



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA

1 9 6 2

IX. št. 2

VSEBINA

Članki

	Stran
Ergodijski problem v klasični statistični mehaniki (Ivan Kuščer) . . .	49
Teorija supraprevodnosti (Leon N. Cooper — prevod Seta Oblak) . . .	61

Novice

O nekem Erdősovem izreku (Zvonimir Bohte)	76
Preprost primer za zvezno funkcijo, ki ni odvedljiva (Jože Vrabec) . .	79
Mehanske lastnosti ledu (Tomislav Skubic)	82
Merjenje temperature v ionosferi (Igor Grabec)	85
Četrty kongres sovjetskih matematikov (Francè Križanič)	87

Domače vesti

Z Einsteinom v Štatenbergu (Francè Šušteršič)	88
---	----

Utrinek	89
-------------------	----

Šola

Nekaj misli o nadaljnji izobrazbi profesorjev fizike (Lavo Čermelj) . .	90
Ciklus predavanj iz eksperimentalne fizike (Francè Ahlin)	91
Zbirka nalog (Stane Uršič)	92
Tekmovanje (Stane Uršič)	93
Tretja stopnja študija fizike pri nas (Bogdan Povh)	95

CONTENTS

Articles

	Page
Ergodic Theory in Classical Statistical Mechanics (Ivan Kuščer) . . .	49
Theory of Overconductivity (Leon N. Cooper — Seta Oblak)	61

News

On a Theorem of P. Erdős (Zvonimir Bohte)	76
Simple Example of a nondifferentiable continuous Function (J. Vrabec)	79
Mechanical Properties of Ice (Tomislav Skubic)	82
Measurement of Temperature in Ionosphaera (Igor Grabec)	85
The fourth Congress of Soviet Mathematicians (Francè Križanič) . .	87

Home News	88
---------------------	----

School	90
------------------	----



✓ ERGODIJSKI PROBLEM V KLASIČNI STATISTIČNI MEHANIKI

IVAN KUŠČER

Statistična mehanika¹⁻⁴ obravnava sisteme, ki so sestavljeni iz zelo velikega števila atomov ali drugih delcev, tako da ne moremo v podrobnostih obravnavati njihovega gibanja, ampak se moramo zadovoljiti s statističnimi napovedmi. Med primarne naloge statistične mehanike spada izpeljava osnovnih zakonov termodinamike, predvsem entropijskega zakona, iz osnovnih zakonov mehanike ali kvantne mehanike. Nadalje pa se statistična mehanika ukvarja z izračunavanjem termodinamičnih lastnosti posameznih tipov snovi, in sicer na osnovi primernih hipotez o lastnosti delcev, iz katerih so te snovi sestavljene.

V naslednjem se bomo postavili na stališče, da velja za sistem klasična mehanika. Za sistem iz atomov je to kajpada huda poenostavitev, ki pa jo lahko deloma opravičimo s pojasnilom, da so splošni problemi in izreki v kvantni statistični mehaniki v marsičem podobni kot v klasični.* Omejili se bomo na obravnavanje sistema, ki je idealno izoliran od okolice in pri katerem ni nobenih spremenljivih zunanjih vplivov, tako da je energija sistema konstantna. Kot primer si lahko predstavljamo plin, ki je zaprt v posodi z idealno togimi stenami.

1. Fazni prostor

Trenutno mikroskopsko stanje sistema je določeno s koordinatami njegovih sestavnih delov $q_1, q_2, \dots, q_s$ ter prirejenimi impulzi $p_1, p_2, \dots, p_s$. (Rabili bomo izraz mikroskopsko stanje sistema, da ne bo zamenjave s termodinamičnim pojmom stanja.) Pri tem je s število prostostnih stopenj sistema. Pri sistemu iz N točkastih delcev, npr. pri enoatomnem idealnem plinu, je $s = 3N$, za koordinate pa lahko vzamemo kartezične koordinate posameznih delcev, $q_1 = x_1, q_2 = y_1, \dots, q_s = z_N$. Prirejeni impulzi so v tem primeru komponente gibalne količine posameznih atomov: $p_1 = mv_{1x}, \dots, p_s = mv_{Nz}$. S temi podatki opredeljeno stanje sistema si lahko mislimo prikazano z eno samo točko v tako imenovanem faznem prostoru, ki ima $2s$ dimenzij; ta točka ima kartezične koordinate $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$.

Zakoni, po katerih se gibljejo deli sistema, se dajo pregledno opisati s sistemom Hamiltonovih enačb:^{5, 6}

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

* O osnovah kvantne statistične mehanike se bravec lahko informira po kakem učbeniku, npr. ^{1, 2}, o novejših raziskavah v zvezi z ergodijsko problematiko na tem področju pa npr. po Landsbergovem članku v Proc. Roy. Soc., A 262, 101 (1961). Glej tudi S. Grossman, Nuovo Cimento, 24, 201, 1962.

Hamiltonova funkcija H je celotna energija sistema, izražena s koordinatami in impulzi: $H = W_{kin} + W_{pot} = H(q, p)$. (Zaradi krajšega izražanja pišemo q namesto $q_1, \dots, q_s$ in ustrezno p .) V zgornjem preprostem primeru se prva izmed zapisanih enačb ujema z Newtonovim zakonom:

$$d(mv_x)/dt = -\partial W_{pot}/\partial x_1 = F_{1x} \text{ itd.}$$

Gibanju sistema, kot je določeno z zgornjim sistemom enačb, ustreza v faznem prostoru gibanje točke. Ta se giblje po določeni krivulji — *trajektoriji*. Skozi vsako točko v faznem prostoru gre ena in ena sama trajektorija, kajti vsakemu možnemu začetnemu stanju sistema ustreza neko gibanje. Vsaki točki v faznem prostoru ustreza neka 2 s -dimenzionalna hitrost $\mathbf{v} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{p}_s)$, katere komponente so določene z levimi stranmi zgornjih enačb. Lahko si predstavljamo, da se po faznem prostoru pretaka neka tekočina, ki nosi s seboj točko, s katero smo predstavili stanje sistema. V danem primeru, ko je energija sistema konstantna, je gibanje stacionarno, tako da se trajektorije točk ujemajo s tokovnicami tega tekočinskega gibanja.

Iz Hamiltonovih enačb razberemo, da je divergenca omenjenega 2 s -dimenzionalnega vektorja hitrosti enaka nič: $\text{div } \mathbf{v} = \sum_i (\partial \dot{q}_i / \partial q_i + \partial \dot{p}_i / \partial p_i) = 0$. To pomeni, da se prostornina, ki jo zavzema kaka merljiva množica točk v faznem prostoru, pri njihovem gibanju ne spremeni (*Liouvillov izrek*). Lahko si predstavljamo, da je tekočina, ki izpolnjuje fazni prostor, nestisljiva.

Pogoj, da je energija konstantna, $H(q, p) = \text{konst.}$, določa neko 2 s -dimenzionalno hiperploskev v faznem prostoru. Vsaki vrednosti energije ustreza po ena takšna ploskev, ki obdajajo druga drugo, nekako tako kot listi čebule. Rekli bomo, da so to *energijske ploskve* in da po dve taki ploskvi definirata *energijsko plast* faznega prostora. Vzeli bomo, da potekajo energijske ploskve tako, da ima vsaka energijska plast omejeno prostornino. Pri sistemu, ki je prostorsko omejen, npr. z neko idealno posodo, je ta pogoj gotovo izpolnjen.

2. Verjetnostne porazdelitve v faznem prostoru

Pri množici molekul v plinu ali pri kakem drugem sistemu z velikim številom prostostnih stopenj je seveda izključeno, da bi za kak trenutek poznali koordinate in impulze vseh delcev, ampak so naše informacije o stanju sistema vsekakor veliko bolj skromne. Stanje torej ni natančno znano in ga zato ne moremo predstaviti s točko v faznem prostoru, ampak le z neko verjetnostno porazdelitvijo,* torej z neko verjetnostno gostoto $\rho(q, p, t)$. Pomen te funkcije opišemo z naslednjimi besedami: Verjetnost, da je ob času t stanje sistema takšno, da pade ustrezna točka v faznem prostoru v element $d\Gamma = dq_1 dq_2 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$ tega prostora pri točki (q, p) , je enaka $\rho(q, p, t) d\Gamma$. Lahko si predstavljamo, da smo tekočino v faznem prostoru pobarvali, pri čemer je ρ koncentracija barvila ali, še bolje, koncentracija, deljena s celokupno samo barvila, kajti verjetnostna gostota je normirana: $\int \rho(q, p, t) d\Gamma = 1$. Iz Liouillovega izreka sledi, da je substancialni odvod verjetnostne gostote enak nič, to se

* Gibbs, ki je prvi vpeljal pojem take verjetnostne porazdelitve, jo je opisal z namišljeno (v limiti neskončno bogato) množico podobnih sistemov, ki ji ustreza množica točk v faznem prostoru^{1, 2}. Takšna množica točk se po Gibbsu imenuje *ensemble*. Pravzaprav je to le poseben primer *kolektiva*, ki se rabi pri aposteriorni definiciji verjetnosti (po Misesu, glej A. Vadnal, Obz. mat. fiz., 4, 97, 1955/56). Odkar je prišlo v navado, da se verjetnost definira aksiomatično (gl. Vadnal, l. c.), pojem ensembela (kolektiva) ni več potreben.

pravi $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + \sum_i [(\partial\rho/\partial q_i)\dot{q}_i + (\partial\rho/\partial p_i)\dot{p}_i] = 0$. Za prisodobno z barvilom pa velja, da ostane koncentracija v vsaki kapljici omenjene tekočine za vselej nespremenjena, kajti v faznem prostoru ni difuzije.

Odločilno vprašanje je sedaj, kakšno verjetnostno porazdelitev bomo izbrali, da bo služila namenom statistične mehanike. Želimo si, da bi se statistične napovedi, ki jih bomo naredili na osnovi izbrane verjetnostne gostote ρ , ujemale s tem, kar dado eksperimenti. To se pravi, na primer, da naj bi se povprečna vrednost $\langle Y \rangle = \int Y(q, p) \rho(q, p, t) d\Gamma$, ki jo za kako mehanično količino $Y(q, p)$, ki je značilna za naš sistem, izračunamo na osnovi izbrane verjetnostne porazdelitve, ujemala s povprečjem, ki ga dobimo z velikokratnim merjenjem količine Y pri vedno enakih makroskopskih okoliščinah. Če naj dosežemo takšno ujemanje, se mora izbira verjetnostne porazdelitve seveda ravnati po okoliščinah, v katerih je obravnavani sistem, in po informacijah, ki jih imamo o stanju sistema.

Potem, ko se odločimo za primerno verjetnostno porazdelitev v faznem prostoru, se šele odprejo konkretne naloge statistične mehanike, do katerih pa v tem članku ne bomo prišli. Tam se potem računajo povprečne vrednosti raznih fizikalno zanimivih količin ter efektivni odmiki od teh povprečij itd. Delamo torej račune, ki so v načelu podobni kot mnogi računi s področja verjetnostnega računa: iz neke dane verjetnostne porazdelitve hočemo določiti druge verjetnosti in razna povprečja. Oni prvi korak, ki nas zasedaj edinole zanima, namreč pametna izbira izhodiščne verjetnostne porazdelitve, pa je čisto drugačne narave.

3. Mikrokanonična verjetnostna porazdelitev

Vzemimo izoliran sistem, ki je bil dalj časa prepuščen sam sebi, tako da je v termodinamičnem pogledu v ravnovesnem stanju! Kakšno je njegovo mikroskopsko stanje, seveda ne vemo; razumljivo pa je, da bomo za tak primer zahtevali, da naj bo verjetnostna porazdelitev v faznem prostoru *stacionarna*; reči hočemo, da naj bo ρ neodvisen od časa. Če nimamo drugih podrobnejših informacij, kot da leži energija sistema v nekem zelo majhnem intervalu od W do $W + \Delta W$, je naravno, da si mislimo verjetnost enakomerno razmazano po ustrezni energijski plasti faznega prostora. Znotraj te plasti naj bo torej $\rho(q, p) = \text{konst.} = 1/\Delta\Gamma$, če je $\Delta\Gamma$ prostornina te plasti; zunaj pa $\rho = 0$. Takšna verjetnostna porazdelitev se imenuje *mikrokanonična*. Da je stacionarna, uvidimo, če se spomnimo prisodobne z barvilom. Ako je barvilo v plasti nestisljive tekočine enakomerno porazdeljeno, se pri gibanju znotraj plasti koncentracija barvila nikjer ne more spremeniti.

Koristno je, če porazdelitev še nekoliko idealiziramo, s tem da jo projiciramo na eno samo energijsko ploskev ($\Delta W \rightarrow 0$). Tedaj imamo verjetnostno porazdelitev po energijski ploskvi. Verjetnostna gostota je spet konstantna po vsej ploskvi, če vpeljemo namesto navadne površine mero (σ), ki je sorazmerna s prostornino ustrezne parcele tanke energijske plasti. Očitno je ta mera pri gibanju, kot ga predpisujejo Hamiltonove enačbe, invariantna.

Samo mimogrede naj omenimo, da se da iz tako definirane verjetnostne porazdelitve izpeljati,⁷ kakšna porazdelitev velja za vsak majhen del sistema, npr. za manjše telo, ki je že dolgo časa potopljeno v velik, idealno izoliran termostat. Dobimo tako imenovano *kanonično porazdelitev*. Tu je verjetnost razmazana po vsem faznem prostoru, in sicer pojema verjetnostna gostota eksponentno z energijo telesa: $\rho \propto e^{-W/kT}$. Za parameter T , ki določa to porazdelitev,

se izkaže, da predstavlja temperaturo, če je k Boltzmannova konstanta. Ta verjetnostna porazdelitev se v statistični mehaniki največ uporablja.

Vse to sta v glavnem povedala že ustanovitelja statistične mehanike, Boltzmann in Gibbs. O pravilnosti njune izbire nihče ne dvomi; o argumentih, s katerimi naj se opraviči ta izbira, pa je polemika še vedno živa. Temu se ni čuditi, kajti problem ni čisto matematičen, ampak je marsikaj prepuščeno okusu in zdravi presoji — pa tudi filozofiranju.

Večina fizikov (med njimi npr. Tolman v svoji znani knjigi¹⁾) je zadovoljna s tem, da se rezultati nadaljnjih izpeljav in računov statistične mehanike ujemajo z rezultati eksperimentov. Uvedbo mikrokanonične in s tem kanonične verjetnostne porazdelitve opravičujejo samo s tem ujemanjem. Drugi, med njimi Rosenfeld⁸ ter matematika Hinčin⁷ in Truesdell,^{10, 11} pa so odločno mnjenja, da je treba dobiti argumente na osnovi zaključkov, ki sledijo iz zakonov mehanike. (Glej tudi nedavni pregledni Caldirolov članek.¹²⁾ Ogledati si hočemo, kakšni so ti argumenti.

4. Birkhoffov ergodijski izrek

Količine, ki jih ugotavljamo pri termodinamičnih eksperimentih, so večinoma povprečja čez precej dolge čase. Naj bo Y neka količina, ki je odvisna od koordinat in impulzov sestavnih delov sistema. Časovno povprečje raztegnimo čez neskončno dolg časovni interval:

$$\bar{Y} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} Y [q(a), p(t)] dt.$$

Ni težko dokazati, da je ta limita, če eksistira, neodvisna od začetnega časa t_0 . Vseeno je tudi, če zahtevamo $t_0 \rightarrow -\infty$ namesto $t_1 \rightarrow +\infty$ ali pa, če pišemo kar splošno: $t_1 - t_0 \rightarrow \infty$.

Boltzmann je izrekel znamenito *ergodijsko hipotezo*, da vsaka trajektorija v faznem prostoru na takšen način ovije svojo energijsko ploskev, da gre skozi vsako njeno točko. Če bi bilo to res, bi bile pravzaprav vse trajektorije med seboj identične, tako da bi bilo zgornje časovno povprečje pri vsakršnih začetnih pogojih ob enaki energiji sistema vedno enako. Dalje se da še uvideti, da bi bilo tedaj časovno povprečne vsake količine Y enako tako imenovanemu mikrokanoničnemu povprečju $\langle Y \rangle_m$, ki ga izračunamo po predpisih verjetnostnega računa iz prej definirane mikrokanonične verjetnostne gostote (q_m):

$$\langle Y \rangle_m = \int Y q_m d\Gamma = \frac{1}{\sigma} \int Y d\sigma,$$

pri čemer je $d\sigma$ prej definirana mera majhnega dela energijske ploskve, σ pa mere vse ploskve, po kateri integriramo.

Potemtakem bi s tem že našli tehten argument v prid mikrokanonični porazdelitvi, če bi hipoteza ustrezala resnici.

Boltzmannova lipoteza pa je gotovo napačna, kajti množica točk, ki jo pokriva krivulja na ploskvi, ima v primeri s ploskvijo mero nič. Kljub temu lahko še dalje vprašujemo, ali morda vendarle vsaka trajektorija povsod na gosto prekrije energijsko ploskev, nemara podobno, kot pokrije Lissajoujeva krivulja svoj pravokotnik v primeru iracionalnega razmerja obeh frekvenc.

Skratka, ali morda vendarle nista pri določenih pogojih obe povprečji za vsako integrabilno funkcijo Y enaki,

$$\overline{Y} = \langle Y \rangle_m ?$$

Ta domneva predstavlja sodobno verzijo ergodijske hipoteze.

Problem je dolgo časa počival, dokler ni uspelo Birkhoffu⁷⁻¹³ dokazati, da eksistira časovno povprečje $\overline{Y}$ pri zelo splošnih pogojih za vsako funkcijo Y , ki je po faznem prostoru in po času po Lebesgueu integrabilna, in to skoraj za vsako trajektorijo. Fraza »skoraj vsaka« pri tem pomeni, da pokrivajo preostale trajektorije kvečjemu del energijske ploskve z mero nič.

Na osnovi tega ni več težko priti do odgovora na zgornje vprašanje. Najprej moramo ugotoviti, kako trajektorije ovijajo energijsko ploskev. Lahko se zgodi, da se da energijska ploskev razdeliti v dva dela (reči hočemo, na dve merljivi množici točk) s pozitivno mero, tako da je vsak del zase invarianten proti gibanju, torej, da je vsaka trajektorija samo v enem delu ploskve (nobena trajektorija ne prehaja z enega dela na drugega). Če je to mogoče, je zgornja domneva gotovo napačna. O tem se prepričamo, če izberemo funkcijo, ki ima na enem izmed omenjenih delov energijske ploskve vrednost 1 in na drugem 0. Velja pa tudi nasprotno: če ugotovimo pri kaki integrabilni funkciji, da so časovna povprečja po trajektorijah na enem delu energijske ploskve večja od povprečij na drugem delu, smo s tem že našli neko razdelitev energijske ploskve v opisanem smislu. Če torej hočemo, da je »skoraj povsod« $\overline{Y} = \langle Y \rangle_m$, moramo zahtevati, da se energijska ploskev na opisani invariantni način ne da razdeliti ali, kakor pravimo, da je gibanje točk po tej ploskvi *metrično tranzitivno*. S tem smo že nakazali vsebino tako imenovanega *Birkhoffovega ergodijskega izreka*, ki se da bolj natančno takole povedati:

Če in samo če je gibanje po energijski ploskvi metrično tranzitivno, velja za vsako po Lebesgueu integrabilno funkcijo, da je njeno časovno povprečje vzdolž »skoraj vsake« trajektorije na tej energijski ploskvi enako mikrokanoničnemu povprečju.

Žal se ni še nikomur posrečilo dokazati, da je pri sistemih, s kakršnimi se ukvarja statistična mehanika, pogoj metrične tranzitivnosti v splošnem izpolnjen. Edino to lahko trdimo s precejšnjo gotovostjo, da zahteva po metrični tranzitivnosti vsaj ni sama po sebi protislovna.

Omeniti pa je treba ob tej priložnosti, da pridemo do navideznega protislova, če se spomnimo, da ima sistem 2 s Hamiltonovih enačb razen energije še 2 s — 2 neodvisnih integralov, ki so konstantni vzdolž vsake trajektorije. Tak integral seveda ne more imeti na vseh trajektorijah iste vrednosti in nas tako po zgornjem receptu takoj pripelje do invariantnih razdelitev energijske ploskve.

Protislovje pojasnimo z ugotovitvijo, da pač v primeru metrične tranzitivnosti noben tak integral ne more biti enolična funkcija koordinat q in p . Da se v resnici lahko zgodi, da takšni integrali niso enolični, naj pokaže naslednji geometrijski zgled, ki je povzet po primeru Lissajoujevih krivulj. (Žal pa nima ta zgled s statistično mehaniko dosti zveze.) Namesto energijske ploskve vzemimo torus, po katerem naj se točke gibljejo tako, kot vелеvata enačbi:

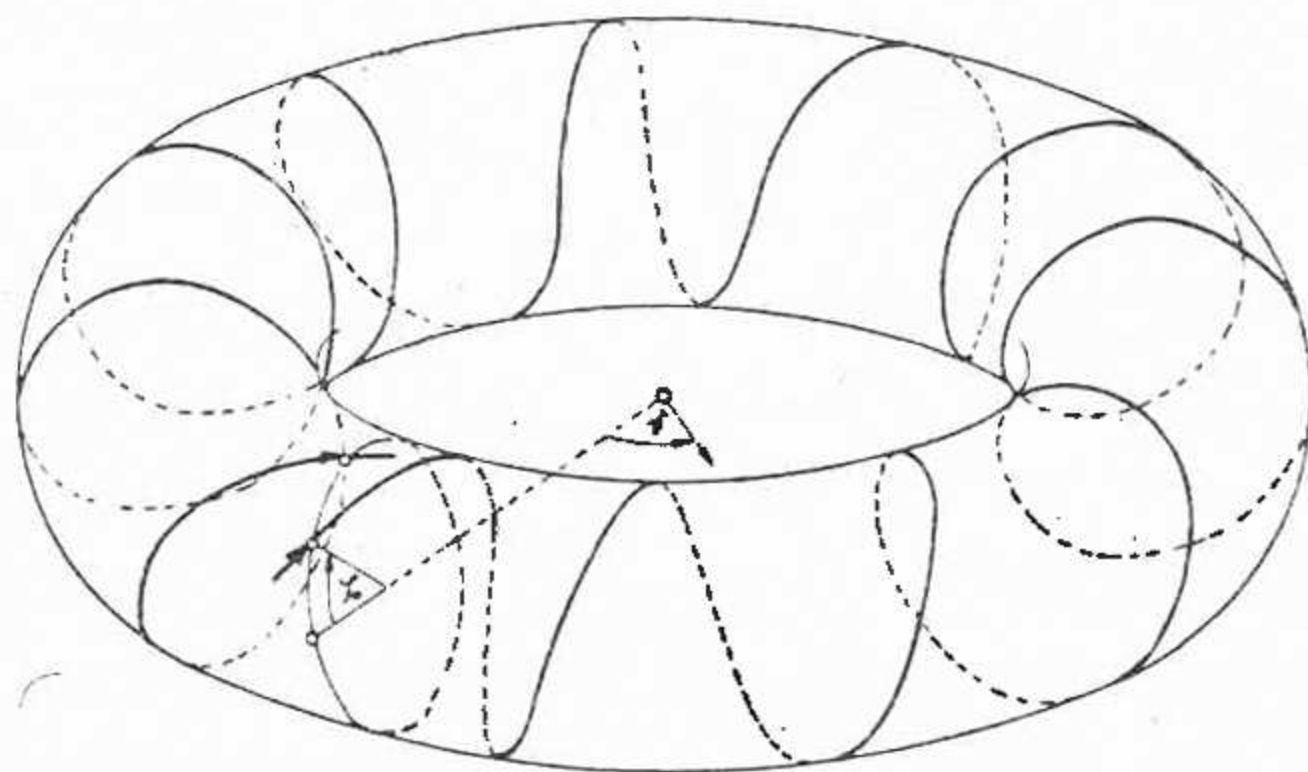
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_1 t, \quad \vartheta = \omega_2 t$$

(Glej sliko.) Trajektorije spominjajo na vijačnice in so navite na torus, podobno kot žica na jedro toroidnega transformatorja. Enačba trajektorije je

$$\varphi = \varphi_0 + k\vartheta,$$

pri čemer je $k = \omega_1/\omega_2$. Parameter $\varphi_0 = \varphi - k\vartheta$ je nekaj takega kot integral v prejšnjem primeru in predstavlja tako rekoč številko trajektorije. Ta parameter je enolična funkcija mesta na torusu očitno samo v primeru, če je k celo število. Vidimo še to, da je opisano gibanje po površini torusa metrično tranzitivno, če in samo če je k iracionalen, medtem ko se da pri racionalnem k ta ploskev metrično razstaviti v invariantne pasove.

Zadnja ugotovitev vzbuja nove domneve. Mislimo si, da je vrednost koeficienta k plod nekega naključja in da je ustrezna verjetnostna porazdelitev zvezna! Tedaj je verjetnost, da bi bilo opisano gibanje po torusu metrično tranzitivno, enaka 1, verjetnost, da bi bilo intranzitivno, pa enaka nič, kajti množici racionalnih števil ustreza mera nič. Nekateri upajo, da se bodo takšne



ugotovitve dale prenesti v statistično mehaniko.¹¹ V prostoru tistih Hamiltonovih funkcij, ki prihajajo za kak sistem v poštrev, bi bilo treba vpeljati primerno mero. Potem pa bi morali dokazati, da je verjetnost, da po nesreči zadene nemo takšno Hamiltonovo funkcijo, da je pri dani vrednosti energije gibanje na energijski ploskvi metrično tranzitivno, enaka 1. Do takega splošnega dokaza pa smo menda še daleč.

5. Hopfov ergodijski izrek

Tisti, ki jemljejo Birkhoffov izrek za osnovo klasične statistične mehanike, vidijo v mikrokanonični porazdelitvi samo matematičen trik, ki omogoča računanje časovnih povprečij — češ da so ta povprečja edini končni cilj^{10, 11}. Temu mnenju pa — podobno kot večina fizikov — ne bomo sledili, ampak se bomo vrnili na naše prvotno stališče glede verjetnostnih porazdelitev v faznem prostoru (§ 2). Zato ne bomo vpraševali samo za gibanje posamezne točke v faznem prostoru in za ustrezna časovna povprečja, ampak tudi za spremembe, ki jih v teku časa doživlja kaka verjetnostna porazdelitev, če ni ravno stacionarna.

Mislimo si, da sistem, katerega energija W je natančno znana, še ni bil dolgo sam sebi prepuščen, tako da še ni dosegel termodinamičnega ravnovesja! V trenutku opazovanja je nemara na eni strani sistema huda zgoščina, na drugi strani pa razredčina. Takega stanja ne smemo prikazati z mikrokanonično verjetnostno porazdelitvijo, ampak z neko drugo, ki na primeren način upošteva omejeno neenakomernost in vse druge informacije, ki jih morda imamo o stanju sistema. Porazdelitev vsekakor ne sme biti stacionarna, ampak nam mora ravno njeno spreminjanje nekaj povedati o opazovanih makroskopskih spremembah sistema.

Po nekem času se bo sistem umiril in dosegel termodinamično ravnovesje. Zdi se torej, da bomo stanje potem morali prikazati z mikrokanonično porazdelitvijo. Reči hočemo, da se nam zdi, da ima vsaka verjetnostna porazdelitev po energijski ploskvi lastnost, da sčasoma preide v mikrokanonično. Če je ta

domneva pravilna, je z njo uvedba mikrokanoničnih porazdelitev še dosti bolj upravičena kot z Birkhoffovim izrekom. (Le-ta govori samo o povprečjih preko neskončno dolgega časa, kar je malce huda omejitev.)

Da bomo razumeli, za kaj gre, si še enkrat pomagajmo z omenjenim barvilom, katerega porazdelitev po tanki energijski plasti naj bo spočetka neenakomerna! Zgornja domneva pravi, da se zaradi gibanja v tej plasti faznega prostora močnejše in slabše pobarvane plasti tekočine sčasoma tako premešajo, da postane porazdelitev enakomerna. Človek je (npr. po izkušnjah z malinovcem) hitro pripravljen, da sprejme takšno domnevo. Vendar ne smemo pozabiti, da v faznem prostoru ni difuzije, kot jo imamo v plinih in tekočinah. Gibanje v faznem prostoru ne more povzročiti drugega, kot da se različno pobarvane plasti razpotegnejo ali kako drugače deformirajo ter med seboj prepletejo. Resnično enakomerne porazdelitve pa na ta način ne bomo nikoli dosegli, kajti substancialni odvod koncentracije (verjetnostne gostote) je vselej nič, kot smo videli.

Da bo predstava malo bolj pravilna, vzemimo namesto tekočine testo, v katerem ni difuzije. Črno pobarvano in nepobarvano testo zmečkajmo skupaj in ga gnetimo toliko časa, da se plasti testa povsem prepletejo! Od daleč se zdi, kot da je testo potem enakomerno sivo; šele z lupo opazimo, da je v resnici sestavljeno iz zelo tankih plasti temnega in svetlega testa. Reči smemo, da smo testo »v grobem« premešali. »Finega« zmešanja pa brez difuzije ne moremo doseči.

Sedaj pričakujemo, da se neenakomernosti verjetnostne porazdelitve v faznem prostoru čez dalj časa vsaj v grobem izravnavajo. Zato, da bomo to grobo mešanje lahko matematično prikazali, si mislimo energijsko ploskev v faznem prostoru razdeljeno na majhne parcele. Znotraj vsake parcele si mislimo verjetnost enakomerno razmazano. Tako dobljeno povprečje bomo zaznamovali z $\langle \rho \rangle_{\Delta\sigma}$, pri čemer je $\Delta\sigma$ simbol za posamezno parcelo energijske ploskve. Namišljeni poskus s testom zapeljuje k domnevi, da stremi groba verjetnostna gostota v vsaki parceli proti mikrokanonični verjetnostni gostoti, $\langle \rho \rangle_{\Delta\sigma} \rightarrow \rho_m$, če $t \rightarrow \infty$.

Vendar tudi to ni čisto res! Pri gnetenju testa namreč v načelu ne moremo izključiti možnosti, da se plasti »po naključju« ne bi spet nekako odmotale (vsaj deloma), tako da bi se tudi v grobem ponovno za nekaj časa pokazale neenakomernosti. Nekaj podobnega se utegne dogajati tudi pri verjetnostni porazdelitvi v faznem prostoru. Da je strah upravičen, uvidimo najlažje, če si mislimo predznak časa obrnjen. Potem imamo obrnjeno gibanje, za katero pa ravno tako veljajo zakoni mehanike. (Ti zakoni so, kakor znano, invariantni proti obratu časa.) Obrne se seveda tudi gibanje one namišljene tekočine ali testa v faznem prostoru in sprva zavozlane različno pobarvane plasti se spet lepo odvozljajo. Porazdelitev, ki je bila sprva v grobem enakomerna, je torej postala tudi v grobem neenakomerna. Seveda se pa potem, če še nekaj časa počakamo, plasti spet zamotajo v nasprotnem smislu, tako da groba neenakomernost ponovno izgine.

Tako prihajamo končno do pravega jedra iskane domneve. Res se pri opisanem gibanju od časa do časa lahko pojavljajo grobe neenakomernosti verjetnostne porazdelitve. Toda te neenakomernosti so kratkotrajne v primeri s tistimi časovnimi intervali, v katerih je porazdelitev v grobem enakomerna.

Hopf¹³ je domnevo resneje analiziral in ugotovil, da je treba pri dokazovanju obravnavati gibanje v nekem prostoru, katerega točke ustrezajo parom

točk v faznem prostoru Γ . Novi prostor, ki ga zaznamujemo z $\Gamma \otimes \Gamma$, ima torej 4 s dimenzij, prejšnji energijski ploskvi pa ustreza tu hiperploskev s 4 s — 2 dimenzijami. Hopf je dokazal naslednji izrek:⁷⁻¹³

Če in samo če je gibanje na energijski ploskvi v prostoru $\Gamma \otimes \Gamma$ metrično tranzitivno, potem velja za poljubno začetno in po Lebesgueu integrabilno verjetnostno gostoto na energijski ploskvi v prostoru Γ , da je porazdelitev »skoraj vedno« v grobem mikrokanonična.

Fraza »skoraj vedno« naj tu pomeni, da je časovno povprečje kvadratnih odmikov grobe gostote od ustrezne mikrokanonične gostote enako nič. Hopfov izrek se torej krajše takole pove:

$$\overline{[\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta\sigma} - \varrho_m]^2} = 0$$

To velja za poljubno parcelo $\Delta\sigma$ dane energijske ploskve.

Odnos med Birkhoffovim in Hopfovim izrekom se razjasni, če za funkcijo Y , o kateri je bilo govora pri prvem izreku, vstavimo verjetnostno gostoto ϱ , potem pa tvorimo povprečje preko neke parcele energijske ploskve. Dobimo, da je

$$\overline{\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta\sigma}} = \varrho_m.$$

Birkhoffov izrek potemtakem tudi pove, da je časovno povprečje povprečne verjetnostne gostote na poljubni parceli energijske ploskve enako mikrokanonični verjetnostni gostoti (če je izpolnjen pogoj metrične tranzitivnosti).

Napak bi bilo misliti, da iz zadnje trditve že sledi Hopfov izrek. Lahko bi se namreč zgodilo, da bi vrednost $\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta\sigma}$ stalno nihala (ni nujno, da ravno periodično) okrog svojega povprečja ϱ_m , tako da bi bilo časovno povprečje kvadratnega odmika od ϱ_m , ki je zapisano v Hopfovem izreku, pozitivno. Hopfov izrek pa ravno pravi, da so ta nihanja tako redka in tako šibka, da se v povprečju čez neskončno dolg čas nič ne poznajo.

Kar se tiče zahtevanega pogoja metrične tranzitivnosti, smo žal v podobni negotovosti kot pri Birkhoffovem izreku. To je treba obžalovati, kajti če bi vedeli, da je ta pogoj izpolnjen, bi bila pot do mikrokanonične porazdelitve dokončno izglajena. Vedeli bi, da je pri kakršni koli začetni verjetnostni porazdelitvi po dovolj dolgem času porazdelitev »skoraj gotovo« v grobem mikrokanonična.

Prevedimo zadnjo trditev še v termodinamični jezik: Vedeli bi, da je izolirani sistem pri poljubnem začetnem stanju po dovolj dolgem času »skoraj gotovo« približno v ravnovesnem stanju (to se pravi v takšnem stanju, da ga opišemo z mikrokanonično verjetnostno porazdelitvijo). S to trditvijo se kaj radi sprijaznimo, ker se ujema z izkušnjami, ki jih opisuje entropijski zakon.

Samo mimogrede lahko omenimo, da nas nadaljnja razmotrivanja v nakazani smeri pripeljejo do statističnega tolmačenja entropije in do reševanja znamenitega paradoksa ireverzibilnosti. Paradoks obstoji v navideznem nasprotju med strogo reverzibilnostjo zakonov, ki veljajo za gibanje delcev, ter ireverzibilnostjo makroskopskih procesov, kjer res ni videti, da bi enaki zakoni veljali za obe smeri časa.

6. Ali lahko obidemo pogoj metrične tranzitivnosti?

Večina fizikov, zlasti mlajših, kaže do ergodijske teorije in še posebej do problema metrične tranzitivnosti očiten odpor. Če bi rekli, da je to samo politika okoli kislega grozdja, ker pač problem še ni dokončno rešen, bi pa mnogim

naredili krivico, kajti odpor ima še drug vzrok. Bravec je nemara sam začutil odpor ob zgledu z vijačnico na svitku, kjer se je vprašanje o metrični tranzitivnosti dalo prevesti na vprašanje o iracionalnosti nekega koeficienta. Če so tudi pri gibanju po energijskih ploskvah v faznem prostoru Γ ali v prostoru $\Gamma \otimes \Gamma$ razmere podobne (česar pa še ne vemo z gotovostjo), ima vprašanje o metrični tranzitivnosti zares slab privzok. Saj je to potem podobno, kot če bi vprašali, ali je kvocient obhodnih časov Zemlje in Marsa racionalno ali iracionalno število. Takšnih vprašanj se izogibamo, ker vemo, da razmerje obhodnih časov dveh planetov ni definirano z absolutno natančnostjo, tako da ni mogoče razločevati, ali je racionalno ali iracionalno. Vsakršna razmotrivanja o gibanju Marsa in Zemlje moramo pač tako prikrojiti, da se vprašnje racionalnosti ali iracionalnosti sploh ne pojavi.

Ali nimamo potemtakem tudi v ergodijski teoriji podobno dolžnost, namreč, da podvomimo, ali je vprašanje o metrični tranzitivnosti s fizikalnega vidika sploh umestno? Vsekakor smemo poskusiti, da to vprašanje nekako obidem, torej da opravičimo uvedbo mikrokanonične prazdelitve na kak drug način.

Nekaj takega je poskusil Hinčin,^{7, 11} ki je v zvezi z Birkhoffovo teorijo izrazil mnenje, da ni treba, da bi enakost časovnega in mikrokanoničnega povprečja veljala za vsako funkcijo. Po njegovem zadošča, da velja to za funkcijo z dovolj majhnim povprečnim kvadratnim odmikom od povprečja — govora je o mikrokanoničnih povprečjih. Temu pogoju ustrezajo funkcije, ki se aditivno sestavljajo iz funkcij za veliko število majhnih delov sistema. Za tak primer se mu je posrečilo, da je dokazal vsaj aproksimativno enakost obeh povprečij za »pretežno večino trajektorij«, ne da bi bil zahteval metrično tranzitivnost. Pripomniti pa je treba, da se zdi Hinčinovo stališče nekoliko preozko. Saj nas morajo včasih, npr. pri obravnavanju Brownovega gibanja, zanimati tudi količine, ki se tičejo posameznega delca ali majhnega skupka delcev.

Drugačno in prav zanimivo pot so pred kratkim iskali Albertoni, Bocchieri in Loinger,¹⁴ ki so sklepali nekako takole: Ni treba, da bi se kapricirali na neko natančno določeno začetno verjetnostno porazdelitev v faznem prostoru in da bi ravno za to porazdelitev zahtevali veljavnost Hopfovega izreka. Če dopustimo množico različnih verjetnostnih porazdelitev in če dokažemo, da velja Hopfov izrek za pretežno večino teh porazdelitev, smo morda tudi lahko zadovoljni. To bi namreč v termodinamičnem jeziku pomenilo, da je sistem, ki je spočetka v neravnovesnem stanju, po dovolj dolgem času v pretežni večini primerov v ravnovesnem stanju.

Zaznamujmo povprečje preko vseh možnih verjetnostnih porazdelitev z valovito črto, da lahko zapišemo, kar bi radi dokazali (primerjaj prej zapisani Hopfov izrek):

$$\overline{[\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta} - \varrho_m]^2} = 0.$$

Z besedami: »Skoraj vsaka« verjetnostna porazdelitev na energijski ploskvi je takšna, da je »skoraj vedno« v grobem mikrokanonična. Fraza »skoraj vsaka« zdaj pomeni, da je verjetnost, da bi po nesreči zadeli kako izjemno verjetnostno porazdelitev, za katero to ne bi veljalo, enaka nič.

Za podrobnejšo izdelavo te ideje je bilo treba vpeljati množico vseh možnih verjetnostnih porazdelitev na dani energijski ploskvi. V tej množici moramo vpeljati neko mero (zopet neko verjetnostno porazdelitev), s katero se potem računajo razna povprečja.

Pri vpeljavi množice porazdelitev in ustrezne mere so imenovani avtorji uporabili neki limitni postopek, ki pa ga ne bomo opisovali. Izkaže se, da se dajo postulati, ki določajo to mero, nadomestiti z naslednjima dvema:

1. Mera v množici vseh možnih začetnih verjetnostnih gostot $\varrho(q, p, 0)$ na dani energijski ploskvi naj bo takšna, da je povprečje preko vseh teh funkcij enako mikrokanonični verjetnostni gostoti, torej:

$$\overline{\varrho(q, p, 0)} = \varrho_m$$

2. Med vrednostmi $\varrho(q, p, 0)$ v različnih točkah naj ne bo nobene korelacije, tako da je

$$\overline{\varrho(q, p, 0) \varrho(q', p', 0)} = \overline{\varrho(q, p, 0)} \cdot \overline{\varrho(q', p', 0)} = \varrho_m^2,$$

če $(q, p) \neq (q', p')$. Pripomniti je treba, da je ta zahteva precej huda, ker pomeni, da dopuščamo, da vrednosti $\varrho(q, p, 0)$ od točke do točke kakor koli divje skačejo.

Avtorji sami omenjajo, da matematična neoporečnost omenjenega limitnega postopka še ni zatrdno zagotovljena. Če limita ni upravičena, zapisanih enačb ne smemo zapisovati za vrednosti verjetnostne gostote v posameznih točkah, ampak le za povprečja preko majhnih parcel energijske ploskve. Ko vzamemo parcele, ki so dosti manjše kot zgoraj omenjena parcela $\Delta\sigma$, se izkaže, da spodnji dokaz zaradi tega bistveno ne trpi, razen da moramo v dobljenem izreku zapisati približno enakost namesto enačaja.

Ako sta izpolnjeni zgornji zahtevi glede množice začetnih verjetnostnih porazdelitev, se da na osnovi Liouvillovega izreka hitro uvideti, da veljata obe relaciji ne samo za čas $t = 0$, ampak tudi za poljuben čas t . To nam daje pravico, da v spodnjih računih zamenjujemo časovno povprečje s povprečjem preko množice.

Do zaželenega dokaza je samo še nekaj korakov:

$$\begin{aligned} & \overline{[\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta\sigma} - \varrho_m]^2} = \\ &= \overline{\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta\sigma}^2} - 2 \overline{\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta\sigma} \cdot \varrho_m} + \overline{\varrho_m^2} = \\ &= \overline{\langle \varrho(q, p, t) \rangle_{\Delta\sigma}^2} - \varrho_m^2 = \\ &= \frac{1}{(\Delta\sigma)^2} \int_{\Delta\sigma} \int_{\Delta\sigma} \overline{\varrho(q, p, t) \cdot \varrho(q', p', t)} d\sigma d\sigma' - \varrho_m^2 = 0. \end{aligned}$$

K predzadnjemu koraku je treba še pojasniti, da smo povprečje preko parcele $\Delta\sigma$ izrazili z integralom in da smo namesto kvadrata tega integrala zapisali dvojni integral, torej integral po parceli energijske ploskve v prostoru $\Gamma \otimes \Gamma$, ter tvorili časovno povprečje pod integralskim znakom (to se pravi, da smo zamenjali vrstni red nekih integracij). Integrand je v smislu zgornje zahteve enak ϱ_m^2 , razen v točkah, kjer je $(q, p) = (q', p')$. Za te točke se pri integraciji ni treba meniti, ker pokrivajo na energijski ploskvi v prostoru $\Gamma \otimes \Gamma$ samo množico z mero nič.

Človek bi na prvi mah mislil, da je s tem dokazom ergodijski problem v klasični statistični mehaniki dokončno rešen. Vendar ne smemo pozabiti vprašati, ali rezultat res kaj pomeni. Pri tem opazimo, da v zgornji izpeljavi lahko izpustimo znamenje za časovno povprečje (ravno črto), ne da bi sklepanje kakor koli trpelo.¹⁵ Lahko vstavimo $t = 0$, če hočemo. Potem pa nam enačba, katere veljavnost smo dokazali, pove, da je »skoraj vsaka« začetna verjetnostna porazdelitev že kar takoj v grobem mikrokanična (torej ne šele v dolgem časovnem povprečju). Takšna ugotovitev pomeni, da je bila mera v množici vseh verjetnostnih porazdelitev tako nerodno izbrana, da smo množici tistih porazdelitev, ki so v grobem mikrokanične, pripisali mero (verjetnost) 1, vsem ostalim pa mero 0. S tem postane zgornji »izrek« trivialen.

Blatt¹⁶ in drugi so opozorili na to, da pridemo do končnega cilja — do opravičila za kanonične verjetnostne porazdelitve — lahko še na čisto drugačen način, namreč če se odpovemo prvotni zahtevi, da naj bo sistem idealno izoliran od okolice. Res predstavlja ta zahteva hudo idealizacijo. Saj npr. učinkov sevanja niti pri popolni izolaciji z vakuumom ne moremo povsem preprečiti. Vsak sistem je v resnici stalno deležen majhnih motenj, ki pa niso in ne morejo biti natančno znane. To ima za posledico, da življenja sistema načelno ni mogoče natančno napovedati, tudi če bi bilo začetno stanje natančno znano. Predstavlja si smemo potemtakem, da trajektorije v faznem prostoru niso ostro določene, ampak da se zaradi teh iregularnih motenj nekako razmažejo. V zgoraj omenjeni hidrodinamični prispodobi smemo reči, da te motnje povzročajo difuzijo v faznem prostoru. Difuzija pa verjetnostno porazdelitev na drobno premeša, česar samo prepletanje »tokovnic« ni zmoglo (tam je bilo govora samo o grobem mešanju). Ponuja se misel, da zaradi te difuzije vsaka začetna verjetnostna porazdelitev sčasoma preide v mikrokanično.

Domneva, natančno vzeto, ne more biti pravilna, ker sistem zaradi motenj po malem dobiva in oddaja energijo. Energija sistema torej ni strogo konstantna, ampak se tudi razmaže. Porazdelitev potem ne more več biti mikrokanična, vsaj ne natančno.

Posrečilo pa se je dokazati,¹⁶ da postane porazdelitev pri motnjah določenega tipa sčasoma kanonična, kar bi ustrezalo termodinamičnemu ravnovesju pri določeni temperaturi. Pogoji, ki naj bi jim ustrezala motnja, zato da je dokaz veljaven, pa so tako specialni, da smemo skoraj reči, da je bil rezultat že vtaknjen v podatke.

Nekatera znamenja nakazujejo, da bi se morda pri precej splošnih pogojih glede motnje dalo dokazati, da je mešanje znotraj energijske plasti dovolj hitro v primeri s prehajanjem iz ene plasti v drugo. Reči hočemo, da se po primerno dolgem času vsakršna začetna porazdelitev zaradi teh motenj tako razmaže, da znotraj posamezne energijske plasti razlike niso več zaznavne, medtem ko je razmazanost na sosednji plasti še razmeroma majhna, tako da sme porazdelitev še vedno veljati kot mikrokanična ali pa kvečjemu kot kanonična.

Tudi, če bi tak dokaz uspel, ni gotovo, da bi za vsakogar predstavljal zadovoljivo opravičilo za vpeljavo mikrokanične in kanonične porazdelitve. Ideja, da vnesemo neko apriorno nedoločenost v sicer deterministične zakone, s tem da se izgovorimo na neznane zunanje motnje, ima odločne nasprotnike, med katerimi je Rosenfeld posebno oster.¹⁷ Z matematičnimi dokazi tu ni mogoče odpraviti vseh razlik v mnenjih, ker so, kot rečeno, vpletene tudi stvari, ki so prepuščene okusu in prosti presoji.

ERGODIC THEORY IN CLASSICAL STATISTICAL MECHANICS

(Summary)

Classical ergodic theory is reviewed, and the present uncertainty with respect to the conditions of metric transitivity explained. Attempts^{7, 14, 15} to circumvent these conditions and to find other ways for the justification of microcanonical probability distributions are discussed.

Khinchine's approach^{7, 11} of restricting the class of permitted phase functions to those of small microcanonical dispersion is considered to be too narrow, as it appears that not all functions which might be of interest are included.

A different way is that of Albertoni, Bocchieri and Loinger,¹⁴ who introduced a measure in the space of all possible probability density functions, defined upon some energy shell in phase space. These authors proved that »almost every« probability distributions is »almost allways« microcanonical in the coarse grained sense. However, it turns out that the measure used is such that a measure 1 (or almost 1) is attached to the set of initial probability distributions which are coarsely microcanonical, and a measure zero (of almost 0) to the set of all other distributions. This makes the stated theorem meaningless.

The attempts of Blatt¹⁶ and others to bring about the necessary mixing in phase space by taking account of external disturbances seem to require some generalization, as only disturbances of a special character have been considered so far. Of course such a generalization would not remove the more fundamental objections raised by Rosenfeld¹⁷ against such an approach.

L i t e r a t u r a :

1. R. C. Tolman: *The Principles of Statistical Mechanics*. Oxford 1938.
2. D. ter Haar: *Elements of Statistical Mechanics*. New York (Holt, Rinehart and Winston) 1954.
3. A. Münster: *Statistische Thermodynamik*. Berlin etc. (Springer) 1956.
4. A. Münster: *Prinzipien der statistischen Mechanik*. Handbuch der Physik, III/2. Berlin etc. (Springer) 1959.
5. I. Supek: *Teorijska fizika*. Zagreb (»Školska knjiga«) 1951.
6. H. Goldstein: *Classical Mechanics*. Reading, Mass. (Addison-Wesley) 1951.
7. A. J. Khinchin (Hinčin): *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*. (Prevod.) New York (Dover Publications) 1949.
8. L. Rosenfeld: *Mécanique Statistique*. École d'Été de Physique Théorique. Les Houches, 1952. — *On the Foundations of Statistical Thermodynamics*. Acta Phys. Polonica, 14, 3 (1955).
9. D. ter Haar: *Foundations of Statistical Mechanics*. Rev. Mod. Phys., 27, 289 (1955).
10. C. Truesdell and D. Morgenstern: *Neuere Entwicklungen in der klassischen statistischen Mechanik und in der kinetischen Gastheorie*. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 30, 286 (1958).
11. C. Truesdell: *Ergodic Theory in Classical Statistical Mechanics*. Enrico Fermi Summer School, Varenna, 1960.
12. P. Cardiola: *Recenti sviluppi dei metodi ergodici nella meccanica statistica*. Nuovo Cimento Suppl. (X) 16/1, 50 (1960).
13. E. Hopf: *Ergodentheorie*. Berlin (Springer) 1937.
14. S. Albertoni, P. Bocchieri and A. Loinger: *New Theorem in Classical Ensemble Theory*. J. Math. Phys., 1, 244 (1960).
15. J. S. Lomont: *Note on the Albertoni-Bocchieri-Loinger Theorem of Classical Statistical Mechanics*. J. Math. Phys., 2, 858 (1961).
16. J. Blatt, *Progr. Theor. Phys.*, 22, 745 (1959).
17. L. Rosenfeld: *Questions of Irreversibility and Ergodicity*. Enrico Fermi Summer School. Varenna, 1960.

✓ TEORIJA SUPRAPREVODNOSTI*

LEON N. COOPER

Brown University, Providence, Rhode Island

Prevedla Seta Oblak

I. Uvod

Pri tem, ko profesor Boorse¹ opisuje značilne pojave pri supraprevodnikih, nas nekaj močno preseneti. Kljub kompleksnosti in raznolikosti kovin, pri katerih pride do prehoda v supraprevodno fazo, je sam način, kako se prehod pojavi, pri vseh kovinah zelo preprost. To nam daje upanje, da bi lahko vsaj kvalitativno razložili pojav supraprevodnosti, ne da bi upoštevali podrobnosti v strukturi kovin. Te možnosti smo lahko veseli, ker imajo kovine, ki postanejo supraprevodne, zelo zapleteno strukturo.

V tem članku bomo obravnavali poenostavljen model kovine brez vsakršne zamotanosti v njeni strukturi. To je morda najpreprostejši model kovine, ki vsebuje tako normalne kot supraprevodne lastnosti. Seveda ne pričakujemo, da bomo dobili te lastnosti že brez nadaljnjih popravkov eksplicitno odvisne od podrobnosti v kovinski strukturi. Zadovoljni bomo, če bomo dobili take kvalitativne lastnosti, kot jih ima idealen supraprevodnik. Mnenja smo, da je obstoj supraprevodne faze splošna lastnost sistema, ki je skupen vsem kovinam, to je lastnost gostega, močno degeneriranega elektronskega plina, čigar sestavni delci vplivajo eden na drugega. Komplikacije, ki nastopajo zaradi različnih podrobnosti v kovinski strukturi, pri kvalitativni razlagi lahko zanemarimo.

Videti je, da lastnosti tega gostega, močno degeneriranega plina valenčnih elektronov v kovini pri navadni temperaturi dobro razumemo. Rešitve Schrödingerjeve enačbe za periodični potencial, ki ga ustvarjajo mirujoči ioni v negativno nabitem ozadju valenčnih elektronov, nam dajo energijske pasove in enoelektronske Blochove valovne funkcije. Elektroni se prosto gibljejo v kovini in se sipljejo le na fononih in nečistočah. Skoraj vedno lahko uspešno uporabljamo pri računanju teorijo motenj in Blochove valovne funkcije.

Vendar pa pri nizkih temperaturah ta slika očitno popolnoma odpove pri vseh kovinah in zlitinah, ki postanejo supraprevodne. Pri kritični temperaturi se pojavi fazna sprememba. Nova faza ima spremenjene tiste električne in termične lastnosti, ki jih določajo valenčni elektroni. Čeprav ima kristalna mreža gotovo svojo vlogo pri določanju temperature prehoda, pa se zdi, da sama pri prehodu v supraprevodno stanje ostane nespremenjena. Številne preiskave supraprevodne faze so pokazale, da moramo med drugi pričakovati, da so korelacije med elektroni tako močne, da nam enoelektronske Blochove funkcije ne dajo več dobrega opisa. Nadalje je znano, da je kondenzacijska energija, ki je potrebna, da prevedemo kovino iz supraprevodnega stanja nazaj v normalno, izredno majhna v primeri s Fermijevo energijo elektronov. Razmerje kondenzacijske energije proti Fermijevi energiji bi bilo za tipično kovino velikostnega reda 10^{-8} .

* Delo na tem področju je deloma podpirala U. S. Atomic Energy Commission. Pričujoči članek je vsebina govora na letnem shodu AAPT v New Yorku, 31. jan. 1958. Izšel je v American Journal of Physics, Vol. 28, No. 2, 91—101, febr. 1960.

¹ H. A. Boorse, Am. J. Phys. 27, 47 (1959).

V tem članku bomo skušali prikazati osnovne ideje in deloma tudi zgradbo in posledice teorije supraprevodnosti, ki so jo pred kratkim predlagali J. Baarden, J. R. Schrieffer in avtor tega članka.² Nadalje bomo poizkušali vsaj kvalitativno razložiti nekatere pojave, ki jih je opisal profesor Boorse.

II. Kovina v normalnem stanju

V Blochovi teoriji kovin³ v normalnem stanju so prevodni elektroni med seboj neodvisni. Blochov teorem pravi, da so enoelektronske valovne funkcije posameznega elektrona v periodičnem potencialu kristalne mreže in samih prevodnih elektronov modulirani ravni valovi:

$$\varphi_K(\xi) = U_k(\xi) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1)$$

kjer je $K \equiv \mathbf{k}, \sigma$. Valovni vektor elektrona je $\mathbf{k}$, njegovo spinsko stanje pa označuje σ . Postorske in spinske koordinate so $\xi = \mathbf{r}, s$. $U_k(\xi)$ je spinor s periodičnostjo kristalne mreže. Zaradi Paulijevega izključitvenega principa mora biti valovna funkcija več elektronov antisimetrična v vseh koordinatah. To pomeni, da ne moreta biti dva elektrona v istem Blochovem stanju $\varphi_K(\xi)$, oziroma, da lahko valovno funkcijo več elektronov zapišemo takole:

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\text{permutacije } \xi_1 \dots \xi_N} (-1)^P \varphi_{K_1}(\xi_1) \dots \varphi_{K_N}(\xi_N) \quad (2)$$

Energija celotnega sistema je potem

$$W = \sum_{i=1}^N E_i \quad (3)$$

kjer je ε_i Blochova energija i -tega stanja posameznega elektrona. Sistem ima najnižjo energijo, kadar je najnižjih N Blochovih stanj zasedenih. V prostoru gibalne količine si lahko to predstavljamo kot zasedeno Fermijevo kroglo. V našem najpreprostejšem možnem modelu kovine si bomo predstavljali, da je Fermijeva ploskev izotropna in da je daleč od vrha kateregakoli pasu. Pri valovni funkciji za osnovno stanje (2) ni nobene korelacije med elektroni z nasprotnim spinom, med tistimi z enakim spinom pa je le statistična. (Edina korelacija med elektroni je skrita v splošni zahtevi po antisimetriji totalne valovne funkcije.)

Veliko število posameznih delcev je v vzbujenih stanjih, ki se zelo malo razlikujejo v energiji od osnovnega stanja. Ta stanja lahko opišemo z enako valovno funkcijo kot osnovno stanje, samo da enoelektronsko stanje posameznega elektrona $k_i < k_F$ zamenjamo z drugim $k_j > k_F$. V prostoru gibalne količine lahko to opišemo z nastankom vrzeli pod Fermijevo ploskvijo. Istočasno se rodi vzbujen elektron z energijo, ki je malo večja od Fermijeve (Glej sliko 1!). Energijska razlika med osnovnim stanjem Φ_0 in vzbujenim $\Phi_{i,j}$ je

$$E = E_j - E_i = \varepsilon_j - \varepsilon_i = |\varepsilon_j| + |\varepsilon_i| \quad (4)$$

Zaradi prikladnosti smo definirali energijo z oziroma na Fermijevo: $\varepsilon_i = E_i - E_F$. Ker je teh stanj, vzbujenih z zelo majhno energijo, veliko, se približuje elek-

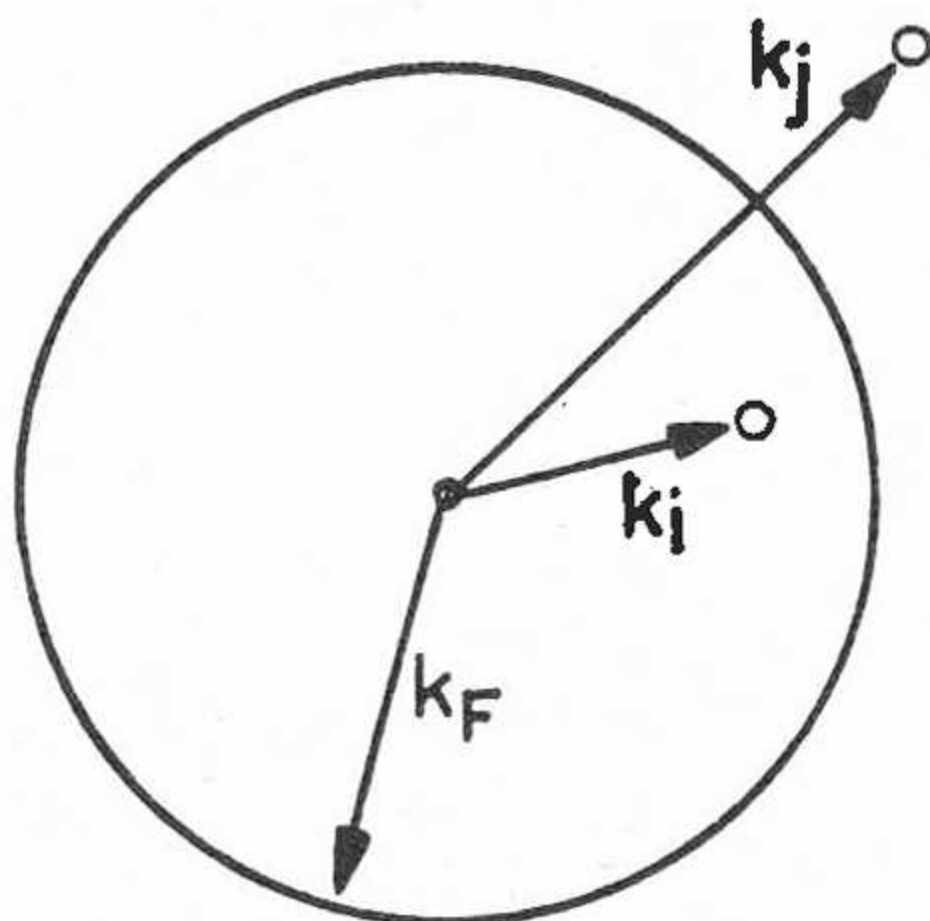
² Baarden, Cooper in Schrieffer, Phys. Rev. 108. 1175 (1957).

³ F. Bloch, Z. Physik 52. 555 (1928).

tronska specifična toplota (ki je merilo za število načinov, kako se more določena količina energije porazdeliti med elektrone) ničli kot linearna funkcija temperature, kot je omenil profesor Boorse.

Da bi razumeli električno upornost, se moramo spomniti, da pomeni vsako odstopanje od popolne kristalne mreže, za katero so bila izpeljana Blochova stanja, motnjo, na kateri se lahko sipljejo Blochovi valovi. Nepravilnosti se delijo v dve kategoriji: v statične in dinamične. Statične nepravilnosti so: nečistoče in defekti v kristalni mreži, dinamične pa povzročajo nihanje mrežnih ionov okrog ravnovesnih položajev.

Število nečistoč ali mrežnih defektov ni odvisno od temperature in prispeva k električnemu upor, ki je prav tako neodvisen od temperature. Mrežna nihanja pa so nasprotno odvisna od temperature mreže in zato prispevajo



Sl. 1. Vzbujeno stanje v normalni kovini nastane, če elektron zasede stanje k_j , $k_j > k_F$, in pusti za sabo vrzel k_i , $k_i < k_F$.

k električni upornosti del, ki je odvisen od temperature. Če mrežna nihanja prevedemo v normalna nihanja oziroma če jih kvantiziramo, jih lahko obravnavamo kot zvočne valove ali fonone. V bistvu pomenijo val spremembe pritiska, ki potuje skozi kovino.

Oba gornja sipalna mehanizma povzročata upor na enak način; povzročata namreč procese, pri katerih se posamezni elektroni sipljejo iz enega stanja gibalne količine v drugo. Zato se hitro uniči vsako stanje, ki nosi tok, če ni več polja, ki ga je povzročilo. Bistvena lastnost suprafluidnosti (elektronskega ali takega drugega toka) je, da so strogo prepovedani procesi, ki zadevajo posamezen delec, tako da ostanejo urejena stanja, na primer taka, ki nosijo tok še takrat, ko zunanji polj ni več.

III. Elektronske korelacije in interakcija, ki povzroča supraprevodnost

Če se vprašamo, kakšna je verjetnost $\rho^{\uparrow\downarrow}(r)$, da najdemo v kovini v normalnem stanju elektron s spinom obrnjenim navzdol v razdalji r od drugega elektrona, ki ima spin obrnjen navzgor, dobimo takle rezultat:

$$\rho^{\downarrow\uparrow}(r) = \frac{1}{4} n^2, \quad (5)$$

kjer je n gostota elektronov. Torej je verjetnost, da najdemo elektron $2\uparrow$ v razdalji r od elektrona $1\downarrow$, ne da bi kaj upoštevali, kje je ostalih 3 do N elektronov, kar je gostota elektronov s spinom $\uparrow$. To pomeni, da med elektroni z nasprotnim spinom v normalnem stanju ni korelacije. Za isti spin obstoja sicer korelacija,

vendar pa samo zato, ker ne moreta biti dva elektrona v istem stanju. S tem se ne bomo dalj ukvarjali. Lastnosti v normalnem stanju lahko izpeljemo iz eno-elektronskih valovnih funkcij, med katerimi ni korelacij.

Prav v tem oziru pa je supraprevodnost drugačna. Pričakujemo, da bomo za opis supraprevodne faze potrebovali valovnih funkcij, ki bodo odvisne ena od druge. Izkaže se, da so pomembne prav korelacije med elektroni z nasprotnim spinom.

Zdaj se vprašamo, kaj bo povzročilo korelacijo med elektroni. Odgovor je, da bodo elektroni medsebojno odvisni, če med sabo interagirajo; na primer, če bi bil med dvema elektronoma zelo močan medsebojen odboj, bi se nikoli močno ne približala eden drugemu. Prav te korelacije smo pri opisu kovin v normalnem stanju zanemarili. Očividno je to upravičeno pri normalni temperaturi. Nasprotno pa je pri zelo nizkih temperaturah jasno, da lahko sistem pridobi energijo, če preide v stanje z močno korelacijo. Prav to stanje z močno korelacijo pa želimo dobiti.

Katere interakcije med elektroni naj upoštevamo? To je bil vedno težak problem, ker je med elektroni v kovini interakcij veliko. Dejansko je interakcijska energija večine teh interakcij, na primer Coulombske, veliko večja, kot jo v resnici opazimo pri prehodu v supraprevodno fazo. Korelacijska energija zaradi Coulombskega odboja je na primer velikostnega reda 1 eV na atom, medtem ko je energija, ki jo pridobi sistem pri prehodu v supraprevodno fazo, reda 10^{-8} eV na atom. Torej pričakujemo, da je le del korelacijske energije odgovoren za kvalitativno spremembo, ki se pojavi v valovni funkciji pri prehodu v supraprevodno fazo.

Kot je povedal profesor Boorse¹, je šele odkritje izotopskega efekta⁴ nakazalo teoretikom, katera interakcija je važna za pojav supraprevodnosti. Opazili so, da je temperatura prehoda v supraprevodno fazo odvisna od mase ionov, ki sestavljajo kristalno mrežo:

$$T_c \sqrt{M} = \text{konst.} \quad (6)$$

Zakaj naj bi bilo tako, ko ne bi interakcija, ki povzroča supraprevodno stanje, na neki način vsebovala dinamike gibanja ionov oziroma fononov. Iz enačbe (6) vidimo, da bi bila temperatura prehoda enaka nič, če bi bila masa ionov neskončna oziroma če bi bila kristalna mreža res negibno pritrjena. To nam močno vsiljuje misel, da je končna temperatura prehoda posledica končne vztrajnosti ionov. Fröhlich⁵ in Bardeen⁶ sta opozorila na to, da bi lahko na elektrone, na katere vpliva že nihanje mreže in povzroča električen upor, delovalo tudi virtualno nihanje mreže, nekakšna »lastna energija«⁶ elektronov v kovini. Ta lastna energija, pravijo, bi bila sorazmerna kvadratu povprečne energije fononov. To bi dalo izotopski efekt. Vendar jim pri računanju posledic obstoja take lastne energije ni uspelo dobiti faze, ki bi imela kvalitativne lastnosti supraprevodnikov.

Videti je, da povzroča supraprevodnost interakcija elektronov z mrežnim nihanjem. Vendar je to pravzaprav interakcija med dvema elektronoma, ki jo omogočijo mrežna nihanja. Kadar elektron trči v nihajočo mrežno točko

⁴ E. Maxwell, Phys. Rev. 78. 477 (1959); Reynolds, Serin, Wright in Nesbitt, Phys. Rev. 78, 487 (1950).

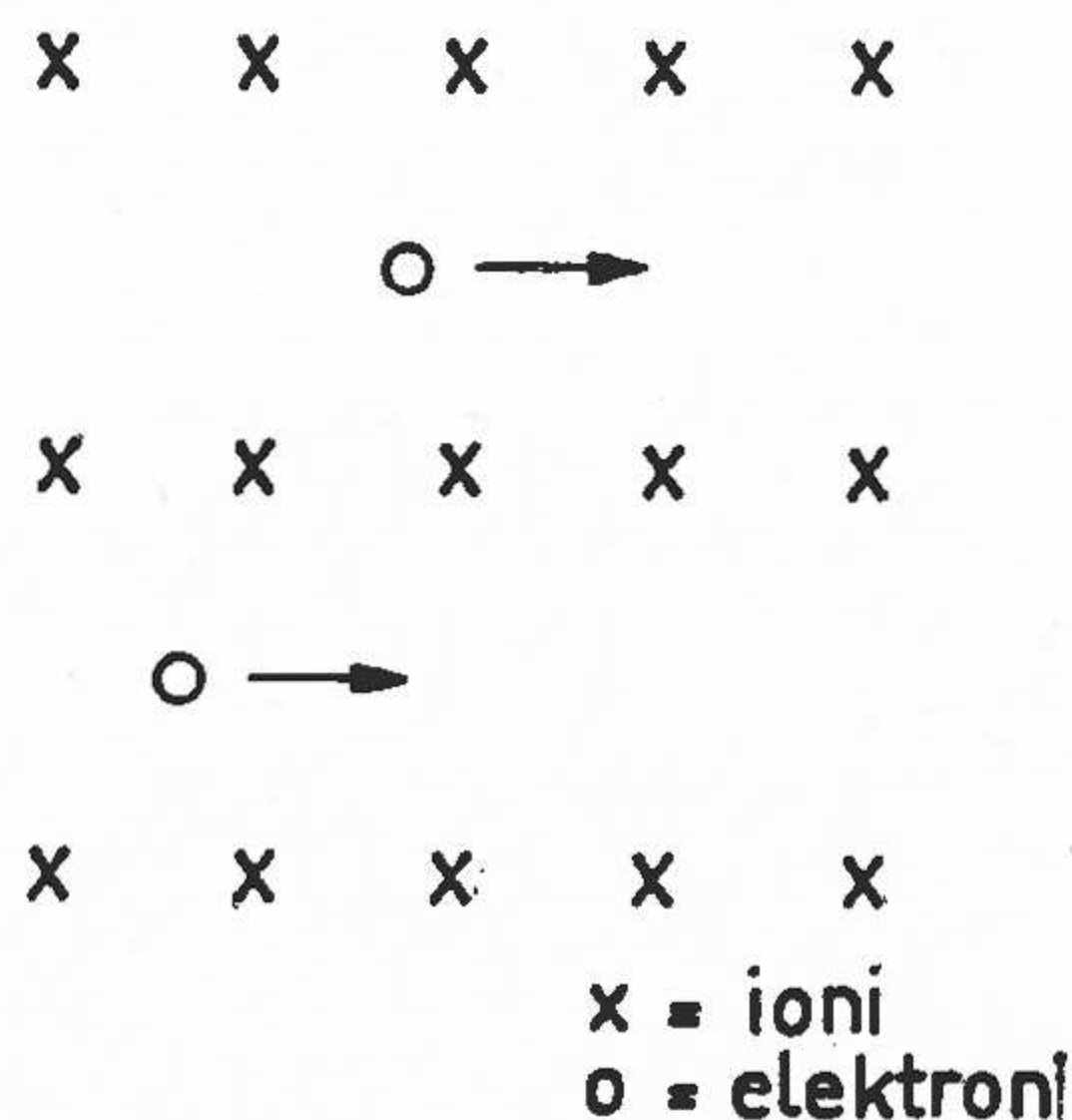
⁵ H. Fröhlich, Phys. Rev. 79, 845 (1950).

⁶ J. Bardeen, Phys. Rev. 79, 167 (1950).

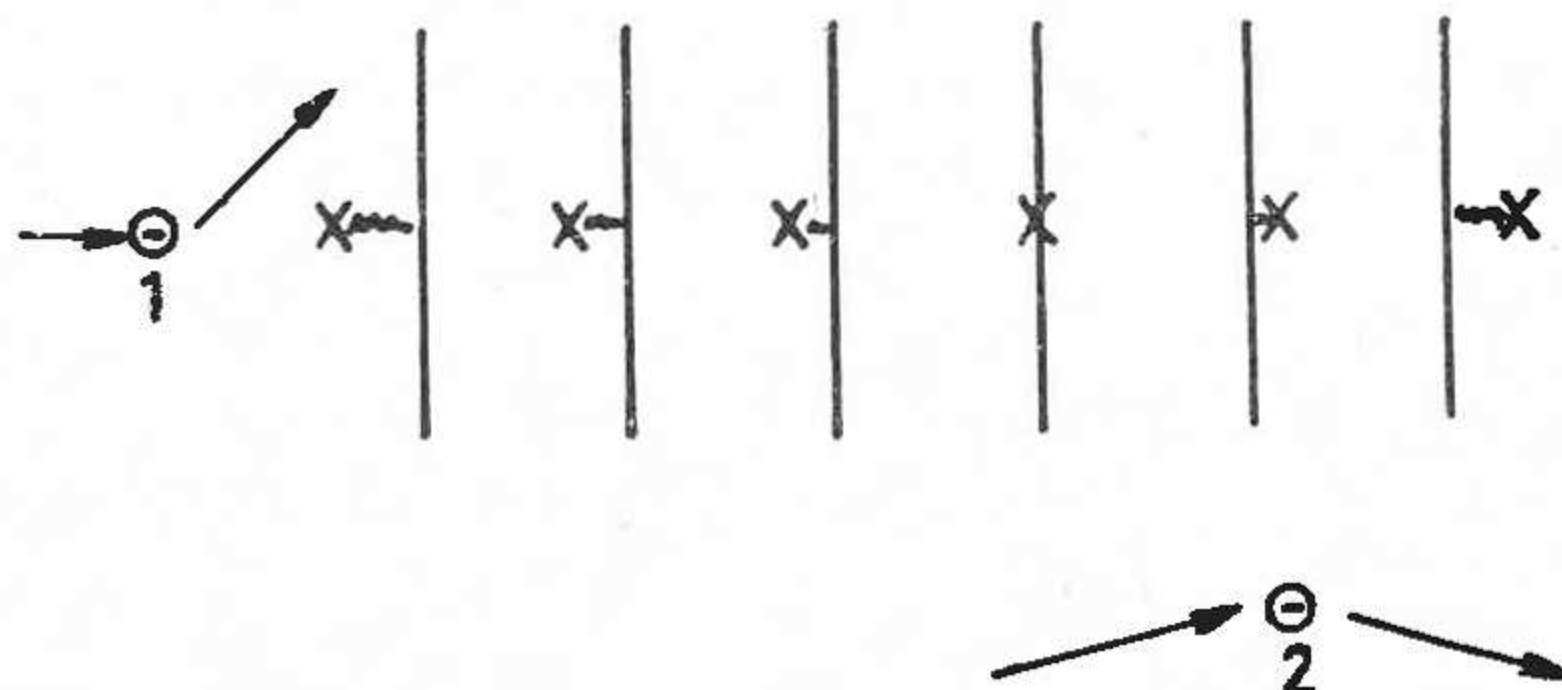
oziroma v mrežni val, se lahko siplje. To sipanje povzroča upor. Pri $T = 0$ mreža ne niha in tisti del upora, ki ga povzročijo fononi, gre proti nič. Vendar je še možno, da elektron vzbudi virtualen mrežni val. Tak virtualni fonon lahko vpliva na drug elektron in s tem povzroči interakcijo med elektronoma.

V jeziku, ki ga uporablja teorija polja, lahko rečemo: če obstoja interakcija med elektroni in prostimi fononi fononskega polja (ki povzroča električen upor), bo obstojala interakcija med elektroni tudi pri absolutni ničli in to neodvisno od števila prisotnih prostih fononov. Interakcija je možna zaradi izmenjave virtualnih fononov. Ta pojav je analogen pojavu v kvantni elektrodinamiki.

V kvantni elektrodinamiki se lahko foton siplje na elektronu. Za to je seveda potrebno obsevati elektrone s svetlobo, s fotoni. Po drugi strani pa je Coulombski potencial med dvema elektronoma, ki ni odvisen od prisotnosti prostih fotonov, posledica izmenjave virtualnih fotonov.



Sl. 2. Dva elektrona nemoteno potujeta po popolni kristalni mreži, ki ima neskončno težke ali negibno pritrjene ione.



Sl. 3. Interakcija med dvema elektronoma v mreži, ki ima ione s končno vztrajnostjo in ne negibno pritrjene. Mrežni val, ki ga povzroči prvi elektron, vpliva na drugi elektron. Oba se odklonita s prvotne smeri.

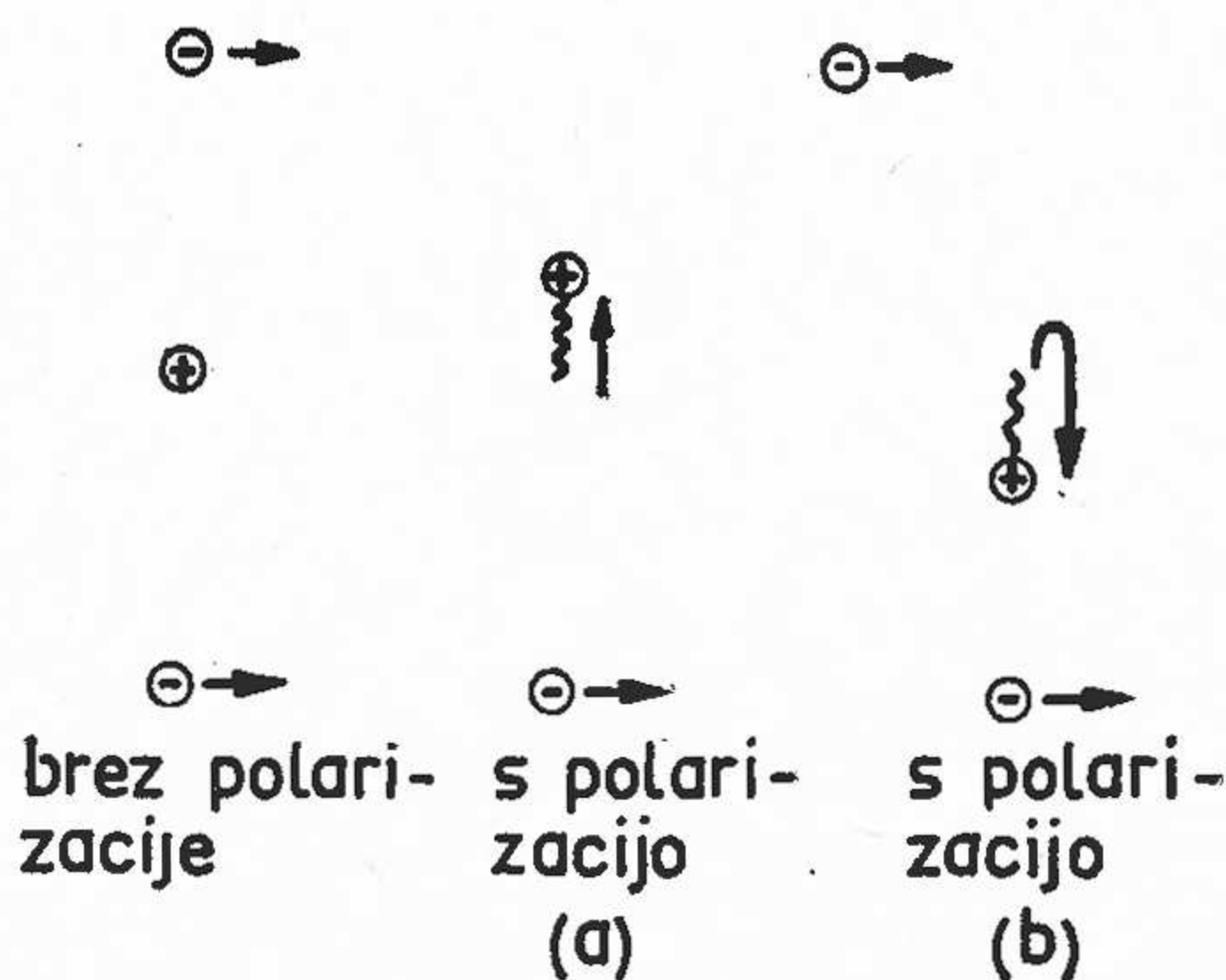
Interakcijo med elektroni, ki nastane z izmenjavo virtualnih fononov, si lahko klasično predstavljamo takole: Kadar potuje elektron skozi mrežo, ki nima neogibno pritrjenih oziroma neizmerno težkih mrežnih točk, se mreža popači ali polarizira. Naslednji elektron, ki bo potoval skozi polarizirano mrežo, ne bo čutil več prvotnega periodičnega potenciala, ki ga uporabljamo pri izpeljavi Blochovih valovnih funkcij, ampak popačeni potencial, zato ker je mreža polarizirana. Popačenje potenciala je funkcija kraja in časa in povzroči zakasnelo interakcijo med dvema elektronoma. Ta interakcija bi izginila, ko bi bila prožnostna konstanta ionskih vezi zelo velika oziroma ko bi bila masa ionov neskončna. Nadalje je odvisno od fazne razlike med elektronoma, ali bo ta interakcija privlačna ali odbojna. (Glej sl. 2, 3 in 4!)

Druga interakcija med elektroni v kovini, ki je zelo pomembna pri teoriji supraprevodnosti, je Coulombski odboj kratkega dosega. Coulombske sile z dolгим dosegom navadno zasenčijo ostali elektroni, kot sta nakazala v svojem delu Bohm in Pines.⁷ Pri zelo kratkih razdaljah pa, ko si dva elektrona tako rekoč stojita nasproti in ni vmes nobenih drugih elektronov, je Coulombski odboj

⁷ D. Bohm in D. Pines, Phys. Rev. 92, 609 (1953).

e^2/r občuten. Ti dve interakciji med elektroni v kovini, ki smo ju zanemarili pri osnovni sliki, bomo uporabili, da uvedemo korelacije med elektroni.

Pri korelacijah, ki jih povzročijo medsebojne interakcije elektronov, kot smo jih omenili zgoraj, se bomo nadalje omejili na korelacije med dvema delcema in zanemarili tiste med tremi, štirimi in več elektroni. To pa ne zato, ker bi mislili, da drugih korelacij ni, ampak ker nam omejitev na korelacije med dvema delcema olajša račun. Upamo, da bodo morda korelacije med dvema delcema zadoščale za ugotovitev kvalitativnih lastnosti supraprevodnosti, tako kot so nam popolnoma neodvisne valovne funkcije dovolj dobro pojasnile lastnosti normalnih kovin.



Sl. 4. Interakcija med dvema elektronoma zaradi polarizacije mreže je lahko privlačna ali odbojna. To je odvisno od razlike v fazi obeh elektronov. V primeru (a) je interakcija odbojna, v primeru (b) privlačna.

Kakšne naj bodo korelacije med dvema delcema, ki jih povzročajo zgoraj omejene interakcije? Napišimo korelacijsko funkcijo za delce z nasprotnim spinom, ki je bila pri kovini v normalnem stanju konstantna, v obliki:

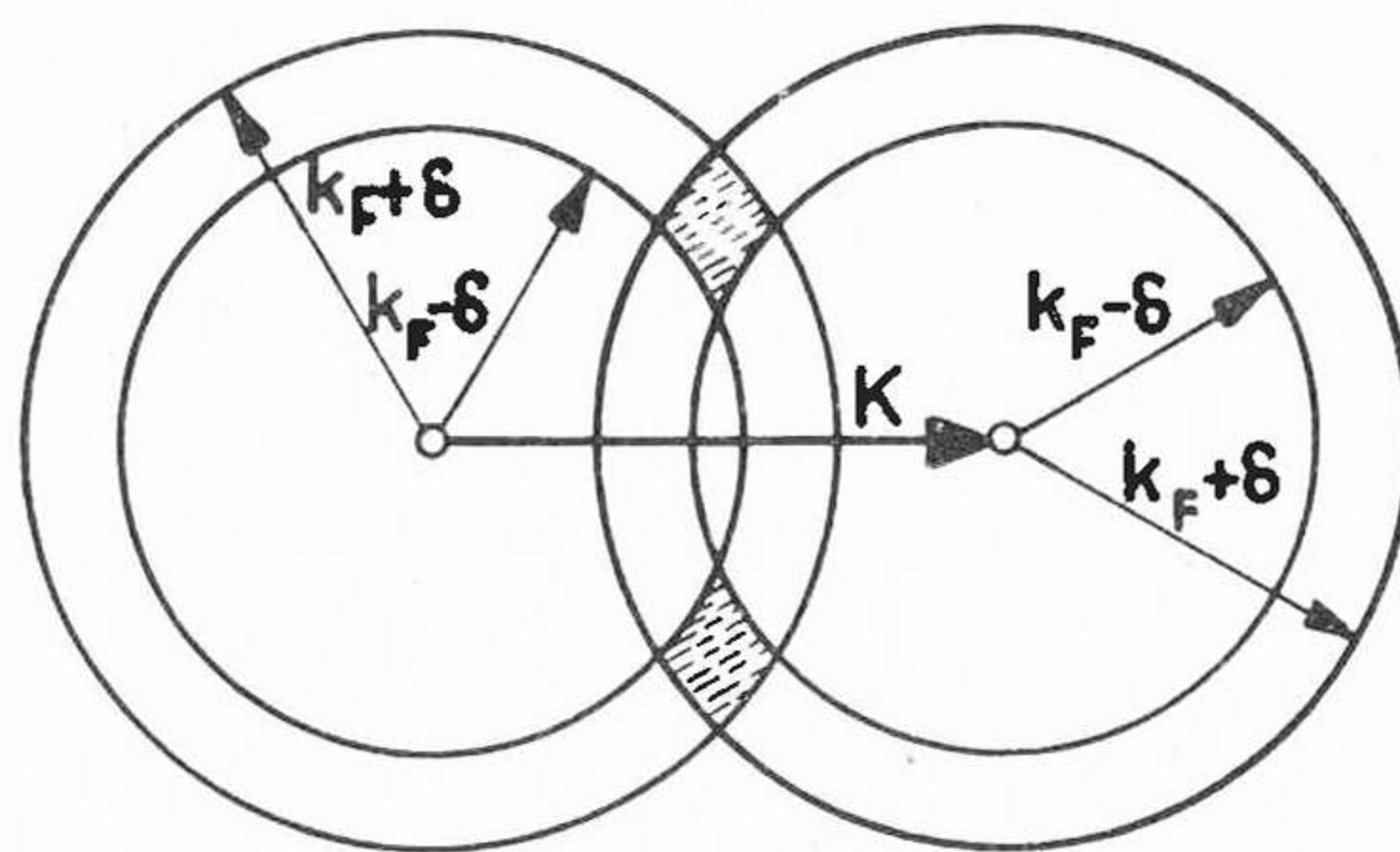
$$\rho^{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{4} n^2 + f(\mathbf{r}, \mathbf{K}) \quad (7)$$

kjer je $f(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ dodatna korelacija, ki jo povzročajo interakcije med elektroni, $\mathbf{r}$ je radij vektor, ki veže dvojico elektronov, in $\mathbf{K}$ je totalna gibalna količina obeh elektronov.

Da bi razumeli, zakaj nekateri elektroni zelo močno interagirajo, drugi pa ne, se vrnimo k opisu valovne funkcije osnovnega stanja v prostoru gibalne količine. Zaradi enostavnosti naj bodo Blochove funkcije $\varphi_{\mathbf{K}}(\xi)$ ravni valovi.

Videli smo, da v osnovnem stanju zasedajo elektroni vsa stanja do Fermijeve ploskve. Zgoraj opisane medelektronske interakcije so po Fermijevi ploskvi šibke in se počasi spreminjajo. To in dejstvo, da je sprememba energije pri prehodu v supraprevodno stanje majhna, nam daje misliti, da bodo stanja s korelacijo nastopila pri posameznih vzbujenih delcih le v tanki lupini blizu Fermijeve ploskve. Če se omejimo na korelacije elektronskih parov, nas bo zanimala interakcija, ki bo spravila elektronski par iz enega stanja v drugo v lupini blizu Fermijeve ploskve. Ker se mora ohraniti totalna gibalna količina elektronskega para, je jasno, da je tisti del faznega prostora, kjer je možen

prehod iz enega stanja v drugo pri dani totalni gibalni količini, zelo odvisen od totalne gibalne količine K (sl. 5) in doseže maksimum, kadar je celotna gibalna količina $K = 0$. Nadalje se pokaže, da je zaradi izmenjalnih členov v matričnih elementih elektronske interakcije efektivna interakcija med elektroni s singletnim spinom veliko močnejša kot interakcija med elektroni s tripletnim spinom. Zato se bomo bolj zanimali za korelacije pri singletnem spinu. Nadalje vidimo, da dobimo največjo korelacijo valovne funkcije, kadar imajo vse korelacije parov isto totalno gibalno količino. To da celotni valovni funkciji zanimivo koherenco. Zaradi kombinacije dinamičnih in statističnih vzrokov so veliko močnejše korelacije parov z gibalno količino enako nič in singletnim spinom, zaradi samih statističnih razlogov pa so prav tako veliko močnejše korelacije parov z isto totalno gibalno količino.



Sl. 5. Črtkano področje je presek faznega prostora, kjer se lahko elektronski par, ki ima gibalno količino k omejeno na krogelno lupino $k_F - \delta \leq k \leq k_F + \delta$, siplje tako, da se ohrani totalna gibalna količina K . Volumen faznega prostora, kjer je tako sipanje možno, ima oster maksimum pri $K = 0$.

Osnovna aproksimacija BCS teorije supraprevodnosti leži v domnevi, da so prav korelacije dveh delcev odgovorne za kvalitativne lastnosti supraprevodnosti in da imajo pri teh korelacijah največjo utež pari, pri katerih je totalna gibalna količina enaka nič in ki imajo singleten spin. Ta utež je tako velika, da dobimo ustrezen opis supraprevodnosti že z upoštevanjem samih korelacij med temi delci.

IV. Osnovno stanje supraprevodnika

S to aproksimacijo lahko zapišemo dodatno energijo, ki jo dobimo z upoštevanjem korelacij parov v valovni funkciji. Ta je dana z

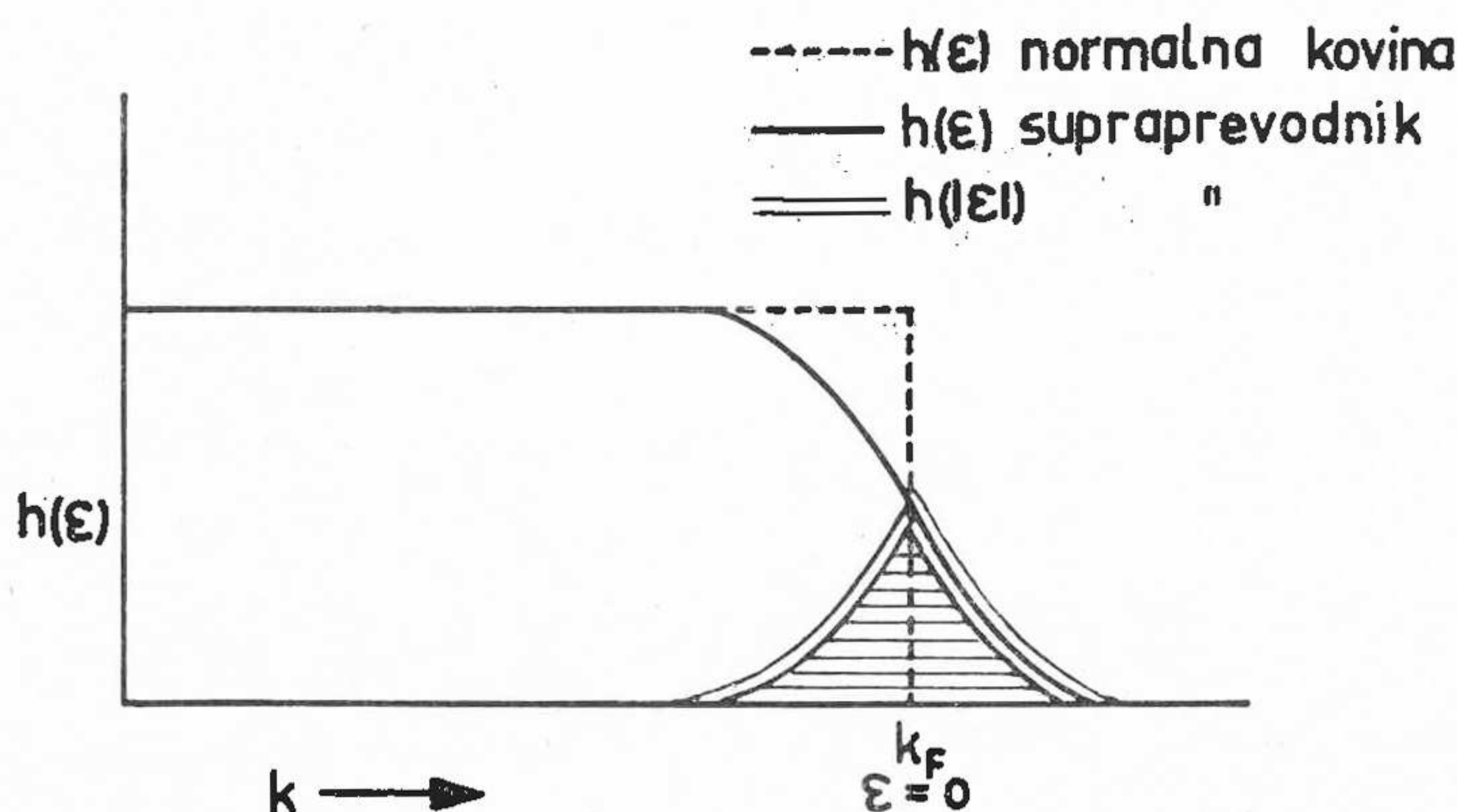
$$W_c = 2 \sum_{-\hbar\omega < \varepsilon < 0} |\varepsilon| (1 - h(\varepsilon)) + \sum_{\hbar\omega > \varepsilon > 0} 2\varepsilon h(\varepsilon) - V \sum_{|\varepsilon|, |\varepsilon'| \leq \hbar\omega} \{ h(\varepsilon) [1 - h(\varepsilon)] h(\varepsilon') [1 - h(\varepsilon')] \}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

kjer je $h(\varepsilon)$ verjetnost, da je zasedeno energijsko stanje para ε (sl. 6). 2ε je energija para z oziroma na Fermijevo ploskev $\varepsilon = E - E_F$. Matrični element med Blochovima stanjema parov z relativnima gibalnima količinama $\mathbf{k}$ in $\mathbf{k}'$ je V . Zaradi enostavnosti smo privzeli, da je matrični element interakcije $\langle \mathbf{k}' | H_1 | \mathbf{k} \rangle$ med stanji parov z relativno gibalno količino $\mathbf{k}$ in $\mathbf{k}'$ konstanta enaka $-V$ za $|\varepsilon|, |\varepsilon'| \leq \hbar\omega$ (povprečna energija fonona), drugod pa nič. Pri tem smo vzeli, da je Fermijeva površina izotropna, tako da je h samo funkcija ε .

Prva dva izraza povesta povečanje kinetične energije zaradi tega, ker smo vključili v valovno funkcijo stanja posameznih delcev s $k > k_F$. Tretji izraz nam da spremembo potencialne energije zaradi korelacij, ki smo jih vpeljali. Poiščimo minimum energije z ozirom na h . Če je lahko energija W_c manjša od nič, ima stanje s korelacijo nižjo energijo. Trivialna rešitev, ki da $W_c = 0$ (ni nobene korelacijske energije),

$$\begin{aligned} h &= 0 & \varepsilon > 0 \\ h &= 1 & \varepsilon < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

To pa je ravno normalno stanje, kjer so zasedena vsa Blochova stanja pod Fermijevo ploskvijo, tista nad njo pa so prazna.



Sl. 6. Porazdelitvena funkcija $h(\varepsilon)$, ki meri verjetnost, da je v valovni funkciji osnovnega stanja zasedeno stanje para z energijo ε . Pri kovini v normalnem stanju so zasedena vsa stanja pod Fermijevo energijo, stanja nad njo pa so nezasedena. V osnovnem supraprevodnem stanju imamo vrzeli pod Fermijevo ploskvijo, elektroni pa zasedajo stanja nad Fermijevo ploskvijo. $h(|\varepsilon|)$ daje simetrično verjetnostno porazdelitev za elektronske pare nad k_F in pare vrzeli pod k_F . Dodatno kinetično energijo zaradi obstoja teh parov lahko zapišemo:

$$T_c = 2 \sum_{|\varepsilon| \leq \hbar \omega} |\varepsilon| h(|\varepsilon|)$$

Če postavimo variacijo W_c z ozirom na h enako nič, dobimo naslednje zveze:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{E} \right) \\ E &= (\varepsilon^2 + \varepsilon_0^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

in

$$\varepsilon_0 = \frac{V}{2} \sum_{|\varepsilon| \leq \hbar \omega} \frac{\varepsilon_0}{(\varepsilon^2 + \varepsilon_0^2)^{1/2}}$$

Zadnja enačba za ε_0 je osnovna nelinearna integralna enačba, ki določa, ali obstoja supraprevodna rešitev ali ne. Takoj vidimo, da ima ta enačba od nič različne rešitve za ε_0 samo, če je $V > 0$. To nam da kriterij za potenciale, ki povzročajo supraprevodno stanje, ker je elektronsko — elektronska interakcija

zaradi izmenjave fononov privlačna, zasenčena Coulombska interakcija pa odbojna. Kriteriju

$$V = - \langle k' | H_1 | k \rangle > 0 \quad (11)$$

bo zadoščeno, če je interakcija elektronov s fononi dovolj močna. To nam razjasni paradoks, da dobri prevodniki (baker, srebro, zlato) ne postanejo supra-
prevodni. Močna interakcija elektronov s fononi, ki povzroča velik električni upor v normalnem tj. nesupraprevodnem stanju, pospeši nastanek supra-
prevodne faze.

Ce je $V > 0$, imamo (vsoto zamenjamo z integralom):

$$1 = N(o) V \int_0^{\hbar \omega} \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + \varepsilon_0^2)^{1/2}} \quad (12)$$

ali

$$\varepsilon_0 = \frac{\hbar \omega}{sh(1/N(o) \cdot V)}$$

kjer je $N(o)$ gostota elektronov enega spina na enoto energije na Fermijevo ploskvi. V limiti šibke sklopitve ($N(o) \cdot V \ll 1$), ki se zdi, da je važna za naš problem, je

$$\varepsilon_0 \simeq 2 \hbar \omega e^{-\frac{1}{N(o)V}} \quad (13)$$

Tako dobimo energijsko razliko med normalnimi in supraprevodnimi stanji (spet v limiti šibke sklopitve):

$$W_S - W_N = W_C = -2 N(o) (\hbar \omega)^2 e^{-\frac{2}{N(o)V}} \quad (14)$$

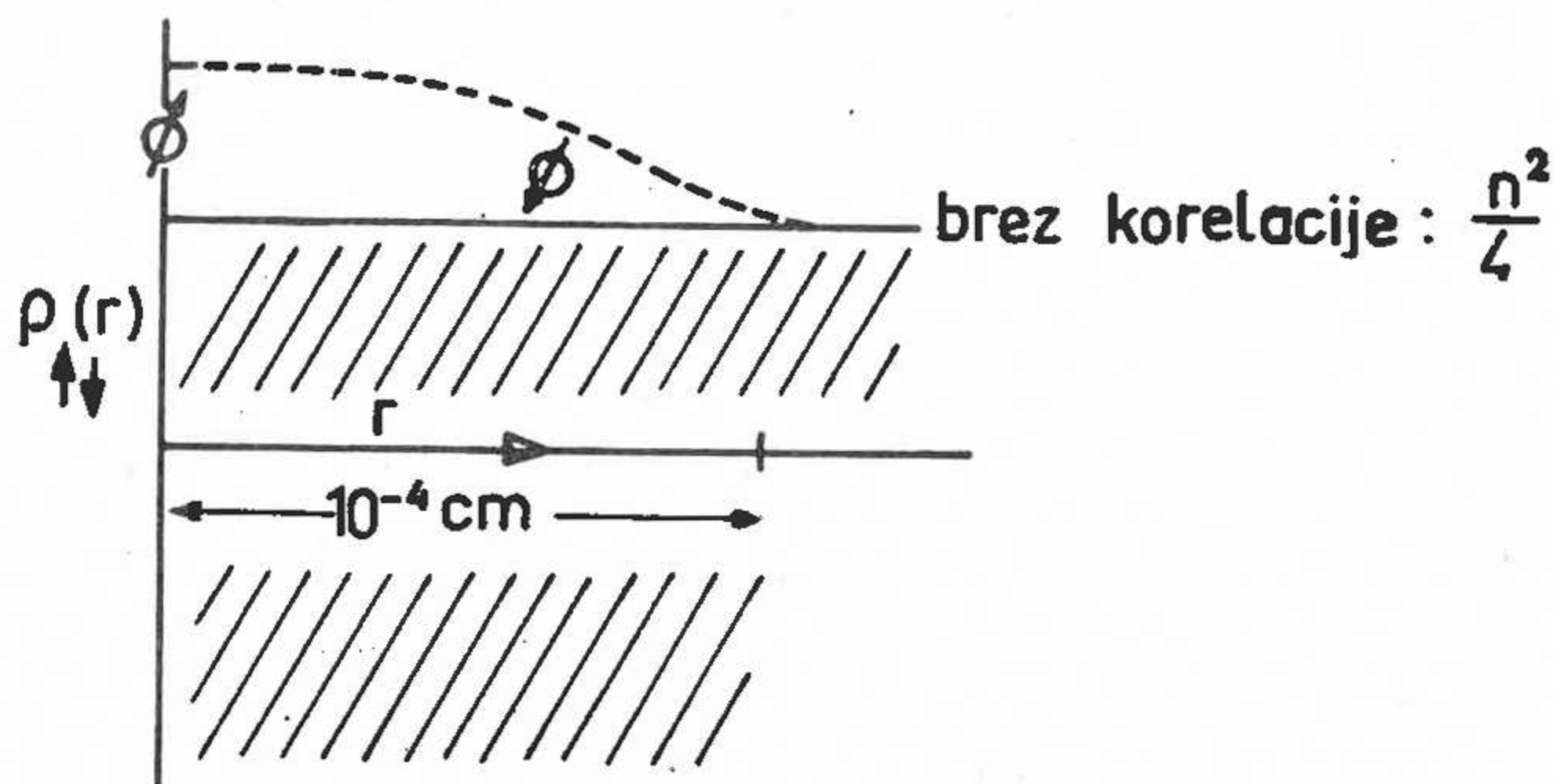
Odvisnost korelacijske energije od $(\hbar \omega)^2$ da izotopski efekt, medtem ko nam eksponentni faktor močno zmanjša dimenzijsko pričakovano vrednost $N(o) (\hbar \omega)^2$ na vrednost, ki jo dobimo eksperimentalno. Korelacijska funkcija med dvema elektronoma z nasprotnima spinoma je podana zdaj s sledečim izrazom:

$$\rho^{\downarrow \uparrow}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} n^2 + \left| \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d\mathbf{k} \hbar^{1/2} (1 - \hbar)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right|^2 \quad (15)$$

Tako vidimo, da so v valovni funkciji za osnovno stanje supraprevodnika močne korelacije med elektronskimi pari z nasprotnimi spini in totalno gibalno količino enako nič. Te korelacije so sestavljene iz Blochovih vzbujenih stanj za posamezne delce blizu Fermijeve površine in imajo prostorski doseg velikostnega reda 10^{-4} cm (sl. 7). Vzrok, da lahko nastanejo te korelacije, je v tem, da imajo celo elektroni, med katerimi ni interakcij, lahko zelo velika valovna števila zaradi izključitvenega principa. Tako lahko pridobimo veliko potencialne energije v tretjem zrazu za W_C že z majhno dodatno porabo kinetične energije, ki je podana s prvima dvema členoma.

Podobno valovno funkcijo s korelacijo lahko sestavimo tudi, če damo parom s singletnimi spini enako totalno gibalno količino, ki pa ni enaka nič. To ustreza stanju, ki nosi tok. Energija tega stanja je višja kot energija osnovnega stanja.

Tipična lastnost valovnih funkcij s korelacijo je, da ne moremo razbiti nobenega elektronskega para, niti odstraniti posameznega elementa v faznem prostoru, ne da bi porabili pri tem končno količino energije. Če razbijemo korelacijo posameznega para, izgubimo njegovo korelacijsko energijo, ki je različna od nič. Če umaknemo iz sistema element faznega prostora, se zmanjša število možnih prehodov vseh parov, kar spet povzroči končno spremembo v energiji. Če torej primerjamo ta položaj s tistim v normalnem stanju, vidimo, da lahko vzbujamo posamezne delce iz korelacijskega stanja tako, da potrošimo majhno, a končno količino energije. Zato lahko vpeljemo vrzel v energijski spekter posameznih delcev. Razlika v energiji med stanjem s korelacijo in normalnim supraprevodnim stanjem je sicer zelo majhna, valovna funkcija pa je kvalitativno popolnoma drugačna. Medtem ko je v normalni kovini zelo lahko



Sl. 7. Ovojnica korelacijske funkcije za elektrone z nasprotnim spinom v supraprevodnem stanju.

spremeniti elektronski del valovne funkcije z majhnimi motnjami, pa je valovna funkcija stanja s korelacijo zelo koherentna in se močno upira kakršnikoli spremembi.

V. Vzbujena stanja

Če imamo opravka z vzbujenimi stanji v supraprevodniku, je dobro, da ločimo med vzbujenimi stanji posameznih delcev in med kolektivnimi vzbujenimi stanji, kot so na primer plazmoni ali stanja, ki nosijo tok, ki smo jih že omenili. Spremembe v spektru vzbujenih stanj posameznih delcev povzročajo supraprevodne lastnosti. Kolektivno vzbujena stanja lahko ostanejo zelo podobna v normalnem in supraprevodnem stanju.

Spomnimo se, da so v osnovnem stanju zasedena vsa stanja za posamezne delce do Fermijeve energije. Posamezen delec je vzbujen, če zasede stanje k_1 nad k_F in zapusti vrzel k_2 pod k_F . Energija tega vzbujenega stanja v primeri z osnovnim je

$$E_1 - E_2 = (E_1 - E_F) - (E_2 - E_F) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \quad (16)$$

V makroskopskem vzorcu jo lahko napravimo tako majhno, kot jo želimo.

Vzbujena stanja supraprevodnika (stanja kvazi-delcev) lahko definiramo tako, da vsako posebej odgovarja vzbujenemu stanju v normalni kovini.⁸ Tedaj

⁸ Ekvivaletno, vendar poenostavljeno metodo za konstruiranje vzbujenih stanj posameznih delcev sta podala N. N. Bogolyubov, Nuovo Cimento 7, 794 (1958) in J. G. Valantin, Nuovo Cimento 7, 843 (1958).

vidimo, da je energija prehoda v vzbujeno stanje, ki ustreza stanju normalne kovine (enačba (16)), naslednja:

$$E_1 + E_2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_0^2)^{1/2} + (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_0^2)^{1/2} \quad (17)$$

V nasprotju z normalnim vzbujanjem ostane pri supraprevodniku vsota $E_1 + E_2$ večja od nič tudi tedaj, če gresta ε_1 in ε_2 proti nič. Dejansko je najnižja možna vzbujevalna energija enaka:

$$E_1 + E_2 = 2\varepsilon_0 \quad (18)$$

Lahko rečemo, da je med osnovnim stanjem in med najnižjimi vzbujenimi elektronskimi stanji vrzel v energiji. Ta vrzel resno ovira vzbujanje lastnosti elektronskega plina.

Za vzbujena stanja lahko napravimo naslednjo sliko: V osnovnem stanju supraprevodnika so vsi elektroni v stanjih s korelacijo, in sicer nastopajo v parih s singletnim spinom in s totalno gibalno količino enako nič. V stanju z n vzbujenimi elektroni je teh n elektronov v stanjih »kvazi-delcev« — to so recimo normalna Blochova stanja za posamezne delce — in nimajo močne korelacije z ostalimi elektroni. Ozadje teh vzbujenih elektronov so vsi ostali elektroni, ki še imajo korelacije med sabo. Vzbujeni elektroni se obnašajo precej podobno kot normalni. Lahko se sipljejo ali vzbujajo še naprej. Po drugi strani se elektroni ozadja še vedno obnašajo kot suprafluidni in jih je težko sipati ali vzbujati. Tako imamo dvoje skoraj neodvisnih elektronskih plinov. Tisti del valovne funkcije, kjer nastopajo korelacije, ima lastnosti suprafluida, to je upira se spremembam in ima majhno specifično toploto.

Vzbujena stanja pa se obnašajo skoraj tako kot normalni elektroni in imajo skoraj normalno specifično toploto in električno upornost. Kadar deluje na kovino stalno električno polje, suprafluidni elektroni prevladujejo nad normalnimi. Če pa imamo električna polja z višjo frekvenco, lahko opazimo upornost vzbujenih elektronov.⁹

VI. Termične lastnosti

Zdaj lahko izpeljemo termične lastnosti supraprevodnika s pomočjo osnovnega stanja in spektra vzbujenih stanj, ki smo ga opisali. Prosta energija sistema je:

$$F = W_c(T) - TS \quad (19)$$

T je absolutna temperatura, S pa entropija. Sistem ima entropijo samo zaradi vzbujenih stanj, kajti tisti del valovne funkcije, ki ima korelacijo, ni degeneriran. Izkaže se, da je prosta energija odvisna od $f(\mathbf{k})$ in $h(\mathbf{k})$, kjer je $f(\mathbf{k})$ verjetnost, da je stanje z gibalno količino $\mathbf{k}$ zasedeno z vzbujenim elektronom ali kvazi-delcem, $h(\mathbf{k})$ pa pogojna verjetnost, da je stanje $\mathbf{k}$ zasedeno s parom v primeru, če ni zasedeno s kvazi-delcem. Nekaj stanj je torej zasedenih s kvazi-delci, preostali fazni prostor pa je na razpolago za tvorbo koherentnih stanj ostalih elektronov.

⁹ R. E. Glover in M. Tinkham, Phys. Rev. 108, 243 (1957). Biondi, Forrester, Garfunkel in Satterthwaite, Revs. Modern Phys. 30, 1109 (1958). (Glej Pogl. V., posebno za nadaljnjo literaturo.)

Če postavimo variacijo F z ozirom na f in h enako nič, dobimo naslednje zveze:

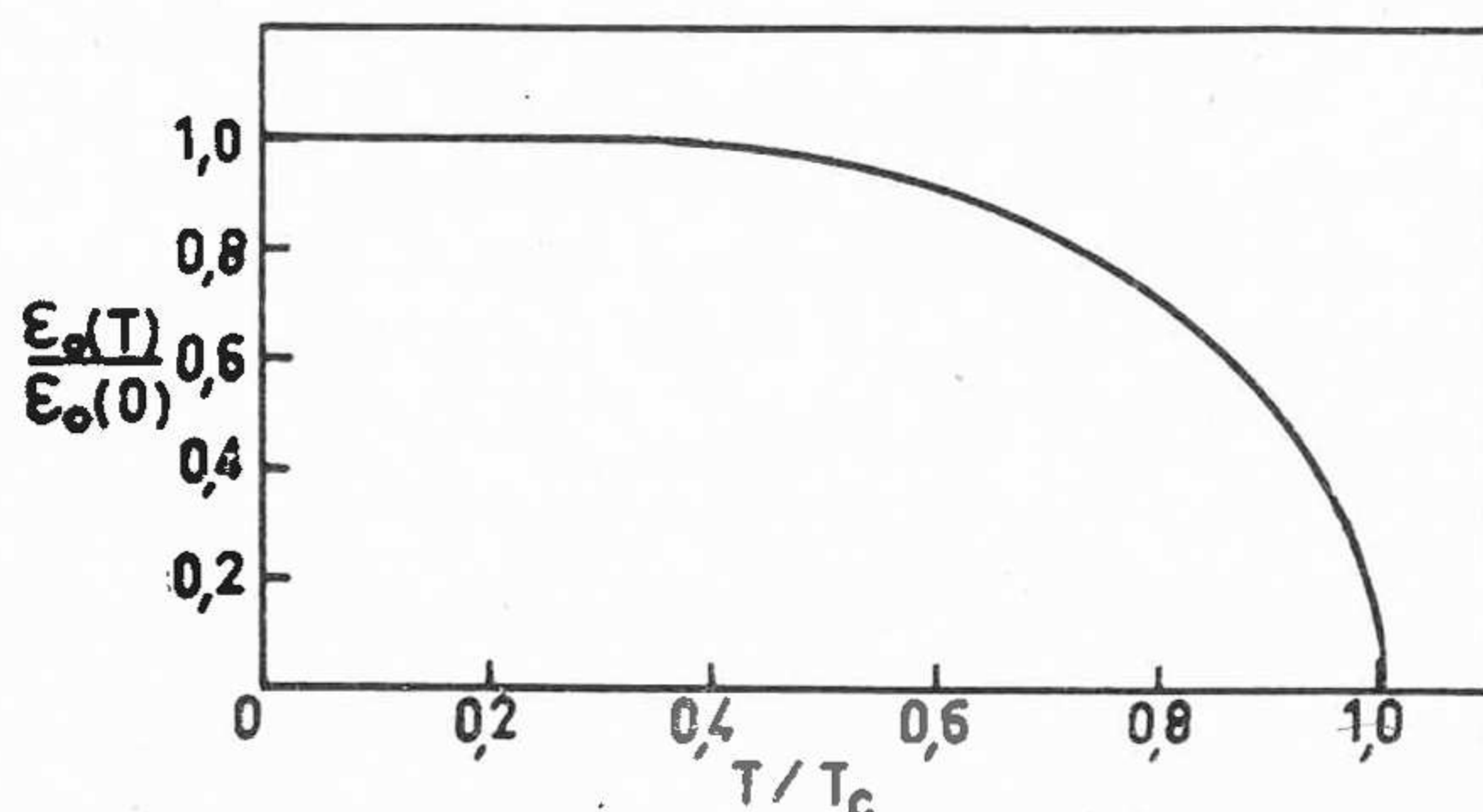
$$h = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{E} \right) \quad f = \frac{1}{1 + e^{\beta E}} \quad (20)$$

$$E = [\varepsilon^2 + \varepsilon_0^2(T)]^{1/2}$$

in

$$\varepsilon_0(T) = N(0) V \int_0^{\hbar \omega} \frac{d\varepsilon}{E} \tanh \left(\frac{E}{2kT} \right) \quad (21)$$

Te enačbe imajo isto obliko kot pri $T = 0$, samo da se vrzel v energiji ε_0 s temperaturo spreminja. Odvisnost ε_0 od T je podana v enačbi (21), na sliki 8 pa je narisana. Vidimo, da dobimo v enačbi (21) končne vrednosti za $\varepsilon_0(T)$ samo v omejenem temperaturnem področju. Gornja meja tega temperaturnega področja je T_c , imenujemo jo kritična temperatura. Za $T < T_c$ obstoja močna korelacija med elektroni s singletnim spinom in gibalno količino enako nič. Za vzbujanje elektronov iz dela valovne funkcije s korelacijo imamo vrzel v energiji in $E(k)$ je določena z enačbo (20). V tem temperaturnem območju ima sistem kvalitativno drugačne lastnosti kot normalna kovina.



Sl. 8. Odvisnost energijske vrzeli v spektru enoelektronskih stanj od temperature.

V področju $T > T_c$ je $\varepsilon_0 = 0$. Tu imamo v vseh ozirih normalne razmere. Porazdelitvena funkcija za vzbujena stanja preide v Fermijevo porazdelitveno funkcijo za vzbujene elektrone pri $k > k_F$ oziroma za vrzeli pri $k < k_F$:

$$f = \frac{1}{e^{\frac{|\varepsilon|}{kT}} + 1} \quad (22)$$

Če uporabimo f in h , kot ju podaja enačba (20), lahko izračunamo prosto energijo supraprevodnega stanja, od tod pa lahko določimo vse ravnovesne termične lastnosti sistema. Rezultati računov za specifično toploto in kritično polje so podani na slikah 9, 10 in 11.

Zanimivo je, da nastopi pri T_c (kadar ni magnetnega polja) prehod drugega reda (tu ni nobene latentne toplote, pri T_c je $W_c = 0$), pri specifični toploti pa imamo nezveznost. Pri zelo nizkih temperaturah gre specifična toplota

eksponentno proti nič. Ta idealizirana teorija napove tudi zakon o medsebojno ustrežajočih stanjih. Tako dobimo razmerje

$$\frac{\gamma T_c^2}{H_0^2} = 0,170$$

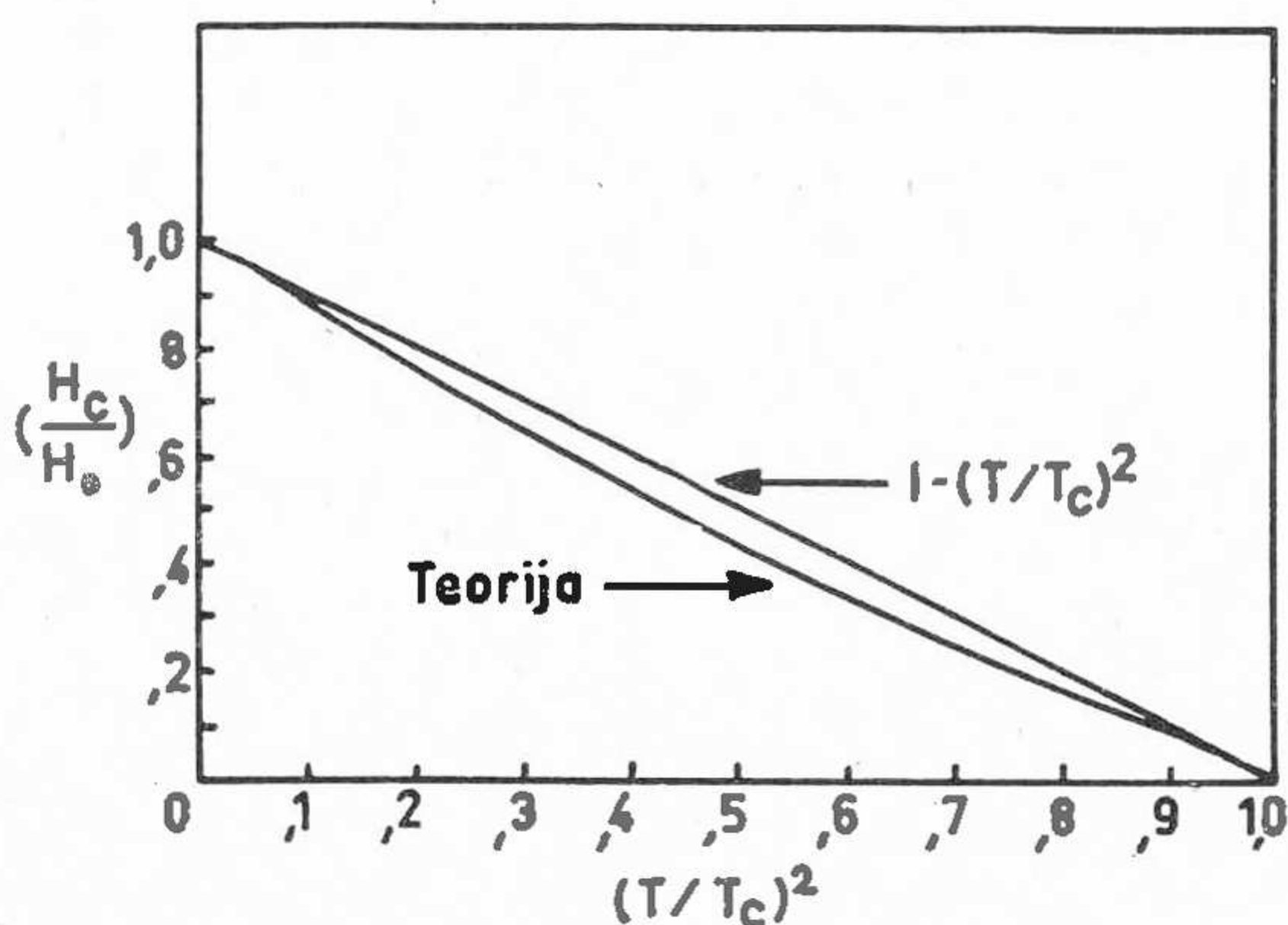
kjer je

$$\gamma = \frac{2}{3} \pi^2 N(0) k^2$$

Eksperimentalni rezultati leže okrog števila 0,170. Razmerje med ϵ_0 in kT_c je konstantno in enako

$$\frac{\epsilon_0}{k T_c} = 1,75$$

V resnici se pri supraprevodnikih obe gornji razmerji gibljeta okoli števil, ki smo ju navedli zgoraj. Bolj realistična izbira interakcij med elektroni gornje



Sl. 9. Razmerje kritičnega polja in njegove vrednosti pri $T = 0^\circ\text{K}$ v odvisnosti od $(T/T_c)^2$. Gornja krivulja podaja zakon $1 - (T/T_c)^2$ po Gorter-Casimirjevi teoriji. Spodnja krivulja je narisana na osnovi idealizirane BCS teorije v limiti šibke sklopitve. Eksperimentalni rezultati leže navadno v sredi med obema krivuljama.

rezultate nekoliko spremeni. Iz izboljšanje teorije tudi sledi, da se konstante spreminjajo od kovine do kovine. To nam da možnost, da lahko teorijo bolj prilagodimo rezultatom meritev.

V teoriji ni nobenih poljubnih parametrov. V območju, ki nas zanima, so vse termične lastnosti določene s količinami γ in $\hbar \omega e^{-\frac{1}{N(0)V}}$. Količino γ dobimo z opazovanjem normalne specifične toplote, drugo pa iz kritične temperature:

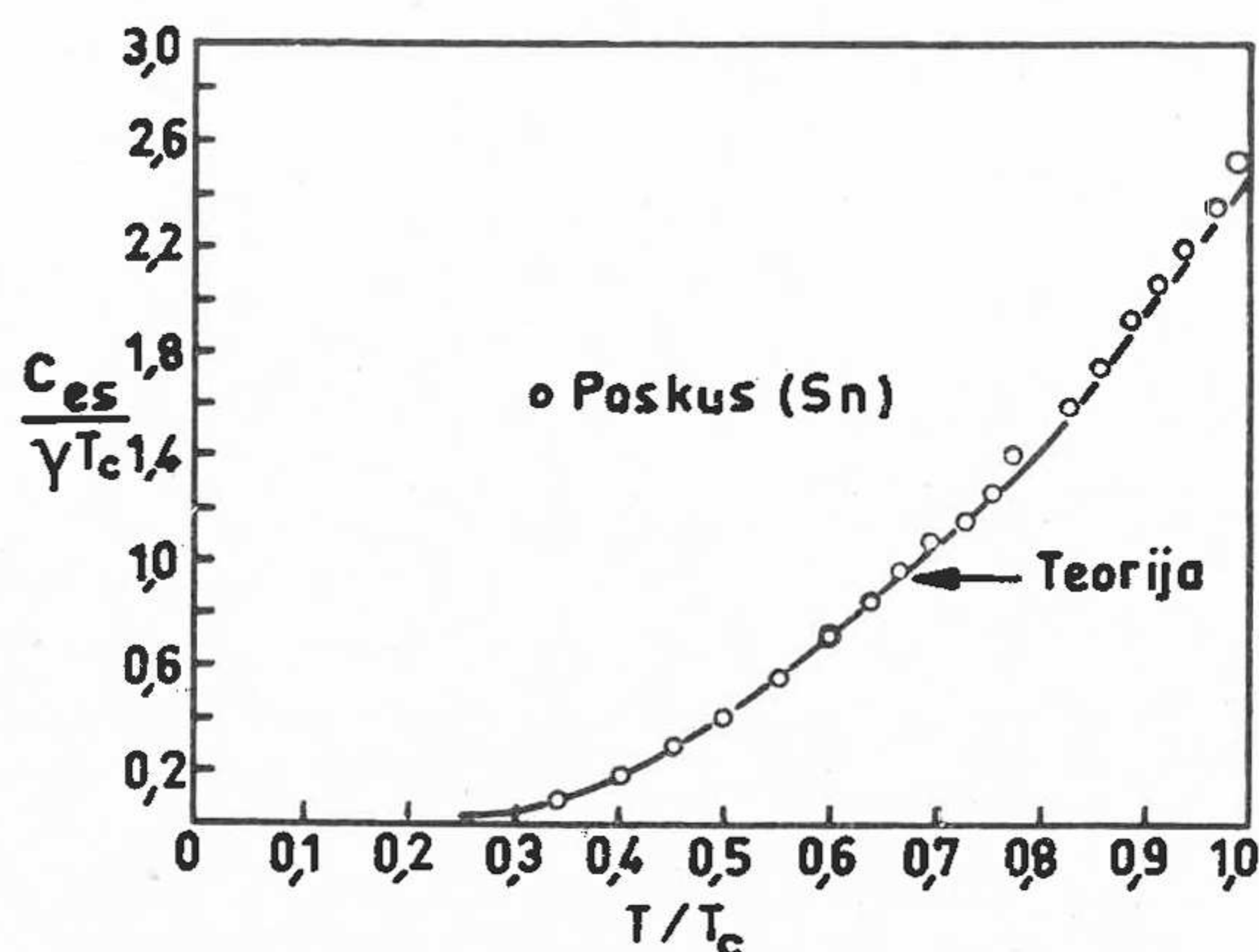
$$kT_c = 1,14 \hbar \omega e^{-1/N(0)V}$$

VII. Elektrodinamične lastnosti in suprafluidnost

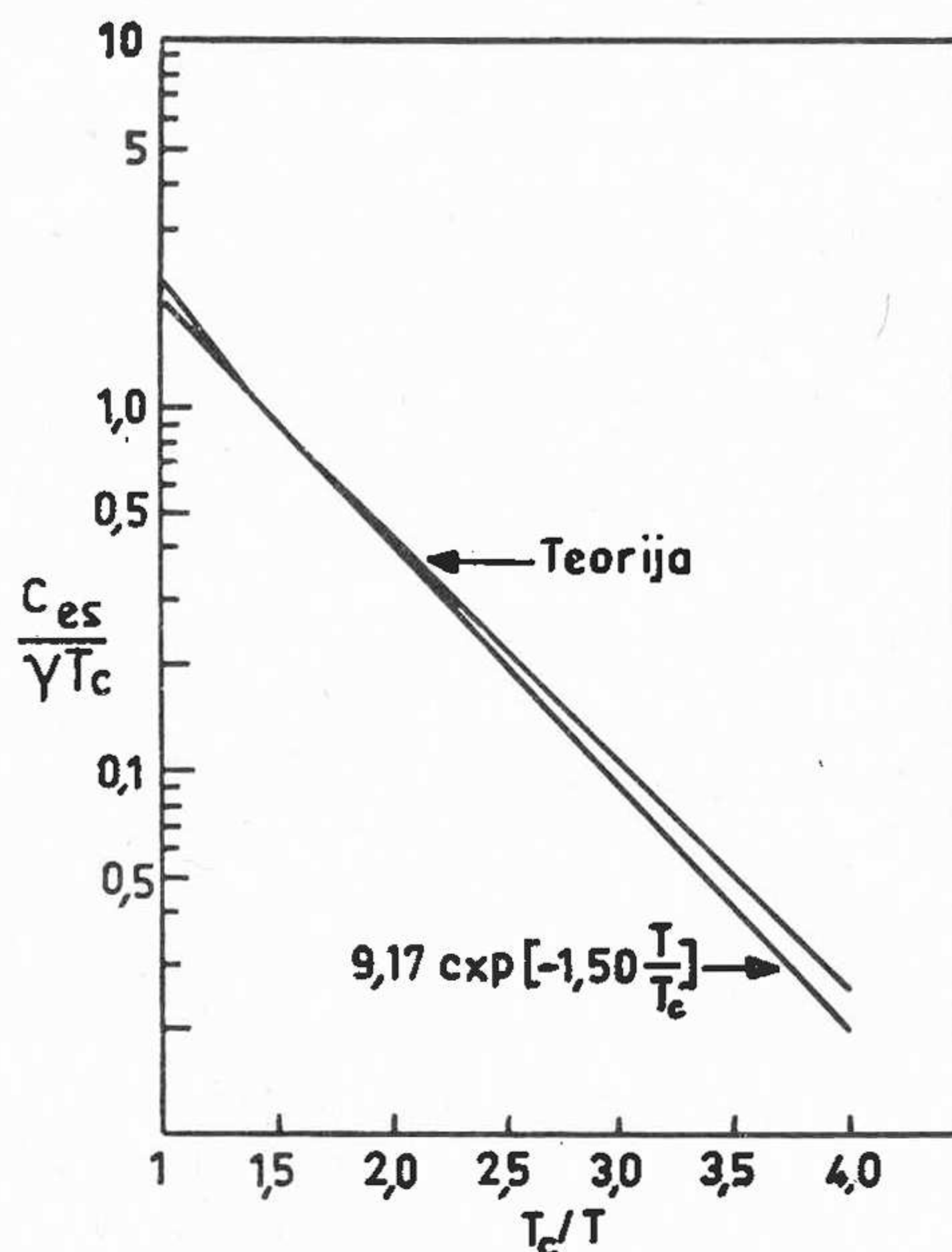
Z osnovnim stanjem in s spektrom vzbujenih stanj, kot smo ga opisali sporaj, lahko izračunamo tudi elektrodinamične lastnosti superprevodnika. Ker so podrobni računi zelo zapleteni, jih tukaj ne bomo navajali. Kdor želi, si

lahko ogleda originalne račune BCS teorije. Tam vidimo, da supraprevodnik izriva magnetno polje in da nastopi Meissnerjev efekt.¹⁰ Dobimo tudi vdorno globino in njeno spreminjanje s temperaturo, kot ga je omenil profesor Boorse.¹

K sreči lahko enostavno podamo kvalitativno sliko pojavov, po katerih je dobila supraprevodnost svoje ime. Izberimo si najpreprostejšo možno sliko, to je predstavljajmo si kovino pri absolutni ničli! V tem primeru ne bo tudi v kovini v normalnem stanju nobene druge upornosti razen tiste, ki jo povzročajo neči-



Sl. 10. Odvisnost kvocienta elektronske specifične toplote v supraprevodniku in njene vrednosti v normalnem stanju pri T_c od T/T_c . Za primerjavo so narisane eksperimentalne vrednosti za kositer.



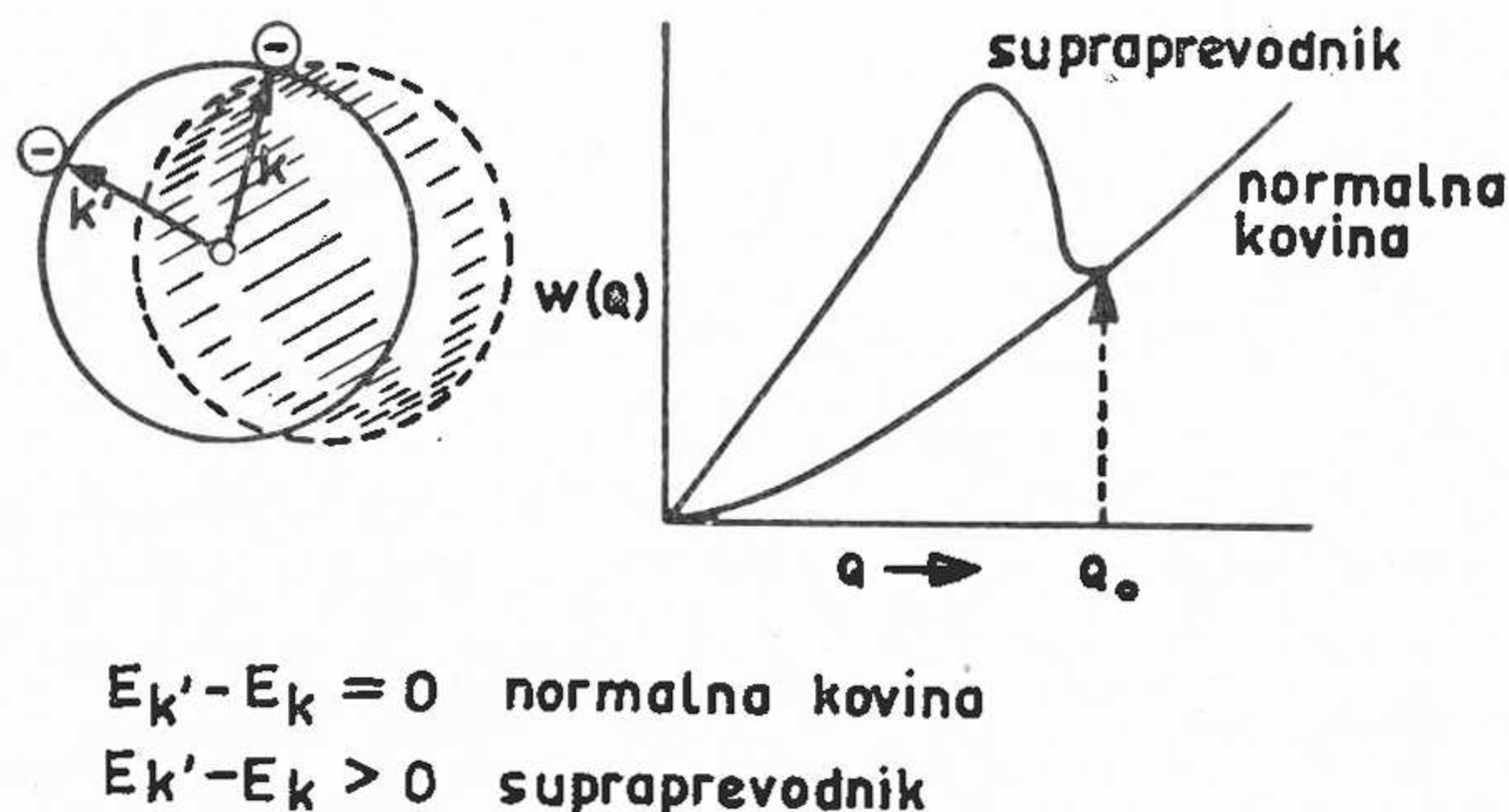
Sl. 11. Logaritem razmerja elektronske specifične toplote in njene vrednosti v normalnem stanju pri T_c v odvisnosti od T_c/T . Eksponentna odvisnost se dobro ujema z eksperimentalnimi rezultati za kositer in vanadij pri $T_c/T > 1,4$.

¹⁰ Glede problemov pri gradientni invarijantnosti in kolektivnem vzbujanju se bravec lahko obrne na P. W. Andersona, Phys. Rev. 112, 1900 (1958).

stoče, ker pač ni prostih fononov. Vzemimo kovino v normalnem stanju z nečistočami pri absolutni ničli, kjer je upornost posledica sipanja Blochovih valov na nečistočah.

Naj deluje polje na tako kovino v normalnem stanju. Tedaj se bo Fermijeva krogla premaknila, tako da imajo elektroni neko totalno gibalno količino. Tedaj teče električni tok. Kolikor časa deluje polje, teče ravnovesni tok, ker sta pospešek, ki ga povzroča polje, in pojemek zaradi sipanja elektronov na nečistočah medsebojno v ravnotežju. Če polje odstranimo, se elektroni zaradi sipanja na nečistočah zelo hitro vrnejo v stanje, ko električni tok ne teče.

Primerjajmo zdaj ta proces s procesom v supraprevodnem stanju. Tam ima elektronska valovna funkcija močne korelacije. Vsak elektron blizu



Sl. 7. Pri $T = 0^\circ\text{K}$ tečejo v supraprevodniku z nečistočami stalni tokovi, čeprav je energija v stanju s tokom višja kot v osnovnem stanju. Ta pojav je posledica vrzeli v energijskem spektru posameznih elektronov. Pri dovolj majhnih tokovih ta vrzel preprečuje elastično sipanje elektronov na nečistočah. Ker prav elastično sipanje na nečistočah v normalnem stanju uniči tok, dobimo tukaj, kjer ni sipanja, metastabilni tok in kovina je supraprevodnik.

Fermijeve ploskve, kjer teče tok, je močno odvisen od drugega, ki ima nasproten spin. Ko enkrat nastane koherentno stanje, ga je zelo težko uničiti s sipanjem na nečistočah. Vzrok tej obstojnosti koherentnega stanja leži v osnovnih lastnostih valovne funkcije s korelacijo.

Za razdvojitev elektronskega para ali vzbuditev posameznega elektrona je potrebna končna energija. Vsako sipanje posameznega delca poveča energijo sistema elektronov, če tok ni premočan, kljub temu, da je celotna energija večja kot energija osnovnega stanja. Če dodatna kinetična energija elektrona zaradi toka ni večja od vrzeli v energijskem spektru, bo zelo težko prišlo do sipanja. Tudi pri končno veliki temperaturi je položaj zelo podoben. Vzbujeni elektroni se obnašajo kot normalni v primeri s suprafluidnim ozadjem. Če premaknemo sistem v stanje, ki nosi tok, bodo prevajali tok samo suprafluidni elektroni (ker prevladajo nad normalnimi). Pri danem toku ima sistem minimalno prosto energijo. Če preidejo posamezni elektroni v vzbujena stanja, se lahko prosta energija le poveča in sistema postane metastabilen (sl. 7).

Zadnja razlaga spet pokaže osnovni lastnosti valovne funkcije supraprevodnega stanja: njeno izredno koherenco in odpor proti spremembam z vzbujanjem posameznih delcev, kar je bistveni kriterij suprafluidnosti. Procesi, kjer se troši energija in ki se makroskopsko kažejo kot upornost ali trenje, so procesi, pri katerih se sipljejo posamezni delci. Sistem, kjer so taki procesi onemogočeni, čeprav je kolektivno gibanje še možno, se obnaša makroskopsko kot suprafluiden.

✓ O NEKEM ERDÖSOVEM IZREKU

Pri razlagi pojma zaporedja si večkrat pomagamo z naslednjo definicijo: Zaporedje je funkcija, katere definicijsko območje je množica naravnih števil. Zaporedje namreč poznamo, če je dan predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi neko realno ali kompleksno število — člen zaporedja. Zaporedje moremo torej opisati s predpisom $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, \dots$. Funkcije, ki so definirane le na množici naravnih števil, so pogostne v teoriji števil, zato se je udomačilo zanje ime številsko-teoretične ali aritmetične funkcije. Najbolj znana med njimi je Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$.*

Aritmetična funkcija $f(n)$ je multiplikativna, če zadošča funkcionalni enačbi

$$(1) \quad f(mn) = f(m) f(n)$$

za vsak par naravnih števil m in n . Nekatere aritmetične funkcije (med njimi tudi Eulerjeva funkcija) niso multiplikativne v tem širšem smislu, pač pa zadoščajo enačbi (1) le za vsak par naravnih števil, ki sta si tuji. Če enačbo (1) logaritmujemo in označimo $\log f(n)$ z $g(n)$, dobimo funkcionalno enačbo

$$(2) \quad g(mn) = g(m) + g(n)$$

Aritmetične funkcije, ki zadoščajo enačbi (2), pa imenujemo aditivne aritmetične funkcije. S funkcionalnimi enačbami kot sta (1) in (2) imamo opravka v mnogih matematičnih panogah (v algebri in teoriji števil, v verjetnostnem računu in teoriji informacij itd.). Enačbi (2) zadošča npr. funkcija $g(n) = \log n$. Zanimiv problem je ugotoviti, pri katerih pogojih je funkcija, ki zadošča tej enačbi, proporcionalna logaritmu.

Matematik P. Erdős je v svoji razpravi [1] o aditivnih aritmetičnih funkcijah dokazal med drugim tudi tale izrek:

Če aritmetična funkcija z realnimi vrednostmi $f(n)$ zadošča enačbi

$$(3) \quad f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{za vsak par } (m, n) = 1^{**}$$

in je nepadajoča

$$(4) \quad f(n+1) \geq f(n) \quad \text{za vsak } n$$

potem je

$$f(n) = C \log n$$

kjer je C konstanta.

V teoriji informacij srečamo podoben problem, le da iskana funkcija zadošča enačbi (3) brez omejitve, t. j. za vsak par naravnih števil m in n [2]. V tem primeru je rešitev dokaj enostavna (glej odgovor na vprašanje št. 3, OMF VI (1957/58), 96). Dokaz izreka, ki ga je formuliral P. Erdős, pa je neprimerno bolj kompliciran. Nedavno je I. J. Schoenberg objavil nov direkten in poenostavljen dokaz [3]. Njegov dokaz je idejno zelo zanimiv. Oglejmo si ga v nekoliko predelani obliki.

* $\varphi(n)$ je število zaporedja $1, 2, \dots, n-1$, ki so tuji proti n .

** Simbol (m, n) pomeni tu največji skupni delitelj števil m in n .

Funkcijo $f(n)$ moremo definirati za vse reducirane pozitivne ulomke s predpisom

$$(5) \quad f(m/n) = f(m) - f(n)$$

Ugotovili bomo, da po tej razširitvi naša funkcija še vedno zadošča enačbi (3), če primerno definiramo, kdaj sta si dva ulomka tuja. Vzemimo dva reducirana ulomka $x = m/n$ in $x' = m'/n'$. Rekli bomo, da sta si ulomka x in x' tuja in zapisali simbolično $(x, x') = 1$, če velja

$$(6) \quad (m, m') = (m, n') = (n, m') = (n, n') = 1$$

Zdaj trdimo: Če je $(x, x') = 1$, potem je

$$(7) \quad f(xx') = f(x) + f(x')$$

O tem se zlahka prepričamo z računom:

$$\begin{aligned} f(xx') &= f(mm'/nn') = f(mm') - f(nn') = f(m) + f(m') - f(n) - f(n') = \\ &= f(m) - f(n) + f(m') - f(n') = f(m/n) + f(m'/n') = f(x) + f(x') \end{aligned}$$

Tu smo uporabili definicijo (5) in enačbo (3). Na analogen način dobimo

$$(8) \quad f(x/x') = f(x) - f(x'), \quad (x, x') = 1$$

Ravno tako pa moremo ugotoviti, da je naša funkcija nepadajoča tudi po razširitvi. Spet vzemimo tuja si ulomka $x = m/n$ in $x' = m'/n'$ in naj bo $x < x'$. Tedaj je $mn' < m'n$ in zaradi neenačbe (4) $f(mn') \leq f(m') \leq f(m'n)$. Od tod pa takoj dobimo $f(m) - f(n) \leq f(m') - f(n) \leq f(m') - f(n')$ in $f(x) \leq f(x')$. Iz $x < x'$ sledi $f(x) \leq f(x')$ le v primeru, če sta si x in x' tuja. To omejitev pa moremo odpraviti. Vzemimo dva poljubna reducirana ulomka $x = m/n$ in $x' = m'/n'$ in naj bo $x < x'$. Ulomek

$$X = \frac{Mmm''nn + 1}{Nmm'n'n' + 1}$$

kjer sta M in N še poljubni naravni števili, je tuj proti x in x' . Če sta M in N zelo veliki števili, ima ta ulomek približno vrednost M/N , zato lahko s primerno izbiro teh dveh števil dosežemo, da X leži med x in x' . Imamo torej

$$(x, X) = (X, x') = 1 \quad \text{in} \quad x < X < x'$$

Po prejšnji ugotovitvi sledi od tod

$$f(x) \leq f(X) \leq f(x')$$

Naša funkcija je torej nepadajoča. Kot taka ima v vsaki točki x levo in desno limito, ki ju bomo označili z $f(x-0)$ in $f(x+0)$.

Na podoben način moremo odpraviti pogoj $(x, x') = 1$ iz enačbe (7).^{*} Vzemimo poljubno pozitivno realno število x . Vsako realno število je limita zaporedja ulomkov, kjer je zaporedje samo še precej poljubno. Izberimo si naraščajoče zaporedje reduciranih ulomkov $\{x_n = a_n/b_n\}$, $(a_n, b_n) = 1$, ki kon-

^{*} Na tem mestu je Schoenbergov dokaz nekoliko poenostavljen.

vergira k številu x . Pri tem zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ naraščata preko vsake meje. S tem zaporedjem pa moremo tvoriti novo zaporedje reduciranih ulomkov $\{e_n\}$, kjer je

$$e_n = \frac{2a_nb_n - 1}{2a_nb_n + 1}$$

ki narašča proti 1. Očitno velja tudi $(x_n, e_n) = 1$ za vsak n . Prav tako tudi zaporedje $\{x_n e_n\}$ narašča proti x . V enačbo (7) vstavimo $x = e_n$ in $x' = x_n$. Tako dobimo

$$f(e_n x_n) = f(e_n) + f(x_n)$$

Če n narašča prek vsake meje, konvergirajo členi v zgornji enačbi proti spodnji limiti funkcije $f(x)$ v točkah x in 1, saj je ta nepadajoča. Imamo torej

$$f(x-0) = f(1-0) + f(x-0)$$

Od tod sledi $f(1-0) = 0$. Zdaj pa vzemimo padajoče zaporedje ulomkov $\{y_n\}$, ki tudi konvergira k x . Prav lahko je to zaporedje izbrati tako, da so členi paroma tuji proti členom prejšnjega zaporedja $\{x_n\}$. Zaporedje $\{x_n/y_n\}$ je tedaj naraščajoče in konvergira k 1. Po enačbi (8) je tedaj

$$f(x_n/y_n) = f(x_n) - f(y_n)$$

in v limiti $n \rightarrow \infty$ dobimo

$$f(1-0) = f(x-0) - f(x+0)$$

Od tod sledi $f(x-0) = f(x+0)$. Naša funkcija je torej zvezna v poljubni realni točki, ker se spodnja in zgornja limita ujemata. To skupno vrednost imejmo za funkcijsko vrednost v točki x . Naša funkcija je s tem definirana za vsako pozitivno realno število x .

Do sedaj je veljala enačba $f(yy') = f(y) + f(y')$ za poljuben par reduciranih tujih si pozitivnih ulomkov y in y' . Če imamo dve poljubni pozitivni realni števili x in x' , moremo najti dva ulomka y in y' , ki sta si tuja in se y poljubno malo razlikuje od x , y' pa od x' . In če se y približuje x , y' pa k x' , dobimo zaradi zveznosti naslednjo enačbo

$$(9) \quad f(xx') = f(x) + f(x')$$

ki velja za vsak par pozitivnih realnih števil. Če postavimo $x = e^t$, $x' = e^{t'}$ in $f(e^t) = g(t)$, dobimo iz enačbe (9) tole znano funkcionalno enačbo

$$g(t+t') = g(t) + g(t')$$

Ker je funkcija $g(t)$ zvezna, je rešitev te enačbe $g(t) = Ct$. Torej je $f(x) = g(\log x) = C \log x$ in v posebnem

$$f(n) = C \log n$$

Literatura:

- [1] P. Erdős, On the distribution function of additive functions, Ann. of Math. (2), vol. 47 (1946), 1—20.
- [2] R. Jamnik, Osnovni pojmi teorije informacij, OMF VI (1957/58), 97—107.
- [3] I. J. Schoenberg, On two theorems of P. Erdős and A. Renyi, Illinois J. of Math., Vol. 6 (1962), 53—57.

Zvonimir Bohte

✓ PREPROST PRIMER ZA ZVEZNO FUNKCIJO, KI NI ODVEDLJIVA

Pri študiju matematične analize si radi pomagamo z geometrično predstavo. Ta nam rabi kot mnemotehnično sredstvo, dostikrat pa da tudi idejo za nova raziskovanja. Marsikatero dejstvo, ki ga je sicer dokaj težko dokazati, je geometrično zelo nazorno, tako na primer veljavnost nekaterih izrekov o zveznih funkcijah. Toda geometrična nazornost sama še ni nikdar dokaz, vedno zahtevamo še logično neoporečen matematičen dokaz. Da je taka natančnost na mestu, se je že večkrat izkazalo.

Geometrijska predstava za funkcijo ene spremenljivke je krivulja v ravnini. Pri tem si pod zvezno funkcijo predstavljamo krivuljo, ki je povsod povezana, nikjer pretrgana. Če pa je funkcija pri neki vrednosti neodvisne spremenljivke odvedljiva, je krivulja v pripadajoči točki gladka, ima tam tangento. Kolikor si moremo predstavljati, ima povezana krivulja lahko le nekaj takih točk, v katerih ni gladka. Zanašajoč se na svojo predstavo, bi torej formulirali takle izrek: Vsaka zvezna funkcija je skoraj povsod odvedljiva. Če pa bi hoteli to dokazati, bi se zaman trudili, kajti ta izrek sploh ne drži. Konstruiranih je bilo že več takih funkcij, ki so na nekem intervalu povsod zvezne, pa v nobeni točki odvedljive. Prvi tak primer je bil objavljen leta 1874 — funkcijo je konstruiral Weierstrass — in je izzval precej presenečenja. Namen tega sestavka je, prikazati nekaj takih čudnih funkcij.

Navadno zapisujemo števila v dekadičnem sistemu, to pomeni, da jih razvrščamo po potencah števila 10. Namesto števila 10 pa lahko vzamemo za osnovo poljubno drugo naravno število razen 1. V nadaljnjem bomo uporabljali osnovi 2 in 3.

Preidimo zdaj k stvari. Funkcijo $f(x)$ definirajmo na intervalu $0 \leq x \leq 1$ z naslednjim predpisom: Zapišimo x v ternarnem sistemu:

$$(1) \quad x = 0, x_1 \dots x_k \dots \quad (\text{osnova } 3)$$

Tu je vsak x_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) enak 1, 2, ali 0 (število $x = 1$ zapišemo $0,222\dots 2\dots$).

Funkcijsko vrednost pri tem x pa zapišemo v binarnem sistemu:

$$f(x) = 0, y_1 \dots y_k \dots \quad (\text{osnova } 2);$$

$y_k = 0$ ali 1 ($k = 1, 2, 3, \dots$). Pri danem x določimo y_k takole: če je v razvoju (1) $x_1 = 1$, naj bo tudi $y_1 = 1$. Pri $x_1 \neq 1$ pa na bo $y_1 = 0$. Nadalje naj bo $y_{k+1} = y_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), če je v (1) $x_{k+1} = x_k$. Kadar pa je $x_{k+1} \neq x_k$, naj bo tudi $y_{k+1} \neq y_k$. Ker imamo samo dve možnosti za y_k , je s tem predpisom funkcijska vrednost $f(x)$ natančno določena. Npr. za

$$x = 0,2012210222\dots 2\dots = 0,2012211000\dots 0\dots \quad (\text{osnova } 3)$$

je

$$f(x) = 0,0101101000\dots 0\dots = 0,0101100111\dots 1\dots \quad (\text{osnova } 2)$$

Pri tem primeru smo dobili za dva različna ternarna zapisa istega števila x po navedenem pravilu sicer dva različna binarna zapisa funkcijske vrednosti, vendar oba zapisa pomenita isto število. Lahko je preveriti, da je tako v vsakem primeru. Funkcija $f(x)$ je torej enolična. Iz njene definicije takoj vidimo, da

bomo dobili poljubno naprej predpisane »decimalke« y_k funkcijske vrednosti $f(x)$, če primerno izberemo decimalke argumenta x .

Poglejmo, kako je z zveznostjo. Vzemimo z definicijskega intervala dve števili x' in x'' , ki se, zapisani v ternarnem sistemu, ujemata v prvih n »decimalkah«. Očitno se pripadajoči funkcijski vrednosti $f(x')$ in $f(x'')$, zapisani v binarnem sistemu, prav tako ujemata v prvih n »decimalkah«. Zato se ne razlikujeta za več kakor za 2^{-n} . Dve števili x' in x'' , ki se razlikujeta za manj od 3^{-n} , se ne ujemata vedno v prvih n mestih, če jih zapišemo v ternarnem sistemu. Vendar je funkcija $f(x)$ povsod zvezna, ker je enolično določena za take x , ki se dajo zapisati v ternarnem sistemu na dva načina.

Poglejmo zdaj, kako je z odvedljivostjo. Vzemimo poljuben x z definicijskega intervala in pripadajočo funkcijsko vrednost

$$x = 0, x_1 \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{n+k} \dots \quad (\text{osnova } 3)$$

$$f(x) = 0, y_1 \dots y_n y_{n+1} y_{n+2} \dots y_{n+k} \dots \quad (\text{osnova } 3)$$

Pri poljubnem naravnem številu n lahko določimo števila $x'_{n+1}, x'_{n+2}, \dots, x'_{n+k}, \dots$ tako, da bo naslednji vrednosti neodvisne spremenljivke

$$x' = 0, x_1 \dots x_n x'_{n+1} x'_{n+2} \dots x'_{n+k} \dots \quad (\text{osnova } 3)$$

pripadala funkcijska vrednost

$$f(x') = 0, y_1 \dots y_n y'_{n+1} y_{n+2} \dots y_{n+k} \dots \quad (\text{osnova } 2)$$

kjer je $y'_{n+1} \neq y_{n+1}$. Vrednosti $f(x)$ in $f(x')$ se bosta razlikovali le v $n+1$ »decimalki«. Vemo namreč, da moremo $x'_{n+1}, x'_{n+2}, \dots$ vedno tako izbrati, da so ustrezne »decimalke« funkcijske vrednosti poljubne, torej tudi enake $y'_{n+1}, y_{n+2}, \dots$. Seveda je v vsakem primeru $x'_{n+1} \neq x_{n+1}$. Veljata torej neenačbi

$$0 < |x' - x| < 3^{-n} \quad \text{in} \quad |f(x') - f(x)| = 2^{-n-1}$$

Od tod pa sledi

$$(2) \quad \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \right| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

Število n smo si poljubno izbrali in ga zato lahko večamo preko vsake meje. Pri tem konvergira x' k x . Če bi bila funkcija $f(x)$ v točki x odvedljiva, bi pri tem leva stran neenačbe (2) konvergirala proti absolutni vrednosti odvoda funkcije v tej točki. Neenačba (2) pa mi pove, da raste izraz

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \right|$$

v neskončno, ko raste n preko vsake meje. Od tod sledi, da funkcija $f(x)$ v točki x ni odvedljiva. Ker je bil x poljuben, ni odvedljiva nikjer.

Še bolj presenetljive zaključke dobimo pri naslednjem primeru. Vzemimo v ravnini (x, y) krivuljo, ki je podana v parametrični obliki: $x = x(t)$,

$y = y(t)$. Ti dve funkciji sta definirani za $0 \leq t \leq 1$ z naslednjim predpisom: Zapišimo t v sistemu z osnovo 6:

$$t = 0, t_1 t_2 \dots t_k \dots \quad (\text{osnova } 6)$$

Vsak t_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) je enak enemu izmed števil 0, 1, 2, 3, 4, 5. Pripadajoči vrednosti x in y zapišemo v binarnem sistemu:

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_k \dots \quad (\text{osnova } 2)$$

$$y = 0, y_1 y_2 \dots y_k \dots \quad (\text{osnova } 2)$$

Vsak x_k in y_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) je ali 0 ali 1, določimo pa to po naslednjih pravilih:

1. $x_1 = 0$ tedaj in le tedaj, če je $t_1 = 0, 1$ ali 2;
 $y_1 = 0$ tedaj in le tedaj, če je $t_1 = 0, 1$ ali 3;
2. če je $t_{k+1} = 0$ ali 5 in $t_{k+1} = t_k$, naj bo $x_{k+1} = x_k$ in $y_{k+1} = y_k$;
3. če je $t_{k+1} = 0$ ali 5 in $t_{k+1} \neq t_k$, naj bo $x_{k+1} \neq x_k$ in $y_{k+1} \neq y_k$;
4. če je $t_{k+1} = 1$, naj bo $x_{k+1} = 0$ in $y_{k+1} = 0$;
5. če je $t_{k+1} = 2$, naj bo $x_{k+1} = 0$ in $y_{k+1} = 1$;
6. če je $t_{k+1} = 3$, naj bo $x_{k+1} = 1$ in $y_{k+1} = 0$;
7. če je $t_{k+1} = 4$, naj bo $x_{k+1} = 1$ in $y_{k+1} = 1$.

Na enak način kot prej je mogoče dokazati, da sta funkciji $x(t)$ in $y(t)$ povsod zvezni in nikjer odvedljivi. Lahko pa ugotovimo še nekaj drugega. Vzemimo poljubno točko s koordinatama (x', y') , pri čemer je $0 \leq x' \leq 1$, $0 \leq y' \leq 1$. Zapišimo koordinati x' in y' v binarnem sistemu:

$$x' = 0, x'_1 x'_2 \dots x'_k \dots \quad (\text{osnova } 2)$$

$$y' = 0, y'_1 y'_2 \dots y'_k \dots \quad (\text{osnova } 2)$$

Določimo število

$$t' = 0, t'_1 t'_2 \dots t'_k \dots \quad (\text{osnova } 6)$$

takole:

- | | | |
|--|---|----------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. če je $x'_k = 0$ in $y'_k = 0$, naj bo $t'_k = 1$ 2. če je $x'_k = 0$ in $y'_k = 1$, naj bo $t'_k = 2$ 3. če je $x'_k = 1$ in $y'_k = 0$, naj bo $t'_k = 3$ 4. če je $x'_k = 1$ in $y'_k = 1$, naj bo $t'_k = 4$ | } | $k = 1, 2, 3, \dots$ |
|--|---|----------------------|

Očitno je pri tako določenem t' funkcijska vrednost $x(t')$ enaka x' , vrednost $y(t')$ pa enaka y' . To pa pomeni, da leži izbrana točka (x', y') na naši krivulji. Ker pa je za x' in y' edina omejitev to, da sta med 0 in 1, sledi od tod, da gre krivulja skozi vsako točko kvadrata $\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ najmanj enkrat.

Jože Vrabec

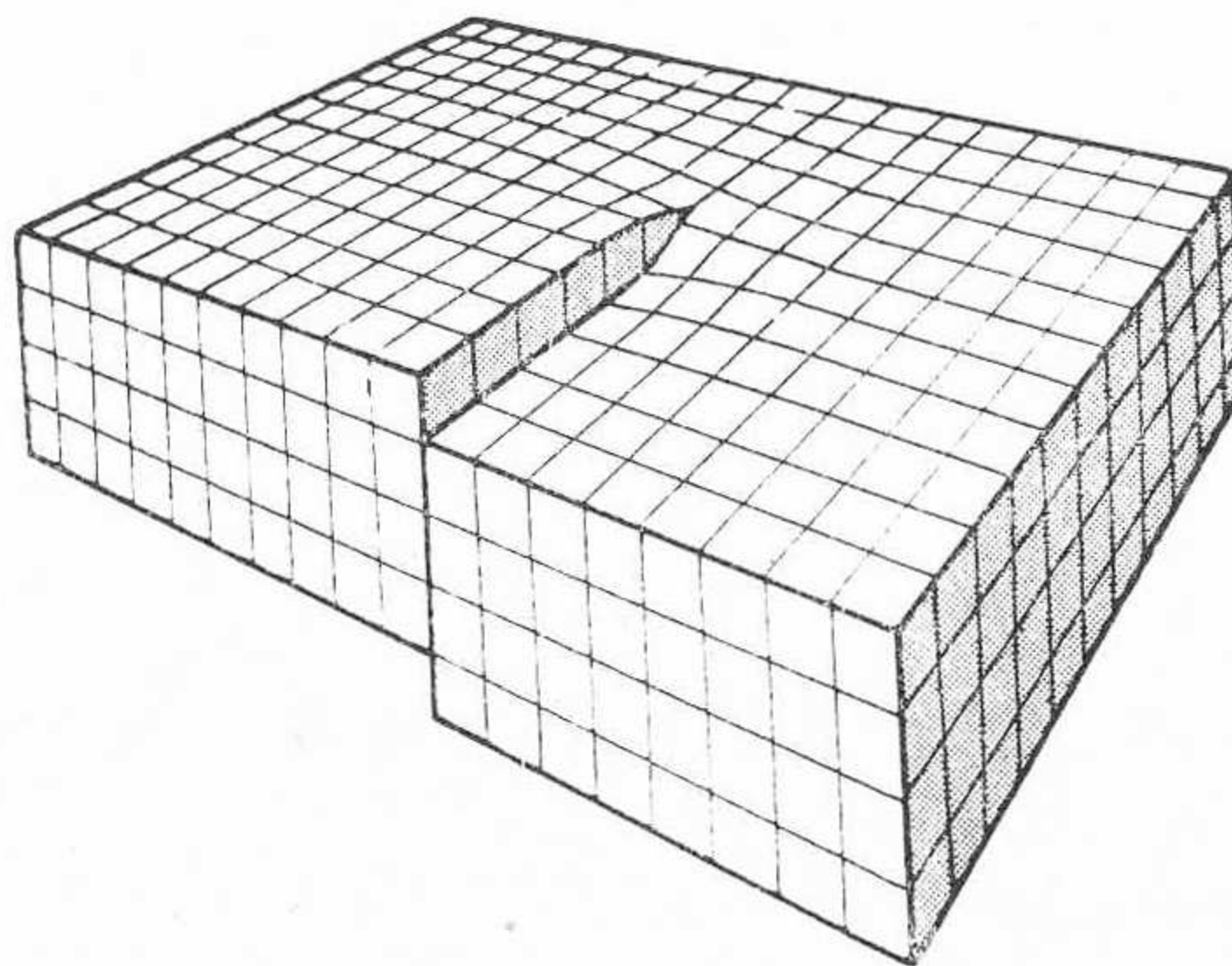
Literatura:

W. C. Swift: Simple constructions of nondifferentiable functions and space-filling curves. The Amer. Math. Monthly, Vol. 68, 1961, str. 653—655.

✓ MEHANSKE LASTNOSTI LEDU

(Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko)

Uvod. Znano je, da lahko uporabljamo led in sneg kot gradbeni material. Prebivalci arktičnih krajev so dolgo časa delali iz ledu ceste in mostove, iz snega pa so zidali hiše. Led iz ledenikov so na primer v Združenih državah uporabljali tudi v vojaške namene za gradnjo predorov in zaklonišč. Lansko leto pa so na zimski olimpiadi v Kaliforniji služile večje površine stlačenega snega kot parkirni prostor za večje število avtomobilov. Znano je tudi, da so v Antarktiki iz stlačenega snega zgradili ceste, iz ledu pa letališča.



Sl. 1. Nastanek dislokacije v kristalu.

Led in sneg, kakor ju najdemo v naravi, pa sta v gradbene namene precej neuporabna. Če ju torej hočemo uporabljati za gradnjo, je treba njune lastnosti s posebnimi postopki izboljšati. Vse raziskave ledu v preteklosti so bile izključno kvalitativne in so se zadovoljile samo z opisovanjem pojavov. Šele v zadnjih letih so se znanstveniki lotili teh problemov kvantitativno. Prizadevali so si, da bi naredili zlitino ledu na enak način kot se delajo zlitine kovin. Kot prizadevanje v tej smeri naj omenimo, da so med zadnjo vojno Angleži poskusili z mešanico ledu in žaganja, ki se je imenovala »pykrete«. Ta mešanica je bila trdnjša od naravnega ledu in tudi bolj homogena. Z njo so nameravali zgraditi tako imenovana plavajoča letališča. Na njih bi lahko pristajala letala in tako ne bi bila vezana na pristajanje na Britanskem otočju.

Pri razvijanju zlitin ledu je bilo treba najprej raziskati faktorje, ki vplivajo na mehansko trdnost. Znani so bili rezultati raziskav pri kovinskih zlitinah. Treba je bilo ugotoviti, v koliki meri veljajo razlage, ki so že obstajale za kovinske zlitine, tudi za zlitine ledu.

Vpliv dislokacij na mehanske lastnosti snovi. Če hočemo razumeti, kakšne so mehanske lastnosti kovinskih zlitin pri nizkih temperaturah, moramo poznati teorijo dislokacij. Pod dislokacijo razumemo mrežno nepravilnost v kristalu, do katere pridemo na tale način: Kristal si mislimo deloma prerezan (slika 1) in nato na eni strani reza deformiran glede na nedeformirani del kristala na drugi strani reza. Potem oba dela kristala zlepimo tako, da se atomi spet ujemajo. Po zlepljenju odstranimo zunanje napetosti in pustimo, da medatomske sile v kristalu ponovno vzpostavijo ravnovesje. Na koncu se torej

mrežne ravnine spet ujemajo, razen v neposredni bližini črte, do katere smo kristal prerezali. Ta črta se imenuje *dislokacijska črta*. Tam so močne lokalne napetosti. Glede na smer deformacije v ravnini reza ločimo dve tipični vrsti dislokacij, namreč *robne* in *vijačne* dislokacije. Če je dislokacijska črta pravokotna na smer deformacije, se dislokacija imenuje robna, če pa je dislokacijska črta vzporedna s smerjo deformacije, imamo opravka z vijačno dislokacijo (slika 2). V splošnem pa je smer plastične deformacije v ravnini reza poljubna.

Dislokacije nastanejo v kristalu že pri njegovi rasti, lahko pa tudi pozneje kot posledica plastičnih deformacij. Če material obremenimo, se začnejo dislokacije gibati. Pri tem ostane dislokacijska črta v isti mrežni ravnini. Tej ravnini pravimo *ravnina polzenja*.

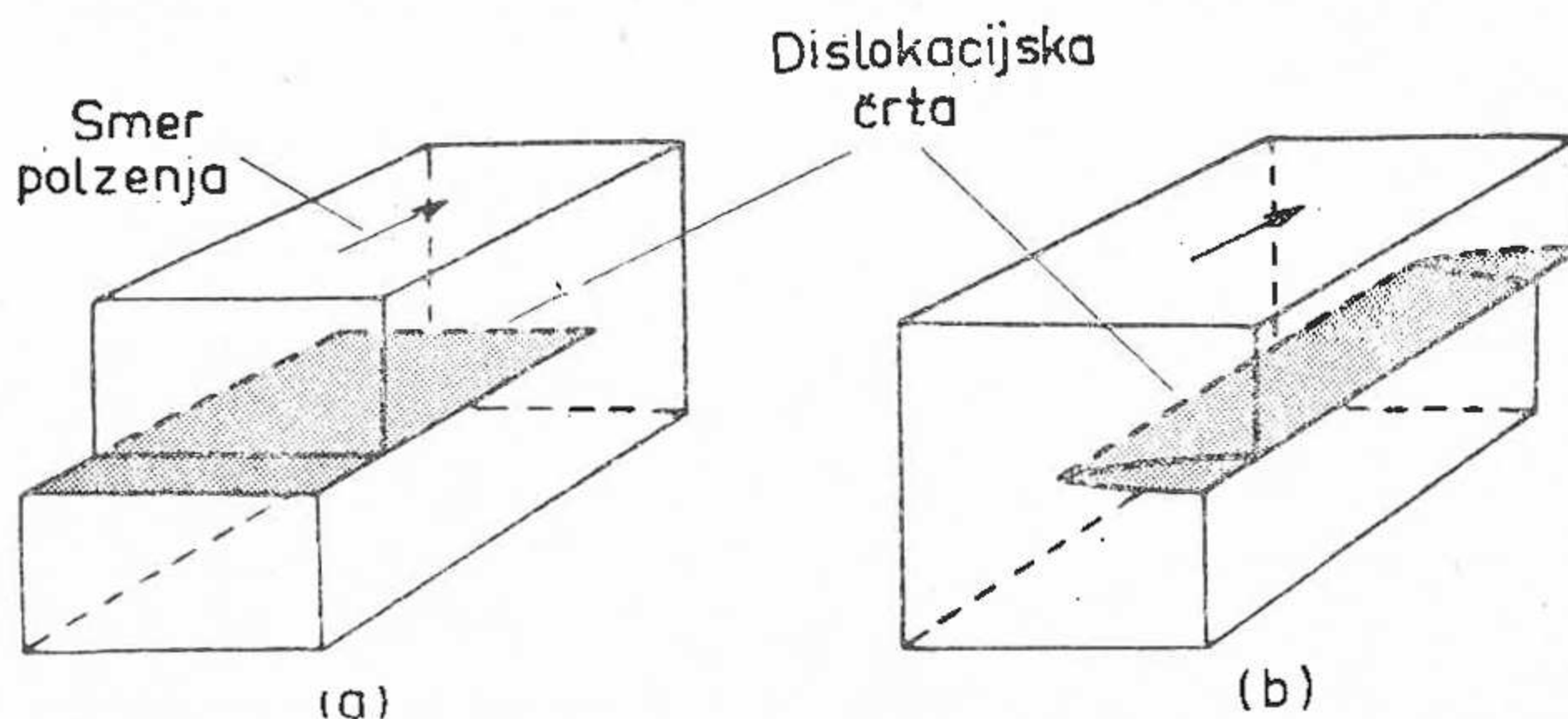
Trdnost materiala povečamo, če odpravimo dislokacije ali če preprečimo njihovo gibanje. Kristali, ki imajo manj dislokacij, se teže plastično deformirajo. Gibanje dislokacij preprečujemo tako, da dodajamo primesi, to se pravi, da v kristalno mrežo vrinemo tuje atome. Ti pridejo ali na normalna mesta atomov v kristalni mreži ali pa na mesta med mrežnimi ravninami. Primesi se koncentrirajo tam, kjer so dislokacije, in tako preprečujejo njihovo gibanje. Drugi način, s katerim zaviramo gibanje dislokacij, je v tem, da vgradimo v kristal koščke kakšnega drugega materiala. Ti ovirajo polzenje dislokacij in zato je potrebna večja napetost za plastično deformacijo kristala.

Če imamo opravka namesto z zlitinami kovin s keramičnimi materiali, ne pride do plastične deformacije, ampak nastopi krhki lom. Vzroki krhkega loma so pri različnih materialih različni. Zaradi razpok v materialu ali na njegovi površini nastanejo velike lokalne napetosti in končno pride do zloma. Za nastop zloma imamo Griffithov kriterij, ki pravi: Zlom nastopi, kadar je deformacijska energija, ki se sprosti pri širjenju razpok, enaka površinski energiji tistih površin, ki se na novo oblikujejo. Najbolj pogosto pride do zelo majhnih razpok zaradi nepravilnosti na površini kristala. Te nepravilnosti so znane pod imenom površinski defekti. To velja zlasti za steklo in za keramične materiale. Znano je na primer, da je prelomna trdnost stekla okrog $7 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$, če je površina dobro zaščitena, medtem ko je običajna trdnost stekla $7 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}$.

Pri visokih temperaturah pa nastopi popolnoma nov element, ki ga moramo upoštevati, če raziskujemo trdnost materiala. Ta se pojavi zaradi večje gibljivosti atomov. Dislokacije v kristalu niso pri gibanju nič več omejene na eno samo mrežno ravnino, ampak se lahko premaknejo v bližnjo, na primer sosednjo ravnino. Ta pojav se imenuje *plezanje*. Ker se dislokacije svobodneje gibljejo, se lahko izognejo primesem, ki smo jih vgradili v kristal. Te jih več ne ovirajo na njihovi poti. Pri visokih temperaturah se torej vpliv primesi zmanjša. Če hočemo v tem primeru povečati trdnost materiala, je najbolje, da dodamo materialu trde delce, ki omejujejo gibanje dislokacij. S tem seveda ne moremo popolnoma preprečiti gibanja dislokacij, ker le-te lahko spolzijo iz svojih ravnin polzenja in tako obidejo delec, ki naj bi zaviral njihovo gibanje. Ta metoda dodajanja trdih delcev se uporablja v glavnem za ojačevanje mehkih materialov, kot so na primer plastične snovi. Pogosto dodajamo tem mehkim materialom vlaknaste delce. Če hočemo, da so taka ojačevanja uspešna, to se pravi, da s tem preprečimo plastično deformacijo in zlom, mora biti vlakno precej močnejše od matičnega materiala in mora imeti mnogo večji modul elastičnosti. Potem nosi večji del bremena material, ki služi za ojačenje, matični material pa je le malo obremenjen. Ta vrsta jačenja je učinkovita samo v tem-

peraturnem intervalu, v katerem so velike razlike med trdnostnim obnašanjem matičnega materiala in vlakna.

Zlitine ledu. Če hočemo narediti uporabne zlitine ledu, moramo dobro poznati lastnosti ledu in zlasti vedeti, kako se obnaša proti deformacijam. Strokovnjaki so led precej raziskovali in skrbno opazovali, kako je z deformacijo in zlomom. Ugotovili so, da ima led v tem oziru podobne lastnosti kot drugi materiali. V tesni zvezi je s safirjem (Al_2O_3), ki ima podobno kristalno strukturo. Pri aluminijevem oksidu, kakor tudi pri steklu, pride pri nizkih temperaturah do krhkega zloma, pri zelo visokih temperaturah pa do plastične deformacije in palica iz tega materiala se lahko upogne. Če pa palico hitro deformiramo namesto počasi, pride do krhkega loma celo blizu tališča. Te lastnosti aluminijevega oksida pripisujejo njegovi kristalni strukturi in dislokacijam, ki so v njem. Pri aluminijevem oksidu nastopa namreč plastična deformacija vedno tako, da pride do polzenja vzdolž osnovne ravnine heksagonalne strukture.



Sl. 2. Vrste dislokacij v kristalu: a) robna dislokacija, b) vijačna dislokacija.

Led ima tudi heksagonalno strukturo. Smatramo lahko, da je led sestavljen iz več plasti. Ko postanejo pri visokih temperaturah sile med sosednjimi plastmi šibkejšje, začnejo te plasti pri obremenitvi polzeti druga ob drugi in zato pride do deformacije. Pri hitrih deformacijah nastopi krhki lom. To pa zato, ker dislokacije, ki se pod vplivom bremena gibljejo, ne morejo slediti hitrim obremenitvam. Drugače pa je pri nizkih temperaturah. Tam pride do krhkega loma celo takrat, kadar led razmeroma počasi obremenjujemo. Iz vsega tega vidimo, da se led plastično deformira, kadar ga obremenimo statično ali zelo počasi. To velja celo do temperature $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Prišli smo do naslednjega spoznanja: Ker uporabljamo led in njegove zlitine skoraj vedno v območju visokih temperatur, ne moremo dobiti uporabnih zlitin z dodajanjem atomarnih primesi. Na osnovi dolgoletnih izkušenj s kovinami, plastičnimi in keramičnimi snovmi so ugotovili, da so pod pogoji visoke temperature najbolj uporabne take vrste zlitin, ki jih dobimo z dodajanjem trdih delcev primernih materialov. Kot primesi pridejo v poštev materiali z velikim modulom elastičnosti in veliko trdnostjo, vlaknasti materiali z majhnim modulom elastičnosti in s srednjo trdnostjo ter vlaknasti materiali z velikim modulom elastičnosti in veliko trdnostjo.

Raziskave, pri katerih so uporabljali trde delce kot primesi, so izvedli tako, da so dodali vodi med strjevanjem fine delce koalina. Študirali so trdnost take zlitine pri kratkotrajnih obremenitvah. Izkazalo se je, da se trdnost zaradi prisotnosti kaolina ni povečala, pač pa se je pri dani napetosti material bistveno manj plastično deformiral. Ta ugotovitev je tudi v skladu s pričakovanji, ki so

jih dale obširne metalurške raziskave o ojačevanju materiala z dodajanjem drobno razpršenih delcev.

Pri »pykretu«, ki smo ga omenili v uvodu, so dodajali za ojačevanje lesna vlakna. Raziskovanja kažejo, da če dodamo ledu lesno kašo, se bistveno poveča njegova trdnost proti kratkotrajnim obremenitvam, odpornost proti deformaciji in tudi proti stiskanju in udarjanju.

Kot primes v zlitini ledu lahko služijo tudi steklena vlakna. Ta imajo v primeri z ledom velik modul elastičnosti in tudi veliko trdnost. Če tako zlitino obremenimo, nosijo zaradi velikega modula elastičnosti v pretežni meri breme steklena vlakna in zato je napetost, ki nastane v ledu, zelo majhna. Če dodamo na primer 5 % steklenih vlaken, se trdnost ledu več kot desetkrat poveča.

Literatura:

1. W. D. Kingery, Ice Alloys, Science, 134, 164 (1961).
2. A. H. Cottrell: Dislocations and Plastic Flow in Crystal, Clarendon, Oxford 1953.
3. W. T. Read, Jr.: Dislocations in Crystals, McGraw-Hill, New York 1953.

Tomislav Skubic

✓ MERJENJE TEMPERATURE V IONOSFERI

Temperatura atmosfere na višini okoli 100 km je bila najprej izmerjena iz opazovanj zvočne hitrosti. Zvok so povzročile granate, ki so jih na to višino ponesle rakete. O temperaturi v še višjih plasteh pa so sklepali iz opazovanj polarnega sija.

Poizkus novega načina merjenja temperature, ki je osnovan na merjenju Dopplerjeve širine spektralnih črt, so lani marca izvedli Francozi. Ob mraku so izstrelili raketo, ki je na višinah od 100 do 150 km izpustila oblak natrijevih par. Oblak so lahko opazovali zaradi resonančno sipane sončne svetlobe 5890 in 5893 Å na atomih natrija. Posamezne točke oblaka so fotografirali, višine teh točk pa so določili s triangulacijo.

Z namenom, da bi določili temperaturo oblaka, so ga istočasno fotografirali z dvema podobnima optičnima sistemoma, katerih eden je vseboval celico z natrijevo paro. Sonce je osvetljevalo oblak še kake pol ure, tako da so ga lahko večkrat fotografirali. Iz počrtnitve fotografij so določili gostoti svetlobnih tokov, ki sta prihajala na plošči.

V primeru, ko gre svetloba skozi natrijevo paro, je gostota prepuščenega svetlobnega toka odvisna od profila spektralne črte, kakor bo razvidno iz naslednjega.

Dopplerjeva razširitev spektralne črte nastopi zaradi različnih hitrosti izvorov svetlobe. V našem primeru so to natrijevi atomi, na katerih se svetloba siplje. Hitrostna porazdelitev atomov je podana z Maxwell-Boltzmannovo formulo:

$$dN/N = (m/2\pi kT)^{1/2} \exp(-m v_x^2/2 kT) dv_x,$$

pri čemer je dN število atomov, ki imajo komponento hitrosti v intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$. N število vseh atomov, m masa natrijevega atoma, k Boltzmannova konstanta, T temperatura oblaka.

Če se giblje delec, ki emitira valovanje s frekvenco ν_0 , s hitrostjo v_x proti opazovalcu, bo ta zaznal valovanje s frekvenco $\nu = \nu_0 (1 + v_x/c)$. Hitrost lahko izrazimo z razliko frekvenc: $v_x = c \nu_0^{-1} (\nu - \nu_0)$. Podobno izrazimo porazdelitev:

$$dN/N = (m/2 \pi kT)^{1/2} \exp [-m (\nu - \nu_0)^2 c^2 (\nu_0^2 2 kT)^{-1}] c d\nu$$

Ta izraz že pove, kolikšen del (dN/N) registriranih fotonov ima frekvenco v intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$. S tem je torej opisan profil spektralne črte, ki je razširjena zaradi Dopplerjevega efekta. S tem, da vpeljemo namesto števila fotonov gostoto svetlobnega toka I_1 , ki prihaja skozi sistem brez absorpcijske celice, ter $u^2 = mc^2 (\nu - \nu_0)^2 (2 kT \nu_0^2)^{-1}$, lahko zgornji rezultat še malo drugače zapišemo

$$dI_1 = C \exp (-u^2) du.$$

Svetloba, ki prihaja skozi absorpcijsko celico, se v njej delno absorbira. Za gostoto prepuščenega svetlobnega toka v intervalu du velja zato

$$dI_2 = C \exp (-u^2) \exp (-\mu l) du.$$

Pri tem je μ absorpcijski koeficient in l dolžina celice. Odvisnost absorpcijskega koeficienta je podana s profilom spektralne črte, torej z enako funkcijo kot zgoraj, le da je temperatura pare sedaj drugačna (T_1), torej:

$$\mu = \mu_0 \exp (-u^2 T/T_1) \quad \text{in} \\ dI_2 = C \exp [-u^2 - \mu_0 l \exp (-u^2 T/T_1)] du.$$

Počrnitev plošč je odvisna od celotne gostote svetlobnega toka, ki je podana z $I_1 = \int dI$ za prvi ter z $I_2 = \int dI_2$ za drugi sistem. Integrala zajemata frekvenčno območje razširjene črte. Razmerje I_2/I_1 , ki so ga izmerili, je takole odvisno od obeh temperatur:

$$I_2/I_1 = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-u^2 - \mu_0 l \exp (-u^2 T/T_1)] du.$$

Pri končnem računanju temperature oblaka so upoštevali še popravke zaradi absorpcije v atmosferi, ki tudi vsebuje nekaj natrijevih atomov. Dobili so rezultate, ki jih kaže tabela.

Tabela

Višina	Temperatura
(km)	(°K)
100	215 ± 25
110	240 ± 30
120	275 ± 45
130	325 ± 50
140	400 ± 90
150	515 ± 115

Literatura: J. E. Blamont, Phys. Rev. Letters, 6, 8, 1961.

Igor Grabec

ČETRTI KONGRES SOVJETSKIH MATEMATIKOV

Od tretjega do dvanajstega junija 1961 je potekal v Leningradu četrti vsezvezni matematični kongres. Udeležilo se ga je 1834 sovjetskih matematikov in 48 matematikov iz drugih držav, med njimi tudi iz Jugoslavije. Kongresu so predložili več kot 1400 referatov, skoraj dvakrat toliko kot na tretjem kongres. Na plenarnih zasedanjih so poslušali 30 daljših predavanj, ki jih navaja naslednji seznam:

A. D. Aleksandrov (Leningrad), A. V. Pogorelov (Harkov): »Teorija ploskev in parcialne diferencialne enačbe«.

V. V. Vagner (Saratov): »Osnove diferencialne geometrije in sodobna algebra«.

I. N. Vekua (Novosibirsk): »Enačbe in sistemi enačb eliptičnega tipa«.

B. A. Venkov (Leningrad), B. N. Delone (Moskva): »O pravilnih razbitjih prostorov«.

M. I. Višik (Moskva), G. E. Šilov (Moskva): »Splošna teorija parcialnih diferencialnih enačb in nekateri problemi teorije robnih nalog«.

I. M. Gel'fand (Moskva): »Nekateri splošni problemi sodobne funkcionalne analize«.

A. O. Gel'fond (Moskva): »Nekaj uporab teorije funkcij in teorije števil«.

V. M. Gluškov (Kiev): »Algebrska teorija avtomatov«.

N. V. Efimov (Moskva): »Problemi izometrične vložitve v celem«.

V. V. Ivanov (Moskva): »Matematična lingvistika«.

L. V. Kantorovič (Novosibirsk): »Problemi matematične ekonomike«.

M. V. Keldyš (Moskva): »Teorija nesebiadjungiranih operatorjev«.

A. N. Kolmogorov (Moskva): »Diskretni avtomati in končni algoritmi«.

M. A. Krasnosel'skij (Voronež): »Funkcionalna analiza in topologija v nelinearnih nalogah diferencialnih in integralnih enačb«.

M. G. Krejn (Odesa): »O nekaterih novih rezultatih v teoriji motenj linearnih operatorjev«.

O. A. Ladyženskaja (Leningrad): »O rešljivosti ,v celem' robnih nalog za Navier-Stokesove enačbe in za kvazilinearne parabolične enačbe«.

Ju. V. Linnik (Leningrad), I. P. Kubiljus (Vilno): »Nove uporabe verjetnostnega računa v teoriji števil«.

L. A. Ljusternik (Moskva), O. A. Olejnik (Moskva): »Nekatere naloge za parcialne diferencialne enačbe, ki vsebujejo mali parameter«.

A. I. Mal'cev (Novosibirsk): »Sodobno stanje teorije razredov modelov«.

A. A. Markov (Moskva), I. D. Zaslavskij (Erevan), G. S. Cejtin (Leningrad), N. A. Šanin (Leningrad): »Konstruktivna matematična analiza«.

P. S. Novikov (Moskva): »Teorija algoritmov in problemi algebre«.

V. I. Platnikov (Gor'kij), A. G. Sigalov (Gor'kij), N. N. Ural'ceva (Leningrad): »Kvazilinearne eliptične enačbe in variacijski problemi«.

L. S. Pontrjagin (Moskva), V. G. Boltjanskij (Moskva), R. V. Gamkrelidze (Moskva), E. F. Miščenko (Moskva): »Matematična teorija optimalnih regulacijskih procesov«.

M. M. Postnikov (Moskva): »O homotopski teoriji zveznih preslikav«.

V. A. Rohlin (Leningrad): »Diferencialna topologija«.

E. G. Skljarenko (Moskva), Ju. M. Smirnov (Moskva): »Teorija dimenzije topoloških in enakomernih prostorov«.

S. L. Sobolev (Novosibirsk), S. M. Nikol'skij (Moskva): »Izreki o vložitvi«.

A. N. Tihonov (Moskva), K. I. Babenko (Moskva): »O diferenčnih metodah reševanja nalog matematične fizike«.

M. R. Šura-Bura (Moskva), A. P. Eršov (Moskva): »Strojni jeziki in avtomatično programiranje«.

A. M. Jaglom (Moskva): »Spektralne razčlenitve za različne razrede slučajnih funkcij«.

France Križanič

Literatura:

B. B. Петров: Четвертый всесоюзный математический съезд. Успехи математических наук. Том XVII, выпуск 1 (103). Москва 1962, stran 261.

DOMAČE VESTI

✓ Z EINSTEINOM V ŠTATENBERGU

Matematiki in fiziki veljajo že a priori — ni še dognano, ali po svoji naravi ali pod vplivom predmetov, ki jih poučujejo — za puste in nedružabne ljudi... Če pa pogledamo nazaj tja do osvoboditve, moremo ugotoviti ravno nasprotno. Najbrž ni bilo niti enega leta, da se ne bi sestali na kakem tečaju, poučni ekskurziji, ali pa na seminarju ali simpoziju, kakor se tem koristnim in hkrati prijetnim zborom učeno reče. Matematično-fizikalni aktiv je v vsej tej razgibani dobi iskanja in izpopolnjevanja sodil med najaktivnejše in najiznajdljivejše. Vse to naše skupno delo in prizadevanje nas je brusilo in bogatilo, hkrati pa je v nas budilo čut za skupnost in tovarištvo. Ta povezanost velike Pitagorove družine je bila tako čvrsta, da je dobro prenesla vse reforme, srečno vzdržala vse fissije in fuzije ter se vedno živa in pomlajena pojavila v novih razmerah v novi obliki, vselej dobro razpoložena za v bistvu isto lepo in koristno delo.

Ko letos še v marcu ni bilo glasu o seminarju moderne fizike, za kakršnega smo se bili dogovorili lani v Portorožu, so začela prihajati vprašanja od vseh strani. Medtem pa so navzlic nepričakovanim oviram že dozorevale zadnje priprave. Z zapoznelo pomladjo se je zakasnil tudi letošnji seminar, ki ga je organiziral Zavod za napredek šolstva LRS s sodelovanjem Društva matematikov in fizikov LRS in nuklearnega inštituta »Jožef Stefan«. Četudi je bil ta dvodnevni seminar napovedan šele za drugo polovico meseca maja, ko se šolsko leto že nagiblje h kraju, četudi je bilo zaradi reorganizacije prosvetne službe in zlasti še finansiranja precej težav (nekateri direktorji so baje zapeljiva vabila, ki bi utegnili vznemiriti njihove učitelje matematike in fizike, previdno poskrili v svoje predale), se je vendarle 18. maja zjutraj zbralo v prekrasnem gradu Štatenbergu (ta bi lahko bil za majhne stroške pa malo večjo skrb in organizacijsko sposobnost — še mnogo lepši in privlačnejši!) nad 70 matematikov in fizikov iz vse Slovenije. Že po prvem prijateljskem srečanju smo lahko ugotovili, da je bilo relativno najmanj udeležencev iz — Ljubljane, Maribora in Celja, največ pa iz — Postojne... Ali je to mesto na našem revnem Krasu res najbolj bogato ali pa ima največ čuta za kulturne potrebe in strokovni dvig svojih kadrov?... Mislimo, da bi tako lepi in koristni tečaji

in seminarji, v katere mora skupnost investirati toliko denarja in naporov, ne smeli iti mimo vseh tistih ljudi, ki so nanje poklicani. Mi vsi, ki nam je bilo dano, da smo se tega seminarja lahko udeležili, čutimo danes globoko hvaležnost — tako do prirediteljev, kakor do naših prosvetnih oblasti in seveda vseh treh predavateljev — dr. ing. R. Blinca, ing. J. Strnada in ing. Kregarja. Vsa tri poglavja: »Osnove teorije relativnosti«, »Eksperimentalni temelji teorije relativnosti« in »Jedrske reakcije v zvezdah« so bila podana v tako lepi in vsem dostopni obliki, da smo jim vsi z užitkom sledili. K temu prištejmo še prekrasno okolje, dobro hrano, toplo tovariško razpoloženje in še prijeten



Udeleženci seminarja na grajskem dvorišču

občutek, da vendar enkrat ne predavaš oz. učiš sam, ampak, da drugi predavajo tebi! Vsi našeti faktorji so pripomogli, da je tudi ta tečaj odlično uspel. Indiskretni in hudomušni kronist bi nam seveda lahko nadrobil še več zanimivih epizod: o sprehodih v mesečini, o strahovih, ki so v polnočni uri šumeli po grajskih sobanah, o prekrasnih freskah — zlasti v rumenem apartmanu, kjer je bilo vedno dovolj občudovalcev itd.

Za konec še povejmo, da se bomo prihodnje leto spet sestali — kdaj in kje ni važno —, da bomo slišali kaj novega in zanimivega iz moderne matematike. Torej mislite že danes na veselo — snidenje!

Francè Šušteršič

UTRINEK

TA JE PA OSTR

Članki v Physical Review se precej razlikujejo od člankov v Saturday Evening Post po velikosti razmerja »število bralcev : število avtorjev«. Sumimo, da je včasih za članke, ki jih dobi uredništvo Physical Review, to razmerje pred objavo celo manjše od kritične vrednosti ena. Na to nas navajajo opazovanja, saj dobimo včasih članek v tako žalostnem stanju, da ga verjetno niti avtor sam ni prebral in preveril.

Prosto po glavnem uredniku Physical Review
S. A. Goudsmitu, Phys. Rev. Letters 1, 49 (1958).

NEKAJ MISLI O NADALJNI IZOBRAZBI PROFESORJEV FIZIKE

(Ob stoletnici rojstva avtorja znanega fizikalnega učbenika Ernsta Grimsehl)

Dne 6. avgusta 1961 je preteklo sto let, odkar se je rodil našim, zlasti še starejšim profesorjem fizike po svojem učbeniku znani nemški fizik Ernst Grimsehl. Ob tej priliki je Prirodoslovno društvo v Hamburgu, kjer je Grimsehl deloval, izdalo slavnostno publikacijo, v kateri je prikazano življenje in delo zaslužnega pokojnika. V njej pa je tudi nekaj prav tehtnih člankov o pouku fizike na šolah, tako o poskusih učencev pri fizikalnem pouku, o razvoju eksperimentalnih metod pri tem pouku ter o nadaljnji izobrazbi učiteljev za prirodoslovni pouk. Posebno pomemben se mi zdi zadnji omenjeni članek, ki ga je napisal ravnatelj Posvetovanice za prirodoslovni pouk v Hamburgu Hans A. Ristau. Ker je obdelana snov tudi za nas aktualna, hočem na krako povzeti njegove misli in izvajanja. Uvodne besede, s katerimi prav koncizno prikazuje jedro te naloge, bom podal skorajda v celoti.

»Uspeh šole je odvisen mnogo bolj od znanja učiteljev kakor od oblike šolske organizacije in učnih načrtov. Ves trud za nadaljnji razvoj šole je zaman, ako ne zajame tudi vzgojo in nadaljnjo izobrazbo učiteljev. Medtem ko se splošno priznava pomen temeljne izobrazbe učiteljev, se mnogokrat omalovažuje potreba po njihovi nadaljnji načrtni izobrazbi. Ta potreba izvira iz velikih zahtev, ki jih stavljamo do učitelja. Učitelj mora biti dober vzgojitelj, mora znati dejstva jasno in privlačno prikazati ter navduševati učence k sodelovanju in učenju; obvladati mora metodiko svojih učnih predmetov; imeti mora široko splošno izobrazbo in temeljito znanje predmetov, ki jih uči; kot učitelj prirodoslovnih ved pa mora biti tudi spreten eksperimentator.

»Pri strokovni vzgoji dobi samo temeljno znanje, ki ga potrebuje kot učitelj; z metodiko in tehniko šolskih poskusov se seznani samo na nekaterih izbranih primerih; tudi pri praktičnem delu svoje vzgoje spozna samo izsek iz dela na šoli. Zaradi tega stoji učitelj tudi po svoji strokovni izobrazbi skoraj vsak dan pred nalogami in problemi, ki so zanj novi. Na veliko teh nalog naletijo vsi učitelji ali vsaj vsi učitelji iste stroke. Močno neracionalno je, da mora vsak učitelj zase rešiti te naloge in da mu ostanejo neznane dobre rešitve, do katerih so prišli drugi pred njim. Zaradi tega je treba zbirati in izkoriščati izkustva in spoznanja, pridobljena iz prakse in iz pedagoških razskavanj, ter skupno razpravljati o nerešenih vprašanjih in jih po možnosti rešiti. Za učitelje prirodoslovnih ved je še posebno pomembno, da se izmenjava izkustev nanaša tudi na šolske poskuse ter se nudi učiteljem možnost, da se dalje izurijo v eksperimentiranju in seznanijo z modernimi učili. Spričo burnega razvoja prirodnih ved in njihove čimdalje večje specializacije ne more učitelj več slediti strokovni literaturi in se z branjem izvirnih razprav seznaniti z napredki, ki so splošnega pomena ali ki so v zvezi z učno snovjo. V okviru nadaljnje izobrazbe se morajo zato učiteljem v primerni obliki prikazati tudi najpomembnejši uspehi prirodoslovnih raziskav in najvažnejši uspehi tehnike.«

Za tako očrtano nadaljnjo izobrazbo učiteljev predvideva pisec članka več možnosti; najvažnejša bi bila: priročniki, učbeniki, monografije, časopisi, kongresi, predavanja, tečaji, delovne skupnosti.

Kot organe, ki naj organizirajo ustrezno delo, navaja pisec: učiteljska in strokovna udruženja, državne zavode za nadaljnjo izobrazbo, znanstvene družbe, univerze in druge visoke šole, razen tega pa tudi tovarne učil in založbe šolskih knjig in učiteljem namenjenih časopisov. Tako prirejata dve zahodnonemški tovarni učil vsako leto vrsto počitniških tečajev, kjer se učitelji dalje urijo v tehniki, šolskih poskusih in se seznanjajo z novimi napravami.

Kot primer državne ustanove, ki skrbi za nadaljnjo izobrazbo učiteljev, omenja pisec Posvetovalnico za prirodoslovni pouk v Hamburgu, ki jo sam vodi kot ravnatelj. Ta posvetovalnica ima tri oddelke (fizikalni, kemijski, biološki). Vsak oddelek razpolaga z dvema učilnicama, s sobo za zbirke, s sobo za predavatelje, s širokim hodnikom za razstave in z drugimi pomožnimi prostori (celotno vsak oddelek s 500 m²). Oddelek za fiziko ima delavnico, kjer učitelji sami izdelujejo naprave za poskuse. Na posvetovalnici so nastavljeni štirje stalni predavatelji, vsi so bivši učitelji na višjih šolah. Vsak oddelek ima svojega laboranta. Posvetovalnica skrbi za nadaljnjo izobrazbo učiteljev vseh vrst šol ter daje šolam nasvete pri nabavi učil in pri gradnji in predelavi učnih prostorov. Posvetovalnica prireja letno več tečajev (zadnje leto 23), na katerih predava razen stalnih nastavljenecv še 11 drugih predavateljev iz vrst učiteljev. Tečaji so v popoldanskih in večernih urah. Na njih razpravljajo o metodiki in šolskih poskusih. Udeležba je brezplačna in prostovoljna.

Učiteljem pa je treba dati priliko, da možnosti za nadaljnjo izobrazbo tudi res izkoristijo. Ker pa so vsi močno obremenjeni, tako da nimajo niti časa, da bi brali knjige in časopise, je nujno treba znižati število obveznih ur. Učitelji iste stroke na isti šoli ali na več sosednjih šolah naj bi se redno shajali na kolokvijih, kjer bi se razgovarjali o skupnih problemih, zlasti še o šolskih poskusih. Vsak učitelj naj bi se vsaj enkrat v letu udeležil kongresa ali simpozija, ki naj bi trajal vsaj teden dni in kjer bi razpravljali o raznih problemih v zvezi s poukom. Za učitelje pa, ki vodijo seminarje ali zbirke ali pa sestavljajo učbenike, naj se da vsakih deset let polletni dopust, da se znanstveno dalje izobrazijo.

Takšne so danes prilike in načrti v Hamburgu, kjer je pred leti deloval Grimsehl. Kako je v tem pogledu pri nas: prvi začetki so že tu, toda daleč smo še od tega, kar predvideva in predlaga Ristau v svojem članku, ki zasluži vso našo pozornost.

Lavo Čermelj

CIKLUS PREDAVANJ IZ EKSPERIMENTALNE FIZIKE

Društvo matematikov in fizikov LRS je priredilo s podporo za šolstvo odgovornih republiških in okrajnih organov, Fizikalne katedre na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo in Nuklearnega inštituta »Jožef Štefan« ciklus predavanj iz eksperimentalne fizike za srednješolce. Skupno je ciklus imel 7 predavanj, ki so bila ob nedeljah dopoldne od 18. marca do 6. maja 1962. Vsebina predavanj je bila: Magnetno polje (ing. J. Strnad). Elektromagnetna indukcija (ing. J. Strnad), Nihanja (F. Ahlin), Valovanja (dr. A. Moljk), Optične interference (ing. M. Rosina), Fotoefekt (ing. M. Kregar), Radioaktivnost (dr. A. Moljk). Vsa predavanja so bila spremljana s številnimi poskusi.

Namen predavanj je bil navdušiti dijake za poglobljanje v fiziko in druge naravoslovne vede in s tem prispevati k skrbi za kader naravoslovcev in učiteljev ter inženirjev fizike.

Predavanj se je vsako nedeljo udeležilo preko sto po večini ljubljanskih srednješolcev, ki so z zanimanjem spremljali izvajanja in poskuse. Bili so to dijaki, ki se resno zanimajo za fiziko. To sklepamo iz tega, ker je bil obisk izredno stanovit. Upamo, da je bil namen ciklusa dosežen.

Pri teh predavanjih so mogli udeleženci videti spekter poskusov od najpreprostejših pa do takih, ki zahtevajo dokaj zapletene priprave. Lahko rečemo, da je bilo na sporedu precej tega, kar more pokazati za ta področja na tej stopnji Katedra za fiziko na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo in tudi Nuklearni inštitut »Jožef Stefan«.

Društvo je želelo, da bi lahko obiskali ta predavanja tudi dijaki iz ostalih krajev Slovenije. Zato je prirejalo predavanja ob nedeljah, da bi vsaj bližnje srednje šole lahko organizirale kolektivni obisk na predavanjih. Vendar ta akcija ni polno uspela.

Društvo se lepo zahvaljuje vsem šolskim organom za materialno pomoč v ta namen, Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani ter Nuklearnemu inštitutu »Jožef Stefan« pa za sredstva in prostore, ki sta jih ti dve ustanovi nudili brez odškodnine.

Ker je udeležba pokazala, da je dovolj zanimanja za tovrstna predavanja, se je Društvo odločilo, da jih bo prirejalo tudi v naslednjih šolskih letih in to tudi s tistih področij fizike, ki letos še niso prišla na vrsto.

France Ahlin

ZBIRKA NALOG

Društvo matematikov in fizikov LRS je januarja letos izdalo tretjo knjižico zbirke nalog. Prvi dve zbirki sta vsebovali naloge iz vsakoletnih tečajev matematike, tretja knjižica pa je vsebovala naloge, s katerimi so se naši srednješolci že spoprijeli na republiških in zveznih tekmovanjih. Poleg teh nalog je zbirka imela tudi tiste naloge, ki so bile predlagane za tekmovanje, pa jih ožja tekmovalna komisija ni izbrala.

Namen te zbirke je bil, da so se naši mladi matematiki urili v svojem znanju in tako pripravljali na razna tekmovanja iz matematike. Ta namen je bil v polni meri dosežen; sami se lahko prepričamo, ako primerjamo spodaj navedena imena reševalcev nalog s tistimi, ki so dosegli zavidljive uspehe na republiškem in na zveznem tekmovanju mladih matematikov.

V uvodu je bilo tudi to sporočilo: Rešitev nalog nismo priobčili, ker pričakujemo, da nam bodo dijaki sami poslali rešitve. Kdor bo poslal največ pravilno rešenih nalog, bo prejel knjižno nagrado. Imena reševalcev in število pravilno rešenih nalog bomo objavili v Obzorniku za matematiko in fiziko. To obljubo sedaj izpolnjujemo. Korektorji so pregledali 369 poslanih rešitev, večina teh je bila tudi pravilnih. Nekatere naloge so bile še posebno lepo izdelane — te so označene z mastnim tiskom.

Pravilno in dokončno izdelane so naslednje naloge:

1. razred — Franc Dacar 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Oblika izdelkov je izredno lepa in risbe so vzorne. — Andrej Janovsky 7, 8, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. — Andrej Kmet 1, 3, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 23. — Vinko Potočnik 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24.

2. razred — Stane Vrščaj 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. Josip Globovnik 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17. — Vladimir Vrbovšek 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17. — Jože Poženel 2, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 15, 16, 17. — Vinko Potočnik 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15. — Andrej Kmet 3, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 17. — Janja Stopar 6.

3. razred — Stane Vrščaj 1, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32. — Vinko Potočnik 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31. — Andrej Kmet 5, 9, 13, 15, 17, 21, 25, 31.

4. razred — Alojz Kodre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 40. — Vinko Potočnik 2, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 36, 37, 39, 40. — Andrej Kmet 6, 8, 10, 13, 14, 21, 24, 25, 39.

Kakor vidimo iz števila pravilno rešenih nalog, je pohvale vredno prizadevanje nekaterih dijakov, ki so v prilično kratkem času izdelali lepo število nalog. Eden izmed reševalcev nam je takole pisal: Vsekakor nam je ta zbirka nalog ogromno koristila, ker imamo slovenskih matematičnih knjig občutno premalo, predvsem pa ni kakih kvalitetnejših zbirk nalog. Mislim, da bi bilo sila koristno, če bi še v prihodnjih letih izšel kak podoben priročnik za naše srednješolce. Tej želji bomo poskušali ugoditi in prihodnje leto izdati četrto zbirko nalog.

Stane Uršič

TEKMOVANJE

Kakor že nekaj let, smo imeli tudi letos republiško in zvezno tekmovanje mladih matematikov. Letošnjega republiškega tekmovanja se je udeležilo 93 dijakov in dijakinj iz 19 gimnazij in strokovnih šol v Sloveniji. Vse šole so poslale res najboljše dijake tako, da je bila kar huda konkurenca posebno v prvem in drugem razredu. Izid tekmovanja smo že priobčili v prejšnji številki, naloge pa so bile naslednje:

1. razred

1. Pokaži, da vsota treh poljubnih zaporednih naravnih števil deli vsoto kubov teh treh števil.

2. Imamo dve uri. Prva prehití na dan 5 minut, druga zaostane na dan 3 minute. Naravnomo ju, potem pa nič ne popravljamo. Kdaj bosta prvič obe spet kazali pravi čas?

3. Konstruiraj romb, če je znana vsota diagonal in en njegov kot.

4. Kateti pravokotnega trikotnika sta a in b . Kako dolga je simetrala pravega kota?

2. razred

1. Izračunaj vrednost $\log_2 5$, če veš, da je $\log_{10} 2 = 0,30103$.

2. Pri množenju dveh števil, od katerih je eno za 10 večje od drugega, je napravil učenec napako in so bile zato desetice produkta za 4 premajhne. Ko je za preizkus delil rezultat z manjšim faktorjem, je dobil kvocient 39 in ostanek 22. Kateri števili je množil?

3. V krogu s polmerom r in središčem S načrtaj tetivo AB in jo podaljšaj za $BC = r$. Zveznica točk C in S seče krog v točki D , ki ne leži na daljici CS . Dokaži, da je kot ASD trikrat večji od kota ACD !

4. Osnovni rob pravilne tristrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ je a , višina pa je enaka polmeru osnovni ploskvi včrtanega kroga. Izračunaj ploščino preseka, ki gre skozi razpolovišča AA_1 , A_1B_1 , AC !

3. razred

1. V enačbi
$$\frac{(x^4 + x^2 + 1)^2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{n^2}{n - 1}$$

je n dano realno število. Reši jo in ugotovi, ali more biti za kako vrednost števila n vseh 8 korenov realnih. Napiši vse ostale korene, če je en koren $x_1 = 2$!

2. Izračunaj brez uporabe trig. tablic izraz

$$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$$

3. Kolik je kot ob vrhu osnega preseka stožca, ki ga ravnina, vzporedna z osnovno ploskvijo, razdeli na dva dela, ki imata enaki površini in enaki prostornini?

4. Kvader $ABCD A' B' C' D'$ presekamo z ravninama BDA' in $B'D'C$. Pokaži, da sta ti ravnini vporedni in da razdelita diagonalo AC' na tri enake dele. Izračunaj razdaljo ravnin in kota, v katerih diagonalna prebada ravnini! (Robovi so a , b , c .)

4. razred

1. Reši enačbo $\sin^{10} \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \cos^{10} \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = a$. Kakšne so njene rešitve v posebnem primeru, če je $a = 1$? [$\sin^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = u$, $\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = v$]

2. Dokaži, da je v vsakem paralelogramu vsota kvadratov nad stranicami enaka vsoti kvadratov nad obema diagonalama.

3. Pravilna peterostrana piramida ima kot med dvema sosednjima stranskima roboma enak 2ω ($= 36^\circ$) in telesno višino enako v ($= 10$). Izrazi s tema dvema količinama njeno površino, prostornino, polmer včrtane in polmer očrtane krogle!

4. Kje leže take točke ravnine, iz katerih vidiš dve dani krožnici te ravnine pod enakim kotom? Naredi diskusijo za različne medsebojne lege teh krožnic! Kaj je s podobniščema v zvezi s tem vprašanjem? (Metoda je lahko analitična ali drugačna.)

Za zvezno tekmovanje so bili izbrani štirje četrtošolci in en tretješolec. V nedeljo 13. maja je bilo v Beogradu tekmovanje, katerega so se udeležili predstavniki iz vseh republik razen dijaki iz Črne gore. V četrtem razredu je tekmovalo 20, v tretjem pa 15 dijakov. Tekmovalna komisija pod predsedstvom predstavnika iz Slovenije je izbrala naslednje naloge:

3. razred

1. Dana je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, kjer je $a > 0$. Dokaži, da je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

za katerekoli vrednosti x_1 in x_2 !

2. Dani sta krogli s polmeroma R in r ($R > r$) in središčno razdaljo c ($R - r < c < R + r$). Izrazi prostornino pokončnega stožca, ki je očrtan tema

kroglama, kot funkcijo količin R , $d = R - r$ in c . Dokaži, da je razmerje med to prostornino in prostornino večje krogle najmanj enako 2. Izračunaj površino stožca, ko je to razmerje enako 2.

3. Kvadrat ABCD s stranico a rotira v negativnem smislu za kot 45° okrog vrha A. Stranica C_1D_1 tako nastalega kvadrata seče stranico BC danega kvadrata v točki M. Kolika je ploščina kvadrata nad stranico AM?

4. Dana je funkcija $f(x) = A \cos x + B \sin x$, kjer sta A in B konstanti. Ako je $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $x_1 - x_2 \neq k\pi$, če je k celo število, tedaj je $f(x) = 0$. Dokaži!

4. razred

1. Dokaži, da tvorijo funkcije $\log x$, $\log \sqrt{x}$, $\log \sqrt[4]{x} \dots$ neskončno zaporedje. Določi vsoto tega zaporedja ter načrtaj funkcijo.

2. Dani sta funkciji $y_1 = \sin^4 x + \cos^4 x$ ter $y_2 = \sin^6 x + \cos^6 x$. Dokaži, da imata funkciji osnovno periodo $\frac{\pi}{2}$ in da je med njima zveza $3y_1 - 2y_2 = 1$.

Pri katerih x ima prva funkcija za $1/16$ večjo vrednost kot druga?

3. V trikotniku ABC sta dani stranici a in b . Določi dolžino tretje stranice, če je ta enaka dolžini pripadajoče višine. Za katere vrednosti a in b je naloga rešljiva?

4. V ravnini α imamo premico p in točko P , ki ne leži na premici p . Določi geometrijsko mesto točk M v ravnini α , za katere velja $\frac{MP}{MN} = e$, kjer je N nožišče normale iz točke P na premico p , e pa znano število. Diskusija.

Posebno huda borba za mesta je bila v 4. razredu. Komisija, ki je pregledala vse naloge, je podelila naslednje nagrade:

V 4. razredu je 1. nagrado prejel Andrej Kmet iz II. gimnazije v Ljubljani. 2. nagrado so prejeli Alojz Kodre z Jesenic, Vladimir Volenec iz Virovitice in Dragomir Davidović iz Sente. 3. nagrado sta prejela Blagoje Momčilović iz Beograda in Marko Šimat iz Zagreba. Pohvaljena pa sta bila Vinko Potočnik iz Škofje Loke in Zlatko Potočnik iz Beograda.

V 3. razredu je prejel prvo nagrado Ivan Boljevski iz Pirota. Druga nagrada ni bila podeljena, tretjo nagrado pa je prejela Katica Stevanović iz Niša. Pohvaljen je bil Srđen Stanković.

V 4. razredu so naši dijaki dosegli krasen uspeh. Naš edini predstavnik v tretjem razredu pa se ni uvrstil med zmagovalce. Dosegel je sicer 6. mesto, toda število točk ni doseglo določenega minimuma.

Naši tekmovalci pravijo, da jim je bila zbirka nalog, ki jo je izdalo naše društvo, zelo dober trening za republiško in za zvezno tekmovalstvo. Prvonagrajeni Andrej Kmet je prejel lani drugo zvezno nagrado; že pet let se pridno udeležuje vseh tečajev matematične šole. Smisel za matematiko ter vztrajnost pri delu je rodila pri njem zavidanja vredne uspehe. Vsem našim mladim matematikom iskreno čestitamo za dosežene uspehe.

Stane Uršič

TRETJA STOPNJA ŠTUDIJA FIZIKE PRI NAS

V šolskem letu 1961-62 se je na matematično fizikalnem oddelku Fakultete za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani začel študij tretje stopnje fizike.

V zadnjih letih so v gospodarsko razvitih državah močno narasle potrebe po fizikih, ki so sposobni samostojnega raziskovalnega dela. Reševanje pro-

blemov moderne fizike zahteva velikih skupin raziskovalcev, ki so navadno tudi predavatelji na univerzah; prav tako pa so fiziki potrebni v industrijskih raziskovalnih laboratorijih. Tudi pri nas naraščajo potrebe po fizikih tako visoke izobrazbe. Toda naša univerza doslej ni nudila ustrezne stopnje izobrazbe, kajti pouk je bil prvenstveno namenjen vzgoji srednješolskih profesorjev in (z nekoliko eksperimentalno razširjenim programom) tehničnim fizikom. Nadaljnja pot do raziskovalca je bila prepuščena ambicijam in potrpežljivosti posameznika, zlasti pri šolanju v tujini. Potreba po večjem številu samostojnih raziskovalcev in pa spoznanje, da se je možno naučiti tudi raziskovalnega dela, sta podobno kot že drugod po svetu tudi pri nas pripeljala do vpeljave najvišje stopnje šolanja.

Glavni namen tretje stopnje študija je seznaniti slušatelje z modernimi področji fizike, zvišati nivo znanja fizike v celoti in naučiti slušatelje metod raziskovalnega dela. Zato je na tej stopnji študija izredno važno bogato seminarsko življenje ter dober kontakt med slušateljem in tutorjem, ki vodi raziskovalno delo.

Učni program tretje stopnje študija fizike pri nas predvideva dvoletni študij z naslednjimi predavanji:

Teorija polja, v kateri se slušatelj seznani z rigorozno formulacijo kvantne mehanike in osnovami kvantne teorije polja, katere metode se danes uporabljajo skoraj v vseh področjih fizike. Ostala redna predavanja so izbrana iz dveh področij, ki sta se pri nas najbolj uveljavili, namreč teoretična in eksperimentalna jedrska fizika ter teoretična in eksperimentalna fizika trdne snovi. Kratki predavanji iz funkcionalne analize in iz teorije grup pa dajeta matematične osnove, ki so potrebne za razumevanje teoretičnih predavanj.

Osnovo seminarskemu življenju dajejo krajši ciklusi predavanj iz danes najzanimivejših delov moderne fizike in obvezno seminarske naloge slušateljev.

Med študijske obveznosti sodi tudi samostojna raziskovalna naloga, ki jo opravi kandidat pod vodstvom svojega tutorja in ki naj bo praviloma takšnega značaja, da lahko pripelje kandidata ne le do magistrske diplome, ampak tudi do doktorata.

Zaradi visokega nivoja tretje stopnje študija bodo študij zmogli le najboljši študentje. Toda selekcija pri vpisu še ni možna, ker statut fakultete predpisuje kot edini pogoj za vpis le diplomu druge stopnje; zato bodo potrebni filter poskrbeli visoki nivo predavanj in strogi izpitni kriterij.

Ker univerza letos ni imela denarnih sredstev za tretjo stopnjo študija fizike, so vse stroške študija krile ustanove in podjetja, v katerih so slušatelji zaposleni. Letos se je vpisalo 19 slušateljev (13 z Nuklearnega inštituta »J. Stefan«, 4 s katedre za fiziko, 2 pa iz tovarne za optiko in steklopihaštvo), od katerih dobra polovica izpolnjuje predpisane študijske obveznosti. Ker so vsi slušatelji zaposleni, se morajo raziskovalne naloge, ki spadajo v okvir študija, prilagoditi raziskovalnemu delu, ki ga slušatelji opravljajo v času svoje redne zaposlitve.

V prvem letu so potekala predavanja dokaj redno, medtem ko je bila seminarska aktivnost zelo skromna. Temu je kriva prezaposlenost predavateljskega kadra in omejeni prosti čas slušateljev, ki posvetijo študiju praviloma lahko le popoldneve. Seminarsko življenje se bo lahko redno razvijalo šele tedaj, ko bo slušateljem tretje stopnje, podobno kot ostalim študentom, študij edina obveznost. Zato bo pa treba rešiti finančne probleme slušateljev in vsaj delno omogočiti raziskovalno delo pod okriljem šole.

Bogdan Povh

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Farmaceutski vestnik, Ljubljana 1961, št. 9-12.

Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1961, št. 6-7.

Fotokemijska industrija, Zagreb 1962, št. 1.

Geologija — razprave in poročila, Ljubljana 1960, 6. knjiga.

Glasnik matematičko fizički i astronomski, Zagreb 1961, T. 16, No. 3-4.

Idrijski razgledi, Idrija 1961, št. 4, 1962, št. 1.

Izvestija Akademij nauk SSSR, Moskva 1962, T. XXVI., No. 3.

Matematičko fizički list, Zagreb 1961/62, št. 1, 2, 3, 4.

Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1961/62, Nr. 3, 4.

Physics Today, New York 1961, Vol. 14, No. 11, 12.

Proteus, Ljubljana 1961/62, št. 4-5, 6-7, 8, 9-10.

Sodobna pedagogika, Ljubljana 1962, št. 1-2, 3-4.

Studii si cercetari de matematica, Cluj 1960, T. XI., No. 1 in 2.

Ukrainskij matematičeskij žurnal, T. XIII., No. 4, T. XIV., No. 1.

Uspehi matematičeskikh nauk, Moskva 1961, T. XVI., Vyp. 6, 1962, T. XVII.,
Vyp. 1, 2, 3.

Varilna tehnika, Ljubljana 1962, št. 1, 2, 3, 4.

Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1961, št. 9-10, 11-12.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod oznako »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-3-207.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.