



# **OBZORNIK**

## **ZA MATEMATIKO**

## **IN FIZIKO**

**LJUBLJANA**

**1 9 6 2**

**IX. št. 4**

## VSEBINA

### Članki

Stran

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Revolucija v matematiki (Marshall Stone — prev. F. Šušteršič) . . .                      | 145 |
| Osnovni pojmi abstraktne teorije avtomatov (J. Vrabec) . . . . .                         | 158 |
| Povezava teorije algoritmov s teorijo avtomatskih računalnikov<br>(M. Vencelj) . . . . . | 169 |
| Polprevodniški števec s površinsko zaporno plastjo (Z. Trontelj) . .                     | 179 |
| Dvoje različnih vrst nevtrinov (J. Strnad) . . . . .                                     | 186 |

### Domače vesti

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (F. Kvaternik) . . | 191 |
|------------------------------------------------------------------|-----|

## CONTENTS

### Articles

Page

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| The Revolution in Mathematics (Marshall Stone — translated by<br>F. Šušteršič) . . . . .                  | 145 |
| The Fundamental Principles of Abstract Theory of Automats<br>(J. Vrabec) . . . . .                        | 158 |
| The Connection of the Theory of Algorithms with the Theory of<br>Digital Computers (M. Vencelj) . . . . . | 169 |
| The Solid State Surface Barrier Counter (Z. Trontelj) . . . . .                                           | 179 |
| Two Kinds of Neutrinos (J. Strnad) . . . . .                                                              | 186 |

**OBZORNIK**  
**ZA**  
**MATEMATIKO**  
**IN**  
**FIZIKO**

**1962**

**LJUBLJANA**

**LETNIK IX**

Uredniški odbor:

Robert Blinc, Peter Gosar, France Križanič, Ivan Kuščer, Anton Moljk, Niko Prijatelj, Stane Uršič, Ivan Vidav, Franc Kvaternik (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov in fizikov Ljudske republike Slovenije  
Natisnila tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani



## VSEBINA

### Članki

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Racionalna in iracionalna števila (I. Vidav) . . . . .                                | 1   |
| Elementi teorije iger (R. Jamnik) . . . . .                                           | 7   |
| O ločni dolžini gladkih krivulj in o površini gladkih ploskev (F. Križanič) . . . . . | 19  |
| Ciklotronska resonanca (M. Pintar) . . . . .                                          | 36  |
| Ergodijski problem v klasični statistični mehaniki (Ivan Kuščer) . . . . .            | 49  |
| Teorija supraprevodnosti (Leon N. Cooper — prev. S. Oblak) . . . . .                  | 61  |
| O aksiomatični utemeljitvi verjetnostnega računa (R. Jamnik) . . . . .                | 97  |
| O poslednjem Fermatovem problemu (A. Suhadolc) . . . . .                              | 109 |
| Termonuklearna energija (R. F. Post — prev. M. Stanovnik) . . . . .                   | 114 |
| Paradoks ur v teoriji relativnosti (J. Strnad) . . . . .                              | 128 |
| Revolucija v matematiki (Marshall Stone — prev. F. Šušteršič) . . . . .               | 145 |
| Osnovni pojmi abstraktne teorije avtomatov (J. Vrabec) . . . . .                      | 158 |
| Povezava teorije algoritmov s teorijo avtomatskih računalnikov (M. Vencelj) . . . . . | 169 |
| Polprevodniški števec s površinsko zaporno plastjo (L. Trontelj) . . . . .            | 179 |
| Dvoje različnih vrst nevtrinov (J. Strnad) . . . . .                                  | 186 |

### Novice

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| O nekem Erdősovem izreku (Z. Bohte) . . . . .                              | 76  |
| Preprost primer za zvezno funkcijo, ki ni odredljiva (J. Vrabec) . . . . . | 79  |
| Mehanske lastnosti ledu (T. Skubic) . . . . .                              | 82  |
| Merjenje temperature v ionosferi (I. Grabec) . . . . .                     | 85  |
| Četrti kongres sovjetskih matematikov (F. Križanič) . . . . .              | 87  |
| Sodilo deljivosti in njegova usoda (F. Križanič) . . . . .                 | 134 |

### Domače vesti

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Drugi seminar izbranih poglavij moderne fizike (S. Uršič) . . . . .    | 47  |
| Z Einsteinom v Štatenbergu (F. Šušteršič) . . . . .                    | 88  |
| Višji predavatelj Albin Žabkar (A. Kuhelj) . . . . .                   | 136 |
| Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (F. Kvaternik) . . . . . | 191 |

## **Šola**

|                                                                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Nekaj misli o nadaljnji izobrazbi profesorjev fizike (L. Čermelj) . . . . .                                                 | 90  |
| Ciklus predavanj iz eksperimentalne fizike (F. Ahlin) . . . . .                                                             | 91  |
| Zbirka nalog (S. Uršič) . . . . .                                                                                           | 92  |
| Tekmovanje (S. Uršič) . . . . .                                                                                             | 93  |
| Tretja stopnja študija fizike pri nas (B. Povh) . . . . .                                                                   | 95  |
| Priporočilo odbora Zveznega izvršnega sveta za prosveto in kulturo o<br>ukrepih za napredek matematične izobrazbe . . . . . | 137 |

## **Dopisi**

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ali atomska bomba lahko zaneti verižno jedrsko reakcijo v morju?<br>(F. C.-B. Povh) . . . . . | 140 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| <b>Odgovor</b> . . . . . | 141 |
|--------------------------|-----|

|                          |         |
|--------------------------|---------|
| <b>Utrinki</b> . . . . . | 89, 144 |
|--------------------------|---------|

|                              |    |
|------------------------------|----|
| <b>Nove knjige</b> . . . . . | 48 |
|------------------------------|----|

## REVOLUCIJA V MATEMATIKI

MARSHALL STONE — prevedel F. Šušteršič

Človeštvo preživlja hudo krizo duha, ki povsod po svetu sega že globoko v vzgojo. Nastala je vzporedno z razvojem znanosti, ko je človek pri svojem mišljenju in delu ubral znanstveno pot. Ta napetost ne bo popustila vse dotlej, dokler znanosti ne bomo jemali kot bistveno važnega in tvornega sestavnega dela naše izobrazbe, ne samo v materialnem oziru, temveč tudi na področju intelektualnega življenja in vzgoje. Ta kriza se je tako naglo razvila in s takimi posledicami, da moramo v njej videti že značilne znake premika v človeški kulturi nasploh. Živa domišljija ne more naslikati spremenjene družbe, ki bo izšla iz teh sprememb, in le medlo si moremo predstavljati, kako temeljito se bo že v prihodnjih generacijah izpremenilo življenje. Toda že danes lahko vidimo, kako močno razvijajoča se znanost — v misli in dejanju vpliva na človekov odnos do sveta. Njegovo razmerje do naravnega okolja, do časa in prostora, do sebe samega in družbe, v kateri živi, pa tudi kraljestvo duha — vse gledamo in obravnavamo danes pod novimi vidiki, ker smo v znanosti odkrili novo sredstvo za spoznavanje in razumevanje pogojev našega lastnega življenja. Že dosedanje izpremembe, ki jih je rodila razvijajoča se znanost, nakazujejo razvojno pot vzgojnega sistema. Ko se poraja nov svet, živo čutimo, da smo dolžni napeti vse sile, da spravimo izobraževanje na sodobno raven in ga po najboljših močeh usmerimo v bližnjo bodočnost, ki se bo povsem razlikovala od sedanjosti. Življenje sámo terja od nas, da temeljito premislimo dosedanje vzgojne zasnove, da iščemo resnico o nas samih in o svetu, ki v njem živimo, ter da skušamo to resnico uveljaviti v vsebini in načinu našega pouka.

### RAZVOJ MATEMATIKE V DVAJSETEM STOLETJU

Ko kritično motrimo ideje, na katerih sloni naša dosedanja vzgojna praksa, moramo nujno pretehtati revolucijo, ki jo je doživela matematika v našem času, ter oceniti vse njene silne in nove možnosti za napredek na vseh tistih področjih, kjer igra glavno vlogo razum in znanstveno mišljenje. Matematikom danes ni treba poudarjati, kako odlično mesto je med humanističnimi predmeti zavzemala pri vzgoji matematika skoz 2500 let, pač pa je treba jasno in prepričljivo pokazati na silen razvoj, ki ga je doživela matematika v 20. stoletju, opozcriti je treba na njeno tesno povezavo z drugimi znanstvenimi vejami, in razložiti vzroke, ki nas dobesedno silijo, da bi modernizirali pouk matematike in ji priborili pri vzgoji in izobrazbi važnejše mesto. Vsakdo, ki se zanima za vzgojo, mora danes računati s tem, da se je znatno izpremenila narava matematike kot take, da se je močno razširil njen okvir in da smo v znanstvenem in tehničnem napredku z dneva v dan bolj odvisni od nje. In zares, vsak dan postaja bolj jasno, da moramo matematiko smatrati za vogelni kamen vsega znanstvenega mišljenja, zato pa tudi vse, tesno povezane in tehnično napredne družbe, ki jo ustvarjamo. Lahko pričakujemo, da se bodo že v bližnji bodočnosti zlele —

znanost, logika in matematika, kar se je npr. že zgodilo v matematični fiziki. Verjetno se bo zgodilo tako tudi na drugih znanstvenih področjih, ko se bomo vanje bolj poglobili in dojeli njihove odnose: Med številnimi spremembami, ki jih je po letu 1900 doživelo naše pojmovanje matematike, oziroma naš pogled nanjo — je pravicata revolucijo povzročilo odkritje, da je matematika popolnoma neodvisna od fizičnega sveta. Bolj natančno: matematika je danes — brez vsakih vezi s fizičnim svetom, če ne upoštevamo dejstva, da se prav naše misli porajajo v možganih. Brez pretiravanja lahko rečemo, da to ugotovitev lahko primerjamo z največjimi odkritji v zgodovini človeštva, kot je bilo npr. spoznanje starih Grkov, da praktična geometrijska dejstva spadajo v logičen okvir in da jih je mogoče povezati tako, da celota tvori logično zgradbo, naslanjajočo se na omejeno število aksiomov. S tem globokim in modernim pogledom v bistvo matematike so v neposredni zvezi še druga odkritja 20. stoletja. Tako je bilo povsem mogoče določiti vezi med matematiko in logiko in ugotoviti vsebino matematike v tako širokih in preprostih izrazih, da nam skoraj nudijo dokončen odgovor na vprašanje »Kaj je matematika«.

Tako je bilo mogoče spoznati, da so posamezna področja matematike povezana v izpopolnjeno celoto, in uvrstiti vezi, ki jih vežejo v celotni zgradbi. Tako je bilo mogoče povzpeti se na novo gledišče, s katerega motrimo silen napredek v matematiki zadnjih 60 let kot uvod v še večje uspehe v bodočnosti. Če primerjamo današnjo matematiko z ono ob koncu 19. stoletja, se moramo čuditi, s koliko naglico je matematična znanost rasla v širino in globino, hkrati pa moramo ugotoviti, da je ves ta razvoj spremljal močan poudarek na abstraktnosti in prizadevanju, da bi vse matematične pojme čim bolj dojeli in razširili. Vidimo tudi, da je ta nova usmeritev, ki jo je omogočila šele ločitev matematike od neposredne uporabnosti, postala pravi vir njene življenjske sile in rasti v sedanjem stoletju. Nenehno spoznavamo, da moramo to pot v abstraktnost nujno nadaljevati, podprti z uspehi, ki jo potrjujejo. Ko so matematiki ubirali to pot in svojo pozornost posvečali bolj in bolj poglobljanju in preučevanju abstraktnih pojmov, so vedno bolj spoznavali nasprotje pogledov na teoretično zgradbo matematike in njeno uporabnost, ki se često zdi neizmerno važna in je zato največja skrb učiteljev matematike. Globlje razumevanje in oceno tega nasprotja so nedavno omogočile nekatere zanimive študije v moderni logiki, po katerih jo je mogoče zgraditi čisto mehanično z uporabo matematičnih simbolov. Jasno pa je, da ta nov pogled in napredek, ki pomenita pravo revolucijo v matematiki, postavljata učitelja pred precej težke probleme. Že samo vključiti v matematični pouk bistvene elemente sodobne matematike, je res težka naloga, toda, da jo prikažemo kot nekaj abstraktnega, kar je postala, in vskladimo njena navidezna nasprotja, pomeni — zadeti na še hujše težave, ko skušamo pouk matematike spraviti na tako raven, ki jo terja naš čas. Zato moramo malo podrobneje pretehtati nekatere faktorje, ki smo se jih v teh uvodnih opombah zgolj dotaknili.

## MATEMATIKA — ABSTRAKTNÁ ZNANOST

Filozof Bertrand Russel je abstraktno naravo matematike označil takole: »Matematika je nekaj, v čemer ne vemo, o čem pravzaprav govorimo in, ali je to res, kar govorimo.« S tem trdi, da je matematika povsem abstraktna in da je pojem matematične resnice — čisto formalen. Ta Russelov izrek po eni strani podčrtava neodvisnost matematike od sveta, ki ga zaznavamo, po drugi strani pa ne definira vsebine matematike. Sodobni matematik bi rajši imel pozitivno označbo svojega predmeta kot študijo abstraktnih sistemov nasploh, ki vsak zase

predstavlja zgradbo iz posebnih abstraktnih elementov, zgrajeno sicer iz poljubnih, toda med seboj neprotislovnih odnosov. S preučevanjem posameznih matematičnih sistemov ne namerava le preudariti bistvenih lastnosti posameznih sistemov, temveč tudi primerjati strukture različnih sistemov. Rad bi pokazal, da niti ti sistemi niti sredstva, ki nam jih daje logika za študij njihove zgradbe, nimajo nikakršnih neposrednih niti nujnih vezi s fizičnim svetom. Hkrati skuša dojeti, da taki matematični sistemi morejo često koristiti kot modeli posameznih delov realnosti, tvoreč osnovo za teoretično matematično analizo odnosov realnega sveta. Dognati bi hotel, da je ta slučajna in v neki meri samovoljna povezanost med delom realnosti in nekim matematičnim sistemom že večkrat vodila do abstraktnega obrisa slednjega. Seveda, ta naš pogled na matematiko, ki se tako temeljito razlikuje od onega starih Grkov in sploh vseh matematikov prav do devetnajstega stoletja, se ni izoblikoval na mah, ampak se je razvijal zelo dolgo, skoz velika razdobja. Odkritje, po katerem je naš sodobni pogled na matematiko postal povsem abstrakten, strogo logičen in docela neodvisen, je odkritje neevklidne ravninske geometrije po Bolyaju, Gaussu in Lobačevskem v začetku devetnajstega stoletja. Gauss si je živo prizadeval, da bi z eksperimentom dognal, ali se prostorska geometrija prilega bolj Evklidovemu ali Lobačevskijevemu modelu, in sklepal, da tega vprašanja ne more rešiti, ne da bi izvršil mnogo bolj preciznih merjenj, kakršna je zmogel. Tako sta oba bistveno pravilna, medseboj pa neskladna matematična sistema hkrati bila veljavna za opis fizikalne geometrije. Ni si bilo mogoče predstavljati, da bi kateri koli od njiju utegnil imeti kako nujno vez z realnim svetom — na škodo drugemu. Zato je prav tako bilo nemogoče — zlasti v tistih časih — izbirati med njima na podlagi fizičnih razlogov. Nadaljnji razvoj še drugih abstraktnih geometrij je pospešil izoblikovanje takega modernega pogleda nanjo, kakršnega tukaj opisujemo. Naslednji impulz v to smer je prišel iz algebre, kjer je polagoma postalo jasno, da matematika ne more računati z enim samim, temveč z neštetimi številskimi sistemi, ki sicer imajo mnogo skupnih potez, hkrati pa tudi individualnih posebnosti. Tretji faktor, ki je pomogel k temu odkritju, je razvoj novih prijemov in zasnov v logiki v drugi polovici 19. stoletja in na pragu 20. stoletja, s čimer je postalo mogoče pojasniti razmerje med matematiko in logiko in opravičiti sodobno opredelitev matematike, kakršno skušamo podati tu.

## MATEMATIKA IN LOGIKA

Dejansko smo prišli tako daleč, da moremo matematiko istovetiti z logiko. Glavna dejstva, na podlagi katerih je bila ta identifikacija mogoča, sta podala Russel in Whitehead v svoji sloviti razpravi »Principia mathematica«, objavljeni leta 1911. To znamenito delo lahko smatramo kot vrhunec cele vrste briljantnih študijskih naporov 19. stoletja, ki so iskali zveze med matematiko in logiko. Še posebej kaže opozoriti na obravnavo logike v simbolih (Boole, Schroeder in Peano), na teorijo množic in transfinitnih števil (Cantor) in na logično analizo sistemov realnih števil (Dedekind in Frege). Kakor so morali Grki razviti logiko, da so mogli raziskati vezi, ki spajajo z izkušnjami pridobljena dejstva v geometriji, tako so morali tudi matematiki 19. stoletja — iti še globlje, da bi mogli obravnavati matematiko dovolj pravilno in natančno. Tako so morali v prejšnji logiki napraviti več izboljšav in razširjav ter dojeti smisel in naravo funkcije. Jasen dokaz velikih naporov pri oblikovanju tega pojma so različna imena zanjo, imena, ki nakazujejo več značilnih smeri v sodobni matematiki. Morda z majhno površnostjo lahko rečemo, da je samo analizo tega važnega pojma bilo treba

dodati logiki Aristotela in sholastikov, da bi jo mogli prilagoditi vprašanjem sodobne matematike. Russel in Whitehead sta prva pokazala, da je pod temi pogoji mogoče celotno matematiko izraziti z izrazi formalne logike. Tako moremo matematiko smatrati kot del logike. Leibnitzov sen, da bi logiko izrazili v obliki simboličnega računstva so postopoma uresničili Boole, Whitehead, Peano, Russel in drugi. Potemtakem pa moremo in moramo logiko smatrati kot posebno poglavje algebre in s tem matematike nasploh. Zlivanje matematike in logike potrjuje sklep, da je matematika povsem abstraktna disciplina, in vzbuja zanimivo vprašanje, v koliki meri jo moremo izpopolnjevati z uporabo sistemov posebnih simbolov in v koliko se mora naslanjati na neposredne ali samo intuitivne poglede na njeno notranjo zgradbo. Matematiko lahko primerjamo z igro — ali bolje rečeno — z množico iger, v katerih so figure in poteze nepomembne, pač pa je važno dojeti in izkoristiti vse možnosti igre, ki jo dopuščajo njena pravila. Če pa gledamo matematiko v tej luči, se nam nujno vsiljuje vprašanje, ali je potek ene ali druge izmed teh iger mogoče dognati tako daleč, da ne dopušča več nobene domiselnosti niti intuicije. Če naj matematiko motrimo z obeh vidikov, morajo biti naša razmišljanja ostrejša, hkrati pa zadobi istovetnost med matematiko in logiko še večji pomen.

## ENOTNOST MATEMATIKE

Dejstvo, da je matematika študij sistemov, ki vsebujejo določene abstraktne elemente in določene zveze med njimi, jasno priča o enotnosti matematike. Zadnji uspehi najnovejših raziskav so odkrili notranje vezi v zgradbi posameznih področij matematike. V zadnjih 50 ali 60 letih je bilo mnogo prizadevanj, da bi se vskladili in vzporedili matematični sistemi, ki jih obravnavamo v algebri, teoriji števil, geometriji in analizi. Izid teh prizadevanj je bil presenetljiv v dveh smereh: Dejstvo, da moremo nekatere, nam dobro poznane matematične sisteme, analizirati, nas je privedlo do spoznanja, da vse izhaja iz treh enostavnih sistemov — iz algebre, urejenih sistemov in topoloških prostorov. Hkrati pa smo odkrili številne postopke, s katerimi se je posrečilo mnoge od znanih sistemov združiti v nove in te globlje dojeti. Res, marsikateri nam dobro poznani sistem moremo dobro označiti, če združimo enostavne algebrajske ali topološke lastnosti. Zato pa tista področja matematike, ki jih večji del poznamo, leže tesno zaprta med določenimi znanimi mejniki, medtem ko so vsa tista področja, ki jih še nismo raziskali, najbrž precej drugačna od onih, na katerih se počutimo doma. Čeprav ne moremo zanesljivo sklepati, da bodo bodoče matematične raziskave šle po poti, ki jo ubira sedanja matematika, vendar lahko pričakujemo, da bo tudi nova matematika, pa naj bo še toliko različna od sedanje, vendarle vsebovana v definiciji, ki smo jo tu postavili. Dejansko je ta definicija tako široka in dopušča toliko stopnjo abstrakcije, da mejá, ki jih postavlja, skoraj ne bo mogoče potiskati nazaj. Zato pa upravičeno pričakujemo, da bodo morebitne izpremembe v pojmovanju matematike nujno odvisne od razvoja v logiki, razvoja, ki bo prinesel nove prijeme in nove poglede, ki se bodo porodili iz obilnih izkušenj bodočih matematikov.

## ABSTRAKTNOST IN UPORABA

Res čudno se zdi, da v trenutku, ko je bila matematika potisnjena v popolno abstraktnost, njena uporabnost narašča v izredni meri. Nedvomno je ena izmed najbolj vzpodbudnih potez v intelektualnem življenju 20. stoletja pro-

diranje matematike v vsa znanstvena področja, ne samo prirodoslovna, ampak tudi tista, ki so posvečena življenju človeka samega. S tem pa dobivamo oblast nad stanjem, ki se je doslej izmikalo teoretični obravnavi, obenem tudi dobivamo prve in jasnejše pojme, kako daleč in kako globoko utegne poseči matematika. Matematika nam odklepa — nov svet misli in razumevanja. Četudi se zdi zveza med obema, na videz nasprotnima smerema v razvoju matematike, presenetljiva, moremo prav v njej gledati resnico o matematiki kot taki. Matematika se je namreč osvobodila vseh spon, ki so jo morda kdaj v preteklosti vezale, in je postala izredno elastično in močno sredstvo, s katerim si moremo utirati pot na tista področja, ki so nam danes še neznana. Primerov za to trditvev je že nešteto in jih bo v drugi polovici našega stoletja vedno več. Omenimo le moderen razvoj komplicirane matematične teorije v genetiki, novo teorijo iger s posebno uporabo v ekonomiki in v številnih drugih področjih, dalje najnovejšo matematično teorijo prometa itd. Mnoga težka področja v teoretični fiziki postanejo s pomočjo matematike preprostejša in mnogo manj teoretična. Zelo verjetno je, da se bo matematična tehnika vedno bolj razvijala, z njo pa se bo širila tudi njena uporabnost. Po pravici lahko prerokujemo, da bo prav matematika doprinesla k razvoju tistih znanstvenih področij, v katerih trenutno nimamo drugega kot nekoliko nedognanih formulacij in prav malo matematičnih načel. Ko skušamo podati verno sliko tega, kar se danes odigrava v matematiki, se pač ne moremo omejiti na splošnosti, temveč se moramo ozreti tudi na izreden tehnični napredek, ki smo ga dosegli v 20. stoletju. V nobenem zgodovinskem obdobju ne moremo ugotoviti tako plodne matematične dejavnosti kot v prvi polovici našega stoletja. Ta dejavnost pa nenehno raste in se še pogloblja. Če sodimo po številu objavljenih del, lahko ugotovimo, da se je število aktivnih matematikov v zadnjih treh letih — podvojilo. Pa tudi če je ta preprosta statistika premalo prepričljiva, je še mnogo močnih dokazov o silni rasti matematične vede. Morda o tem najbolj pričajo številne nove ideje in tehnični prijemi, ki jih uvajamo v matematiko. Četudi je težko storiti kaj več kot samo nakazati ta silni napredek, ki smo mu priča, storimo to vendarle, čeprav z neizbežnim občutkom slabosti.

### SODOBNA ALGEBRA

Poglejmo najprej v algebro! S pojmom algebre ali algebrskega sistema dandanes pojmujeemo matematičen sistem, ki vsebuje določene matematične abstraktne elemente in določene specifične operacije, ki se dajo v njem uporabljati. V bistvu moremo operacijo istovetiti s funkcionalno odvisnostjo. Ta je končna, če je neki odnos med končnim številom elementov. Zato različni številski sistemi, ki jih obravnavamo v elementarni algebri, predstavljajo algebro z dvema osnovnima operacijama — adicijo in multiplikacijo. Naše moderno pojmovanje algebre, ki je zraslo iz preučevanja teh posebnih sistemov, z uporabo abstrakcije in posploševanja, ki je zdaj doseglo svoje meje: če se namreč ukvarjamo z odnosi, kjer ni število operacij več omejeno, se znajdemo ob matematičnih sistemih v najsplošnejšem pomenu besede in izgubimo zvezo z vodilnimi črtami, ki so nam jih dali primeri, s katerimi — smo začeli. Silen razvoj v študiju algebraskih sistemov nas sili, da moramo temeljito pretehtati in preusmeriti podajanje znanja iz algebre ravno na osnovni stopnji pouka. Odveč je trditi, da so sodobni kurzi iz elementarne algebre povsem drugačni od tistih izpred 25 let! Prav tako prodorni in plodonosni so bili stiki algebre z drugimi matematičnimi področji. Danes nam je prav lahko razumeti, zakaj igra algebra tako važno vlogo v drugih vejah matematike, zgodovina pa nas uči, da so matematiki to kaj



težko dojemali in tega niso znali koristno uporabiti. Vsako matematično področje obravnava običajno predvsem objekte, ki ga zanimajo, in ustrezne operacije. Vsi matematični sistemi, ki jih preučujemo, so že po svoji naravi vezani na neki algebrski sistem. Če take povezave smotno izberemo in analiziramo v luči splošnih algebrskih principov, lahko pridobimo važne poglede in koristne napotke. Tako so se npr. že stari Grki čutili primorane, preučevati lastnosti določenih operacij, in že bežen pogled v Evklidove »Elemente« nam priča, da so se močno trudili, da bi nekatere algebrske probleme rešili na geometričen način. Ker pa so jim manjkala najpreprostejša algebrska sredstva in ker niso še bili kos potrebnim abstrakcijam, so nujno zadeli na težave in zapletljaje, ki so izginili šele v sedemnajstem stoletju, ko je Descartes dal algebi pravo vlogo. Obseg, do katerega algebra lahko pomore matematični analizi, smo zapazili šele v najnovejšem času, tj. v našem stoletju. Mnogi težki problemi, ki jih morimo zdaj z gledišča algebre, so postali jasnejši in — lažji. Prav tako je formalna logika — kakor smo že prej enkrat omenili — postala del algebre, ker pač uporablja operacije s simboli. Še važnejšo vlogo kot v logiki igra dandanes algebra v geometriji in analizi. Danes je čisto nemogoče, da bi matematik obvladal geometrijo ali analizo brez temeljitega poznavanja osnov algebre, posebno teorije grup in linearne algebre. Geometrija se tako močno naslanja na ti dve področji, da ju ni mogoče ločiti od nje. Še bolj je pa to vidno na področju topologije, kjer smo priča krasnega napredka. Neizbežno je povezava teh dveh matematičnih področij morala učinkovati tudi na algebro samo. Postopki, ki so se izkazali kot koristni v kombinatorni topologiji, so prešli tudi v algebro in tako je nastala nova disciplina z imenom — homološka algebra.

Nujno je torej, da se bo naraščajoča važnost algebre v drugih matematičnih področjih zrcalila kmalu povsod, kjer se uporablja matematika. Stiki med algebro in uporabno matematiko pa so vedno bolj neposredni, kajti često je treba problem uporabne matematike izraziti — izhajajoč iz algebrskih pojmov. (Npr. v teoriji polja, v linearnem programiranju, v teoriji iger itd.) Potemtakem mora danes ne samo matematik, ki se ukvarja s teoretično matematiko, poznati čvrste temelje algebre, zlasti teorijo grup in linearno algebro, temveč prav tako matematik, ki se ukvarja z uporabno matematiko.

Posebna veja matematike, ki je tako čvrsto povezana z algebro, da jo moramo smatrati kot njen sestavni del, je teorija števil. Študij seštevanja, množenja in drugih algebrskih lastnosti je bil vedno zelo privlačen. Mnogo problemov iz teorije števil moremo zelo preprosto izraziti in razumeti brez posebne matematične priprave. Med njimi je več nerešenih problemov iz celotne matematike. Taki problemi ne privlačijo le resnih matematikov, temveč tudi nestrokovnjake in ljudi, ki hlastajo za zanimivostmi. Kdo ne bi rad rešil Goldbachovega problema, da je vsako naravno število vsota končnega števila praštevil? Problemi iz teorije števil pa niso ostali omejeni zgolj na naravna števila, ampak so vodili do posplošitev in analogij v drugih algebrskih sistemih. To dejstvo je vodilo do mnogih novih algebrskih pojmov in smeri. Prevedba nekaterih problemov iz teorije števil na probleme analize je to v nemajhni meri poglobila. Uspehi analitične metode, ki sicer v nekaterih zanimivih in težkih problemih ni rodila popolnega uspeha, so v zadnjih letih sprožili mnogo pobud k iskanju in odkrivanju novih prijemov. Mnogo pridobitev, kot npr. elementarni dokaz tako imenovanega problema praštevil, se je posrečilo v zadnjih desetletjih. Teorija števil sicer ni povsem nezanimiva za uporabno matematiko, vendar ostaja domena teoretične matematike. Če nekatere analitične



probleme, kakor tudi probleme iz uporabne algebre združimo s teorijo števil, seveda dosežemo velike koristi, toda zato je potreben temeljit študij teorije števil. Po drugi strani pa, če v matematični program vključimo elementarni kurz teorije števil — bodisi iz tehničnih bodisi iz čisto izobrazbenih razlogov, nikakor nismo storili nič napačnega!

## RAZVOJNA POT GEOMETRIJE

V naši bežni razpravi o algebri smo že omenili, kako globoko so v geometrijo prodrli algebraski pojmi in metode. Nekatera poglavja iz geometrije se sploh povsem naslanjajo na algebro. Tako se je npr. študij geometrijskih mest, definiranih z algebraskimi enačbami, sprva naslanjal izključno na sistem realnih in kompleksnih števil, zdaj pa se, očiščen vseh analitičnih tendenc, opira zgolj na algebrajske metode, ki se prilegajo splošnim algebraskim sistemom kot obema klasičnima sistemoma. Zato pa je algebrajska geometrija dobesedno del algebre. Podobno se kombinatorna topologija močno prilagaja algebraski obravnavi in je zato nedavno skoraj utionila v algebri, pri tem pa je — kakor že rečeno — učinkovala tudi ona nanjo. Dejstvo, da se geometrija ukvarja z lastnostmi, ki so često kaj malo pripravne za algebrasko obravnavo, je obvarovalo to staro vejo matematike, da je ni popolnoma nadvladala sodobna algebra. Tako mnogo geometrijskih poglavij sploh ni oplazila algebrajska tehnika. Ker pa imajo najvažnejši problemi na teh geometrijskih področjih često analitičen videz, se nagibljejo nujno k — analizi. To tendenco kažeta — tako diferencialna geometrija kot splošna topologija. V diferencialni geometriji so npr. vezi s klasično analizo silno tesne in večina njenih problemov vodi neposredno k teoriji diferencialnih enačb. Geometrijo so dolgo in nasilno vleкли v dve, navidez nasprotni, smeri in se je včasih že zdelo, da jo bodo raztrgali na dvoje. V novejšem času pa je poglobljeni študij osnov diferencialne geometrije pripeljal do zopetne združitve algebrskega in analitičnega vidika, kar je bilo tem lažje, ker so začeli vlogo algebre in topologije v analizi vedno bolj upoštevati in ceniti. Zadnje čase so matematiki tipali za ustrezno potjo do združitve in po mnogih znakih sodeč — je to prizadevanje vendarle uspelo. Zdaj je upanje na lep in uspešen razvoj geometrije povsem upravičeno in realno. Ta okoliščina sama pa odpira hudi problem v matematičnem pouku, kaj namreč vse naj storimo, da bodo bodoči matematiki ta napredek v tako obetajočo smer najprej sami dobro dojemli in ga nato pojasnjevali drugim. Tega pa — žal — še do danes ne vemo...

## MATEMATIČNA ANALIZA

Ker ima matematična analiza, kakor tudi geometrija, opraviti s primeri, kjer imajo glavno vlogo zvezne spremembe in mejni procesi, se je tega abstraktnega problema lotila od dveh strani. Tako se je pojavil pojem topološkega prostora kot matematičnega sistema, sestojčega iz abstraktnih elementov, imenovanih — točke. Zgodovinsko je vpeljava tega pojma bila povezana z variacijskim računom, pa ima zato bolj analitično kot geometrično ozadje. Nadaljnji razvoj splošne topologije — tj. teorije topoloških prostorov, ter funkcionalne ali abstraktne analize predstavlja značilno in važno pridobitev 20. stoletja. To odkritje je prineslo mnogo jasnosti — tako v obe geometriji, kakor tudi v analizo, vendar danes splošno topologijo smatramo rajši kot del geometrije kakor analize, ker imajo njeni glavni problemi znatno večji pomen v geometriji. Matematični sistemi, ki jih srečujemo, so povezali algebrajske in topološke last-

nosti tako, da jih ne moremo več obravnavati samo v okviru splošne topologije. Dejansko bi bilo mogoče definirati moderno abstraktno analizo kot študij topološke algebre. Velik del klasične analize je pred kratkim prešel v tesno zvezo s teorijo topološke algebre in mnogo klasičnih problemov je moglo biti tako osvetljenih v novi luči in približanih resitvi. Tako je študij diferencialnih enačb bil formuliran z izrazi topoloških linearnih prostorov (ali vektorske algebre), harmonična analiza pa je bila vpletena v teorijo komutativnih topoloških grup. Marsikateri sedanji korak naprej v teoriji parcialnih diferencialnih enačb je napravljen z uporabo metod, ki jih daje teorija topoloških linearnih prostorov. Po drugi strani pa se je izkazalo kot mogoče, da nekatere topološke algebre opišemo z izrazi klasične analize. Najvidnejši tak uspeh je bila nedvomno rešitev petega Hilbertovega problema, da se dajo operacije topološke grupe izraziti s pojmi analitičnih funkcij. Pa čeprav je moderna matematika močno vplivala s svojimi abstraktnimi nagnjenji na analizo, je ta vendarle ohranila svojo življenjsko važnost v različnih posebnih problemih, posebnih funkcijah in posebnih funkcionalnih enačbah, zlasti takih, ki se nanašajo na kako uporabo. Zato pa moramo temu matematičnemu področju posvečati posebno skrb, s tem da mu dajemo dolžni poudarek tako v tradicionalnem kot modernem pogledu.

## UPORABNA MATEMATIKA

Vzporedno z uporabnostjo analize je vznikla potreba, da bi se čim bolj uveljavilo uporabno računstvo, brez katerega bi bilo nemogoče preiti od teorije k praksi. V tej potrebi po močnih in uspešnih računskih pomagalih je bil storjen velik korak naprej z odkritjem in izpopolnitvijo izredno hitrih, zmogljivih in splošno uporabnih strojev. Ti so prinesli v praktično računstvo pravicato revolucijo. Izračune, ki bi jim še pred nekaj leti ne bili kos, moremo opraviti zdaj v nekaj tednih ali dneh, če že ne celo v — nekaj urah. Vse praktične težave in omejitve pri dosedanjih računskih strojih pa bodo počasi in zanesljivo odpadle, ko bomo izpopolnili elektronske in druge fizikalno-tehnične stroje. Z uvedbo teh silnih pomagal pa matematikom ne bo več treba iskati takih rešitev, ki jih je mogoče ugnati s preprostim računom ali s skromnim računskim strojem, njih naloga bo le: poiskati rešitve z bliskovitim elektronskim računalnikom. Že se razvija v matematiki nova in posebna veja, ki teoretično in praktično pripravlja programe za moderne računalnike. Ta zahteva poznavanje praktične računske tehnike in njenih logičnih vezi, saj je očitno v tesni zvezi s formalno logiko. Celoten razvoj metod pri uporabi sodobnih računskih strojev v praktičnem računstvu sta omogočila dva važna napredka — Russelovo in Whiteheadovo odkritje, da je mogoče matematiko spraviti v kalup formalne logike, in iznajdba vakuumске cevi. Tesne vezi med praktično matematiko in logiko nikakor niso slučajne, pa bodo s časom še tesnejše in globlje. Izredna zmogljivost sedanjih računskih strojev ne omogoča le matematičnih in logičnih analiz, kakršnih še pred nekaj leti ne bi tvegali nihče, temveč nas tudi živo opozarja na nasprotje med računsko prakso in miselnim dožemanjem. Če se vprašujemo, koliko zmorejo računski stroji, se moramo vprašati, ali je mogoče napovedati, koliko zmorejo naši možgani, in — ali so tudi naši možgani — stroj. Poraja se še novo vprašanje, ali je mogoče, vso matematiko in logiko vskladiti z nekim programom ustreznih simbolov in njih uporabe. Najnovejši študij logike nam pravi, da je treba na to vprašanje odgovoriti — negativno. Ugotoviti je le treba, kaj je mogoče doseči s čisto mehaničnimi postopki. Imamo že stroje, ki lahko zastavljajo in dokazujejo preproste matematične teoreme in

takorekoč igrajo vlogo človekovega nasprotnika v preprosti igri, nadzornika, ki ga uči, kako naj bi se iz izkušenj izogibal starim napakam. Ni torej čudno, čeprav presenetljivo, da moderen računski stroj pomaga celo sociologu raziskovati človeške lastnosti, primerjajoč reakcije posameznikov z drugimi — v skladu z domnevnimi principi, ki jih je treba preizkusiti. Kakor pri mnogih drugih uporabah računskih strojev je tudi tukaj bistveno važna njihova izredna sposobnost, da morejo v najkrajšem času opraviti neverjetno mnogo računskih operacij, kajti samo tako je mogoče raziskati izpreminjanje velikega števila spremenljivk in parametrov. Prav to dejstvo opravičuje uporabo matematičnih računalnikov zlasti v tistih problemih, v katerih nastopa preveč spremenljivk in parametrov, da bi jih mogli reševati z običajnimi formulami, ki pa spet niso veliki tako, da bi jih asimptotično ocenili. Tako bi praktično reševanje številnih problemov iz gospodarske matematike in linearnega programiranja bilo nemogoče brez sodobnih računskih strojev, ne zato, ker je matematična pot do rešitve težka in zapletena, temveč zato, ker je število neznank, ki se pojavlja, tako veliko.

## RAZVOJ V SODOBNI LOGIKI

Ko smo pravkar pokazali na odnose med tehnično matematiko in logiko, se morda le ne bomo preveč oddaljili od obravnavane vsebine, če si ogledamo razvoj v sodobni logiki. Ko smo se že ustavili ob fundamentalnih znanstvenih prispevkih Russela in Whiteheada, se moramo poslej držati Hilbertove smeri, ki je med slavne probleme, ki jih je bil načel, vpletel leta 1900 tudi vprašanje, ali je mogoče dokazati, da obstaja vsaj eno popolno in zaključeno matematično področje. Trideset let nato je Gödel iznenadil ves matematičen svet z briljantnim dokazom, da — če obstaja k sistem, ki vsebuje tako imenovani funkcionalni logični račun in aritmetične aksiome — potem mora biti nepopoln v tem smislu, da je v njem kak aritmetičen izrek, ki ga v njem sicer lahko formuliramo, dokazati ga pa ne moremo — niti ne pobiti. Prav tako razburljivo odkritje sta doprinesla Church in Turing, da namreč ni mogoče predpisati sistematičnega postopka, po katerem bi bilo mogoče določiti, ali je mogoče posamezne izreke v teh sistemih dokazati ali ne. Da bi te svoje izsledke izrazil na precizen in prepričujoč način, se je Turing odločil — opisati neki zamišljen in ustrezen stroj. Tako je kot prvi pokazal na zvezo med osnovnimi problemi logike in teorijo računskih strojev. Church in Turing sta torej bila prva, ki sta namignila, da logike in matematike ne moremo spraviti v šablonski načrt operacij s simboli, da so torej stvari, ki jih zmore človeški razum — ne pa noben računski stroj. To nasprotje, ki smo ga že poudarili pri obravnavanju zunanjih simbolov in notranjega dožemanja, je najbrž tudi v zvezi z logičnimi pojavi, ki sta jih odkrila Church in Turing, ter utegne biti dejansko zakoreninjeno v razliki med razumom in strojem.

## VERJETNOST IN STATISTIKA

Kakor je logika nastala iz preučevanja deduktivnega razmišljanja, sta se teorija verjetnosti in statistika začeli s poiskusi, da bi izrazili procese induktivne povezanosti. Ta teorija se začenja že v 16. stoletju, ko so napravili prve matematične analize iger na srečo, močno se je pa razvila proti koncu 19. stoletja. Zelo uspešno so jo nato uporabili v teoriji napak pri merjenju, v teoriji plinov ter v številnih bioloških in aktuarskih (zavarovalnih) problemih. Dvajseto stoletje je močno razširilo tehnični razvoj teorije verjetnosti in statistike, kakor

tudi posplošilo njuno uporabnost. Kot čisto matematični teoriji ju moremo danes upravičeno smatrati za sestavna dela teorije merjenja ali pa integracije. Kot veji uporabne matematike pa sta se močno razrasli in pridobili na važnosti. Njun silen pomen smo dojeli šele v sedanjem stoletju, ko smo spoznali njuno fundamentalno vlogo pri dojemljanju fizičnega sveta. Miselni kalupi, v katere skušamo vključiti človeka in naravo, so povsem statistični. Prav deterministična pojmovanja, ki so se ohranila iz klasične fizike, danes lahko smatramo kot približnostne poenostavitve mnogo bolj realnih statističnih pojmovanj. Zato mora vsakdo, ki študira katero izmed fizikalnih, bioloških ali psiholoških znanosti, kar dobro poznati elemente teorije verjetnosti in statistike. Po pravici se vprašujemo, kako naj bi vpeljali teorijo verjetnosti in statistiko v pouk matematike. Vedno bolj se poudarja potreba, da bi ju vpeljali čimprej, da bi se študentje še zgodaj seznanili z osnovnimi načeli statistike, ki je danes postala tako važna skoraj na vseh področjih človeškega mišljenja.

Bežen in kratek pregled nad zgodovino matematike, ki smo ga skušali podati, pač ne more dostojno prikazati razvoja v moderni matematiki, vendar utegne opozoriti bralca o revolucionarnem in intelektualnem pomenu razvoja in mu dati koristno podlago o njegovih vzgojnih posledicah. Ob malo površnem pregledu najvažnejših smeri v moderni matematiki in napredku v njenih različnih področjih kot npr. algebri, teoriji števil, geometriji, analizi, uporabni matematiki, logiki, teoriji verjetnosti in v statistiki, smo najbrž le nakazali duha in vsebino silnih izprembe, ki se nam takorekoč vsiljujejo v sodobni pouk matematike.

## OSREDNJI PROBLEM MATEMATIKE V IZOBRAZBI

Kot smo že omenili, matematika danes ne išče bistveno novega mesta pri izobraževanju, saj je vselej in povsod zavzemala važno in častno mesto, tako na humanističnem kakor tudi na praktično znanstvenih področjih. Matematika dandanes sama skuša prilagoditi svoje mesto v izobraževanju, skladno z njeno naraščajočo važnostjo v intelektualnem življenju sedanjih dni. Zdaj je treba točno opredeliti novo vsebino, ki naj vsebuje vodilne misli in osnovne prijeme v moderni matematiki, pouk te vsebine je pa treba organizirati v obliki dobro razdeljenega programa ter ga smotrno osvetliti z lučjo sodobne psihologije na intelektualni razvoj, na oblikovanje pojmov in ves učni proces. Sicer podrejeno temu problemu, vendar zato nič manj važno je vprašanje, kako naj okrog tega osrednjega jedra oz. vsebine razvrstimo še druga posebna področja matematična znanja, ki težijo k svojemu posebnemu cilju kot npr. pripravi za poučevanje, k nadaljevanju študija višje matematike ali k udeleževanju na posebnih področjih praktične matematike. Še drug in pereč problem se nam odpira pri pouku čiste matematike, katere jedro obdajajo številna specialna področja. Zdi se, da bomo temu problemu, ki je v fiziki doživel že hudo kritiko, morali v prihodnjih desetih letih posvetiti veliko skrb in pozornost. To vprašanje se zaostrojuje vedno bolj zaradi abstraktnih tendenc, ki jih vidimo v matematiki, pa tudi zaradi vedno hujšega nasprotja med matematično prakso in njeno miselno zgradbo.

Da načnem osrednji problem, naj navedem le tri znanstvene pesmi, ki vse tri zavzemajo komaj eno vrstico:

$$E = mc^2, \quad E = h\nu, \quad a(Aa) = (aA)a.$$

Kakor kitajske pesmi, ki jih moramo dojemati z očmi in ušesi... Prva je slavna enačba med energijo in maso, ki je povzročila pravo revolucijo v fiziki. Odkril jo je Einstein na pragu tega stoletja kot osnovno načelo relativnostne teorije. Tudi druga predstavlja revolucionarno načelo v moderni fiziki. Postavil jo je Planck kot vogelni kamen kvantne teorije. Predstavlja pa zvezo med energijo in frekvenco svetlobnega valovanja. Teh dveh pesmi ni mogoče razumeti brez precejšnjega poznavanja sodobne fizike. Če bi učitelj moral svojim učencem razložiti njun smisel in daljnosežnost, bi jim moral posredovati obilico znanja. Prav tako pa je tretja pesem samo izvleček iz obširnega dela, ki ga moremo smatrati kot uvod v moderno matematiko. Celo za matematika je ta izraz nejasen vse dotlej, dokler mu ne namignemo, da ta enačba simbolično predstavlja Stokesov teorem. Tedaj bo pa tudi začutil, koliko algebre, geometrije, topologije in analize mu je treba poznati, da bi mogel temeljito dojeti pomen te enačbe. Videti je, da ta enačba izraža neki abstraktni asociativni zakon, podoben tistemu, ki bi veljal, če bi ti trije znaki predstavljali kardinalna števila. Če pa tem znakom prisodimo drugačno tolmačenje, predstavlja ista enačba Stokesov izrek.

Nič ni važno, na kak način skušamo očrtati vsebinsko jedro matematičnega izobraževanja. Naš cilj je slej ko prej isti: Prisluhniti moramo vsebini vseh tistih matematičnih področij, ki jih smatramo za dovolj važna in pomembna tako, da ne sme iti mimo njih nihče, ki resno namerava obvladati bistvene elemente in tehniko sodobne matematike. Taka področja bi po sedanjih izkušnjah utegnila biti naslednja: iz algebre — linearna algebra in teorija grup (s posebnim ozirom na teorijo kolobarjev in obsegov, ter elementarna teorija števil; iz geometrije — obravnava Evklidove, analitične, projektivne in diferencialne geometrije z uvodom v elementarno topologijo; iz analize — infinitezimalni račun uvod v teorijo diferencialnih enačb, elementi teorije analitičnih funkcij ene kompleksne spremenljivke in uvod v funkcionalno analizo; s področja uporabne matematike — teoretski in praktični elementi numerične analize, približno numerično reševanje problemov v linearni algebri; iz logike — algebra logike (Booleova algebra) in uvod v simbolično ali matematično logiko; iz teorije verjetnosti in statistike — osnovni principi statističnega računstva, verjetnostne distribucije in njihov odnos do teorije merjenja ter uporaba statistike. Da bi mogli rešiti vse te naloge in ustreči vsem potrebam, bo treba še mnogo študija in razpravljanja. Bilo bi proti duhu moderne matematike, če bi prikrivali notranjo enotnost v vsebini različnih matematičnih področij. Naš cilj mora biti, da pokažemo to celovitost, saj se vsa matematična področja stikajo in prepletajo. Seveda, zgoraj navedena poglavja oz. področja so različno važna za različne študente — za bodoče učitelje, bodoče poklicne matematike in bodoče specializirane znanstvenike. Niti ni treba, da bi vse, kar sodi v vsebinsko jedro matematičnega pouka, bilo vselej in povsod enako poudarjeno. Za posebne interese posebnih smeri moramo poskrbeti tako, da v posebnih kurzih k ustreznemu uvodu v različna področja matematike s posebnim poudarkom dodamo prav to, kar študente najbolj zanima. Često pa je zelo težko reči, kaj spada v neobhodno potrebno matematično jedro in kaj v specialno področje.

## NALOGE UPRAVE NA VISOKI ŠOLI

Posvetimo nekoliko misli specifičnim problemom, s katerimi se bo prav gotovo in že v bližnji bodočnosti srečal učitelj na višji stopnji! Dotakniti se hočemo samo tistih problemov, ki bodo nujno vzniknili iz napredka v matema-



tiki, ne oziraje se na tiste, ki bodo nastali iz drugih vzrokov. Na osnovi našega dosedanjega razmišljanja je očitno, da bo med najvažnejše probleme sodilo naslednje: Prvič — katera poglavja iz osrednjega vsebinskega jedra je treba poučevati na višji stopnji in kako jih smotrno vplesti v učni načrt; drugič, katera poglavja naj se dodajo šolam s poudarkom na matematičnem pouku; in končno — na kak način vskladiti pouk matematike v oddelkih s poudarkom na matematiki in onimi, ki imajo poudarek na drugih učnih disciplinah. Učitelji matematike, ki se živo zanimajo za njen razvoj in napredek, prav dobro vedo, kaj vse tvori trenutno jedro matematičnega pouka, vendar tega — žal — često ne bodo našli v učnih načrtih svojih šol. Lahko rečemo, da je bilo zadnja leta dobro čutiti potrebo, da se temeljito izpremene učni programi matematike na vseh treh stopnjah, in da so bili tudi že storjeni prvi koraki v to smer. Naša visoka šola je sicer čutila ta problem, vendar so očitno samo srednje šole naredile korak naprej. Pouk matematike je tako važen, da visoka šola 1. stopnje dobro čuti, kako vplivajo nanjo spremembe od zgoraj in od spodaj. Praktičen učinek teh sprememb je v tem, da potiskamo precejšnji del učnega gradiva iz matematike — navzdol. Dejansko šole druge višje stopnje pritiskajo na visoko šolo prve stopnje, da bi nudila študentom zahtevnejši program, skratka del snovi, ki se predava na višji stopnji, tako da bi njihovi študentje začenjali svoj študij na višji stopnji bolje pripravljeni in da bi se hitreje dokopali do bolj odmaknjenih poglavij moderne matematike. Po drugi strani pa so se srednje šole začele ozirati po poglavjih, za katera se je že nekako iz navade smatralo, da jih je mogoče obdelati na višji stopnji. Tako so npr. nekatere srednje šole poučevale infinitezimalni račun skozi več let. Zdi se, da jim bodo v kratkem sledile še druge. Zato so vodstva višjih šol prisiljena dvigati učni načrt matematike in iskati višje kvalificirane učitelje. Recimo, da se bo že v prvem letu visoke šole strogo obravnaval diferencialni in integralni račun, v katerega bodo uvedeni dijaki že na srednji šoli, potem lahko čisto resno sklepamo, da bo mnogo naših višjih šol že na prvi stopnji nudilo svojim dijakom kar dober uvod v teorijo analitičnih funkcij ene kompleksne spremenljivke, v sodobno diferencialno geometrijo in v funkcionalno analizo, kakor to delajo zdaj višje šole na drugi stopnji. Če matematičnemu pouku na prvi višji stopnji utegnemo postaviti zgornje in spodnje meje na ta način, potem moramo temeljito pripraviti program za študij, ki si ga zamišljamo na tej stopnji. Tu nas čaka mnogo dela, vsekakor pa bo treba nasloniti študij na to, kar se je dalo dijakom v srednji šoli. To omenjamo zato, ker problem pouka moderne algebre na prvi stopnji višje šole ostaja nerešen in naj bi ga zato učitelji na tej stopnji temeljito pretehtali. Naši napori, da bi modernizirali pouk algebre v srednji šoli, še ne pomenijo, da bi se na tej stopnji poučevalo mnogo moderne algebre, ker je večji del algebre, ki se že zdaj poučuje na srednji šoli, čisto moderna algebra. Odločitev, kaj naj bi se iz geometrije poučevalo na 1. stopnji višje šole, je problem, ki še dolgo ne bo rešen. Pričakovati pa je, da bodo naše ideje o tem problemu že v naslednjem desetletju marsikaj odrinile, upoštevajoč velik napredek na tem področju. Jasno je tudi, da bo mogla višja šola osvojiti bogatejši in naprednejši učni program samo tedaj, če se bo hotela in znala otresti silne navlake v svojem že tradicionalnem programu. Saj je v njem marsikaj, kar sodi bodisi v srednjo šolo bodisi — ven. Ker pa je še marsikaj takega v programu teh šol, bi bilo treba začeti reformo tako, da bi najprej to pometali iz njega. Šele potem bo mogoče dati tej šoli res sodoben program in jo dvigniti na višjo raven.

Kar pa se tiče posebnega programa, ki se bo dodajal osrednjemu programskemu jedru, se bodo šole najbrž precej razlikovale med seboj. K temu bodo gotovo prispevali interesi študentov samih kakor tudi usposobljenost učiteljev. Prav lahko je naštetih nekoliko poglavij, ki si jih lahko zamišljamo na prvi stopnji teh šol, kot so npr.: numerična analiza in praktično računstvo, mehanika in uvod v matematično fiziko, logika, teorija iger, linearno programiranje itd. Le malo teh šol pa si bo moglo privoščiti prav vse, kar bi teoretično bilo mogoče. Tudi bi bilo nesmiselno tukaj razmišljati, zakaj nobena šola tega še ne poizkuša. Interesi študentov pa gotovo terjajo, da bi jim omogočili tak učni program bodisi v posebnih matematičnih oddelkih bodisi v drugih kurzih, na katerih bi se obravnavala praktična matematika. Zato pa naj bi vodstva takih šol, ki se zavedajo silnega razvoja v matematiki, pa tudi njenih velikih koristi, začela pogumno in prizadevno tehtati, kako bi bilo mogoče z razpoložljivimi sredstvi vpeljati pouk nekaterih specialnih matematičnih področij.

Vsekakor pa je — kot smo že omenili — ta problem tesno povezan s problemom koordinacije pouka, čemur se vodstvo nobene šole ne more izmikati. Za to da bi dve interesni področji spravili v posrečeno zvezo, pa je često treba še nekaj več kot samo pogum. Izkušnja nas uči, da je tesno in trajno sodelovanje na dveh področjih le težko obdržati, če ni ustrezne zunanje sile. Danes je že več področij, na katerih so zunanje okoliščine neverjetno ugodne za skupne napore, da bi se uspešno vskladili učni načrti določenih področij. To nedvomno velja za matematiko in fiziko. Če pa se nudijo take možnosti in koristi, potem je vodstvo šole prvo poklicano, da zgrabi za delo. Jasno je, da bo vsak uspeh, ki ga bo mogoče doseči s koordinacijo pouka, dejansko pomenil napredek šole kot take. Problem koordinacije ni posebno težak in sredstva za njegovo rešitev so kar na dlani. Največja ovira pri tem je človeška slabost, da zaradi različnih gledišč le neradi delamo skupaj. Da bi se izgladile te razlike, se utegnejo posrečiti prvi koraki k sodelovanju ravno v matematiki in tistih področjih, ki so ji slučajno blizu. Namesto da bi začeli neposredno preudarjati, na kak način naj bi se lotili dveh različnih učnih področij, je mnogo boljše, če zastopniki obeh disciplin skupno in z obeh gledišč pretehtajo njune osnove. Največkrat je glavna razlika mnenj v različnih pogledih na konkretnost in abstraktnost, oziroma v nasprotju med prakso in teorijo. Odkar pa so abstrakcije začele igrati očitno in važno vlogo pri preučevanju narave, so se matematiki oklenili tako teoretične kot praktične smeri, kajti šele obe skupaj nam prinašata največ koristi. Matematik ne sme nikoli zavreči praktične strani svojega predmeta kakor tudi ne sme zahtevati, da bi se tisti, ki se ukvarjajo z uporabno matematiko, poglabljali v posploševanja in preciznosti — kakor on sam. Lep dokaz, da je mogoče priti do vzajemnega sporazuma obeh gledišč, je sodobni pouk matematike, ki poteka v prav ugodnem vzdušju. Matematična šola stori najboljše, kar sploh storiti more, če primerne teme zastavlja o pravem času, in se vedno ozira tudi na prakso, ki jo nenehno spremlja. Vsa druga področja, v katera matematika posega, naj bi si prizadevala, da bi vedno bolj izkoriščala prekoristna sredstva, ki jim jih nudi matematika, hkrati pa naj bi bila moralno dolžna, nuditi svojim študentom možnost, da bi se urili v spoznavanju matematičnih principov in tehnike. Seveda, taka koordinacija zahteva mnogo trdega in potrpežljivega dela. Teda ni mogoče doseči kar čez noč in brez dobre volje, kakor tudi ne brez predanosti temu lepemu in važnemu cilju naše vzgoje in izobrazbe, da bi vskladili misli vseh ljudi...

# OSNOVNI POJMI ABSTRAKTNE TEORIJE AVTOMATOV

JOŽE VRABEC

## 1. Uvod

Abstraktna teorija avtomatov je nova veja matematike, ki je kot marsikako drugo moderno poglavje zelo abstraktna — po metodah, ki jih uporablja, bi jo lahko šteli za del moderne algebre — hkrati pa je močno uporabna, namreč pri konstrukciji vseh velikih elektronskih digitalnih strojev. V tem sestavku se bomo spoznali z nekaterimi osnovnimi pojmi te teorije. Upam, da je napisan tako, da bo lahko sledil tudi bralec, ki se še ni ukvarjal z moderno algebro. Za boljšo predstavo si bomo pomagali z zgledom. Žal pa so primeri, v katerih se uporablja abstraktna teorija avtomatov, v splošnem tako težko dostopni, da bi komaj mogli razložiti, za kaj pri problemu sploh gre. Zato se bomo morali zadovoljiti z zgledom, ki ne bo posebno konkreten.

Vzemimo, da je treba sestaviti avtomat, ki bo po določenem pravilu reagiral na signale, ki jih sprejema. Po vsakem signalu, ki ga sprejme, naj sam odda nek signal. Kakšnega, pa ne bo odvisno samo od zadnjega sprejetega signala, ampak tudi od vseh vhodnih signalov, ki jih je avtomat sprejel prej. Avtomat si mora torej vse te signale nekako zapisovati ali si jih kako drugače »zapomniti«. Tak spomin ustvarimo z notranjimi stanji avtomata. V vsakem trenutku je avtomat v nekem stanju (to stanje je določeno s stanji posebnih električnih elementov v avtomatu. Z njihovo tehnično realizacijo se ne bomo ukvarjali). Vsak vhodni signal povzroči nastop izhodnega signala, ki je odvisen od vhodnega signala in trenutnega stanja avtomata. Obenem pa vhodni signal prevrže avtomat v neko novo stanje; v katero, je pa spet odvisno od vhodnega signala in trenutnega stanja.

Najsplošnejši način za organizacijo notranjih stanj bi bil takle: V avtomatu bi imeli zaporedje celic. Prvi signal, ki bi prišel v avtomat, bi zapisali v prvo celico, drugi signal v drugo itd. Stanje avtomata bi določala skupnost vseh stanj posameznih celic. Ta način pa je prekompliciran in tudi neskončno mnogo celic bi v splošnem potrebovali. Navadno ni nič težko najti kakšne boljše možnosti.

Recimo, da je naš avtomat seštevalnik. Vanj vodimo drugo za drugo cifre obeh sumandov, iz avtomata pa prihajajo zaporedne cifre vsote. Za vhodni signal bi vzeli tu dvojico števil, od katerih je prvo  $n$ -ta cifra prvega sumanda, drugo pa  $n$ -ta cifra drugega sumanda. Ustrezni izhodni signal bi bila  $n$ -ta cifra vsote. Očitno lahko tu vzamemo, da je stanje avtomata določeno kar z velikostjo seštevalnega prenosa z  $n-1$  na  $n$ -to mesto, in nam ni treba shranjevati vseh cifr obeh sumandov.

V tem sestavku se bomo naučili, kako je mogoče za izvrševanje dane naloge poiskati najenostavnejši avtomat, to je avtomat z najmanj stanji.

## 2. Osnovne definicije<sup>1</sup>

Z izrazom (*Mealyjev*) *avtomat* označimo objekt  $A$ , ki je podan s petimi podatki:  $A = A(A, X, Y, \delta, \lambda)$ ;  $A$ ,  $X$  in  $Y$  so tri neprazne množice,  $\delta$  in  $\lambda$  pa sta funkciji. Elemente množice  $A$  imenujemo *stanja* avtomata, elemente množice  $X$  *vhodne signale* in elementom množice  $Y$  *pravimo izhodni signali*. Če so vse tri množice končne, pravimo avtomatu *končni avtomat*. Funkcija  $\delta$  nam podaja

<sup>1</sup> Za lažje razumevanje glej primer na koncu sestavka!



preslikavo direktnega produkta  $A \times X$  v množico  $A$ . To se pravi, da je  $\delta$  predpis, ki enolično priredi vsakemu paru  $(a, x)$ , kjer je  $a \in A^2$  in  $x \in X$ , neko novo stanje, ki ga imenujemo npr.  $a_1$ . To zapišemo:  $\delta(a, x) = a_1 \in A$ . Funkcija  $\lambda$  nam daje preslikavo direktnega produkta  $A \times X$  v množico  $Y$ . To pomeni, da je  $\lambda$  predpis, ki vsakemu stanju  $a$  in vsakemu vhodnemu signalu  $x$  enolično priredi nek izhodni signal  $y$ :  $\lambda(a, x) = y \in Y$ . Funkcijo  $\delta$  imenujemo *funkcijo prehodov*,  $\lambda$  pa je *funkcija izhodov* avtomata. Obe funkciji lahko smatramo za notranji operaciji v avtomatu, zato lahko definiramo homomorfizem avtomatov.

Vzemimo, da imamo dva avtomata:  $\mathbf{A} (A, X, Y, \delta, \lambda)$  in  $\mathbf{A}_1 (A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ . Naj bo  $\psi_1$  preslikava množice  $A$  v množico  $A_1$ ! To pomeni: naj bo dan nek predpis (imenujemo ga  $\psi_1$ ), ki vsakemu elementu množice  $A$  enolično priredi nek element množice  $A_1$ . Element  $a_1 \in A_1$ , ki je pri tem prirejen elementu  $a \in A$ , imenujemo *sliko* elementa  $a$  in ga označimo kot pri navadnih številskih funkcijah s  $\psi_1(a)$ :  $\psi_1(a) = a_1$ . Naj bo  $B$  poljubna podmnožica množice  $A$ :  $B \subset A$ ! Množico slik vseh elementov množice  $B$  imenujemo *sliko* množice  $B$  v množici  $A_1$  in jo označimo s  $\psi_1(B)$ . To je neka podmnožica množice  $A_1$ :  $\psi_1(B) \subset A_1$ . V splošnem se lahko po več elementov množice  $A$  preslika v isti element množice  $A_1$  in vsak element množice  $A_1$  ni nujno slika kakenga elementa iz  $A$ . V splošnem je torej  $\psi_1(A) \neq A_1$  in je le  $\psi_1(A) \subset A_1$ . Dejstvo, da je  $\psi_1$  preslikava množice  $V$  v množico  $A_1$ , zapišemo:  $\psi_1: A \rightarrow A_1$ .

Naj bosta poleg te preslikave dani še preslikavi  $\psi_2$  in  $\psi_3$ :  $\psi_2: X \rightarrow X_1$ ,  $\psi_3: Y \rightarrow Y_1$ . Skupnost vseh treh preslikav označimo s  $\psi$ :  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  in jo imenujemo preslikavo avtomata  $\mathbf{A}$  v avtomat  $\mathbf{A}_1$ :  $\psi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_1$ . To preslikavo imenujemo *homomorfizem*, če komutira s funkcijama  $\delta$  in  $\lambda$ , to je, če sta pri poljubnem  $a \in A$  in poljubnem  $x \in X$  izpolnjena naslednja pogoja:

$$\psi_1(\delta(a, x)) = \delta_1(\psi_1(a), \psi_2(x)) \quad (1)$$

$$\psi_3(\lambda(a, x)) = \lambda_1(\psi_1(a), \psi_2(x)) \quad (2)$$

Homomorfizem  $\psi$ , pri katerem so izpolnjeni pogoji:  $\psi_1(A) = A_1$ ,  $\psi_2(X) = X_1$ ,  $\psi_3(Y) = Y_1$ , imenujemo *epimorfizem*. Tu je torej vsak element množice  $A_1$  (oziroma  $X_1, Y_1$ ) slika vsaj enega elementa množice  $A$  (oziroma  $X, Y$ ). Homomorfizem, pri katerem je vsak element množice  $A_1$  (oziroma  $X_1, Y_1$ ) slika enega in samo enega elementa množice  $A$  (oziroma  $X, Y$ ), pa imenujemo *izomorfizem*.

Če eksistira kak izomorfizem avtomata  $\mathbf{A}$  na avtomat  $\mathbf{A}_1$ , pravimo, da sta  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{A}_1$  izomorfna. Ker se pri abstraktni teoriji avtomatov ne zanimamo za tehnično realizacijo stanj in signalov v posameznih avtomatih, ampak le za odvisnost izhodnih signalov in prehodov stanj od vhodnih signalov in stanj, nam dveh izomorfnih avtomatov ni treba ločevati, ampak ju lahko identificiramo. O tem se lahko vsak bralec s kratkim premislekom sam prepriča.

Izberimo poljubno  $n$  elementov iz množice  $X$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  (ni treba, da so vsi med seboj različni)! Urejeno kombinacijo  $x_1 x_2 \dots x_n$  bomo imenovali *besedo*. Množico vseh možnih besed, tj. množico vseh možnih končnih urejenih kombinacij elementov iz množice  $X$ , označimo z  $F(X)$ . Besede smo imenovali *urejene* kombinacije. S tem hočemo povedati, da nam je bistven tudi vrstni red elementov, to je, *dve besedi štejemo za enaki tedaj in le tedaj, ko sta*

<sup>2</sup> Zapis  $a \in A$  pomeni:  $a$  je element množice  $A$ .

<sup>3</sup> Zapis  $B \subset A$  pomeni: množica  $B$  je vsebovana v množici  $A$ , množica  $A$  vključuje množico  $B$ .

sestavljani iz enakih elementov in so ti postavljeni obakrat v istem vrstnem redu. Elemente množice  $X$ , iz katerih so besede sestavljene, imenujemo *vhodne črke*, množico  $X$  pa *vhodno abecedo*. Število črk v besedi imenujemo *dolžino besede*. Množici  $F(X)$  bomo priključili še en element, ki ga bomo označili z  $e$  in ga imenovali *prazna beseda*. To je beseda, ki ne vsebuje nobene črke, torej beseda z dolžino nič.

V množici  $F(X)$  bomo definirali notranjo računsko operacijo, ki jo bomo imenovali *množenje*. Naj bosta  $p$  in  $q$  dve poljubni besedi. Produkt besede  $p$  z besedo  $q$  — zapišemo ga  $pq$  — je beseda, ki jo dobimo, če besedi  $p$  enostavno pritaknemo besedo  $q$ . Če je torej  $p = x_i x_j \dots x_k$  in  $q = x_l x_m \dots x_n$ , je  $pq = x_i x_j \dots x_k x_l x_m \dots x_n$ . Posebej definiramo produkt s prazno besedo  $e$ . Če je  $p$  poljubna beseda, je  $pe = ep = p$ . Prazna beseda je torej enota za množenje v  $F(X)$  (kot število 1 pri številih).

Če so  $p, q, r$  tri poljubne besede, je očitno  $(pq)r = p(qr)$ . Množenje je torej asociativno. Komutativno pa ni, ker je v splošnem  $pq \neq qp$ .

Množico  $F(X)$  s tako definiranim množenjem imenujemo *prosto polgrupo*, generirano z množico  $X$ .<sup>4</sup> V nadaljnjem jo bomo imenovali kar *vhodno polgrupo*. Čisto analogno je definirana *izhodna polgrupa*  $F(Y)$ . To je prosta polgrupa, generirana z množico  $Y$ . Vpeljimo še nov izraz *izhodna abeceda* za množico  $Y$ , njeni elementi pa bodo *izhodne črke*.

Razširili bomo definicijsko območje funkcij  $\delta$  in  $\lambda$  na direktni produkt  $A \times F(X)$ . To se pravi, da bomo definirali pomen izrazov  $\delta(a, p)$  in  $\lambda(a, p)$ , kjer je  $a$  poljubno stanje avtomata,  $p = x_1 x_2 \dots x_n$  pa poljubna vhodna beseda. Izračunajmo najprej  $\delta(a, x_1)$ ! To je neko novo stanje, ki ga označimo z  $a_1$ . Podobno naj bo  $\lambda(a, x_1) = y_1 \in Y$ . Računamo dalje:

$$\begin{array}{ll} \delta(a_1, x_2) = a_2 \in A & \lambda(a_1, x_2) = y_2 \in Y \\ \delta(a_2, x_3) = a_3 \in A & \lambda(a_2, x_3) = y_3 \in Y \\ \cdot & \cdot \\ \delta(a_{n-1}, x_n) = a_n \in A & \lambda(a_{n-1}, x_n) = y_n \in Y \end{array}$$

Zdaj pa definirajmo:  $\delta(a, p) = a_n, \lambda(a, p) = y_1 y_2 \dots y_n \in F(Y)$ . Vrednost funkcije  $\delta(a, p)$  je torej spet stanje,  $\lambda(a, p)$  pa ni več izhodna črka, ampak izhodna beseda. Posebej definiramo  $\delta(a, e) = a$  in  $\lambda(a, e) = e$ . Razširitev definicije obeh funkcij lahko kratko podamo z rekurzivno formulo. Naj bo  $x$  poljubna vhodna črka,  $p$  poljubna vhodna beseda,  $a$  poljubno stanje. Rekurzivni formuli se glasita:

$$\delta(a, px) = \delta(\delta(a, p), x) \quad (3)$$

$$\lambda(a, px) = \lambda(a, p) \lambda(\delta(a, p), x) \quad (4)$$

To lahko zapišemo še malo splošneje. Naj bosta  $p$  in  $q$  dve poljubni vhodni besedi,  $a$  pa poljubno stanje. Tedaj je

$$\delta(a, pq) = \delta(\delta(a, p), q) \quad (5)$$

$$\lambda(a, pq) = \lambda(a, p) \lambda(\delta(a, p), q) \quad (6)$$

<sup>4</sup> Izraz *polgrupa* pomeni poljubno množico, v kateri smo na kakršenkoli način definirali množenje elementov, za katero velja asociativnostni zakon.

### 3. Ekvivalenca avtomatov

Vzemimo poljuben avtomat  $\mathbf{A} (A, X, Y, \delta, \lambda)$ ! Razširjena funkcija izhodov  $\lambda$  pri fiksnem elementu  $a \in A$  vsaki vhodni besedi enolično priredi neko izhodno besedo, definira torej neko preslikavo vhodne polgrupe v izhodno. Preslikavo  $\varphi_a : F(X) \rightarrow F(Y)$ , ki je definirana takole:  $\varphi_a(p) = \lambda(a, p)$ , imenujemo preslikavo, *inducirano* s stanjem  $a$ . Preslikavi, ki ju inducirata dve različni stanji avtomata, nista nujno različni. Postavimo naslednjo definicijo:

Stanje  $a \in A$  je *ekvivalentno* stanju  $b \in A$ , v znakih  $a \sim b$ , če obe stanji inducirata isto preslikavo vhodne polgrupe v izhodno, to je, če je  $\varphi_a = \varphi_b$ , ali drugače, če za vsak  $p \in F(X)$  velja  $\lambda(a, p) = \lambda(b, p)$ .

Tako definirana ekvivalenca je 1) *refleksivna*:  $a \sim a$ ; 2) *simetrična*: če je  $a \sim b$  in  $b \sim c$ , je tudi  $a \sim c$ . Zato je to res prava ekvivalenčna relacija.<sup>5</sup>

Popolnoma enako je definirana ekvivalenca stanj dveh različnih avtomatov, ki imata isto vhodno in izhodno abecedo. Naj bosta dana avtomata  $\mathbf{A} (A, X, Y, \delta, \lambda)$ ,  $\mathbf{A}_1 (A_1, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$ ! Stanji  $a \in A$  in  $a_1 \in A_1$  sta ekvivalentni, če za vsak  $p \in F(X)$  velja  $\lambda(a, p) = \lambda_1(a_1, p)$ .

Množico vseh paroma različnih preslikav, ki jih inducirajo vsa stanja avtomata  $\mathbf{A}$ , imenujemo *družino preslikav*, inducirano z avtomatom  $\mathbf{A}$ . S pomočjo tega pojma bomo definirali še ekvivalenco avtomatov:

Avtomat  $\mathbf{A} (A, X, Y, \delta, \lambda)$  je ekvivalenten avtomatu  $\mathbf{A}_1 (A_1, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$  (spet moramo vzeti avtomata, ki imata isto vhodno in izhodno abecedo), če oba avtomata inducira isto družino preslikav vhodne polgrupe v izhodno. Dejstvo, da je avtomat  $\mathbf{A}$  ekvivalenten avtomatu  $\mathbf{A}_1$ , zapišemo:  $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}_1$ .

Očitno je tudi ta ekvivalenca refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Navedli bomo nekaj izrekov o ekvivalentnih avtomatih.

**Izrek 1.** *Avtomata  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$  sta ekvivalentna tedaj in le tedaj, ko lahko vsakemu stanju avtomata  $\mathbf{A}$  poiščemo ekvivalentno stanje v avtomatu  $\mathbf{B}$ , in obratno.*

Veljavnost tega izreka je očitna.

**Izrek 2.** *Če eksistira epimorfizem  $\psi$  avtomata  $\mathbf{A} (A, X, Y, \delta, \lambda)$  na avtomat  $\mathbf{A}_1 (A_1, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$ , sta  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{A}_1$  ekvivalentna. Pri poljubnem stanju  $a \in A$  sta stanji  $a$  in  $\psi(a) \in A_1$  ekvivalentni.*

Tu sta preslikavi  $\psi_2$  in  $\psi_3$  homomorfizma  $\psi$  kar identiteti:  $\psi_2(x) = x$  za vsak  $x \in X$  in  $\psi_3(y) = y$  za vsak  $y \in Y$ . Zato edino netrivialno preslikavo  $\psi_1$  označimo kar s  $\psi$ .

**Dokaz:** Vzemimo poljubno stanje  $a \in A$  in označimo  $\psi(a) = b \in A_1$ ! Najprej bomo dokazali drugi del izreka, da je namreč  $a \sim b$ . Vzemimo poljubno vhodno besedo:  $p = x_1 x_2 \dots x_n$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ), in označimo:

$$\begin{aligned} a_k &= \delta(a, x_1 x_2 \dots x_k) \\ b_k &= \delta_1(b, x_1 x_2 \dots x_k) \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Po definiciji razširjene funkcije prehodov avtomata  $\delta$  je

$$a_k = \delta(a_{k-1}, x_k) \quad b_k = \delta_1(b_{k-1}, x_k) \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

<sup>5</sup> Glej: N. Prijatelj, O relacijah; OMF VIII, št. 4 (1961)

$$\begin{aligned} \psi(a_1) &= \psi(\delta(a, x_1)) = \delta_1(\psi(a), x_1) = \delta_1(b, x_1) = b_1 \\ \psi(a_2) &= \psi(\delta(a_1, x_2)) = \delta_1(\psi(a_1), x_2) = \delta_1(b_1, x_2) = b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \psi(a_n) &= \psi(\delta(a_{n-1}, x_n)) = \delta_1(\psi(a_{n-1}), x_n) = \delta_1(b_{n-1}, x_n) = b_n \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1(b, x_1) = \lambda_1(\psi(a), x_1) = \lambda(a, x_1) = y_1 \\ y_2' &= \lambda_1(b_1, x_2) = \lambda_1(\psi(a_1), x_2) = \lambda(a_1, x_2) = y_2 \\ . &. . . . . \\ y_n' &= \lambda_1(b_{n-1}, x_n) = \lambda_1(\psi(a_{n-1}), x_n) = \lambda(a_{n-1}, x_n) = y_n \end{aligned}$$

Zaradi tranzitivnosti ekvivalence lahko iz veljavnosti izreka 2. sklepamo na veljavnost naslednje trditve: Če lahko za avtomata  $A$  in  $B$ , ki imata isto vhodno in izhodno abecedo, poiščemo tak avtomat  $C$  (tudi z isto vhodno in izhodno abecedo), da eksistirata epimorfizma  $A \rightarrow C$  in  $B \rightarrow C$ , sta avtomata  $A$  in  $B$  ekvivalentna.

**Izrek 3.** *M naj bo množica avtomatov, ki jo sestavljajo poljuben avtomat  $A(A, X, Y, \delta, \lambda)$  in vsi temu avtomatu ekvivalentni avtomati. V taki množici  $M$  eksistira nek tak avtomat  $B$ , da za vsak avtomat  $C \in M$  lahko poiščemo epimorfizem  $C \rightarrow B$ . Avtomat  $B$  nima paroma ekvivalentnih stanj. Noben avtomat v  $M$  nima manj stanj kot  $B$  (zaradi te lastnosti lahko imenujemo avtomat  $B$  minimalni avtomat množice  $M$ ). Vsak avtomat iz množice  $M$ , ki ima tudi pravkar navedene lastnosti avtomata  $B$ , je z  $B$  izomorfen, za nas sta torej ta avtomat in avtomat  $B$  toliko kot identična.*

162

Razredi se med seboj ne sekajo, to je, so brez skupnih elementov, ali drugače, vsako stanje pripada samo enemu razredu. Recimo, da se nahaja stanje  $a$  v dveh razredih  $R_1$  in  $R_2$ . Razred  $R_1$  vsebuje element  $a$  in zato po definiciji ekvivalenčnih razredov tudi vsa njemu ekvivalentna stanja, torej tudi vsa stanja, ki pripadajo razredu  $R_2$ . To pomeni, da je  $R_2 \subset R_1$ . Na enak način ugotovimo, da je  $R_1 \subset R_2$ . Torej je  $R_1 = R_2$ .

Množico vseh ekvivalenčnih razredov označimo z  $B$ ! Konstruirajmo avtomat  $B$ , ki ima množico  $B$  za množico stanj:  $B(B, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$ ! (Morda bi bilo lažje razumljivo, če bi namesto navedene definicije postavili malo drugačno: V vsakem razredu si poljubno izberemo neko stanje za predstavnika tega razreda in množico vseh izbranih predstavnikov označimo z  $B$ . Avtomat  $B$  ima potem za svoja stanja predstavnike ekvivalenčnih razredov stanj avtomata  $A$ . V bistvu je to isto kot prej. Bralec, ki mu ta drugi način bolj ugaja, lahko brez skrbi povsod v nadaljnjem tekstu zamenja izraz *razred* z izrazom *predstavnik razreda*. Tako naj npr. namesto: *razred, ki vsebuje stanje  $a$* , postavi: *predstavnik razreda, v katerem je element  $a$* .)

Da bo avtomat  $B$  določen, moramo definirati še funkciji  $\delta_1$  in  $\lambda_1$ . Za dani razred  $b \in B$  določimo  $\lambda_1(b, x)$  pri poljubnem  $x \in X$  takole: V razredu  $b$  izberemo poljuben element  $a \in A$  in postavimo  $\lambda_1(b, x) = \lambda(a, x)$ . S tem je funkcija  $\lambda_1$  enolično definirana. Če bi si namreč namesto  $a$  izbrali kako drugo stanje  $a_1 \in b$ , postavili bi torej  $\lambda_1(b, x) = \lambda(a_1, x)$ , bi dobili isto, ker zaradi ekvivalenčnosti stanj  $a$  in  $a_1$  velja  $\lambda(a, x) = \lambda(a_1, x)$ .

Še definicija funkcije  $\delta_1$ . Spet izberimo v danem razredu  $b$  poljubno stanje  $a$  in definirajmo:  $\delta_1(b, x)$  naj bo tisti razred, ki vsebuje stanje  $\delta(a, x)$ ! Dokazati moramo še, da je ta definicija enolična, to je, da dobimo isti razred, če izberemo kako drugo stanje  $a_1 \in b$  in zahtevamo, da je  $\delta_1(b, x)$  tisti razred, ki vsebuje  $\delta(a_1, x)$ . Dokazati je treba torej, da spadata stanji  $\delta(a, x)$  in  $\delta(a_1, x)$  v isti ekvivalenčni razred, to je da sta ekvivalentni. V ta namen vzemimo poljubno vhodno črko  $x$  in poljubno vhodno besedo  $p$ ! Ker sta stanji  $a$  in  $a_1$  ekvivalentni, je

$$\lambda(a, xp) = \lambda(a_1, xp).$$

Če na obeh straneh te enačbe uporabimo enakost (6), dobimo:

$$\lambda(a, x) \lambda(\delta(a, x), p) = \lambda(a_1, x) \lambda(\delta(a_1, x), p).$$

Po definiciji enakosti dveh besed mora biti

$$\lambda(\delta(a, x), p) = \lambda(\delta(a_1, x), p).$$

To pa nam že da, kar hočemo. Ker je bila beseda  $p$  poljubna, sledi iz zadnje enačbe neposredno, da je  $\delta(a, x) \sim \delta(a_1, x)$ .

S tem je avtomat  $B$  točno določen. Dokazali bomo, da je to prav tisti avtomat  $B$ , o katerem govori izrek. Najprej je treba dokazati, da je  $B$  sploh v množici  $M$ . Definirajmo preslikavo  $\psi: A \rightarrow B$  na naslednji način: množici  $X$  in  $Y$  naj se identično preslikata sami vase, preslikava množice  $A$  v množico  $B$  pa naj bo določena takole: če je  $a$  poljubno stanje avtomata  $A$ , naj bo  $\psi(a) = b$ , kjer je  $b \in B$  razred, kateremu pripada stanje  $a$ . Ker nobeno stanje ne pripada

dvema različnima razredoma, je preslikava  $\psi$  enolična. Naj bo torej  $b$  razred, ki mu pripada dani element  $a \in A$ . Iz definicije funkcij  $\delta_1$  in  $\lambda_1$  sledi:

$$\psi(\delta(a, x)) = \delta_1(b, x) = \delta_1(\psi_1(a), x)$$

$$\lambda(a, x) = \lambda_1(b, x) = \lambda_1(\psi(a), x)$$

Ti dve enačbi nam povesta, da je  $\psi$  homomorfizem. Vsak ekvivalenčni razred vsebuje vsaj eno stanje avtomata **A**. Z drugo besedo, za vsak  $b \in B$  lahko dobimo vsaj en  $a \in A$ , da je  $b = \psi(a)$ . Homomorfizem  $\psi$  je torej epimorfizem. Če je  $a \in b$ , je torej po izreku 2.  $a \sim b$ ; avtomat **B** je ekvivalenten avtomatu **A** in zato pripada množici **M**.

Avtomat **B** nima paroma ekvivalentnih stanj. Vzemimo dve poljubni stanji avtomata **B**:  $b, b_1 \in B$ ! Če je  $a \in A$  poljubno stanje, ki pripada razredu  $b$ , je  $a \sim b$ , in če je  $a_1$  poljuben element razreda  $b_1$ , je  $a_1 \sim b_1$ . Če je  $b \sim b_1$ , je zaradi tranzitivnosti ekvivalence  $a \sim a_1$ . Stanji  $a$  in  $a_1$  spadata zato v isti ekvivalenčni razred, torej je  $b = b_1$ .

Vzemimo zdaj poljuben avtomat  $C \in \mathbf{M}$ :  $C(C, X, Y, \delta_2, \lambda_2)$ ! Avtomata **B** in **C** sta ekvivalentna, zato lahko po izreku 1. dobimo vsakemu stanju avtomata **C** ekvivalentno stanje v avtomatu **B**. Ker pa avtomat **B** nima paroma ekvivalentnih stanj, je v **B** samo po eno stanje ekvivalentno vsakemu stanju avtomata **C**. Zato je preslikava  $\psi': C \rightarrow B$ , ki je definirana s predpisom:  $\psi'(c) = b$ , če je  $b \sim c$  ( $b \in B, c \in C$ ), enolična. Naj bosta elementa  $b \in B$  in  $c \in C$  ekvivalentna. Iz definicije ekvivalence stanj dobimo, da sta pri poljubni črki  $x \in X$  in poljubni besedi  $p \in F(X)$  izpolnjeni enačbi:

$$\lambda_2(c, x) = \lambda_1(b, x) = \lambda_1(\psi'(c), x) \quad (7)$$

$$\lambda_2(c, xp) = \lambda_1(b, xp)$$

Iz druge enačbe dobimo z uporabo enačbe (6):

$$\lambda_2(c, x) \lambda_2(\delta_2(c, x), p) = \lambda_1(b, x) \lambda_1(\delta_1(b, x), p)$$

in od tod:

$$\lambda_2(\delta_2(c, x), p) = \lambda_1(\delta_1(b, x), p).$$

Ta enačba nam pove, da je  $\delta_1(b, x) \sim \delta_2(c, x)$ , torej je

$$\delta_1(\psi'(c), x) = \delta_1(b, x) = \psi'(\delta_2(c, x)). \quad (8)$$

Enačbi (7) in (8) nam povesta, da je preslikava  $\psi': C \rightarrow B$ , ki je določena s preslikavo  $\psi': C \rightarrow B$ , homomorfizem. Zaradi ekvivalence avtomatov **B** in **C** lahko pri poljubnem  $b \in B$  poiščemo tak  $c \in C$ , da je  $b \sim c$  in zato  $\psi'(c) = b$ . Vidimo, da je  $\psi'$  epimorfizem. Res je torej mogoče vsak avtomat iz **M** epimorfno preslikati na **B**.

Naj bo  $B_1 \in \mathbf{M}$  poljuben tak avtomat, da je nanj mogoče epimorfno preslikati vsak avtomat iz **M**! Eksistiral bo torej tudi epimorfizem  $\psi'': B \rightarrow B_1$ . Če vzamemo poljubno stanje  $b_1$  avtomata **B**, lahko dobimo neko tako stanje  $b \in B$ , da je  $b_1 = \psi''(b)$ . Če je  $b' \in B$  poljubno nadaljnje stanje, torej  $b' \neq b$ ,

je  $\psi''(b') \neq b_1$ . Če bi namreč bilo  $\psi''(b') = b_1$ , bi obenem veljali ekvivalenci  $b_1 \sim b$ ,  $b_1 \sim b'$ , zaradi česar bi bilo  $b \sim b'$ , kar pa ni mogoče. Vidimo, da je vsako stanje avtomata **B**<sub>1</sub> slika enega in samo enega stanja avtomata **B**;  $\psi''$  je torej izomorfizem. Tako smo dokazali vse trditve, ki jih vsebuje izrek 3.

Avtomat, ki ne vsebuje paroma ekvivalentnih stanj (npr. pravkar obravnavani avtomat **B**), imenujemo *reducirani* avtomat. Če dani avtomat zamenjamo z ekvivalentnim reduciranim avtomatom, pravimo, da smo prvotni avtomat *reducirali*.

#### 4. Primer

Zdaj, ko smo prikazali majhen del abstraktne teorije avtomatov, bomo poizkusili to, kar smo izvedeli, uporabiti na konkretnem primeru (ki pa ne bo zelo konkreten, kot je bilo že rečeno).

Vzemimo dva med seboj ekvivalentna avtomata! Naj se v nekem trenutku prvi nahaja v poljubnem stanju, drugi pa v nekem stanju, ki je onemu ekvivalentno. Če vodimo v oba avtomata poljubni enaki zaporedji signalov, bosta po definiciji ekvivalence avtomatov zaporedji izhodnih signalov, ki jih oddajata avtomata, med seboj enaki. To pa pomeni, da opravljata dva ekvivalentna avtomata popolnoma isto delo. Odgovor na vprašanje, ki smo si ga zastavili v začetku, namreč, kako poiskati najmanjši avtomat, ki bo zmožen opravljati dano nalogo, nam daje torej izrek 3.

Recimo, da nam je uspelo konstruirati avtomat **A**, ki bi lahko opravljal dano nalogo. Avtomat je podan spodaj z razpredelnico. Ima šestnajst stanj, ki so označena s črkami od *b* do *t* (izpustili smo *a*, ki ga bomo prihranili za oznako splošnega stanja, ter *e*, *p* in *q*, ker smo te prej redno uporabljali za oznako besed). Vhodna množica *X* in izhodna množica *Y* vsebujeta le vsaka dva signala, ki ju označimo z 0 in 1. Delovanje avtomata **A** podaja naslednja tabela:

| <i>a</i> | $\delta(a, 0)$ | $\delta(a, 1)$ | $\lambda(a, 0)$ | $\lambda(a, 1)$ |
|----------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| <i>b</i> | <i>j</i>       | <i>o</i>       | 0               | 1               |
| <i>c</i> | <i>b</i>       | <i>s</i>       | 1               | 0               |
| <i>d</i> | <i>f</i>       | <i>j</i>       | 1               | 0               |
| <i>f</i> | <i>t</i>       | <i>k</i>       | 0               | 1               |
| <i>g</i> | <i>f</i>       | <i>d</i>       | 0               | 1               |
| <i>h</i> | <i>t</i>       | <i>h</i>       | 1               | 0               |
| <i>i</i> | <i>c</i>       | <i>f</i>       | 0               | 1               |
| <i>j</i> | <i>i</i>       | <i>h</i>       | 1               | 0               |

| <i>a</i> | $\delta(a, 0)$ | $\delta(a, 1)$ | $\lambda(a, 0)$ | $\lambda(a, 1)$ |
|----------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| <i>k</i> | <i>o</i>       | <i>r</i>       | 1               | 0               |
| <i>l</i> | <i>g</i>       | <i>c</i>       | 1               | 0               |
| <i>m</i> | <i>i</i>       | <i>c</i>       | 1               | 0               |
| <i>n</i> | <i>g</i>       | <i>d</i>       | 0               | 1               |
| <i>o</i> | <i>n</i>       | <i>l</i>       | 0               | 1               |
| <i>r</i> | <i>b</i>       | <i>h</i>       | 1               | 0               |
| <i>s</i> | <i>n</i>       | <i>s</i>       | 1               | 0               |
| <i>t</i> | <i>o</i>       | <i>l</i>       | 0               | 1               |

Treba je poiskati minimalni ekvivalentni avtomat, ali z drugo besedo, reducirati avtomat **A**. Splošen princip redukcije dobimo v dokazu izreka 3. Množico *A* stanj avtomata **A** je treba razbiti na ekvivalenčne razrede. Poiskati je treba torej vse skupine med seboj ekvivalentnih stanj. Kako pa bomo to napravili? Poizkusimo direktno po definiciji ekvivalence! To se pravi, napišimo za vsako stanje tabelo, v kateri bo pri vsaki vhodni besedi navedena ustrezna



izhodna beseda! Nato pogledjmo, katera stanja dajo pri enakih vhodnih besedah enake izhodne besede, in razdelimo množico  $A$  na ekvivalenčne razrede!

Ne bo šlo! Čeprav sta vhodna signala le dva, je vhodnih besed neskončno mnogo in načrt je neizvedljiv. Poizkusimo drugače! Razbijmo najprej množico  $A$  na tako imenovane ekvivalenčne razrede prvega reda! Stanji  $a$  in  $a_1$  sodita v isti ekvivalenčni razred prvega reda tedaj in le tedaj, ko vsako vhodno besedo z dolžino 1 prevedeta obe stanji v isto izhodno besedo, ko torej pri poljubnem  $x \in X$  velja  $\lambda(a, x) = \lambda(a_1, x)$ . Nato razdelimo množico  $A$  na ekvivalentne razrede drugega reda, pri čemer damo stanji  $a$  in  $a_1$  v isti razred tedaj in le tedaj, ko prevedeta vsako vhodno besedo z dolžino 2 obe stanji v isto izhodno besedo. Zatem tvorimo ekvivalenčne razrede tretjega reda itd. Splošna definicija: stanji  $a$  in  $a_1$  pripadata istemu ekvivalenčnemu razredu  $k$ -tega reda tedaj in le tedaj, ko je pri poljubno izbranih  $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$

$$\lambda(a, x_1 x_2 \dots x_k) = \lambda(a_1, x_1 x_2 \dots x_k); \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Domenimo se, da bomo dejstvo, da sta  $a$  in  $a_1$  v istem ekvivalenčnem razredu  $k$ -tega reda, zapisali:  $a \sim a_1(k)$ !

Vzemimo poljubno stanje  $a$ ! Po enačbi (6) je pri poljubno izbranih  $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$

$$\lambda(a, x_1 x_2 \dots x_k) = \lambda(a, x_1 x_2 \dots x_{k-1}) \lambda(\delta(a, x_1 x_2 \dots x_{k-1}), x_k)$$

$$\lambda(a, x_1 x_2 \dots x_k) = \lambda(a, x_1) \lambda(\delta(a, x_1), x_2 \dots x_k).$$

Če naj bo  $a \sim a_1(k)$ , mora torej veljati:

$$\lambda(a, x_1 \dots x_{k-1}) \lambda(\delta(a, x_1 \dots x_{k-1}), x_k) =$$

$$= \lambda(a_1, x_1 \dots x_{k-1}) \lambda(\delta(a_1, x_1 \dots x_{k-1}), x_k),$$

$$\lambda(a, x_1) \lambda(\delta(a, x_1), x_2 \dots x_k) = \lambda(a_1, x_1) \lambda(\delta(a_1, x_1), x_2 \dots x_k).$$

Ti dve enačbi sta izpolnjeni tedaj in le tedaj, ko hkrati veljata enačbi:

$$\lambda(a, x_1 x_2 \dots x_{k-1}) = \lambda(a_1, x_1 x_2 \dots x_{k-1}) \quad (9)$$

$$\lambda(\delta(a, x_1), x_2 \dots x_k) = \lambda(\delta(a_1, x_1), x_2 \dots x_k) \quad (10)$$

Iz enačbe (9) sledi:  $a \sim a_1(k-1)$ , iz enačbe (10) pa  $\delta(a, x_1) \sim \delta(a_1, x_1)(k-1)$ . Dognali smo torej pravilo:

$a \sim a_1(k)$  tedaj in le tedaj, ko je hkrati

$$a \sim a_1(k-1) \text{ in } \delta(a, x) \sim \delta(a_1, x)(k-1) \text{ za vsak } x \in X \quad (11)$$

Dve stanji, ki v razcepitvi na razrede določenega reda pripadata dvema različnima razredoma, ne bosta torej nikdar prišli v isti razred kakega višjega reda; vedno dobimo ekvivalenčne razrede višjega reda s cepitvijo razredov nižjega reda. Zato lahko rečemo, da dve stanji, ki sta v istem ekvivalenčnem razredu  $k$ -tega reda, preslikata dve enaki vhodni besedi, ki imata dolžino manjšo ali enako  $k$ , v enaki izhodni besedi.

Vzemimo zdaj, da pri nekem  $n$  ekvivalenčni razredi reda  $n$  sovpadajo z razredi reda  $n - 1$ . Vzemimo dve poljubni stanji  $a, a_1 \in A$ , tako da je  $a \sim a_1 (n)$ . Po pravilu (11) mora pri poljubnem  $x \in X$  veljati  $\delta(a, x) \sim \delta(a_1, x) (n - 1)$ . Ker pa po privzetku razredi reda  $n$  sovpadajo z razredi reda  $n - 1$ , je tudi  $\delta(a, x) \sim \delta(a_1, x) (n)$ . Iz  $a \sim a_1 (n)$  in  $\delta(a, x) \sim \delta(a_1, x) (n)$  pa spet po pravilu (11) sledi, da je  $a \sim a_1 (n + 1)$ . Na isti način bi dalje dokazali, da je  $a \sim a_1 (n + 2)$  itd. Torej je  $a \sim a_1 (k)$  za  $k \geq n - 1$ . To pa očitno pomeni, da je  $a \sim a_1$ . Ekvivalenčni razredi reda  $n - 1$  so torej že kar pravi ekvivalenčni razredi.

Problem bi bil torej rešen. Toda, ali lahko v vsakem primeru dobimo tak  $n$ , da razredi reda  $n$  sovpadajo z razredi reda  $n - 1$ ? Žal je odgovor negativen. Proces cepljenja ekvivalenčnih razredov se v splošnem lahko nadaljuje v nedogled in nikdar ne sovpadajo razredi dveh zaporednih redov. Pač pa lahko pri končnih avtomatih (in naš avtomat **A** je tak) poiščemo ekvivalenčne razrede po navedenem postopku. Razredi se namreč cepijo kvečjemu toliko časa, da dobimo razrede, ki vsebujejo le po en element.

Lotimo se avtomata **A**! Ekvivalenčna razreda prvega reda sta dva:

1. razred

2. razred

$b, f, g, i, n, o, t$

$c, d, h, j, k, l, m, r, s$

Stanji  $a$  in  $a_1$  prideta po pravilu (11) v isti razred drugega reda, če so izpolnjeni naslednji trije pogoji: 1)  $a$  in  $a_1$  sta v istem razredu prvega reda; 2)  $\delta(a, 0)$  je v istem razredu prvega reda kot  $\delta(a_1, 0)$ ; 3)  $\delta(a, 1)$  je v istem razredu prvega reda kot  $\delta(a_1, 1)$ . Napravimo si takole tabelo:

| $a$            | 1. razred                   | 2. razred                           |
|----------------|-----------------------------|-------------------------------------|
|                | $b \ f \ g \ i \ n \ o \ t$ | $c \ d \ h \ j \ k \ l \ m \ r \ s$ |
| $\delta(a, 0)$ | 2 1 1 2 1 1 1               | 1 1 1 1 1 1 1 1 1                   |
| $\delta(a, 1)$ | 1 2 2 1 2 2 1               | 2 2 2 2 2 2 2 2 2                   |

Številke pod črkami, ki zaznamujejo posamezna stanja, pomenijo vrstno številko ekvivalenčnega razreda prvega reda, v katerega spada levo zapisana vrednost funkcije  $\delta$  (če namesto  $a$  vstavimo stanje, zapisano nad številko). Tako npr. preberemo iz tabele, da spada  $\delta(g, 0)$  v 1. razred,  $\delta(k, 1)$  pa v 2. razred. Na osnovi te tabele lahko takoj napišemo ekvivalenčne razrede drugega reda in obenem napravimo tabelo, s pomočjo katere bomo razdelili stanja na razrede tretjega reda. Pomen številčk je isti kot prej.

| $a$            | 1. razred<br>$b i$ | 2. razred<br>$f g n o t$ | 3. razred<br>$c d h j k l m r s$ |
|----------------|--------------------|--------------------------|----------------------------------|
| $\delta(a, 0)$ | 3 3                | 2 2 2 2 2                | 1 2 2 1 2 2 1 1 2                |
| $\delta(a, 1)$ | 2 2                | 3 3 3 3 3                | 3 3 3 3 3 3 3 3 3                |

Enako nadaljujemo z razredi tretjega reda:

| $a$            | 1. razred<br>$b i$ | 2. razred<br>$f g n o t$ | 3. razred<br>$c j m r$ | 4. razred<br>$d h k l s$ |
|----------------|--------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|
| $\delta(a, 0)$ | 3 3                | 2 2 2 2 2                | 1 1 1 1                | 2 2 2 2 2                |
| $\delta(a, 1)$ | 2 2                | 4 4 4 4 4                | 4 4 3 4                | 3 4 3 3 4                |

Razredi četrtega reda:

| $a$            | 1. razred<br>$b i$ | 2. razred<br>$f g n o t$ | 3. razred<br>$c j r$ | 4. razred<br>$m$ | 5. razred<br>$d k l$ | 6. razred<br>$h s$ |
|----------------|--------------------|--------------------------|----------------------|------------------|----------------------|--------------------|
| $\delta(a, 0)$ | 3 3                | 2 2 2 2 2                | 1 1 1                | 1                | 2 2 2                | 2 2                |
| $\delta(a, 1)$ | 2 2                | 5 5 5 5 5                | 6 6 6                | 3                | 3 3 3                | 6 6                |

Vidimo, da bodo razredi petega reda sovpadali z razredi četrtega reda. V zadnji tabeli so torej stanja že razdeljena na prave ekvivalenčne razrede. Množico stanj reduciranega avtomata, imenovali ga bomo **B**, bodo sestavljali ekvivalenčni razredi stanj avtomata **A**, oziroma predstavniki teh razredov. Izberimo npr. stanja  $b, c, d, f, h, m$  na predstavnike razredov. Funkciji  $\delta_1$  in  $\lambda_1$  za avtomat **B** določimo, kot je navedeno v dokazu izreka 3. Tako dobimo za delovanje avtomata **B** tabelo:

| $a$ | $\delta_1(a, 0)$ | $\delta_1(a, 1)$ | $\lambda_1(a, 0)$ | $\lambda_1(a, 1)$ |
|-----|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $b$ | $c$              | $f$              | 0                 | 1                 |
| $c$ | $b$              | $h$              | 1                 | 0                 |
| $d$ | $f$              | $c$              | 1                 | 0                 |

| $a$ | $\delta_1(a, 0)$ | $\delta_1(a, 1)$ | $\lambda_1(a, 0)$ | $\lambda_1(a, 1)$ |
|-----|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $f$ | $f$              | $d$              | 0                 | 1                 |
| $h$ | $f$              | $h$              | 1                 | 0                 |
| $m$ | $b$              | $c$              | 1                 | 0                 |

S tem končamo. Dokončna izdelava projekta za avtomat je stvar matematične logike in elektrotehnike.

Literatura: В. М. Глушков: Абстрактная теория автоматов. УМН. т. XVI, вып 5 (101), стр. 3—62.

# POVEZAVA TEORIJE ALGORITMOV S TEORIJO AVTOMATSKIH RAČUNALNIKOV

MARI VENCELJ

Pojem algoritma spada med osnovne matematične pojme. Pomeni predpis, ki natančno določa sistem operacij in njihov vrstni red pri reševanju poljubne naloge danega tipa. To seveda ni stroga matematična definicija pojma algoritem, ampak le pojasnjuje pomen same besede. Vendar je ta razlaga matematiku domača in razumljiva, ker se v njej zrcalita osnovni pomen in uporaba tega pojma v matematiki.

Sestavljanje algoritma za dani tip nalog, kadar ga je sploh mogoče dobiti, je v splošnem izredno zahtevno delo. Kakor hitro pa algoritem poznamo, postane reševanje, kot pravimo, čisto mehanično. To delo lahko opravi človek, ki naloge sploh ne razume, da je le zmožen slediti opisanemu algoritmu in obvlada tistih nekaj osnovnih operacij, ki jih algoritem predpisuje. V zadnjem času takega hipotetičnega računarja že uspešno zamenjujejo avtomatski računalniki. V njih je mogoče v principu realizirati vse doslej znane algoritme, kakor tudi vse, ki jih danes lahko predvidevamo. Z druge strani pa lahko vsak proces, ki poteka v računskem stroju, opišemo z algoritmom. Predzadnja trditev potrebuje pojasnilo. Algoritem more biti namreč po potrebi poljubno dolg in tudi število informacij, s katerimi operira, je lahko izredno veliko. Spomin sodobnih strojev pa je omejen. Tako se lahko izkaže realizacija algoritma pri določenih pogojih praktično neizvedljiva. Zato tedaj, ko govorimo o možnosti realizacije algoritma v računalniku, predvidevamo potencialno možnost neomejene povečave spomina v stroju.

Ogledali si bomo, kako nam omenjena zveza med algoritmom in avtomatskim računalnikom s potencialno neomejenim spominom omogoča razjasniti pojem algoritma.

## A. POTREBA PO STROGI DEFINICIJI ALGORITMA

Strogo matematično definicijo pojma algoritem so formulirali šele v 30. letih našega stoletja. Vzrok tolikšni zamudi je preprost. Do nedavnega so namreč izraz algoritem srečavali v matematiki le v zvezi z iskanjem konkretnih algoritmov. Vsako trditev, da algoritem za reševanje nalog danega tipa eksistira, so dokazali z njegovim dejanskim opisom. Tako potreba po strogi definiciji algoritma pravzaprav ni vznikla in je zadoščala domača, čeprav nejasna razlaga.

Z razvojem matematike pa se je stanje korenito spremenilo. Matematiki so iskali vedno splošnejše algoritme, ki naj bi reševali čim širše razrede nalog. Oglejmo si primer takega stopnjevanja!

1. Sestavi algoritem za računanje kvadratnega korena!
2. Sestavi algoritem za računanje korena poljubne stopnje!
3. Sestavi algoritem, po katerem bi rešili poljubno enačbo oblike  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , kjer je  $n$  poljubno naravno število!

Seveda zadnja naloga še ne predstavlja limite, preko katere ne gre. Če bi nadaljevali s širjenjem razreda nalog, za katere bi radi imeli enoten algoritem, bi neizogibno prišli do naslednjega problema:

Sestavi algoritem, ki bo omogočil rešiti poljubno matematično nalogo!

Vsekakor drzen poziv vseh matematiki.

Problem ima svojo zgodovino. Že Leibniz je sanjal o splošni metodi, s katero bi rešili poljubno nalogo. Čeprav sam takega splošnega algoritma ni našel, je menil, da se bo to nekoč zgodilo in tedaj bo mogoče vsak spor med matematiki rešiti avtomatsko v skladu s tem algoritmom.

Kasneje je problem dobil nekoliko manj splošno obliko v enem važnejših problemov matematične logike, tako imenovanem problemu odločitve. Kot vemo, je bistvo aksiomatične metode v matematiki v tem, da vse izreke dane teorije dobimo s formalno logičnimi zaključki iz nekaj aksiomov, ki jih v dani teoriji privzamemo brez dokaza. Problem odločitve pa imenujemo naslednjo nalogo: za dani sistem aksiomov je treba najti tak splošen algoritem, na čigar osnovi vedno lahko odločimo, ali je trditev, formulirana le s pojmi tega sistema, v okviru tega sistema dokazljiva ali ne. Očitno bi tvorba takega algoritma omogočila dobiti enotno reševalno metodo za vse naloge iz vseh matematičnih teorij, ki so tvorjene aksiomatično.

Prav gotovo je naloga sestaviti »vsesplošni« algoritem privlačna. Toda dolgi in vztrajni poskusi velikih matematikov so ostali brezuspešni. Nepremagljive težave so se pojavile celo že pri iskanju nekaterih konkretnih algoritmov (npr. Hilbertov problem o Diofantovih enačbah). Številni brezuspešni poskusi najti take algoritme so pokazali, da obstajajo principialne težave, in to je privedlo do prepričanja, da še zdaleč ni mogoče dobiti algoritma za vsak razred nalog.

Če rečemo, da je nek razred nalog algoritmično nerazrešljiv, ni to le preprosto priznanje, da takega algoritma ni doslej še nihče našel, ampak predstavlja tudi prognozo, da to ne bo nikoli nikomur uspelo. Tako trditev pa moramo utemeljiti z matematičnim dokazom. Toda vsako dokazovanje je brez pomena, dokler nimamo točne definicije pojma algoritem, ker v nasprotnem primeru ni jasno, za katero stvar moramo dokazati, da je ni.

Naj omenim, da so bili že zgodaj znani taki problemi, za katere je bilo ugotovljeno, da niso rešljivi s sredstvi, s katerimi so jih poskušali ugnati. Taka primera sta npr. problem trisekcije kota z ravnilom in šestilom in reševanje algebrائيh enačb z radikali. V obeh primerih sta bila dokaza, da nista nalogi rešljivi v vsakem primeru, možna, ker je bilo točno definirano, kaj je konstrukcija s šestilom in ravnilom in kaj pomeni reševanje enačb z radikali.

Medtem pa za splošen pojem algoritma do nedavnega nismo imeli točne definicije in je njena izdelava postala važna naloga sodobne matematike. Vendar formulacije definicije algoritma ne smemo razumeti kot poljubno soglasje matematikov o enakem pojmovanju termina algoritem. Definicija mora zajeti tisti pomen tega pojma, ki so mu ga pripisovali že prej, čeprav v nejasni obliki. V 30. letih 20. stoletja se je začela vrsta raziskovanj. Na različnih tehničnih in logičnih osnovah so različni avtorji oblikovali nekaj definicij, za katere se je izkazalo, da so med seboj ekvivalentne. Ogledali si bomo definicijo, ki je v zvezi s procesi v avtomatskih računalnikih.

Najprej potrebujemo neko standardno shemo s čim preprostejšo logično strukturo, ki naj prikaže delovanje stroja. Prvi je to naredil angleški matematik Turing, ki je predložil najpreprostejšo in najsplošnejšo koncepcijo računalnika. To je bilo leta 1937, torej pred sodobnimi računskimi stroji. Mi se njegovih izvajanj ne bomo strogo držali, ampak bomo privzeli splošne principe dela sodobnih elektronskih računalnikov.

## B. TURINGOV STROJ

Turingov stroj se od običajnih elektronskih računalnikov razlikuje predvsem v dveh važnih lastnostih:

1. Proces je razčlenjen na enostavnejše operacije v nekem smislu do limitne možnosti. Tako je npr. seštevanje, ki je v elektronskem računskem stroju elementarna operacija, v Turingovem stroju razčlenjeno v verigo še bolj preprostih operacij.

2. Del spomina (zunanji spomin) ima obliko na obe strani neomejenega traku, ki je razdeljen na celice. Seveda noben resničen stroj ne more imeti neskončnega spomina in v tem oziru je Turingov stroj idealizacija, ki odraža potencialno možnost neomejene povečave spomina v računalniku.

Podroben opis Turingovega stroja:

1. Stroj razpolaga s končnim številom znakov (črk)

$$s_1, s_2, \dots, s_k,$$

ki tvorijo tako imenovano zunanjo abecedo. V to abecedo je ugodno uvesti tudi prazen znak. Zapis te črke v katerokoli celico traku briše vsebino celice in jo ohranja prazno. Prazna celica hrani prazen znak. V danem trenutku more posamezna celica hraniti kvečjemu en znak. V zunanji abecedi so kodirane vse (začetne, vmesne in končne) informacije v stroju. Vsako informacijo predstavlja končen nabor od praznega znaka različnih črk zunanje abecede (beseda v tej abecedi). Preden prične stroj z delom, je na traku začetna informacija. Delo poteka v taktih, v katerih stroj predeluje začetno informacijo v vmesne informacije. Skupnost znakov na traku ob koncu vsakega takta predstavlja pripadajočo vmesno informacijo. Glede na začetno informacijo  $U$  ločimo dva primera:

a) Po končnem številu taktov se stroj ustavi in odda poseben signal o ustavitvi. Pri tem dobimo na traku neko informacijo  $B$ . V takem primeru pravimo, da stroj ustreza začetni informaciji  $U$  in da jo je predelal v končno informacijo  $B$ .

b) Stroj se nikoli ne ustavi. Pravimo, da stroj začetni informaciji  $U$  ne ustreza.

Nadalje pravimo, da stroj reši nek razred nalog, če vedno ustreza informaciji, ki v določenem kodu predstavlja pogoje poljubne naloge tega razreda, in jo pretvori v informacijo, ki v istem kodu predstavlja rešitev te naloge.

2. Sodobne računalnike ločimo po zgradbi ukazov na enonaslovne do štirinaslovne. Turingov stroj je še posebej poenostavljen enonaslovni računalnik. Pri enonaslovnih računalnikih nastopa v posameznem taktu ena sama celica spomina. Da bomo lažje govorili, jo imenujmo opazovana celica. Sistem osnovnih operacij v Turingovem stroju je posebno enostaven. V posameznem taktu predpisuje ukaz le zameno znaka  $s_i$  v opazovani celici s poljubnim drugim znakom zunanje abecede  $s_j$ . Za  $j = i$  se vsebina opazovane celice ne spremeni. Druga poenostavitev pa je v tem, da se moreta naslova opazovanih celic v dveh zaporednih taktih razlikovati kvečjemu za eno. V danem taktu torej lahko opazujemo isto celico kot v prejšnjem taktu ali pa njeno sosedo na desni ali levi. Če hočemo tedaj najti vsebino poljubne določene celice na traku, moramo zapored kontrolirati vse celice, dokler ne pridemo do iskane celice. Seveda to

precej podaljša proces. Zato pa se lahko v ukazih programa omejimo le na uporabo treh standardnih naslovov, ki jih označimo s posebnimi znaki:

- $D$  — prehod k sosednji celici na desni,
- $L$  — prehod k sosednji celici na levi,
- $O$  — naslov opazovane celice se ne izpremeni.

3. Kot vemo, poteka v običajnih računalnikih predelava informacij v aritmetični enoti, ki je lahko v enem izmed končnega števila stanj: seštevanje, odštevanje itd. V aritmetično enoto ne tečejo le informacije, ki naj jih stroj predela, ampak tudi signali, ki uglasijo aritmetično enoto na pravo operacijo.

V Turingovem stroju prevzame vlogo aritmetične enote logična enota  $L$ , ki je prav tako lahko v enem izmed končnega števila stanj. Naj bodo

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$$

posebni znaki, s katerimi označimo ta stanja. Skupno z  $D$ ,  $L$ ,  $O$  tvorijo notranjo abecedo stroja. Logična enota ima dva vhoda. Skozi enega pride vanjo vsebina opazovane celice, skozi drugega pa znak  $q_l$ , ki pove, katero stanje naj logična enota v naslednjem taktu zavzame. Posamezni ukazi imajo torej obliko

$$Dq_l, Lq_l, Oq_l \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

kjer prvi znak zamenja naslov opazovane celice, drugi pa določa stanje logične enote.

Nadalje ima logična enota tri izhodne kanale. Po enem pošilja v opazovano celico predelano vsebino, po drugih dveh pa v upravno enoto oba znaka naslednjega ukaza. Turingov stroj ima namreč še to posebnost, da logična enota v vsakem taktu izdelata tudi ukaz, ki bo šel v upravno enoto v začetku naslednjega takta.

Izhodna trojica znakov  $s_i, R, q_l$  ( $R$  je znak poljubnega premika) je odvisna le od tega, kakšen par  $s_i, q_n$  (teh je  $k \cdot m$ ) je bil na vhodu v začetku takta. To pomeni, da logična enota realizira funkcijo, ki priredi vsakemu paru  $s_i, q_n$  trojico znakov  $s_i, R, q_l$ . To logično funkcijo stroja normalno upodobimo v tablici, ki jo imenujemo funkcionalna shema Turingovega stroja. Stolpce označimo z znaki stanj logične enote, vrstice s črkami zunanje abecede, v posamezne kvadratke tabele pa zapišemo ustrezajočo izhodno trojico. Na sliki 1 je primer take funkcionalne sheme.

Z logično funkcijo je delo Turingovega stroja natančno določeno. Ker nas zanima le delo strojev, dveh Turingovih strojev s skupno funkcionalno shemo ne ločimo.

Da si bomo lažje predstavljali, kako poteka delo v Turingovem stroju, si oglejmo strukturno shemo Turingovega stroja na sliki 2. V shemi sta notranji in zunanji spomin ločena. Zunanji spomin je na brezkončnem traku, notranjega pa tvorita dve celici, ki hranita zaporedne ukaze:  $Q$  hrani znak stanja logične enote,  $R$  znak premika. Celici zadržita znaka, ki sta prišla iz logične enote, do začetka naslednjega takta, ko vstopita v upravno enoto. Delo upravne enote je v Turingovem stroju zelo skrženo. Upravna enota skrbi le še za premik traku v skladu z znakom, ki je prišel iz celice  $R$ . Znak  $q_l$  namreč lahko pošljemo iz  $Q$  naravnost v  $L$  brez ovinka preko upravne enote.



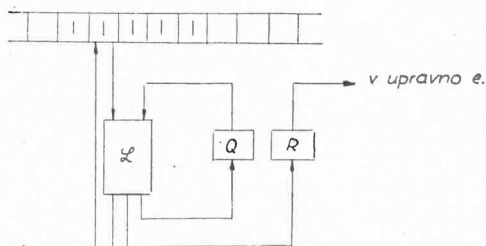
Delo samo poteka takole:

Najprej zapišemo na trak začetno informacijo. Nato določimo začetno opazovano celico in uvedemo v  $Q$  in  $R$  znaka začetnega stanja in začetnega premika. Vse nadaljnje delo poteka avtomatsko v skladu s pripadajočo funkcionalno shemo.

Kaj npr. nastane, če je dana funkcionalna shema na sliki 1? Začetna informacija in začetna celica naj bosta isti kot na sliki 2, začetno stanje  $q_1$  in začetni premik  $O$ .

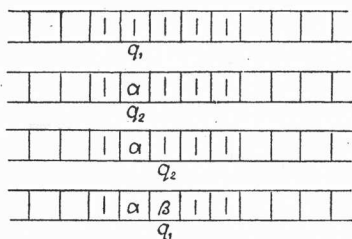
|          | $q_1$         | $q_2$         | $q_3$         | $q_4$         | $q_5$         |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\wedge$ | $\wedge Dq_1$ | $\wedge Lq_2$ | $\wedge Dq_3$ | $\wedge Oq_4$ | $\wedge Oq_5$ |
| $\vee$   | $\alpha Oq_2$ | $\beta Oq_1$  | $\vee Dq_1$   | $\vee Lq_2$   | $\vee Oq_3$   |
| $\alpha$ | $\alpha Lq_1$ | $\alpha Dq_2$ | $\vee Lq_3$   | $\wedge Dq_4$ | $\alpha Oq_5$ |
| $\beta$  | $\beta Lq_1$  | $\beta Dq_2$  | $\wedge Lq_3$ | $\vee Dq_4$   | $\beta Oq_5$  |

Slika 1.



Slika 2.

Kljub temu, da stroja nimamo, lahko odgovorimo na to vprašanje. V skladu s funkcionalno shemo more namreč delati tudi računar. Zanj je funkcionalna shema algoritem za preobrazovanje začetnih informacij v končne. Pri tem si pomaga z zapisovanjem vmesnih informacij. Ker si bomo tudi mi tako pomagali, uvedimo pojem konfiguracije.  $k$ -ta konfiguracija naj pomeni sliko traku v Turingovem stroju v začetku  $k$ -tega takta, pri čemer bomo pod opazovano celico napisali znak stanja logične enote v začetku tega takta. Na sliki 3 je prvih nekaj konfiguracij naše naloge.



Slika 3.

|          | $q_1$        | $q_2$       | $q_3$      | $q_4$      |
|----------|--------------|-------------|------------|------------|
| $\wedge$ | $Dq_1$       | $Lq_2$      | $Dq_1$     | $\vee$     |
| $\vee$   | $\alpha q_2$ | $\beta q_1$ | $Dq_1$     | $Lq_2$     |
| $\alpha$ | $L$          | $D$         | $\vee L$   | $\wedge D$ |
| $\beta$  | $L$          | $D$         | $\wedge L$ | $\vee D$   |

Slika 4.

Stroj se bo ustavil le pri pogoju, če bo logična enota zavzela stanje  $q_5$ . To je končno stanje, ki ga navadno označimo s »!«. Stanje  $q_5$  namreč ohranja poljuben znak v opazovani celici, ohranja se pa tudi stanje logične enote. Od takta, v katerem je prvič nastopilo stanje  $q_5$ , naprej so torej vse konfiguracije med seboj enake.

Omenim naj še, da navadno pišemo funkcionalno shemo v enostavnejši obliki. V izhodni trojki  $s_j, R, q_l$  izpuščamo  $s_j$  in  $q_l$ , če se ne razlikujeta od pripadajočih vhodnih znakov. Redno tudi izpuščamo znak premika  $O$ . Na sliki 4 je poenostavljena shema s slike 1.

## C. REALIZACIJA EVKLIDOVEGA ALGORITMA V TURINGOVEM STROJU

Oglejmo si, kako sestavimo Turingov stroj, ki realizira enostaven aritmetični algoritem in kako teče v stroju realizacija tega algoritma. Pri tem bomo pod konstrukcijo Turingovega stroja razumeli konstrukcijo funkcionalne sheme njegove logične enote.

Kot že naslov pove, se bomo ukvarjali z Evklidovim algoritmom. Ogledali bi si ga za primer iskanja največjega skupnega delitelja dveh naravnih števil  $a$  in  $b$ .

Nalogo navadno rešujemo tako, da tvorimo padajoče zaporedje števil. Prva dva člena zaporedja sta števili  $a$  in  $b$  (večje na prvem mestu), tretji je ostanek deljenja prvega števila z drugim, četrti ostanek deljenja drugega števila s tretjim itd., dokler se deljenje ne izide. Zadnji delitelj je največja skupna mera števil  $a$  in  $b$ .

Ker lahko deljenje prevedemo na zaporedno odštevanje, bi mogli formulirati Evklidov algoritem tudi takole:

1. Opazuj števili  $a$  in  $b$ ! Prehod k naslednjemu ukazu.
2. Primeraj opazovani števili! Prehod k naslednjemu ukazu.
3. Če sta števili enaki, je vsako zase rezultat. Stoj! Če nista enaki, pojdi k naslednjemu ukazu!
4. Če je prvo opazovano število manjše od drugega, ju zamenjaj! Prehod k naslednjemu ukazu.
5. Odštej drugo število od prvega in opazuj subtrahend in razliko! Prehod k drugemu ukazu.

Ta oblika je tudi osnova za konstrukcijo funkcionalne sheme Turingovega stroja, ki realizira Evklidov algoritem.

Za kodiranje informacij desetiški kod še zdaleč ni najboljši. Ker so začetni in vmesni podatki ter rezultat naravna števila, si raje izberemo bolj naraven kod: poljubno naravno število  $n$  naj predstavlja nabor  $n$  črtic (znak !), po ena v  $n$  zaporednih celicah spomina. S takim kodiranjem skrajšamo zunanjo abecedo stroja le na štiri črke

$$\wedge, !, \alpha, \beta,$$

kjer je  $\wedge$  prazen znak.

Ni se težko prepričati, da je funkcionalna shema na sliki 4 tista, ki jo iščemo. Če hočemo, da bo v skladu z njo delo v redu potekalo, moramo začetni števili  $a$  in  $b$  zapisati na trak eno za drugim, ne da bi ju ločili s kako celico. Pri tem moramo za začetno celico izbrati skrajno desno celico levega števila, za začetno stanje pa  $q_1$ . Brez posebnega truda bi mogli funkcionalno shemo toliko spremeniti, da bi omogočila pravilen potek dela, četudi bi med obe števili vtaknili kakšen znak, npr. zvezdico.

Delo sestavljajo izmenoma cikli primerjanja (stanji  $q_1$  in  $q_2$ ) in cikli odštevanja ( $q_3, q_4$ ). Najprej zamenja stroj zadnjo črtico prvega števila z  $a$  in



Pojavita se dve vprašanji:

1. Kakšen pomen ima ta hipoteza za teorijo algoritmov?
2. Kaj jo utemeljuje?

Predvsem naj opozorim na naslednjo značilnost dane hipoteze. Na eni strani govorimo o vsakem algoritmu, to je o splošnem pojmu algoritma, ki, kot sem že večkrat poudarila, ni strog matematičen pojem, na drugi pa o tako natančnem matematičnem pojmu, kot je Turingova funkcionalna shema. V tem pa je tudi pomen naše hipoteze, ker določa splošen nejasen pojem »vsakega algoritma«<sup>1</sup> z bolj specialnim in natančnim pojmom Turingove sheme. S to hipotezo postanejo smiselna tudi vprašanja, ali je mogoče najti algoritem za naloge tega ali onega tipa. Tako vprašanje moremo namreč sedaj pojmovati kot vprašanje o eksistenci Turingovega stroja s potrebnimi lastnostmi.

In utemeljitev hipoteze? Najprej naj pripomnim, da ne more biti govora o tem, da bi to hipotezo dokazali tako, kot navadno dokazujemo v matematiki izreke. Hipoteza sploh nima značaja izreka, ker trdi nekaj o splošnem pojmu algoritma, ki ni točen matematičen pojem in tudi ne more biti predmet strogih matematičnih sodb.

Prepričanje o pravilnosti hipoteze temelji v glavnem na izkušnjah. Vse znane algoritme moremo namreč posredovati s funkcionalnimi shemami. Res je, da se hipoteza ne obrača le v preteklost, ampak ima očitno tudi značaj prognoze za bodočnost: kadarkoli bo v prihodnosti kakršenkoli predpis dan z algoritmom, ga bo možno posredovati s Turingovo funkcionalno shemo, neodvisno od tega, v kakšni obliki in s kakšnimi sredstvi bo najprej izražen. V tem smislu lahko osnovno hipotezo enačimo s fizikalnim zakonom, npr. z zakonom o ohranitvi energije, na čigar osnovi tudi delamo napovedi za prihodnost. Ogromne izkušnje v preteklosti so zadostna podlaga za podobne prognoze.

Obstajajo tudi druge razlage, ki potrjujejo pravilnost osnovne hipoteze. Spomnim naj le na okoliščino, ki sem jo omenila že na koncu prvega poglavja. Razen s funkcionalnimi shemami so splošen algoritem definirali tudi drugače. Vse dobljene definicije pa so se izkazale kot ekvivalentne, kar prav gotovo ni slučaj, ampak le še dopolnilni dokaz o veljavnosti naše hipoteze.

Omenim naj še, da se v sami teoriji algoritmov pri dokazovanju izrekov nikjer ne sklicujejo na osnovno hipotezo. Tako bi človek, ki te hipoteze ne pozna ali je ne prizna, ne srečal nobenih ovir v teoriji algoritmov.

## D. UNIVERZALEN TURINGOV STROJ

Doslej smo različne algoritme realizirali v različnih Turingovih strojih, ki so se razlikovali med seboj po funkcionalnih shemah logične enote. Možno pa je sestaviti univerzalen Turingov stroj, ki zmore v določenem smislu delo poljubnega Turingovega stroja.

Človek, ki je seznanjen s principom dela Turingovega stroja, lahko posnema delo stroja. Zadostujeta mu začetna konfiguracija in funkcionalna shema stroja, pa bo pridelal isto končno konfiguracijo kot stroj. Tako smo npr. ravnali pri Evklidovem algoritmu. Toda tudi človek, ki Turingovega stroja sploh ne pozna, bi mogel uspešno posnemati proces v stroju, če bi sledil naslednjemu algoritmu posnemanja:

1. Opazuj v dani konfiguraciji celico, pod katero je črka!
2. Poišči v funkcionalni shemi stolpec, označen s to črko!

3. V tem stolpcu poišči trojko črk, ki je na presečišču z vrstico, označeno s tisto črko, ki je v opazovani celici!

4. Zamenjaj črko v opazovani celici s prvo črko trojke!

5. Če je druga črka trojke »!«, prenehaj z delom!

6. Če je druga črka trojke *O*, zamenjaj črko pod celico s tretjo črko trojke!

7. Če je druga črka *L*, zbriši črko pod opazovano celico in zapiši levo od nje tretjo črko trojke!

8. Če je druga črka *D*, zbriši črko pod opazovano celico in zapiši desno od nje tretjo črko trojke!

9. Prehod k ukazu 1.

Izkaže se, da takega človeka lahko zamenja Turingov stroj, da torej algoritem posnemanja spet lahko posredujemo z neko Turingovo funkcionalno shemo. Strog dokaz tega dejstva, ki je še ena potrditev pravilnosti osnovne hipoteze, je za obseg tega članka preobširen. Omejili bi se na nekatere posameznosti, ki bodo ilustrirale samo delo.

Pri algoritmu posnemanja tvorita začetno informacijo funkcionalna shema posnemanega stroja in začetna konfiguracija. Te informacije pa ne moremo podati neposredno na trak univerzalnega stroja. Funkcionalno shemo smo namreč doslej dajali v obliki dvodimenzionalnih tablic in tudi konfiguracije niso bile razporejene v eni vrsti, ker smo pod opazovano celico podpisovali znak stanja logične enote, trak pa more sprejeti le enodimenzionalno informacijo.

Druga težava je v tem, da razpolaga univerzalni kot vsak drug Turingov stroj le s fiksno končno abecedo. Ta mora biti primerna za kodiranje vseh možnih shem in konfiguracij, v katerih srečamo črke različnih abeced.

Prvo težavo odpravimo tako, da namesto tabele s  $k$  vrsticami in  $m$  stolpci zapišemo zapored  $m \cdot k$  petork črk, tako da prvi simbol pove stolpec, drugi vrstico tablice, zadnji trije za trojko iz sheme. Analogno ravnamo pri konfiguracijah. Znak stanja zapišemo neposredno levo od opazovane črke. V obeh primerih je očitno preslikava povratno enolična.

Za značaj funkcionalne sheme in konfiguracij nikakor niso bistveni simboli zunanje abecede in abecede stanj. Važno je le, da različna stanja in različne predmete različno označimo in da ločimo med seboj črke obeh abeced. Tako priredimo v univerzalnem Turingovem stroju vsaki črki neko kodirno skupino — zaporedje ničel in enic; različne črke zamenjamo z različnimi dvojškimi števili.

Naj preide pri taki zamenjavi vrstica  $\Omega$  v vrstico  $\Omega'$ . Da bo preslikava med  $\Omega$  in  $\Omega'$  povratno enolična, mora način kodiranja ustrezati naslednjim pogojem:

1.  $\Omega'$  se da enolično razbiti na posamezne kodirane skupine.

2. Ločiti moramo kodirane skupine stanj od kodirnih skupin zunanje abecede in vedeti, katere pripadajo simbolom premika.

Tema dvema pogojema ustreza naslednji način kodiranja:

1. Vsaka kodirna skupina ima obliko  $100 \dots 01$  (med dvema enojkama same ničle).

## 2. Posameznim črkam pripadajo naslednje kodirne skupine:

|                 | črka    | kodirna skupina |                     |
|-----------------|---------|-----------------|---------------------|
|                 | $L$     | 101             |                     |
|                 | $O$     | 1001            |                     |
|                 | $D$     | 10001           |                     |
| zunanja abeceda | $s_1$   | 100001          |                     |
|                 | $s_2$   | 10000001        |                     |
|                 | $\cdot$ | .....           | od dve večje sodo   |
|                 | $\cdot$ | .....           | število ničel       |
|                 | $s_k$   | 100...01        |                     |
| abeceda stanj   | $q_1$   | 1000001         | liho število ničel, |
|                 | $b_2$   | 100000001       | večje od tri        |
|                 | $\cdot$ | .....           |                     |
|                 | $b_m$   | 1000...01       |                     |

Zaporedje ničel in enic, ki pripada dani funkcionalni shemi ali konfiguraciji, imenujemo šifro funkcionalne sheme oziroma šifro konfiguracije.

Seveda ima pri takem kodiranju algoritem posnemanja, ki predela šifro funkcionalne sheme posnemanega stroja in šifro začetne konfiguracije v šifro končne konfiguracije, drugačno obliko kot ukazi 1—9. Tako npr. preide 1. ukaz v naslednjega:

1'. Opazuj v šifri konfiguracije kodirno skupino, ki neposredno sledi kodirni skupini z lihim številom ničel.

Podobno bi lahko popravili ves algoritem posnemanja. Nadaljnja obdelava tega algoritma bi končno privedla vsako operacijo med kodirnimi skupinami k verigi standardnih operacij, ki jih realizira Turingov stroj. Tako bi res lahko algoritem posnemanja opisali z neko Turingovo funkcionalno shemo — shemo univerzalnega Turingovega stroja.

## ZAKLJUČEK

Videli smo, da moremo vsako vprašanje o algoritmični razrešljivosti nekega razreda nalog pojmovati kot vprašanje o eksistenci Turingovega stroja, ki reši dani razred nalog. V teoriji algoritmov dobimo na to vprašanje v številnih primerih negativen odgovor. Enega prvih takih rezultatov je dobil ameriški matematik Church za problem odločitve. Churchov izrek trdi, da je problem odločitve algoritmično nerazrešljiv.

Izreki, da je ta ali oni razred nalog algoritmično nerazrešljiv, nas ne smejo prestrašiti. Tak izrek se namreč tiče vsega razreda nalog in trdi le, da vseh nalog tega razreda ne moremo rešiti z enotno metodo. V takem primeru poskušamo najti algoritme, s katerimi bi reševali čim širše podrazrede nalog danega tipa.

Izreki o algoritmični nerazrešljivosti tudi pričajo, da ne bo delo v matematiki nikoli povsem avtomatizirano. Torej so različne trditve, da bo stroj nekoč človeka popolnoma zamenjal, nesmiselne.

Literatura: Б. А. Трахтенброт: Алгоритмы и машинное решение задач, Москва 1957.

# POLPREVODNIŠKI ŠTEVEC S POVRŠINSKO ZAPORNO PLASTJO

ZVONKO TRONTELJ

(Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko)

## UVOD

Polprevodniške števce so prvič uporabili za štetje delcev  $\alpha$  že leta 1949.<sup>1</sup> Toda znatno so jih izpopolnili šele v zadnjih nekaj letih vzporedno z razvojem tehnologije polprevodnikov. Danes je možno dobiti silicij izredne čistoče (specifična upornost nad  $5000 \Omega \text{ cm}$  pri siliciju tipa  $n$ ), ki je potreben za izdelovanje visokokvalitetnih polprevodniških števecov. Zato se je uporaba polprevodniških števecov v zadnjih letih močno razširila in ti števci zaradi dobre energijske ločljivosti večkrat uspešno nadomeščajo magnetne spektrometre.

Polprevodniški števec je v bistvu silicijeva ali germanijeva dioda in ga lahko razmeroma preprosto izdelamo. Občutljivi prostor števca predstavlja območje v bližini stika  $n - p$ .

Ker v polprevodniškem števcu praktično ni pomnoževanja parov elektron-vrzel, je delovanje tega števca podobno delovanju ionizacijske celice.

Če se ustavi električno nabit delec v občutljivem prostoru števca, je na elektrodah števca zbrani naboj sorazmeren energiji delca.

Za tvorbo enega para elektron — vrzel v siliciju je potrebno 3,6 eV, kar je 8-krat manj kot je treba za ionizacijo argona, ki ga običajno rabimo v plinskih ionizacijskih celicah. Zato je energijska ločljivost polprevodniških števecov zaradi statistike  $\sqrt{8}$ -krat boljša kot pri ionizacijskih celicah in se za delce  $\alpha$  približa ločljivosti magnetnih spektrometrov. Vendar pa izredna ločljivost polprevodniških števecov pri daljših meritvah ne pride do izraza zaradi nestabilnosti elektronskih aparatov. Dosedanje elektronske aparature so bile namreč grajene za števce z bistveno slabšo ločljivostjo in je bila njih stabilnost zadovoljiva.

## DELOVANJE POLPREVODNIŠKEGA ŠTEVCA S POVRŠINSKO ZAPORNO PLASTJO

*Inverzna plast, površinska zaporna plast in občutljivi prostor števca.* Inverzno plast imenujemo tenko površinsko plast polprevodnika, ki je nasprotnega tipa kot primarni polprevodnik. Tako plast lahko dobimo z difuzijo nečistoč tipa  $p$  v polprevodnik tipa  $n$  in obratno. Inverzno plast na polprevodniku tipa  $n$  dobimo lahko še bolj enostavno na način, ki si ga bomo natančneje ogledali.

Polprevodniki imajo lahko zaradi adsorpcije določenih plinov na površini površinske naboje, ki povzročijo nastanek dvojne plasti.<sup>2</sup> Zaradi adsorpcije kisika na siliciju  $n$  se nabere na siliciju negativni površinski naboj, ki odbije proste elektrone v prevodnem pasu in pritegne vrzeli valenčnega pasu (sl. 1). V plasti tik pod površino kristala je tako presežek vrzeli; zato ima ta plast enake lastnosti kot polprevodnik tipa  $p$ .

Porazdelitev elektronov in vrzeli kot jo kaže sl. 1 predstavlja dvojno plast. Električno polje dvojne plasti preprečuje difuzijo elektronov in vrzeli v tej plasti. Zato se ohrani stanje, ki je nastalo zaradi površinskega naboja.

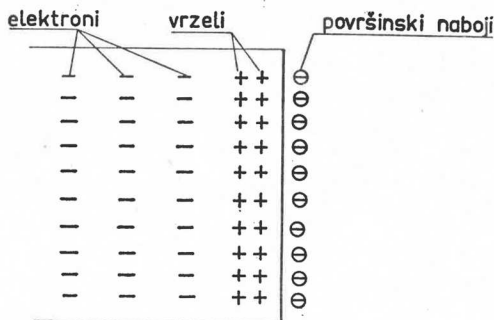


V plasti tik pod površino ni prostih elektronov, ker jih je odbil negativni površinski naboj. Ta prostor imenujemo zaporna plast in predstavlja občutljivi prostor števca.

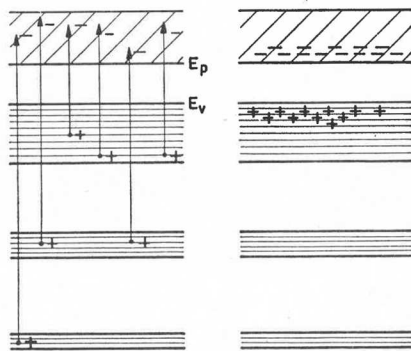
Izračunajmo debelino zaporne plasti!<sup>3</sup> Polje dvojne plasti povzroča prostorski naboj ioniziranih donorskih atomov v zaporni plasti. Zveza med potencialom in prostorskim nabojem je podana s Poissonovo enačbo:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = - \frac{Ne}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (1)$$

kjer je  $N$  števil ioniziranih donorskih atomov na prostorsko enoto v zaporni plasti,  $\epsilon$  je dielektrični konstanta silicija ( $\epsilon = 12$ ),  $\epsilon_0$  je influenčna konstanta,  $e$  pa osnovni naboj. Poissonovo enačbo smo napisali enodimenzionalno, ker so dimenzije števca velike v primeri z debelino zaporne plasti. Koordinata  $x$  kaže pravokotno od površine števca proti notranjosti števca.



Slika 1.



Slika 2.

Če upoštevamo robne pogoje  $U = 0$  pri  $x = 0$  in  $dU/dx = 0$  pri  $x = d$ , dobimo iz enačbe (1):

$$U = - \frac{Ne}{2 \epsilon \epsilon_0} x^2 + \frac{Ned}{\epsilon \epsilon_0} x \quad (2)$$

Ako je med točkama  $x = 0$  in  $x = d$  potencialna razlika  $U_0$ , sledi iz enačbe (2) za debelino zaporne plasti:

$$d = \sqrt{\frac{2 \epsilon \epsilon_0 U_0}{Ne}} \quad (3)$$

Električna poljska jakost v zaporni plasti je:

$$E = - \frac{dU}{dx} = - \frac{Ne}{\epsilon \epsilon_0} (d - x) \quad (4)$$

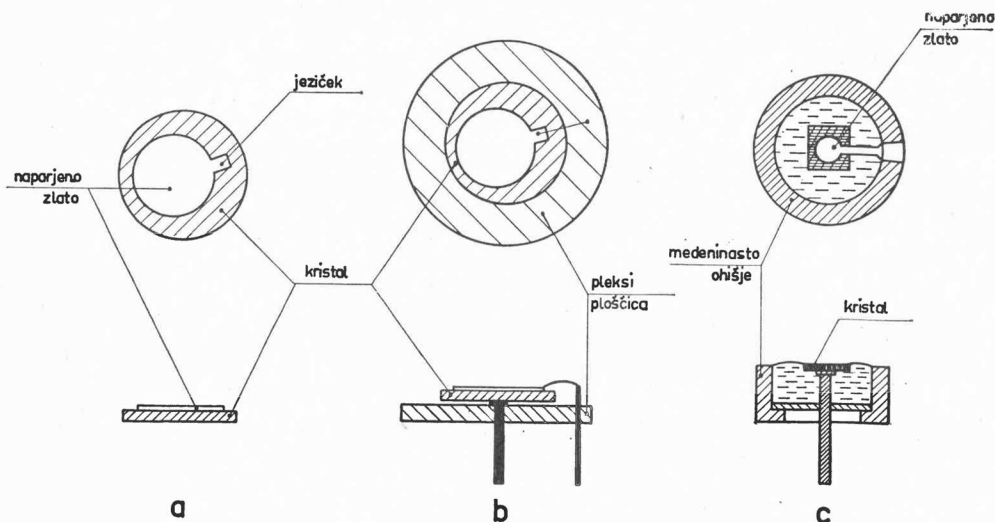
Iz enačbe (4) vidimo, da ima električno polje maksimalno vrednost na začetku zaporne plasti.

Če priključimo na števec napetost v zaporni smeri, to je negativni pol na območje  $p$  in pozitivni pol na območje  $n$ , se potencialna razlika med obema

območjema poveča. Istočasno se poveča tudi debelina občutljivega števnege prostora. Tako lahko z različnimi pritisnjenimi napetostmi poljubno spreminjamo debelino števnege prostora.  $d$  izračunamo ravno tako kot prej iz enačbe (3), le da moramo namesto  $U_0$  vstaviti vsoto iz  $U_0$  in napetosti na števcu  $U$ . Ker je potencialna razlika na zaporni plasti  $U_0$ , kadar ni napetosti na števcu, majhna (do 0,5 V), jo lahko največkrat zanemarimo in upoštevamo samo napetost na števcu  $U$  (od 10 do 100 V).

$$d = \sqrt{\frac{2 \varepsilon \varepsilon_0 U}{Ne}} \quad (5)$$

Spreminjanje debeline občutljivega prostora z napetostjo na števcu lahko opazimo, če merimo linearnost višine impulzov v odvisnosti od energije delcev.



Slika 3.

Kapaciteta števca je zaradi njegove geometrije dana z izrazom:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}, \quad (6)$$

kjer je  $S$  površina števca. Za meritve so ugodni števci z majhno kapaciteto, ker imajo majhen šum.

*Nabit delci v polprevodnikih.* Nabit delec sodeluje pri prehodu skozi snov z elektroni in se ustavlja. Pri trkih pridobijo elektroni dovolj energije, da pridejo iz valenčnega pasu in iz energijsko nižjih zasedenih pasov v višji nezasedeni pas (sl. 2 a). Elektroni se pojavijo v nezasedenem pasu, vrzeli pa v zasedenih pasovih. Tako stanje traja približno  $10^{-12}$  sekunde. Zaradi sodelovanja med elektroni in fononi nastane stanje, kot ga kaže sl. 2 b: Elektroni so le v spodnjem delu nezasedenega pasu, to je prevodnega pasu, vrzeli pa v zgornjem delu najvišje ležečega zasedenega pasu, to je valenčnega pasu.

V siliciju je treba za tvorbo enega para elektron-vrzel v povprečju  $3,6 \pm 0,3$  eV.<sup>4</sup> Najmanjša potrebna energija za tvorbo para je enaka širini

prepovedanega pasu in je pri siliciju 1,1 eV. Ostalo energijo odda elektron kristalni mreži.<sup>5</sup>

Množina energije, ki jo porabi primarni delec za tvorbo para elektron-vrzel, je neodvisna od vrste in energije primarnega delca.

*Potovanje nosilcev naboja v zaporni plasti.* Električno polje v polprevodniškem števcu vpliva na elektrone in vrzeli, ki jih ustvari primarni delec v polprevodniku, podobno kot na ione in elektrone v plinski ionizacijski celici. Elektroni se gibljejo proti pozitivni, vrzeli pa proti negativni elektrodi.

Nosilec naboja pride od roba zaporne plasti do nekega mesta  $x$  v času  $t$ :

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v} = \int_0^x \frac{dx}{\mu E} = - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu N e} \int_0^x \frac{dx}{d-x} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu N e} \ln \frac{d-x}{d}, \quad (7)$$

kjer je  $v$  hitrost nosilca naboja,  $\mu$  pa njegova gibljivost. Upoštevali smo enačbo (4) in privzeli, da je  $\mu$  konstanta.

Izračunajmo sedaj, kako se spreminja s časom tokovni impulz na izhodu števca zaradi gibanja enega nosilca naboja. Nosilec naboja črpa iz električnega polja v števcu moč:

$$U i = e v E, \quad (8)$$

kjer je  $i$  tok zaradi gibanja enega nosilca naboja. Enačbo (8) lahko zapišemo:

$$i = \frac{e \mu E^2}{U} \quad (9)$$

Ce upoštevamo enačbo (4), preide enačba (9) v:

$$i = \frac{e \mu}{U} \left( \frac{N e}{\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 (d-x)^2 \quad (10)$$

Iz enačbe (7) dobimo:

$$d-x = d e^{-\frac{\mu N e}{\varepsilon \varepsilon_0} t} \quad (11)$$

Končno dobimo za potek tokovnega impulza v odvisnosti od časa naslednji izraz:

$$i = \frac{e \mu}{U} \left( \frac{N e d}{\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 e^{-\frac{2 \mu N e}{\varepsilon \varepsilon_0} t} = \frac{e \mu}{U} E_{\max}^2 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (12)$$

kjer je  $\tau$  čas naraščanja tokovnega impulza in je enak:

$$\tau = \frac{d}{2 \mu |E_{\max}|} \quad (13)$$

V siliciju je gibljivost elektronov pri sobni temperaturi  $\mu_n = 1200 \text{ cm}^2/\text{V sek}$ , gibljivost vrzeli pa  $\mu_p = 500 \text{ cm}^2/\text{V sek}$ .<sup>6</sup> Pri električni poljski jakosti velikostnega reda  $10^8 \text{ V/cm}$  in debelini zaporne plasti  $10^{-2} \text{ cm}$ , kar so običajne delovne razmere števca, je čas naraščanja tokovnega impluza približno  $10^{-8} \text{ sek}$ . To je veliko manj kot pri ionizacijski celici z enako ustavljajno sposobnostjo predvsem zato, ker prepotujejo nosilci naboja v polprevodniških števcih znatno krajšo pot.

## IZDELAVA ŠTEVCEV S POVRŠINSKO ZAPORNO PLASTJO

S polprevodniškimi števci se ukvarjajo tudi na Nuklearnem inštitutu »Jožef Stefan« v Ljubljani in v naslednjih vrsticah bomo opisali izdelavo števca in meritve njegove ločljivosti.

Priprava silicijevih kristalov za števce poteka po postopkih, ki so običajni v tehnologiji polprevodnikov. Silicijevi monokristali so naproday v obliki palic različnih premerov. Vzdolžna os palice je paralelna s kristalografsko osjo [1, 1, 1]. S posebno žago razžagamo palico v rezine, pravokotne na os. Rezine lahko razžagamo še na manjše dele, ki jih nato brusimo z različnimi vrstami brusilnih praškov toliko časa, da dobimo fino, toda nezrcalno površino.

Nato kristal očistimo v vreli solitrni kislini in ga jedkamo 5 do 10 minut v raztopini CP—4 A (2 volumnska dela koncentrirane solitrne kisline, 1 volumnski del 40 % fluorovodikove kisline, 1 volumnski del ledene oetne kisline), da dobimo površino silicija zrcalno gladko.

Po jedkanju speremo kristal z deionizirano vodo in pazimo, da ne pride med spiranjem v stik z zrakom. Kristal osušimo na čistem filtrirnem papirju ali v curku kisika.

Na tako pripravljen kristal naparimo zlato. Pred naparevanjem pripravimo sljudno masko, ki definira občutljivo površino števca in prepreči naparevanje zlata na robovih kristala (sl. 3 a). Zlato naparimo tako, da dobimo na kristalu polprozoren film, kar ustreza približno debelini 30 do 60  $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ . Kristal spravimo na čisto in suho mesto ter počakamo nekaj dni, da se na njegovi površini formira oksidna plast. Oksidacija se izvrši skozi tenko plast zlata.

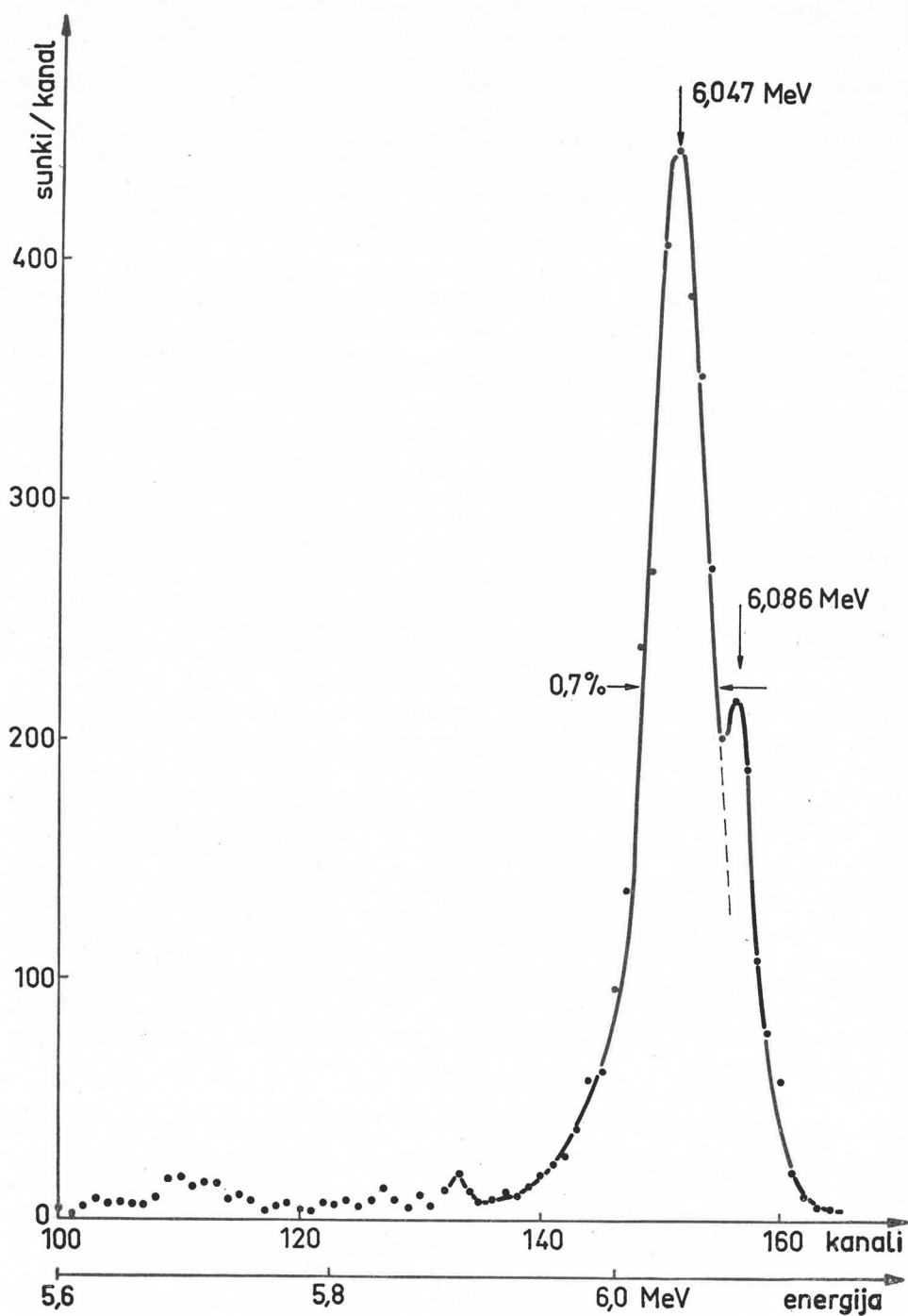
Kristal nalepimo z zadnjo stranjo na kovinski nosilec, ki predstavlja hkrati spodnji kontakt (sl. 3 b). Ta kontakt naj bo čimbolj ohmski, da se zmanjša šum števca.<sup>7</sup> Za lepilo uporabljamo umetno smolo z dodatkom srebra, ki naredi lepilo prevodno. Manjše števce zalijemo z aralditom v medeninasto ohišje. Jeziček v sljudni maski je tu podaljšan do ohišja, kot kaže slika 3 c. Večje števce smo montirali na ploščico iz pleksija. Pri njih smo naredili zgornji kontakt s tenko zlato žičko, ki smo jo prilepili na enem koncu na jeziček zlate površine, drugi konec pa prilotali na kovinski nastavek v pleksi ploščici (sl. 3 b). Tako narejen števec moramo segrevati eno uro pri temperaturi 90 °C, da se strdi lepilo.

Ko imamo narejen števec, moremo ugotoviti njegovo kvaliteto precej dobro z merjenjem toka, ki teče skozi števec, kadar je nanj priključena napetost v zaporni smeri. Izgleda namreč, da je šum števca sorazmeren toku v zaporni smeri. S skrbno izdelavo števca lahko dosežemo, da je tok v zaporni smeri tako majhen (pod 1  $\mu\text{A}$ ), da postane šum števca manjši, kot je šum predojačevalnika in ojačevalnika.

## MERJENJE LOČLJIVOSTI ŠTEVCA IN SPEKTRA DELCEV $\alpha$ IZVORA $\text{Bi}^{212}$

$\text{Bi}^{212}$  je eden razpadnih produktov torijeve družine ( $\text{Th}^{228}$ ) in preide z razpadom  $\alpha$  v  $\text{Tl}^{208}$ . Spekter delcev  $\alpha$  je črtast. Črti z energijama 6,086 MeV in 6,047 MeV so do sedaj ločili le z magnetnimi spektrometri. Če ju hočemo ločiti s polprevodniškim števcem, mora biti ločljivost elektronskih aparaturn in števca boljša kot 40 KeV.

Kolimiran izvor delcev  $\alpha$  —  $\text{Bi}^{212}$  in števec smo postavili v medeninast cilinder, kjer je bil tlak pod 0,01 mm Hg. Meritev naredimo pri nižjem tlaku zato, da zmanjšamo sipanje delcev  $\alpha$  v zraku.



Slika 4.

Impulze iz števca smo vodili preko predojačevalnika (charge sensitive preamplifier) in linearnega ojačevalnika na 256 kanalni analizador, ki jih je sortiral po velikosti. Spekter, ki smo ga dobili, kaže sl. 4. Meritev je bila narejena pri sobni temperaturi. Ločljivost bi lahko rahlo izboljšali, če bi ohladili števec na temperaturo tekočega dušika.

Najboljša energijska ločljivost, ki so jo dosegli v tujini s polprevodniškimi števci, je 15 KeV pri 5,477 MeV<sup>8</sup>; vendar moramo upoštevati, da je bil števec, ki je imel tako ločljivost, izbran iz velikega števila primerkov. Tudi elektronske aparature, ki so jih uporabljali, so bile zelo izpopolnjene.

## UPORABA POLPREVODNIŠKIH ŠTEVCEV V JEDRSKI FIZIKI

Zaradi zelo dobre energijske ločljivosti polprevodniške števce lahko uporabljamo namesto magnetnih spektrometrov pri spektroskopiji delcev  $\alpha$ , protonov, devteronov in drugih težjih, nabitih delcev.

Ker imajo ti števci visoko razmerje med signalom in šumom, lahko zaznamo z njimi tudi delce z nizko energijo (nad 50 KeV). Merili so ogljikove ione z energijo 200 KeV.<sup>9</sup>

Polprevodniški števci so le malo občutljivi za nevtrone in žarke  $\gamma$  ter so zato bolj primerni detektorji za nabite delce kot scintilacijski števci. To je posebno važno pri polarizacijskih eksperimentih, kjer dobimo po sipanju le malo delcev, ozadje — predvsem žarki  $\gamma$  — pa je veliko.

Zaradi kratkega časa naraščanja tokovnega impulza so ti števci odlični za merjenje koincidenč.

Ker je polprevodniški števec zelo majhen, ga lahko približamo tarči in s tem povečamo prostorski kot, v katerem padajo delci na števec.

Če napolnimo tenko plast  $U^{235}$  oksida na zlato površino števca, lahko registriramo cepitvene produkte, ki nastanejo po obstreljevanju  $U^{235}$  s termičnimi nevtroni.

Za spektroskopijo hitrih nevtronov rabimo dva števca, vmes pa namestimo tenko plast  $Li^6F$ . Hitre nevtrone zaznamo po parih  $\alpha + T$ , ki nastopajo v reakciji  $Li^6(n, \alpha)T$ . Namesto  $Li^6F$  lahko vzamemo tudi kako snov, ki vsebuje vodik, in registriramo hitre nevtrone z merjenjem odzivnih protonov.

Treba je omeniti tudi nizko ceno polprevodniških števcov in jih zato pri meritvah kotnih porazdelitev delcev lahko hkrati uporabljamo večje število.

## Literatura:

1. K. G. McKay, Phys. Rev. **76**, 1537 (1949).
2. H. Statz, G. A. De Mars, L. Davis, A. Adams, Semiconductor Surface Physics edited by R. H. Kingston, Pennsylvania University Press 1957, str. 139.
3. C. Kittel, Introduction to Solid State Physics (second edition), New York (John Wiley & Sons) 1960, str. 388.
4. K. G. McKay, K. B. Mc Afee, Phys. Rev. **91**, 1079 (1953).
5. W. Shockley, International Conference on Semiconductor Physics, Prague 1960.
6. W. L. Brown, Introduction on Semiconductor Particle Detectors, IRE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-8, No. 1.
7. P. T. Andrews, Thin Silicon Surface Barrier Counters, The University of Liverpool (preprint).
8. J. L. Blankenship, C. J. Bokrwski, Silicon Surface Barrier, Nuclear Particle Spectrometer, IRE, Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-7, No. 2-3 (1960).
9. G. Dearnaley, A. B. Whitehead, The Solid State Surface Barrier Charged Particle Detector, AERE-R 3437, August 1960.

# DVOJE RAZLIČNIH VRST NEVTRINOV

JANEZ STRNAD

V razpredelnici osnovnih delcev<sup>1</sup> najdemo za nevtrino tele podatke: štejejo ga med leptone (lahke delce), nima niti mirovne mase niti naboja niti magnetnega momenta; njegov spin je  $\frac{1}{2}$ . Nevtrinov antidelec je antinevtrino. Oba delca se razločujeta po tem, da je pri nevtrinu spin zmeraj antiparalelen s smerjo gibanja (nevtrino se »vrti« kot levi vijak), pri antinevtrinu pa paralelen (antinevtrino se »vrti« kot desni vijak). To opišemo z vijačnostjo (angl. helicity), tj. z dvakratno projekcijo spina na smer gibalne količine. Nevtrino ima potemtakem vijačnost  $-1$ , antinevtrino pa vijačnost  $1$ . — Kadar ne govorimo posebej o nevtrinu in antinevtrinu, se rabi izraz nevtrino kot skupno ime za nevtrino in antinevtrino.

Ker je nevtrino lepton brez naboja, je z drugimi delci samo v šibki interakciji, ki je nekako  $10^{14}$ -krat šibkejša od močne (jedrske) in nekako  $10^{12}$ -krat šibkejša od elektromagnetne.<sup>1</sup> Zaradi tega so reakcije nevtrinov z drugimi delci izredno redke in jih je skrajno težko zaznati. V tem je tudi vzrok za pozno eksperimentalno odkritje nevtrina.<sup>2, 3</sup>

Nevtrino ( $\nu$ ) nastane pri radioaktivnem razpadu  $\beta^+$  in pri zajetju elektrona, antinevtrino ( $\bar{\nu}$ ) pa pri razpadu  $\beta^-$ :

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e, \quad (1a)$$

$$p + e^- \longrightarrow n + \bar{\nu}_e, \quad (1a')$$

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (1b)$$

Vse te enačbe so si sorodne, saj sledijo druga iz druge, če upoštevamo pravilo<sup>4</sup>, da smemo delec prenesti na drugo stran enačbe, če ga obenem spremenimo v antidelec.

Nevtrini nastanejo tudi pri razpadu pionov (mezonov  $\pi$ ):

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad (2a)$$

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \quad (2b)$$

Nastali mioni (delci  $\mu$ ) razpadejo še dalje, in sicer takole:

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad (3a)$$

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (3b)$$

Nobenih apriornih razlogov ni, da bi morali biti nevtrini, ki nastanejo obenem z elektroni pri razpadu  $\beta$  (1), enaki kot nevtrini, ki se pojavljajo skupaj z mioni ob razpadu pionov (2). Iz previdnosti smo obe vrsti že ločili z indeksi. Pri razpadu miona pa smo upoštevali, da mora nastati po en nevtrino vsake vrste, če razloček med obojimi nevtrini zares obstaja. — Težko pa si je bilo predstavljati, v čem naj bi bil razloček med obema vrstama nevtrinov, ko imajo vendar oboji iste na začetku navedene lastnosti. Zato je spočetka obveljalo mnenje, da obeh vrst nevtrinov ni treba razločevati.

V zadnjem času pa se je mnenje o neločljivosti omajalo. K temu je doprineslo brezuspešno iskanje fotonskega razpada miona

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \gamma. \quad (4)$$

Teorija dovoljuje oceno, da bi moral biti razpad (4) desetstisočkrat redkejši kot razpad (3), če se obe vrsti nevtrinov ne bi razločevali. Že dalj časa pa je pre-



senečalo, da niso opazili nobenega razpada (4); novejša merjenja so celo nedvoumno pokazala, da je razpad (4) vsaj  $10^8$ -krat redkejši kot razpad (3).<sup>4, 5</sup> To pomeni, da je razpad (4) na neki način prepovedan. Na podlagi tega dopušča teorija sklep, da navedena razlika obstaja, torej da imamo dvoje nevtrinov in dvoje antinevtrinov, v celoti torej štiri različne delce:  $\nu_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ .

Ker temelji ta teorija na nekaterih nepreverjenih predpostavkah, so že dalj časa iskali možnost za bolj neposredno potrditev domneve o različnosti obojih nevtrinov. Pri tem bi se mogli opreti na naslednje možne nevtrinske reakcije:



ki sta sorodni z (1), in



ki sta sorodni s (5).<sup>6</sup> Če ne bi bilo razlike med obojimi nevtrini, tako da bi bili indeksi v enačbah (5) in (6) odveč, bi katerikoli nevtrino, če ima le dovolj visoko energijo, lahko reagiral po obeh ustreznih enačbah (po (5a) in (6a) ali po (5b) in (6b)). Nevtrino mora imeti veliko energijo zato, ker mora s svojo energijo kriti mirovno energijo nastalega delca ( $m_\mu c^2 = 100$  MeV pri mionu) in še odvisno energijo. Razen tega se z nadaljnjim porastom energije nevtrinov znatno poveča presek za reakcije (5) in (6). Nasprotno bi v primeru, da obstaja razlika, nevtrini prve vrste reagirali samo po ustrezni reakciji (5), nevtrini druge vrste pa samo po ustrezni reakciji (6).

To se da preskusiti, če vzamejo nevtrine z veliko energijo, ki nastanejo pri razpadu zelo hitrih pionov. Če obstaja dvoje različnih vrst nevtrinov, bo prišlo samo do reakcij (6), to se pravi, da bodo nastali samo mioni, elektroni pa ne. Takšen »nevtrinski« poskus leži na meji današnjih eksperimentalnih možnosti, saj pride pri dosegljivi energiji in gostoti nevtrinskih tokov v toni snovi komaj do kakih desetih reakcij na dan.

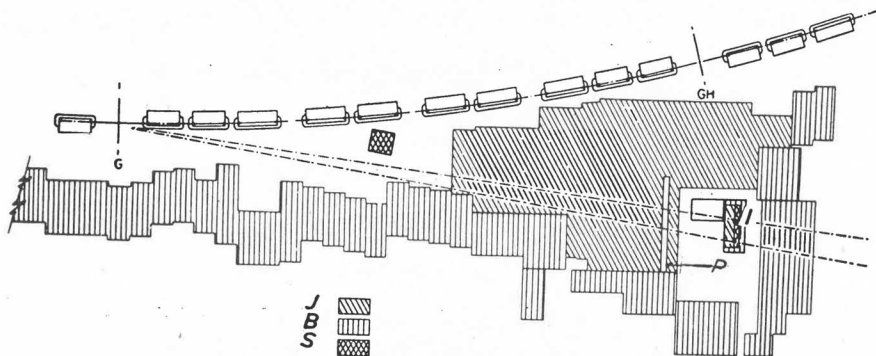
Pred meseci pa so objavili presenetljivo novico, da se je poskus posrečil in dal pričakovani odgovor.<sup>6</sup> Napravili so ga v Brookhavnu s tamkajšnjim protonskim sinkrociklotronom za 30 GeV, ki je služil kot izvir hitrih pionov. Poskus so pripravljali dve leti, izvedba pa je trajala pol leta.

V sinkrociklotronu obstreljujejo tarčo s protoni približno vsaki dve sekundi. Tedaj prileti nanjo v razmakih po  $0,2 \mu s$  okoli sto po  $0,02 \mu s$  trajajočih protonskih plazov. V vsakem plazu je nekaj milijard protonov z energijo 15 GeV. Ti protoni v interakciji z nukleoni v debeli berilijevi tarči rode pione. Tarča je nameščena v ravnem delu pospeševalne cevi, kjer ni magnetnega polja. Curek pionov obojega znaka leti zato v smeri vpadlega protonskega curka in zapusti pospeševalno cev. Najprej preleti po zraku pot 21 m. V času, ki je potreben za prelet, večina pionov razpade na mione in nevtrine (2). Pri zelo velikih energijah odletita pri razpadu oba nastala delca v smeri gibanja piona. Tako je curek sestavljen v veliki meri iz visokoenergijskih mionov in nevtrinov, ko zadene na 13,5 m debel jeklen ščit.

V ščitu obtiče vsi preostali pioni, pretežni del mionov pa se zaustavi in razpade po enačbah (3). Nastali elektroni obtiče v ščitu; nastali nevtrini ga sicer neovirano prelete, vendar imajo premajhno energijo, da bi lahko reagirali po enačbah (6). Uporabljeni ščit ne dopušča, da bi bila energija protonov večja kot 15 GeV, ker bi tedaj uhajalo skozenj preveč mionov.

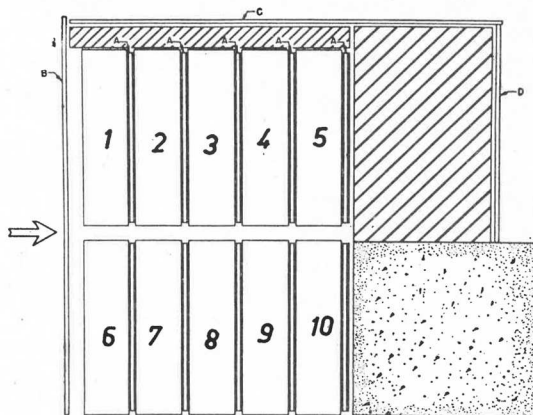
Curek nevtrinov z veliko energijo nemoteno preleti ščit in naleti na detektor, v tem primeru na skupino iskrnih celic, kjer nevtrini povzročajo reakcije (6), ki jih želijo opazovati.

Iskrno celico<sup>7, 8</sup> sestavlja niz vzporednih kovinskih plošč, od katerih so povezane lihe med seboj in sode med seboj, med njimi pa je žlahten plin. Nabit



Sl. 1. Shema poskusne naprave. Lok na shemi je odsek pospeševalne cevi protonskega sinkrociklotrona. Črtkano je naznačena smer curka. *J* je jekleni ščit, *B* betonski in *S* svinčni zaščitni zid, *P* parafinski vložek (za upočasnitev hitrih nevtronov) in *I* iskrne celice

delec ob preletu ionizira atome in pusti za seboj nevidno sled ionskih parov. Posebna naprava pritiska v primernem trenutku na plošči visokonapetostni sunek, zaradi katerega med ploščami po sledi delca preskočijo iskre. Te iskre



Sl. 2. Razpored iskrnih celic (1 do 10) v shematskem stranskem preseku. Z *A* so zaznamovane dvojne plasti koincidenčnih, z *B*, *C* in *D* pa plasti antikoincidenčnih števecov. S poševnimi črticami in s pikami sta označena dodatna ščita

posname filmska kamera. Okoli celice razporejeni scintilacijski števcji v koincidenčni in antikoincidenčni vezavi omogočijo, da delček, ki preleti celico v izbrani smeri, sam sproži visokonapetostni sunek. Med plošče je priključena še stalna nekoliko nižja napetost, zaradi katere odtečejo nastali ionski pari v kaki mikrosekundi na plošče in ne povzročijo isker pri naslednjih sproženjih.

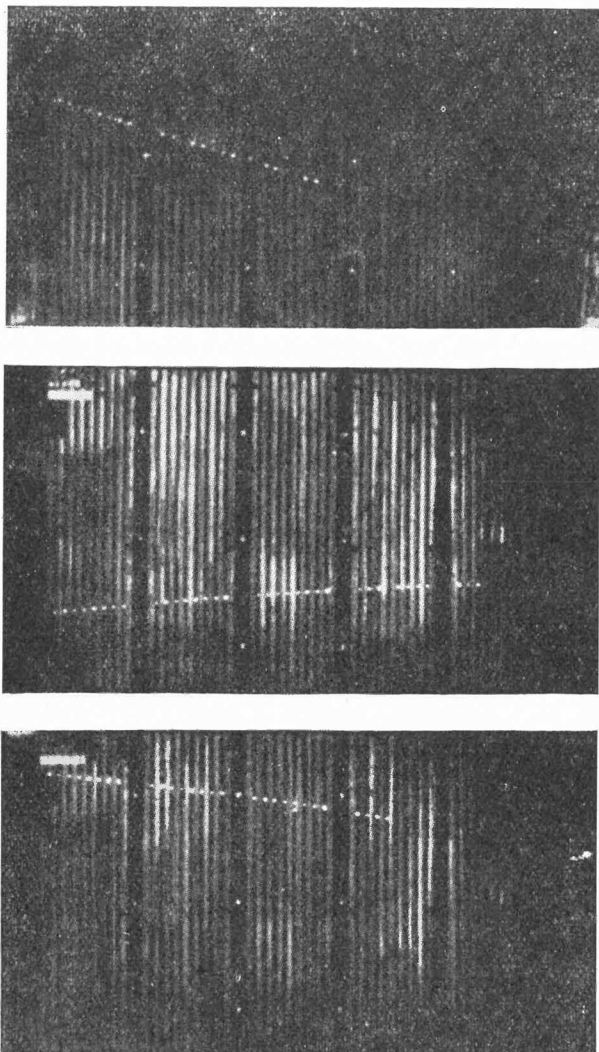
Pri nevtrinskem poskusu so uporabili skupino 10 velikih tesno drugo ob drugo naloženih iskrnih celic. Vsako celico sestavlja 9 aluminijastih plošč z debelino 2,5 cm in presekom nekaj več kot 1 m<sup>2</sup> v razmiku 1,8 cm. Vsaka celica vsebuje 1 tono aluminija. V celoti se niso mogli za-

dovoljiti z manj kot 10 tonami aluminija, ker bi bile reakcije drugače preredke.

Skupino iskrnih celic opazujejo 4 stereoskopsko nameščene filmske kamere. Spredej, zadaj in zgoraj obdaja skupino celic 50 antikoincidenčnih števecov, razen tega sta na zadnji strani vsake celice po dve plasti — v celoti 40 — koincidenčnih

števec. Pred ščitom je v curek pionov postavljen še števec Čerenkova, ki naznani približno po  $0,02 \mu s$  trajajoče plazove pionov. Visokonapetostni sunki se sprožijo na vseh celicah hkrati, kadar v hitri koincidenči reagirajo: vsaj dva koincidenčna števca in števec Čerenkova, antikoincidenčni števci pa ne.

Tako dosežejo, da ne zaznavajo delcev, ki preletijo skupino celic, to je v glavnem mionov iz ščita in kozmičnih žarkov. Pač pa zaznavajo samo nabite



Sl. 3. Trije tipični posnetki mionov, ki so jih v iskrnih celicah rodili nevtrini z veliko energijo

delce, ki so jih v celicah rodili nenabiti delci v pravem prenutku po tem, ko je udaril protonski curek na tarčo.

Še dodatno so izmed fotografiranih reakcij izbrali samo tiste, ki se niso pripetile preblizu zunanjih sten skupine celic in pri katerih tiri delcev niso

oklepali s smerjo curka večjega kota kot  $60^\circ$ . V 700 urah delovanja protonskega sinkrociklotrona se je nabralo samo 113 ustreznih posnetkov. Pri tem so našli

1. na 49 posnetkih kratke enojne sledi, po vsej verjetnosti mionov s kinetično energijo manjšo od približno 200 MeV,
2. na 34 posnetkih dolge enojne sledi mionov s kinetično energijo večjo kot 200 MeV,
3. na 22 posnetkih sledi, izvirajoče iz ene točke z veliko skupno energijo delcev in
4. na 8 posnetkih zapletene in bolj nedoločene sledi.

Reakcija iz prve in zadnje skupine so povzročili večinoma nenabiti delci in tisti nabiti delci iz ozadja, ki so ušli mimo antikoincidenčnega sistema. V prvi skupini je morda tudi nekaj reakcij, ki so jih povzročili nevtrini z majhno energijo, v zadnji pa morda nekaj nevtronskih reakcij. Proti koncu poskusa, ko so izpopolnili ščit, je bilo reakcij v obeh teh skupinah dosti manj.

Reakcije v tretji skupini so najbrž bolj zapletene nevtrinske reakcije. V ožjo presojo pridejo tako samo reakcije v drugi skupini, pri katerih so nastali brez dvoma mioni po reakcijah (6). Med posnetki povsem pogrešajo take, ki bi kazali nastanek elektronov (5) s kinetično energijo nad 400 MeV, kar pri njih ustreza isti energiji nevtrinov kot kinetična energija 200 MeV pri mionih. Elektroni s tako veliko energijo bi morali v celicah sprožiti značilne kašcade, o čemer so se prepričali, ko so iskrne celice izpostavili curku elektronov iz elektronskega sinkrociklotrona. Če bi bili reakciji (5) približno enako pogostni kot reakciji (6), bi pričakovali vsaj nekaj desetih takšnih kaskad, kar nikakor ne bi moglo ostati neopaženo.

Upravičenost vseh trditev so eksperimentatorji sproti ugotavljali z dodatnimi merjenji in kontrolnimi poskusi. Zaradi tega so prepričani, da se obe vrsti nevtrinov zares razlikujeta.

Pokazalo se je tudi, da se izmerjeni presek za reakciji (6) približno ujema z napovedanim. Še celo razmere med presekom za reakciji (6), pri katerih nastane samo po en mion, in nevtrinskimi reakcijami, pri katerih nastane po več delcev, torej razmerje med številom posnetkov iz druge in iz tretje skupine, leži v okviru teoretičnih napovedi. Seveda pa je reakcij premalo, da bi mogli natančneje določiti preseke zanje.

Posebno zanimivi so nekateri posnetki reakcij iz tretje skupine. Lahko, da je na petih izmed njih posnet nastanek in razpad vmesnega bozona. Tako imenujejo hipotetičen, vsekakor zelo kratkoživ delec s celoštevilčnim spinom, ki naj bi posredoval šibko interakcijo, podobno kot pioni z izmenjavo posredujejo močno interakcijo, npr. med nukleoni, fotoni pa elektromagnetno med nabitimi delci. Podobno kot nastanejo pri trkih nukleonov prosti pioni šele, ko je energija nukleonov dovolj velika, lahko pričakujemo nastanek prostih vmesnih bozonov šele pri dovolj velikih energijah nevtrinov. O tem, kdaj je energija dovolj velika, odloča masa delca, ki nastane med reakcijo. Domnevajo, da je masa vmesnega bozona  $m_b$  manjša kot masa protona  $m_p$ . Pri pogojih opisanega nevtrinskega poskusa bi v celoti pričakovali kaka dva posnetka nastanka vmesnih bozonov, če bi veljalo  $m_b = m_p$ , oziroma kakih dvajset takih posnetkov, če bi veljalo  $m_b = 0,6 m_p$ . Ločljivost iskrnih celic pa je zaenkrat žal še preslaba, da bi glede tega mogli narediti kak dokončen sklep.

Nekateri teoretiki so že pred leti predvideli možnost, da obstaja dvojje različnih vrst nevtrinov. Nishijima<sup>9</sup> je ugotovil, da bi s preprostimi predpostavkami, ki bi imele za posledico različnost obojih nevtrinov, mogli neprisiljeno

razložiti prepovedanost nekaterih reakcij, med njimi fotonskega razpada miona (4). V tem primeru bi morali poostriži tako imenovani zakon o ohranitvi števila leptonov.<sup>10</sup> Ta zakon pove, da se celotno število leptonov pri nobeni reakciji med delci ne more spremeniti, če štejemo leptone tako, da pripišemo vsakemu delcu ( $e^-$ ,  $\mu^-$ ,  $\nu$ ) leptonsko število 1 in vsakemu antidelcu ( $e^+$ ,  $\mu^+$ ,  $\bar{\nu}$ ) leptonsko število  $-1$ . Izkušnje s precejšnjo gotovostjo kažejo, da ta zakon zares velja, saj še niso opazili reakcij, ki bi ga kršile (npr. dvojnega razpada  $\beta$ ). Iz Nishijimine teorije in iz nekaterih drugih podobnih teorij<sup>11</sup> pa sledi, da mora veljati posebej zakon o ohranitvi števila elektronov in njim pridruženih nevtrinov

$$N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e) = \text{konstantno} \quad (7)$$

in posebej zakon o ohranitvi števila mionov in njim pridruženih nevtrinov

$$N(\mu^-) - N(\mu^+) + N(\nu_\mu) - N(\bar{\nu}_\mu) = \text{konstantno}. \quad (8)$$

Bralec se lahko sam prepriča, da sta zakona izpolnjena pri reakcijah (1), (2), (3), (5) in (6). Fotonski razpad miona (4) pa bi zakona prekršil in je zato prepovedan. Tudi reakcije, kakršne so zaman iskali pri nevtrinskem poskusu, npr.

$$p + \bar{\nu}_\mu \longrightarrow n + e^+, \quad (9)$$

so po teh zakonih prepovedane.

#### Literatura:

- <sup>1</sup> M. Gell-Mann, E. P. Rosenbaum: Osnovni delci (prevod), Obz. mat. fiz. **7**, 62 (1960).
- <sup>2</sup> M. Švikaršič: Nevtrino, Obz. mat. fiz. **4**, 20 (1956).
- <sup>3</sup> B. Čujec: Eksperimentalno odkritje nevtrina, Obz. mat. fiz. **5**, 67 (1957).
- <sup>4</sup> D. Bartlett, S. Devons, A. M. Sachs: Search for the Decay Mode  $\mu \rightarrow e + \gamma$ , Phys. Rev. Letters **8**, 120 (1962).
- <sup>5</sup> S. Frankel, J. Halpern, L. Holloway, W. Wales, M. Yearian, O. Chamberlain, A. Lemonick, F. M. Pipkin: New Limit on the  $e + \gamma$  Decay Mode of the Muon, Phys. Rev. Letters **8**, 123 (1962).
- <sup>6</sup> G. Danby, J. M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, J. Steinberger: Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos, Phys. Rev. Letters **9**, 36 (1962).
- <sup>7</sup> S. Svetina, A. Moljk: Iskrni števec, Obz. mat. fiz. **5**, 172 (1957).
- <sup>8</sup> G. K. O'Neill: The Spark Chamber, Scientific American **207**, 91 (1962).
- <sup>9</sup> K. Nishijima: Vanishing of the Neutrino Rest Mass, Phys. Rev. **108**, 907 (1957).
- <sup>10</sup> P. Roman: Theory of Elementary Particles. North Holland Publ. Co. (Amsterdam), 1961. S. 245, 398.
- <sup>11</sup> J. Schwinger: A Theory of Fundamental Interactions, Ann. Phys. **2**, 420 (1957).

## DOMAČE VESTI

### OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV LRS

Dne 26. oktobra je bil v Ljubljani v prostorih Zavoda za napredek šolstva redni občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS. To je bilo ravno v času seminarja za matematiko in fiziko; zato je bila tudi udeležba izredno visoka — preko 100 članov iz vse Slovenije, kar je prav gotovo največ, odkar obstoja Društvo. Občnemu zboru je prisostvoval tudi zastopnik sekretariata sveta za šolstvo tov. J. Stante, ter dopisnik Tedenske tribune tov. A. Mahkota.

Po otvoritvi in izvolitvi delovnega predsedstva je najprej tov. predsednik dr. A. Vadnal poročal o delovanju Društva in pretekli poslovni dobi. Pokazal je na aktivnost Društva pri vzgoji matematičnega in fizikalnega naraščaja, ko je

organiziralo matematične in fizikalne krožke za srednješolce, prirejalo republiška in zvezna tekmovanja matematikov, izdajalo strokovno glasilo »Obzornik za matematiko in fiziko« ter knjižnico »Sigma«. Dalje se je dotaknil nekaterih aktualnih problemov našega šolstva, in sicer: poskusa nekaterih strokovnih šol, da bi reducirale število ur matematike ter da bi izrinile matematiko iz zaključnega razreda, kar je bilo povod sklicanju izredne seje društvenega odbora, menda prve, odkar živi naše Društvo; ter dejstva, da je pouk matematike v višjih razredih osnovnih šol povečini v rokah nekvalificiranih ljudi, kar je za nadaljnjo matematično izobrazbo učencev velikokrat usodna škoda. Prva zadeva je bila zadovoljivo rešena posebno še zato, ker je z akcijo Društva sovpadlo »Priporočilo Odbora Zveznega izvršnega sveta za prosveto in kulturo o ukrepih za napredek matematične izobrazbe« (Obz. za mat. in fiz. IX/3 št.), medtem ko bo treba drugemu problemu in s tem v zvezi problemu vzgoje strokovnih kadrov posvetiti vso pozornost v naslednjih letih.

Poročilu predsednika so sledila podrobnejša poročila tajnika F. Šušteršiča, blagajnika V. Sladiča, referenta za popularizacijo matematike in fizike S. Uršiča, referenta za dvig pouka in predavanja tov. M. Potiskove, tehničnega urednika »Obzornika« F. Kvaternika ter poročilo zastopnika iz kranjskega okraja tov. Petrača. Iz vseh poročil je bila razvidna velika delavnost Društva tako v Ljubljani kakor po podružnicah. Prav tej dejavnosti gre zasluga za to, da nastaja pri nas mlad naraščaj, ki bo — tako upamo — kos naglemu tehničnemu razvoju, kateremu sta podlaga ravno matematika in fizika.

V poročilu tov. tajnika je bila posebej izražena zahvala tistim sodelavcem, ki niso bili v upravnem odboru, pa so vendar ob vsaki priliki na povabilo tajnika prišli na sejo ter pomagali pri organizaciji krožkov, seminarjev in kjerkoli se je pokazala potreba.

Tehnični urednik »Obzornika« je posebej poudaril razveseljivo opažanje, da se širi ne samo število tistih, ki naš list radi berejo, ampak tudi tistih, ki vanj dopisujejo. Tako letos ni več toliko problemov z rokopisi, kakor je bilo lansko leto. Pač pa je še težava z denarjem. Naročnina namreč ne pokrije niti ene številke, ki stane okrog 350.000 din. Letos smo sicer dobili od Sveta za prosveto in kulturo subvencijo 800.000 din; toda to ne bo zadostovalo za 4 številke, kolikorkrat izide naš časopis letno, zato bo treba prositi še za dodatno subvencijo.

Občni zbor je izrekel Svetu za prosveto in kulturo iskreno zahvalo za velikodušno podporo »Obzorniku« kakor tudi Društvu, saj brez te pomoči ne bi bilo mogoče razširjati tolike aktivnosti niti v organizaciji matematično fizikalnih krožkov niti v izdajanju »Obzornika«.

Po silno živahni diskusiji okrog odborniških poročil ter posebno okrog gimnazijske mature, ki v svoji današnji obliki nikakor ne ustreza, je tov. Štalec v imenu revizijskega odbora izrekel dosedanjemu upravnemu odboru razrešnico s pohvalo. Zato je bil takoj nato ponovno izvoljen dosedanji upravni odbor s to razliko, da je bil tov. Uršiču dodeljen v pomoč tov. Marjan Vagaja.

Novi upravni odbor je torej takole sestavljen: dr. V. Vadnal, predsednik; J. Povšič, podpredsednik; F. Šušteršič, tajnik; V. Sladič, blagajnik; S. Uršič in M. Vagaja, sekcija za popularizacijo matematike in fizike; M. Potisek, sekcija za dvig pouka in predavanj; F. Kvaternik, Obzornik za matematiko in fiziko. — Po potrebi se lahko pritegnejo za pomoč upravnemu odboru tudi dosedanji svetovalci ter zastopniki študentov in podružnic.

V revizijskem odboru so ostali: M. Lenarčič, V. Pilgram in I. Štalec; v častnem razsodišču pa: F. Čemažar, L. Molinaro in dr. A. Vakselj.

F. Kvaternik



## SPOROČILO UPRAVE

Prosimo vse sodelavce »Obzornika«, ki so dolžni imeti žiro račun, da nam pošljejo številko računa. Tisti pa, ki jim ni treba imeti žiro računa, naj nam dostavijo izjavo, glasečo se takole:

### IZJAVA

Podpisani .....  
zaposlen v (pri) .....

izjavljam, da nisem dolžan imeti žiro računa, ker moj honorarni dohodek ne doseže predpisane višine.

(Bivališče, datum) ..... Podpis .....

Novi sodelavci lahko priložijo številko računa oziroma izjavo rokopisu, ki ga pošljejo uredništvu.

## OBRAČUN DRUŠTVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV LRS

za poslovno dobo od 14. dec. 1961 do 26. okt. 1962

(Objava v smislu zakona o tisku I. pogl., 2., 33. člen, Ur. list FLRJ št. 95/60)

| Prejemki:                         | din              | Izdatki:                             | din           |
|-----------------------------------|------------------|--------------------------------------|---------------|
| Saldo 14. XII. 1961 . . . . .     | 1,136.775        | Matematični in fizik. krožki         |               |
| Dotacija Društvu . . . . .        | 380.000          | v Ljubljani . . . . .                | 448.800       |
| Dotacija »Obzorniku« . . . . .    | 700.000          | Matematični in fizik. krožki         |               |
| Naročnina za »Obzornik« . . . . . | 131.810          | v Kranju . . . . .                   | 31.200        |
|                                   | <u>2,348.585</u> | Visokošolska sekcija . . . . .       | 5.412         |
|                                   |                  | Tisk in vezava »Obzornika« . . . . . | 1,141.171     |
|                                   |                  | Honorarji in uprava »Obz.« . . . .   | 288.723       |
|                                   |                  | Uprava Društva . . . . .             | 53.500        |
|                                   |                  | Bančni stroški . . . . .             | <u>14.225</u> |
| Saldo 26. okt. 1962 . . . . .     | 365.554          |                                      | 1,983.031     |

### UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1962, T. 90, No. 2.

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1961, št. 8-10.

Matematičko fizički list, Zagreb 1962/63, št. 1.

Proteus, Ljubljana 1962/63, št. 1, 2.

Studii si cercetari de matematica, Cluj 1961, T. XII., No. 1.

Ukrainskij matematičeskij žurnal, Kijev 1962, T. XIV, No. 2, 3.

Uspehi matematičeskikh nauk, Moskva 1962, T. XVII, Vyp. 4.

Vestnik moskovskogo universiteta, Moskva 1962, Serija I, No. 1, 2, 3, 4.



Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

## **Nastava matematike i fizike**

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

---

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

## **Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS**

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod oznacbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

---

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

## **MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST**

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

*Matematičko-fizički list*, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

---

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

## **Glasnik matematičko-fizički i astronomski**

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

---

**Obzornik za matematiko in fiziko** izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-3-207.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

*Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.*