



OBZORNIK

ZA MATEMATIKO

IN FIZIKO

LJUBLJANA

1 9 6 2

IX. št. 3

VSEBINA

Članki	Stran
O aksiomatični utemeljitvi verjetnostnega računa (R. Jamnik)	97
O poslednjem Fermatovem problemu (A. Suhadolc)	109
Termonuklearna energija (R. F. Post — prev. M. Stanovnik)	114
Paradoks ur v teoriji relativnosti (J. Strnad)	128
Novice	
Sodilo deljivosti in njegova usoda (F. Križanič)	134
Domače vesti	
Višji predavatelj Albin Žabkar (A. Kuhelj)	136
Šola	
Priporočilo Odbora Zveznega izvršnega sveta za prosveto in kulturo o ukrepih za napredek matematične izobrazbe	137
Dopisi	
Ali atomska bomba lahko zaneti verižno jedrsko reakcijo v morju? F. C.-B. Povh	140
Odgovor	
Obsevana plast (M. Gros)	141
Utrinki	144

CONTENTS

Articles	Page
On Axiomatic Foundation of Probability Theory (R. Jamnik)	97
At the Last Fermat's Problem (A. Suhadolc)	109
Fusion Power (R. F. Post — trad. M. Stanovnik)	114
The Clock Paradox in Relativity (J. Strnad)	128
News	
The Criterion of Divisibility and its Future (F. Križanič)	134
Home News	136
School	137

✓ O AKSIOMATIČNI UTEMELJITVI VERJETNOSTNEGA RAČUNA

RAJKO JAMNIK

Jan. 26. 1962

V Obzorniku je bila že nekajkrat beseda o aksiomatični utemeljitvi te ali one matematične discipline.¹ V citiranih sestavkih gre za splošna razglabljanja, ob katerih se avtor ne utegne podrobneje ukvarjati s kakšnim posebnim primerom, če ne štejemo sem sklicevanja na evklidsko geometrijo. Pri tej je aksiomatična pot znana vsakemu bralcu. Vendar se nam zdi, da ne bo odveč, če jo pokažemo še pri verjetnostnem računu, torej na primeru, ki je, čeprav ne dosti, vendar nekoliko manj vsakdanji od geometrije. V tem smislu je vsebina pričujočega članka ilustracija ustreznih izvajanj v omenjenih prispevkih dr. N. Prijatelja. Obenem pa pomeni dopolnilo sestavka dr. A. Vadrnala »O definicijah matematične verjetnosti«.²

Pot, ki jo bomo ubirali pri aksiomatični utemeljitvi verjetnostnega računa, je povsem analogna z ustreznim ravnanjem v geometriji. Za to so dobri razlogi. Kot geometrija operira tudi verjetnostni račun s pojmi, prevzetimi iz izkustva. Teh pojmov ne bomo definirali eksplicitno, ampak s primerno izbranimi povezavami med njimi. Teh vezi pa si ne bomo mogli izmišljati svojevoljno, ampak nam jih bo sugeriralo izkustvo. V iskanju osnovnih povezav bo poglavito naše delo. Na koncu sestavka bomo še pregledali, kakšno podobo dobe v aksiomatični koceptiji najvažnejše tvorbe verjetnostnega računa.

1.

Osnovna objekta verjetnostnega računa sta *poskus* in *dogodek*. V vsakdanjem govoru obe besedi, tako kot večina drugih, nimata točno določenega pomena. Približno bi ju lahko opisali takole: Naj bo K množica dejstev, ki zmeraj nastopajo hkrati. Vsaka realizacija množice K je poskus, recimo α . Če eksistira še kakšno dejstvo A , ki hkrati z množico K lahko nastopi ali ne nastopi, je A dogodek. S tem dokaj meglenim opisom se bomo zaenkrat zadovoljili, v nadaljnjem pa se bomo precej ubadali prav s tem, da bomo natančno opredelili pomen besed »poskus« in »dogodek« v verjetnostnem računu.

Začnimo kar z dogodki! Med dogodki definiramo nekaj relacij. Ker sodimo, da so te relacije bralcu povečini znane, jih bomo našteali, ne da bi navajali kaj dosti primerov; pač pa bomo povsod zabeležili lastnosti relacij.

1. Če sta dogodka A in B taka, da se vselej obenem z dogodkom A zgodi tudi dogodek B , pravimo, da je dogodek A *način* dogodka B , in zapišemo

$$A \subset B \quad (1)$$

¹ Dr. N. Prijatelj, Nicolas Bourbaki, Obzornik VII/4, 1960, str. 145—150; O relacijah, Obzornik VIII/4, 1961, str. 155—161.

² Obzornik IV/3, 1955-56, str. 97—104.

Binarna relacija »način« je očitno refleksivna:

$$A \subset A$$

in tranzitivna:

$$\text{iz } A \subset B, B \subset C \text{ sledi } A \subset C$$

2. Če je dogodek A način dogodka B , še ni rečeno, da se zgodita A in B zmeraj hkrati, saj ni nujno, da je tudi $B \subset A$. Če pa sta dogodka A in B taka, da je $A \subset B$ in $B \subset A$, pravimo, da sta dogodka A in B ekvivalentna. Pri dogodkih nas bo zanimalo le to, kolikokrat se zgode. S tega gledišča pa je razlikovanje med ekvivalentnimi dogodki nepotrebno, saj se zmeraj zgode hkrati. Zato bomo smatrali ekvivalentne dogodke za med seboj *enake*; torej

$$\text{iz } A \subset B, B \subset A \text{ sledi } A = B \quad (2)$$

Relacija enakosti je seve refleksivna, simetrična in tranzitivna. Obenem pa pomeni dogovor (2), da je relacija »način« antisimetrična.

3. Med dogodki ima posebno mesto tisti, ki se zgodi v vsakem poskusu; rečemo mu *gotov dogodek*. Vsi gotovi dogodki so med seboj enaki, zato bomo vsak gotov dogodek označili z istim znakom, in sicer z U . Podobno je z dogodkom, ki se ne zgodi v nobenem poskusu in ga zato označujemo zmeraj z V . Dogodek, ki ni niti gotov niti nemogoč, je *slučajen*. Očitno velja za vsak slučajen dogodek A relacija

$$V \subset A \subset U$$

4. Vpeljimo med dogodki dve računski operaciji!

A. Dogodek, da se od dogodkov A in B zgodi vsaj eden, imenujemo *vsoto* dogodkov A in B ; označimo ga z znakom

$$A \cup B \quad (3)$$

Analogno je $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ dogodek, da se zgodi od dogodkov $A_1, A_2, \dots, A_n$ vsaj eden.

B. Dogodku, da se zgodita dogodka A in B hkrati, rečemo *produkt* dogodkov A in B ; zanj uporabljamo znak

$$A \cap B \quad (4)$$

Prav tako je $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ dogodek, da se zgode dogodki $A_1, A_2, \dots, A_n$ hkrati.

Za vsoto in produkt očitno veljata komutativnostni in asociativnostni zakon:

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A \quad (5)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (6)$$

Asociativnostni zakon smo potihem že upoštevali pri označevanju vsote in produkta več kot dveh dogodkov; zaradi njega so namreč oklepaji odveč. Nekoliko manj na dlani je dejstvo, da veljata kar dva distributivnostna zakona:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (7)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (8)$$

Pokažimo za primer, da velja zakon (7)! Njegova leva stran je dogodek, da se hkrati zgodita dogodka $A \cup B$ in C . V splošnem se lahko zgodi na tri načine: tako, da se zgodita dogodka A in C hkrati; tako, da se hkrati zgodita dogodka B in C ; in končno tako, da se zgode hkrati vsi trije dogodki A , B in C . Zadnji način pride v poštev seve le tedaj, kadar se moreta zgoditi dogodka A in B hkrati. Desna stran zakona (7) pa je dogodek, da se zgodi vsaj eden od dogodkov $A \cap C$ in $B \cap C$. Ta dogodek se očitno zgodi na iste tri načine kot dogodek na levi strani zakona (7). Torej se zgodita dogodka na levi in na desni strani zmeraj obenem in sta zato enaka. Na podoben način se preskusi zakon (8).

Nadalje je očitno, da

$$\text{iz } A \subset B \quad \text{sledi} \quad A \cup B = B, \quad A \cap B = A,$$

Če je $B = A$, sledi od tod

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

5. Dogodka A in B imenujemo *nezdružljiva*, če se ne moreta zgoditi hkrati, to se pravi, če je

$$A \cap B = \emptyset \quad (9)$$

Če je razen tega še

$$A \cup B = U, \quad (10)$$

pravimo, da sta si dogodka A in B *nasprotna* ali da je dogodek B *negacija* dogodka A . Negacijo dogodka A bomo v bodoče označevali z znakom $\bar{A}$.

Obe relaciji (nezdružljivosti in nasprotnosti) sta simetrični in irefleksivni. Nadalje velja

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (11)$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (12)$$

Za vzorec preverimo formulo (11)! $A \cup B$ je dogodek, da se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B . Njegova negacija je torej dogodek, da se ne zgodi niti A niti B . To pa ni nič drugega kot dogodek, da se zgodita obenem $\bar{A}$ in $\bar{B}$.

6. Dogodek A je *sestavljn*, če je mogoče najti taka nezdružljiva dogodka B in C , da je

$$A = B \cup C$$

Za dogodek, ki ni sestavljen, rečemo, da je *elementaren*.

7. Za bodočo rabo definirajmo še dve množici dogodkov. V prvi množici

$$S = \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$$

naj bodo dogodki taki, da se v vsakem poskusu zgodi natančno eden od njih; to se pravi, da je

$$A_i \cap A_j = V \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = U$$

Tako množico imenujemo *popoln sistem dogodkov*.

Množici O dogodkov $A, B, C, \dots$ pa predpišimo takole strukturo:

I. iz $A \in O$ sledi $\bar{A} \in O$;

II. iz $A, B \in O$ sledi $A \cap B \in O$.

Za množico O s to strukturo rečemo, da je *obseg dogodkov*.

Brž vidimo, da spadata v O zmeraj dogodka V in U .

Res: Naj bo $A \in O$; tedaj je zaradi I tudi $\bar{A} \in O$ in zaradi II še $\bar{A} \cap A = V \in O$; od tod sledi zaradi I še $\bar{V} = U \in O$.

Prav tako iz $A, B \in O$ sledi, da je $A \cup B \in O$.

Po I namreč dobimo $\bar{A}, \bar{B} \in O$, od tod po II $\bar{A} \cap \bar{B} \in O$ in po formuli (11) $\overline{(A \cup B)} \in O$. Upoštevajmo še enkrat zahtevo I, pa dobimo iz zadnjega rezultata $A \cup B \in O$, tako kot smo trdili.

Naj bo $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ popoln sistem dogodkov. Sistemu dodajmo še vse mogoče vsote dogodkov iz S in nemogoč dogodek! Tako dobimo obseg O_S , ki vsebuje popoln sistem S . V obsegu O_S je toliko dogodkov, kolikor je vseh podmnožic množice S , torej 2^n . Na opisani način najpreprosteje pridemo do obsega dogodkov. Vzemimo za primer najmanjši popoln sistem S ; tega sestavljata le dva dogodka, namreč dogodek A in njegova negacija $\bar{A}$. Edina možna vsota je potem $A \cup \bar{A} = U$, zato sestavljajo obseg O_S le štirje dogodki: $V, A, \bar{A}$ in U . Omenimo še trivialni primer obsega, namreč obseg, v katerem sta le dogodka U in V ; le-ta je praktično nepomemben.

Za verjetnostni račun so pomembne samo našteje relacije med dogodki, njihova individualna narava pa prav nič. Aksiomatično vzeto so torej dogodki definirani prav s temi relacijami. Ni se težko prepričati, da veljajo navedene relacije med podmnožicami poljubne množice U . V ta namen moramo samo prevesti pojme v zvezi z dogodki v jezik teorije množic, pa bo postala trditev neposredno razvidna. Sestavimo torej ta slovar!

Pri dogodkih:

Gotov dogodek U
Nemogoč dogodek V
Dogodek A je način dogodka B

Dogodka A in B sta enaka
Vsota dogodkov A in B
Produkt dogodkov A in B
Nezdružljiva dogodka A in B
Nasprotna dogodka A in B
Elementarni dogodek
Popoln sistem dogodkov
Obseg dogodkov

Pri podmnožicah:

Vsa množica U
Prazna množica V
Podmnožica A je podmnožica podmnožice B
Podmnožici A in B sta enaki
Unija podmnožic A in B
Presek podmnožic A in B
Med seboj tuji podmnožici A in B
Komplementarni podmnožici A in B
Element množice U
Sistem razredov množice U
Obseg podmnožic množice U

Ni rečeno, da predstavljajo podmnožice poljubne množice U edini model za množico dogodkov; toda zelo koristno je, če se odločimo prav zanj, tako kot je v geometriji zelo ploden aritmetični model, torej analitična geometrija. V bodoče nam bodo zato dogodki podmnožice neke abstraktne množice U .

Urediti moramo še vprašanje: Ali so dogodki vse podmnožice množice U ali samo nekatere? Če je množica U končna, ni posebnih težav, če vzamemo za dogodke vse njene podmnožice. Pri neskončni množici U pa bi bilo dostikrat nerodno, pa tudi nepotrebno, obravnavati kot dogodke vse podmnožice. Zato se v takem primeru pogosto omejimo na primerno izbran del podmnožic. Seve morajo tvoriti izbrane podmnožice obseg, da jih lahko nemoteno seštevamo in množimo. Še več zahtevamo: Izbrani obseg B podmnožic mora biti tak, da

$$\text{iz } A_1, A_2, A_3, \dots \in B \quad \text{sledi} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \in B$$

S to zahtevo smo poosttrili pogoj II iz definicije obsega. V obsegu B je torej neomejeno izvedljiva operacija števno mnogo presekov in zato tudi operacija števno mnogo unij. Obsegu B s to lastnostjo bomo rekli Borelov obseg. Vsak obseg podmnožic končne množice imamo lahko za Borelov obseg, saj nas v njem števeni presek gotovo ne privede iz obsega.

Zdaj pa že lahko natančno povemo, kaj so dogodki:

Dana naj bo abstraktna množica U in neki Borelov obseg B njenih podmnožic. Množica U je gotov dogodek, njeni elementi e so elementarni dogodki, elementi obsega B pa dogodki.

Kadar torej v aksiomatični koncepciji govorimo o dogodkih, nam je zmeraj pred očmi množica U in Borelov obseg B njenih podmnožic. Zato je smotrno združiti oba podatka v skupno tvorbo (U, B) ; tej tvorbi rečemo *merljiv prostor*.

2.

Zdaj, ko vemo, kaj so dogodki, si vzemimo na piko njihovo verjetnost. Zanja sta znani dve definiciji:

1. klasična: Če je dogodek A vsota r dogodkov iz popolnega sistema, v katerem je s dogodkov, je verjetnost $p(A)$ dogodka A enaka

$$p(A) = \frac{r}{s} \quad (13)$$

2. statistična: Če se v n enakih poskusih zgodi dogodek A m -krat, je verjetnost dogodka A

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \quad (14)$$

Iz definicij (13) oziroma (14) se zlahka dobe naslednje lastnosti verjetnosti:

$$0 \leq p(A) \leq 1 \quad (15)$$

$$p(V) = 0 \quad p(U) = 1 \quad (16)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (17)$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) \quad (18)$$

Formula (17)) je posebno preprosta, če sta dogodka A in B nezdružljiva; tedaj je namreč

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad (19)$$

Naštete lastnosti verjetnosti so bravcu gotovo znane, zato se ne bomo mudili z njihovim dokazovanjem.

Preden definiramo verjetnost aksiomatično, razmislimo, kaj je pravzaprav naloga verjetnostnega računa! Osnovno nalogo lahko na kratko očrtamo takole: Znane so verjetnosti dogodkov $A, B, C, \dots$. Iz njih je treba izračunati verjetnosti dogodkov, ki so z dogodki $A, B, C, \dots$ v zvezi. Poudarek je torej na računanju z danimi verjetnostmi, ne pa na določanju le-teh. Zato je za verjetnostni račun kot matematično disciplino brez pomena, kako so nastale izhodne verjetnosti; važno je le, kako se vedejo pri računanju. Za verjetnost, definirano klasično ali statistično, nam to kažejo formule (15) do (19). Iz teh formul pa obenem razberemo pot za aksiomatično definicijo verjetnosti:

Dan naj bo merljiv prostor $(U, \mathcal{B})$, Vsakemu dogodku $A \in \mathcal{B}$ priredimo število $p(A)$, ki naj ustreza pogojem

$$\text{I. } p(A) \geq 0 \text{ za vsak } A \in \mathcal{B}$$

$$\text{II. } p(U) = 1$$

III. Če sta dogodka A in B nezdružljiva, je $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. Število $p(A)$ s temi lastnostmi je verjetnost dogodka A .

To je aksiomatična definicija verjetnosti, kakršno je dal leta 1933 A. N. Kolmogorov.³

Pri tej definiciji nas najprej zbode v oči dejstvo, da je sistem aksiomov I—III zelo skromen, saj smo od lastnosti (15) do (19) uporabili le majhen del. Vendar se ni težko prepričati, da iz aksiomov I—III sledijo vse lastnosti (15) do (19).

Storimo to! Najprej pokažimo, da

$$\text{iz } A \subset B \quad \text{sledi} \quad p(A) \leq p(B) \quad (20)$$

Res, če je $A \subset B$, lahko najdemo tak dogodek C , da je $A \cap C = \emptyset$ in $A \cup C = B$. Po aksiomu III je tedaj $p(A) + p(C) = p(B)$ in

$$p(A) = p(B) - p(C)$$

Po aksiomu I je $p(C) \geq 0$ in zato $p(A) \leq p(B)$, tako kot smo trdili.

Iz lastnosti (20) dobimo takoj drugi del ocene (15), namreč $p(A) \leq 1$ za vsak $A \in \mathcal{B}$. Treba nam je le upoštevati, da je $A \subset U$ za vsak $A \in \mathcal{B}$.

Tudi zvezo $p(\emptyset) = 0$ bomo brž dokazali. Očitno lahko pišemo

$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$$

³ A. N. Kolmogorov, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933.

Tu je desna stran vsota dveh nezdružljivih dogodkov, zato je po aksiomu III

$$p(U) = p(U) + p(V),$$

torej $p(V) = 0$.

Kako je s formulo (18)? Iz zveze

$$U = A \cup \bar{A}$$

sledi po aksiomih II in III

$$1 = p(U) = p(A) + p(\bar{A});$$

to pa je že formula (18).

Dokažimo še veljavnost formule (17)! Naj bosta A in B poljubna dogodka. Izrazimo dogodka $A \cup B$ in B takole:

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Dogodka A in $\bar{A} \cap B$ sta nezdružljiva, prav to pa velja tudi za dogodka $A \cap B$ in $\bar{A} \cap B$. Zato je po aksiomu III

$$p(A \cup B) = p(A) + p(\bar{A} \cap B)$$

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

Odštejmo drugo enačbo od prve:

$$p(A \cup B) - p(B) = p(A) - p(A \cap B)$$

pa smo pri relaciji (17).

Torej res iz aksiomov I—III slede vse lastnosti (15) do (19).

Pri sistemu aksiomov nas navadno skrbe tri reči: prvič, ali so aksiomi med seboj neodvisni; drugič, ali je sistem neprotisloven; in tretjič, ali je sistem popoln. Kako je v tem pogledu s sistemom aksiomov Kolmogorova? Hitro se vidi, da so aksiomi med seboj neodvisni. Vzemimo obseg, ki ga sestavljajo dogodka V , A , $\bar{A}$ in U ter postavimo $p(V) = p(A) = p(\bar{A}) = 0,1$ in $p(U) = 1$; prva dva aksioma sta v tem primeru izpolnjena, tretji pa ne, ker $p(A) + p(\bar{A}) \neq p(U)$. Če pa vzamemo $p(V) = 0$, $p(A) = p(\bar{A}) = 0,25$ in $p(U) = 0,5$, sta izpolnjena prvi in tretji aksiom, drugi pa ne. In končno ustrezajo števila $p(V) = 0$, $p(A) = -1$, $p(\bar{A}) = 2$, $p(U) = 1$ drugemu in tretjemu aksiomu, prvemu pa ne. Da sistem ni protisloven, razberemo iz dejstva, da mu ustreza verjetnost, definirana na klasični ali na statistični način. Pač pa sistem ni popoln, saj lahko dan merljiv prostor $(U, \mathcal{B})$ na različne načine opremimo z verjetnostmi. Da to uvidimo, vzemimo, da je $U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ in $\mathcal{B}$ sistem vseh podmnožic množice U . Izberimo si poljubna nenegativna števila $p_1, p_2, \dots, p_n$, ki ustrezajo pogoju

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

in postavimo

$$p_i = p(e_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

za $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\}$ pa naj bo

$$p(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_r}$$

V vsakem takem primeru (in očitno jih je neskončno mnogo) so izpolnjeni vsi aksiomi Kolmogorova. Pogosto imamo nepopolnost sistema za lepotno napako, tu pa je prav narobe: V uporabah se srečamo z nalogami, pri katerih je treba obravnavati isti merljivi prostor $(U, \mathcal{B})$, toda z različnimi porazdelitvami verjetnosti; v takih primerih nam pride nepopolnost sistema aksiomov kar prav.

Z aksiomi I—III prav lepo shajamo, če je množica U končna. Če pa je U neskončna množica, si navadno delo olajšamo tako, da sistem aksiomov poostriamo. To storimo s tem, da aksiom III zamenjamo z zelo utemeljenim aksiomom o zveznosti:

Če je zaporedje dogodkov $B_1, B_2, B_3, \dots$ padajoče:

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$$

in je produkt teh dogodkov nemogoč dogodek:

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots = V,$$

je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(B_n) = 0$$

Z aksiomom o zveznosti torej zahtevamo nekako tole: Če se dogodek zadosti malo »razlikuje« od nemogočega dogodka, mora biti tudi njegova verjetnost tako malo različna od verjetnosti nemogočega dogodka, kot le hočemo. Očitno je ta zahteva kaj naravna.

Izkaže se, da je aksiomu o zveznosti ekvivalentna naslednja lastnost verjetnosti:

Če so dogodki $A_1, A_2, A_3, \dots$ paroma nezdružljivi, je

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \dots \quad (21)$$

Dokazu te trditve se bomo odrekli.

Relacija (21) je zelo sorodna z aksiomom III, le nekoliko ostrejša je. Ker je tako podobna aksiomu III, bomo ta aksiom nadomestili prav z njo. Če je torej množica U neskončna, priredimo v merljivem prostoru $(U, \mathcal{B})$ vsakemu dogodku A tako število $p(A)$, da je

I. $p(A) \geq 0$ za vsak $A \in \mathcal{B}$

II. $p(U) = 1$

IIIa. $p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \dots$ za poljubne paroma nezdružljive dogodke $A_1, A_2, A_3, \dots$ iz $\mathcal{B}$.

Tako smo vsakemu elementu iz obsega B priredili neko realno število $p(A)$. Količina $p(A)$ je potemtakem enolična realna funkcija z definicijskim območjem B . Seve ne gre za povsem navadno funkcijo: Argument funkcije $p(A)$ ni število ali, geometrijsko govorjeno, točka, ampak neka množica; zato tudi rečemo, da je $p(A)$ funkcija množice. Ta funkcija je zaradi aksioma I nenegativna; ker ustreza aksiomu IIIa, pravimo, da je totalno aditivna. Nenegativno in totalno aditivno funkcijo množice imenujemo na kratko *mero*. Če ustreza mera še pogoju II, rečemo, da je normirana. V tej terminologiji lahko prav na kratko povemo, kaj je verjetnost:

Verjetnost p je normirana mera, definirana na merljivem prostoru (U, B) .

Merljivemu prostoru (U, B) , v katerem je definirana mera p , rečemo *prostor z mero* in ga označimo z znakom (U, B, p) ; s tem nakažemo vsa določila prostora. Prostor z mero, v katerem je mera verjetnost, pa imenujemo *verjetnostni prostor*. Ker je verjetnost mera, ima vse lastnosti, ki odlikujejo mere nasploh. Te lastnosti so dokaj dobro proučene. Zato korist od opisanega načina aksiomatizacije verjetnostnega računa ni le načelna, namreč v dejstvu, da je z njo verjetnostni račun solidno utemeljen, ampak tudi praktična: tako aksiomatizirani teoriji verjetnosti so postala s tem dostopna vsa sredstva teorije mere. To pa ne pomeni tako malo.

Dolžni smo še odgovor na vprašanje, kaj je v aksiomatični koncepciji poskus. Preden odgovorimo nanj, pomislimo, kaj nas pri poskusu pravzaprav zanima. Dve stvari sta to: kateri dogodki se morejo pri poskusu zgoditi in kako je porazdeljena verjetnost po možnih dogodkih. Na prvo vprašanje odgovorimo tako, da navedemo popoln sistem U elementarnih dogodkov (izidov) za dan poskus in da štejemo za dogodke vse elemente nekega Borelovega obsega B podmnožic množice U . Na drugo vprašanje pa nam daje odgovor verjetnostna mera $p(A)$, definirana na obsegu B . Skratka, vsak poskus α nam določa neki verjetnostni prostor (U, B, p) . Velja pa tudi obratno: Vsak verjetnostni prostor imamo lahko za agregat podatkov o nekem poskusu. Z aksiomatičnega gledišča je zato razlikovanje med poskusi in verjetnostnimi prostori odveč. Torej lahko rečemo:

Poskus je verjetnostni prostor.

S tem je definiran tudi drugi osnovni objekt verjetnostnega računa.

3.

V tem razdelku bomo na kratko opisali, kako opredelimo v aksiomatični koncepciji druge pomembne objekte verjetnostnega računa.

Pri poskusu so izidi pogosto označeni s števili. Množico vseh izidov imamo lahko za zalogo vrednosti neke spremenljivke. Katero vrednost ta spremenljivka zavzame, je odvisno od slučaja; zato rečemo tej spremenljivki *slučajna spremenljivka*. Zanj vemo, katere vrednosti lahko zavzame in kako je po teh vrednostih porazdeljena verjetnost. Drugače rečeno, slučajna spremenljivka je določena z zalogo vrednosti in s porazdelitvenim zakonom.

Če je zaloga vrednosti slučajne spremenljivke α kvečjemu števna množica $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, je porazdelitveni zakon podan najbolj naravno, če na-

vedemo verjetnost p_k za to, da zavzame slučajna spremenljivka α vrednost a_k ($k = 1, 2, 3, \dots$):

$$p_k = p(a_k) = p(\alpha = a_k) \quad (22)$$

Kadar pa je zaloga vrednosti neštevna množica, ni mogoče zapisati porazdelitvenega zakona v obliki (22). Pri takih slučajnih spremenljivkah ξ se zadovoljimo s tem, da za vsako realno število x povemo, kolika je verjetnost za to, da je $\xi < x$. Vsakemu realnemu številu x je s tem prirejeno število

$$F(x) = p(\xi < x) \quad (23)$$

Funkcija $F(x)$ je tako imenovana porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke ξ . Razume se, da je mogoče dobiti porazdelitveno funkcijo tudi iz zakona (22): njeno vrednost pri danem x izračunamo tako, da seštejemo vse tiste p_k , za katere je $a_k < x$.

Poskuse je najlažje obravnavati, če so izidi označeni s števili. V takem primeru se delo reducira na proučevanje slučajne spremenljivke, ki poskus popisuje, torej na obravnavanje neke množice števil. Seveda lahko vsak poskus prevedemo v tako obliko: treba nam je le vsak izid poskusa na primeren način označiti s številom. Natančneje povedano: Naj bo poskus (U, B, p) ; vsakemu $e \in U$ priredimo realno število $f(e)$. Da bomo dobili slučajno spremenljivko, mora biti predpis tak, da je mogoče za vsako realno število x povedati, kolika je verjetnost množice A_x tistih e , za katere je $f(e) < x$. Drugače rečeno, za vsako realno število x mora biti definirana porazdelitvena funkcija

$$F(x) = p(A_x) = p(e : f(e) < x) \quad (24)$$

Ker imajo verjetnost natančno vse množice iz obsega B , lahko to zahtevo formuliramo tudi tako, da rečemo: Za vsako realno število x mora biti

$$A_x \in B \quad (25)$$

S predpisom, ki prireja vsakemu $e \in U$ število $f(e)$, je definirana na množici U enolična realna funkcija. Za razliko od funkcije $p(A)$ je $f(e)$ funkcija točke, saj je njen argument zmeraj element množice U , ne pa kakšna druga njena podmnožica. Ker ustreza funkcija $f(e)$ zahtevi (24) oziroma (25), pravimo, da je funkcija *merljiva*. In na dlani je, da je $f(e)$ slučajna spremenljivka, saj je znana njena zaloga vrednosti in porazdelitvena funkcija. V naši konceptiji je torej slučajna spremenljivka merljiva funkcija, definirana na množici U .

Pri slučajnih spremenljivkah imajo poseben pomen nekatere njihove številske karakteristike: matematično upanje, disperzija itn. Kot je znano, je matematično upanje $M(\xi)$ slučajne spremenljivke ξ , ki lahko zavzame vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ z verjetnostmi $p_1, p_2, \dots, p_n$, definirano s predpisom

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^n x_k p_k \quad (26)$$

Slučajno spremenljivko ξ , ki zavzame le n vrednosti, imamo lahko za »stopničasto« funkcijo $f(e)$, definirano na množici U . To se pravi, množico U

je mogoče razcepiti v sistem razredov $A_1, A_2, \dots, A_n$ tako, da je za vsak k od 1 do n

$$f(e) = x_k \quad (e \in A_k)$$

$$p(A_k) = p_k$$

Izraz na desni strani relacije (26) nas po obliki zelo spominja na določeni integral stopničaste funkcije.⁴ Razlika je le v tem, da je vlogo dolžine prevzela mera p . Ker je dolžina tudi mera, ta razlika ni tako velika, kot bi se utegnilo zdeti na prvi pogled. Zato bomo imenovali izraz

$$\sum_{k=1}^n x_k p_k$$

integral stopničaste funkcije $\xi = f(e)$ na množici U po meri p .

Za poljubno omejeno merljivo funkcijo $f(e)$ pa definiramo integral takole: Naj bo $a \leq f(e) < b$ za vsak $e \in U$; razdelimo interval $a \leq x \leq b$ s točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (27)$$

in označimo

$$p_k = p(A_k) = p(e : x_{k-1} \leq f(e) < x_k)$$

Zdaj tvorimo vsoti

$$s = \sum_{k=1}^n x_{k-1} p_k$$

$$S = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

Vsoto s imenujemo spodnjo, vsoto S pa zgornjo. Kot pri Riemannovem integralu se izkaže tudi tu, da je množica spodnjih vsot, tvorjenih pri vseh mogočih delitvah (27), navzgor omejena, množica vseh zgornjih vsot pa navzdol omejena in da je $\sup s = \inf S$. To skupno vrednost imenujemo Lebesguov integral funkcije $f(e)$ na množici U po meri p ; označujemo ga z znakom

$$\int_U f(e) dp \quad (28)$$

V kakšni zvezi je integral (28) z matematičnim upanjem slučajne spremenljivke $\xi = f(e)$? Spodnja vsota s je očitno matematično upanje stopničaste slučajne spremenljivke, ki ni nikjer večja od ξ , zgornja vsota S pa matematično upanje stopničaste slučajne spremenljivke, ki ni nikjer manjša od ξ . Torej je za vsako delitev (27)

$$s \leq M(\xi) \leq S$$

⁴ Prim. dr. I. Vidav, O definiciji določenega integrala, Obzornik VIII/2, 1961, str. 49—54.

To pa pomeni, da je za poljubno omejeno slučajno spremenljivko $\xi = f(e)$

$$M(\xi) = \int_U f(e) dp \quad (29)$$

Razširimo definicijo Lebesguovega integrala še na neomejene merljive funkcije $f(e)$! Ravnajmo takole: Izberimo si poljubni realni števili a in b ter stvorimo funkcijo

$$f_{ab}(e) = \begin{cases} f(e), & a \leq f(e) \leq b \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

Funkcija $f_{ab}(e)$ je omejena in merljiva, zato ima Lebesguov integral. Če eksistira končna limita tega integrala pri pogoju $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$, jo vzamemo za integral merljive funkcije $f(e)$:

$$\int_U f(e) dp = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_U f_{ab}(e) dp$$

Ta integral spet ni nič drugega kot matematično upanje slučajne spremenljivke $\xi = f(e)$. Torej velja splošno:

Matematično upanje slučajne spremenljivke $\xi = f(e)$ je Lebesguov integral funkcije $f(e)$ na množici U po meri p .

Podobno velja za druge številske karakteristike slučajne spremenljivke $\xi = f(e)$. Tako je disperzija

$$D(\xi) = \int_U [f(e) - M(\xi)]^2 dp$$

in moment reda n glede na vrednost a :

$$\mu_n(a) = \int_U [f(e) - a]^n dp$$

Končno si oglejmo še, kaj je v aksiomatični koncepciji trenutno najbolj aktualna tvorba verjetnostnega računa — slučajni proces. Slučajni proces $\xi(t)$ je funkcija realne spremenljivke t , in sicer taka, da je pri vsakem možnem t »vrednost« funkcije neka slučajna spremenljivka. Torej lahko tudi rečemo, da je slučajni proces enoparametrična familija slučajnih spremenljivk. V uporabah je ta parameter navadno čas in slučajni proces slučajna spremenljivka, ki se s časom spreminja.

Videli smo že, da je slučajna spremenljivka v naši koncepciji merljiva funkcija, definirana na množici U . Potemtakem je slučajni proces $\xi(t)$ funkcija dveh spremenljivk: e in t ,

$$\xi(t) = f(e, t),$$

in sicer taka, da je pri vsakem možnem t_0 funkcija $f(e, t_0)$ merljiva z mero p . Če namesto t fiksiramo spremenljivko e , dobimo realno funkcijo realne spremenljivke $f(e_0, t)$, tako imenovano realizacijo slučajnega procesa. Tej funkciji ne predpisujemo nobenih posebnih lastnosti, vendar je, vsaj v uporabah, precej pohlevna.

✓ O POSLEDNJEM FERMATOVEM PROBLEMU

ANTON SUHADOLC

Naloga, rešiti enačbo

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

kjer je $n > 2$, x, y, z pa cela pozitivna, med seboj tuja si števila, je znana pod imenom poslednji Fermatov problem. Matematik P. Fermat je namreč na rob neke knjige zapisal, da je našel čudovit dokaz za trditev, da naloga ni rešljiva. Mnogo matematikov vse do današnjih dni se je ukvarjalo s tem problemom, vendar ga doslej še nihče ni rešil. Znano je npr., da je naloga nerešljiva za eksponente n , ki so praštevila, manjša od 253 747 889, če nobeno od števil x, y, z ni deljivo z eksponentom n . V primeru, da je eno izmed števil x, y, z deljivo z n , naloga gotovo ni rešljiva za praštevila < 4002 .¹

Dandanes, v času hitrih elektronskih računalnikov, se nam ponuja misel, morda bi numerično, s poskušanjem, uspeli najti kakšno rešitev enačbe (1), če jo ta sploh ima. Glede na dosedanje raziskave in delne uspehe se to ne zdi verjetno. Pa tudi, če je enačba (1) rešljiva pri kakšnem n , so rešitve tako velika števila, da jih niti s poskušanjem niti s strojem ne bo mogoče najti. To si bomo v naslednjem natančneje ogledali.

Vzemimo, da ima enačba (1) res rešitev x, y, z pri nekem eksponentu n ; privzeti smemo, da velja $x < y < z$. Enakost je povsod izključena, ker smo zahtevali, da so si x, y, z med seboj tuji. Postavimo: $z = y + u$, $u \geq 1$, in vstavimo to v enačbo (1):

$$(y + u)^n = z^n = y^n + x^n$$

Na levi uporabimo binomski izrek in dobimo

$$y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} u + \dots + \binom{n}{n} u^n = x^n + y^n$$

Od tod sledi $x^n > ny^{n-1}u$. Ker je $y > x$ in $u > 1$, imamo $x^n \geq nx^{n-1}$ in po delitvi z x^{n-1} dobimo $x > n$, potem pa tudi $y > n$ ter $z > n$.

Z besedami povemo to ugotovitev takole: V eventualni rešitvi enačbe (1) so x, y, z vsi večji od n . To elementarno oceno je mogoče še bistveno izboljšati, kot je pokazal madžarski matematik R. Oblath v [1]. V tem članku je dokazal avtor naslednji izrek:

Izrek 1. Če so x, y, z rešitve enačbe (1), n praštevilo > 3 , veljajo za x, y, z te ocene:

1. Če nobeno od števil x, y, z ni deljivo z n , $x < y < z$, velja

$$x \geq 4n^2 + 1, \quad y \geq 2(4n^2 + 1), \quad z \geq 2(10n^2 + 1)$$

2. Če je eno od števil x, y, z deljivo z n , potem je vsaj eno od ostalih dveh števil večje od $\frac{1}{2}n^{3/n-1}$.

Če v tem izreku upoštevamo citirane ugotovitve Vandiverja in zakoncev Lehmer, dobimo te številčne ocene:

¹ Prvo trditev sta dokazala zakonca D. H. in Emma Lehmer: On the first case of Fermat's Last Theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 447, drugo pa Selfridge, Nicol, Vandiver: Proof of Fermat's Last Theorem for all prime exponents less than 4 002. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 441 (1955).

Izrek 2. V primeru 1 velja $x^n > 10^{4,4 \cdot 10^9}$. V primeru 2 je vsaj eno od števil x, y, z večje od $10^{43 \cdot 200}$.

Za boljšo predstavo velikosti števil pripominja avtor, da bi rabili samo za zapis števila z^n v primeru 1 več kot 210 let, če bi pisali s hitrostjo 2 številk na sekundo in pri tem porabili 6 700 km dolg trak, če zavzame vsaka številka 5 mm prostora. Računu s tako velikimi števili tudi današnji računalniki niso kos.

Izrek 1, ali vsaj njegova prva polovica, se da elementarno dokazati. Za to potrebujemo nekaj predhodnih rezultatov.

Lema 1. u in v naj bosta tuji si pozitivni ali negativni celi števili, $u + v \neq 0$, p praštevilo. Tedaj velja: V enačbi

$$u^p + v^p = \frac{u^p + v^p}{u + v} (u + v) = Q(u + v),$$

pri čemer je

$$Q = u^{p-1} - u^{p-2}v + \dots - v^{p-1}$$

sta si faktorja Q in $u + v$ ali tuja ali pa imata skupni delitelj p . V primeru, da imata skupni delitelj p , p^2 ne deli Q .

Postavimo $u + v = t$, tedaj $v = t - u$, v zgornjo identiteto. Dobimo

$$\begin{aligned} Q &= [t^p - \binom{p}{1} t^{p-1}u + \dots - \binom{p}{p} u^p + u^p] / t = \\ &= t^{p-1} - \dots - \frac{p(p-1)}{2} t u^{p-2} + p u^{p-1} \end{aligned}$$

Naj bo r skupni prafaktor števil Q in $u + v = t$. r deli torej levo stran zgornje identitete in vse člene na desni strani, razen morda zadnjega, ker ti vsebujejo z r deljivi faktor t . Tedaj pa mora biti z r deljiv tudi zadnji člen pu^{p-1} . To zapišemo s simbolom takole: r/pu^{p-1} in čitamo » r deli pu^{p-1} «. (Dejstvo, da neko število a ni deljivo s številom p , zapišemo simbolično $p \nmid a$.) Najprej ugotovimo, da r ne more deliti u^p , ker bi tedaj r kot prafaktor delil tudi u in ker r deli $u + v$, bi r delil še v , kar je po predpostavki izključeno. Tedaj r deli p in imamo dve možnosti: $r = p$ ali $r = 1$. V primeru $r = p$ pokažimo, da p^2 ne deli Q . Vzemimo nasprotno, da p^2/Q . Ker p deli t , so v enačbi

$$Q = t^{p-1} - pt^{p-2}u + \dots - \frac{p(p-1)}{2} tu^{p-2} + pu^{p-1}$$

vsi členi razen predzadnjih dveh deljivi s t^2 in zato tudi s p^2 . Predzadnji člen ima faktor p v koeficientu in še s t je deljiv, torej je deljiv tudi s p^2 . Zato mora biti tudi zadnji člen pu^{p-1} deljiv s p^2 , p^2/pu^{p-1} ali p/u^{p-1} . Torej p deli u , potem pa tudi v , ker p deli $u + v$. To je zopet protislovje s predpostavko, da sta u in v tuja. Naš pomožni izrek je tako v celoti dokazan.

V naslednjem pomožnem izreku bomo rabili pojem kongruence. Ponovimo na kratko definicijo in nekaj lastnosti kongruenc! Rečemo, da sta celi števili a in b kongruentni po številu p , v znakih $a \equiv b (p)$, če je razlika $a - b$ deljiva s p . V primeru, da je p praštevilo, veljajo za enačbe s kongruencami podobni računski zakoni kot za navadne enačbe. V posebnem velja, da smemo enačbo $ax + b \equiv 0 (p)$ množiti s poljubnim celim številom in deliti s celim številom, ki ni deljivo s p .

Dokažimo še naslednji

Lema 2. Naj bosta p in r praštevili, $p > 2$, u in v pozitivni ali negativni celi števili.

a) Če $r / (u^p + v^p) = (u + v) Q$
in $r \nmid (u + v)$, torej r/Q ,

tedaj je r oblike $r = kp + 1$ ali $r \equiv 1 \pmod{p}$.

b) Če $r / (u^{p^2} + v^{p^2})$
in $r \nmid (u^p + v^p)$,

je r oblike $r = kp^2 + 1$, to je $r \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Ugotovimo najprej, da $r \nmid v$. V nasprotnem primeru bi r/v^p ; ker $r/(u^p + v^p)$, bi tedaj r delil tudi u in zato $u + v$, kar po predpostavki ni mogoče. Določimo k številu v celo število w tako, da bo $vw \equiv -1 \pmod{r}$ ali, kar je isto, $vw \equiv r - 1 \pmod{r}$. Tako število w res eksistira, ker so cela števila $v, 2v, 3v, \dots, (r-1)v$ med seboj po modulu r različna in so zato kongruentna številom $1, 2, \dots, r-1$ v nekem vrstnem redu. w je potemtakem eden izmed faktorjev $1, 2, \dots, r-1$ v zgornjih produktih in zato ni deljivo z r . Množimo enačbi pod a) z w^p oziroma w . Tako dobimo

$$r / [(uw)^p + (vw)^p] \quad \text{in} \quad r \nmid (uw + vw)$$

Resničnost druge trditve uvidimo s protislovjem. Naj bo $uw + vw$ deljivo z r . Tedaj je ali $u + v$ deljivo z r , ali w . Obe možnosti po predpostavki oziroma po konstrukciji števila w odpadeta.

Dejstvo $r / [(uw)^p + (vw)^p]$ zapišemo tudi tako: $(uw)^p \equiv -(vw)^p \pmod{r}$. Zaradi $vw \equiv -1 \pmod{r}$ je tudi $(vw)^p \equiv -1 \pmod{r}$ in potem $(uw)^p \equiv 1 \pmod{r}$. Odnos $r \nmid (uw + vw)$ pa zapišemo takole: $uw \not\equiv -vw \pmod{r}$ in zaradi $vw \equiv -1 \pmod{r}$ velja $uw \not\equiv 1 \pmod{r}$.

Iz relacij $(uw)^p \equiv 1 \pmod{r}$ in $uw \not\equiv 1 \pmod{r}$ sklepamo, da mora biti p delitelj števila $r - 1$. Pri tem se opiramo na naslednji znani izrek iz teorije števil:

Če je r praštevilo in celo število a ni deljivo z r , potem je

$$a^{r-1} \equiv 1 \pmod{r}$$

Če sta si števili a in b tuji, je možno najti celi števili x in y tako, da je $ax + by = 1$. Zdaj sklepamo takole: Če p ne bi delil $r - 1$, bi si bila p in $r - 1$ tuja in bi potem mogli najti števili x in y tako, da je $px + (r - 1)y = 1$. Od tod dobimo

$$(uw)^1 = (uw)^{px + (r-1)y} = (uw)^{px} (uw)^{(r-1)y} \equiv 1 \pmod{r}$$

ker je $(uw)^p \equiv 1$ in tudi $(uw)^{r-1} \equiv 1 \pmod{r}$. To je v nasprotju z $uw \not\equiv 1 \pmod{r}$ in je zato p res delitelj števila $r - 1$. To pomeni, da je $r - 1 = kp$ ali $r = kp + 1$, kar smo hoteli dokazati.

Dokaz druge polovice pomožnega izreka poteka podobno in ga zato opustimo.

Uporabimo dosedanje ugotovitve na enačbi (1), le da jo pišimo v simetrični obliki

$$x^n + y^n + z^n = 0 \tag{2}$$

kjer so x, y, z med seboj tuja si pozitivna ali negativna cela števila.

Enačbo moremo pisati tudi takole

$$-z^n = x^n + y^n = Q(x, y)(x + y) = \frac{x^n + y^n}{x + y}(x + y)$$

Naj res eksistira rešitev enačbe (2), nobeno od števil x, y, z pa naj ne bo deljivo z n . Eksponent n bodi praštevilo.² Tedaj tudi $Q(x, y)$ in $x + y$ nimata skupnega faktorja, torej morata biti vsak zase n -ta potenca (glej 1. lema). Zato je

$$Q(x, y) = a_1^n, \quad x + y = b_1^n, \quad -z = a_1 b_1, \quad a_1 \text{ in } b_1 \text{ sta si tuja.}$$

Zaradi simetrije veljajo analogna dejstva za y in z ter z in x :

$$\begin{aligned} Q(y, z) &= a_2^n, \quad y + z = b_2^n, \quad -x = a_2 b_2, \quad a_2 \text{ in } b_2 \text{ sta si tuja,} \\ Q(z, x) &= a_3^n, \quad z + x = b_3^n, \quad -y = a_3 b_3, \quad a_3 \text{ in } b_3 \text{ sta si tuja.} \end{aligned} \quad (3)$$

Sedaj že lahko dokažemo izrek, ki ga pripisujejo matematičarki Sofiji St. Germain. (Bila je sodobnica slavnega matematika C. F. Gaussa.)

Lema 3. Če v rešitvi enačbe (2) nobeno od števil x, y, z ni deljivo z n , so vsi prafaktorji števil $Q(x, y)$, $Q(y, z)$ in $Q(z, x)$ oblike $kn^2 + 1$.

Naj bo praštevilo r faktor v Q . Ker je $Q(x, y) = a_1^n$, mora r deliti že a_1 in zaradi $-z = a_1 b_1$ deli r tudi z . Če seštejemo zadnji dve enačbi v (3), dobimo

$$x + y + 2z = b_2^n + b_3^n$$

Ker r deli z , moremo to enačbo zapisati takole: $x + y \equiv b_2^n + b_3^n, (r)$. Če upoštevamo, da je $x + y = b_1^n$ (prva enačba v (3)), dobimo $b_2^n + b_3^n \equiv b_1^n, (r)$. Vemo tudi, da sta a_1 in b_1 tuja; ker r deli a_1 , r ne more deliti b_1 . Tako moremo zadnjo enačbo zapisati v obliki

$$b_2^n + b_3^n \equiv 0, (r) \quad (4)$$

Iz enačbe (3) izračunajmo še

$$\begin{aligned} b_2^{n^2} + b_3^{n^2} &= (y + z)^n + (x + z)^n = \\ &= y^n + ny^{n-1}z + \dots + x^n + nx^{n-1}z + \dots + 2z^n \end{aligned}$$

Ker smo vzeli, da so x, y, z rešitve enačbe (2), je $x^n + y^n = -z^n$. Če to upoštevamo v zgornji enačbi, vidimo, da so vsi členi na skrajni desni deljivi z z in zato tudi z r . To pa pomeni

$$b_2^{n^2} + b_3^{n^2} \equiv 0, (r)$$

Ta enačba in neenačba (4) kažeta, da so izpolnjeni pogoji pomožnega izreka 2, dela b. Praštevilo r ima tedaj obliko $r = kn^2 + 1$, kar smo želeli dokazati. Zaradi simetrije velja isto za delitelje $Q(y, z)$ in $Q(z, x)$.

Povrnimo se na ocenjevanje morebitnih rešitev enačbe (1), n naj bo spet praštevilo > 3 . Smemo se omejiti na primer $x < y < z$. Naj ne bo nobeno izmed števil x, y, z deljivo z n . Ker je

$$x^n = z^n - y^n = \frac{z^n - y^n}{z - y}(z - y),$$

² Omejiti se smemo pri reševanju enačbe (1) oz. (2) na eksponente, ki so praštevila. Velja namreč izrek: Če enačba (1) ni rešljiva za praštevilske eksponente n , tudi za ostale eksponente ni rešljiva.

nam lema 3 pove, da ima vsak prafaktor v $(z^n - y^n)/(z - y)$ obliko $kn^2 + 1$. Ker je $kn^2 + 1$ prafaktor, torej praštevilo > 3 , mora biti kn^2 sodo število. Ker je n praštevilo > 3 , je tedaj k sodo število, $k = 2a$. Prafaktor ima tedaj obliko $2an^2 + 1$, $a \geq 1$. Vendar a ne more biti 1, ker je v tem primeru število $2n^2 + 1$ deljivo s 3, o čemer se prepričamo s poskusom. Torej je $a \geq 2$ in x ima vsaj prafaktor $4n^2 + 1$, če ne celo večjega. Seveda velja $x \geq 4n^2 + 1$.

Ker x in y nista enaka, y in z pa tudi ne, je zaradi dogovora $x < y < z$ razlika $z - y \geq 2$. Iz pomožnega izreka 1 vemo, da sta si v enačbi $y^n = \frac{z^n - x^n}{z - x} (z - x)$ faktorja tuja in zato vsak zase že n -ta potenca. To pomeni,

da iz $z - x \geq 2$ sledi $z - x \geq 2^n$. Prafaktor v prvem faktorju ima zopet obliko $2an^2 + 1$ in najmanjši delitelj prvega faktorja je najmanj $4n^2 + 1$. Število y ima torej najmanj delitelja $4n^2 + 1$ in 2 ter je zato $y \geq 2(4n^2 + 1)$.

Podobno ugotovimo, da ima z delitelj oblike $2an^2 + 1$. Za x smo našli, da ima v najslabšem primeru faktor $4n^2 + 1$, y pa tega faktorja ne more imeti, ker sta si x in y tuja. Zato ima y v najslabšem primeru faktor $6n^2 + 1$. Možnost, da bi bil v produktu $y^n = \frac{z^n - x^n}{x - z} (z - x)$ prvi faktor enak 1, je izključena, ker

smo v začetku dokazali, da sta x in $z > n$ in zato prvi faktor $z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + x^{n-1} > n^n$. Podobno mora imeti torej z v najslabšem primeru faktor $8n^2 + 1$, vendar tega ne more imeti, ker je $8n^2 + 1$ deljivo s 3, če je n praštevilo > 3 , o čemer se s preizkusom takoj prepričamo. Zato ima z v najslabšem primeru celo faktor $10n^2 + 1$. V identiteti

$$z^n = \frac{x^n + y^n}{x + y} (x + y) \quad (5)$$

je zaradi $x > n$ in $y > n$ tudi $x + y > 2n$ in tedaj $x + y \geq 2^n$. Od tod sledi, da velja $z \geq 2(10n^2 + 1)$. S tem je dokaz prvega dela izreka 1 zaključen.

Drugega dela tega izreka ni mogoče tako preprosto dokazati. Opreti se moramo na izsledek Vandiverja (glej [2]), ki pravi: Če je v enačbi (1) eno od števil x, y, z deljivo z n , je to število deljivo najmanj z n^3 .

Vzemimo, da je z deljiv z n . Po pravkar citiranem izsledku je z deljiv tudi z n^3 . V identiteti (5) sta po pomožnem izreku 1 oba faktorja deljiva z n , vendar prvi faktor z n^2 ni deljiv. Ker je leva stran enačbe (5) deljiva z n^{3n} , prvi faktor na desni le z n , mora biti drugi faktor na desni deljiv najmanj z n^{3n-1} , torej $x + y \geq n^{3n-1}$. Od tod sledi, da je vsaj eno od števil x, y večje od $\frac{1}{2}n^{3n-1}$. Če pa je npr. v rešitvi enačbe (1) x deljiv z n , dobimo na podoben način oceno, da je z celo večji od n^{3n-1} .

Tako je dokazan tudi drugi del izreka 1.

Na koncu naj omenimo, da je Inkeri z močnejšimi pripomočki iz teorije števil dokazal tole: Če so x, y, z rešitve enačbe (1) in nobeno od teh števil ni deljivo z eksponentom n , velja ocena $x > n(30n^2 + 1)^n$. To število je za $n > 253\,747\,889$ tako ogromno, da si ga težko predstavljamo.

Literatura:

- [1] R. Oblath: Untere Schranken für Lösungen der Fermatschen Gleichung. *Portugaliae mathematica*, 11, 1952.
- [2] E. Landau: Vorlesungen über Zahlentheorie III.

✓TERMONUKLEARNA ENERGIJA*

RICHARD F. POST, University of California — Prevedla Majda Stanovnik

Če bo človek mogel obvladati reakcije, pri katerih se atomska jedra zlivajo namesto cepijo, bo imel skoraj neomejen vir energije. Problema se zdaj lotevajo v laboratorijih po vsem svetu.

Prizadevanje, da bi »ukrotili« reakcijo vodikove bombe — da bi obvladali energijo zlivanja jeder in jo mogli kontrolirano uporabljati — se čedalje bolj uveljavlja v mnogih deželah na svetu. Razvija se tiho, za zaveso uradne tajnosti, vendar pa silovito in v precejšnjem obsegu. Vsi narodi spoznavajo, da utegne biti to raziskovalno delo najpomembnejše v vsej človeški zgodovini. Končne pridobitve bodo tolikšne — tako za posamezne države kakor za celotno človeštvo da se mnogi narodi čedalje odločneje in s čedalje večjim občutkom nujnosti lotevajo reševanja te naloge.

Razmah naše industrijske civilizacije v prvi polovici dvajsetega stoletja sloni na fosilnih gorivih — na premogu in na nafti. Toda mnoge dežele tega dvojega nimajo, medtem ko celo tiste, ki ju imajo obilo, spoznavajo, da jim zaloge hitro kopnijo. V tej zagati se je kot rešilni up za prihodnost pokazal uran. Iz prvih jedrskih »cepitvenih« central že priteka električna energija. Anglija pričakuje, da bo v nekaj desetletjih večino svojih energetske potreb zadovoljevala s cepitvenimi gorivi, in tudi številne druge dežele pripravljajo načrte za enak preskok; celo Združene države Amerike, ki imajo velike zaloge premoga; žrtvujejo stotine milijonov dolarjev, da bi se v ne posebno daljni prihodnosti pripravile za prehod k uporabi energije, ki se sprošča pri cepljenju jeder.

Računajo, da je v svetovnih zalogah urana in torija približno desetkrat do stokrat večja rezerva energije kakor v preostalem premogu. A kljub temu so tudi cepitvena goriva izčrpljiva. Pri hitrosti, s kakršno naraščajo svetovne potrebe po energiji (v Združenih državah se potrebe po električni energiji vsakih osem let podvojijo), se praktično ves ekonomično pridobljivi uran kakor tudi premog utegneta približno v sto letih izčrpati. S cepitveno energijo pa je še neka neposrednejša težava: in sicer odlaganje radioaktivnih odpadkov. Če bi vse sedanje energetske potrebe Združenih držav zadovoljevali cepitveni reaktorji, bi vsako leto morali spraviti v kraj toliko radioaktivnih cepitvenih produktov, kolikor jih nastane pri eksploziji 200.000 atomskih bomb; leta 2000 bi bili radioaktivni odpadki pri ustrezno narasli porabi energije tolikšni kot pri osmih milijonih razstreljenih atomskih bomb na leto! V prihajajočem obdobju cepitvene energije bo vprašanje varnega odlaganja radioaktivnega pepela in plinov očitno delalo še hude preglavice.

Po vsem tem laže razumemo lov, če ne že dirko za spoznanjem, ali se lahko ukroti in uporabi termonuklearna energija. Če bi s pomočjo kontrolirane termonuklearne reakcije lahko pridobivali energijo, bi za zmeraj rešili takó vprašanje goriva kakor tudi vprašanje radioaktivnih odpadkov. Osnovno termonuklearno gorivo, devterij, je namreč enako neizčrpno kakor oceani in pri termonuklearni reakciji nastaja prav malo radioaktivnih produktov.

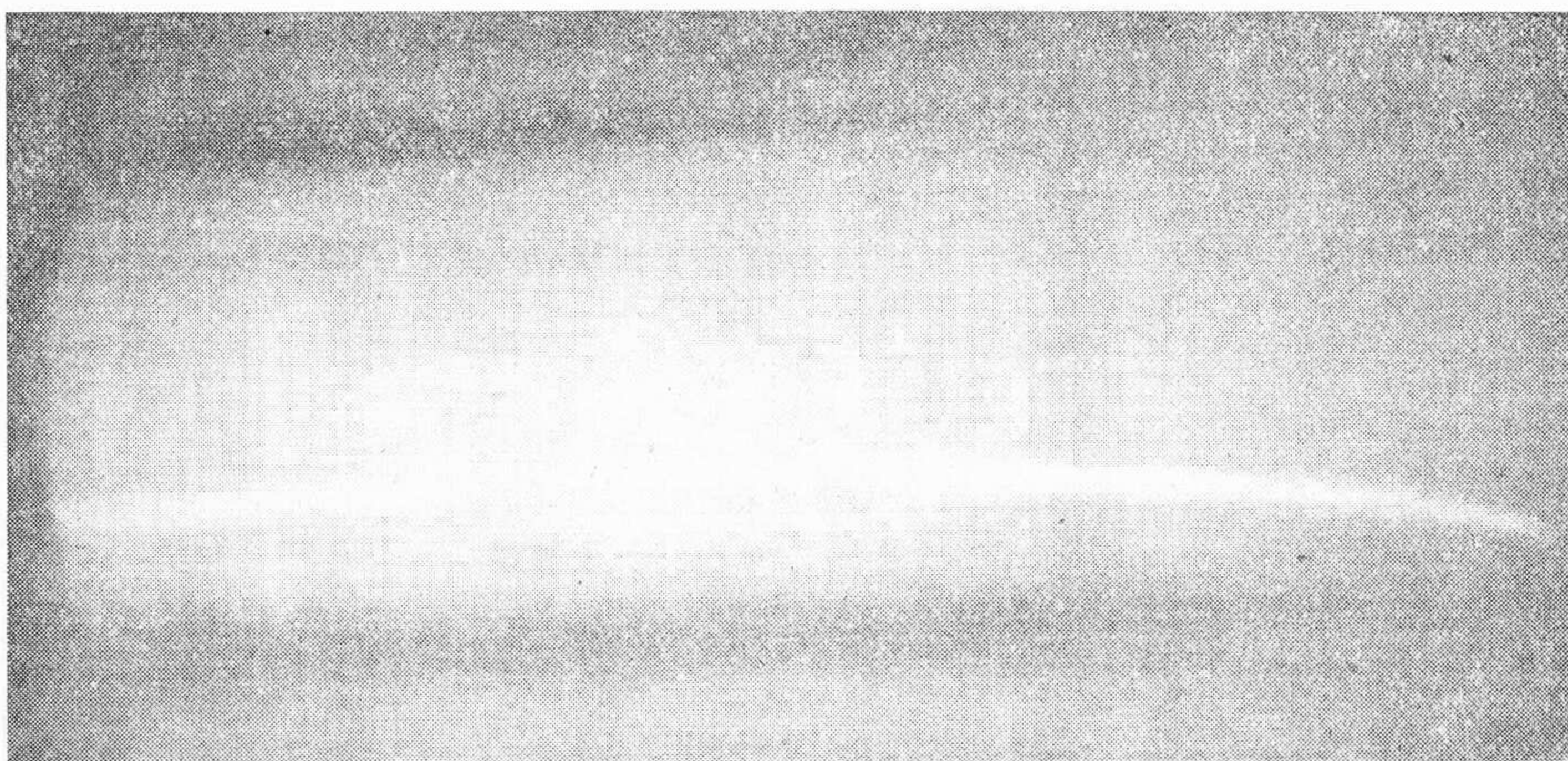
Termonuklearna reakcija

Zlivanje jeder ni ravno nov pojav. Že bilijone let ustvarja energijo na Soncu in na drugih zvezdah, fiziki pa so v laboratoriju odkrili zlivanje jeder

* Originalni članek je bil tiskan v dec. št. revije Scientific American, 1957. Prevod je objavljen z dovoljenjem uredništva iste revije, ki se mu za to najlepše zahvaljujemo.

še pred cepitvijo jeder. Toda sprožiti in obvladati termonuklearno reakcijo na Zemlji je čisto drugačen problem kakor voditi cepitev. Nedvomno je to najtežja zamisel, ki so se z njo kdajkoli spoprijeli znanstveniki in inženirji. Ta članek poroča o dosedanjem razvoju, kolikor je o njem dovoljeno pisati za javnost.

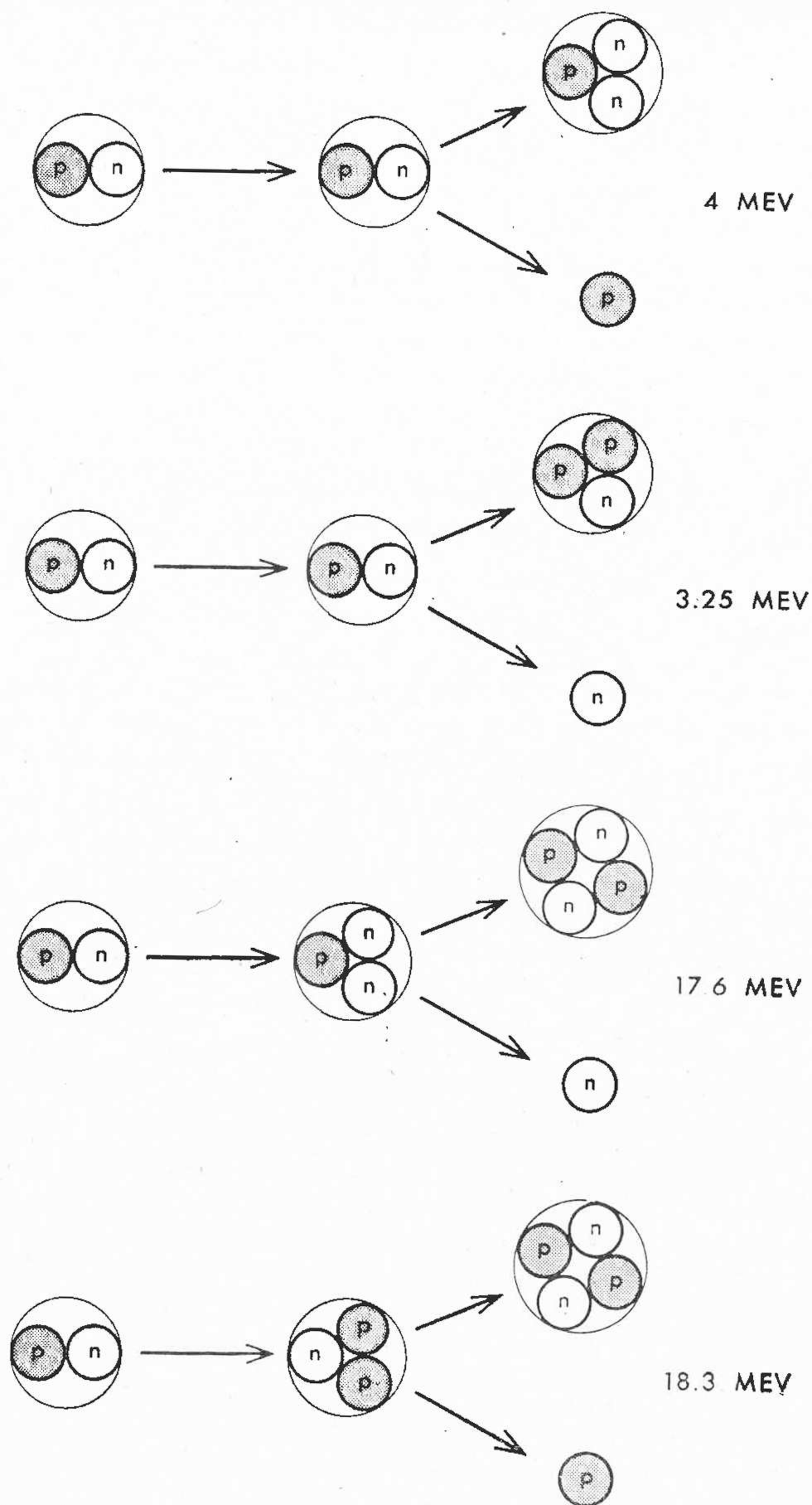
V dvajsetih in tridesetih letih našega stoletja so fiziki, ki so delali s pospeševalniki, dognali, da lahko s pospeševanjem protonov (vodikovih jeder) in drugih lahkih jeder na dovolj močne energije (več tisoč elektronskih voltov) predrejo električne odbojne sile jedra in prisilijo pospeševane delce, da se zlijejo z lahkimi jedri tarče. Zlitje sprosti energijo, ker se del mase zlivajočih se jeder glede na Einsteinovo slavno enačbo $E = mc^2$ spremeni v energijo. Toda pri tovrstnem obstreljevanju je treba porabiti veliko energije, da se zlije le malo jeder. Zlitje jeder ne more dati čistega presežka energije, razen če reakcija teče sama od sebe, kakor na primer v notranjščini sonca.



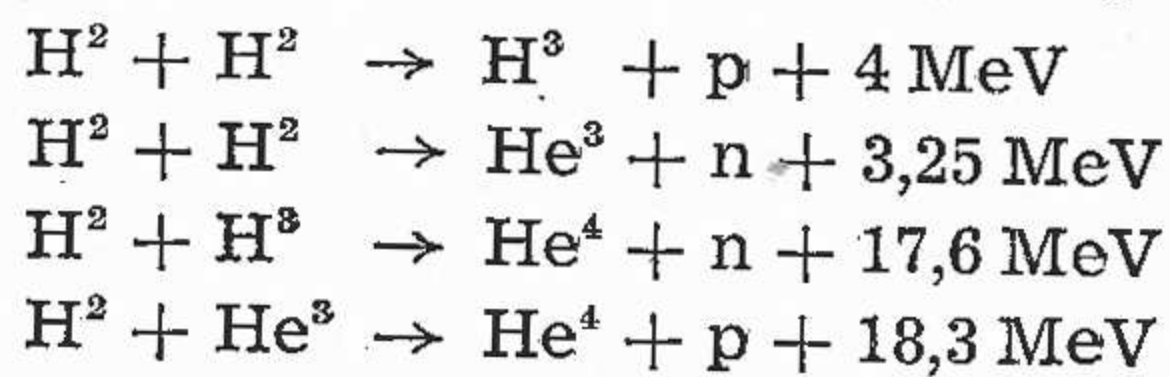
Sl. 1. Fotografski posnetek vroče plazme (električno nevtralne zmesi pozitivnih ionov in elektronov), dobljen s pomočjo slikovnega ojačevalca. Plin (kripton) so segreli in stisnili s »stiskalnim efektom«, ki ga je povzročil tok 8000 A. Pritisk plina je bil $2.40 \cdot 10^{-4}$ atmosfer. Eksperiment so naredili v laboratoriju Los Alamos

Kaj je potrebno za sprožitev reakcije, ki teče sama od sebe? Primerjajmo termonuklearno reakcijo s cepitvijo! Cepitvena verižna reakcija je analogna eksploziji TNT. Za sprožitev eksplozije TNT zadostuje mehaničen udarec; zlom nestabilnih molekul ustvari »udarni« val, ki zajema molekule drugo za drugo. Podobno je pri cepitveni verižni reakciji, kjer so sprožilci verižne cepitve nevtroni: vsaka cepitev sprosti nevtrone, ki napadajo druga cepljiva uranova jedra. Skratka, pri verižni reakciji toplota oziroma kinetična energija ne igra nobene vloge.

Termonuklearna reakcija pa je, nasprotno, analogna znanemu procesu zgorevanja. Pri navadnem zgorevanju se molekule vežejo (npr. vodik s kisikom, kar da vodo), njihova kemična reakcija pa sprošča energijo. Da se molekule zvežejo ali zlijejo, morajo močno trčiti, kar pomeni, da je treba snov segreti. Da se kemično gorivo vžge in da se njegova toplota lahko izrabi za delo, so potrebni trije pogoji: 1. gorivo je treba toliko segreti, da postane vnetljivo; 2. mora ga biti dovolj, da se lahko razvija kontinuirana reakcija; 3. sproščeno energijo



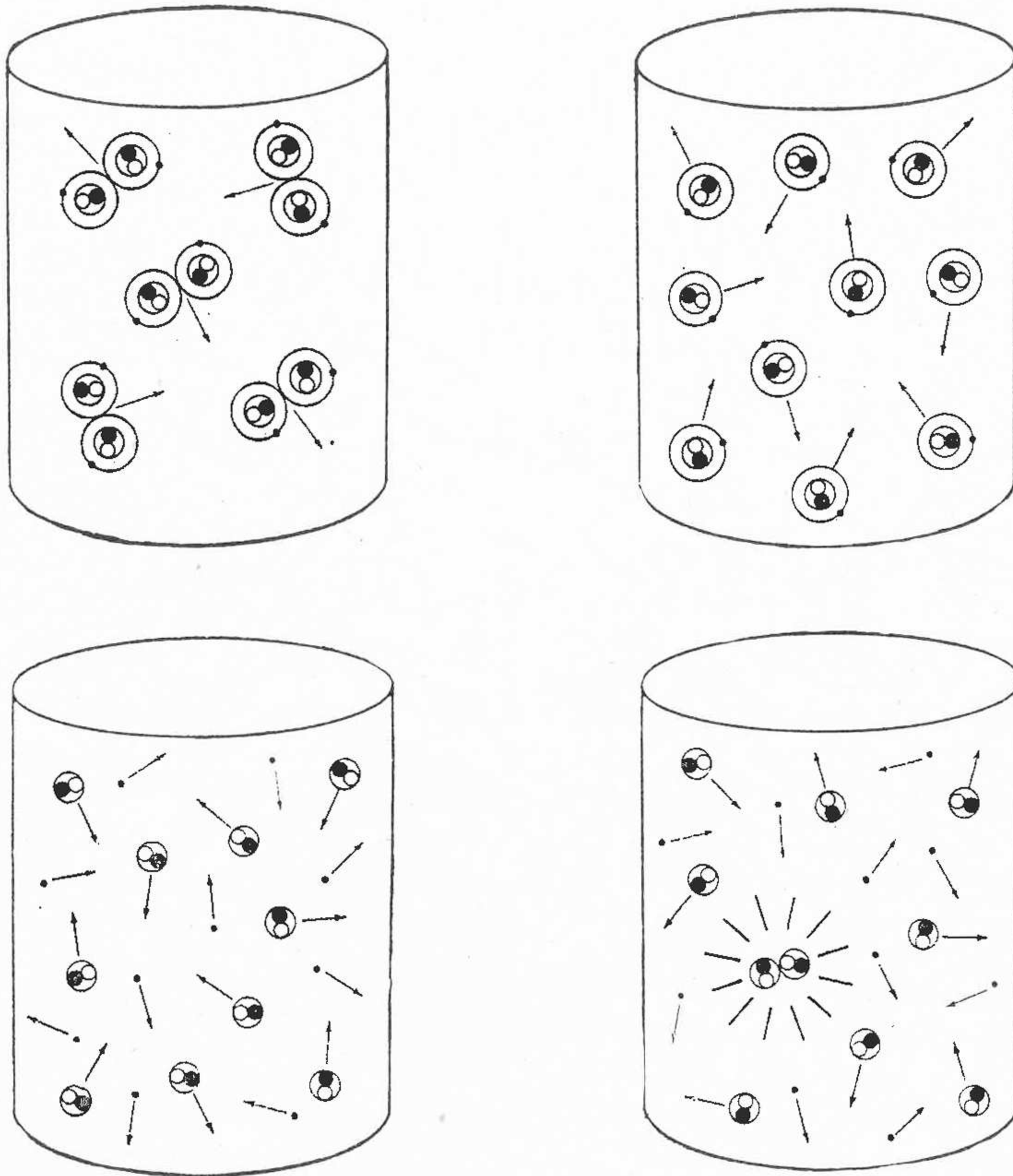
Sl. 2. Shematičen prikaz fuzijskih reakcij, ki pridejo v poštev za produkcijo energije:



je treba odvajati kontrolirano, npr. tako, da segreva vodo ali da poganja bat. Popolnoma enaki pogoji so potrebni tudi za sprožitev termonuklearne reakcije in za njeno koristno izrabo. Velikanski razložek pa je v tem, da je vnetišče pri termonuklearni reakciji zelo visoko — stotine milijonov stopinj Celzija.

Termonuklearno gorivo

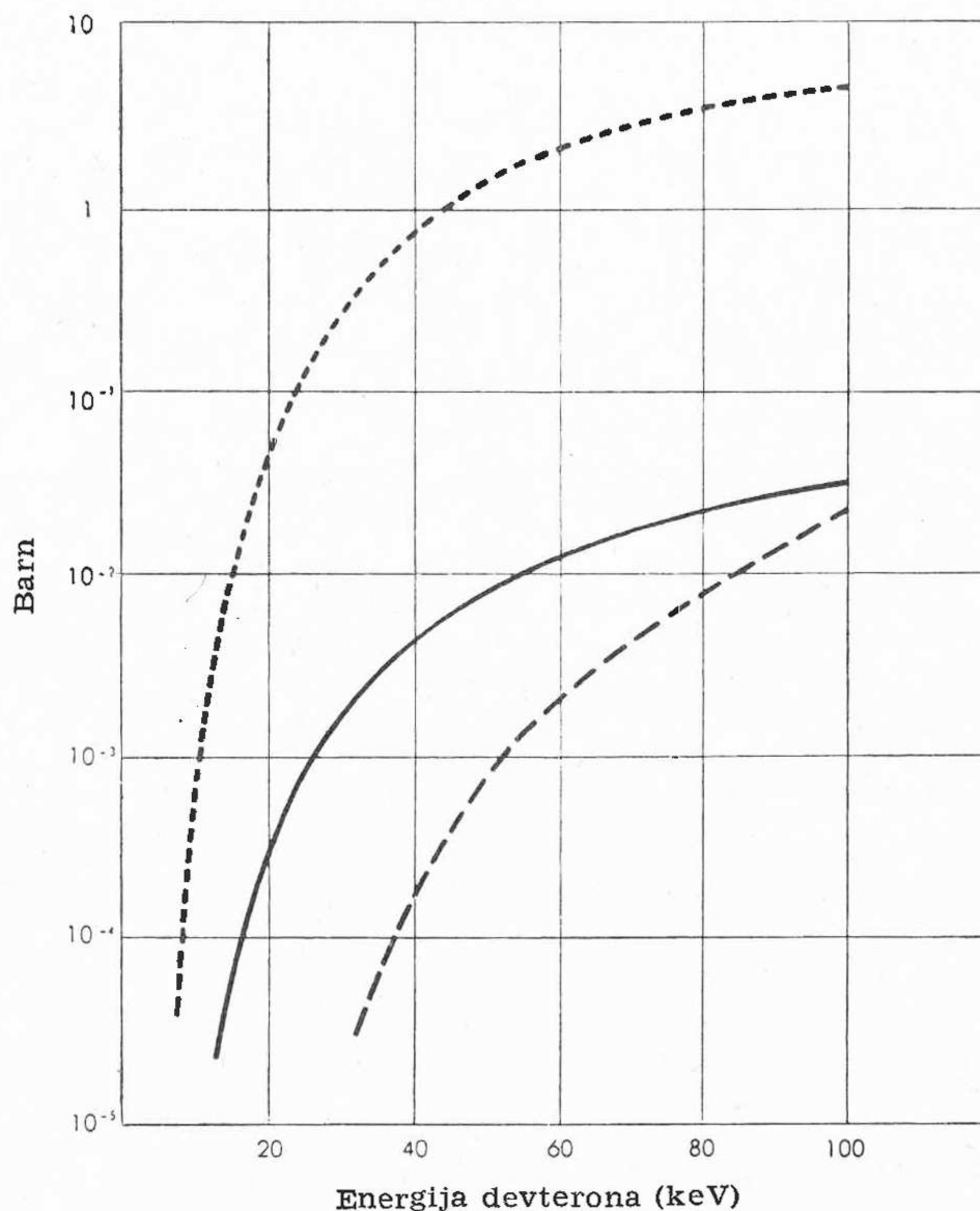
Že samo ta pogoj — za katerega do pred kratkim ni bilo niti misliti, da bi ga na Zemlji lahko izpolnili — jasno razkriva vse naše težave. Iz njega izvira cela vrsta zamotanih vprašanj. Žal kaže, da se z enim samim poskusom ne da dognati, ali je problem sploh rešljiv, medtem ko je bilo pri prvi cepitveni verižni reakciji to mogoče. Treba bo opraviti dolgo vrsto poskusov in probleme reševati postopno. Večinoma bomo imeli opraviti s kvantitativnimi vprašanji, to je s številkami. Nikoli še ni bilo področja, na katerem bi bile številke odločilnejše ali važnejše.



Sl. 3. Namišljen eksperiment, ki kaže posledice segrevanja devterija. Ne levi zgoraj imamo v posodi plin na sobni temperaturi in atmosferskem pritisku. Ko ga segrejemo na 5000°C (desno zgoraj), diatomske molekule razpadejo na atomarni devterij, pritisk pa naraste na 400 atmosfer. Ko zvišamo temperaturo na 100.000°C (spodaj levo), se atomi ionizirajo in nastane plazma elektronov in devteronov. Pritisk je približno 13.000 atmosfer. Pri temperaturi 100 milijonov stopinj (in pri pritisku milijon in pol atmosfer) pride do posameznih fuzijskih reakcij, pri katerih se sprosti energija. Reakcija pa še vedno ne teče sama od sebe

Naša prva skrb je gorivo. Najzanimivejši kandidat je devterij, težki izotop vodika, ki ga imamo v navadni vodi. Jedro devterijevega atoma sestavljata en proton in en nevtron. Kadar dve devterijevi jedri (devterona)) trčita dovolj močno, da se zlijeta, se eden izmed devteronov polasti bodisi protona bodisi

nevtrona drugega devterona — verjetnost je 50 : 50. Če se zlije s protonom (in osvobodi nevtron), ustvari helij 3 in sprostí približno 3,25 milijona elektronskih voltov energije. Če se zveže z nevtronom (in tako osvobodi partnerjev proton), dá približno 4 milijone elektronskih voltov in postane vodik 3 ali tritij, radioaktivni izotop vodika. Devteron in tritijevo jedro (triton) se zlijeta laže kakor dva devterona in ta reakcija sprostí več energije. Zato je tritij drugo potencialno gorivo za termonuklearne reaktorje. Treba pa ga bo umetno izdelovati kakor plutonij, kajti v naravi so le neznatne množine tritija. Ena izmed mogočih metod za pridobivanje tritija je izpostavljanje litija počasnim nevtronom: ko litij ujame nevtron, se razcepi na tritij in helij 4.



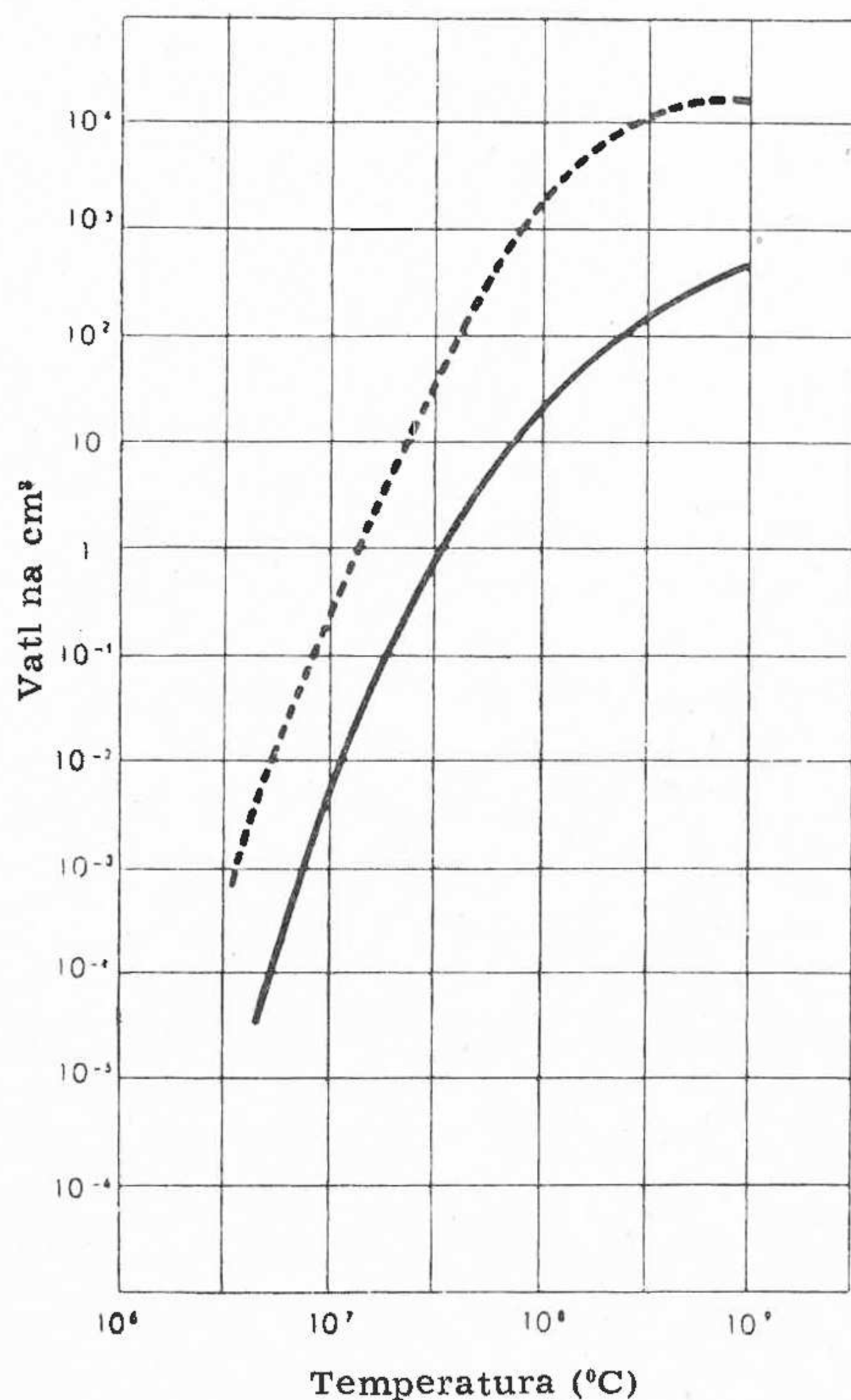
Sl. 4. Energijska odvisnost reakcijskih presekov za zlitje devterija in tritija (zgoraj), devterija in devterija (v sredi) in devterija in helija 3 (spodaj), 1 barn = 10^{-24} cm²

Popoln »sežig« devteronov in njihovih produktov (tritija in helija 3) v termonuklearnem ciklu bi ustvaril približno 7 MeV (milijonov elektronskih voltov) na zgoreli devteron. To ustreza 43 milijonom kilovatnih ur na funt goriva. Za primerjavo: funt bencina, enega najboljših kemičnih goriv, pa dá približno 6 kilovatnih ur. Čeprav je v navadni vodi le majhen del vodika devterija, ima devterij, kolikor ga je v eni sami galoni navadne vode, toliko energije kakor 350 galon bencina! V oceanih je dovolj devterija, da bi oskrboval svet z gorivom milijarde let, tudi če bi se energetske potrebe v primeri s sedanjimi potisočile. Za potrebe svojega programa za atomsko energijo v Združenih državah, kot kažejo objavljene številke, že izdelujejo toliko devterija, kolikor bi ga zadoščalo za večkratno vsoto vseh državnih energetskih potreb, če bi ga lahko uporabili

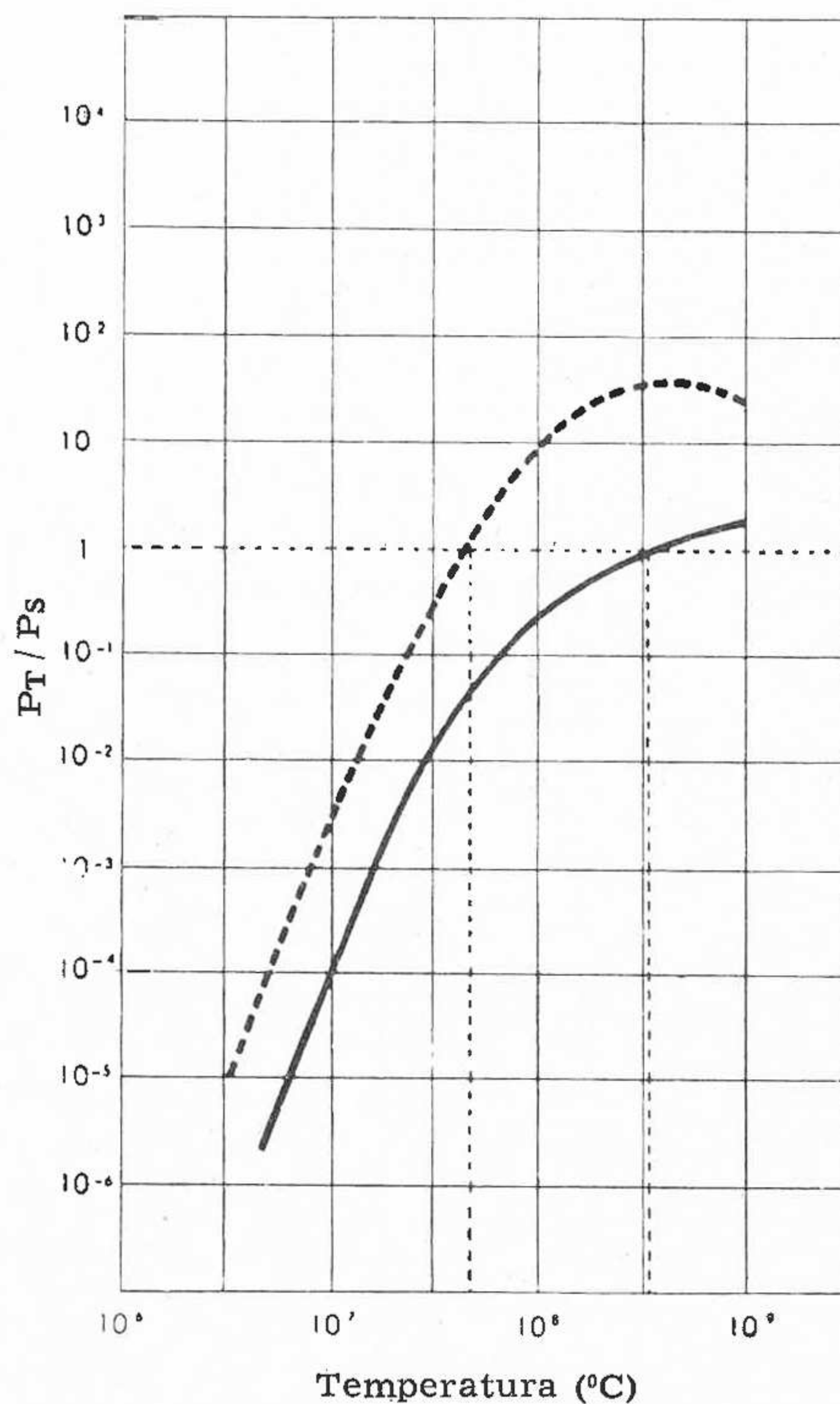
kot gorivo. Stroški za ekstrahiranje devterija iz vode so dovolj majhni, tako da bi bil devterij kot gorivo več kakor stokrat cenejši od premoga. In končno: jedrsko zgorevanje devterija in tritija ustvarja samo neaktivne pline, s čimer se vprašanju odlaganja odpadkov sploh izognemo.

Devterij naj bi bil torej »neprekosljivo gorivo«. Velikanske upe, ki nam jih zbuja, pa hromi prav tako velikanska težava — kako najti pot, da bi ga sežigali.

Nekontrolirano sežiganje termonuklearnega goriva se je posrečilo pri še preveč dobro znanem primeru vodikove bombe. Vprašanje, kako doseči kontrolirano termonuklearno reakcijo, pa je čisto drugačno. Poglejmo, kakšni so potrebni pogoji. Najbolje bo, če v ta namen opravimo namišljen poskus.



Sl. 5. Odvisnost sproščene termonuklearne energije od temperature plazme. Pritisk v plazmi je desettisočinka atmosferskega pritiska. Zgornja krivulja podaja rezultat za reakcijo devterij—tritij, spodnja pa za reakcijo devterij—devterij



Sl. 6. Odvisnost razmerja med sproščeno termonuklearno energijo in izgubami zaradi sevanja od temperature plazme. Temperatura, pri kateri je to razmerje enako ena, se imenuje vnetišče plazme. Zgornja krivulja velja za reakcijo devterij—tritij, spodnja pa za reakcijo devterij—devterij

Plazma

Vzamemo liter devterijevega plina, zaprtega v posodi iz namišljene snovi, kakršna bi mogla zdržati neznanske temperature in pritiske, ki bi se razvili med poskusom. Pri sobni temperaturi in pri normalnem atmosferskem pritisku se devterijeve plinske molekule gibljejo v posodi s povprečno kinetično energijo okrog ene petindvajsetinke elektronskega volta, oziroma s hitrostjo približno

3000 milj na uro. Termonuklearnih reakcij seveda ni. Zdaj segrejemo plin na 5000 °C. Pri tej temperaturi nimamo več molekul: zaradi silovitih medsebojnih trkov se razbijejo v devterijeve atome. Pritisk naraste na približno 40 atmosfer (600 funtov na kvadratno inčo), povprečna hitrost atomov pa je približno 40.000 milj na uro. Vendar smo še zmeraj zelo daleč od hitrosti, ki je potrebna za zlitje dveh jeder.

Nato skočimo na 100.000 °C. Izredne lastnosti namišljene snovi, iz katere smo si naredili posodo, so nam zdaj zelo potrebne, kajti vsaka resnična snov bi bila že zdavnaj shlapela. Atomi devterijevega plina se razbijejo na električno nabita jedra (devterone) in elektrone: skratka, plin postane to, kar poznamo kot plazmo. Pritisk plina naraste na 1500 atmosfer. Povprečna hitrost elektronov je 10 milijonov milj na uro in celo dosti težji devteroni se gibljejo z veliko hitrostjo 170.000 milj na uro. Vendar devteroni še vedno nimajo dovolj energije, da bi premagali medsebojne elektrostatične odbojne sile. Pri tej temperaturi bi v litru plazme prišlo povprečno do enega samega zlitja komaj v pet sto letih! Še zmeraj nas čaka dolga pot, da bi dosegli vnetišče sistema devteronov.

Pri 1.000.000 °C bi bilo fuzijskih reakcij več kakor milijardo milijardokrat več, celotni energijski presežek pa bi bil še zmeraj premajhen, da bi ga zaznali — komaj nekaj milijonink watta na kubični centimeter. Šele pri 100 milijonih stopinj Celzija bi obseg reakcije postal res spoštovanja vreden. Pritisk bi vrtoglavo narasel — na 1,5 milijona atmosfer. Elektroni bi se gibali s hitrostjo 90.000 milj na sekundo, devteroni pa 1500 milj na sekundo (okrog sveta v 16 sekundah). Domala vsi devteroni bi bliskovito reagirali drug z drugim (v delcu sekunde in njihove reakcije bi sprasčale fantastične množine energije — približno sto milijonov kilovatov. Vendar še zmeraj ne bi dosegli vnetišča: da bi reakcijo vzdrževali, bi še vedno morali dovajati več energije, kakor bi se je spraščalo pri zlivanju jeder. Šele nekako pri 350 milijonih stopinj bi »ogenj« (to je termonuklearna reakcija) zagorel samostojno.

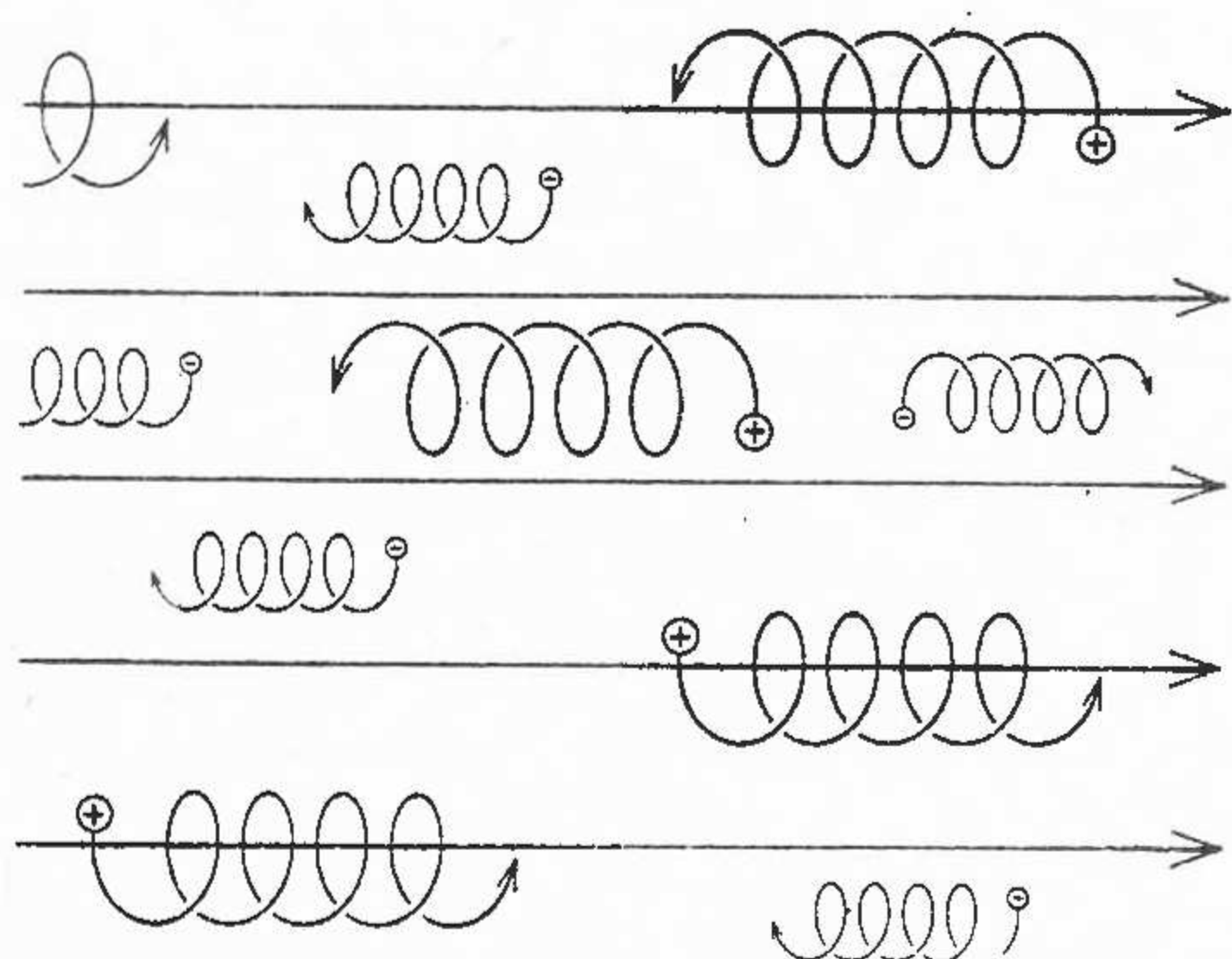
Ta namišljeni poskus opozarja na več važnih zadev. Prvič, da so nam potrebne izredno visoke temperature, čeprav tukaj z govorjenjem o visokih temperaturah ne mislimo na toploto v navadnem pomenu besede, temveč na kinetično energijo plinskih delcev. Drugič, niti misliti ni, da bi gorivo uporabljali pri navadnih plinskih koncentracijah. Če naj bi obdržali energijski presežek in plinski pritisk v obvladljivih mejah, bi morali začeti z redkim plinom, dosti redkejšim, kakor je pri atmosferskem pritisku — nekako pri desettisočinki atmosfere. Toda kako redko gorivo je to! V laboratoriju bi plin tolikšne gostote imeli praktično za vakuum.

Ena izmed zanimivih posledic uporabe zelo redkega plina bi bila ta, da bi bila toplotna vsebnost plazme zelo majhna, čeprav bi bila plazma glede na hitrost njenih delcev silno vroča. Liter devterijeve plazme bi pri gostoti, kakršno ima pri desettisočinki atmosfere, in pri temperaturi 350 milijonov stopinj imel toplotno vsebnost 18.000 kalorij — približno toliko, da bi z njo segreli skodelico kave.

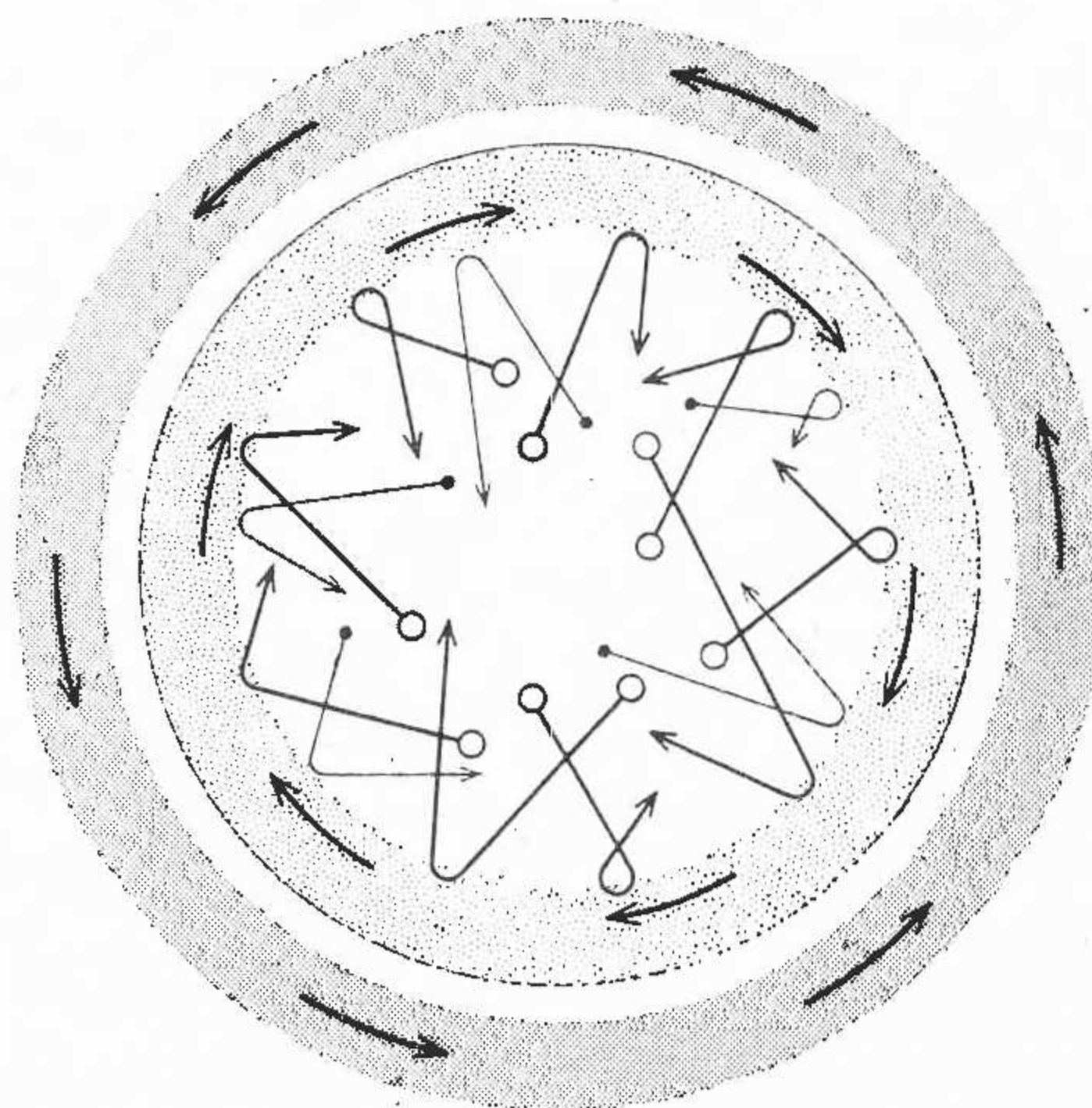
Da bi izračunali, kolikšna bo produkcija termonuklearne energije iz vroče plazme, bi bilo treba samo poznati preseke za posamezne reakcije in jih vnesti kot podatke v teorijo o termonuklearnih reakcijah v vročem plinu (glej sliko 4!). Tovrstna preračunavanja so sicer važna za določanje potrebnih fizikalnih pogojev, vendar prav nič ne pojasnjujejo, *kako* bi plin segreli na termonuklearne temperature, in ali je mogoče že začeto reakcijo pripraviti do tega, da steče sama po sebi. Drugo vprašanje je odvisno od tega, koliko energije se zgubi s sevanjem

in z drugimi procesi. Na Soncu je energija, nakopičena v njegovi velikanski prostornini, zadostna za vzdrževanje reakcij kljub izgubi zaradi sevanja na površini. Če bi mogli napraviti tolikšen termonuklearni reaktor kot Luna, si nam zaradi izgub energije ne bi bilo treba delati posebnih skrbi. Pri reaktorju uresničljive velikosti pa nam je to ključno vprašanje.

Najprej naj omenim izgube, ki se jim ni mogoče izogniti. To so izgube zaradi sevanja plazme — predvsem v obliki žarkov X, ki nastanejo pri trkih elektronov z jedri. Pri temperaturi sto milijonov stopinj Celzija bi vsak kubični centimeter goste snovi izžareval neverjetno množino energije — tri milijon milijon kilovatov! Na srečo pa sevanje zelo hitro upada, brž ko se zmanjša gostota snovi. Pri majhni gostoti, s kakršno smo računali, je izguba zaradi sevanja sorazmerno majhna. Množina energije, dobljene pri termonuklearnih reakcijah, hitro narašča, če se temperatura vzdiguje, in pri reakciji



Sl. 7. Nabiti delci, ki sestavljajo plazmo, se v magnetnem polju gibljejo po vijaknicah. Če gledamo v smeri polja, se negativno nabiti delci gibljejo v smeri urnega kazalca, pozitivno nabiti delci pa v nasprotni smeri



Sl. 8. Magnetno polje (pikčasto področje) preprečuje uhajanje nabitih delcev in pomeni za plazmo skoraj nepropustno »steno«. Zunanje puščice kažejo smer toka v tuljavi, puščice v notranjosti pa smeri gibanja delcev

devteron—triton preseže sevalne izgube pri temperaturi nad 50 milijonov stopinj, pri reakciji devteron—devteron pa nad 370 milijonov stopinj. To sta torej vnetišči omenjenih dveh goriv. Plazma pa mora biti zelo čista, kajti jedra višjih elementov (nad vodikom in helijem) silno pospešujejo sevanje. Presenetljivo majhna količina nečistoč lahko zastrupi zelo veliko prostornino plazme. Kovinska glavica bucike bi na primer, če bi bila izparjena, popolnoma zadostovala za zastrupitev več tovarnjaških cistern, polnih plazme. Jasno je, da bo pri vsakem termonuklearnem reaktorju predvsem nujna čistost.

Izmed energetske izgube druge narave — tistih, ki jih moremo in moramo omejiti — je najresnejše uhajanje energije delcev v reaktorjeve stene. Zaprt prostor moramo imeti, da izključimo atmosfero in ohranimo plin redek. Ampak pomislite na delce v tem plinu! V našem skoraj-vakuumu so razpršeni tako na redko, da vsak devteron prepotuje na svojih slepih blodnjah povprečno tisoče milj, preden sreča drug devteron (ali triton). Dosti verjetneje je, da bo prej zadel ob steno posode. Če pa se to zgodi, mu bo trk takoj vzela energijo. Delcem

plazme torej očitno ne smemo dovoliti, da se dotaknejo sten. V nasprotju s splošnim mnenjem stvar ni potrebna zaradi tega, ker bi plazma izparila stene (saj nima posebno dosti toplote), temveč preprosto zato, ker bi stik s stenami plazmo takoj ohladil in bi se reakcija pretrgala.

Magnetna steklenica

Jedro problema je torej: kako zapreti zelo vroč plin v posodo (vsaj za delček sekunde), ne da bi dopustili, da bi količjak znatnejša množina plina dosegla stene posode. Takó zastavljeno vprašanje zveni kot problem iz fantastično-znanstvene literature, kot problem, ki je v vsakem stvarnem svetu popolnoma nerešljiv. Toda zdaj je že splošno znano, da se je približno pred desetimi leti pokazala duhovita rešitev — namreč, da je plazmo mogoče zapreti v magnetno polje, ki deluje v posodi kot nekakšna notranja pregrada in brani delcem pristop k stenam.

Zamisel sloni predvsem na preprostem dejstvu, da bi močno magnetno polje odvrčalo nabite delce z ravne poti (glej sliko 7). Vroča, močno stisnjena plazma pa bi v primernih okoliščinah lahko ustvarila lastno notranje magnetno polje, ki bi bilo dovolj močno, da bi kompenziralo zunanje polje. V taki plazmi bi se delci torej gibali v ravnih črtah. Na meji plazme pa bi jih zavrnilo spet nazaj vanjo zunanje magnetno polje (glej sliko 8). Močne magnetne silnice, ki delujejo kot elastični gumijasti trakovi, lahko kljubujejo precejšnjemu pritisku. Če bi bilo magnetno polje zadosti močno, bi ustvarilo magnetno »steno«, ki bi lahko zadrževala močan pritisk plazme, tako kakor jeklen cilinder zadržuje močno stisnjen plin. Glede na teoretične račune bi npr. polje, močno 50.000 gaussov, lahko zadržalo plazmo s pritiskom 100 atmosfer, desetkrat močnejše polje (ki so ga v laboratorijih že ustvarili), pa bi zdržalo pritisk 10.000 atmosfer.

Termonuklearna reakcija, ki bi tekla v taki magnetni steklenici, nikoli ne bi mogla »uiti«, kakor se lahko zgodi z verižno cepitvijo. Če bi pritisk v plazmi postal močnejši od magnetnega polja, bi predril magnetno steno in plazma bi se dotaknila stene snovne posode, kar bi reakcijo takoj ustavilo. Termonuklearnega reaktorja torej že po sami naravi stvari nikoli ne bi moglo raznesti: lahko bi samo nehal delati.

Iz poenostavljenega orisa, ki smo ga podali, si ni treba razlagati, da bi bila magnetna steklenica popolnoma neprepustna. Plazma in magnetno polje ki v resnici postopoma prodirala drug v drugega ter bi se pomešala, in plazma bi lahko celo vsa ušla, če je ne bi prilivali. To uhajanje bi bilo na srečo tako zelo počasno, da bi teoretično dopuščalo ustvaritev termonuklearne reakcije, ki bi tekla sama od sebe. Toda kot bomo videli, se magnetna steklenica ne vede zmeraj tako, kakor napoveduje preprosta teorija. Interakcije med močno segreto plazmo in magnetnim poljem so težak fizikalni problem in so dale pobudo za razmah novega področja raziskav, ki bi mu lahko rekli »eksperimentalna astrofizika«.

Stiskalni efekt

Toliko o teoriji. Kako pa bi magnetno steklenico dejansko naredili? Mnogim raziskovalcem se je neodvisno zazdelo, da bi na to utegnil odgovoriti malo znani električni pojav, znan kot »stiskalni efekt«. Ta efekt, katerega obstoj so eksperimentalno dokazali šele pred kakšnimi desetimi leti, terja zelo močan električni tok. Kadar spustimo tak tok skozi prevodni plin v cevi, ustvari magnetno polje, ki teži za tem, da bi plin stisnilo in ga potegnilo stran od stene

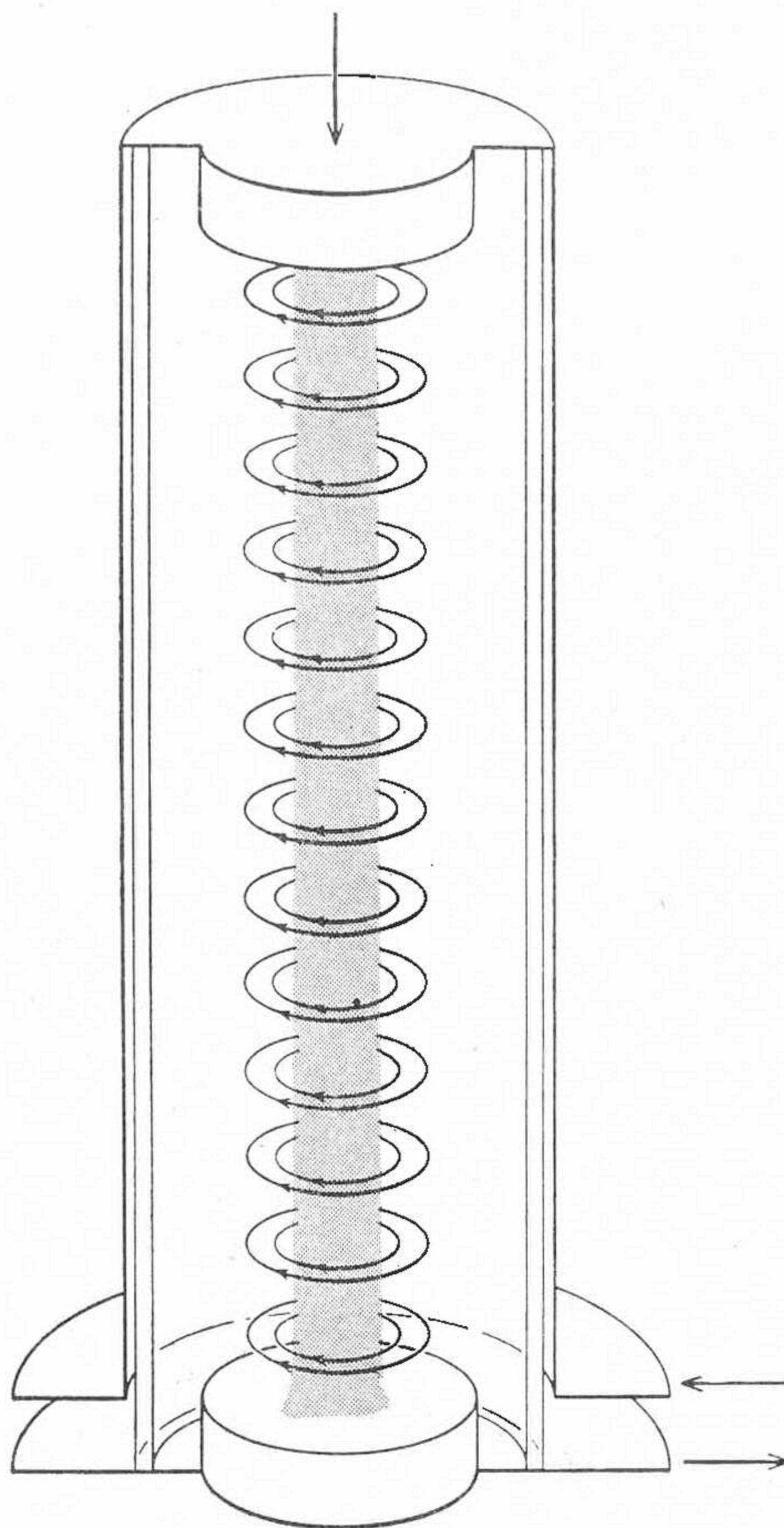
cevi (glej sliko 9!). Napete magnetne silnice plin ovijajo in ga stiskajo. Ker je plazma izvrsten električni prevodnik, se stiskalni efekt zdi mikavno in zelo prikladno sredstvo za ustvaritev magnetne steklenice.

Teoretični računi kažejo, da bi tok moral biti res zelo močan — milijone amperov — če naj bi zadržal močno segreto in hudo redko plazmo. Raziskovalcem ta okoliščina ni vzela poguma in v mnogih deželah so naredili poskuse s preprostimi stiskalnimi cevmi (glej sliko 9!). Na izolirano cev, napolnjeno z zelo redkim plinom, so pritiskali visoko napetost in plin razelektrili. Tako se je plin ioniziral in potem je stekel močan tok. Eksperimentatorjem se je upanje izpolnilo in plazma se je res dramatično stisnila. Hkrati pa je njihove upe zadel tudi udarec. Plazma je ostala stisnjena samo kakšno milijoninko sekunde; brž ko se je steber plazme stisnil, se je že silovito zvil in šinil k steni cevi. Še več — čim močnejše se je stisnil, tem hitreje se je spet razlezel.

Tega ni bilo težko razumeti; pravzaprav bi bilo tak rezultat teoretično mogoče že napovedati. Razvijeta se lahko dva različna tipa nestabilnosti. V prvem primeru se še tako majhna upognjenost stisnjenega stebra hitro poveča, ker je magnetni pritisk močnejši na konkavni strani upogiba (kjer so silnice gostejše) kakor na konveksni strani (glej sliko 11!). Drugi vzrok nestabilnosti je nekakšen »klobasičasti« efekt (slika 11). Plazma teži po tem, da bi se v eni ali v več točkah stebra stisnila ali pretrgala.

Mimogrede — s tem pojavom je zvezana zanimiva zgodba, ki priča, kako se na važnem, toda neobdelanem raziskovalnem področju, kakršno je plazma, lahko upi nepričakovano razcvetijo in prav tako nepričakovano usahnejo. Ko so raziskovalci v devterijevem plinu prvič ustvarili močne stiskalne efekte, so z veseljem zaznali curke nevtronov — dokaz termonuklearne reakcije v plazmi. Mislili so, da so trenutno dosegli termonuklearne temperature. Po analizi pa so dognali, da je samo neki malo znani električni efekt, povezan z vehementnim razpadom stisnjene plazme zaradi »klobasičaste« neobstoynosti, dal maloštevilnim devteronom zadostno energijo, da so se zlili.

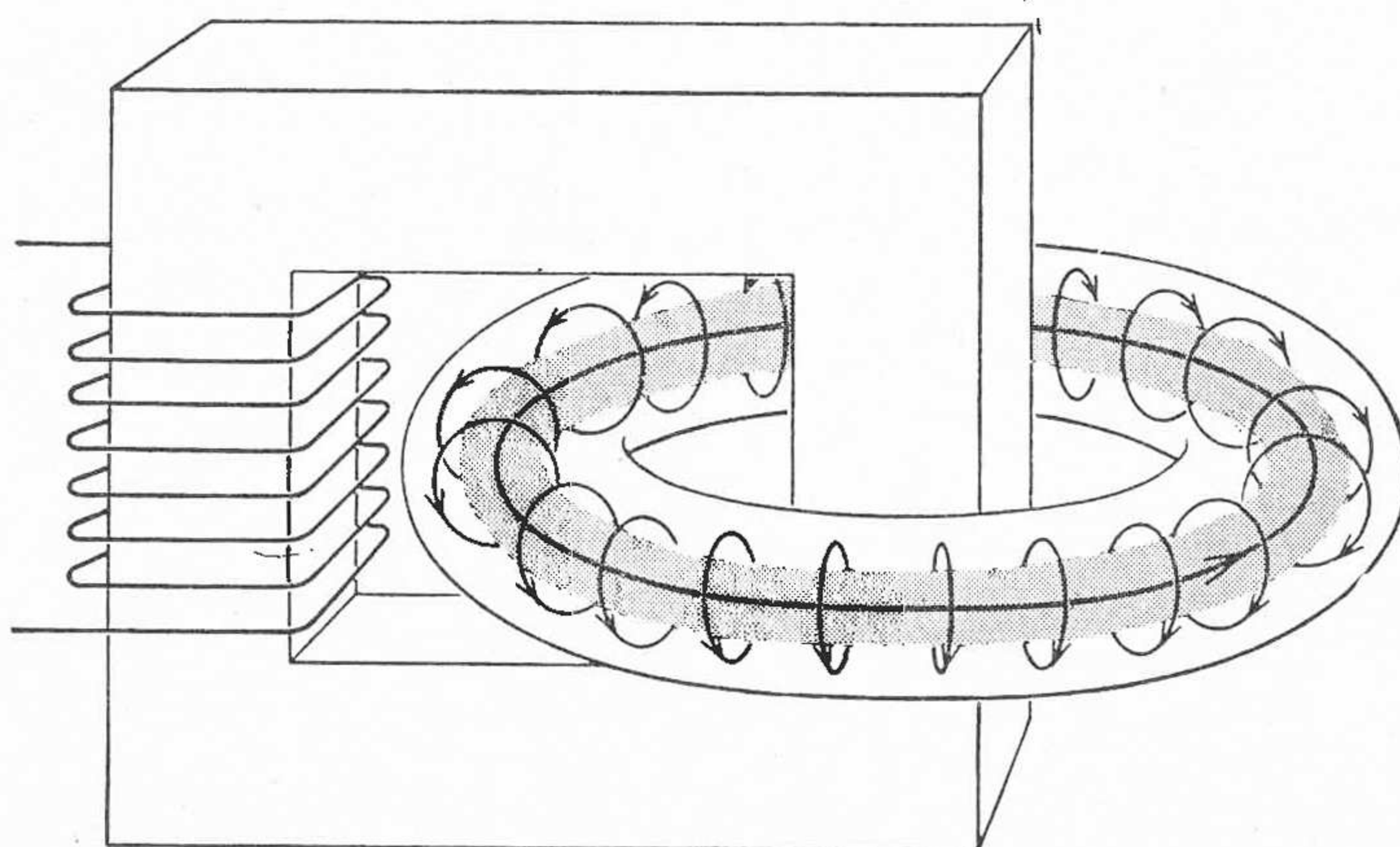
Kako bi mogli stiskalni efekt stabilizirati? Teoretične raziskave, objavljene v ZDA, v Angliji in v ZSSR, so nakazale možno rešitev, niso pa pokazale, kako bi ustvarili fizikalne pogoje, potrebne, da bi stvar stekla. Zamisel je



Sl. 9. »Stiskalni efekt« nastopi, če pošljemo močan električni tok skozi plazmo. Krožne magnetne silnice stisnejo plazmo v ozek »steber«. Ravna puščica kaže smer toka

takale: ustvariti je treba ne samo stiskalno magnetno polje okrog plazme, temveč tudi močno longitudinalno magnetno polje v stebru plazme (glej sl. 12!). Notranje polje naj bi delovalo kot nekakšen stabilizator. Če bi se steber začel upogibati, bi to polje težilo k zravnanju notranjih silnic in njihova elastična odpornost bi uklon zravnila. Če bi steber hotel klobasičasto stisniti, bi se notranje silnice temu prav tako upirale, ker bi se močno stisnile in s tem preprečile razpad stebra.

Steber plazme bi lahko uničil še tretji tip nestabilnosti: namreč dolg, rahel upogib stebra, ki bi se čedalje bolj krepil in potisnil steber k steni posode (glej sliko 12!). To pa bi lahko preprečili tako, da bi stene cevi naredili iz kakšne prevodne snovi. Ker prevodniki delujejo na magnetno polje kot pregrada, bi se magnetne silnice okrog stebra plazme nagnetle pred tisto steno, ki bi se ji upognjeni steber približeval. Sledil bi pritisk v nasprotno smer, ki bi potisnil steber spet na sredo cevi.



Sl. 10. »Stiskalna cev« krogaste oblike. Votel obroč, poln plazme, ovijemo okoli jedra transformatorja. Tok, ki teče skozi primarno navitje, inducira močan tok v plazmi, ki predstavlja sekundarno navitje. Magnetno polje induciranelega toka plazmo »stisne«

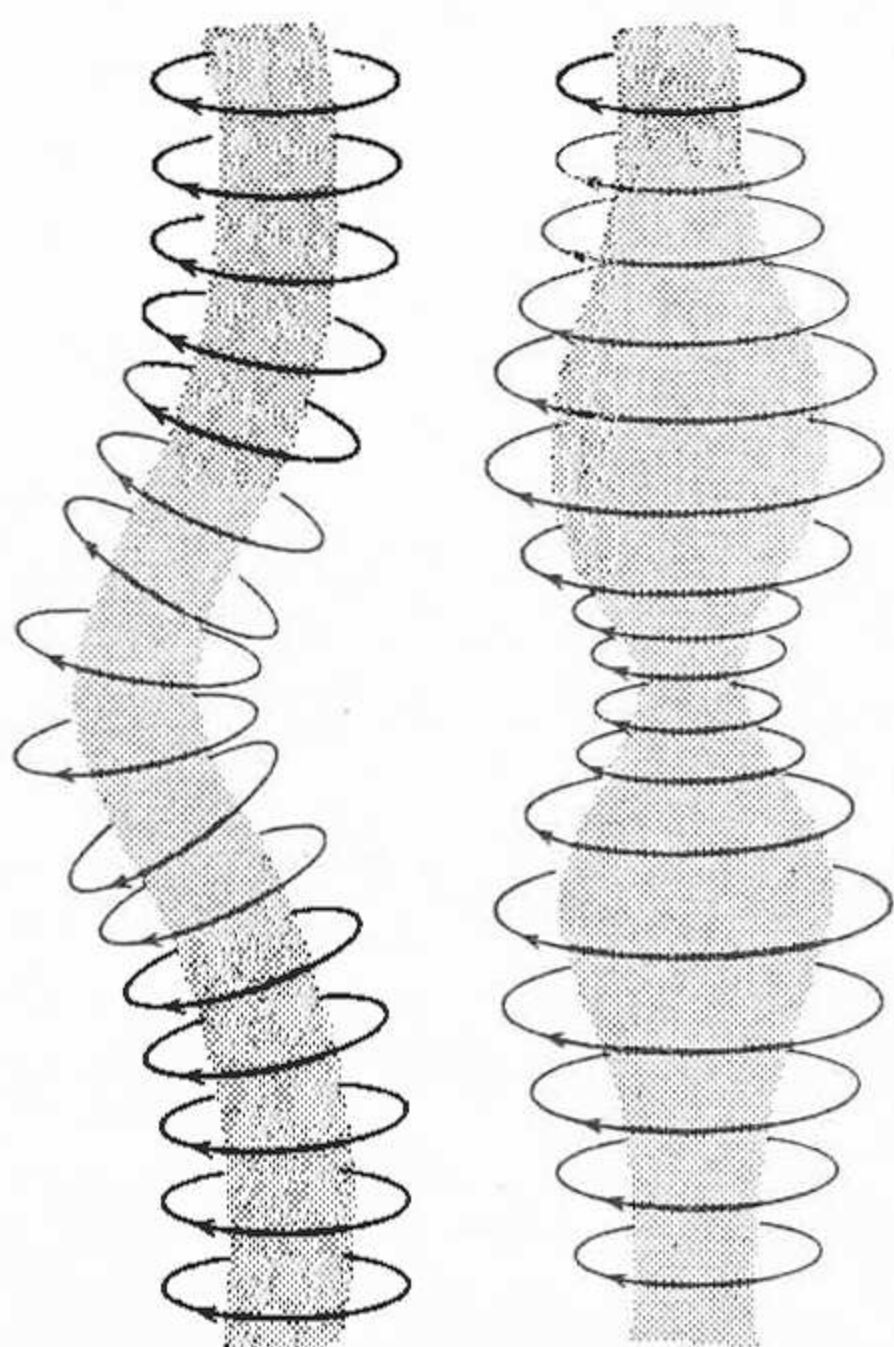
Pojasniti moram, da so tukaj prikazani ravni stisnjeni stebri poenostavljeni sistemi, ki le kažejo, za kaj gre. V praksi najbrž ne bi bilo zaželeno, da bi skušali ustvariti stabiliziran stiskalni efekt v ravni cevi, in to iz več vzrokov: med drugim bi elektrodi na obeh koncih cevi plazmo hladili, to pomeni, uničevali. Stiskalni efekt so eksperimentalno ustvarili v posodah drugačne oblike. Ena izmed njih je krogasta posoda, v kateri so inducirali tokove. Ti lahko krožijo v njej, ne da bi zadeli ob trdno površino. Visoka napetost, pritisnjena na navitje velikega železnega transformatorskega jedra, razelektri plin v posodi. Ionizirani plin potem deluje kot edini ovoj sekundarnega navitja transformatorja. Na ta način je mogoče inducirati v plazmi zelo močne tokove.

Razen stiskalnega efekta raziskujejo tudi druge metode za ustvaritev magnetne steklenice, tako v ZDA kakor nedvomno tudi v drugih deželah. Sedanje raziskave na področju termonuklearne energije večinoma vključujejo poskuse z zelo zapletenimi elektromagnetnimi pojavi — kako se močno segreta plazma vede v magnetnih poljih različnih oblik. To delo je izredno težko in napreza vsa sredstva naše sedanje tehnologije. Kakor sem že omenil, je le malo verjetno, da bi se na lepem »odprla« kakšna bistveno preprostejša rešitev. Ker

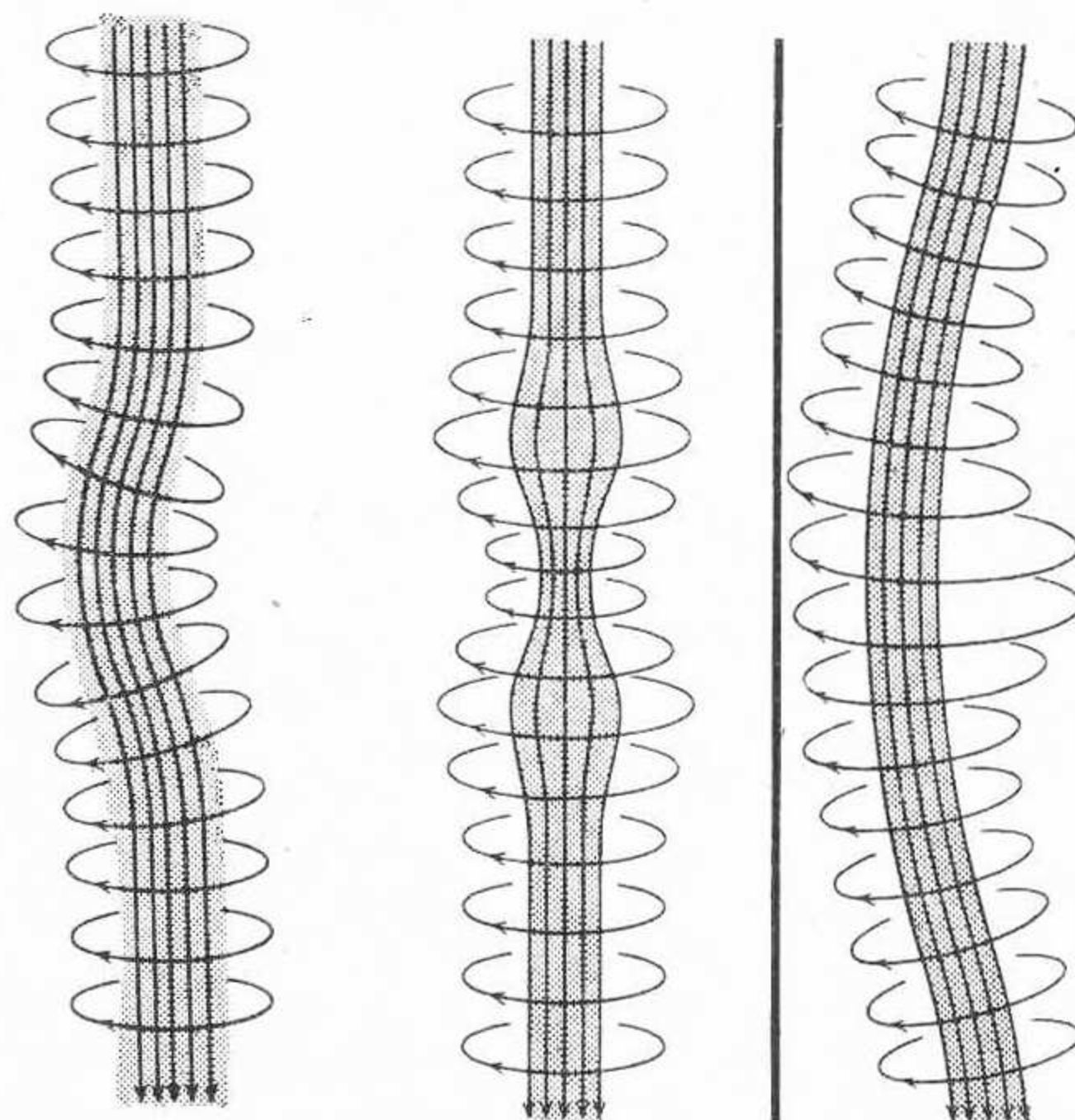
si bomo utrli pot le s številnimi vzajemno dopolnjujočimi se raziskavami in z razvijanjem novih, doslej še nepoznanih tehnik, je očitno, da bi napredovali hitreje, če bi se vsi različni narodi, ki se s tem ukvarjajo, povezali in bi si na vseh raziskovalnih stopnjah pomagali z izmenjavo informacij.

Iskanje signala

Prvič v zgodovini fizike se moramo naučiti, kako ravnati in obvladovati vrtoglavo ogromne množine električne energije in ustvariti velikanske, izredno čiste vakuumске sisteme. Ena izmed najtežjih nalog so meritve. Že to, da plazmo dovolj segrejemo, je zelo težavno, dognati, kaj se v njej godi, pa je včasih še težje. Razvili so precej novih merilnih tehnik. Za merjenje gostote plazme imamo nov »mikrovalovni interferometer«, ki uporablja milimetre radijske valove. Temperaturo plazme določajo z meritvami emisije žarkov X,



Sl. 11. »Stisnjena« plazma je nestabilna do »upogiba« (levo) in »klobasičaste stisnitve« (desno)



Sl. 12. Dodatno longitudinalno magnetno polje stabilizira »stisnjeno« plazmo. Napetost magnetnih silnic longitudinalnega polja zravna »upogibe«, odboj med silnicami pa preprečuje »klobasičaste stisnitve«

z meritvami radijskega »šuma« plazme in uhajajočih delcev oziroma reakcijskih produktov. Nekoliko preseneča, da zelo vroča plazma oddaja le malo vidne svetlobe. Mogoče pa je s spektroskopskimi metodami meriti hladnejšo plazmo, v kateri atomi še niso ob vse svoje elektrone. Te meritve ne pokažejo le temperature plazme, ampak s pomočjo Dopplerjevega efekta tudi hitrost gibanja plazme. S samim merjenjem sprememb magnetnega polja se lahko poučimo o spremembah temperature, gostote, oblike in hitrosti plazme med poskusom. Da spoznate, kako zapletene so meritve, si morate predstavljati prizorišče dogodkov, ki jih obravnavamo. Poskuse z močno segreto plazmo večinoma delajo v visoko-vakuumskih sistemih, obkroženih s prevodniki, v katerih tečejo močni in hitri izmenični električni tokovi. Mi pa naj bi dognali obnašanje nevidnega, kratkoživega, skoraj neopazljivega signala nekje v drobu te priprave!

Odvajanje energije

Očitno bo minilo še več let, preden bo kak termonuklearni reaktor toliko razvit, da se bomo lahko spoprijeli z zadnjim vprašanjem — z odvajanjem energije. Seveda pa se tudi že o tem nekoliko premišlja.

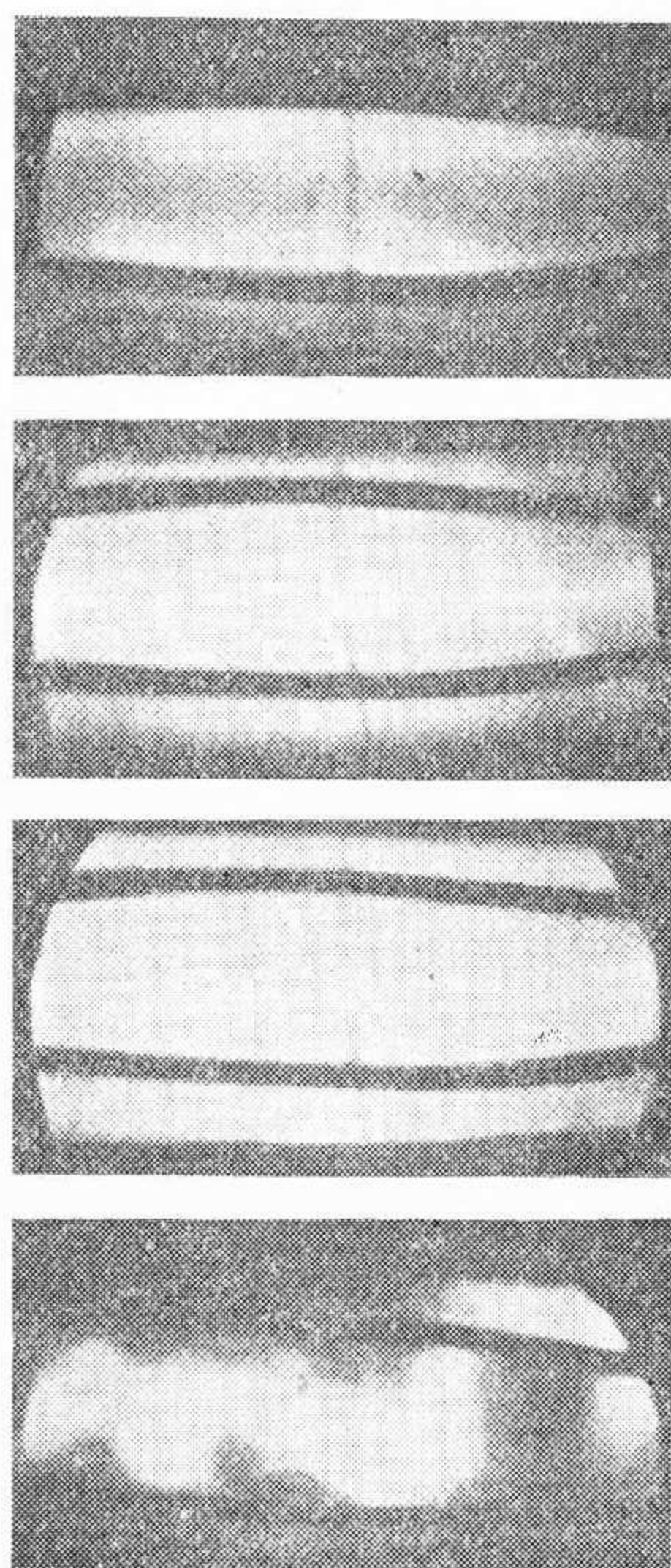
Če bi bilo gorivo mešanica devterija in tritija, potem levji delež (80 %) energije, sproščene ob zlitju, pobere nevtron, ki nastane pri reakciji. To energijo naj bi odvedli tako, da bi ujeli hitre nevtrone in nastalo toploto spravili v parni stroj, kjer bi jo po ustaljenem postopku spremenili v električno energijo. Ker naj bi tak reaktor produciral tritij, bi nevtrone najbrž lovili na litijevo tarčo, ki bi obdajala reaktor. Nekaj pridobljene električne energije bi morali odvesti spet v reaktor, da bi ohranili magnetno steklenico.

Če bi bilo gorivo sam devterij, bi imeli mikavno priložnost, da bi presežek energije neposredno spremenili v elektriko. Pri zlitju devterona z devteronom se

66 % sproščene energije nakopiči v nabite reakcijske produkte — v helijeva jedra in protone. Prav mogoče bi bilo ustvariti take pogoje, da bi večina teh delcev ostala ujeta v plazmi. V tem primeru bi razgreta in razširjajoča se plazma butala ob magnetno polje, to gibanje pa bi z uporabo primerno urejenih stikov v principu lahko izrabili za produkcijo električnega toka. Z drugimi besedami, razširjajoča se plazma bi s pritiskanjem ob magnetno polje opravila delo, kakršno opravlja para, ki pritiska na bat parnega stroja. Pri plazmi bi bila bat »stena« magnetnega polja, prenosne naprave, ki spreminjajo energijo v koristno delo, pa bi bili namesto palic in koles električni stiki. Izkoristek tega stroja bi utegnil biti mnogo večji od izkoristka navadnih parnih strojev, saj ga tu ne bi omejevali termodinamski zakoni, ki omogočajo izkoristek navadnih toplotnih motorjev.

Po zadnji analizi bi bila uporabnost termonuklearne energije najbrž odvisna predvsem od velikosti reaktorja. Prav verjetno bi morali mnoge potencialno izvedljive reaktorske načrte zavreči zaradi tega, ker bi bili zamišljeni reaktorji neuresničljivo veliki. Na drugi strani pa »žepne izdaje« termonuklearnih reaktorjev teoretično sploh ne pridejo v poštev. Bodoči termonuklearni reaktorji — če bodo sploh kdaj narejeni — bodo najverjetneje velike centrale za produkcijo električne energije.

Znanstveniki, ki se v ZDA ukvarjajo z načrti za izkoriščanje termonuklearne energije, trdno verjamejo, da bodo nazadnje premagali vse težave, kajti kljub vsej njihovi zapletenosti zdaj ne vidijo več na poti h končnemu uspehu nobene res bistvene ovire.



Sl. 13. Življenjska pot »stisnjene« plazme. Gornje tri fotografije kažejo nastanek »stisnjenega stebra« plazme, ko pošljemo skozi plin električni tok. Četrta pa prikazuje razpad »stebra«, kar je posledica nestabilnosti do »upogiba«

Rastoči upi

Rad bi omenil nekaj mejnikov, ki so že za nami — kolikor mi pač dovoljujejo omejitve zaradi tajnosti podatkov. Kolikor vemo, so v prvi skupini, ki je pretehtavala možnosti za pridobivanje termonuklearne energije s pomočjo magnetne zaježitve vroče plazme, bili Enrico Fermi, Edward Teller, James Tuck

in drugi v raziskovalnem laboratoriju v Los Alamosu. Čeprav so svoje zamisli razvijali že proti koncu druge svetovne vojne, se v ZDA eksperimentalno delo sploh ni razmahnilo nekako vse do leta 1951. Tega leta sta začela delati na področju termonuklearne energije Tuck v Los Alamosu in Lyman Spitzer na Princetonu. Angleški znanstveniki so očitno opravili nekaj dela že dve ali tri leta prej, v ZSSR pa so se ga utegnili lotiti tudi približno ob tistem času. Leta 1952 je bilo pod pokroviteljstvom Komisije za atomsko energijo ZDA obsežno posvetovanje o kontroliranih termonuklearnih reakcijah. Istega leta je začel izvajati svoj program Herbert York v Radiation Laboratory kalifornijske univerze v Livermoru. Potem so se lotili manjših programov v National Laboratory v Oak Ridgeu in na newyorški univerzi. Zadnja leta se je začelo delo na dveh programih s podporo zasebnega kapitala: v General Atomics Laboratory v San Diegu, Kalifornija, in v General Electric Research Laboratory v Schenectadyju, New York.

Med drugimi državami, za katere vemo, da se ukvarjajo z raziskovanjem kontroliranega zlivanja jeder, so Francija, Nemčija, Nizozemska in Švedska. Nadvse očitno je, da težnje po termonuklearni energiji po vsem svetu jemljejo resno. Narava problemov, s katerimi se je treba spoprijeti, čas, ki bo nedvomno potreben za njihovo rešitev, in pomembnost cilja so faktorji, ki zbujaajo upe na razmah mednarodnega sodelovanja pri raziskavah.

Če bralcu tega članka ostaja vtis, da je težnja po kontroliranem izkoriščanju termonuklearne energije najbolj mamljivo, najtežje in mogoče tudi najvažnejše raziskovalno delo, kar so si ga kdaj naložili za potrebe mirnega časa, bo istega mnenja kakor mnogi znanstveniki, ki se zdaj ukvarjajo s tem vprašanjem.

POPRAVEK

V članku »O ločni dolžini gladkih krivulj in o površini gladkih ploskev« (OMF IX, št. 1, str. 19) je zadnji odstavek pred »Zaključkom« (str. 33) netočen. Bralec, ki je poskusil slediti predlaganemu dokazu, je to lahko sam hitro spoznal. Trditev, da je opisani funkcional zvezen, drži šele z nekoliko spremenjeno definicijo zveznosti. Na strani 28 zgoraj bi morala biti takale definicija zveznosti:

Funkcional $\Phi(\mathbf{r})$ je zvezen pri ploskvi $\mathbf{r}^0(u, v)$, če ustreza vsakemu $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da velja

$$|\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}^0)| < \varepsilon$$

čim so izpolnjeni tile pogoji:

$$D \subset D^0$$

$$|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}^0(u, v)| < \delta \quad \text{na } D$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v - \mathbf{r}^0_u \times \mathbf{r}^0_v| < \delta \quad \text{na } D$$

$$\sigma(D^0 - D) < \delta$$

F. Križanič

PARADOKS UR V TEORIJI RELATIVNOSTI

JANEZ STRNAD

Specialna teorija relativnosti je osnovana na spoznanju, da je hitrost svetlobe v praznem prostoru naravna konstanta in ni nič odvisna od gibanja opazovalca. Opazovalec vselej izmeri za hitrost svetlobe c , četudi se enakomerno približuje ali oddaljuje od svetila. To spoznanje, ki je znano kot načelo relativnosti, nasprotuje izkušnjam pri drugih vrstah valovanja. Pri vodnem valovanju so za opazovalca, ki se enakomerno oddaljuje od kraja, kjer je padel v vodo kamen, valovi počasnejši kot za mirujočega opazovalca.

Vzemimo, da sta gibajoči se in mirujoči opazovalec skupaj v trenutku, ko slednji spusti v vodo kamen. Oba naj opazujeta čelo nastalega valovanja! Za mirujočega opazovalca bo valovno čelo naraščajoč krog, ki mu bo on v središču. Za gibajočega se opazovalca bo valovno čelo naraščajoč krog, katerega središče pa se bo vse bolj oddaljevalo. Načelo relativnosti zagotavlja, da je pri svetlobi čisto drugače: valovno čelo je krogla, ki se ji veča radij s hitrostjo c in ji ostane opazovalec v središču. To velja za opazovalca, ki je blisk oddal, in za opazovalca, ki se proti prvemu giblje, če sta bila opazovalca skupaj v trenutku, ko je bil blisk izsevan.

Opazovalca tudi ne moreta trditi, da pride valovno čelo za oba do izbrane točke v istem času. Načelo relativnosti torej privede do tega, da je treba kritično razmisliti o pojmu sočasnosti dveh pojavov in o merjenju časa nasploh. Po prejšnjem je jasno, da je sočasnost dveh pojavov odvisna od sistema, v katerem pojava opazujemo, in da absolutne sočasnosti ni. Sistemi, ki se enakomerno gibljejo drug glede na drugega (tu je govora le o inercialnih, to je nepospešenih sistemih), imajo torej vsak svoj lastni čas. Lahko si predstavljamo, da je v vsakem takem sistemu postavljena ura. Tudi če so te ure natančno enako narejene, se vsakemu opazovalcu zdi, da gredo ure v sistemih, ki se proti njegovemu gibljejo, različno hitro.

K tem trditvam je treba še povedati načelo, po katerem primerjamo hod dveh ur, ki se gibljeta druga glede na drugo. Dogovorjeno je, da je za tak namen treba izmenjavati signale s svetlobno hitrostjo. Prva ura naj tedaj, ko kaže čas 0, odda svetlobni blisk; svetloba se širi do druge ure, se tam na zrcalu odbije in po času t vrne do prve ure. Čas $\frac{1}{2}t$, to je povprečno vrednost časov, ki ju potrebuje svetloba za pot do druge ure in nazaj, je treba primerjati s časom, recimo t' , ki ga je kazala druga ura, ko jo je zadel svetlobni blisk.

Slikovito si to lahko ponazorimo z naslednjim poskusom. Predstavljajmo si, da se od nas z veliko hitrostjo oddaljuje vesoljska ladja in da bi opazovalec na njej rad primerjal svojo uro z uro na Zemlji! Tedaj, ko je bil opazovalec še na Zemlji, je seveda naravnal svojo uro po zemeljskih urah. Zdaj pa, npr. v trenutku, ko kaže njegova ura 12.00, radiotelegrafsko vpraša na Zemljo, koliko je tam ura. V trenutku, ko kaže njegova ura 13.00, prispe odgovor, da je bila na Zemlji tedaj, ko so dobili vprašanje in ko so takoj odposlali odgovor, ura 12.25. Opazovalec sklepa, da kažejo zemeljske ure za 5 minut premalo, kajti po njegovem je bila tedaj, ko je signal prišel do Zemlje, ura 12.30. (Opazovalec si sme predstavljati, da miruje in da se Zemlja oddaljuje, torej da je signal potreboval enak čas za pot tja kot za pot nazaj.)

Omenili smo že, da gredo za opazovalca ure, ki se proti njemu gibljejo, različno hitro. Zdaj bi radi izvedeli še, kolikokrat prehitre ali prepočasne so, če jih opazovalec primerja z lastno uro. — Vzemimo inercialni sistem S , ki ima

uro v izhodišču in zrcalo v razdalji z_0 v smeri osi z . V času 0 naj odda ura svetlobni blisk, ki se na zrcalu odbije in povrne do ure po času $t = 2z_0/c$. Sistem S naj se giblje proti inercialnemu sistemu S' s hitrostjo v v smeri osi x' , ki sovpada z osjo x . V sistemu S' naj bosta dve med seboj naravnani uri, prva v izhodišču in druga na abscisni osi. V trenutku, ko kaže ura v S čas 0, naj izhodišči obeh sistemov sovpadata in tedaj naravnajmo tudi uri v sistemu S' na čas 0. V trenutku, ko se vrne svetlobni blisk do ure v sistemu S , naj se ta ura sreča z uro na abscisni osi sistema S' . Ob tem srečanju kaže ura S čas t , ura v S' pa čas t' , ki ga ni težko izračunati (sl. 1): $t' = (z_0'^2 + (\frac{1}{2}vt')^2)^{1/2}/c$. Razdalji z_0 in z_0' sta pravokotni na smer gibanja, zato velja $z_0 = z_0'$ in je

$$t' = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} t = \gamma t; \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (1)$$

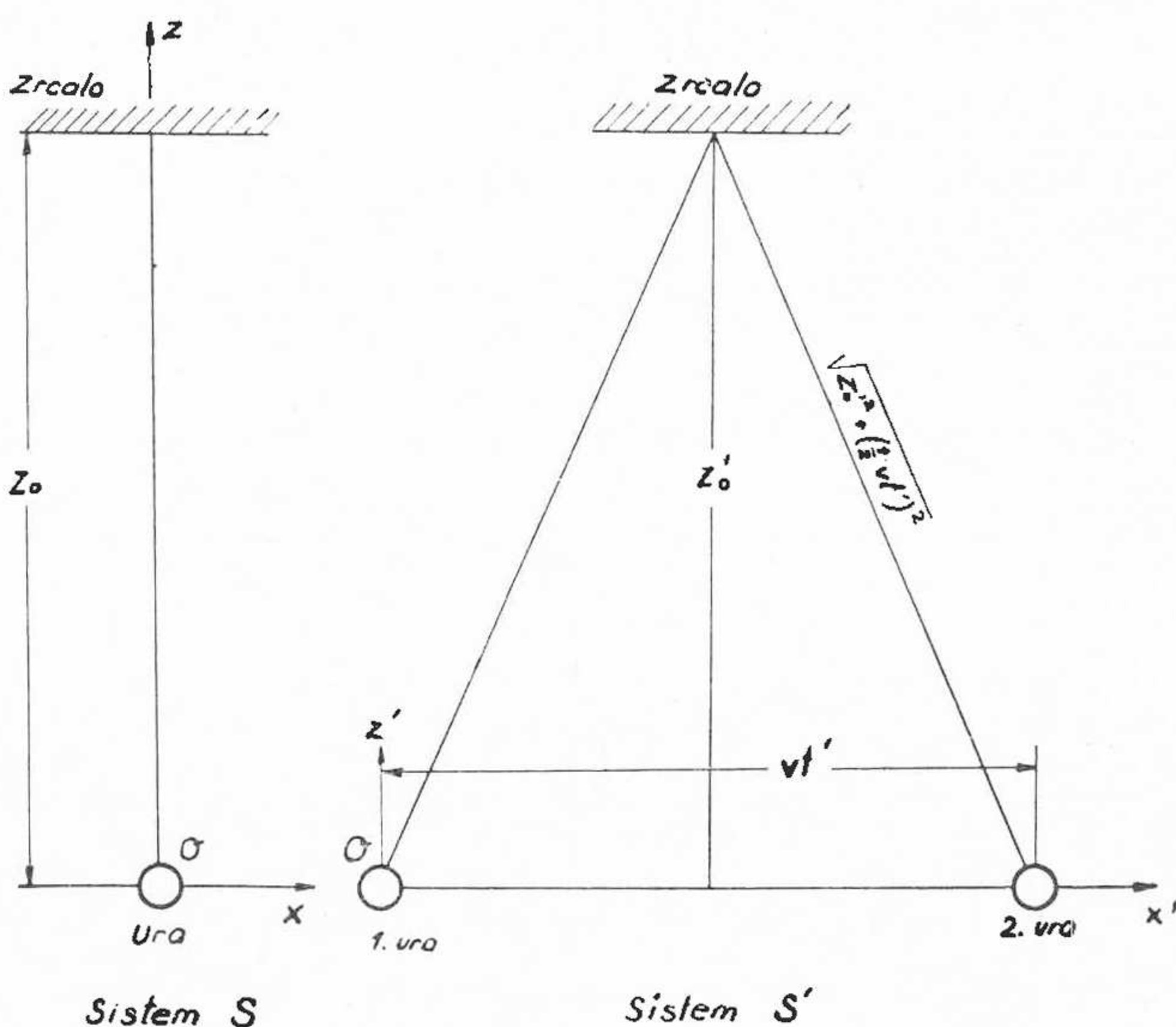
Lastni čas t je časovni razmak med dvema pojavoma (blisk in njegov povratek) v isti točki. Čas t' ni lastni čas, ker se ta dva pojava v sistemu S' nista pripetila v isti točki. Za opazovalca v S bo čas t' daljši od lastnega časa. Čeprav smo izvedli to za poseben primer, velja izsledek čisto splošno, torej mora biti tudi obratno res: za časovni razmak t' med dvema pojavoma, ki bi se v sistemu S' pripetila v isti točki, bi izmerili v sistemu S , kjer se pojava ne bi pripetila v isti točki, daljši čas $t = \gamma t'$. Opazovalcu se zdi, da gredo enakomerno se gibajoče ure počasneje od njegove ure. Ta pojav imenujemo relativistično podaljšanje časa.

Zvezo (1) so potrdili poskusi.¹ Za povprečni življenjski čas mionov (delcev μ), ki jih napravijo v laboratoriju in zaustavijo v svincu, tako da razpa-

dejo v mirovanju (rojstvo in smrt teh mezonov sta skoraj na istem kraju, zato je izmerjeni čas lastni čas), izmerijo približno $\tau = 2,2 \mu\text{s}$. Za mione, ki jih rode kozmični žarki in s povprečno kinetično energijo $W = 3000 \text{ MeV}$ letijo skozi ozračje ter razpadejo v letu (rojstvo in smrt nista na istem kraju), pa so izmerili nekako 30-krat daljši povprečni življenjski čas τ' . Med obema merskima rezultatom mora veljati zveza (1) $\tau' = \gamma \tau$. Vrednost za γ lahko izračunamo iz izraza za kinetično energijo $W = (\gamma - 1) m_0 c^2$, kjer je m_0 mirovna masa (za mion približno $m_0 = 207$ elektronskih mas, torej približno $m_0 c^2 = 100 \text{ MeV}$). Dobimo $\gamma = W/m_0 c^2 + 1 \approx 30$, kar se ujema z izmerjenim rezultatom in tako potrjuje veljavnost zveze (1).

*

Napravimo zdaj v mislih naslednji namišljeni poskus I. Vesoljska ladja S naj sprva miruje na Zemlji (sistem S'). Na Zemlji in na ladji naj bosta uri, ki



Slika 1

ju ob začetku poskusa naravnomo na čas 0. Tedaj naj ladja S za kratek čas vključi motorje, ki jo pospešijo, tako da se potem z enakomerno hitrostjo v oddaljuje od Zemlje. Ko dospe ladja S do cilja potovanja, naj zopet za kratek čas vključi motorje, tako da se potem z enakomerno hitrostjo v bliža Zemlji. Končno naj S še tretjič vključi motorje, ki naj jo zavrejo, tako da naposled zopet miruje na Zemlji.

Zemlja se je ves čas gibala nepospešeno, medtem ko smo ladjo S trikrat pospešili. Privzemimo, da je potovanje za opazovalca na Zemlji trajalo zelo dolgo, npr. nekaj let, vsa tri pospeševanja skupaj pa ne več kot npr. kako uro. Čas, ko je ladja S vključila motorje, izvzemimo iz merjenja, tako da med pospeševanjem ustavimo uro na S . Ob ponovnem srečanju opazovalcev z S in S' bosta obe uri a priori navzkriž za čas, ko druga ura ni tekla, vendar naj bo to tako majhen odlomek celotnega potovalnega časa, da ga ni treba upoštevati.

Pri tem poskusu sta na začetku in na koncu oba opazovalca na istem kraju. Spomnimo pa se, da smemo specialno teorijo relativnosti uporabiti samo za inercialne sisteme. Zato bomo naš poskus opisali s stališča Zemlje, to je sistema S' , ki je bil ves čas inercialen. Ura na Zemlji je namerila za trajanje potovanja čas t' , ura na S pa čas t . Za opazovalca na Zemlji se je ura v S v času t' enakomerno gibala s hitrostjo v (trenutke pospeševanja smo izvzeli); zato se mu zdi, da je ta ura tekla počasneje, tako da je za trajanje potovanja namerila krajši čas

$$t = t'/\gamma = (1 - \frac{1}{2} v^2/c^2 - \dots) t'. \quad (2)$$

Pripomnimo še, da bi v primeru, ko gibanje S ne bi bilo skoraj ves čas enakomerno, morali upoštevati povprečje

$$t = \int_0^{t'} [1 - v^2(t')/c^2]^{1/2} dt' = (1 - \frac{1}{2} \overline{v^2}/c^2 - \dots) t'. \quad (2')$$

Za opazovalca na Zemlji je trajalo torej potovanje čas t' , za opazovalca na ladji S pa samo čas t . Ako sta oba opazovalca dvojčka, se je tisti, ki je ostal na Zemlji, postaral za čas t' , tisti, ki je potoval na S , pa se je postaral manj in je ob povratku za čas $t' - t$ mlajši od svojega brata. Pri hitrostih, ki niso majhne v primeri s hitrostjo svetlobe, je ta razlika lahko znatna.

Pri poskusu I je bistveno, da se sistema S' in S sestaneta dvakrat, na začetku in na koncu poskusa. Sistem S' ostane ves čas inercialen, sistem S pa mora biti vsaj nekaj časa pospešen, če naj pride do ponovnega srečanja. Zato pa sistema S in S' pri tem poskusu nista več enakovredna. Razlika časov t' in t je odvisna samo od relativne hitrosti obeh sistemov, da pa jo sploh lahko na opisani način merimo, mora biti eden od sistemov pospešen. Vsi ti zaključki so nekoliko presenetljivi, zato si niso mogli kaj, da jih ne bi imenovali paradoks ur ali paradoks dvojčkov.

Nazoren je številski zgled, ki ga povzemamo po Darwinu.² Potovanje ladje S naj bo usmerjeno k 4 svetlobna leta oddaljeni zvezdi s hitrostjo $v = \frac{4}{5}c$, tako da traja potovanje tja in nazaj za opazovalca na Zemlji ravno 10 let. Natančni uri na obeh ladjah naj bosta urejeni tako, da v določenih razmakih oddajata radijske ali svetlobne signale, npr. po en signal vsako uro. Frekvenco, s katero si sledijo ti signali, zaznamujemo z ν . Opazovalca na Zemlji in na ladji S naj sprejemata in beležita signale drugega opazovalca.

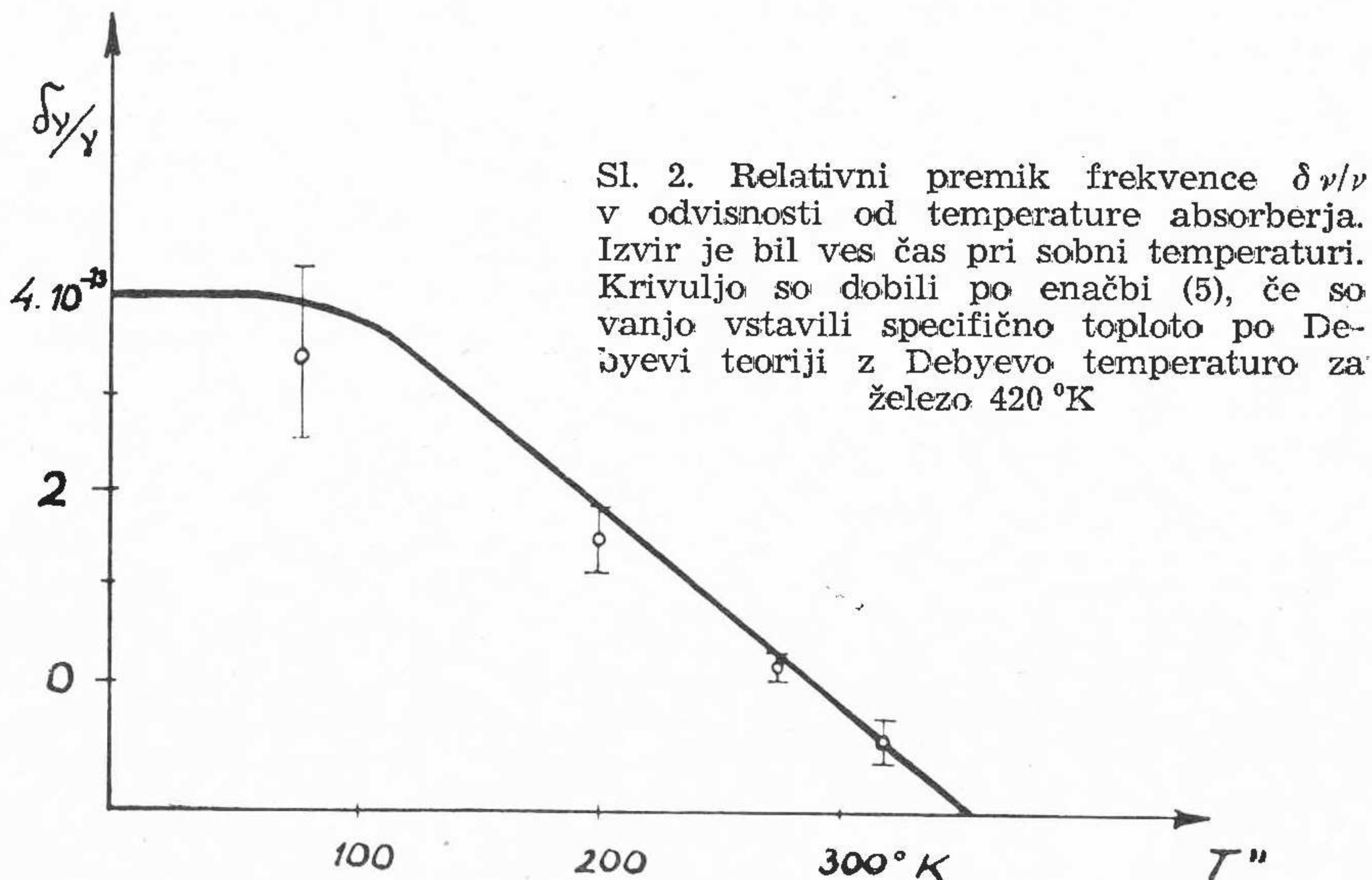
Dokler se ladja oddaljuje, zaznavata zaradi Dopplerjevega premika oba opazovalca signale z zmanjšano frekvenco¹ ν_- :

$$\nu_- = \gamma (1 - v/c) \nu = [(1 - v/c)/(1 + v/c)]^{1/2} \nu = \frac{1}{3} \nu,$$

to je na vsake tri signale lastne ure en signal drugega opazovalca. Od trenutka, ko se ladja S obrne, pa oba opazovalca ne opazujeta več enakega pojava. Za opazovalca na Zemlji se je S obrnila po 5 letih v oddaljenosti 4 svetlobnih let, zato pretečejo 4 leta, preden zazna spremembo v frekvenci signalov. Zaradi tega sprejema ta opazovalec 9 let signale s frekvenco ν_- . Preostalo leto pa zaznava zaradi približevanja ladje signale, ki imajo zaradi Dopplerjevega premika povečano frekvenco ν_+ :

$$\nu_+ = \gamma (1 + v/c) \nu = [(1 + v/c)/(1 - v/c)]^{1/2} \nu = 3 \nu,$$

to je na vsak signal lastne ure po tri signale z vesoljske ladje. Celotno število signalov, ki jih opazovalec na Zemlji sprejme med potovanjem ladje S , je tedaj $\frac{1}{3} \nu \cdot 9 \text{ let} + 3 \nu \cdot 1 \text{ leto} = 6 (\nu \cdot \text{let})$. Toliko signalov je on sam oddal v 6 letih. Zaradi tega bo opazovalec na Zemlji za trajanje potovanja navedel po svoji uri 10 let, po uri na ladji S pa 6 let.



Nekoliko drugače pa je za opazovalca na S . Na potovanju tja tudi on sprejema signale s frekvenco ν_- , vendar že tisti hip, ko se na sredi potovanja obrne, začne sprejemati signale s frekvenco ν_+ . V povprečju sprejme na vsak signal lastne ure po $\frac{1}{2} (\frac{1}{3} + 3) = \frac{5}{3}$ signalov z Zemlje. Ob primerjavi po povratku ugotovi, da je ura na Zemlji oddajala signale 10 let, njegova lastna ura pa je oddala le $\frac{3}{5}$ -krat toliko signalov in je zato namerila samo 6 let. Do istega rezultata pridemo tudi po formuli (2), če upoštevamo, da je $\gamma = \frac{5}{3}$ in $t' = 10 \text{ let}$.

Dosedanja izvajanja nas ne morejo povsem zadovoljiti, saj s stališča sistema S poskusa ne moremo opisati s specialno teorijo relativnosti. Zato bi si radi izmislili poskus, pri katerem ne bi bilo te težave. V tem poskusu, imenujmo ga poskus II, nadomestimo pospešeni sistem S z dvema inercialnima sistemoma S_1 in S_2 .

Ladja S_1 naj se giblje s hitrostjo v mimo Zemlje (S'). Opazovalca na S_1 in S' naj naravnata uri na čas 0, ko sta ravno vstric. Na cilju potovanja naj sreča ladja S_1 drugo ladjo S_2 , ki se giblje s hitrostjo v (merjeno v S') proti Zemlji.

Opazovalec v S_2 naj v trenutku, ko je vštric s sistemom S_1 , naravna svojo uro po uri v S_1 . V trenutku, ko je naposled opazovalec v S_2 vštric z opazovalcem na Zemlji, naj oba primerjata svoji uri.

Opis poskusa II v sistemu S' se ne razlikuje od opisa poskusa I v tem sistemu: ko se srečata na koncu poskusa sistem S' in sistem S_2 , kaže ura v prvem sistemu čas t' in ura v drugem sistemu čas $t = t'/\gamma$. Drugače pa je za opazovalca v S_1 in S_2 . Tudi za opazovalca S_1 gresta uri na S' in S_2 prepočasi, vendar zanj med njegovima srečanjema z S' in S_2 ne preteče isti čas kot med srečanjem z S_2 in srečanjem med S_2 in S' . Končni rezultat pa je zanj in za opazovalca v sistemu S_2 isti kot za opazovalca v sistemu S' .

Do tega rezultata lahko pridemo s štetjem signalov, ki jih oddajajo vse tri ure, vendar je treba upoštevati, da se za gibajočega opazovalca razdalje v smeri gibanja skrajšajo za faktor γ^{-1} . Računi so nekoliko nepregledni, zato navedimo samo številski rezultat za primer, da je cilj potovanja 4 svetlobna leta oddaljen od S' in potujeta sistema S_1 in S_2 z enakomerno hitrostjo $v = \frac{4}{5}c$, merjeno v sistemu S' . Poiskati moramo še hitrost v^* , ki jo ima sistem S_2 , če jo merimo v sistemu S_1 in obratno. Izračunamo jo po pravilu za seštevanje hitrosti v teoriji relativnosti¹ in dobimo $v^* = \frac{40}{41}c$. Po tem gre za opazovalca v S_1 ura na S' $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \frac{5}{3}$ -krat bolj počasi in ura na S_2 $(1 - v^{*2}/c^2)^{-1/2} = \frac{41}{9}$ -krat bolj počasi kot njegova lastna ura. Za tega opazovalca potečejo med srečanjema s sistemom S' in s sistemom S_2 3 leta in od srečanja z S_2 do srečanja med S_2 in S' $\frac{41}{3}$ leta. V celoti torej nameri za trajanje potovanja $3 + \frac{41}{3} \cdot \frac{9}{41} = 6$ let, če upoštevamo, da gre zanj ura na S_2 $\frac{41}{9}$ -krat prepočasi. S stališča istega opazovalca (S_1) poteče med srečanjema S_1 ter S' in S_2 ter S' čas $3 + \frac{41}{3} = \frac{50}{3}$ let. Ker pa gre ura v S' zanj $\frac{5}{3}$ -krat prepočasi, nameri opazovalec v S' za čas med tema srečanjema samo $\frac{50}{3} \cdot \frac{3}{5} = 10$ let. Prav podoben je opis poskusa s stališča opazovalca S_2 .

Poskus II smo omenili tudi zaradi tega, ker je Dingle³ po zmotnem preračunu tega poskusa trdil, da kažeta uri na S' in S_2 tedaj, ko sta sistema vštric, isti čas. S to trditvijo je oživil razpravo o paradoksu ur.

Pri poskusu II se dvojčka ne bi mogla zares sestati. Zato samo bežno orišimo, kako bi poskus I (ob upoštevanju načel splošne teorije relativnosti) opisali s stališča sistema S . Za čas t , ko sistem S ni pospešen, se zanj sistem S' enakomerno giblje in mora veljati $t' = t/\gamma$. Za čas, ko je sistem S pospešen, je treba uporabiti spoznanje splošne teorije relativnosti, da je pospešek enakovreden z gravitacijskim poljem in da razlike v gravitacijskem potencialu vplivajo na hod ur. V prvem približku se pokaže,⁴ da je pospešek pri obračanju ladje S kriv za povečanje časa t' za $(v^2/c^2)t$, to je od $t/\gamma = (1 - \frac{1}{2}v^2/c^2 - \dots)t$ do $(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + \dots)t$, kar se ujema z (2). Dosleden račun je izvedljiv le z zelo zapletenimi matematičnimi sredstvi splošne teorije relativnosti.

Še vedno smo nekoliko nezaupljivi do izvajanj in oddahnili bi si, ko bi jih potrdil tudi poskus. To se je zares že posrečilo Poundu in Rebki⁵ pri merjenju Moessbauerjevega pojava.⁶ Rezultat njune meritve je Sherwin⁷ interpretiral kot dokaz paradoksa ur.

Opazujejo resonančno absorpcijo brezodrivno emitiranih žarkov γ . V izviru oddajajo jedra Fe^{57} pri prehodu iz prvega vzbujenega stanja v osnovno stanje žarke γ z energijo 14,4 keV, to je frekvenco $\nu = 3,48 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}$, ki je izredno ostro definirana, saj je povprečni življenjski čas vzbujenega stanja zares samo $\tau = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ s}$. V absorberju so jedra Fe^{57} v osnovnem stanju in rada vpijejo

žarek γ s to energijo. Verjetnost za absorpcijo žarka γ z malo večjo ali manjšo energijo pa je dosti manjša, kar omogoča zelo natančno merjenje energije.

Čeprav gre za brezodrivno emisijo in absorpcijo, je treba upoštevati, da atomi v kristalni mreži termično nihajo s frekvenco velikostne stopnje 10^{13} s^{-1} . Presodimo, kakšna je lahko posledica termičnega nihanja emitirajočega jedra za mirujočega opazovalca! Razmere so podobne kot pri paradoksu ur, če si mislimo, da je emitirajoče jedro sistem S in mirujoč opazovalec sistem S' . Razlika je le v tem, da se oba sistema nikoli ne sestaneta v isti točki in da sistem S ni pospešen samo trikrat, ampak je v enem življenjskem času τ pospešen kar več milijonkrat. Prvo ni bistveno zaradi tega, ker je razdalja med obema sistemoma na začetku in na koncu poskusa enaka, drugo pa ni bistveno zaradi tega, ker pospeševanje ne more vplivati na emisijo. Povprečna vrednost pospeška je namreč enaka nič in bi sprememba frekvenice pomenila, da se je zaradi pospeševanja deformiralo jedro.

Nihajni čas elektromagnetnega valovanja, ki ga odda jedro, naj bo za opazovalca S , ki proti jedru miruje, enak t_0 . Nihajni čas t_0' , ki ga izmeri opazovalec S' , proti kateremu emitirajoče jedro termično niha, pa je po (2')

$$t_0' = (1 + \frac{1}{2} \overline{v^2}/c^2 + \dots) t_0. \quad (3)$$

Frekvenci ν in ν' , ki ustrezata nihajnim časoma t_0 in t_0' , sta obratnosorazmerni z njima, zato velja

$$\nu' = (1 - \frac{1}{2} \overline{v^2}/c^2 - \dots) \nu, \quad (4)$$

Dalje je

$$(\nu' - \nu)/\nu = -\frac{1}{2} \overline{v^2}/c^2 - \dots = -\frac{1}{2} T' c_V (T')/c^2. \quad (4')$$

Nazadnje smo zapisali rezultat v isti obliki kot v enačbi⁶ (11) in pomeni tu $c_V(T)$ specifično toploto in T' temperaturo izvira.

Tudi jedra v absorberju termično nihajo in tudi zanje velja po podobnem premisleku formula (4'), le da je treba vstaviti vanjo absorpcijsko frekvenco ν'' in temperaturo absorberja T'' . Z odštevanjem pridemo končno do enačbe

$$\delta \nu/\nu = (\nu'' - \nu')/\nu = -\frac{1}{2} [T'' c_V(T'') - T' c_V(T')]/c^2. \quad (5)$$

Kadar sta izvir in absorber skoraj pri sobni temperaturi, smemo vstaviti kar specifično toploto železa pri tej temperaturi: $c_V(T') = c_V(T'') = 398 \text{ J/kgst}$ in dobimo

$$\delta \nu/\nu = -2,21 \cdot 10^{-15} \text{ st}^{-1} (T'' - T'). \quad (6)$$

Pound in Rebka sta zvezo (5) potrdila s poskusom (sl. 2) in ugotovila za številski koeficient ν (6) vrednost $-(2,09 \pm 0,45) \cdot 10^{-15} \text{ st}^{-1}$, kar se dobro ujema z izračunano vrednostjo.

Literatura:

1. I. Supek: Teorijska fizika i struktura materije II. Zagreb (Školska knjiga), 1952. S. 51.
2. C. G. Darwin: The Clock Paradox in Relativity, Nature **180**, 976 (1957).
3. H. Dingle: A Problem in Relativity Theory, Proc. Phys. Soc. A **69**, 925 (1956).
4. R. C. Tolman: Relativity, Thermodynamics, and Cosmology. Oxford (Clarendon Press), 1949. S. 192.
5. R. V. Pound, G. A. Rebka, jr.: Variation with Temperature of the Energy of Recoil-Free Gamma Rays From Solids, Phys. Rev. Letters **4**, 274 (1960).
6. J. Strnad: Moessbauerjev pojav, Obz. mat. fiz. **7**, 161 (1960).
7. C. W. Sherwin: Some Recent Experimental Tests of the Clock Paradox, Phys. Rev. **120**, 17 (1960).

✓SODILO DELJIVOSTI IN NJEGOVA USODA

Dobro je znano in rado se primeri, da se odkritja ponavljajo. Včasih gre za teorijo, ki je zgodovinsko tako dozorela, da se posveti v več glavah hkrati in potem vzbudi boj za časovno prioriteto. Taka je bila na primer z infinitezimalnim računom. So pa še druga, drobna odkritja, ki jim ni namenjeno ne veliko mesto v matematiki in ne senzacionalni boj za ime. Zato pa se lahko taka odkritja pohvalijo s posebno nagajivostjo: Hitro zapadejo v pozabo in se zato maščujejo tako, da se puste vedno znova odkrivati. In še to si dovolijo, da se predstavijo na več mestih hkrati. Taka je tudi zgodba o kriteriju deljivosti z lihim številom, ki ni deljivo s 5.

V 239. številki »The mathematical Gazette« je leta 1955 objavil neki J. Kashangaki, študent univerze Makerere v Kampali (Uganda), kriterij deljivosti s številom 19. To pravilo slove takole:

Desetiški številki, ki predstavlja dano število, odreži zadnjo cifro in prištej okrnecu dvakratnik odvzete cifre! Prvotno število je deljivo z 19, če je tako novo število.

Z zaporedno uporabo tega pravila prispemo končno do števila, ki je manjše od 19, in tako presodimo o deljivosti. Primer: Ali je 3 086 379 deljivo z 19? Ravnajmo takole:

$$\begin{aligned} 308637 + 2 \cdot 9 &= 308655 \\ 30865 + 2 \cdot 5 &= 30875 \\ 3087 + 2 \cdot 5 &= 3097 \\ 309 + 2 \cdot 7 &= 323 \\ 32 + 2 \cdot 3 &= 38 \end{aligned}$$

Število 38 pa je že na oko deljivo z 19 in tako lahko algoritem zaustavimo kar na tem mestu. Ugotovili smo, da je 3 086 379 deljivo z 19.

To pravilo je ponatisnilo Математическое просвещение v svoji tretji številki (1958) in sprožilo bogat odziv svojih bralcev. Pisma so bila naravnana v dve smeri: ena so podajala posplošitev pravila na poljubna liha števila, ki so brez faktorja 5, druga pa so govorila o zgodovini tega vprašanja. V prvo skupino sodi prispevek I. N. Sapgira, ki ga je objavilo Математическое просвещение v četrti številki (1959). V spremni besedi navaja uredništvo, da je prejelo več podobnih pisem in se seznanilo še z drugim prispevkom J. Kashangakija v »The Mathematical Gazette« (1957) ter prav tako z delom R. J. Gillingsa v »Scripta mathematica« (1956—1957). Vsi ti prispevki govorijo o istem splošnem kriteriju deljivosti. Bralci pa, ki so brskali po virih, opozarjajo, da ne gre za novo pravilo ne v primeru števila 19 in ne v splošnem primeru. Tako je kriterij deljivosti z 19 omenjen na primer v poljudni »Zanimivi algebri« Ja. J. Pereljana. Splošno pravilo najdemo v beležkah Loira v »Comptes rendues« Francoske akademije za leto 1888, »Математический сборник« pa je že v letniku 1876-77 objavil prispevek znanega moskovskega matematika N. V. Bugaeva z isto vsebino. Še zgodnejši vir je »Вестник математических наук«, v katerem je leta 1861 objavil to pravilo A. Žbikovski, učitelj iz Minska. Zelo verjetno pa tudi to ni zadnja beseda zgodovine. Vse kaže, da ima obravnavano pravilo obsežno množico avtorjev, raztreseno po celinah in po stoletjih. Po tej kratki in neizčrpni zgodovini pa se lotimo pravila samega. Pravilo, dokaz in primer povzemimo kar po Sapgirovi beležki.

Naj bo p liho število, ki ni deljivo s 5. Preden izrazimo kriterij deljivosti s p , pripravimo dve pomožni naravni števili! Prvo število n_1 naj bo rešitev diofantske enačbe:

p	n_1	n_2
$10k + 1$	k	$9k + 1$
$10k + 3$	$7k + 2$	$3k + 1$
$10k + 7$	$3k + 2$	$7k + 5$
$10k + 9$	$9k + 8$	$k + 1$

$$pm_1 - 10n_1 = 1, \quad (1)$$

drugo število n_2 pa naj reši diofantsko enačbo

$$10n_2 - pm_2 = 1. \quad (2)$$

Obe enačbi sta rešljivi, saj je število p po pogoju tuje številu 10. Vrednosti n_1 in n_2 , ki ustrezajo različnim p , navedimo kar v tabeli.

Število A , čigar deljivost s p preskušamo, zapišemo v obliki

$$A = 10x + y$$

kjer je

$$0 \leq y \leq 9$$

in mu priredimo dve števili

$$A_1 = x - n_1 y \quad A_2 = x + n_2 y$$

Upoštevamo (1) in (2) pa dobimo po kratkem računu

$$A - 10A_1 = pm_1 y$$

$$10A_2 - A = pm_2 y$$

Ne pozabimo, da je število p tuje številu 10, pa razberemo od tod dve pravili:

Števili A in A_1 sta obe deljivi s p ali pa obe nista deljivi s p .

Števili A in A_2 sta obe deljivi s p ali pa obe nista deljivi s p .

V tabeli za n_1 in n_2 so črno obrobljene tiste vrednosti, ki so manj ugodne za rabo. Sapgirova tabela nam torej pove, po katerem pravilu naj se v vsakem danem primeru ravnamo.

Oglejmo si na primer, ali je število 3 086 391 deljivo z 31?

Tu je $A = 3\,086\,391$, $p = 31$, $k = 3$. Po tabeli prevedemo vprašanje na deljivost števila

$$A_1 = 308\,639 - 3 \cdot 1 = 308\,636$$

z 31. Dalje je

$$A_1' = 30\,863 - 3 \cdot 6 = 30\,845$$

$$A_1'' = 3\,084 - 3 \cdot 5 = 3\,069$$

$$A_1''' = 306 - 3 \cdot 9 = 279$$

$$A_1'''' = 27 - 3 \cdot 9 = 0$$

Iz tega sledi: Število A je deljivo z 31.

Literatura:

И. Н. Сапгир: Два признака делимости на любое число, не оканчивающееся на 5. Математическое просвещение, выпуск 4, Москва 1959, stran 209.

France Križanič

✓VIŠJI PREDAVATELJ ALBIN ŽABKAR



Dne 1. avgusta 1962 je po večmesečni hudi bolezni umrl višji predavatelj matematike na fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Albin Žabkar. Smrt ga je dohitela prezgodaj, saj je bil pokojni pri polni moči, ko ga je nenadno napadla zahrbtna bolezen in ga spravila v grob.

Prof. Žabkar se je rodil 1. marca 1901 v Krškem. Osnovno šolo je obiskoval v rodnem mestu, gimnazijo pa v Šentvidu, kjer je l. 1920 maturiral. Po maturi se je vpisal na takrat novo ustanovljeno ljubljansko univerzo, kjer je študiral matematiko in fiziko. Po štirih letih študija je l. 1924 diplomiral, l. 1926 pa je tudi položil profesorski usposobljenostni izpit za poučevanje matematike in fizike na srednjih šolah kot glavnih predmetov. Že l. 1924 je nastopil službo na srednjih šolah in prišel kot suplent najprej na gimnazijo v Kočevju, l. 1926 pa je dobil mesto profesorja na takratni tretji državni gimnaziji v Ljubljani. Od tedaj pa vse do l. 1958 je bil redno zaposlen kot profesor matematike in fizike na različnih ljubljanskih gimnazijah, nazadnje na VII. gimnaziji na Viču. Poleg tega je skoraj ves čas svojega službovanja na ljubljanskih gimnazijah sodeloval tudi na univerzi pri pouku matematike. Že v študijskem letu 1927/28 je namreč prevzel predavanja in vaje iz matematike za slušatelje arhitekture, kemije in rudarstva na takratni tehniški fakulteti. Ko je po osvoboditvi število slušateljev in oddelkov na univerzi močno naraslo, je prof. Žabkar obdržal predavanja in vaje za arhitekte, rudarje in metalurge, po potrebi pa je pozneje še vedno rad priskočil na pomoč tudi drugje. Šele l. 1958 se je odločil opustiti naporno dvojno delo na univerzi in na srednji šoli in je po krajšem prehodnem razdobju popolnoma prešel na tedanjo fakulteto za rudarstvo, metalurgijo in kemijsko tehnologijo za višjega predavatelja matematike.

Delo profesorja Žabkarja je pustilo vidne sledove na številnih področjih. Kot dolgoletni srednješolski učitelj je posredoval znanje matematike in fizike številnim dijakom, ki so si izbrali pozneje razne poklice, tako da je naletel na svoje bivše učence skoraj v vseh mestih in na vseh položajih po naši domovini. Del svojih pedagoških izkušenj po gimnazijah je pokojni uporabil tudi pri sestavljanju številnih učbenikov, ki jih je napisal sam ali v sodelovanju z drugimi. Še več izkušenj in znanja pa je pokojni odnesel s seboj v grob. Čeprav je rad in s polnim razumevanjem spoštoval tuje prepričanje, mu je le bilo vsako nepotrebno govoričenje zaprno in zato je na žalost tudi o svojih izkušnjah le nerad govoril. V še manjši meri kakor njegove izkušnje na srednji šoli bodo mogla zato koristiti drugim njegova dognanja v zvezi s poukom matematike na tehniških fakultetah, čeprav bi mogel tudi v tem pogledu pokojni marsikaj povedati. Skoraj celih 20 let je imel namreč prof. Žabkar sam na skrbi enoletni kurz matematike za razne tehnične poklice, v katerem je bilo treba podati bodočim inženirjem številne važne dopolnitve matematičnega znanja. Za to

področje dela se je pokojni posebno v teku zadnjih let zelo zanimal in mu posvetil veliko pozornosti. Živo je zasledoval razvoj tega vprašanja po svetu in zbral tudi izredno bogato biblioteko o tem in o drugih vprašanjih. Zato je zelo škoda, da so ravno na tem področju zaradi njegove zadržanosti prišli tako malo do izraza njegovi pogledi in izkušnje.

Opis dela prof. Žabkarja ne bi bil popoln, če ne bi omenili tudi njegovega marljivega sodelovanja pri raznih strokovnih časopisih. Tako je za *Obzornik* napisal prevod članka L. N. Ridenoura o hitrih računskih strojih, v *Obzorniku*, *Elektrotehniškem vestniku* in v *Rudarsko-metalurškem zborniku* pa je objavil tudi več ocen raznih inozemskih strokovnih knjig. Prav tako bi bilo treba tudi omeniti slovenski prevod znanega matematičnega priročnika avtorjev I. N. Bronštejna in K. A. Semendjajeva, ki ga je oskrbel v zadnjih mesecih svojega življenja in ki bo v kratkem izšel pri založbi *Življenje in tehnika*.

Prof. Žabkar je bil v privatnem življenju skromen in tih človek. Do svojih študentov je bil pravičen in prijazen, prav tako tudi do svojih ožjih tovarišev, posebno mlajših. Zato ga bodo številni njegovi učenci in znanci ohranili v najlepšem spominu.

A. Kuhelj

ŠOLA

PRIPOROČILO

Odbora Zveznega izvršnega sveta za prosveto in kulturo o ukrepih
za napredek matematične izobrazbe

Odbor Zveznega izvršnega sveta za prosveto in kulturo je na svojem zasedanju dne 6. julija 1962 obravnaval na podlagi posebno pripravljenega elaborata stanje in nekatera aktualna vprašanja matematičnega pouka. Odbor je na zasedanju ugotovil, da je s stanjem matematičnega pouka treba seznaniti vse šole, univerze, znanstvene zavode, organe za prosveto in znanstveno delo, strokovne službe in ustanove, da bi le-te posvetile potrebno pažnjo zbližanju pogojev za nadaljnji dvig kvalitete matematične izobrazbe in matematične kulture vobče, ker je vse to izrednega pomena za razvoj znanstvenega mišljenja in za občo in strokovno izobrazbo naše mlade generacije, kakor tudi za izpopolnitev cele vrste raznih kategorij naših strokovnih kadrov.

Potrebe za dvig ravni matematične izobrazbe in števila matematičnih kadrov raznih profilov in specialnosti so iz leta v leto večje, ker postaja aktivno znanje matematike na vseh stopnjah v vseh državah pa tudi v naši eden izmed pogojev njenega racionalnega ekonomskega razvoja. Uporaba matematičnih znanj se širi na nova in nova področja znanosti, kakor tudi v sodobno proizvodnjo in družbene službe. Medtem ko se je pouk matematike do sedaj razvijal v šolah ter na univerzah za potrebe oblikovanja matematičnih kadrov za delo v šolah, se zdaj za matematiko in njeno uporabo vse bolj zanimajo znanstvene ustanove, industrijska podjetja, statistične in druge službe, v katerih čutijo vse večjo potrebo po kadrih z matematično izobrazbo.

Razvoj sodobne tehnike je najtesneje povezan z razvojem različnih področij matematike, katere rezultati močno vplivajo na nadaljnji tok tega razvoja.

Zato mora naša skupnost posvetiti posebno skrb oblikovanju številnih matematičnih kadrov raznih profilov in to: predmetnih učiteljev in profesorjev matematike v osnovnih šolah, srednjih in višjih šolah, matematikov, ki delajo z računskimi stroji, znanstvenih delavcev in tistih matematikov, ki so zaposleni s tehničnimi in industrijskimi raziskovanji. Za nadaljnji razvoj matematike in njene uporabe pri nas je izredno važno zagotoviti tudi dovolj močan priliv kvalitetnih slušateljev na fakultete in druge institucije, ki izobražujejo matematike, a še posebno na matematične katedre prirodno-matematičnih fakultet.

Da bi hitreje in bolj uspešno kot doslej zadovoljili naraščajoče potrebe po matematični izobrazbi in kulturi, je nujno potrebno, da za takšno delo pridobimo vse zainteresirane faktorje, ki naj posvetijo vso skrb napredku matematičnega pouka. Glede na takšen cilj se Odbor ZIS za prosveto in kulturo obrača na vse šole in fakultete, znanstvene institucije, organe za prosveto in za znanstveno delo, strokovne institucije in organizacije z naslednjim

p r i p o r o č i l o m :

I.

Odbor ZIS za prosveto in kulturo poziva vse šole in univerze, znanstvene institucije, svete za prosveto v občini, okraju in republiki, strokovne službe v prosveti, sindikalne organizacije prosvetnih delavcev in organizacije ljudske mladine, da posvetijo posebno skrb pouku matematike pri razvoju matematične kulture vobče in da v mejah svojih dejavnosti ustvarjajo čimbolj ugodne pogoje za njen napredek in za dvig ravni matematične izobrazbe v skladu s sodobnimi družbenimi potrebami.

II.

Glede na hitro rast šolske mreže in proces vse večjega zajetja mladine v osnovnih, srednjih in višjih šolah, je nastala v sedanji etapi razvoja našega šolstva potreba po številnejših matematičnih kadrih, ki bi bili usposobljeni uspešno izvesti matematični pouk na ustrezni ravni.

Da bi to povečano potrebo mogli v skorajšnjem času uresničiti, smatra Odbor ZIS za prosveto in kulturo za potrebno priporočiti, da vsi zainteresirani organi, a še posebno komune, ki so neposredno zainteresirane na tem področju, proučijo vse oblike stimuliranja mladine za študij matematike, da bi tako uporabili vse vire pri pridobivanju mladih matematičnih kadrov.

Potrebno je takoj in nemudoma izkoristiti vse možnosti za povečanje priliva študentov, ki bi študirali matematiko na prirodoslovno-matematičnih fakultetah, višjih pedagoških šolah in pedagoških akademijah. Za dosego takšnega cilja je treba takoj začeti z naslednjimi ukrepi:

1. Že v novem šolskem letu je treba posvetiti posebno skrb štipendiranju večjega števila učencev za študij matematike in študentom matematike na prirodoslovno-matematičnih fakultetah, višjih pedagoških šolah in pedagoških akademijah in glede na to začeti z razdeljevanjem sredstev za štipendiranje.

2. Podvzeti je treba vse, da se sposobnim študentom matematike povečajo štipendije in tako ustvarijo za njihov študij boljši materialni pogoji.

3. Potrebno je, da pristojni faktorji in študentske organizacije posvetijo večjo skrb namestitvi študentov matematike v študentskih domovih.

4. Priporoča se vsem organom za prosveto, a še posebno v komunah, v katerih manjka matematičnih kadrov v šolah, da store vse za stimulacijo teh kadrov v novem sistemu nagrajevanja in še z drugimi oblikami omogočijo, da si šole pridobijo sposobne in čimbolj kvalificirane matematične kadre.

5. Glede na velike potrebe po matematičnih kadrih je nujno, da organi za prosveto takoj pregledajo potrebe po teh kadrih in da na podlagi teh potreb izdelajo svoje plane za njihovo zadovoljitev.

III.

Neprestani razvoj matematičnih znanosti zahteva, da matematiki v šolah stalno izpopolnjujejo svoje znanje in delo, zato jim moramo mnogo bolj kot doslej nuditi vso potrebno pomoč. Nastaja tudi potreba, da organizirano vzpodbujamo mlajši učni kader, da bi si ta pridobil kvalifikacijo na ravni univerzitetnega pouka II. stopnje tako, da bi študiral ustrezne programe in si na elastičnejši način pridobil višjo kvalifikacijo. Z večjo pažnjo je treba mlajše matematične kadre uvajati v njihovo učno delo; priprave za strokovni izpit pa je treba izkoristiti za njihovo nadaljnje strokovno izpopolnjevanje.

Pouk matematike zahteva sistematično izpopolnjevanje v cilju doseganja čimboljših izobrazbenih rezultatov. Potrebno je osvajati enotne kriterije pri reševanju posameznih didaktičnih in učnih vprašanj. Glede na to je treba še naprej izpolnjevati učne načrte in predmetnike v vseh vrstah šol, kakor tudi učbenike in druga sredstva za dviganje kvalitete pouka v celoti.

Potrebno je tudi, da šole in strokovne službe v sodelovanju z društvi matematikov in z matematičnimi ustanovami bolje skrbijo za pravilen razvoj tistih učencev, ki kažejo posebno sposobnost in zanimanje za matematiko; takšno zanimanje je treba še krepiti in poiskati ustrezne mere, da se takšnim učencem zagotovi popoln in ugoden razvoj v tej smeri. Eno od koristnih mer predstavlja organizacija dopolnilnega dela s sposobnimi učenci in tekmovanja učencev vseh vrst šol v komuni, okraju — do republike in federacije. Takšno delo je treba sistematično razvijati in zanj najti ustreznejše oblike, da bi tako mobilizirali učence za še večje napore v cilju doseganja čimboljših rezultatov na tem področju.

IV.

Ko se ob tej priliki obračamo na vse šole, univerze, znanstvene institucije, organe za prosveto in znanstveno delo, strokovne ustanove, društva matematikov, sindikalne organizacije prosvetnih in znanstvenih delavcev in organizacije ljudske mladine, je Odbor ZIS za prosveto in kulturo prepričan, da bo njihovo medsebojno sodelovanje in še sodelovanje z drugimi zainteresiranimi faktorji dovedlo do hitrejšega in uspešnejšega reševanja vrste aktualnih vprašanj na tem področju. Odbor ZIS za prosveto in kulturo je tudi pripravljen še nadalje spremljati in nuditi vso potrebno pomoč pri nadaljnjem izboljšanju pouka matematike v naših šolah, na univerzah in drugih ustanovah.

Beograd, 26. julija 1962.

ALI ATOMSKA BOMBA LAHKO ZANETI VERIŽNO JEDRSKO REAKCIJO V MORJU?

V zvezi s poskusi z atomskimi bombami, o katerih smo svoj čas brali v časnikih, me zanima vprašanje: ali se ne bi mogla verižna reakcija razširiti na vodik v morski vodi, če bi v morju eksplodirala velika vodikova bomba?

Znano je, da se pri zlitju 4 jeder vodika v 1 helijevo jedro sprosti energija $28 \cdot 10^6$ eV, medtem ko je energija jedra, potrebna za to, da lahko reagira z drugim jedrom, mnogo manjša. Kot mi je znano, poteka v središču Sonca takšna reakcija že pri $20 \cdot 10^6$ °K ali pri še nižji temperaturi (čemur ustreza povprečna energija delca okrog 2000 eV) seveda izredno počasi, ker zelo redkokdaj doseže katero jedro dovolj veliko energijo. Ker pa z naraščanjem temperature število jeder z veliko energijo zelo hitro narašča, bo najbrž pri 10 ali 100-krat tolikšni temperaturi, kot je v soncu, število teh jeder že dovolj veliko, da bi jedra mogla reagirati. Ali je potemtakem zares nevarno, da bi v morju zanetili jedrski požar?

F. C.

ODGOVOR

Pomislek, da lahko atomska bomba sproži termonuklearne jedrske reakcije v vodi, je a priori seveda upravičen; saj služi pri vodikovi bombi kot detonator atomska bomba, ki sproži reakcije med lahkimi jedri, ki sestavljajo bombo. Vendar se izkaže, da atomska bomba v navadni vodi ali kjerkoli na zemlji take reakcije ne more sprožiti.

Najprej poudarimo, da med lahkimi jedri niso možne verižne reakcije! Pri reakcijah med dvema lahkima jedroma pri energijah pod 10 MeV z redkimi izjemami nastaneta le po dva končna produkta, od katerih je vsaj eden (navadno pa sta oba) električno nabit. Nabiti delci izgubljajo v glavnem svojo kinetično energijo s trki z elektroni, tako da bo v splošnem reakcijski produkt prišel prej v temperaturno ravnotežje z okolico, kot pa doživel jedrsko reakcijo. Zato so jedrske verižne reakcije možne le z nevtroni, to je, če reakcijo sproži nevtron in se pri reakciji sprosti več kot en nevtron. Tem pogojem ni možno zadostiti pri reakcijah z lahkimi jedri. Zato je hitrost sproščanja energije v sistemu zaradi jedrskih reakcij med lahkimi jedri odvisna predvsem od temperature in gostote sistema ter od reakcijskih presekov navzočih lahkih jeder (1).

V vodi imamo v glavnem vodik (H^1) in kisik (O^{16}) in v zelo majhnih količinah devterij (H^2) in izotopa kisika O^{17} in O^{18} . Zato bi morali k morebitni termonuklearni reakciji največ energije prispevati reakciji $H^1 + H^1 \rightarrow H^2 + e^+ + \nu$ in $O^{16} + H^1 \rightarrow F^{17} + \gamma$, ki sta zelo pomembni pri izgorevanju zvezd. Oglejmo si prvo reakcijo: v središču sonca s temperaturo $14 \cdot 10^6$ °K in gostoto vodika 100 g/cm^3 je življenjska doba vodika zaradi te reakcije $14 \cdot 10^9$ let. To se pravi, da posamezen proton na opisani način reagira v povprečju šele po 14 milijardah let. Pri tisočkrat manjši gostoti vodika v vodi in čeprav nekoliko višji temperaturi pri eksploziji bo ta reakcija še vedno bistveno počasnejša, kot je oddajanje toplote s toplotnim sevanjem (glej (1), slika 4). Podobno oceno bi lahko naredili tudi za ostale kombinacije in uvideli, da so termonuklearne reakcije pri pogojih na zemlji nemogoče.

Zakaj pa so potem možne vodikove bombe, bo kdo vprašal. — Elementi, ki jih uporabljajo v vodikovih bombah, imajo izredno velike reakcijske preseke, tako da so termonuklearne reakcije možne tudi pri gostotah približno 1 g/cm^3 , temperaturah do $100 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ in pri majhni masi sistema. Najugodnejša je reakcija $\text{H}^2 + \text{H}^3 \rightarrow \text{He}^4 + n + 17.6 \text{ MeV}$, ki je pri majhnih medsebojnih energijah (nekaj keV) začetnih jeter najmočnejša znana reakcija. V naravi pa je devterija izredno malo ((1) slika 1) in ga obogačujejo s težavnimi postopki, tritij pa je celo radioaktiven in ga pridobivajo šele s pomočjo jedrskih reakcij.

Pomanjkanje termonuklearnega goriva je kvalitativno lahko razumeti. Zemlja je nastala iz snovi, ki je nekoč pripadala zvezdi, v kateri so potekale jedrske reakcije. Zato so elementi oziroma izotopi, ki v jedrskih reakcijah hitro izgorevajo, na zemlji zelo redki ((1) slika 1). Po drugi strani pa je bila masa zemlje dosti premajhna, da bi sama vzdrževala izgorevanje počasnih reakcij, ker so bile izgube zaradi sevanja prevelike in se je ohladila.

Bogdan Povh

(1) M. Kregar in B. Povh, Jedrske reakcije v zvezdah, Obzornik za mat. in fiz., 8, 72 (1961).

ODGOVOR

OBSEVANA PLAST

(Obz. za mat. fiz., 7, 188, 1960)

1 m visoko nad vodoravno podlago je nameščen točkast izotropen izvor enobarvne rentgenske svetlobe. Z njo hočemo obsevati 1 dm^3 neke snovi, ki jo v obliki tanke plasti porazdelimo po podlagi. Razpolovna debelina snovi meri pri uporabljeni rentgenski svetlobi 0,8 mm. Snov in podlaga sta takšni, da te svetlobe ne razpršujeta, ampak jo samo absorbirata.

Kako naj bo snov porazdeljena, da bo obsevanje najbolj učinkovito, to se pravi, da se bo v snovi absorbiral maksimalen delež svetlobnega toka, ki ga seva izvor? Kolikšen je ta delež? Kolikšna je največja debelina plasti?

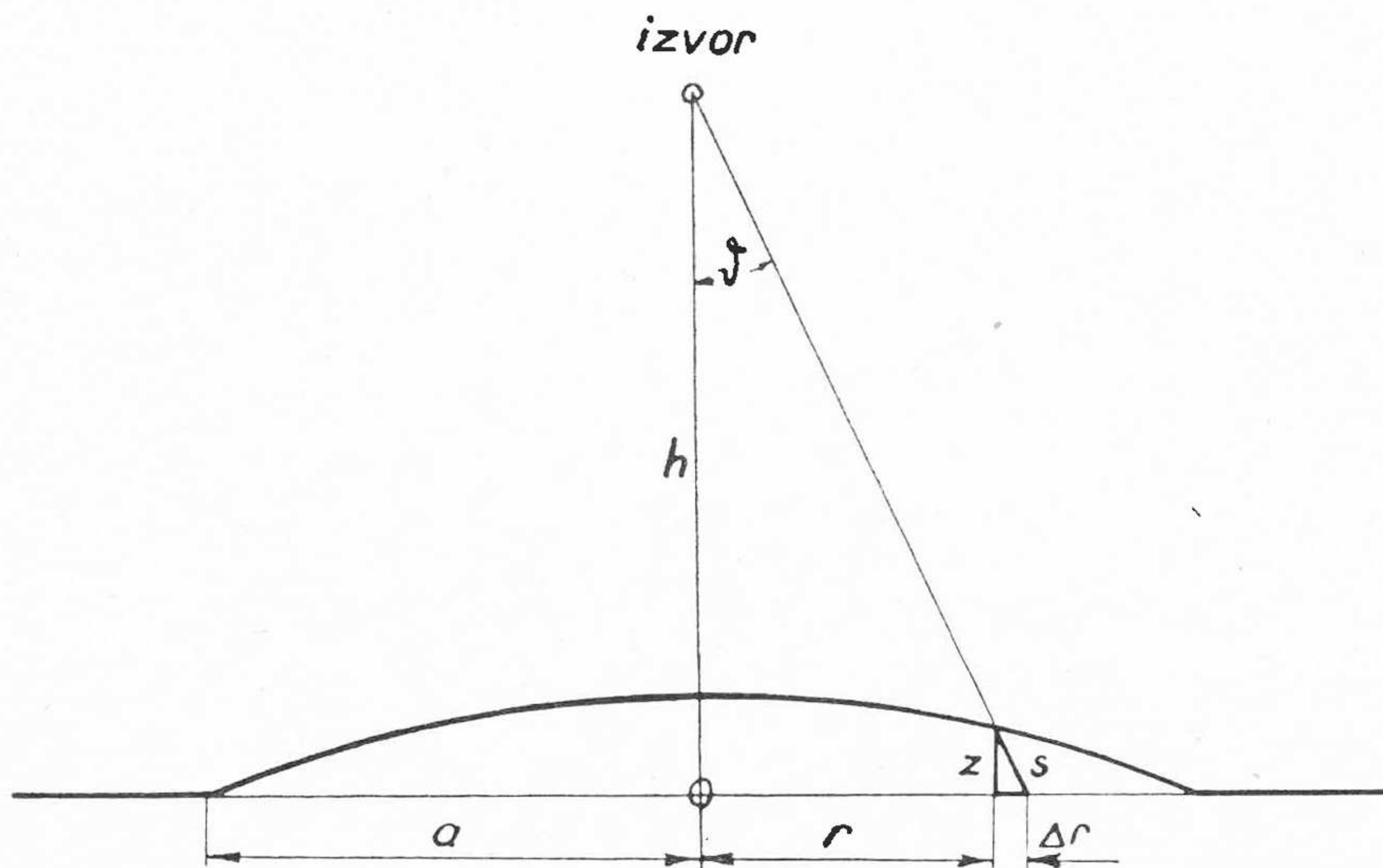
Pričakujemo, da bo plast snovi tvorila rotacijsko telo, katerega profil opišemo s funkcijo $z = z(r)$ (gl. sliko). Da bomo mogli določiti to funkcijo, moramo najprej zapisati, kolikšen delež svetlobnega toka, ki ga seva izvor, se absorbira v plasti. Ker je izvor izotropen, oddaja v element prostorskega kota $d\Omega$ svetlobni tok $P_0 d\Omega / 4\pi$, če je P_0 celotni tok, ki ga seva izvor. Pri prehodu skozi snov se ta tok $e^{-\mu s}$ -krat oslabi, če je μ absorpcijski koeficient, s pa pot svetlobe v plasti (gl. sliko!). Kvociient celokupnega absorbiranega in izsevanega svetlobnega toka je torej:

$$\frac{P_{\text{abs}}}{P_0} = \int [1 - \exp(-\mu s)] \frac{d\Omega}{4\pi},$$

pri čemer je treba integrirati po tistem delu prostorskega kota, ki ga izpolnjujejo žarki, ki gredo skozi plast. Zahtevamo, da naj bo zapisani funkcional maksimalen, pri čemer pa mora biti izpolnjen pogoj, da ima plast predpisano prostornino.

Ako poskusimo rešiti zastavljeni variacijski problem ob predpostavki, da plast nima omejenega radija, pridemo do nesmiselnega rezultata, namreč do rešitve $z(r)$, ki je v nekem intervalu negativna. Ker negativnih vrednosti za z ne smemo dovoliti, iščemo tako funkcijo $z(r)$, ki ima pri $0 < r < a$ pozitivne vrednosti, za $r > a$ pa postavimo $z = 0$.

Zaradi rotacijske simetrije smemo vzeti, da leži prostorski element med plaščema dveh tožcev, ki sta določena s kotoma ϑ in $\vartheta + d\vartheta$, torej $d\Omega = 2\pi d(\cos \vartheta)$. V izrazu $\operatorname{tg} \vartheta = (r + \Delta r)/h$ bomo zanemarili Δr , kar je dovoljeno,



če domnevamo, da je plast tanka v primeri s h . S substitucijama $\operatorname{tg} \vartheta = r/h = t$ in $s = z/\cos \vartheta$ prevedemo prej zapisani funkcional, ki ga bomo odslej zaznamovali z $\Phi(z)$, v obliko:

$$\frac{P_{\text{abs}}}{P_0} = \Phi(z) = \frac{1}{2} \int_0^\tau [1 - \exp(-\mu z \sqrt{1+t^2})] \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} dt,$$

kjer je $\tau = a/h$. Pogoji glede prostornine pa se glasi:

$$\Psi(z) = 2\pi h^2 \int_0^\tau t z dt = V_0.$$

Poiskati je treba tak $z(t)$, da bo:

$$\operatorname{grad}(\Phi - \lambda\Psi) = 0,$$

kjer je grad znamenje za gradient funkcionala, λ pa neznan multiplikator. Zgornji pogoj nam da Eulerjevo diferencialno enačbo za podintegralno funkcijo $F(t, z)$ funkcionala $\Phi - \lambda\Psi$, namreč za:

$$F(t, z) = \frac{1}{2} [1 - \exp(-\mu z \sqrt{1+t^2})] \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} - 2\pi\lambda h^2 t z.$$

Eulerjeva enačba za to funkcijo je izprijena in ima obliko:

$$\frac{\partial F}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \mu \sqrt{1+t^2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \exp(-\mu z \sqrt{1+t^2}) - 2\pi\lambda h^2 t = 0,$$

od koder izračunamo $z(t)$:

$$z(t) = \frac{1}{\mu \sqrt{1+t^2}} \ln \frac{\mu}{4\pi\lambda h^2 (1+t^2)}$$

Iz pogoja $z(\tau) = 0$ določimo τ in s tem radij plasti $a = h\tau$:

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\lambda h^2} - 1}$$

Drugo relacijo med τ in λ nam pa da enačba:

$$\begin{aligned} V_0 &= 2\pi h^2 \int_0^\tau t z dt = -\frac{2\pi h^2}{\mu} \int_0^\tau \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ln \frac{4\pi\lambda h^2 (1+t^2)}{\mu} dt = \\ &= \frac{2\pi h^2}{\mu} \left[\ln \frac{4\pi\lambda h^2}{\mu} + 2\sqrt{1+\tau^2} - 2 \right] \end{aligned}$$

Ko vstavimo prejšnji izraz za τ , dobimo naslednjo transcendentno enačbo za λ :

$$\ln \lambda + 2 \sqrt{\frac{\mu}{4\pi h^2}} \sqrt{\frac{1}{\lambda}} + \ln \frac{4\pi h^2}{\mu} - 2 - \frac{\mu V_0}{2\pi h^2} = 0$$

Z gornjimi podatki za μ , h , V_0 dobimo $\lambda = 37 \text{ m}^{-3}$, potem pa $\tau = 0,93$, torej:

$$a = h\tau = 0,93 \text{ m}.$$

Največja debelina plasti je tik pod izvorom, to je pri $t = 0$:

$$z(0) = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\mu}{4\pi\lambda h^2} = 0,72 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Določiti je treba še delež absorbiranega toka. V $\Phi(z)$ postavimo dobljeni izraz za z :

$$\frac{P_{\text{abs}}}{P_0} = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left[1 - \frac{4\pi\lambda h^2 (1+t^2)}{\mu} \right] \frac{t dt}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$\text{Dobimo: } \frac{P_{\text{abs}}}{P_0} = 0.035$$

Mladen Gros

UTRINKI

Natančnost pa taka! — ... »a tačna vrijednost u N/m^2 :

$$\text{mm Hg} = 133,322\,387\,415\,\text{N/m}^2, \llcorner$$

M. Brezinščak: Mjere i sistemi jedinica. Tehnička knjiga, Zagreb, 1961, str. 104.

Preprosta definicija — Lord Kelvin u želji za materijalno nezavisnom reprodukcijom temperaturne skale upotrebio je godine 1852. za termometričku veličinu samu toplinu Q , dakle $x = Q$, čime izraz (1.1—8) dobiva oblik

$$T = a Q \quad (1.4—1)$$

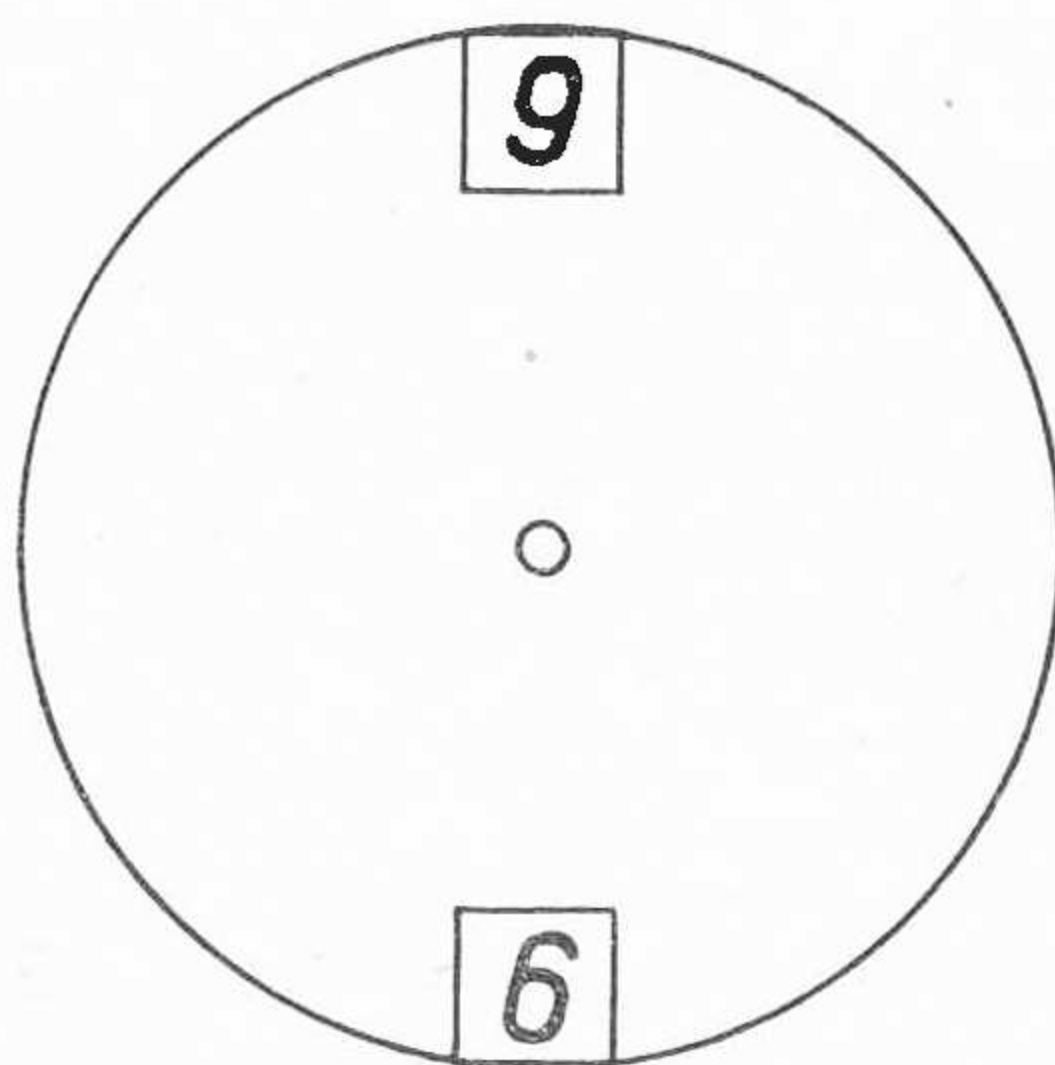
... Temperaturna ljestvica na toj osnovi dobila je naziv »termodinamička ili Kelvinova ljestvica temperature« ...

M. Brezinščak: istotam, str. 164.

PERPETUUM MOBILE, KI ZARES GRE

O Nielsu Bohru pripovedujejo, da je nekoč v družbi, ko so se pogovarjali o perpetuumu mobile, presenetil vse prisotne z izjavo, da se mu je posrečilo iznajti takšen stroj.

Spodnja slika kaže, kako je tak stroj narejen. Na kolesce, ki je nasajeno na vrtljivo gred, pritrdimo na vrhu 9-gramsko utež, spodaj pa 6-gramsko. Jasno je, da se bo kolesce zasukalo, tako da bo prišla 6-gramska utež na vrh. Kaj se potlej zgodi, pa bralec lahko ugotovi, če zasučé sliko, ki jo ima pred seboj.



SIMPLEX SIGILLUM VERI

V Pohlovi predavalnici v Göttingenu je baje na zidu napis, ki ga omenja naslov. Bruc, ki očitno ni šel skozi latinske šole, vpraša starejšega kolego, kaj ta napis pomeni. — »Der Siegellack ist doch das Einfachste« — se glasi odgovor.

Vedeti je treba, da je profesor R. W. Pohl eden prvih, ki je v predavanja iz fizike uvedel sodobne instrumente. Kljub temu pa je znal ceniti tudi preproste poskuse iz tistih časov, ko je bila še v časteh umetnost eksperimen-tiranja s pečatnim voskom in sukancem.

SPOROČILO UPRAVE

Prosimo vse sodelavce »Obzornika«, ki so dolžni imeti žiro račun, da nam pošljejo številko računa. Tisti pa, ki jim ni treba imeti žiro računa, naj nam dostavijo izjavo, glasečo se takole:

IZJAVA

Podpisani
zaposlen v (pri)

izjavljam, da nisem dolžan imeti žiro računa, ker moj honorarni dohodek ne doseže predpisane višine.

(Bivališče, datum) Podpis

Novi sodelavci lahko priložijo številko računa oziroma izjavo rokopisu, ki ga pošljejo uredništvu.

ZALOŽBA »MLADINSKA KNJIGA«

izdaja v sodelovanju z

Društvom matematikov in fizikov LRS knjižno zbirko

S I G M A

Zbirka obsega poljudna dela iz matematike, elementarne prikaze novejših matematičnih poglavij in manjše univerzne učbenike. Doslej so izšle naslednje knjige:

- I. Vidav: Rešeni in nerešeni problemi matematike
- A. Vadnal: Elementarni uvod v verjetnostni račun
- N. Prijatelj: Uvod v matematično logiko
- F. Križanič: Elektronski aritmetični računalniki
- I. Vidav: Algebra

Pravkar sta izšla dvojna zvezka:

- O. Sajovic: Normalna aksonometrija
- F. Križanič: Vektorji, matrike, tenzorji

V tisku sta:

- R. Jamnik: Uvod v teorijo informacije
- Z. Bohte: Numerično reševanje enačb

Načrt za prihodnje leto obsega tri knjige:

- N. Prijatelj: Osnovne matematične strukture
- J. Grasselli: Teorija števil
- F. Križanič: Vektorska in tenzorska analiza.

Knjižna zbirka »Sigma« je namenjena vsem, ki se žele razgledati po matematiki in spoznati njeno sodobno življenje od abstraktnih osnov do uporabe.

Knjižno zbirko »Sigma« zahtevajte v vseh knjigarnah!

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-3-207.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.