivojev osnovnega stanja. V stacionarnem primeru postane tako najbolj zaseden najvišji nivo osnovnega stanja.

Razliko v zasedbi dveh nivojev (npr. hiperfinih nivojev osnovnega stanja za natrijev atom) pa moremo ustvariti tudi tako, da ju različno hitro praznimo. To dosežemo, če atom obsevamo z resonančnima spektralnima črtama, ki ustrezata prehodu iz obeh nivojev v vzbujeno stanje. Pri tem morata biti intenziteti obeh spektralnih črt različni, njuna širina pa manjša od razmaka med nivojema, kar pri prvem načinu ni potrebno. Ni pa treba, da je svetloba polarizirana. Ob spontani emisiji sta verjetnosti prehodov iz vzbujenega stanja v oba nivoja osnovnega stanja približno enaki. Ker pa nivoja črpamo različno hitro, se tako ustvari razlika v zasedbi obeh nivojev.

* Taki so n. pr. hiperfini in Zeemanovi nivoji osnovnega stanja atoma, ker so razmaki med njimi majhni v primeri s kT pri sobni temperaturi.

Relativno število atomov, ki smo jih polarizirali z optičnim črpanjem, je odvisno od hitrosti relaksacijskih procesov, ki vzpostavljajo termično ravnovesje atomov. Zaradi interakcije spinov s kristalno mrežo v primeru trdnih snovi ali pri trkih atomov med seboj in ob stene posode v primeru plinov se namreč atomi oziroma jedra depolarizirajo. Hitrost obeh omenjenih relaksacijskih procesov moremo omejiti s tem, da delamo pri nizkih temperaturah, če je snov trdna, ali pri majhnih gostotah, če je snov plinasta.

V zadnjih desetih letih se je pokazalo, da je metoda optičnega črpanja zelo pomembna za osnovne raziskave, pa tudi za tehniško uporabo. Zlasti doseganje inverzije v zasedbi energijskih nivojev z optičnim črpanjem je v novejšem času pomembno za razvoj maserjev in laserjev.



Sl. 1. Energijski nivoji atoma alkalijske kovine z jedrsko vrtilno količino $I = 3/2$ (Zeemanovih nivojev za stanje ${}^2P_{3/2}$ zaradi preglednosti ni na sliki).

Orientacija atomskih spinov z optičnim črpanjem

Mehanizem optičnega črpanja si oglejmo na primeru alkalijskih atomov.

Eden prvih poizkusov optičnega črpanja je bil narejen z natrijem, za praktično uporabo pa je primeren izotop Rb^{87} , ki ima zaradi nizkega tališča (39°C) dovolj velik parni tlak že pri sobni temperaturi.

Osnovno stanje atoma alkalijske kovine je ${}^2S_{1/2}$, prvo vzbujeno stanje je dublet ${}^2P_{1/2}$ in ${}^2P_{3/2}$. Ker je jedrska vrtilna količina od nič različna, so stanja razcepljena v $2J + 1$ nivojev hiperfine strukture: $F = I + J, I + J - 1, \dots, I - J$ ($J \leq I$, I je jedrska vrtilna količina, J je vsota orbitalne vrtilne količine in spina elektrona). V zunanjem šibkem magnetnem polju $\mathbf{B}_0$ (člen z $\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0$ v hamiltonjanki je majhen v primeri s členom $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$) se vsak nivo razcepi še na $2F + 1$

Zeemanovih nivojev s projekcijami vrtilne količine v smeri polja B_0 : $M_F = F, F-1, \dots, -F$ (glej sl. 1).

Energijski razmaki med Zeemanovimi nivoji so sorazmerni gostoti magnetnega polja B_0 . Za spontane prehode med različnimi hiperfinimi nivoji velja izbirno pravilo $\Delta F = 0, \pm 1$, za prehode med Zeemanovimi nivoji pa pravilo $\Delta M_F = 0, \pm 1$. Pri optičnem črpanju obsevamo atome z desno cirkularno polarizirano resonančno svetlobo, s čimer spravimo atome na najvišji nivo hiperfine strukture oziroma na najvišji Zeemanov nivo; foton desno cirkularno polarizirane svetlobe ima projekcijo vrtilne količine v smeri razširjanja $+1$. Obsevajmo Na atom z desno cirkularno polarizirano resonančno svetlobo (valovna dolžina ustreza prehodu D_1 na sl. 1). Atom naj bo v šibkem magnetnem polju B_0 in naj ima zaseden najnižji Zeemanov nivo ($F = 1, M_F = -1$) osnovnega stanja. Svetloba naj vpada v smeri polja B_0 . Z absorpcijo fotona se atomu poveča projekcija vrtilne količine za $+1$, zato preide v nivo $M_F = 0$ stanja $^2P_{1/2}$.*

Ob ponovnem prehodu v osnovno stanje je zaradi izbirnega pravila $\Delta M_F = 0, \pm 1$ verjetnost $2/3$, da atom zasede nivo z večjo vrednostjo M_F kot pred absorpcijo. Z večkratno absorpcijo in s spontano emisijo bomo tako vse atome dvignili v najvišji nivo ($F = 2, M_F = +2$) osnovnega stanja. Pri tem je važno, da ni nobenih zunanjih motenj, zaradi katerih bi se spremenila zasedenost posameznih nivojev M_F . Ko pa ima atom zaseden nivo $F = 2, M_F = +2$, ne more več absorbirati svetlobe, ker vzbujeno stanje $^2P_{1/2}$ tudi nima nivoja, katerega M_F bi bil večji od $+2$.

Para takih atomov postane tedaj za desno cirkularno polarizirano svetlobo D_1 prozorna. Ker so atomi v istem Zeemanovem nivoju, imajo spine enako orientirane. Da se doseže čim večje število polariziranih atomov, je treba iz svetlobnega curka eliminirati črto z valovno dolžino, ki ustreza prehodu D_2 . Ta bi namreč prispevala prehodu v nivo $M_F = +3$ stanja $^2P_{3/2}$, do katerega bi se dvignil atom z nivoja $F = 2, M_F = +2$ osnovnega stanja. Posledica tega bi bilo zmanjšanje števila polariziranih atomov v stanju $F = 2, M_F = +2$.

Doslej še nismo upoštevali relaksacijskih procesov. Posledica trkov atomov med seboj ali ob stene posode je, da se reorientirajo spini posameznih atomov. To našo »idealno« sliko optičnega črpanja močno pokvari. Število trkov med atomi omejimo, če delamo pri nizkih parnih tlakih (10^{-5} do 10^{-6} tor). Število trkov ob stene posode pa zmanjšamo tako, da dodamo pari alkalijske kovine plemeniti plin (buffer). S tem se poveča čas difuzije atomov na poti do sten posode. Pri trkih ob atome bufferja se alkalijski atomi ne reorientirajo, ker je celotna vrtilna količina atoma žlahtnega plina enaka nič. V zadnjem času si pomagajo tudi tako, da premažejo stene posode s snovmi, katerih molekule prav tako ne povzročijo depolarizacije atomov alkalijske kovine, ko le-ti vanje trčijo. Tako so dosegli razmeroma dolge relaksacijske čase (0,2 sekunde pri natriju).

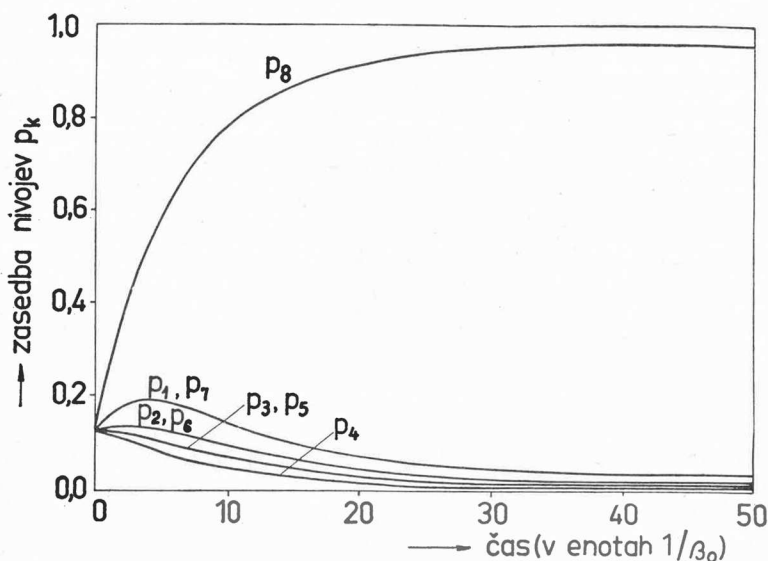
Vzemimo na primer, da črpamo Na atome z desno cirkularno polarizirano resonančno svetlobo D_2 ($\lambda = 5896 \text{ \AA}$). Natrij ima jedrsko vrtilno količino $3/2$ in ima v osnovnem stanju osem Zeemanovih nivojev. Označimo jih z indeksom k ($k = 1, 2, \dots, 8$). Naj bo b_{ij} verjetnost na časovno enoto, da je atom na i -tem Zeemanovem nivoju osnovnega stanja absorbiral kvant D_2 in s spontano emisijo prešel v Zeemanov nivo j osnovnega stanja. Definiramo tudi verjetnost na ča-

* Resonančna črta D_2 je zaradi Dopplerjevega efekta toliko razširjena, da so možni prehodi v nivoju $F = 2$ ali $F = 1$ stanja 2P .

sovno enoto w_{ij} , da atom doživi tak prehod zaradi relaksacijskega procesa. Zasedbo $p_k(t)$ k -tega nivoja dobimo z rešitvijo osmih diferencialnih enačb:

$$\frac{dp_k}{dt} = - \sum_{j=1}^8 (b_{kj} + w_{kj}) p_k + \sum_{i=1}^8 (b_{ik} + w_{ik}) p_i \quad k=1, 2, \dots, 8 \quad (1)$$

Neodvisnih je le sedem enačb, ker je $\sum p_k = 1$. Vejica poleg sumacijskega znaka pomeni, da pri seštevanju izpustimo člene z $j = k$ in $i = k$. To pomeni, da prehode na nivo, iz katerega atom dvignemo, v našem računu ne upoštevamo. Seveda pa taki prehodi prispevajo k verjetnosti na časovno enoto, da bo atom v stanju k absorbiral foton (pri čemer pa ni važno, v kateri energijski nivo bo atom prešel po emisiji). Ta verjetnost je dana z vsoto $\sum b_{kj}$. Če iščemo še ver-



Slika 2

jetnost na časovno enoto, da bo poljuben atom absorbiral foton, je treba upoštevati še zasedbo p_k vseh osmih nivojev, tako da dobimo $\beta = \sum_k \sum_j b_{jk} p_k$. Če smatramo, da so zasedbe za vse nivoje enake ($p_k = 1/8$)*, je verjetnost na časovno enoto, da bo posamezen atom absorbiral foton enaka $\beta_0 = 1/8 \sum_k \sum_j b_{kj}$.

Ta verjetnost pa je $\int_0^\infty I_\gamma \cdot \delta_\gamma \cdot d\nu$, pri čemer je I_γ spektralna gostota vpadajoče

svetlobe (število fotonov/cm² sek na enoto frekvenčnega intervala) in δ_γ absorpcijski presek za svetlobo pri pogoju, da imajo vsi Zeemanovi nivoji osnovnega stanja alkalijskega atoma enako zasedbo.

* To pomeni, da v termičnem ravnovesju (pri temperaturi Na pare približno 130° C) zanemarimo majhne razlike v zasedbi posameznih Zeemanovih nivojev.

Najenostavnejši primer je, če vzamemo, da so tudi verjetnosti w_{ij} za vseh osem nivojev med seboj enake. To pomeni, da ima atom na danem energijskem nivoju pri enkratni relaksaciji enako verjetnost za prehod v vsakem od ostalih sedmih nivojev. Za vsak w v enačbi (1) sedaj postavimo $w_{kj} = w_{ik} = 1/8 T$, kjer je $1/T$ verjetnost na časovno enoto, da posamezen atom doživi prehod zaradi relaksacije s trki. Če ni črpalne svetlobe ($b = 0$), potem enačbo (1) lahko takole zapišemo:

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= -p_k \sum_{j=1}^8 w_{kj} + \sum_{i=1}^8 w_{ik} p_i = -8 (1/8 T) p_k + (1/8 T) \sum_{i=1}^8 p_i = \\ &= -(1/T) (p_k - 1/8) \end{aligned} \quad (2)$$

Enačba (2) pove, da se zasedba k -tega nivoja spreminja samo zaradi relaksacijskih procesov. Zasedba v tem primeru eksponencialno pojema s časom. Vidimo, da konstanta T pomeni termični relaksacijski čas. Verjetnost, da bo osmi Zeemanov nivo ($F = 2$, $M_F = +2$) stanja $^2S_{1/2}$ obsorbiral kvant desno cirkularno polarizirane svetlobe D_2 , je enaka nič zaradi izbirnega pravila $\Delta M_F = +1$. Za vse druge nivoje pa je ta verjetnost različna od nič. Zato je razumljivo, da zasedba osmega nivoja s časom narašča (glej sl. 2).

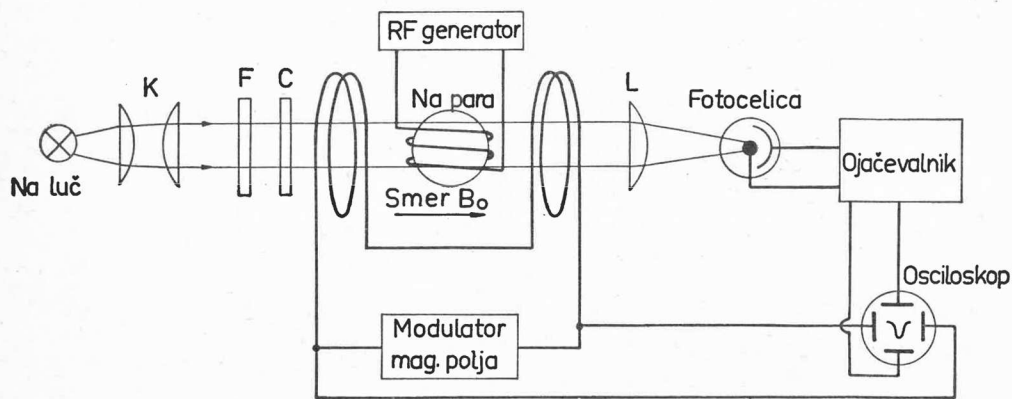
Znatno polarizacijo atomov je možno doseči, če je gostota svetlobnega toka črpalne svetlobe zadostna in če je relaksacijski čas dovolj dolg. Iz slike 2 je razvidno, da je zasedba vseh osmih nivojev v začetku enaka $1/8$, nato pa narašča na osmem, na vseh ostalih pa pojema s časom. Krivulje so dobljene z rešitvijo enačb (1).

Aparatura, detekcija in uporaba

Schema aparature za optično črpanje je na sliki 3.

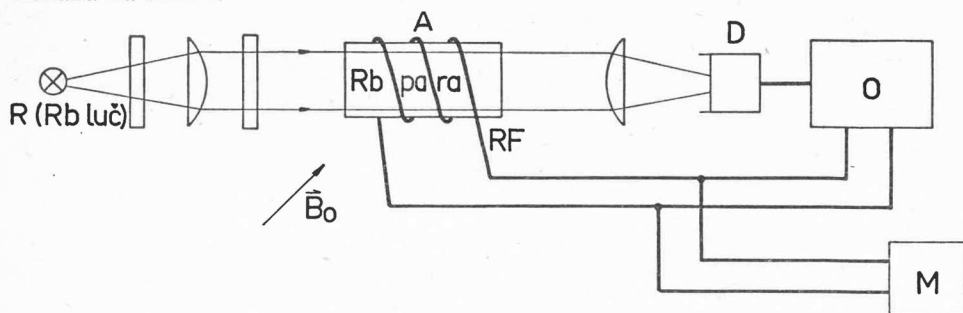
Natrijeva luč ima dve črti z valovnima dolžinama 5890 Å in 5896 Å. Skozi kondenzor K vpada paralelen snop svetlobe na interferenčni filter F , ki eliminira črto D_1 (5890 Å). Prepuščeno črto D_2 pa polarizacijski filter C , ki je sestavljen iz linearnega polarizatorja in ploščice $\lambda/4$, polarizira v cirkularno polarizirano svetlobo. Skozi bučko z Na paro vpada svetloba na fotocelico. Potreben parni tlak natrija je med 10^{-5} in 10^{-6} tor, zato je treba bučko vzdrževati na temperaturi približno 130° C. Pri Rb^{87} zadošča že sobna temperatura. Pri rubidiju je tudi dosti lažje izolirati črti D_1 in D_2 , kot na natriju, ker sta dosti bolj razmaknjeni (7947 Å in 7800 Å). Po drugi strani pa dajejo Na izvori intenzivnejšo svetlobo od rubidijevih. Natrij ima še eno prednost, namreč da ima en sam izotop (Na^{23}), pri rubidiju pa sta dva (Rb^{85} in Rb^{87} v razmerju približno 3:1). Aparatura izkorišča lastnost, da je para polariziranih atomov prozorna za cirkularno polarizirano resonančno svetlobo, para nepolariziranih pa ne. Radiofrekvenčni signal primerne valovne dolžine, ki ga ustvarimo z RF generatorjem, inducira v polariziranih atomih prehode med Zeemanovimi nivoji oziroma med nivoji hiperfine strukture. Energijski razcep Zeemanovih nivojev je proporcionalen zunanjemu magnetnemu polju. Resonančna frekvenca signala RF generatorja mora ustrezati razcepu med dvema sosednjima Zeemanovima nivojema. Izbirno pravilo za prehod med njima je $\Delta F = 0$, $\Delta M_F = \pm 1$, izbirno pravilo za hiperfine prehode je podobno $\Delta F = \pm 1$.

Če nas zanima samo detekcija optičnega črpanja, držimo frekvenco signala iz RF generatorja konstantno, stalno zunanje magnetno polje pa moduliramo. Ko povzroči vsota stalnega in nihajočega magnetnega polja tolikšen energijski razcep nivojev, ki ustreza frekvenci ω ($\Delta E_m - \hbar\omega$) signala, nastopi absorpcija svetlobe. Lahko pa naredimo obratno: pri stalnem zunanjem polju spreminjamo frekvenco RF signala in opazujemo nastop absorpcije. Ker lahko frekvenco točno izmerimo, nam služi ta metoda za zelo natančno merjenje stalnih magnetnih polj.



Sl. 3. Shema aparature za optično črpanje.

Praktična izvedba merilca šibkih spremenljivih magnetnih polj je magnetometer na rubidijevo paro. Izvedba se nekoliko razlikuje od prejšnje in je prikazana na sliki 4.



Slika 4

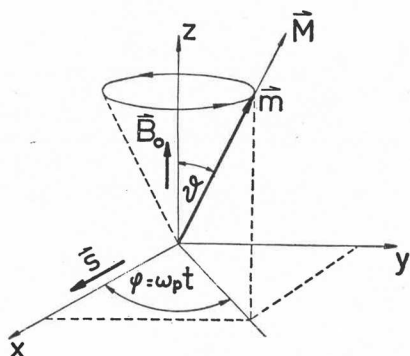
Rubidijevo paro, ki je v absorpcijski bučki A, obsevamo z resonančno desno cirkularno polarizirano svetlobo iz izvora R. Če usmerimo svetlobo tako, da oklepa s smerjo zunanjega magnetnega polja B_0 kot, ki je različen od nič, utripa prepuščena svetloba z Larmorjevo frekvenco, ki je proporcionalna B_0 . V zemeljskem magnetnem polju (približno 0,5 gauss) znaša ta frekvenca približno 350 kHz. Signal iz svetlobnega detektorja D niha z isto frekvenco. Signal ojačimo z ojačevalnikom O in vodimo v tuljavo RF, ki je navita okrog bučke A.

Tako smo ustvarili izmenično radiofrekvenčno polje B_{rf} , ki ima isto nalogo kot Rf generator pri merilcu stalnih magnetnih polj. Frekvenco merimo z merilcem frekvence M .

Oglejmo si podrobneje, zakaj prepuščena svetloba utripa. V zunanjem magnetnem polju se magnetni momenti rubidijevih atomov orientirajo. Zanimarili bomo magnetne momente jeder. Osnovno stanje rubidijevega atoma ima zato celotno vrtilno količino $J = 1/2$ in možni sta dve stanji (+) in (—). Za prvo je $m_J = 1/2$, za drugo $m_J = -1/2$. Stanje sistema, kjer kaže magnetizacija $\mathbf{M}$ v smer ϑ , φ (ϑ je kot med $\mathbf{M}$ in $\mathbf{B}_0$), lahko opišemo z:

$$\psi = A (+) + B (-) = \cos(\vartheta/2) e^{-i\varphi/2} (+) + \sin(\vartheta/2) e^{+i\varphi/2} (-).$$

Koeficienta A in B smo dobili tako, da smo izenačili projekcije magnetizacije $\mathbf{M}$ na osi x , y in z s povprečnimi vrednostmi operatorjev M_x , M_y , M_z . Z obsevanjem z resonančno svetlobo D_2 , ki naj ima smer $\mathbf{B}_0$, vzbudimo atom iz osnovnega stanja $J = 1/2$ v prvo vzbujeno stanje $J' = 3/2$. Ker je svetloba



Slika 5

desno cirkularno polarizirana, so možni samo prehodi z izbirnim pravilom $\Delta M = +1$. Zato k absorpciji prispevajo samo stanja (—). Za absorpcijo je torej važen samo delež $f = |A(-)|^2 = \sin^2 \vartheta/2 = \frac{1}{2} [1 - \cos \vartheta]$, kjer je ϑ kot med vektorjem magnetizacije $\mathbf{M}$ in smerjo razširjanja svetlobe oziroma smerjo zunanjega polja B_0 . Rezultat mora biti neodvisen od izbire koordinatnega sistema, to je od smeri polja B_0 , zato velja splošno: $f = 1/2 [1 - \mathbf{m} \cdot \mathbf{s}]$, kjer je $\mathbf{m}$ enotni vektor v smeri magnetizacije $\mathbf{M}$, $\mathbf{s}$ pa enotni vektor v smeri razširjanja svetlobe. Naj na primer svetloba vpada v smeri osi x (sl. 5).

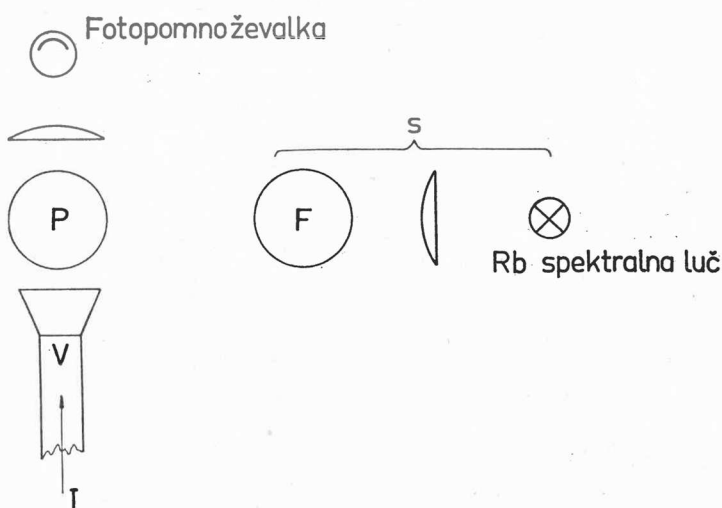
Velja $\mathbf{m} = (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$

$$\mathbf{s} = (1, 0, 0)$$

Magnetizacija $\mathbf{M}$ precedira okrog smeri zunanjega magnetnega polja B_0 s krožno frekvenco $\omega_p = \gamma \cdot B_0$, kjer je γ giromagnetna konstanta za rubidijev atom. Zato je $\varphi = \omega_p t$, torej je skalarni produkt $\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = \sin \vartheta \cos \omega_p t$. Vidimo, da prepuščena svetloba res utripa s precesijsko frekvenco ω_p . Signal iz svetlobnega detektorja ojačimo in vodimo v RF tuljavo. S tem smo ustvarili magnetno polje B_{rf} , ki niha z Larmorjevo frekvenco, ki ustreza razliki energijskih nivojev (+) in (—) in zato inducira prehode med obema nivojema. Tako imamo vedno

tudi atome v stanju ($\rightarrow$), zato je absorpcija v Rb pari vedno možna. Celoten tokokrog je torej oscilator, ki niha z Larmorjevo frekvenco in se sam vzbuja s povratno vezjo. Z rubidijevim magnetometrom moremo še meriti magnetna polja, katerih gostota je manjša od 10^{-5} gauss. Absolutna napaka meritve sprememb zemeljskega magnetnega polja je $0,1 \mu\text{gauss}$. Za merjenje absolutnih vrednosti magnetnih polj pa magnetometri z optičnim črpanjem niso najprimernejši, ker je giromagnetna konstanta atomov izmerjena s premajhno natančnostjo.

Drug primer uporabe optičnega črpanja je frekvenčni standard z rubidijevo paro. Aparatura je generator frekvenc $6834,6826 \text{ MHz}$, kar ustreza prehodu med hiperfinima nivojema $F = 1, M_F = 0 (A)$ in $F = 2, M_F = 0 (B)$ osnovnega stanja Rb^{87} . Zaradi $L, M_F = 0$ energijski razmak med nivojema ni odvisen od zemeljskega magnetnega polja.



Slika 6

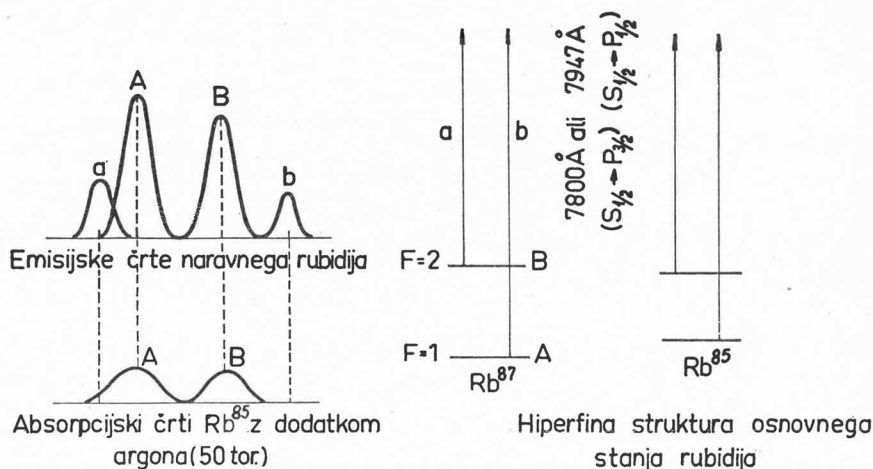
Delovanje aparature (glej sliko 6) je v kratkem takole: iz rubidijevega svetlobnega izvora S dobimo dve resonančni spektralni črti različnih intenzitet. S to svetlobo obsevamo paro Rb^{87} v bučki P in tako črpamo atome iz nivojev A in B v vzbujeno stanje, odkoder se s spontano emisijo vračajo v osnovna nivoja A in B . Zaradi različnih intenzitet spektralnih črt v črpalni svetlobi je efekt črpanja ta, da dobimo neravnovesno zasedbo nivojev A in B .

Svetlobo iz bučke P , ki jo emitirajo vzbujeni atomi rubidijeve pare pri spontani emisiji, detektira fotopomnoževalka (sl. 6).

Iz frekvenčnega izvora I — tega hočemo stabilizirati — vodimo po valovodu V do bučke P elektromagnetno valovanje, ki inducira prehode med nivojema A in B — pri pogoju seveda, da ustreza frekvenca valovanja energijskemu razmaku med obema nivojema. Zaradi stalne depolarizacije (pri resonančni frekvenci) je absorpcija črpalne svetlobe konstantna, zaradi tega pa je tudi konstanten svetlobni tok, ki ga emitira rubidijeva para in detektira fotopomnoževalka. Če se frekvenca izvora premakne, valovanje ne inducira prehodov, zmanjšata se absorpcija in spontana emisija. Zmanjšano emisijo zazna fotopomnože-

valka, signal ojačimo in ga z negativno povratno vezjo peljemo v sistem, ki stabilizira frekvenčni izvor.

Posebno pozornost je treba posvetiti rubidijevemu svetlobnemu izvoru S . Resonančni spektralni črti, s katerima črpamo nivoja A in B , ustrezata prehodu iz vzbujenega stanja $^2P_{3/2}$ ali $^2P_{1/2}$ v oba hiperfina nivoja A ($F = 1, M_F = 0$) in B ($F = 2, M_F = 0$) osnovnega stanja $^2S_{1/2}$ Rb^{87} (slika 7). Širina črt a in b mora biti manjša od razmaka med nivojema A in B , intenziteta črte a pa manjša od intenzitete črte b . Le tedaj se zasedba zgornjega nivoja B zveča napram zasedbi spodnjega A , saj sta ob spontani emisiji verjetnosti prehodov iz vzbujenega stanja v oba hiperfina nivoja približno enaki. Spektralne črte rubidija zožimo z dodatkom žlahtnega plina. Razliko v intenziteti črt a in b ustvarimo s tem, da svetlobo pošljemo skozi filter F , ki delno absorbira črto a . Filter je bučka z mešanico pare Rb^{85} in argona (50 tor). Pri uporabi tega frekvenčnega stan-



Slika 7

darda moramo upoštevati, da buffer nekoliko premakne resonančno frekvenco. Frekvenčni premik je sorazmeren tlaku bufferja. Je pozitiven za lahke pline in negativne za težje. Pri tlaku deset tor so ti premiki za vodik in helij okrog $+7000$ Hz, za argon -500 Hz, za kripton -6000 Hz, za mešanico 11,7 % neona in 88,3 % argona pa je premik samo $+14 \pm 3$ Hz. Iz navedenega razloga aparatura ne more služiti kot primarni frekvenčni standard, njena prednost pred ostalimi pa je, da je prenosna.

Tudi za spektroskopijo je metoda optičnega črpanja zelo pomembna. Služi namreč za natančno določitev energijskih razmakov nivojev hiperfine strukture osnovnega stanja atomov. Primer te spektroskopije je opisana izvedba frekvenčnega standarda s paro Rb^{87} . Izmerjena frekvenca prehoda med hiperfinima nivojema je $6834,6826$ MHz.

Metoda je uporabna tudi pri atomih, ki jih z optičnim črpanjem ne moremo polarizirati. Take atome (A) pomešamo z atomi (B), ki jih polariziramo z optičnim črpanjem. Atomi A se polarizirajo s »spinsko izmenjavo«[»] preko trkov s polariziranimi atomi B . Tako so na primer določili hiperfino strukturo osnovnega stanja dušika. Poizkus je narejen takole: V stekleno bučko z mešanico dušika in

natrijeve pare sta vgrajeni elektrodi. Ob razelektritvi med njima del dušikovih molekul disociira v atome. Ti se polarizirajo s spinsko izmenjavo pri trkih s polariziranimi natrijevimi atomi, ki jih polariziramo z obsevanjem s cirkularno polarizirano resonančno svetlobo. Radiofrekvenčno valovanje prave frekvence inducira prehode med hiperfinimi nivoji osnovnega stanja dušikovih atomov; dušikovi atomi se depolarizirajo. S spinsko izmenjavo med natrijevimi in dušikovimi atomi se depolarizirajo tudi natrijevi atomi. Poveča se absorpcija svetlobe v Na pari, kar služi za optično detekcijo dušikove resonance.

Namesto dušikovih atomov imamo v bučki lahko proste elektrone, ki se prav tako polarizirajo pri trkih s polariziranimi Na atomi. V stekleni bučki imamo mešanico Na pare (10^{-7} tor) in argona (70 tor), bučka je nameščena med ploščama kondenzatorja. Na kondenzator dovajamo visokofrekvenčne napetostne sunke (25 MHz) in s tem ustvarjamo v bučki proste elektrone. Sunki so dolgi 10^{-3} sekunde in se ponavljajo vsakih deset sekund.

Vzemimo, da imamo v bučki v 1 cm^3 N natrijevih atomov in n elektronov. Od teh naj jih ima N_+ in n_+ spine v smeri polja B_0 , ter N_- in n_- spine v nasprotni smeri. Definiramo polarizaciji: $P = (N_+ - N_-)/N$ za natrijeve atome in $p = (n_+ - n_-)/n$ za elektrone. Presek za »izmenjavo spina« med polariziranim atomom in elektronom označimo s σ . Zaradi enostavnosti vzemimo, da

natrijevi atomi mirujejo, elektroni pa se gibljejo s hitrostjo $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$. Časovna sprememba n_+ zaradi spinske izmenjave med natrijevim atomom in elektronom je dana z: $\frac{dn_+}{dt} = v \cdot \sigma (N_+ n_- - N_- n_+)$. Od tod dobimo časovno spremembo polarizacije elektronov: $\dot{p} = \frac{dp}{dt} = v \cdot \sigma \cdot N (P - p)$. Podobno je za

polarizacijo natrijevih atomov $\dot{P} = v \cdot \sigma \cdot n (p - P)$. Presek σ je razmeroma velik in znaša približno $2,3 \cdot 10^{-14}\text{ cm}^2$. Seveda se v resnici obe polarizaciji s časom drugače spreminjata, ker je treba upoštevati, da natrijeve atome stalno polariziramo z optičnim črpanjem in da se po drugi strani depolarizirajo zaradi relaksacijskih procesov.

Detekcija poteka podobno kot v primeru dušikovih atomov. Z merjenjem frekvence ν_s vzbujevalnega radiofrekvenčnega valovanja, ki reorientira polarizirane elektrone, lahko iz enačbe $\nu_s = g_s \cdot \mu_0 B_0 / h$ zelo natančno določimo faktor g_s prostih elektronov.

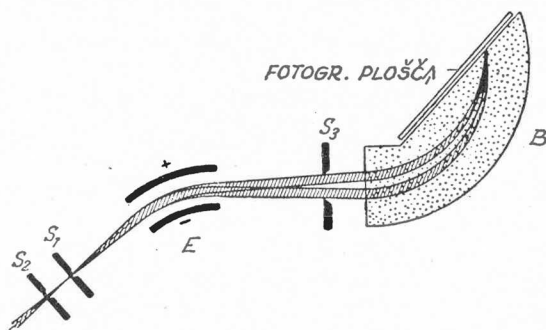
Literatura:

1. A. Kastler, Proc. Phys. Soc. A **67**, 854 (1954).
2. A. L. Bloom, Sci. Am. **203**, 72 (1960).
3. R. L. de Zafra, Am. J. Phys. **28**, 646 (1960).
4. W. Franzen and A. G. Emslie, Phys. Rev. **108**, 1453 (1957).
5. W. E. Bell and A. L. Bloom, Phys. Rev. **107**, 1559 (1957).
6. H. G. Dehmelt, Phys. Rev. **105**, 1924 (1957).
7. H. G. Dehmelt, Phys. Res. **105**, 1487 (1957).
8. W. E. Bell and A. L. Bloom, Phys. Rev. **109**, 219 (1958).
9. P. L. Bender, Quantum Electronics, str. 112 (1960).
10. P. Franken, R. Sands, J. Hobart, Phys. Rev. Letters **1**, 52 (1958).
11. R. Novick and H. E. Peters, Phys. Rev. Letters **1**, 54 (1958).
12. L. W. Anderson, F. M. Pipkin, J. C. Baird, Phys. Rev. **116**, 87 (1959).
13. P. L. Bender, E. C. Beaty and A. R. Chi, Phys. Rev. Letters, **1**, 311 (1958).
14. H. G. Dehmelt, Phys. Rev. **109**, 381 (1958).

NOVICE

NOVA SKALA ATOMSKIH MAS: $^{12}\text{C} = 12$

Ko so bile proti koncu 18. stol. uvedene v kemijo kvantitativne metode in se je začela razvijati atomistična teorija kemijskih procesov, je bilo potrebno določiti relativne mase posameznih atomov in molekul. Dalton, kot začetnik moderne kemije in atomistične teorije, je l. 1803 sestavil prvo tabelo atomskih mas z maso vodikovega atoma kot enoto. Mnogi elementi z vodikom ne tvorijo obstojnih spojin, tako da merjenje relativnih atomskih mas po kemijskih metodah z enoto $\text{H} = 1$ ni bilo vedno direktno izvedljivo. Kasneje so zato kemiki predložili za osnovo skale kisik, ki se spaja praktično z vsemi elementi, ki so jih takrat poznali. Predloženih je bilo več skal, kjer je bila atomska masa kisika mnogokratnih osnovne enote: T. Thomson (1825) $\text{O} = 1$, W. H. Wollaston (1814) $\text{O} = 10$, J. J. Berzelius (1830) $\text{O} = 100$ in J. J. Stas (1860-65) $\text{O} = 16$. Zadnja definicija se je obdržala vse do danes [2].



Shema masnega spektrografa. Ionski curek se najprej razkloni v električnem polju na široke snope ionov z različnimi masami. Magnetno polje ione dokončno zbere ali fokusira na fotografski plošči. Ves sistem je zaprt v evakuiranem ohišju. Ker spektrografi te vrste fokusirajo ione z nekoliko različnimi smermi in nekoliko različnimi hitrostmi, jih imenujemo spektrografe z dvojnim fokusiranjem.

Nove poglede na atomske mase je prineslo odkritje izotopov. Aston je l. 1927 popravil definicijo skale $\text{O} = 16$ s tem, da je postavil $^{16}\text{O} = 16$. Dve leti za tem pa sta bila odkrita kisikova izotopa ^{17}O in ^{18}O . To odkritje je povzročilo razkol med fiziki in kemiki. Prvi so uporabljali Astonovo skalo, drugi pa še staro Stasovo. Razmerje enot v kemijski in fizikalni skali je 1,000275. Kasnejše meritve so še pokazale, da to razmerje ni stalno, in se spreminja, če vzamemo različne vzorce kisika, ker se spreminja njegov izotopski sestav. Ker merijo danes atomske mase z zelo veliko natančnostjo, so tudi ti majhni odmiki pomembni; razmerje enot kemijske in fizikalne skale moramo zato pisati: $1,000275 \pm 0,000030$.

Da bi odpravili te pomanjkljivosti, se je l. 1956 Mednarodna komisija za atomske mase Mednarodne unije za čisto in uporabno kemijo (International Union of Pure and Applied Chemistry — IUPAC) obrnila na Mednarodno unijo

za čisto in uporabno fiziko (International Union of Pure and Applied Physics — IUPAP), da bi izdelala predlog za novo skalo atomskih mas.

Že pred tem je bilo predloženih več skal. Selinov je predlagal skalo $^{19}\text{F} = 19$, ki so jo podpirali tudi drugi. Naravni fluor ima namreč samo izotop ^{19}F z atomsko maso 19,004456 v Astonovi skali; torej bi skoraj ne bilo treba večjih popravkov. Poleg $^{19}\text{F} = 19$ so predlagali še Gamow in Bethe skalo $^4\text{He} = 4$, Öllander skalo $^{18}\text{O} = 18,004874$, kjer popravki v stari fizikalni skali sploh ne bi bili potrebni, ker je atomska masa ^{18}O v obeh ista.

Najpomembnejši predlog je bila skala $^{12}\text{C} = 12$, ki sta jo predlagala Nier in Öllander. Skalo sta sedaj že uradno sprejeli IUPAP in IUPAC. Obenem je bil predlagan izraz relativne atomske mase namesto starejših in manj pravičnih atomske teže in atomske mase. Razmerje enot v novi skali $^{12}\text{C} = 12$ in stari fizikalni skali $^{16}\text{O} = 16$ je $1,000317917 \pm 10 \cdot 10^{-9}$. Po drugi strani so atomske mase v novi skali samo za 0,0043 ‰ manjše od atomskih mas v stari kemični skali, kar ni tako veliko, da bi kemikom oviralo prehod na novo skalo. Atomska masa naravnega kisika v novi skali je $\text{O} = 15,9994$, atomska masa izotopa ^{16}O pa $15,99949194 \pm 28 \cdot 10^{-9}$.

Da bi lažje razumeli vzroke, ki so privedli do sprejetja nove skale, si na kratko oglejmo, kako merijo danes relativne atomske mase z daleč najnatančnejšo metodo — masno spektrografijo [3], [4].

Masni spektrograf meri specifični naboj iona e/m , iz katerega dobimo maso, če poznamo naboj (glej shematski opis masnega spektrografa pod sliko). Skalo na fotografski plošči umerimo z ioni z znano maso, vendar mase merjenja ne beremo direktno na tej skali. Mase posameznih atomov nekega elementa ali nuklidov se malo razlikujejo od celega števila, ki ga imenujemo masno število.

Tabela relativnih atomskih mas stabilnih izotopov do mase 16 po skali $^{12}\text{C} = 12$

Atomsko št.	Simbol	Masno št.	Rel. atomska masa	Napaka $\cdot 10^{-8}$
0	n	1	1,008 665 44	43
1	H	1	1,007 825 22	8
		2	2,014 102 19	11
2	He	3	3,016 029 94	23
		4	4,002 603 61	37
3	Li	6	6,015 126 3	100
		7	7,016 005 3	110
4	Be	7	7,016 930 7	130
		9	9,012 185 3	90
5	B	10	10,012 938 9	70
		11	11,009 305 09	43
6	C	12	12,000 000 00	0
		13	13,003 354 3	70
7	N	14	14,003 074 38	17
		15	15,000 108 1	90
8	O	16	15,994 914 94	28

Če že poznamo masno število nekega nuklida, je treba izmeriti samo še razliko tega števila do prave mase, tj. masni defekt. Dva iona z istim masnim številom dasta v spektru dve črti, ki sta blizu skupaj, dobimo dublet. Iz znane mase ene izmed komponent dubleta lahko precej točno določimo maso druge komponente. To omogoča velika ločljivost sodobnih masnih spektrografov: $\delta M/M = 10^{-7}$ in manj. Ker je masni defekt relativno majhen, ne motijo toliko napake v skali, ki jih povzročajo vplivi raznih nehomogenosti v poljih spektrografa. Pri zelo točnih meritvah je treba upoštevati tudi te kot popravke.

Na zgoraj omenjeni metodi dubletov v masni spektrografiji je osnovana izbira $^{12}\text{C} = 12$ kot standarda v novi skali relativnih atomskih mas. Kisik tvori razmeroma malo ionov: $^{16}\text{O}_2^+$ in hidridi $^{16}\text{O}^1\text{H}$, $^{16}\text{O}^1\text{H}_2$, $^{16}\text{O}_2^1\text{H}$ in $^{16}\text{O}_2^1\text{H}_2$. Z njim je mogoče tvoriti zelo malo dubletov. Zato so že prej uporabljali kot nekakšen vmesni standard ^{12}C . Maso ^{12}C so določevali preko dubletov $^1\text{H}_2-^2\text{D}$, $^2\text{D}_1-^{12}\text{C}$, $^{12}\text{C}^1\text{H}_8-^{16}\text{O}$. Podobne težave so tudi z ostalimi predlaganimi skalami (He, F in druge). Pri ^{12}C so možnosti skoraj neomejene. Ogljik tvori ione C^{++} , C^{3+} , C^{4+} , ki jih direktno lahko primerjamo z $^6\text{Li}^+$, $^2\text{D}_3^+$, $^4\text{He}^+$ in $^2\text{D}_2^+$, $^3\text{He}^+$, $^1\text{H}_3^+$. Lahko je dobiti tudi ione molekul C_n^+ (skeletoni ogljikovodikov), kjer je n lahko 10 in tudi več. Poleg tega, če poznamo dovolj točno atomski masi ^1H in ^2D , imamo na razpolago ione ogljikovodikov $^{12}\text{C}_m^1\text{H}_n$ in $^{12}\text{C}_m^2\text{D}_n$. Z vsemi temi ioni lahko tvorimo dublete za masna števila od 3 do 210. Možne so npr. direktne primerjave s težkimi nuklidi: $^{12}\text{C}_{10}$ in ^{120}Sn , $^{12}\text{C}_{10}$ in ^{240}Pu itd. [1].

Za atomske mase naravnih elementov in izotopov v novi skali so že izdelane tabele [1, 5]. Kratek izvleček iz poslednjih tabel za stabilne izotope do mase 16 navajam tudi tukaj.

Janez Lesjak

Literatura:

1. V. A. Kravcov, Uspehi fiz. nauk, **78**, 65, 1962.
2. Kratkaja himičeskaja enciklopedija, Moskva 1962.
3. H. E. Duckworth: Mass spectroscopy. Cambridge 1958.
4. G. R. Rik: Mass-spektroskopija, Moskva 1953.
5. L. König, J. Mattauch, A. Wapstra, Nucl. Phys. **31**, 18, 1962.

NEKAJ O ŠOLAH NA POLJSKEM

Med svojim bivanjem v Poljski sem imel priliko seznaniti se s poukom matematike in fizike na splošnoizobraževalnih šolah druge stopnje, in sicer na gimnaziji in učiteljišču.

4-letni splošnoizobraževalni licej — to je naša gimnazija — je po svojem programu nadaljevanje osnovne šole. Dostop v 1. letnik imajo tisti učenci, ki so uspešno opravili sprejemni izpit iz poljskega jezika in matematike.

Po četrtem razredu opravljajo dijaki zrelostni izpit — maturo iz poljskega jezika, matematike, znanja poljske in tuje družbene ureditve ter po izbiri iz enega naslednjih predmetov: fizike, kemije, geografije, biologije ali tujega jezika.

Učni načrt v liceju ni diferenciran, vendar je sedaj ostra diskusija, ali naj ima reformirani licej dvojno smer — humanistično in realno — ali ne.

Predmetnik na že nekoliko reformiranem liceju ima v vsakem razredu po 34 ur, razen v prvem razredu, kjer je samo 31 ur pouka tedensko. Matematiki je dodeljenih v prvem razredu 5 ur, v ostalih treh razredih pa 4 ure. Fizika ima v vseh štirih razredih po tri ure tedensko, astronomija pa v četrtem razredu po eno uro tedensko.

Vsak licej je dolžan imeti poleg splošnih učilnic še naslednje predmetne učilnice: za fiziko, kemijo, biologijo in tehnično vzgojo. Kolikor šol sem pregledal, sem ugotovil, da imajo še več učilnic, kakor je predpisanih. V lanskem šolskem letu je bilo na 845 licejih: 830 delavnic ali učilnic za fiziko, 700 za kemijo, 714 za biologijo, 779 delavnic za tehnično vzgojo in 461 drugih delavnic. Lahko rečemo, da bo vsaka šola imela v kratkem predpisane štiri učilnice za laboratorijski pouk. Na tak praktični pouk polagajo zelo veliko. Ministrstvo za prosveto smatra, da morajo na vsaki osnovni šoli, kjer je najmanj 6 učiteljev, imeti vsaj tri delavnice ali kabinete, in sicer eno za fiziko, eno za biologijo in eno za tehnično vzgojo.

V vsakem liceju pa morajo imeti vsaj 4 delavnice — kabinete: za fiziko, kemijo, biologijo in tehnično vzgojo. To je minimum, ki si ga mora vsaka šola zagotoviti v doglednem času.

Da to ni samo na papirju, sem imel možnost prepričati se pri obisku šol, in še posebno v Varšavi, kjer sem obiskal licej št. 45 »R. Traugutta«.

V istem poslopju ima pouk dopoldne 14 razredov liceja, popoldne pa gostuje osnovna šola z 10 razredi. Ostale štiri proste učilnice so namenjene za izvenšolsko dejavnost mladine. Poleg tega pa ima zavod še 6 delavnic — kabinetov za praktični pouk. Vse to je na razpolago dijakom za njihov uspešni pouk in vzgojo v nadmilijskem mestu, ki je bilo med vojno 90 % porušeno in se še danes bori s stanovanjskim problemom. Iz tega je razvidno, da ravnateljstvo šole smatra kot zelo važen vzgojni faktor eksperimentalni pouk. O tem sem se alhko prepričal tudi potem, ko sem hospitaliral v razredu. Kadar imajo fiziko, kemijo, tehnično vzgojo ali tuje jezike, delijo razred na dva dela, da ima učitelj lažji pregled nad učenci. Posamezni razredi štejejo od 30 do 40 učencev. Učna obveznost profesorjev srednje šole je 21 ur tedensko za vse predmete, razen za tehnično vzgojo in telovadbo, ki je 23 ur. Kljub velikemu

pomanjkanju profesorjev za srednje šole za nekatere predmete pa je določeno maksimalno število nadur, in sicer 10 tedensko. Pod takimi pogoji je pouk naravoslovnih predmetov lahko temeljit.

Poljski prosvetni delavci so me seznanili še z enim poskusom, ki ga izvajajo na nekaterih šolah druge stopnje, to je s kabinetnim poukom. Obiskal sem en splošnoizobraževalni licej in en pedagoški licej (učiteljsišče), ki sta imela samo kabinetni pouk. Tu so razredi bili spremenjeni v kabinete. Na vratih ni pisalo: 1.a razred, 2.b razred itd. ampak: fizika I., fizika II., poljski jezik, geografija, kemija, matematika II itd. Vsak predmet ali vsak učitelj je imel svoj razred in dijaki so se selili vsako uro iz razreda v razred.

Dobre strani kabinetnega pouka so v tem, da se dajo vsi prostori dobro izkoristiti. Prej so imeli razredne učilnice in kabinete, in kolikor je bilo kabinetov, toliko sob je ostalo neizkoriščenih; ko so bili dijaki v kabinetu, je bila prazna učilnica in obratno. Druga dobra stran take organizacije pouka je ta, da so vsa učila dostopna tudi dijakom. Vsak učitelj ima svoj kabinet, zato tudi skrbi, da je dobro opremljen in funkcionalen. Imel sem vtis, kakor da učitelji tekmujejo med seboj glede ureditve kabinetov-učilnic.

Na obeh šolah, ki sem jih obiskal, so imeli za fiziko dva kabineta, enega za mehaniko in kaloriko, drugega za elektriko in optiko. V vsakem kabinetu je bilo po več primerkov istih učil, 8 do 10, tako da so dijaki lahko sami eksperimentirali. Vsi so torej delali isti eksperiment in pri vsakem učilu sta bila največ dva dijaka.

Slabe strani kabinetnega pouka pa so: dijaki nimajo lastnega prostora, zato je zrahljan razredni kolektiv; tekanje med eno in drugo uro od razreda do razreda, oziroma od kabineta do kabineta, da si priborijo boljše mesto; razredi se razlikujejo po številu dijakov, zato bi morali vsi kabineti imeti maksimalno kapaciteto.

Na šoli v Gorzowu, kjer imajo kabinetni pouk že tri leta, pravijo, da so s tem zadovoljni, vsi učitelji se strinjajo s tem načinom dela. To velja samo za višje razrede, torej za srednjo šolo, nikakor pa ni primerno za osnovno šolo.

Po tem, kar sem lahko videl na svojem 15-dnevnom potovanju po Poljski glede pouka naravoslovnih predmetov, sklepam, da pouk teh predmetov poteka v glavnem v kabinetu, kjer tudi dijaki eksperimentirajo, da razred ni številen, ker ga razdelijo na dva dela, in da profesorji niso preobremenjeni. Pod takimi pogoji mora biti pouk naravoslovnih predmetov uspešen.

Stanko Uršič

PLAČILO NAROČNINE

Tej številki so priložene položnice za plačilo naročnine. Prosimo cenjene naročnike, da na njih prečrtajo dosedanje številke našega bančnega računa in zapišejo novo: 600-14-608-34!

RAZPRODAJA STARIH LETNIKOV »OBZORNIKA« PO ZNIŽANI CENI

Na zalogi imamo večje število »Obzornikov za matematiko in fiziko« vseh letnikov razen števil 1/I (1. št. I. letnika), 4/II in 1/VI. Da ne bi časopis brez koristi ležal v skladišču, smo se odločili razprodati večji del zaloge po znatno znižani ceni, in sicer vse letnike od I—IX po ceni 120 din letnik ali 30 din številka.

Kdor želi izkoristiti to priliko, naj piše dopisnico na naslov: »Obzornik za matematiko in fiziko«, Ljubljana, poštni predal 227, z navedbo želenih letnikov.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin de la Societe mathematique de France, Paris 1962, T. 90, No. 3.

Bulletin of the Boris Kidrich Institut of Nuclear Sciences, Beograd 1962, Vol. 13,
No. 1, 2, 3.

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1962/63, št. 1-2.

Matematičko fizički list, Zagreb 1962/63, št. 2, 3.

Proteus, Ljubljana 1962/63, št. 3, 4, 5, 6, 7.

Publikacije elektrotehničkog fakulteta, Beograd 1963, No. 78-99.

Revista matematica cuyana, Buenos Aires 1955, 1, fasc. 1, 2, 3, 1956, 2, fasc. 1, 2.

Ukrainskij matematičeskij žurnal, Kijev 1962, T. XIV, No. 4.

Uspehi matematičeskikh nauk, Moskva 1962, T. XVII, Vyp. 5, 6, 1963, T. XVIII,
Vyp. 1.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod oznacbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-608-34.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.