OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA
1 9 6 2
IX. št. 1

VSEBINA

Članki Stran

Racionalna in iracionalna števila (I. Vidav) 1

Elementi teorije iger (R. Jamnik) 7

O ločni dolžini gladkih krivulj in o površini gladkih ploskev (F. Križanič) 19

Ciklotronska resonanca (M. Pintar) 36

Domače vesti

Drugi seminar izbranih poglavij moderne fizike (S. Uršič) 47

Nove knjige 48

CONTENTS

Articles Page

On Rational and Irrational Numbers (I. Vidav) 1

Elements of the Theory of Games (R. Jamnik) 7

On lenght of smooth curves and on area of smooth surfaces (F. Križanič) 19

Cyclotron Resonance (M. Pintar) 36

Home News 47

New Books 48

LETO IX 1962 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 1 1. V. 1962

RACIONALNA IN IRACIONALNA ŠTEVILA

IVAN VIDAV

1. Za matematično analizo nam ne zadoščajo naravna števila, niti ne samo racionalna, temveč potrebujemo vsa realna števila. Po znani metodi konstruiramo racionalna števila z naravnimi števili, iracionalna pa z racionalnimi. Zato bi vsaj teoretično mogli priti do realnih števil že v aritmetiki sami, ne da bi dobili kako pobudo iz drugih področij matematike ali uporabe. Pri razširjanju pojma števila nas namreč v aritmetiki vodi želja, da bi našli obseg števil, ki je v matematičnem oziru čim bolj zadovoljiv. Gre predvsem za to, da sta izpolnjeni naslednji zahtevi:

1. *Vse osnovne računske operacije (t. j. seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje) naj bodo neomejeno izvedljive. Izjema je le deljenje z nič.*

Preden navedemo drugo zahtevo, naj omenimo, da so števila urejena po velikosti. Glede na urejenost naj bo sistem števil popoln v temle smislu:

2. *Vsaka navzgor omejena množica števil naj ima natančno zgornjo mejo. Natančna zgornja meja je pri tem najmanjša zgornja meja te množice.*

To drugo lastnost lahko izrazimo tudi drugače:

2 a. *Če smo vsa števila razdelili na dva razreda tako, da je vsako število iz prvega razreda manjše od vsakega števila iz drugega razreda, eksistira tako realno število a, da so v prvem razredu vsa števila, ki so manjša od a, v drugem pa vsa števila, ki so večja od a.*

Množica realnih števil ustreza obema zahtevama. Zaradi lastnosti 2 so v obsegu realnih števil izvedljive poleg osnovnih tudi mnoge druge računske operacije: korenjenje in logaritmiranje pozitivnih števil, limitiranje itd. V algebraičnem oziru pa nas realna števila še ne zadovoljujejo popolnoma, ker ni vsaka algebraična enačba z realnimi koeficienti realno rešljiva. Zato razširimo pojem števila na obseg kompleksnih števil. Toda pri tem moramo žrtvovati eno izmed lastnosti realnih števil, namreč urejenost po velikosti.

Presenetljivo je zdaj dejstvo, da nam realna števila, ki smo jih konstruirali zaradi omenjenih popolnoma notranje matematičnih potreb, povsem zadoščajo za uporabo v geometriji in v naravoslovnih znanostih pri opisovanju narave. Vendar dosežemo njihovo popolnost šele s privzemom iracionalnih števil. Pri merjenju raznih količin pa bi nam pravzaprav zadoščala racionalna števila. Zakaj trditev, da je vrednost neke merjene količine racionalna ali iracionalna, nima fizikalno nobenega pomena, saj moremo meriti količine le z večjo ali manjšo natančnostjo, popolnoma natančno pa nikdar. Videti je torej, da bi se smeli omejiti na racionalna števila, če bi imeli v mislih le uporabo matematike. Vendar se mi zdi, da tudi v fiziki lahko včasih v nekem smislu govorimo o racionalnih vrednostih količin. Seveda gre tu predvsem za razmerja, ker so

vrednosti količin samih odvisne še od poljubno izbranih enot. Po navadi je odkritje, da je kaka fizikalna količina zmerom precej natančno enaka nekemu ulomku, izredno pomembno za spoznavanje zakonov narave. Mislim pri tem na primere, kakor so ugotovitev, da je atomska teža elementov precej natančno enaka celemu številu, če vzamemo atomsko težo kisika 16, zakon o prostorninskem razmerju pri spajanju plinov itd. Seveda, opazovanje takih pojavov otežkoča dejstvo, da so ulomki posejani povsod gosto. Trditev, da je neka merjena količina racionalna, ima zato pomen le, če se izkaže, da so njene vrednosti precej natančno enake ulomkom z zelo majhnim imenovalcem. Zakaj rekli smo že, da leže ulomki v nasprotju s celimi števili povsod gosto. Med 0 in 1 je n. pr. 27 okrajšanih ulomkov, katerih imenovalec je pod 10. Razlika med dvema takima sosednjima ulomkoma je torej že zelo majhna.

Glavni razlog, da se niti v geometriji niti v uporabi ne moremo odreči iracionalnim številom, pa leži drugje. Vzemimo kar geometrijo. V elementarni geometriji naletimo na iracionalna števila najprej pri Pitagorovem izreku. Vsaka stranica v pravokotnem trikotniku se izraža z drugima dvema stranicama in v tej izražavi je kvadratni koren. Korenjenje pa v obsegu racionalnih števil ni zmerom izvedljivo. Vsa geometrija sloni na majhnem številu razmeroma preprostih osnovnih trditev, aksiomov, ki nam jih sugerira izkustvo. Vsi izreki geometrije, med njimi tudi Pitagorov, so posledica teh aksiomov. Če bi se hoteli v geometriji izogniti iracionalnim številom, bi morali spremeniti sistem aksiomov, da bi nam potem zadoščala racionalna števila. Kako bi se to doseglo in ali bi se sploh dalo doseči, ne vem. Prav gotovo bi bila žrtev prehuda. Saj ni preprost samo sistem aksiomov, tudi mnogi izreki, med njimi Pitagorov, so enostavne in elegantne trditve.

Kar velja za geometrijo, velja še v večji meri za fiziko, predvsem za teoretično. Vsa klasična fizika že tako bazira na Evklidični geometriji. Pri matematični formulaciji Newtonovih osnovnih zakonov mehanike potrebujemo pojem drugega odvoda. Ta pojem pa sloni na takih pojmih kot so limita in zveznost funkcij. Zato ni mogoč model Newtonove mehanike v okviru racionalnih števil, čeprav pri merjenju nima nobenega smisla razlikovanje med racionalnimi in iracionalnimi vrednostmi količin.

2. V nadaljevanju tega članka pa bi želel pokazati, kako je tudi za analizo zadovoljiv le sistem vseh realnih števil, ne pa sistem racionalnih števil. V ta namen sem si izbral pojem zveznosti. Videli bomo, da se lastnosti zveznih funkcij popolnoma spremene, če se pri definicijskem območju funkcij omejimo na racionalna števila.

Spomnimo se najprej najpomembnejših lastnosti zveznih funkcij, ki veljajo tedaj, kadar sme neodvisna spremenljivka zavzeti vse realne vrednosti nekega intervala.

1. Če ima zvezna funkcija $f(x)$ v točkah $x = a$ in $x = b$ nasprotno predznačeni vrednosti, eksistira med a in b vsaj eno število ξ, kjer je vrednost funkcije enaka nič, torej $f(\xi) = 0$.

2. Če je funkcija $f(x)$ na končnem intervalu $[a, b]$ zvezna, je tam na obe strani omejena. Zato eksistirata natančna spodnja meja m in natančna zgornja meja M. Za vsak x na intervalu $[a, b]$ velja potem ocena $m \leqq f(x) \leqq M$.

3. Zvezna funkcija zavzame na intervalu $[a, b]$ natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M. Zavzame tudi vsako drugo vrednost med m in M.

Zvezno funkcijo si lahko v koordinatnem sistemu predočimo s krivuljo. Krivulja — slika zvezne funkcije — je nepretrgana.

Oglejmo si sedaj, kako je z omenjenimi izreki, če se omejimo le na racionalna števila. Pa vzemimo, da so vrednosti neodvisne spremenljivke in funkcijske vrednosti racionalna števila. Definicija take funkcije je ista kakor v splošnem primeru: Funkcija je predpis, po katerem pripada vsaki vrednosti spremenljivke x na določenem intervalu $[a, b]$ neko natančno določeno število, ki ga imenujemo vrednost funkcije in označimo z $f(x)$. Tu sta zdaj vrednost x-a in funkcijska vrednost $f(x)$ racionalni števili. Na kratko bomo te funkcije imenovali funkcije racionalne spremenljivke v nasprotju z običajnimi, ki so funkcije realne spremenljvke. Funkcije lahko definiramo z raznimi aritmetičnimi izrazi, n. pr.

$$f(x) = x^2 - x, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Te funkcije so določene za vsak x, edino zadnja ni definirana pri $x = \pm 1$. Pač pa funkcije, kakor je $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, ne sodijo zraven, kajti koren $\sqrt{x^2 + 1}$ ni pri vsakem racionalnem x-u racionalen.

Zveznost definiramo kakor v običajnem primeru: Funkcija $f(x)$ je v točki $x = x_0$ zvezna, če pripada vsakemu pozitivnemu številu ε tak pozitiven δ, da je izpolnjena neenačba $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$ za vsak $|h| < \delta$. Seveda so tu nastopajoča števila racionalna. Vsi polinomi, pri čemer vzamemo koeficiente racionalne, so zvezne funkcije.

Kako je z veljavnostjo izreka 1? Vzemimo za zgled funkcijo $f(x) = x^2 - 2$, ki je kot polinom povsod zvezna. Imamo $f(1) = -1 < 0$ in $f(2) = 2 > 0$. Če bi tudi tu veljal izrek 1, bi moralo biti med 1 in 2 tako število x, kjer je $f(x) = 0$. Toda enačba $x^2 - 2 = 0$ ima le korena $x = \pm \sqrt{2}$, ki sta iracionalna. Če se omejimo na racionalna števila, ni naša funkcija $f(x)$ nikjer enaka nič. Torej izrek 1 v tem primeru ne drži. Narišimo v koordinatnem sistemu funkcijo $y = x^2 - 2$. Za sliko dobimo prav lepo parabolo. Pogled nanjo nam pove, da seče abscisno os med $x = 1$ in $x = 2$. Če bi poznali samo racionalna števila, bi morali od tod napraviti zaključek: Parabola ni adekvatna slika funkcije $f(x) = x^2 - 2$, ker parabola seče os (x), funkcija $f(x)$ pa ni nikjer enaka nič.

Morda bi kdo na podlagi tega zgleda sklepal takole: Zvezna funkcija $f(x)$, pri kateri je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$, sicer res ne zavzame zmerom vrednosti nič med a in b, pač pa se vrednosti nič poljubno približa. Če pomeni $f(x)$ fizikalno količino, med enim in drugim primerom tako ni bistvene razlike zaradi nenatančnosti merjenja. Toda tak sklep bi bil prenagljen, kar nam kaže naslednji primer: Naj bo $f(x) = 1$, če je $x^2 > 2$ in $f(x) = -1$, če je $x^2 < 2$. Ker je za vsak racionalen x bodisi $x^2 > 2$ bodisi $x^2 < 2$, je ta funkcija natančno določena. Za vsak x (namreč racionalen) je tudi zvezna. Če je n. pr. $x_0^2 > 2$, izberimo okoli x_0 tako majhen interval, da je za vsak x na tem intervalu še $x^2 > 2$, torej $f(x) = 1$. Zato je funkcija $f(x)$ pri $x = x_0$ zvezna, saj je na tem intervalu konstantna. Tu je $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$. Ker zavzame $f(x)$ samo vrednosti 1 in -1, ni nikjer na intervalu $[1, 2]$ enaka nič niti ne pridejo njene vrednosti v poljubno bližino vrednosti 0. Slika te funkcije je pretrgana.

Kako je z omejenostjo zveznih funkcij racionalne spremenljivke? Vzemimo za zgled funkcijo $f(x) = -1/(x^2 - 2)$. Kvocient dveh zveznih funkcij je zvezen povsod, razen kvečjemu tam, kjer je imenovalec enak nič. Ker v našem primeru imenovalec $x^2 - 2$ za noben racionalen x ni enak nič, je $f(x)$ kot funkcija racionalne spremenljivke povsod zvezna. Vzemimo spet interval $[1, 2]$. Funkcija na njem očitno ni omejena, saj lahko izberemo tak racionalen x, da je razlika $x^2 - 2$ pozitivna in tako majhna, kakor želimo. Ustrezna funkcijska vrednost je potem poljubno velika.

Oglejmo si nazadnje še izrek 3. Naj bo zvezna funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ navzgor omejena. Natančna zgornja meja M je lahko iracionalna tudi pri funkcijah, ki zavzamejo samo racionalne vrednosti. V takem primeru seveda ne eksistira število x_M, kjer bi bilo $f(x_M) = M$. Zgled za to je funkcija $f(x) = 9x - x^3$, ki ima na intervalu $[0, 3]$ natančno zgornjo mejo $6\sqrt{3}$, ki ni racionalna.

Našteti primeri kažejo, kako varljivi so lahko »dokazi«, ki slone samo na nazorni evidenci. Saj se marsikomu zde izreki 1, 2, 3 sami po sebi umevni in korektni dokazi nepotrebni, ko si njihov pomen geometrično ponazori s krivuljami. Toda videli smo, da pri isti definiciji za zveznost ti izreki ne veljajo več, če se omejimo na funkcije racionalnega argumenta z racionalnimi vrednostmi. Brez posebne težave bi mogli konstruirati take zvezne funkcije racionalne spremenljivke, da ustrezne krivulje sploh ne bi mogli narisati.

Doslej smo govorili le o zveznosti v točki. Poznamo pa še pojem enakomerne zveznosti. Funkcija $f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna, če pripada vsakemu številu $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, kakor hitro je $|x' - x| < \delta$, kjerkoli sta števili x', x na intervalu $[a, b]$. Naj bo funkcija $f(x)$ racionalne spremenljivke x na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna. V tem primeru se da njeno definicijsko območje rajširiti na vse iracionalne x tako, da ostane enakomerno zvezna. Eksponentno funkcijo definiramo n. pr. najprej le za racionalne eksponente. Kot taka je enakomerno zvezna funkcija na vsakem končnem intervalu. Potem definiramo vrednost potence pri iracionalnem eksponentu z limito vrednosti, ki jih eksponentna funkcija zavzame pri racionalnih eksponentih. Podobno razširimo definicijsko območje pri drugih enakomerno zveznih funkcijah, ki so prvotno določene le za racionalne vrednosti neodvisne spremenljivke. Če je zaporedje

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

katerega členi so racionalni in leže na intervalu $[a, b]$, konvergentno, je konvergentno tudi zaporedje ustreznih funkcijskih vrednosti

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

Kadar je limita x_0 prvega zaporedja racionalna, je limita drugega zaporedja enaka $f(x_0)$. Če pa je limita x_0 iracionalna, definiramo funkcijsko vrednost $f(x_0)$ tako, da postavimo $f(x_0) = \lim f(x_n)$. Ker je vsako iracionalno število limita racionalnih števil, smo s tem razširili definicijo funkcije $f(x)$ na ves

interval $[a, b]$. Tako razširjena funkcija je povsod zvezna in zato na končnem intervalu $[a, b]$ na obe strani omejena.

Za funkcije realne spremenljivke velja: Funkcija $f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna tedaj in le tedaj, če je v vsaki točki tega intervala zvezna. Za funkcije racionalne spremenljivke pa velja le to, da je funkcija $f(x)$ v vsaki točki intervala zvezna, če je tam enakomerno zvezna. Pač pa ni vsaka funkcija, ki je v vseh racionalnih točkah zvezna, enakomerno zvezna. Če bi namreč bila vsaka taka funkcija tudi enakomerno zvezna, bi se dala po prejšnjem definirati za vse iracionalne x tako, da bi ostala zvezna. Potem bi bila na obe strani omejena. Prej pa smo na zgledu spoznali funkcijo, ki je na nekem končnem intervalu za vsak racionalen x zvezna in kljub temu ni omejena.

3. Zdaj pa si zastavimo še vprašanje: Zaradi katere lastnosti realnih števil veljajo izreki 1, 2, 3 o zveznih funkcijah? Spoznali bomo, da sta to pravzaprav dve pomembni lastnosti: *kompaktnost* in *sovisnost* (povezanost). Najprej naj omenim tole: Izrek o omejenosti velja tudi pri funkcijah realne spremenljivke samo za končne intervale. N. pr. funkcija $f(x) = x^2$ je za vsak x zvezna, pa ni navzgor omejena, saj je zmožna zavzeti tako velike vrednosti, kakor želimo. Vsa številska premica namreč ni kompaktna.

Oglejmo si zdaj dokaz za izrek 2. Naj bo funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ enolična in zvezna. Vsakemu številu x med a in b pripada zaradi zveznosti tako število $\delta_x > 0$, da je $|f(x') - f(x)| < 1$, če je le $|x' - x| < \delta_x$. Od tod sledi, da so na intervalu $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ vse funkcijske vrednosti pod $f(x) + 1$. Tak interval lahko dobimo, kakor rečeno, za vsak x na intervalu $[a, b]$. Torej smo pokrili vsako točko x na tem intervalu z daljico dolžine d δ_x in točka x je ravno v sredi te daljice. Toda končen zaprt interval $[a, b]$ številske premice je kompakten. To pomeni, da se da iz vsake množice daljic,* ki skupaj pokrivajo ves interval $[a, b]$, izbrati neko končno število teh daljic, ki že zase pokrivajo interval $[a, b]$. Uporabimo to v našem primeru. Izberimo torej iz omenjene množice daljic z dolžinami 2 δ_x neko končno število, n. pr. daljice $i_1, i_2, \ldots, i_n$, ki pokrivajo ves interval $[a, b]$. Te daljice naj imajo središča v točkah $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Na prvi daljici so vse funkcijske vrednosti pod $f(x_1) + 1$, na drugi pod $f(x_2) + 1$, itd., na zadnji pa pod $f(x_n) + 1$. Če zaznamujemo z A največje izmed števil $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$, so vse funkcijske vrednosti na intervalu $[a, b]$ manjše od $A + 1$. Torej je funkcija $f(x)$ omejena.

Množica racionalnih točk intervala $[a, b]$ pa ni kompaktna. Vzemimo za zgled interval [3, 4] in zaporedje intervalov

$$(2, 3.1),\ (2, 3.14),\ (2, 3.141), \ldots$$

ter

$$(3.2, 5),\ (3.15, 5),\ (3.142, 5), \ldots$$

pri čemer so 3.1, 3.14, 3.141 itd. zaporedni približki števila π. Vsi ti intervali skupaj pokrijejo vse racionalne točke med 3 in 4. Nepokrita ostane pravzaprav edino točka π, ki pa ni racionalna. Iz teh dveh zaporedij očitno ne moremo

---

* Te daljice vzamemo kot odprte intervale, t. j. brez krajišč. Potem je vsaka točka intervala $[a, b]$ v notranjosti ene izmed daljic.

izbrati končnega števila intervalov, ki bi tudi pokrivali vse racionalne točke med 3 in 4. Ta zgled pove, da množica racionalnih števil končnega intervala ni kompaktna. Zato prejšnji dokaz za omejenost ni uporaben pri funkcijah racionalne spremenljivke. Naj omenim, da je množica realnih števil kompaktna natančno takrat, kadar je omejena in zaprta. Množica vseh racionalnih števil na intervalu pa ni zaprta.

Kakor vemo, je množica točk na številski premici odprta, če vsebuje samo notranje točke. Zaprta pa je tedaj, kadar ima vse robne točke. Množica vseh realnih števil (oziroma številska premica) je sovisna (povezana), ker je ni moč razdeliti na dve ločeni odprti množici ali dve ločeni zaprti množici. Množica racionalnih števil pa ni sovisna. Če se omejimo na racionalna števila, imenujemo notranjo točko množice tako, da eksistira okoli nje dovolj majhen interval, katerega racionalne točke so vse v množici. Spet je odprta množica tista, ki ima samo notranje točke, zaprta pa tista, ki vsebuje vse robne točke. Razdelimo vsa racionalna števila na dva dela tako, da so v prvem delu števila, ki so manjša od $\sqrt{2}$, v drugem delu pa večja od $\sqrt{2}$. S tem smo razdelili vsa racionalna števila in oba dela sta odprti množici. Zato množica racionalnih števil ni sovisna. Velja še več: množica racionalnih točk je popolnoma razsekana. Noben še tako majhen interval racionalnih točk ni povezana množica.

Če sovisno množico zvezno preslikamo, je njena slika spet sovisna množica. Naj bo $y = f(x)$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ (definirana za vsak realen x). Če funkcijske vrednosti nanašamo na številsko premico (y), smo interval $[a, b]$ na osi (x) upodobili na neko množico točk na osi (y). Ta množica mora biti sovisna. Toda sovisne množice točk na premici so razen cele premice in poltrakov samo intervali. Ker leže vse funkcijske vrednosti med natančno spodnjo mejo m in natančno zgodnjo mejo M, je slika intervala $[a, b]$ ves interval $[m, M]$ na premici (y). To se pravi, da zavzame funkcija $f(x)$ vsako vrednost med m in M vsaj enkrat. Kadar pa je zvezna funkcija definirana samo za racionalne vrednosti x-a, ta izrek ne velja, ker množica racionalnih točk ni na nobenem intervalu sovisna.

Torej veljata izrek 1 in drugi del izreka 3 tedaj, kadar je definicijsko območje zvezne funkcije sovisna množica, izrek 2 pa tedaj, kadar je definicijsko območje kompaktna množica. Podobno bi se mogli prepričati, da velja tudi prvi del izreka 3, po katerem zavzame vsaka zvezna funkcija natančno spodnjo mejo in natančno zgornjo mejo, kakor tudi izrek, po katerem je funkcija enakomerno zvezna, če je v vsaki točki zvezna, tedaj, kadar je definicijsko območje funkcije kompaktna množica.

ELEMENTI TEORIJE IGER

RAJKO JAMNIK

V življenju človeške družbe pride večkrat do konfliktnih situacij, to se pravi do razmer, v katerih pridejo interesi ene skupine ljudi (ali posameznika) navzkriž z interesi drugih skupin (ali posameznikov). Taka konfliktna situacija je na primer konkurenca med gospodarskimi podjetji ali — še bolj značilen primer — vojna, ki je pač najhujša oblika konkurence. V konfliktni situaciji skuša ravnati vsak udeleženec tako, da je izid situacije zanj čim ugodnejši. Kaj je najugodnejši izid, je seve odvisno od situacije in od udeležencev. Navadno ga imamo lahko za ekstrem neke funkcije. Pri svojem ukrepanju mora udeleženec upoštevati pogoje situacije (v vojni n. pr. svoj in nasprotnikov človeški in gospodarski potencial, vremenske razmere in podobno), razen teh pa še ukrepe nasprotnikov. Razvoj konfliktne situacije je potemtakem zelo podoben poteku nekaterih družabnih iger: šaha, mnogih iger s kartami in drugih. Razberimo to podobnost recimo na taroku: Vsak igralec skuša igrati tako, da je izid igre zanj čim bolj ugoden, to se pravi, da zbere kar največje število pik. Pri tem pride navzkriž z drugimi igralci, zato je igra konfliktna situacija. Pri igri mora igralec upoštevati pravila igre in karte, ki jih je dobil (to dvoje predstavlja pogoje te konfliktne situacije), obenem pa prilagajati svoje ravnanje ukrepom nasprotnikov. Že ta primer nam dovolj osvetljuje ugotovitev, da se ekonomske in druge praktično pomembne konfliktne situacije v bistvu ne razlikujejo od neke vrste družabnih iger. Seve so igre v splošnem veliko preprostejše od praktičnih konfliktnih situacij. Po tem premisleku je skoraj na dlani ideja, lotiti se proučevanja resnično pomembnih konfliktnih situacij tako, da najprej obravnavamo probleme pri najpreprostejših konfliktnih situacijah — družbenih igrah. Temu premisleku in J. von NEUMANNU se ima zahvaliti za svoj nastanek teorija iger. Prvi Neumannov spis o tej zadevi je iz leta 1928. Zato štejemo leto 1928 za rojstno leto teorije iger, čeprav je znanih nekaj sporadičnih poskusov v tej smeri (Zermelo, Borel) že izza začetka našega stoletja. V nadaljnjem bomo poskusili očrtati nekaj osnovnih problemov teorije iger in navesti nekatere njene dosežke.

V prejšnjem odstavku smo ugotovili analogijo med ekonomskimi in drugmi konfliktnimi situacijami ter neko skupino družabnih iger. Za kakšne igre gre? Družabne igre lahko razdelimo v dve skupini. V prvo skupino sodijo hazardne igre, to se pravi igre, ki je pri njih izid odvisen samo od naključja. Take igre so recimo kockanje, ruleta, marjanca, enaindvajset, da naštejemo le nekatere. Drugo skupino pa tvorijo vse tiste igre, pri katerih je izid vsaj deloma odvisen od odločanja igralcev. Za te igre pravimo, da so *strateške*. Strateška igra par excellence je šah; pri njem je izid odvisen samo od odločanja igralcev. Vendar je tudi tarok strateška igra. Porazdelitev kart med igralce je rezultat naključja, to je res. Toda razdeljevanje kart še ni igra; ta se začne šele potem, ko so igralci karte že dobili, in je njen potek odvisen le od odločitev igralcev. Podobne razmere kot pri taroku najdemo pri večini iger s kartami. Od obeh skupin družabnih iger so konfliktnim situacijam, kakršne smo omenili v uvodu, analogne le strateške igre. Zato so predmet teorije iger strateške igre.

Preden povemo kaj o strateških igrah, uvedimo nekaj osnovnih pojmov. Igra je določena z neko zbirko pravil in dogovorov, po katerih se morajo ravnati osebe, ki v igri sodelujejo. V nadaljnjem bomo igro kar identificirali z zbirko

pravil in dogovorov. Vsaki možni realizaciji te zbirke bomo rekli *partija*, osebam, ki v partij sodelujejo, pa *igralci* ali *partnerji*. Igra poteka tako, da v določenih fazah partije igralci izbirajo elemente iz neke množice. Vsako tako fazo imenujemo *potezo* določenega igralca, izbrani element pa njegov *izbor*.

Igre je mogoče razdeliti po različnih vidikih. Eden izmed kriterijev je število igralcev. Ločimo igre z enim igralcem (n. pr. pasjansa), z dvema igralcema (. pr. šah) in tako naprej. Pri tem je treba povedati, da igralec ni nujno ena sama oseba. Skupino oseb, ki ima v dani partiji identične interese, štejemo za enega samega igralca. Tarok je potemtakem igra z dvema igralcema, tudi če v njej sodelujejo štiri osebe. Razdele se namreč v dve skupini z nasprotujočimi si interesi. Izjemo pomeni samo varianta »klopecki«; v tej varianti igra res vsaka oseba zase in je tedaj tarok igra s štirimi igralci. Na splošno torej velja dogovor: Igra z n igralci je taka, da so pri njej sodelujoče osebe razdeljene v n paroma tujih skupin; osebe v isti skupini imajo identične interese, osebe v različnih skupinah pa nasprotne.

V družabni igri se igralci pogosto dogovore, da bodo igralci, ki igro izgube, plačali igralcem, ki igro dobe, znesek, odvisen od izida igre. Vse igre seve niso take. Pri šahu se n. pr. navadno zadovoljimo z ugotovitvijo. da je ali igralec zmagal ali izgubil ali da je bila igra remi. Vendar tudi tu ni nobene ovire, da ne bi izid igre označili z dobički udeleženih igralcev; recimo dobiček 1 za zmago, dobiček 0 za remi in dobiček —1 za poraz. Potemtakem je mogoče pri vsaki igri izid opisati z zneski, ki jih dobe igralci po igri. (Če igralec igro izgubi, je seve znesek negativen.) Drugače povedano: Izid igre z igralci $P_1, P_2, \ldots, P_n$ je mogoče opisati z n-torico števil

$$(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

pri čemer pomeni d_i dobiček igralca P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Za družabne igre velja pri tem relacija

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 0, \tag{2}$$

saj izvira dobiček vsakega igralca iz izgube nasprotnikov. Igre, ki ustrezajo pogoju (2), imenujemo *igre z vsoto nič*. Ekonomski in drugi konfliktni procesi, ki potekajo podobno kot družabne igre, so navadno igre z vsoto, različno od nič, saj pri teh procesih skoraj zmeraj nastajajo ali se uničujejo dobrine.

Igre je mogoče razlikovati tudi glede na število potez v partiji. Tarok, ki ga igrajo štiri osebe, je igra z 12 potezami, ker ima vsak igralec 12 kart. Šah pa je primer igre, v kateri število potez ni določeno. Upoštevajmo poleg števila potez še število možnih izborov vsakega igralca v vsaki potezi! Če ima igra končno mnogo potez in vsak igralec v vsaki potezi končno mnogo izborov, pravimo, da je igra *končna*. Vse druge igre so neskončne.

Igre se ločijo še po informaciji, ki jo ima igralec o ukrepih in možnostih nasprotnika. Pri šahu je informacija popolna. Pri igrah s kartami je informacija navadno le delna, saj igralcem ponavadi ni znano, kakšne karte imajo nasprotniki, pač pa vedo, kakšne karte so že izigrali. Eksistirajo pa tudi igre, pri katerih je igralec povsem brez informacije o nasprotniku.

Značilnosti strateških iger bomo pregledali na najbolj preprostih igrah. To so končne igre z dvema igralcema, vsoto nič in ena samo potezo.[1] Vsak izmed

[1] Igre z enim igralcem in vsoto nič so praktično nepomembne; igre z enim igralcem in od nič različno vsoto pa predstavljajo običajni primer določanja ekstrema.

igralcev ima v taki igri končno mnogo izborov. Vzemimo zaradi preprostosti, da izbere igralec P_1 eno izmed naravnih števil $1, 2, \ldots, m$, igralec P_2 pa, ne da bi vedel za izbor igralca P_1, eno izmed naravnih števil $1, 2, \ldots, n$. Če izbere igralec P_1 število i, igralec P_2 pa število j, naj plača igralec P_2 igralcu P_1 znesek d_{ij}. Vsa plačila d_{ij} lahko uvrstimo v matriko

$$D = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{12} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1} & d_{m2} & \ldots & d_{mn} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

V tej matriki je element na križišču vrstice i in stolpca j znesek, ki ga mora plačati igralec P_2 igralcu P_1, če sam izbere število j, igralec P_1 pa število i. Matriko D imenujemo *plačilno matriko*, igro, pri kateri eksistira plačilna matrika, pa *matrično igro*. Elementi plačilne matrike so poljubna realna števila, določena s pravili igre. Če je $d_{ij} < 0$, to seve pomeni, da mora igralec P_1 plačati igralcu P_2 znesek $|d_{ij}|$, kadar sam izbere število i, igralec P_2 pa število j.

Določimo za primer plačilno matriko v Italiji priljubljene igre »dvoprstna mora«! Pri tej igri pokaže vsak izmed dveh igralcev z desno roko enega ali dva prsta, z levo roko pa napove, koliko prstov bo pokazal nasprotnik. To napravita seve oba hkrati. Če ne ugane noben izmed partnerjev ali če uganeta oba partnerja, koliko prstov bo pokazal nasprotnik, je igra neodločena. Če pa ugane prvi igralec, drugi pa ne, mora le-ta plačati prvemu toliko enot, kolikor prstov sta pokazala oba skupaj. Označimo z (i, j) izbor, pri katerem pokaže igralec z desno roko i prstov, z levo roko pa j prstov; nadalje naj bo (1, 1) prvi izbor, (1, 2) drugi, (2, 1) tretji in (2, 2) četrti. Po teh dogovorih je plačilna matrika pri dvoprstni mori

$$D = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

Postavimo zdaj osnovno vprašanje teorije iger: Ali eksistira optimalni način igre?

V primeru, ki ga obravnavamo, torej pri igrah z eno potezo, dvema igralcema in vsoto nič, lahko postavimo to vprašanje že konkretneje: Ali eksistira za igralca P_1 način izbiranja, ki mu zagotavlja kar največji dobiček, in za igralca P_2 način izbiranja, pri katerem je njegova izguba najmanjša?[2]

Pri nekaterih igrah je odgovor na to vprašanje kaj lahek. Vzemimo za primer igro s plačilno matriko

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & -7 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

V tej matriki je vsak element v drugi vrstici večji od enakoležnih elementov v prvi in tretji vrstici. Izbor števila 2 je torej za igralca P_1 najugodnejši, ne glede na to, kaj izbere igralec P_2. Če igralca igro ponavljata, bo pameten

[2] Pojma dobiček in izguba v tem vprašanju sta seve relativna; dobiček je lahko tudi negativen in je tedaj v resnici izguba.

igralec P_1 vselej izbral število 2, števili 1 in 3 pa nikoli. Torej je najugodnejši način igre za igralca P_1 tak, da izbira število 2 z relativno frekvenco 1, števili 1 in 3 pa z relativno frekvenco 0. Vse tri relativne frekvence lahko združimo v matrično vrstico

$$X_2 = (0,\ 1,\ 0)$$

Imenujemo jo *čisto strategijo* X_2 za igralca P_1. S prilastkom »čista« hočemo povedati, da po tej strategiji izbira igralec zmeraj isto število, ali drugače povedano, v matrični vrstici so vsi elementi razen enega enaki nič, od nič različen element pa je enak 1. Oglejmo si še možnosti igralca P_2! V matriki (5) so elementi v četrtem stolpcu manjši od enakoležnih elementov v vseh drugih stolpcih. Če torej izbere gralec P_2 število 4, so njegove obveznosti do igralca P_1 v vsakem primeru najmanjše. Pameten igralec P_2 bo zato zmeraj izbral število 4. Z relativnimi frekvencami števil 1, 2, 3 in 4 tvorimo matrični stolpec

$$Y_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1),$$

ki mu spet pravimo čista strategija Y_4 igralca P_2.

Plačilna matrika (5) je prav posebne oblike. V splošnem ne moremo pričakovati, da bodo elementi v kaki vrstici plačilne matrike večji od enakoležnih elementov v vseh drugih vrsticah in elementi v kakšnem stolpcu manjši od enakoležnih elementov v vseh drugih stolpcih. Igra s tako plačilno matriko bi tudi ne bila prav nič zanimiva. Poskusimo torej odgovoriti na vprašanje po optimalnem načinu igranja pri matrični igri, ne da bi zahtevali, naj ima plačilna matrika kakšne posebne lastnosti!

Matrična igra naj ima plačilno matriko (3). Če izbere igralec P_1 število i, mu je v vsakem primeru zagotovljen dobiček $\min_j d_{ij}$. Zapis $\min_j d_{ij}$ pomeni, da je treba pri določanju minima d_{ij} pri določenem i upoštevati vse j od 1 do n. Igralec P_1 bo seve izbiral tako, da bo spodnja meja njegovega dobička čim večja. Izbral bo potemtakem tak i, da bo dobil vsaj

$$\max_i \min_j d_{ij} \tag{6}$$

Zapis (6) pomeni, da je treba pri določanju maksima količine $\min_j d_{ij}$ upoštevati vse i od 1 do m.

Kako pa bo ravnal igralec P_2? Če izbere število j, njegova izguba ni večja od $\max_i d_{ij}$. Izmed vseh možnih j pa bo izbral tistega, pri katerem je zgornja meja njegove izgube čim manjša; torej tak j, da ne bo izgubil več kot

$$\min_j \max_i d_{ij} \tag{7}$$

Med količinama (6) in (7) je relacija

$$\max_i \min_j d_{ij} \leqslant \min_j \max_i d_{ij} \tag{8}$$

V resnici: Pri danih i in j je

$$\min_j d_{ij} \leqslant d_{ij}$$

$$\max_i d_{ij} \geqslant d_{ij}$$

in potemtakem

$$\min_j d_{ij} \leqslant \max_i d_{ij} \tag{9}$$

Leva stran neenačbe (9) je odvisna samo od i. Če torej vzamemo tak j, pri katerem je $\max_i d_{ij}$ najmanjši, neenačba (9) še zmeraj velja:

$$\min_j d_{ij} \leqslant \min_j \max_i d_{ij} \tag{10}$$

Desna stran neenačbe (10) pa ni odvisna od i in je zato

$$\max_i \min_j d_{ii} \leqslant \min_j \max_i d_{jj}$$

To pa je že relacija (8), ki smo jo hoteli dokazati.

V posamezni partiji torej igralec P_1 lahko igra tako, da dobi vsaj $\max_i \min_j d_{ij}$, igralec P_2 pa mu lahko prepreči, da bi dobil več kot $\min_j \max_i d_{ii}$.
Dobiček v igralca P_1 leži potemtakem v mejah

$$\max_i \min_j d_{ij} \leqslant v \leqslant \min_j \max_i d_{ij} \tag{11}$$

Obravnavajmo v relaciji (8) najprej posebni primer

$$\max_i \min_j d_{ij} = \min_j \max_i d_{ij} \tag{12}$$

Kakšna moera biti matrika D, da velja zanjo relacija (12)? Odgovor na to vprašanje bomo formulirali nekoliko splošneje, ker nam bo v splošni obliki potreben še pozneje. Dokažimo torej izrek:

Bodi $f(x, y)$ realna funkcija, definirana za vse x iz neke množice A in za vse y iz neke množice B. Za to, da eksistirata

$$\max_x \min_y f(x, y) \quad \text{in} \quad \min_y \max_x f(x, y)$$

in da sta med seboj enaka, je potrebno in zadostno, da eksistirata tak $x_0 \in A$ in tak $y_0 \in B$, da je za vse $x \in A$ in za vse $y \in B$

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \tag{13}$$

$$f(x_0, y) \geqslant f(x_0, y_0) \tag{14}$$

Iz relacij (13) in (14) še sledi

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{15}$$

Pokažimo najprej, da iz relacije (15) sledi ocena (13)! Naj bo x_0 vrednost, pri kateri je $\min_y f(x, y)$ maksimalen, y_0 pa vrednost, pri kateri je $\max_x f(x, y)$ minimalen. Drugače rečeno, x_0 in y_0 ustrezata pogojem

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y f(x_0, y)$$

$$\min_y \max_x f(x, y) = \max_x f(x, y_0)$$

Od tod in iz relacije (15)) sledi

$$\min_y f(x_0, y) = \max_x f(x, y_0) \tag{16}$$

Po definiciji minima je $\min_y f(x_0, y) \leqslant f(x_0, y_0)$. Od tod in iz relacije (16) dobimo

$$\max_x f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$$

Torej velja za vsak x iz množice A ocena

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$$

To pa je ravno relacija (13), ki smo jo hoteli dobiti. S podobnim premislekom ugotovimo, da sledi iz relacije (15) oziroma (16) ocena (14). Pogoj v izreku je torej potreben.

Dokažimo še, da je pogoj zadosten, to se pravi, da iz ocen (13) in (14) sledi relacija (15). Ker veljata oceni (13) in (14) za vsak $x \in A$ oziroma $y \in B$, je

$$\max_x f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$$

$$\min_y f(x_0, y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

in potemtakem

$$\max_x f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant \min_y f(x_0, y)$$

Še toliko bolj je potem

$$\min_y \max_x f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant \max_x \min_y f(x, y)$$

Po drugi strani pa bi prav tako kot v dokazu relacije (8) ugotovili, da je

$$\max_x \min_y f(x, y) \leqslant \min_y \max_x f(x, y)$$

Očitno veljata obe oceni le tedaj, če velja relacija (15).

Pravkar dokazani izrek lahko uporabimo pri matrikah. Očitno imamo lahko matriko D za funkcijo dveh spremenljivk:

$$d_{ij} = f(i, j),$$

definirano za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ in $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Parafrazirajmo izrek za matriko D: Relacija (12) velja natančno takrat, kadar je v plačilni matriki kak element, ki ni večji ob nobenega elementa v svoji vrstici in ne manjši od nobenega elementa v svojem stolpcu. Tak element imenujemo *sedlo* matrike, matrično igro, katere plačilna matrika ima sedlo, pa na kratko *igro s sedlom*. Tako je n. pr. igra s plačilno matriko

$$D = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{Vmatrix} \tag{17}$$

igra s sedlom, saj je v matriki (17) element na križišču druge vrstice in prvega stolpca sedlo. Relacija (12) velja potemtakem samo za igre s sedlom, za te pa zmeraj.

Pri igri s sedlom lahko igralec P_1 v vsaki partiji doseže dobiček $\max_i \min_j d_{ij}$, igralec P_2 pa mu lahko prepreči, da bi dosegel več. Če torej igrata oba igralca pravilno, je v vsaki partiji dobiček igralca P_1 enak

$$v = \max_i \min_j d_{ij}$$

Količino v imenujemo zato *vrednost igre* za igralca P_1.

Kakšen je pri igri s sedlom optimalni način igre za enega in drugega igralca? Recimo, da ima plačilna matrika sedlo d_{IJ}, to se pravi,

$$v = \max_i \min_j d_{ij} = \min_j \max_i d_{ij} = d_{IJ}$$

Za igralca P_1 je tedaj najugodneje, da v vsaki partiji izbere število I, za igralca P_2 pa najracionalneje, da izbere v vsaki partiji število J. Drugače rečeno, za igralca P_1 je najugodnejša čista strategija X_I, za igralca P_2 pa najugodnejša čista strategija Y_J. Pri igri s plačilno matriko (17) je potemtakem za igralca najracionalnejša strategija $X_2 = (0, 1, 0)$, za igralca P_2 pa najpametnejša strategija $Y_1 = (1, 0, 0)$.

Primer iger s sedlom je s tem obdelan. Mimogrede naj omenimo, da je matrična igra s plačilno matriko tipa (5) samo poseben primer iger s sedlom. Na dlani je namreč, da ima matrika tipa (5) zmeraj sedlo.

Vzemimo zdaj v relaciji (8) splošnejšo možnost

$$\max_i \min_j d_{ij} < \min_j \max_i d_{ij} \tag{18}$$

V tem primeru ne eksistira optimalna čista strategija niti za igralca P_1 niti za igralca P_2, saj najugodnejša čista strategija zagotavlja igralcu P_1 dobiček $\max_i \min_j d_{ij}$, igralca P_2 pa varuje večje izgube od $\min_j \max_i p_{ij}$. Ker ti dve vrednosti nista enaki, je na dlani, da lahko s primernim načinom igre oba igralca dosežeta ugodnejši izid. Ta način bo seve tak, da bo igralec izbiral različne elemente in ne zmeraj istega. Vzemimo, da izbira igralec P_1 število i z verjetnostjo x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), igralec P_2 pa število j z verjetnostjo y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Matrično vrstico

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

imenujemo *mešano strategijo* X igralca P_1, matrični stolpec

$$Y = (y_1, x_2, \ldots, y_n)$$

pa mešano strategijo Y igralca P_2. Elementi v obeh strategijah so nenegativni, razen tega pa je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$

Strategiji X oziroma Y lahko realizirata igralca s kakšnim slučajnim mehanizmom, približno pa lahko tudi tako, da igro zelo velikokrat ponovita in skrbita pri tem za to, da se bo relativna frekvenca izbora i čim manj razlikovala od verjetnosti x_i, relativna frekvenca izbora j pa čim manj razlikovala od verjetnosti y_j.

Kako je z dobičkom igralca P_1 pri mešanih strategijah? Očitno ni več točno določena vrednost, ampak spremenljivka, ki lahko zavzame $m \cdot n$ vrednosti d_{ij}.[3] Vemo tudi, kolika je verjetnost vsake od teh vrednosti: Verjetnost za to, da je dobiček igralca P_1 enak d_{ij}, je $x_i y_j$, ker sta izbora obeh igralcev med seboj neodvisna. Dobiček igralca P_1 je potemtakem slučajna spremenljivka. Njeno matematično upanje je očitno

$$E(X, Y) = \sum_i \sum_j x_i d_{ij} y_j = XDY \tag{19}$$

Če so x_i in y_j relativne frekvence, je $E(X, Y)$ povprečna vrednost dobička igralca P_1 v opravljenih partijah. Zato bomo imenovali količino $E(X, Y)$ *povprečni dobiček* igralca P_1. Povprečni dobiček lahko smatramo za funkcijo dveh spremenljivk, definirano za vse možne strategije X in za vse možne strategije Y.

[3] Lahko se primeri, da je več vrednosti d_{ij} med seboj enakih, vendar to našega premisleka ne spremeni.

Množico vseh možnih X bomo v nadaljnjem označevali z znakom S_m, množico vseh Y pa z znakom S_n.

Razmislimo zdaj ukrepanje obeh igralcev! Igracu P_1 je pri dani strategiji X zagotovljen minimalni povprečni dobiček $\min_Y E(X, Y)$. Zapis $\min_Y E(X, Y)$ pomeni, da je treba pri danem X poiskati minimum količine $E(X, Y)$ glede na vse možne Y iz množice S_n. Igralec P_1 bo seve izbral tako strategijo X, da bo njegov minimalni povprečni dobiček čim večji, torej enak

$$\max_X \min_Y E(X, Y) \tag{20}$$

Pri tem je treba upoštevati vse možne strategije X. Igralcu P_2 je pri dani strategiji Y zagotovljeno, da ne bo izgubil v povprečju več kot $\max_X E(X, Y)$, izbral pa bo tako strategijo, da bo njegova maksimalna povprečna izguba čim manjša, torej enaka

$$\min_Y \max_X E(X, Y) \tag{21}$$

Kakšen bi bil v našem primeru optimalen način igre? Očitno tak, da bi igralec P_1 z neko strategijo X_0 dosegel povprečni dobiček

$$v = \max_X \min_Y E(X, Y), \tag{22}$$

pri tem pa bi igralec P_2 z neko strategijo Y_0 lahko preprečil, da bi bil povprečni dobiček igralca P_1 večji od vrednosti (22). Očitno eksistira tak optimalni način igre natančno takrat, kadar sta količini (20) in (21) med seboj enaki. Vprašanje pa je, ali je ta pogoj izpolnjen pri vsaki matrični igri. Odgovor na to vprašanje daje tako imenovani von Neumannov izrek o minimaksu:

Naj bo

$$D = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{Vmatrix}$$

poljubna matrika, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ *poljubna matrična vrstica z nenegativnimi elementi, katerih vsota je enaka* 1, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *poljuben matrični stolpec z nenegativnimi elementi, katerih vsota je enaka* 1, *in*

$$E(X, Y) = XDY$$

Tedaj eksistirata količini

$$\max_X \min_Y E(X, Y)$$

$$\min_Y \max_X E(X, Y)$$

in sta med seboj enaki.

Dokaz izreka o minimaksu je predolg, da bi ga navajali na tem mestu.

Zaradi izreka o minimaksu in izreka (15) eksistirata taki strategiji X_0 igralca P_1 in Y_0 igralca P_2, da je

$$E(X_0, Y_0) = \max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = v$$

Strategiji X_0 in Y_0 imenujemo optimalni strategiji igralca P_1 oziroma igralca P_2, količini $v = E(X_0, Y_0)$ rečemo vrednost igre za igralca P_1, dvojici optimalnih strategij

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

$$Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$$

pa *rešitev* matrične igre.

Poiščimo za primer rešitev igre s plačilno matriko

$$D = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} \tag{23}$$

Očitno gre za splošen primer matrične igre, saj matrika (23) nima sedla. Optimalni strategiji bomo zato iskali med mešanimi strategijami. Recimo, da izbere igralec P_1 strategijo $X = (x, 1 - x)$, igralec P_2 pa strategijo $Y = (y, 1 - y)$. Količini x in y ustrezata pogoju

$$0 < x, y < 1$$

Izračunajmo $E(X, Y)$:

$$E(X, Y) = -xy + 2x(1 - y) + 3(1 - x)y + (1 - x)(1 - y) =$$

$$= -5xy + x + 2y + 1 =$$

$$= -5\left(x - \tfrac{2}{5}\right)\left(y - \tfrac{1}{5}\right) + \tfrac{7}{5}$$

Igralec P_1 si z izbiro $x = \frac{2}{5}$ lahko zagotovi minimalni povprečni dobiček $\frac{7}{5}$, saj je pri tej vrednosti za x prvi člen v zadnjem izrazu za $E(X, Y)$ enak nič, ne glede na to, kakšen y izbere igralec P_2. Prav tako pa igralec P_2 z izborom $y = \frac{3}{5}$ doseže, da povprečni dobiček igralca P_1 ni večji od $\frac{7}{5}$. Torej je

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = \tfrac{7}{5}$$

vrednost dane igre, njeno rešitev pa tvorita strategiji

$$Y_0 = \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\right)$$

$$X_0 = \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}\right)$$

V primeru, ki smo ga pravkar obravnavali, je bila plačilna matrika tako preprosta, da smo ugotovili vrednost igre in njeno rešitev brez težav. Če pa ima plačilna matrika količkaj veliko število vrstic in stolpcev, je iskanje rešitve zelo zamudno opravilo. Včasih si pri tem lahko pomagamo z nekaterimi lastnostmi optimalnih strategij. Z naštevanjem in dokazovanjem teh lastnosti se ne utegnemo ukvarjati. Opisali bomo samo še, kako lahko prevedemo reševanje matrične igre na problem linearnega programiranja.[4] Ta prevedba je koristna, saj eksistirajo pri linearnem programiranju zelo ekonomični računski algoritmi. Z njimi pridemo razmeroma poceni do optimalnih strategij za oba igralca.

Vzemimo torej, da ima matrična igra plačilno matriko

$$D = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{Vmatrix}$$

Ni se težko prepričati, da ima igralec P_1 v tej igri naslednjo nalogo: Poiskati mora tako strategijo $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ in največje tako število v, da veljajo neenačbe

$$\begin{aligned} d_{11}\, x_1 + d_{21}\, x_2 + \dots + d_{m1}\, x_m &\geqslant v \\ d_{12}\, x_1 + d_{22}\, x_2 + \dots + d_{m2}\, x_m &\geqslant v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ d_{1n}\, x_1 + d_{2n}\, x_2 + \dots + d_{mn}\, x_m &\geqslant v \end{aligned} \tag{24}$$

V resnici: Če izbere igralec P_1 strategijo X, mu ta zagotavlja nek minimalen povprečni dobiček. recimo v. To se pravi, da je pri vsaki strategiji Y

$$E\,(X, Y) \geqslant v \tag{25}$$

Če vzamemo v relaciji (25) za Y čisto strategijo Y_j ($j = 1, 2, \dots, n$), sledi iz pogoja (25) ravno j-ta neenačba v sistemu (24). Iz (25) torej slede pogoji (24). Velja pa tudi obratno. Če pomnožimo leve strani v relacijah (24) zapovrstjo z elementi strategije $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ in jih seštejemo, dobimo ravno $E\,(X, Y)$. Če pa napravimo isto reč z desnimi stranmi v relacijah (24), dobimo

$$(y_1 + y_2 + \dots + y_n)\, v = v,$$

saj je vsota v okroglem oklepaju enaka 1. Torej iz relacij (24) res sledi neenačba (25). Igralec P_1 seve stremi za tem, da je njegov minimalni povprečni dobiček čim večji. To pa ravno pomeni, da išče največje tako število v, pri katerem so še izpolnjene neenačbe (24).

---

[4] O linearnem programiranju je v Obzorniku že dvakrat poročal dr. A. Vadnal (Obzornik V/3, 1957, str. 101—106, Obzornik VIII/2, 1961, str. 65—71.[1]

Neenačbe v sistemu (24) lahko spremenimo v enačbe, če odštejemo od leve strani j-te neenačbe nenegativno količino x_{m+j} ($j = 1, 2, \ldots, n$). Razen tega je treba še upoštevati, da so količine $x_1, x_2, \ldots, x_m$ elementi strategije X. Igralec P_1 mora potemtakem najti take količine $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$, da so izpolnjeni pogoji

$$\begin{aligned} d_{11}x_1 + d_{21}x_2 + \ldots + d_{m1}x_m - x_{m+1} &= v \\ d_{12}x_2 + d_{22}x_2 + \ldots + d_{m2}x_m - x_{m+2} &= v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{1n}x_1 + d_{2n}x_2 + \ldots + d_{mn}x_m - x_{m+n} &= v \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m &= 1 \\ x_k \geqslant 0 \qquad (k &= 1, 2, \ldots, m+n) \end{aligned} \tag{26}$$

in je pri tem število v tako veliko, kolikor je sploh mogoče.

Vzemimo za v levo stran prve enačbe v pogojih (26), obenem pa prvo enačbo odštejmo od naslednjih $n-1$ enačb! Potem je pred igralcem P_1 tale naloga:

Poiskati je treba maksimum linearne forme

$$v = d_{11}x_1 + d_{21}x_2 + \ldots + d_{m1}x_m - x_{m+1}$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} (d_{12} - d_{11})x_1 + (d_{22} - d_{21})x_2 + \ldots + (d_{m2} - d_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+2} &= 0 \\ (d_{13} - d_{11})x_1 + (d_{23} - d_{21})x_2 + \ldots + (d_{m3} - d_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+3} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (d_{1n} - d_{11})x_1 + (d_{2n} - d_{21})x_2 + \ldots + (d_{mn} - d_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+n} &= 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m &= 1 \\ x_k \geqslant 0 \qquad (k &= 1, 2, \ldots, m+n) \end{aligned}$$

Ta naloga pa res ni nič drugega kot linearno programiranje v standardni obliki.

Podobno kot za igralca P_1 se formulira v obliki linearnega programiranja naloga, poiskati optimalno strategijo za igralca P_2. To delo prepuščamo bralcu.

Literatura:

1. McKinsey, Introduction to the Theory of Games, New York 1952.
2. Gass, Linear Programming, New York 1958.
3. Luce-Raiffa, Games and Decisions, New York 1957.

O LOČNI DOLŽINI GLADKIH KRIVULJ IN O POVRŠINI GLADKIH PLOSKEV

FRANCE KRIŽANIČ

Pričujoči sestavek, ki je čisto metodične narave, je ozko povezan z nedavnim člankov I. Vidava »O definiciji določenega integrala« [1]. Ideja, po kateri definiramo določeni integral najprej za preproste stopničaste funkcije, ko gre še za čisto algebrsko operacijo, nato ga šele z limitnim procesom prenesemo na obsežnejšo množico funkcij, je tako naravna in vabljiva, da kar kliče po uporabi še v drugih primerih. Naravna je ta definicija, ker je fiziku blizu. Saj so fiziku vse funkcije stopničaste, kadar obravnava določeni integral, kot so mu vse funkcije zvezne, kadar mu je tako bolj prav. Vabljiva pa je ta metoda zato, ker omogoča matematiku bolj jasno razčlenitev pojmov, ostrejši prehod med algebrskim in analitičnim delom definicije.

Poskusimo na podoben način obravnavati dva pojma, ki sta prav tako doma v osnovnem tečaju matematike. Gre za pojma, ki sta navedena v naslovu. Preden preidemo na podrobnosti, se ustavimo ob nekaterih skupnih potezah vseh treh pojmov: določenega integrala, ločne dolžine in površine. Malo bolj pikolovski bralec bi nas popravil že pri naštevanju, bolj po godu bi mu bilo določnejše izražanje: določeni integral te in te funkcije, ločna dolžina te in te krivulje, površina te in te ploskve. Določeni integral funkcije je število, ki ustreza tej funkciji, ločna dolžina krivulje je število, ki na nek način ustreza tej krivulji, površina ploskve je prav tako število, ki ustreza tej ploskvi. Prav, mu odvrnimo, saj vemo. Toda naša raba besede nam je bolj všeč, ne zato, ker je krajša, zato, ker je bogatejša. Določeni integral za nas ni samo število, bolj nas zanima kot predpis, ki vsaki funkciji — pri kateri to gre — priredi ustrezno število in ločna dolžina je za nas predpis, ki priredi krivulji ustrezno število in prav taka je s površino. V vseh treh primerih gre torej za funkcijske predpise, pri katerih pa defnicijsko območje ni sestavljeno iz števil, temveč iz bolj zamotanih matematičnih objektov: funkcij, krivulj ali ploskev. Na kratko pravimo: vsi trije pojmi so za nas funkcionali. Argument funkcionala je v prvem primeru funkcija, v drugem primeru krivulja, v tretjem ploskev. Vrednost funkcionala pa je vselej število.

V vseh treh primerih lahko najdemo v definicijskem območju funkcionala take objekte, katerim znamo določiti ustrezne vrednosti funkcionala povsem elementarno. Taki objekti so za določeni integral stopničaste funkcije, za ločno dolžino so to poligoni in za površino ploskve poliedri. Ti elementarni objekti predstavljajo nekakšno ogrodje, nad katerim zgradimo obsežnejše definicijsko območje. Na začetek konstrukcije bomo namreč postavili prvo zahtevo: Vsak obravnavani funkcional naj priredi elementarnim objektom tisto vrednost, ki nam je domača iz elementarne matematike.

Pri širjenju definicijskega območja bomo sledili še drugi zahtevi, ki jo tudi narekuje vsakdanje opazovanje: dvema objektoma, ki sta si zadosti blizu, naj funkcional priredi vrednosti, ki se le malo razlikujeta. Na kratko: vsak od obravnavanih funkcionalov naj bo zvezen.

Druga zahteva, naj bo na videz še tako jasna in sprejemljiva, pa skriva nevarno logično past. V podajanju te zahteve namreč vse preveč brezbrižno rokujemo s pojmom, ki ga še nismo definirali. Kaj pomeni: dve krivulji sta si

blizu, dve ploskvi sta si blizu? Na dveh značilnih primerih bomo ob koncu obravnave pokazali, kako usoden je odgovor na to vprašanje.

Preden se lotimo funkcionala samega, moramo torej v njegovem definicijskem območju najti neko sodilo, ki nam bo povedalo, kako blizu sta si dva objekta. Tako sodilo bomo dosegli, če smotrno definiramo razdaljo dveh objektov, ali kot pravimo, če uvedemo metriko v definicijsko območje funkcionala.

Prehod od elementarnih objektov k splošnejšim objektom definicijskega območja bomo zasnovali na limitnem procesu. To pa je mogoče le, če se da vsak objekt definicijskega območja poljubno natančno približati z elementarnimi objekti. To izrazimo krajše z besedami: elementarni objekti naj bodo v definicijskem območju povsod gosti.

Povzemimo sedaj vse zahteve v tistem vrstnem redu, v katerem jih bomo v toku obravnave zadostili. Konstruirati želimo tak funkcional (ločno dolžino, površino ploskve), ki bo zadoščal naslednjim zahtevam:

Definicijsko območje funkcionala naj bo opremljeno z neko metriko. V definicijskem območju naj leže elementarni objekti (poligoni, poliedri) povsod gosto.

Funkcional naj bo v dani metriki zvezen.

Elementarnim objektom naj funkcional priredi tiste vrednosti, ki jih zahteva elementarna matematika.

Tem zahtevam bomo lahko zadostili, če se bomo od vsega začetka omejili na odsekoma gladke krivulje in na odsekoma gladke ploskve. Tako zastavljena naloga seveda ne zajema problema ločne dolžine in površine v vsej globini in širini (tako splošno obravnavo najdeš na primer v [2] in [3]). Omogočila pa nam bo pozornejšo logično analizo obeh pojmov na najpreprostejših primerih. Predvsem pa — upam — bo ugodna stroga vzporednost obravnave v obeh primerih. Za tako vzporednost se je zavzemal že H. Lebesgue [4] in z njim A. N. Kolmogorov [5], toda kljub njunim priporočilom ne najdemo v učbenikih višje matematike dosledno izvedene Lebesgueove osnovne ideje.*

Poglejmo takorekoč v poljuben učbenik pa bomo odkrili takole sliko: Pri obravnavanju ločne dolžine sta običajno ločeni definicija in formula. Definicija uvede ločno dolžino jordanske krivulje z limito dolžin včrtanih poligonov. Formula

$$s = \int |\dot{\mathbf{r}}| \, dt \tag{1}$$

ki podaja ločno dolžino za odsekoma gladke krivulje, terja potem poseben dokaz. Pri obravnavanju površine pa odkrito ali prikrito definiramo površino kar z integralom

$$S = \int\int |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du dv \tag{2}$$

Nekateri tečaji, ki so dovolj odkriti (na primer [6]) sprejmejo formulo (2) za definicijo in si prihranijo vsako odvišno dokazovanje. Drugi tečaji pa defenirajo površino manj odkrito: integral (2) pričarajo tako, da sestavijo zanj najprej

* Delo [4] je zbornik člankov, ki so izhajali v »L'Enseignement mathématique« v letih 1931—1935. Prva ruska izdaja teh člankov je izšla v knjižni obliki in s predgovorom [5] že leta 1938, skoraj dvajset let pred enako francosko izdajo.

Riemannove vsote in nato izvedejo še limitni prehod, kakršen je pri integralu v navadi. Sklicevanje na geometrijski pomen Riemannove vsote nikakor ne nadomesti tiste prepričljivosti, ki jo ima definicija ločne dolžine z včrtanimi poligoni.

Izvor opisane nesreče je dvojen: Površine ne moremo zadosti preprosto definirati z limitnim prehodom od površin včrtanih poliedrov. To pove že stari Schwarzov primer. Hkrati pa so matematiki — kot pravi H. Lebesgue — obsedeni prav od včrtanih poligonov. Zahteve pa, ki smo jih postavili funkcionalom po njegovem vzoru, nas osvobajajo te obsedenosti in nam omogočajo enoten pristop k obema pojmoma. In sedaj nam preostane le še eno: korak za korakom osvojiti oba pojma s pravkar nakazane pristopne strani. Pozorni bralec bo opazil, da je pot do ločne dolžine pravzaprav sestavljena iz istih računov, kot pri dokazovanju formule (1) pri običajni obravnavi, le interpretacija teh korakov pri naši obdelavi drugače zaživi.

Odsekoma gladke krivulje in razdalje med njimi

Začnimo z definicijo objektov, ki bodo sestavljali definicijsko območje ločne dolžine. Te objekte — krivulje definirajmo analitično z vektorsko enačbo in povsem prezrimo, da je lahko ista geometrijska krivulja izražena z različnimi parametri in torej z različnimi vektorskimi funkcijami. Imejmo torej enkrat za vselej pribit interval na številski premici, recimo kar interval

$$0 \leq t \leq 1 \tag{3}$$

Vsaki točki intervala (3) naj ustreza v prostoru točka s krajevnim vektorjem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{4}$$

Množica točk, ki jo opiše funkcija (4) v prostoru, je jordanska krivulja, če je funkcija (4) v obe smeri enolična in v obe smeri zvezna. V bodoče si izrazje poenostavimo in imenujmo kar funkcijo $\mathbf{r}(t)$ sâmo krivuljo. To nas ne bo zavedlo v zmedo, dokler se držimo dogovora z začetka tega razdelka.

Jordanska krivulja (4) je gladka na intervalu, če je na tem intervalu njen odvod $\dot{\mathbf{r}}(t)$ zvezen in različen od 0. Jordanska krivulja (4) je odsekoma gladka, če razpade interval (3) na končno mnogo podintervalov, na katerih je krivulja (4) gladka.

Spomnimo se, da je odvod definiran kot limita diferenčnih kvocientov. Označimo na kratko

$$\mathbf{r}(t, t+h) = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \tag{5}$$

Tedaj je

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{h \to 0} \mathbf{r}(t, t+h)$$

Pozneje bomo potrebovali tale pomožni izrek:

Diferenčni kvocient odsekoma gladke krivulje konvergira k odvodu enakomerno.

Za dokaz tega izreka se zatečimo h komponentam. Prvo komponento diferenčnega kvocienta

$$x(t, t+h) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

zapišimo po Lagrangevem izreku

$$x(t, t+h) = \dot{x}(t + \Theta h) \qquad 0 \leq \Theta \leq 1 \tag{6}$$

Na zaprtem intervalu (3) odsekoma zvezna funkcija je enakomerno zvezna in zato vsakemu $\varepsilon > 0$ ustreza tak $\delta > 0$, da pri vsakem t

$$\text{iz} \quad |h| \leq \delta \qquad \text{sledi} \qquad |\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)| \leq \varepsilon/\sqrt{3}$$

in zaradi (6) tudi

$$\text{iz} \quad |h| \leq \delta \qquad \text{sledi} \qquad |x(t, \mathbf{t}+h) - \dot{x}(t)| \leq \varepsilon/\sqrt{3}$$

Ravnajmo podobno še z drugo in tretjo komponento in po potrebi zmanjšajmo δ tako, da iz

$$|h| \leq \delta$$

hkrati sledi

$$|x(t, t+h) - \dot{x}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad |y(t, t+h) - \dot{y}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},$$

$$|z(t, t+h) - \dot{z}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

Tedaj pa tudi

$$\text{iz} \quad |h| < \delta \qquad \text{sledi} \qquad |\mathbf{r}(t, t+h) - \dot{\mathbf{r}}(t)| \leq \varepsilon \tag{7}$$

in izrek je dokazan.

Definirajmo sedaj razdaljo dveh odsekoma gladkih krivulj $\mathbf{r}_1(t)$ in $\mathbf{r}_2(t)$. Najprej poiščimo dve števili

$$\alpha = \max |\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)|$$
$$\beta = \max |\dot{\mathbf{r}}_2(t) - \dot{\mathbf{r}}_1(t)|$$

kjer pomeni max največjo vrednost funkcije za njim na intervalu (3). Razdaljo obeh krivulj imenujmo večje med števili α in β

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \max(\alpha, \beta) \tag{8}$$

Nobenih težav ne bo našel bralec, ki bo sam preskusil, da je ta razdalja nenegativna

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \geq 0$$

in enaka 0 le pri $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, da je simetrična

$$\varrho(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

in da zadošča trikotniški neenačbi

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \leq \varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \varrho(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$$

tako, kot se za pravo razdaljo spodobi. Množica vseh odsekoma gladkih krivulj je tako pretvorjena v metrični prostor.

Funkcional nad pravkar izdelanim prostorom je vsak predpis, ki priredi vsaki odsekoma gladki krivulji neko število. Funkcional je enoličen, če priredi vsaki krivulji eno samo število. Funkcional označimo na kratko s Φ, število, ki ga priredi krivulji $\mathbf{r}(t)$ pa s $\Phi\,\mathbf{r}(t))$ ali krajše $\Phi(\mathbf{r})$. Funkcional Φ je pri krivulji $\mathbf{r}_0(t)$ zvezen, če ustreza vsakemu $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da

$$\text{iz} \quad \varrho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \leqq \delta \qquad \text{sledi} \qquad |\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0)| \leqq \varepsilon$$

Zveznost funkcionala lahko opišemo še neposredno, brez uporabe razdalje (8). Funkcional Φ je zvezen pri krivulji $\mathbf{r}_0(t)$, če ustreza vsakemu $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da velja

$$|\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0)| \leqq \varepsilon$$

čim je po celem intervalu (3)

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0(t)| \leqq \delta \quad \text{in} \quad |\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}_0(t)| \leqq \delta$$

Funkcional Φ je zvezen, če je zvezen pri vsaki odsekoma gladki krivulji.

Poligoni in dolžina poligonov

Poligon definiramo z odsekoma linearno funkcijo, ki jo označimo s črko $\mathbf{p}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(t)$$

Odsekoma linearna funkcija pa je določena takole: Interval (3) razbijmo na končno mnogo podintervalov

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 \tag{9}$$

in naj bo

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_k (t - t_{k-1}) + \mathbf{b}_{k-1}, \quad t_{k-1} \leqq t \leqq t_k \tag{10}$$

Vektorji $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ in $\mathbf{b}_0$ so dani vnaprej, vektorje $\mathbf{b}_k$ pri $k \geqq 1$ pa določimo zapored z zahtevo, da bodi funkcija $\mathbf{p}(t)$ zvezna. Torej

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k (t_k - t_{k-1}) + \mathbf{b}_{k-1}$$

ali

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{p}(t_k) \tag{11}$$

Tako določen poligon je sestavljen iz n stranic, k-ta stranica leži na vektorju $\mathbf{a}_k$, njena dolžina pa je enaka

$$|\mathbf{a}_k| (t_k - t_{k-1})$$

Označimo dolžino k-tega podintervala v razdelitvi (9) z δ_k pa moremo dolžino poligona zapisati takole

$$s(\mathbf{p}) = |\mathbf{a}_1| \delta_1 + |\mathbf{a}_2| \delta_2 + \ldots + |\mathbf{a}_n| \delta_n$$

Funkcija $\mathbf{p}(t)$ je očitno odsekoma gladka, saj je na vsakem delnem intervalu odvedljiva, njen odvod pa je odsekoma konstanten:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{a}_k, \qquad t_{k-1} < t < t_k \tag{12}$$

Absolutna vrednost odvoda je stopničasta funkcija, vrednost $|\dot{\mathbf{p}}(t)|$ na k-tem podintervalu je $|\mathbf{a}_k|$

$$|\dot{\mathbf{p}}(t)| = |\mathbf{a}_k|, \quad t_{k-1} < t < t_k$$

To pa nam pove, da moremo $s(\mathbf{p})$ izraziti kot določeni integral stopničaste funkcije $|\dot{\mathbf{p}}(t)|$

$$s(\mathbf{p}) = \int_0^1 |\dot{\mathbf{p}}(t)|\, dt \tag{13}$$

Poligoni leže med gladkimi krivuljami povsod gosto

Dokažimo, da leže poligoni v prostoru gladkih krivulj povsod gosto. Ali: dokažimo, da se da vsaka gladka krivulja poljubno natančno aproksimirati s poligonom. Imejmo torej odsekoma gladko krivuljo $\mathbf{r}(t)$ in dokažimo, da ustreza vsakega $\varepsilon > 0$ vsaj en tak poligon, $\mathbf{p}(t)$, da velja

$$\delta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) < \varepsilon$$

ali:

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{p}(t)| < \varepsilon \tag{14}$$

in

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{p}(t)| < \varepsilon \tag{15}$$

pri vsakem t na intervalu (3).

To nalogo nam bo odpravil včrtani poligon. Vsaki razdelitvi intervala (3) na podintervale (9) priredimo poligon (10), ki ustreza pogojem

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{r}(t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{16}$$

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{r}(t_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{17}$$

Znak na desni strani (16) pomeni diferenčni kvocient, kakor smo se dogovorili s (5). Primerjajmo (17) in (11) pa ugotovimo, da leže oglišča tega poligona na krivulji $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{p}(t_k) = \mathbf{r}(t_k)$$

zato pravimo, da je poligon $\mathbf{p}(t)$ včrtan krivulji $\mathbf{r}(t)$.

Funkcija $\mathbf{r}(t)$ je odsekoma zvezno odvedljiva in zato njeni diferenčni kvocienti enakomerno konvergirajo k odvodu. Vsakemu $\varepsilon > 0$ ustreza torej tak $\delta > 0$, da iz $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ sledi

$$|\mathbf{r}(t_{k-1}, t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{18}$$

Zgostimo razdelitev (9) tako, da velja (18). Tedaj moremo zaradi (16) prepisati drugo oceno (18) takole

$$|\mathbf{a}_k - \dot{\mathbf{r}}(t_{k-1})| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Funkcija $\mathbf{r}(t)$ je odsekoma zvezna. Zato moremo po potrebi zmanjšati δ tako, da bo veljalo

$$|\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(t_{k-1})| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$$

in tedaj

$$|\dot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{a}_k| < \varepsilon, \quad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$$

Zaradi (15) pa nam to pove, da je

$$|\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{p}}(t)| < \varepsilon$$

na vsem intervalu (3). Razliko funkcijskih vrednosti lahko izrazimo z integralom

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{p}(t) = \int_0^t [\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{p}}(t)]\, dt, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

in jo nemudoma ocenimo

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{p}(t)| \leqslant \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{p}}(t)|\, dt \leqslant \varepsilon t \leqslant \varepsilon$$

Poligon $\mathbf{p}(t)$ res zadošča obema pogojema (14) in (15) in izrek je dokazan.

Ločna dolžina odsekoma gladke krivulje

Imejmo spet odsekoma gladko krivuljo $\mathbf{r}(t)$ in vzemimo poljubno padajoče zaporedje pozitivnih števil

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$$

ki konvergira k 0

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

Vsakemu številu ε_n konstruirajmo po prejšnjem razdelku tak poligon $\mathbf{p}_n(t)$, da velja po vsem intervalu (3)

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{p}_n(t)| \leqslant \varepsilon_n$$

in

$$|\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{p}}_n(t)| \leqslant \varepsilon_n$$

Dolžina poligona $\mathbf{p}_n(t)$ naj bo s_n

$$s_n = \int_0^1 |\dot{\mathbf{p}}_n(t)|\, dt$$

Ločno dolžino krivulje $\mathbf{r}(t)$ definirajmo po dogovoru kot limito zaporedja s_n

$$s = \lim s_n$$

Prepričati se moramo še, da je ta definicija smiselna. Dokazati moramo, da zaporedje s_n res konvergira in še, da je število s neodvisno od izbora števil ε_n in ustreznih aproksimirujočih poligonov $\mathbf{p}_n(t)$. Vse to pa bomo dokazali, čim pokažemo, kako se število s izraža s krivuljo samo. Dokažimo torej:

Zaporedje s_n konvergira k integralu

$$s^* = \int_0^1 |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$$

Za dokaz ocenimo razliko $s^* - s_n$

$$|s^* - s_n| \leqslant \int_0^1 ||\dot{\mathbf{r}}(t)| - |\dot{\mathbf{p}}_n(t)||\, dt \tag{19}$$

Izraz pod integralom lahko ocenimo še naprej

$$\big|\,|\dot{\mathbf{r}}(t)| - |\dot{\mathbf{p}}_n(t)|\,\big| \leqslant |\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{p}}_n(t)| \leqslant \varepsilon_n$$

in s tem tudi

$$|s^* - s_n| \leqslant \varepsilon_n$$

Izberimo $n(\varepsilon)$ tako velik, da bo ustrezni ε_n manjši od ε. Tedaj pa

$$\text{iz } n > n(\varepsilon) \quad \text{sledi} \quad |s^* - s_n| < \varepsilon$$

in izrek je dokazan.

Tako smo uvideli troje hkrati: zaporedje s_n konvergira, limita je neodvisna od izbire aproksimirujočih poligonov in našli smo še formulo, ki določa ločno dolžino odsekoma gladke krivulje

$$s(\mathbf{r}) = \int_0^1 |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt$$

Preskusimo še zveznost pravkar tvorjenega funkcionala. V ta namen ocenimo razliko vrednosti tega funkcionala pri dveh različnih krivuljah $\mathbf{r}(t)$ in $\mathbf{r}^*(t)$

$$|s(\mathbf{r}) - s(\mathbf{r}^*)| \leqslant \int_0^1 \big|\,|\dot{\mathbf{r}}(t)| - |\dot{\mathbf{r}}^*(t)|\,\big|\,dt \leqslant \int_0^1 |\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}^*(t)|\,dt \leqslant \varrho(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \int_0^1 dt$$

in

$$|s(\mathbf{r}) - s(\mathbf{r}^*| < \varrho(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$$

Torej

$$\text{iz } \varrho(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) < \varepsilon \quad \text{sledi} \quad |s(\mathbf{r}) - s(\mathbf{r}^*)| < \varepsilon$$

in zveznost funkcionala je dokazana.

Odsekoma gladke ploskve in razdalje med njimi

Lotimo se drugega dela naloge: površine gladke ploskve. Najprej se spet ustavimo ob definiciji gladke ploskve. Ta definicija bo nekaj zahtevnejša kot je bila ustrezna definicija za krivulje. Spet bomo ploskev identificirali kar s funkcijo dveh skalarnih spremenljivk

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{20}$$

ki določa krajevne vektorje točk na ploskvi. Opis te funkcije pa terja nekaj besed več, kot v prejšnjem primeru. Začeti moramo že z opisom definicijskega območja. Omejimo se le na funkcije za katere velja:

Definicijsko območje funkcije (20) — imenujmo ga D — naj bo omejeno in ograjeno s končno mnogimi sklenjenimi krivuljami. Ploščina krivulj, ki ograjajo območje D naj bo enaka 0.

Zadnja zahteva terja posebno pojasnilo. Rekli bomo, da je ploščina krivulje enaka 0, če vsakemu $\varepsilon > 0$ ustreza končno mnogo pravokotnikov, ki pokrivajo dano krivuljo in merijo skupaj manj kot ε.

Na primer: vse odsekoma gladke krivulje so krivulje s ploščino 0.

Dogovorimo se še, da roba ne bomo šteli k območju D, območje D bo torej vselej odprto. Območje, ki ga dobimo s privzemom roba k D pa označimo z znakom $\overline{D}$.

Te omejitve sprejmimo enkrat za vselej, da jih ne bomo vedno znova ponavljali.

Funkcijo (20), definirano nad nekim območjem $\overline{D}$ bomo imenovali gladko funkcijo, če je na zaprtem območju $\overline{D}$ zvezna, v notranjosti D pa zvezno parcialno odvedljiva na obe spremenljivki in zadošča pogoju

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$$

Z $\mathbf{r}_u$ in $\mathbf{r}_v$ smo označili parcialna odvoda funkcije (20), kot je v navadi.

Funkcijo (20), definirano nad nekim območjem D bomo imenovali odsekoma gladko funkcijo, če lahko območje D razdelimo na končno mnogo območij D_k, na katerih je funkcija (20) gladka, meje med posameznimi območji pa so spet krivulje s ploščino 0.

Definirajmo sedaj razdaljo med dvema odsekoma gladkima ploskvama. Prvo ploskev naj določa funkcija $\mathbf{r}_1(u, v)$, definirana na območju D_1, drugo ploskev pa funkcija $\mathbf{r}_2(u, v)$ z definicijskim območjem D_2.

Presek obeh definicijskih območij imenujmo D

$$D = D_1 \cap D_2$$

D' pa naj bo komplement območja D v uniji $D_1 \cup D_2$:

$$D' = (D_1 \cup D_2) - D$$

Območje D druži torej tiste točke, ki so obema območjema skupne, D' pa tiste točke, ki so v enem in samo v enem obeh območij.

Poiščimo sedaj tri števila

$$\alpha = \max | \mathbf{r}_1(u, v) - \mathbf{r}_2(u, v) |$$

$$\beta = \max | \mathbf{r}_{1u} \times \mathbf{r}_{1v} - \mathbf{r}_{2u} \times \mathbf{r}_{2v} |$$

Tu pomeni max največjo vrednost funkcije, ki stoji za tem znakom, na območju D. Tretje število γ pa naj bo ploščina območja D

$$\gamma = \sigma(D')$$

Razdalja ploskev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$ naj bo največje med števili α, β in γ

$$\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \max(\alpha, \beta, \gamma)$$

Dokaz, da tako definirana razdalja zadošča vsem potrebnim aksiomom, ne predstavlja bistvenih težav.

Zveznost funkcionala $\Phi(\mathbf{r})$, definiranega nad prostorom odsekoma gladkih ploskev, definiramo dobesedno tako, kakor zveznost funkcionala nad prostorom odsekoma gladkih krivulj. Le neposredni opis zveznosti zahteva sedaj druge besede:

Funkcional $\Phi(\mathbf{r})$ je zvezen pri ploskvi $\mathbf{r}^0(u, v)$, če ustreza vsakemu $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da velja

$$|\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}^0)| < \varepsilon$$

čim so izpolnjeni trije pogoji:

Na skupnem delu definicijskih območij D in D^0 velja

$$|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}^0(u, v)| < \delta$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0| < \delta$$

ploščina tistih delov obeh definicijskih območij, ki niso v obeh območjih hkrati, pa je tudi manjša od δ.

Poliedri in površina poliedrov

Polieder bomo opisali z odsekoma linearno funkcijo dveh spremenljivk

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u, v) \tag{21}$$

vendar nam bo konstrukcija te funkcije dala nekaj več dela, kakor sorodna funkcija ene spremenljivke, s katero smo definirali poligon.

Najprej se ustavimo ob poliedru samem. Polieder je sestavljen iz končno mnogih ravnih delov — večkotnikov. Vsak tak večkotnik, ki pripada danemu poliedru, imenujemo stranico poliedra; robovi večkotnikov, ki sestavljajo polieder, so robovi poliedra in oglišča robov so oglišča poliedra.

Medsebojna lega večkotnikov, ki sestavljajo polieder, je omejena z naslednjimi zahtevami:

Polieder je enostavno sovisen.

Dve stranici poliedra se sekata vzdolž skupnega roba ali pa nimata skupnih točk. Vzdolž vsakega roba se stikata kvečjemu dve stranici.

Dva robova poliedra se stikata v skupnem oglišču, ali pa nimata skupnih točk.

Vsak večkotnik lahko razdelimo na trikotnike. Napravimo to z vsemi stranicami poliedra tako, da bo ta razdelitev spet zadoščala pravkar navedenim pogojem. Tako dobimo nek nov polieder, sestavljen iz samih trikotnikov. Imenujmo ga triangulacijo prvotnega poliedra. V bodoče bomo pod poliedrom razumeli kar njegovo triangulacijo, torej polieder s trikotnimi stranicami.

Imejmo torej nek polieder in se ozrimo po funkciji (21), ki nam ga predstavlja. Najprej opišimo njeno definicijsko območje. To območje leži v ravnini spremenljivk (u, v) in je sestavljeno iz prav tolikih trikotnikov, kolikor trikotnikov sestavlja polieder v prostoru. Vsaki stranici poliedra ustreza torej nek trikotnik v ravnini (u, v) in prav tako ustreza vsakemu trikotniku definicijskega območja neka stranica poliedra. Oblika trikotnika, ki ustreza stranici poliedra v definicijskem območju, je lahko poljubna, nikake podobnosti med trikotnikom v definicijskem območju in ustrezno stranico ne zahtevamo. Omejimo le medsebojno lego trikotnikov z zahtevama:

Trikotniki, ki sestavljajo definicijsko območje, naj zadoščajo vsem pogojem, ki smo jih postavili za polieder.

Dve stranici poliedra, ki ustrezata sosednjima trikotnikoma definicijskega območja, naj imata skupni rob.

Definicijsko območje je tako triangulirani ravninski polieder — večkotnik. Vsakemu robu ustreza v definicijskem območju en in en sam rob poliedra. Lahko pa isti rob poliedra ustreza več robovom definicijskega območja.

Funkcijo (21), ki naj podaja polieder, definirajmo odsekoma, na vsakem trikotniku definicijskega območja posebej.

Naj bo trikotnik z oglišči

$$T_0\,(u_0, v_0) \qquad T_1\,(u_0 + k, v_0 + l) \qquad T_2\,(u_0 + m, v_0 + n) \tag{22}$$

sestavni del definicijskega območja. Ustrezni trikotnik v prostoru pa naj ima stranice

$$\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a} - \mathbf{b} \tag{23}$$

Koordinati poljubne točke $T\,(u, v)$ v trikotniku (22) lahko izrazimo z dvema parametroma λ in μ

$$u = u_0 + \lambda k + \mu m \tag{24}$$

$$v = v_0 + \lambda l + \mu n$$

ki zadoščata pogojem

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \lambda + \mu \leqslant 1 \tag{25}$$

Ploščina trikotnika (22) je, kakor vemo iz analitične geometrije

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\,|\,k\,n - l\,m\,| \tag{26}$$

To nam pove, da je determinanta koeficientov pri λ in μ v sistemu (24) različna od 0 in iz sistema lahko izrazimo λ in μ kot (linearni) funkciji spremenljivk u in v

$$\lambda = \lambda\,(u, v) \qquad \mu = \mu\,(u, v) \tag{27}$$

Izberimo λ in μ za posredni spremenljivki in definirajmo funkcijo (21) nad obravnavanim trikotnikom takole

$$\mathbf{p}\,(u, v) = \mathbf{r}_0 + \lambda\,(u, v)\,\mathbf{a} + \mu\,(u, v)\,\mathbf{b} \tag{28}$$

Tu pomeni $\mathbf{r}_0$ krajevni vektor tistega oglišča, iz katerega izhajata stranici $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Vrednosti funkcije (28) pretečejo ves trikotnik s stranicami (23), ko preteče točka $T\,(u, v)$ ves trikotnik (22), pomožni spremenljivki λ in μ pa pri tem vse območje (25). Funkcija (28) preslika vsak rob trikotnika v ustrezni rob poliedra in vsako oglišče v ustrezno oglišče. Vse to lahko presodi bralec sam.

Funkcija (28) je nad obravnavanim trikotnikom linearna funkcija spremenljivk u in v, saj je očitno linearna funkcija posrednih spremenljivk λ in u, le-ti pa sta linearno odvisni od u in v. Funkcija (28) je torej na vsem trikotniku (22) zvezno odvedljiva. Izrazimo stranici $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ z odvodoma $\mathbf{p}_u$ in $\mathbf{p}_v$! Najprej je očitno

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_\lambda \qquad \mathbf{b} = \mathbf{p}_\mu$$

Odvoda na posredni spremenljivki pa izrazimo po pravilu

$$\mathbf{p}_\lambda = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\,\mathbf{p}_u + \frac{\partial v}{\partial \lambda}\,\mathbf{p}_v$$

$$\mathbf{p}_\mu = \frac{\partial u}{\partial \mu}\,\mathbf{p}_u + \frac{\partial v}{\partial \mu}\,\mathbf{p}_v$$

Parcialne odvode spremenljivk u in v po spremenljivkah λ in μ izračunamo brez težav iz (24) in tako najdemo končno

$$\mathbf{a} = k\mathbf{p}_u + l\mathbf{p}_v \qquad \mathbf{b} = m\mathbf{p}_u + n\mathbf{p}_v \tag{29}$$

Po teh pripravah lahko izrazimo površino trikotnika v prostoru s funkcijo (28) in s ploščino ustreznega trikotnika na ravnini (u, v). Označimo površino trikotnika v prostoru z S, ploščino trikotnika na ravnini pa smo že označili s σ in izračunali (26).

Površina trikotnika s stranicama $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ je enaka

$$S = \tfrac{1}{2}\,|\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\,|$$

Vektorski produkt vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ pa je zaradi (29) enak

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (kn - lm)\,\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$$

in zaradi (26) dobimo končno

$$S = |\,\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\,|\,\sigma \tag{30}$$

Tako smo pravzaprav opisali najpreprostejši polieder, ki ga predstavlja en sam trikotnik v prostoru. Splošni primer je na dlani. Definicijsko območje poliedra je sestavljeno iz n trikotnikov, ki jih oštevilčimo in imenujmo k-ti trikotnik $\triangle_k$. Vsakemu trikotniku določimo ustrezni funkciji λ in μ; funkciji, ki ustrezata k-temu trikotniku imenujmo $\lambda_k(u, v)$ in $\mu_k(u, v)$. Trikotnik $\triangle_k$ naj določa stranico poliedra z robovoma $\mathbf{a}_k$ in $\mathbf{b}_k$, ki izhajata iz skupnega oglišča $\mathbf{r}_k$. Funkcijo (21) definiramo tedaj takole:

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{r}_k + \lambda_k(u, v)\,\mathbf{a}_k(u, v) + \mu_k(u, v)\,\mathbf{b}_k \quad \text{pri} \quad T(u, v) \in \triangle_k \tag{31}$$

Tako definirana funkcija je na vsakem trikotniku $\triangle_k$ linearna, torej zvezna in zvezno odvedljiva na u in v. Pa tudi pri prehodu iz enega trikotnika v sosedni trikotnik se zvezno spreminja. To uvidimo, če upoštevamo vse omejitve, ki smo jih položili v definicijo poliedra in v konstrukcijo definicijskega območja. Podrobni dokaz pa prepustimo bralcu. Ograja definicijskega območja je tudi očitno krivulja s ploščino 0, saj je poligon s končno mnogimi stranicami. Izraz $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$ je na vsakem delnem trikotniku konstanten in zaradi (30) različen od 0. Tako lahko povzamemo:

Polieder je odsekoma gladka ploskev.

Izračunajmo še površino poliedra. Ta je vsota površin posameznih stranic

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

Površino posamezne stranice izrazimo s (30) in tako dobimo

$$S = |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|_1\sigma_1 + |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|_2\sigma_2 + \ldots + |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|_n\sigma_n \tag{32}$$

Znak $|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|_k$ pomeni vrednost funkcije $|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|$ na trikotniku $\triangle_k$, saj je ta funkcija na vsakem trikotniku konstantna. Tedaj pa moremo vsoto (32) zapisati tudi kot dvojni integral stopničaste funkcije $|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|$

$$S = \int\int_D |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| \, d\sigma$$

ali

$$S = \int\int_D |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| \, du dv$$

Poliedri leže med odsekoma gladkimi ploskvami povsod gosto

Dokažimo, da leže poliedri med odsekoma gladkimi ploskvami povsod gosto Ali: dokažimo, da se da vsaka odsekoma gladka ploskev poljubno natančno približati s poliedrom. Imejmo torej odsekoma gladko ploskev $\mathbf{r}(u, v)$ in dokažimo, da ustreza vsakemu $\varepsilon > 0$ vsaj en tak polieder $\mathbf{p}(u, v)$, da velja:

$$|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{p}(u, v)| < \varepsilon \tag{33}$$

in

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v - \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| < \varepsilon \tag{34}$$

na skupnem delu definicijskih območij ter še

$$\sigma(D') < \varepsilon \tag{35}$$

kjer pomeni D' množico vseh tistih točk, ki so samo v enem definicijskem območju, $\sigma(D')$ pa pomeni ploščino te množice.

Polieder $\mathbf{p}(u, v)$ bomo spet včrtali ploskvi $\mathbf{r}(u, v)$. Najprej sestavimo poliedru $\mathbf{p}(u, v)$ definicijsko območje. V ta namen ravnajmo takole: Definicijsko območje ploskve $\mathbf{r}(u, v)$ je omejeno, shranimo ga v dovolj velik kvadrat s stranicami, ki so vzporedne koordinatnima osema. Razdelimo ta kvadrat z vzporednicami koordinatnih osi na n^2 enakih kvadratkov. Pozornost posvetimo najprej tistim kvadratkom, po katerih poteka ograja definicijskega območja. Rekli smo, da je ta ograja krivulja s ploščino 0. Zato lahko predpisanemu ε najdemo tolikšen n, da bo ploščina vseh kvadratkov, po katerih poteka ograja, manjša od ε.

Potem, ko smo razdelili prvotni kvadrat tako na drobno, da je izpolnjen pravkar opisani pogoj, zberimo vse tiste kvadratke, ki leže povsem v notranjosti definicijskega območja D. Lik, ki ga sestavljajo zbrani kvadratki naj bo definicijsko območje poliedra. Pogoj (35) je pri taki izbiri očitno izpolnjen. Vsak kvadratek razdelimo še v dva trikotnika z diagonalo, ki je vzporedna premici $u + v = 0$. Tako je že pripravljeno triangulirano definicijsko območje in preostane nam le še konstrukcija ustrezne odsekoma linearne funkcije.

Izberimo nek trikotnik iz definicijskega območja. Oglišča tega trikotnika naj bodo

$$T_0(u_0, v_0) \qquad T_1(u_1, v_0) \qquad T_2(u_0, v_1)$$

v prostoru naj temu trikotniku ustreza trikotnik z oglišči na ploskvi:

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{r}(u_1, v_0) \qquad \mathbf{r}(u_0, v_1)$$

Tak funkcijski predpis ustvarja funkcija

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{a}(u - u_0) + \mathbf{b}(v - v_0)$$

kjer sta **a** in **b** parcialna diferenčna kvocienta funkcije **r** (u, v)

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0, u_1; v_0) \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0; v_0, v_1)$$

Odvajajmo funkcijo **p** (u, v) najprej na u, nato pa na v

$$\mathbf{p}_u(u, v) = \mathbf{a} \qquad \mathbf{p}_v(u, v) = \mathbf{b}$$

Upoštevajmo, da konvergira diferenčni kvocient odsekoma gladke ploskve k odvodu enakomerno, prav kakor pri gladki krivulji. Z nadaljno zgostitvijo mreže lahko torej dosežemo, da bosta razliki

$$\mathbf{r}_u - \mathbf{p}_u \quad \text{in} \quad \mathbf{r}_v - \mathbf{p}_v \tag{36}$$

tako majhni, kakor hočemo. Pomislimo še na zveznost vektorskega produkta. pa nam bo na dlani, da je izpolnjen tudi pogoj (34), če je le mreža kvadratkov dovolj gosta.

Izpolnjen pa je tudi pogoj (33). To uvidimo, če integriramo prvo razliko (36) pri konstantnem v od u_0 do takega u, da leži točka $T(u, v)$ še v trikotniku. Tedaj dobimo:

$$\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{p}(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v) - \mathbf{p}(u_0, v) + \int_{u_o}^{u} (\mathbf{r}_u - \mathbf{p}_u)\, du \tag{37}$$

Integrirajmo še drugo razliko (36) pri $u = u_0$ od v_0 do v, ki leži med v_0 in v_1 pa dobimo še

$$\mathbf{r}(u_0, v) - \mathbf{p}(u_0, v) = \int_{v_o}^{v} [\mathbf{r}_v(u_0, v) - \mathbf{p}_v(u_0, v)]\, dv \tag{38}$$

če upoštevamo, da je $\mathbf{p}(u_0, v_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Odtod pa že vidimo, da je mogoče z dovolj gosto mrežo zadostiti tudi pogoju (33), saj sta tedaj razliki (36) poljubno majhni, z njima pa zaradi (37) in (38) tudi razlika funkcij **r** (u, v) in **p** (u, v). Izrek je tako povsem dokazan.

Površina odsekoma gladke ploskve

Imejmo odsekoma gladko ploskev **r** (u, v) in izberimo poljubno zaporedje pozitivnih števil ε_n, ki monotono konvergira k 0. Vsakemu ε_n ustreza tedaj tak polieder, $\mathbf{p}^n(u, v)$, da velja

$$\varrho(\mathbf{r}, \mathbf{p}^n) < \varepsilon_n$$

oziroma (33), (34) in (35) pri $\varepsilon = \varepsilon_n$. Površina poligona $\mathbf{p}^n(u, v)$ naj bo S_n, njegovo definicijsko območje pa D_n

$$S_n = \iint_{D_n} |\mathbf{p}_u^n \times \mathbf{p}_v^n|\, du dv$$

Dokažimo, da konvergirajo površine S_n k integralu

$$S = \iint_{D} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du dv \tag{39}$$

ki je neodvisen od izbire aproksimirujočih poliedrov. Torej je smiselna definicija:

Površina odsekoma gladke ploskve je limita, h kateri streme površine aproksimirujočih poliedrov.

Hkrati z opravičilom definicije bomo dokazali tudi izrek:

Površina odsekoma gladke ploskve je podana s formulo (39).

Za dokaz si oglejmo razliko

$$S - S_n = \int\int_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv - \int\int_{D_n} |\mathbf{p}_u^n \times \mathbf{p}_v^n| \, dudv \tag{40}$$

To razliko lahko zapišemo kot vsoto dveh integralov, če smo le konstruirali poliedre tako kot v prejšnjem razdelku. Tedaj namreč leži definicijsko območje poliedra D_n v definicijskem območju ploskve D in

$$S - S_n = \int\int_{D_n} (|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| - |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|) \, dudv + \int\int_{D'} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv$$

kjer je D' komplement območja D_n v območju D. S prvim integralom ravnajmo povsem tako, kakor smo ravnali svojčas z integralom (19). Tako lahko spoznamo, da prvi integral ne presega produkta $\varepsilon_n \sigma(D)$, kjer je $\sigma(D)$ ploščina območja D. Drugi integral pa ne preseže števila $\varepsilon_n M$, kjer je M največja vrednost funkcije $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ na območju D. Torej

$$|S - S_n| \leqslant [\sigma(D) + M] \varepsilon_n$$

Po predpisu poljubnega $\varepsilon > 0$ moramo torej izbrati $n(\varepsilon)$ tako velik, da bo ustrezni ε_n manjši od $\varepsilon/[\sigma(D) + M]$. Pri taki izbiri

$$\text{iz} \quad n > n(\varepsilon) \qquad \text{sledi} \qquad |S - S_n| < \varepsilon$$

in dokaz je končan.

Končno bi morali preskusiti še, da je tako tvorjeni funkcional res zvezen v uvedeni metriki. To delo bo lahko opravil bralec sam. Ravna naj tako, kakor smo pravkar ravnali z razliko (40). Le pred oceno mora ustrezno desno stran razbiti v tri člene: en integral po preseku D, drugi po $D_1 - D$ in tretji po $D_2 - D$.

Zaključek

Tako smo izpolnili program, ki smo ga zastavili v uvodu. Sedaj, ko so se zvrstile pred nami že vse podrobnosti, lahko začnemo z zbiranjem očitkov na račun predlagane poti. V uvodu smo se dotaknili običajne poti z določenimi ugovori in prav je, da še enkrat pregledamo svojo pot in preskusimo ali vzdrži ob istih ugovorih ali ne. Predvsem smo omenili, da je običajna definicija površine prikrito ali odkrito podana s formulo (39). Toda — si lahko ugovarjamo — saj smo sami ravnali prav tako. Vse delo, kar smo ga opravili pred definicijo, je bilo naravnano le v njeno opravičilo. Več pa od matematike tudi ne moremo pričakovati. Matematične teorije morajo biti pač logično neoporečne, njihovi izidi pa v skladu z opazovanji. Posredovalec med opazovanji in teorijo pa so aksiomi, ki jih postavljamo na začetek vsake teorije. Tako smo ravnali tudi v danem primeru in opravičili definicijo (39) zase in za vse druge.

Še en pomislek: je naše ravnanje kaj boljše opravičilo formule (39) od posredne definicije, ki smo jo opisali v uvodu? Le-ta začne z neko integralsko vsoto, ki jo na koncu privede do (39), mi pa smo začeli z definicijo razdalje med dvema ploskvama. Nismo morda že to razdaljo definirali tako, da nas mora nadaljnje razvijanje misli privesti do (39)? Ali ni morda tudi pri nas želeni rezultat pogodil začetnih podatkov? Prav lahko bi si očitali, da smo začeli z opazovanjem formule (39) in nato prikrojili aksiome tako, da smo iz njih spet prišli do (39). Obramba zoper ta očitek je nekoliko težka, pravzaprav pa nepotrebna, ker je končno tako ravnanje običajno in tudi pogosto.* Obrambe pa se lotimo kljub temu, ker razpolagamo še z drugimi opazovanji, ki nas silijo, da sprejmemo tako definicijo razdalje med krivuljami in razdalje med ploskvami, kakršno smo položili v temelje svoje obravnave. Pokažimo, da privede vsaka oslabitev zahtev do paradoksa že v elementarnih primerih.

Preglejmo še enkrat našo definicijo razdalje dveh krivulj (dveh ploskev). To razdaljo smo definirali tako, da sta si dve krivulji (dve ploskvi) blizu, če ležita blizu druga druge v navadnem pomenu besede, razen tega pa se v bližnjih točkah malo razlikujeta smeri tangent obeh krivulj (smeri normal obeh ploskev). Drugi pogoj, ki je na videz bolj nenavaden, je v obravnavanem primeru bistven. Prvemu pogoju bi se celo lahko izognili, saj ga pri obravnavanju funkcionala nismo nikjer potrebovali. Drugemu pogoju pa se nikakor ne moremo odpovedati. Za to govori že končna formula (39) sama. Paradoksi, ki jih bomo dosegli z opustitvijo te zahteve, pa nas bodo še enkrat prepričali, da smo šli po edini možni poti in v svojem ravnanju nismo sledili psu, ki lovi lastni rep.

Za prvi primer izberimo znamenito »žago« (slika!). Daljica AB ima dolžino 1. Izberimo še tretjo točko C tako, da bosta daljici AC in BC skupaj merili n enot ($n > 1$). Poligon z oglišči A, C in B izberimo za prvi približek daljice AB. Naj bo D središče daljice AB. Skozi točko D potegnimo vzporednici stranicama AC in BC. Prva vzporednica naj seka stranico CB v točki E, presečišče druge vzporednice z daljico AC pa naj bo E. Poligon s stranicami AF, FD, DE in EB naj bo drugi približek daljice AB. Iz slike razvidimo, da je dolžina novega poligona spet enaka n. Ponovimo s trikotnikoma AFD in DEB to, kar smo pravkar storili s trikotnikom ACB. Tako bomo našli poligon z osmimi stranicami, ki pa je enako dolg kot prvotni poligon. Igro nadaljujmo brez konca pa bomo dobili neko zaporedje poligonov, ki leže vse bliže daljici AB, njihove dolžine pa so vse enake danemu številu n. Zaporedje dolžin aproksimirujočih poligonov, kakor smo jih pravkar konstruirali, konvergira k številu n, ki je različno od 1. Konstruirani poligoni se namreč približujejo daljici AB le po legi točk, ne pa po smeri in zato jih po naši definiciji ne smemo šteti za aproksimirujoče poligone. Odpoved od naše definicije pa nas privede do paradoksa

$$n = 1$$

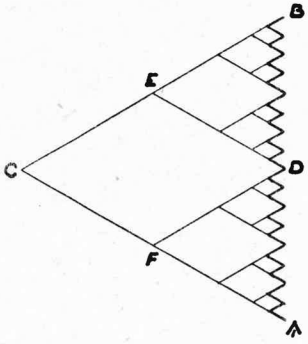
pri vsakem realnem številu n večjem od 1, ali pa do geometrijskega paradoksa, da lahko dani daljici z istim metrom pripišemo različne dolžine.

Ta paradoks lahko prenesemo na ploskve, če zgradimo nad vsemi obravnavanimi poligoni prizme z višino 1. Te prizme so tedaj poliedri, vsi z isto površino, enako n, ki se vedno bolj približujejo kvadratu s stranico 1.

Temu paradoksu se lahko pri krivuljah izognemo, če dovolimo kot aproksimirujoče poligone le včrtane poligone (včrtani poligoni se — kot smo videli — približujejo krivulji v našem pomenu besede). Poligoni, s katerimi smo aproksi-

* Primerjaj na primer [7], stran 13.

mirali daljico, tej daljici niso včrtani, ker del njihovih oglišč ne leži na daljici. Pri ploskvah pa omejitev na včrtane poliedre ne zadošča. Včrtani poligoni se namreč krivulji približujejo tudi po smeri, z včrtanimi poliedri pa to ni vselej tako. O tem nam priča primer, ki sta ga neodvisno drug od drugega obdelala H. A. Schwarz in G. Peano. (Glej na primer [8]., str. 248 ali [2], str. 25.) Bralca naj ne moti, da smo pri dokazu uporabljali včrtane poliedre. Izbrali smo namreč le take včrtane poliedre, ki se pribižujejo ploskvi tudi po smeri.



Iz opisane zadrege je še drug, dalekosežnejši izhod. Z omejitvijo na gladke krivulje (gladke ploskve) in na sredstva osnovnih tečajev višje matematike ne moremo pričakovati več, kot smo dosegli. S posegom po ostrejših sredstvih pa lahko oba pojma — dolžino in površino — definiramo za mnogo obsežnejšo množico krivulj in ploskev in to celo s poligoni in poliedri, ki se ne približujejo krivulji ali ploskvi tudi po smeri (smer je v splošnem primeru morda celo nedefinirana). Razrahljati moramo začetne zahteve in se odpovedati zveznosti funkcionalov, ki jo nadomestimo z manj zahtevno lastnostjo polzveznosti navzdol. Dolžine ali površine ne moremo tedaj definirati z limito, h kateri streme dolžine aproksimirujočih poligonov, temveč s tako imenovano spodnjo limito dolžin poligonov (površin poliedrov). Za primer si oglejmo spet »žago«. Limitne vrednosti dolžin različnih žag so vsa možna števila, večja od dolžine AB. Dolžina daljice je tedaj natančna spodnja meja vseh možnih limit, ki jih lahko dosežemo z žagastimi približki. Podrobna obravnava te poti pa sega daleč čez namen našega članka. Bralec, ki hoče zvedeti kaj več o tem, pa naj poseže po [2] ali po [3]. Zadosti dostopen je na primer še članek [9].

Literatura:

[1] I. Vidav: O definiciji določenega integrala, OMF VIII 1961, str. 49—54.
[2] L. Cesari: Surface Area, Annals of Mathematics Studies 35, Princeton 1956.
[3] T. Rado: Length and area, American Mathematical Society Colloquium Publications XXX, New York 1948.
[4] H. Lebesgue: La mesure des grandeurs, Genève 1956.
[5] А. Н. Колмогоров: Предисловие к ruskemu prevodu dela [4]: А. Лебег: Об измерении величин, Москва 1960.
[6] T. M. Apostol: Mathematical Analisis, A modern approach to advanced calculus, Reading 1957
[7] И. М. Гельфанд и С. В. Фомин: Вариационное исчисление, Москва 1961.
[8] Г. М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления, Том III, Москва 1960.
[9] J. Serrin: On the area of curved surfaces, The American Mathematical Monthly, volume 68, 1961, str. 435—440.

CIKLOTRONSKA RESONANCA

M. PINTAR, Inštitut J. Stefan, Ljubljana

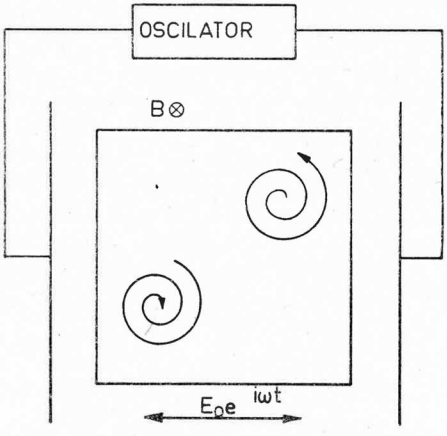
Napredek mikrovalovne tehnike med drugo svetovno vojno je omogočil velik razmah elektronske in jedrske resonančne spektroskopije v zadnjem desetletju. Do nedavnega je bila v središču pozornosti magnetna resonanca in to tako elektronska, kot tudi jedrska[1]. Električna resonanca, poznana pod imenom ciklotronska resonanca, pa je postala področje živahne eksperimentalne dejavnosti šele pred nekaj leti. Ciklotronsko resonanco so prvič opazili že pred 30 leti pri preiskavah v ionosferi, vendar se je vsa koristnost te metode pokazala šele pri študiju energijskih pasov in navidezne mase elektronov v kristalih.

Opis pojava

Če se giblje prost delec, ki nosi naboj e, n. pr. elektron, v homogenem magnetnem polju B s hitrostjo v*, ki je pravokotna na smer magnetnega polja, je njegova pot krožnica. Krožna frekvenca delca, imenujemo jo ciklotronska krožna frekvenca, je

$$\omega_c = \pm \frac{eB}{m} \tag{1}$$

V enačbi pomeni e naboj, m pa maso delca, dva predznaka pomenita, da je smisel vrtenja odvisen od predznaka naboja. Uporabimo vedno tak predznak, da



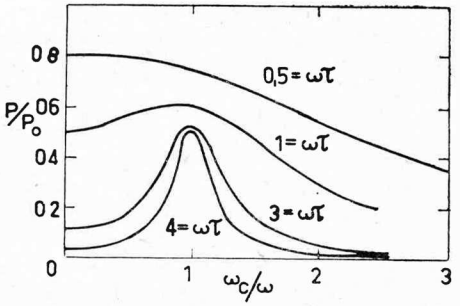
Sl. 1. Skica merilne aparature za meritev ciklotronske resonance. Spirala v levem spodnjem kotu predstavlja pot elektrona, ki je z električnim poljem v protifazi. Spirala v desnem gornjem kotu je pot elektrona, ki je z električnim poljem v fazi

je ω_c pozitivna. Znano je, da je ta frekvenca neodvisna od radija krožne poti in od hitrosti. Če imamo pravokotno na magnetno polje še izmenično električno polje, je gibanje elektrona superpozicija kroženja in osciliranja v električnem polju. V primeru, da je frekvenca izmeničnega električnega polja ν enaka ciklo-

* Kadar bomo govorili o hitrosti, bomo vedno mislili na komponento hitrosti, ki je pravokotna na B.

tronski frekvenci ν_c, elektron absorbira energijo. Tako absorpcijo imenujemo ciklotronska resonanca in je, kot bomo pozneje videli, posledica električnih dipolnih prehodov med energijskimi nivoji elektrona v magnetnem polju.

Oglejmo si, kako lahko ta pojav izkoristimo za meritev navidezne mase elektronov[2, 3]. Kristal z elektroni postavimo v magnetno polje B. V polju B začno elektroni, ki se gibljejo s hitrostjo v, krožiti. Če poznamo ν_c, lahko izračunamo maso iz (1). Tako dobljeno maso imenujemo navidezna ciklotronska masa m_c. Na sliki 1 je skica merilne priprave. Narisani sta dve spiralni poti elektronov v kristalu med paralelnima elektrodama, ki sta priključeni na visokofrekvenčni oscilator, polje B je pravokotno na ravnino lista. V primeru, ko je frekvenca električnega polja močno različna od ciklotronske frekvence elektronov v kristalu, moremo vpliv izmeničnega električnega polja na gibanje elektronov zanemariti, ker se elektroni v tistem delu svoje poti, ko je gibanje paralelno sili $e\mathbf{E}$, pospešujejo, trenutek kasneje, ko se izmenično polje obrne, pa zavirajo. Samo v primeru, ko je frekvenca izmeničnega polja enaka ciklotronski frekvenci rotirajočih elektronov, se elektroni stalno pospešujejo. Zaradi neprestanega pospeševanja se veča hitrost elektronov in radij krožne poti, pot



Sl. 2. Absorpcija energije v odvisnosti od ω_c/ω; ω_c je ciklotronska frekvenca, P_0 je absorbirana moč, kadar ni magnetnega polja, τ je relaksacijski čas

elektronov v ravnini, pravokotni na B je spirala, slika 1. Pričakujemo, da se enako število elektronov giblje v protifazi, se pravi, da tako rotirajo, da jih sila $e\mathbf{E}$ neprestano zavira. Njih hitrost in radij krožne poti se zmanjšujeta, slika 1. Na prvi pogled izgleda, da se ta dva učinka med seboj uničujeta in da se totalna kinetična energija vseh elektronov ne spremeni. Premislek pa pokaže, da elektroni pridobijo na kinetični energiji.

Predpostavimo, da obstojata dve številčno enaki skupini elektronov. Prva je z električnim poljem v fazi, druga v protifazi. Naj bo hitrost vseh elektronov v in naj bo sprememba hitrosti zaradi vpliva električnega polja $\triangle v$. Po nekaj zavrtitvah bodo imeli elektroni iz prve skupine hitrost $v + \triangle v$ in elektroni iz druge skupine hitrost $v - \triangle v$. Ker je kinetična energija proporcionalna kvadratu hitrosti, je pridobitek energije proporcionalen $(v + \triangle v)^2 - (v - \triangle v)^2 = 4 v \triangle v$.

Oscilator, ki ustvarja električno polje na sliki 1, niha s poznano, stalno frekvenco. Če istočasno počasi spreminjamo B, se, ko je izpolnjen resonančni pogoj, pokaže izguba električne energije. Iz vrednosti gostote magnetnega polja, pri kateri je nastopila resonančna absorbcija pri poznani frekvenci električnega polja, moremo izračunati navidezno ciklotronsko maso.

Za meritev ciklotronske resonance v kristalu je potreben pogoj, da je $\nu = \nu_c$. Razen tega pa mora imeti elektron dovolj velik relaksacijski čas τ, tako, da je $\tau\,\omega_c \geqslant 1$. To pomeni, da mora biti prosta pot elektrona tako dolga, da preteče elektron vsaj radijan ločne poti v času ene periode radiofrekvenčnega električnega polja. Kadar je $\tau\,\omega_c > 1$, ima absorpcija energije kot funkcija magnetnega polja dobro definiran maksimum. Ta je tembolj izrazit, čim večji je produkt $\tau\,\omega_c$, slika 2.

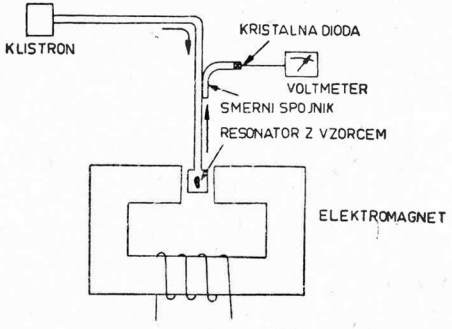
Da dosežemo velik relaksacijski čas, z drugimi besedami, da ima elektron veliko prosto pot med dvema trkoma, mora biti kristal čist, pravilen in ohlajen na nekaj stopinj Kelvina.

Težavam zaradi kratkih relaksacijskih časov se moremo izogniti, če uporabljamo električno polje višje frekvence. Seveda moramo hkrati povečati magnetno polje. Dobre rezultate so dobili pri frekvencah 10^4 MHz.

Ker dela elektronska spinska resonanca pri istih frekvencah, lahko za meritev ciklotronske resonance uporabimo, z malimi spremembami, aparaturo za paramagnetno resonanco.

Merilna metoda

Na sliki 3 je narisana poenostavljena merilna aparatura, zaradi preglednosti hladilni sistem ni narisan. Izvor mikrovalov je klistron. Mikrovalove



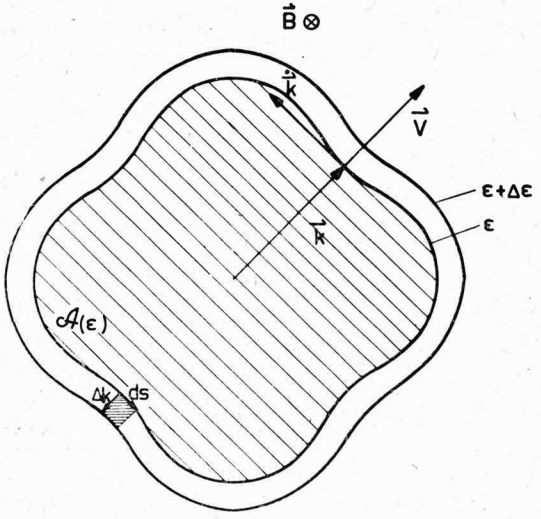
Sl. 3. Aparatura za meritev ciklotronske resonance

vodimo iz izvora po valovnem vodniku v resonator, ki je analogon resonančnemu nihajnemu krogu pri nizkih frekvencah. Elektromagnetno polje niha v resonatorju skoraj brez izgub. Večji del energije je v stojnem elektromagnetnem valovanju, izgubo povzročajo samo vrtinčasti tokovi, ki se inducirajo na notranji površini resonatorja. Izberemo si tako geometrijo resonatorja, da je vzbujen samo en način nihanja in resonator orientiramo tako, da je električna komponenta stojnega valovanja pravokotna na zunanje magnetno polje. Med poskusom vzdržujemo mikrovalovno frekvenco konstantno, zunanje magnetno polje pa počasi spreminjamo s tem, da spreminjamo tok skozi navitje elektromagneta. Hkrati merimo iz resonatorja odbito moč. Odbito valovanje ujamemo s smernim spojnikom in ga s kristalno diodo usmerimo, napetost odčitamo z voltmetrom. Kadar nastanejo v resonatorju izgube zaradi resonančne absorbcije vzorca, se napetost na kristalni diodi spremeni. Meritev je torej analogna meritvi paramagnetne resonančne absorbcije[4]. Ker pa merimo pri ciklotronski resonanci električne dipolne prehode in ne magnetne dipolne prehode, je ciklotronska resonanca za faktor 10^{12} močnejša od paramagnetne resonance. Za meritev zadostuje, da imamo v vzorcu 10^4 prostih elektronov.

Razlika med paramagnetnim spektrometrom in med spektrometrom za ciklotronsko resonanco je le v orientaciji resonatorja v magnetnem polju. Pri paramagnetni resonanci mora biti pravokoten na zunanje magnetno polje vektor visokofrekvenčnega magnetnega polja, pri ciklotronski pa vektor visokofrekvenčnega električnega polja. Če zavrtimo mikrovalovni resonator za 90°, lahko uporabljamo elektronski paramagnetni spektrometer za meritve ciklotronske resonance in obratno.

Teorija

Oglejmo si razmere v kristalu, ki je v magnetnem polju. Elektrone, ki krožijo v magnetnem polju, ne moremo popisati z ravnimi valovanji. Za valovno funkcijo elektrona lahko vzamemo Blochovo funkcijo le tedaj, če zapišemo vektorski potencial **A** tako, da je v težišču valovnega paketa, s katerim po-



Sl. 4. Presek energijske ploskve v faznem prostoru, na katerega je magnetno polje pravokotno

pišemo elektron enak nič. Za tak primer lahko izračunamo skupinsko hitrost v realnem prostoru[5]

$$\mathbf{v}_s = \frac{1}{\hbar} \operatorname{grad}_k \varepsilon\,(k)$$

in hitrost v faznem prostoru

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar}\, e\,(\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \qquad (2)$$

Iz (2) sledi, da je hitrost v faznem prostoru pravokotna na hitrost v realnem prostoru. Za hitrost v realnem prostoru smo predpostavili, da je pravokotna na B.

Naj bodo ploskve enake energije v faznem prostoru deformirane krogle in vzemimo tak presek energijske ploskve, na katerega je zunanje magnetno polje pravokotno. Vektorja $\mathbf{v}_s$ in $\dot{\mathbf{k}}$ ležita v preseku in sta med seboj pravokotna, slika 4.

Ker je obhodna doba elektronov, to je čas, v katerem elektroni enkrat obidejo energijsko ploskev v faznem prostoru, enaka obhodni dobi v realnem prostoru[6], izračunajmo, koliko je v faznem prostoru in odtod ciklotronsko frekvenco:

$$T = \oint \frac{ds}{\dot{k}} = \frac{\hbar}{eB} \oint \frac{ds}{v_s} = \frac{\hbar^2}{eB} \oint \frac{ds \triangle k}{\triangle \varepsilon} = \frac{\hbar^2}{eB \triangle \varepsilon} \oint ds \triangle k$$

ds je diferencial poti v faznem prostoru, $\triangle \varepsilon$ lahko nesemo pred integral zato, ker je konstanten po vsej integracijski poti. Če seštejemo element $(ds \,.\, \triangle k)$ po zaključeni poti, dobimo razliko med površino preseka $\mathscr{A}(\varepsilon + \triangle \varepsilon)$ in preseka $\mathscr{A}(\varepsilon)$. Obhodna doba T je torej enaka

$$T = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{\mathscr{A}(\varepsilon + \triangle \varepsilon) - \mathscr{A}(\varepsilon)}{\triangle \varepsilon}$$

in preide v limiti $\triangle \varepsilon \to 0$ v:

$$T = \frac{\hbar^2}{eB} \cdot \frac{d\mathscr{A}}{d\varepsilon}$$

Ker je ciklotronska frekvenca enaka $\nu_c = \frac{1}{T} = \frac{eB}{m_c 2\pi}$ dobimo za navidezno *ciklotronsko maso*

$$m_c = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{d\mathscr{A}}{d\varepsilon} \tag{3}$$

Navideznaciklotronska masa nam torej pove, kakšen je odvod preseka energijske ploskve, ki je pravokoten na B, po energiji, in je enaka navidezni masi[5] $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2}$ le v primeru, če so ploskve konstantne energije v faznem prostoru krogle.

Navidezna ciklotronska masa je v večini kristalov anizotropna, izotropna je le, kadar je energijska ploskev elektronov krogla. Kadar je energijska ploskev elipsoid si brez dokaza zapomnimo, da imajo pri dani orientaciji elipsoida v polju B elektroni v vseh presekih, ki so pravokotni na B, isto obhodno dobo, ker je $\frac{d\mathscr{A}}{d\varepsilon}$ isti za vse take preseke.

Z nagibanjem kristala v magnetnem polju dobimo vse odvode $\frac{d\mathscr{A}}{d\varepsilon}$ in odtod sklepamo na obliko energijske ploskve.

Elektron pridobiva med svojim krožnim potovanjem okoli vektorja **B** energijo od električnega polja, njegova energija raste. Vprašamo se, ali elektron zvezno prehaja na energijsko bogatejše ploskve konstantne energije, ali pa po vsakem obhodu skokoma preide na energijsko bogatejšo orbito, podobno kot elektron v vodikovem atomu, kadar absorbira energijo. Povrnimo se ponovno

v realni prostor in sklepajmo tako[7]: Kroženje v ravnini, ki je pravokotna na B, je periodično, zato je projekcija vrtilne količine v tej ravnini (z = konst.) dobro kvantno število. Gibanje je kvantizirano:

$$\oint \mathbf{p}\, d\mathbf{r} = (n + \varphi)\, h\,, \tag{4}$$

kjer je φ nedoločen fazni faktor.

S koordinanto $\mathbf{r}$ konjugira impulz $\hbar\mathbf{k} - e\mathbf{A}$. Z upoštevanjem (2) lahko integral (4) izračunamo:

$$\oint e\,\mathbf{B}\,(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) - \oint e\,\mathbf{A}\, d\mathbf{r} = 2\,e\,B\,S - e\,\Phi = \mathbf{e}\,\Phi$$

S je objeta ploskev v realnem prostoru, Φ je magnetni fluks BS, $\mathbf{r}$ radij vektor v ravnini z = konst. Vemo, da je $\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = \Phi$ in da je $\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2\,S$. Ker je B v integracijski ravnini konstanten, dobimo rezultat

$$e\,\Phi = (n + \varphi)\, h \tag{5}$$

Ta kvantizacija definira dovoljene orbite oziroma objete površine v realnem prostoru, katerih projekcije v ravnini z = konst. so lahko samo $S = \dfrac{(n + \varphi)\, h}{e\,B}$

Zveza med ploskvijo S v realnem prostoru in ploskvijo v recipročnem prostoru je:

$$S = \frac{h^2}{e^2 B^2}\, \mathscr{A}$$

V recipročnem prostoru so torej dovoljeni samo tisti preseki energijskih ploskev s ploskvami k_z = konst., ki imajo površino enako $\mathscr{A} = \dfrac{(n + \varphi)\, e\,B}{h}$. Kadar je n tako velik, da je pri prehodu $n \to n \pm 1$ sprememba energije majhna, tedaj je $m_c \approx$ konst. Absorbcija energijskega kvanta $\Delta\,\varepsilon = \hbar\,\omega_c$ poveča objeto ploskev za $\Delta\,\mathscr{A} = \dfrac{e\,B}{h}$.

Poenostavljeno sliko o elektronskih energijskih nivojih, med katerimi vzbujamo prehode pri ciklotronski resonanci dobimo, če rešimo Schrödingerjevo enačbo prostega elektrona v magnetnem polju.[8] Hamiltonov operator za prost elektron v magnetnem polju B je:

$$H = \frac{1}{2\,m}\,(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\nabla^2 + \frac{i\,e\,\hbar}{2\,m}\,\mathbf{A}\,\mathrm{grad} + \frac{i\,e\,\hbar}{2\,m}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{e^2\,A^2}{2\,m}$$

Naj kaže polje B v smeri osi z, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Za ta primer je vektorski potencial enak $\mathbf{A} = (0, B\,x, 0)$. Upoštevajmo, da je div $\mathbf{A} = 0$ in napišimo Schrödingerjevo enačbo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{i\,e\,B\,x}{\hbar}\right)^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = E\,\psi \qquad (6)$$

Ker Hamiltonov operator ni eksplicitna funkcija y in z, moremo s substitucijo $\psi(x, y, z) = u(x)\,e^{i(k_y y + k_z z)}$ prevesti enačbo (6) v enačbo harmoničnega oscilatorja s središčem v $x_0 = \dfrac{\hbar\,k_y}{e\,B}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_y - \frac{e\,B\,x}{\hbar}\right)^2 u = E_1\,u$$

Energija E_1 je:

$$E_1 = E - \frac{\hbar^2\,k_z^2}{2m} = (n + \tfrac{1}{2})\,\hbar\,\omega$$

kjer je $\omega = \omega_c = \pm\dfrac{e\,B}{m}$. Energija E je torej enaka:

$$E = (n + \tfrac{1}{2})\,\hbar\,\omega_c + \frac{\hbar^2\,k_z^2}{2m}$$

Energija v ravnini xy je kvantizirana. Energijski nivoji so razmaknjeni za $\hbar\,\omega_c$. Izbirna pravila $\triangle\,n = \pm\,1$ so izbirna pravila za električne dipolne prehode. V osi z je energija parabolična funkcija valovnega vektorja k_z.

Gornjo sliko moremo uporabiti za elektrone v kristalu, kadar je njihova energijska ploskev krogla. Moramo pa seveda namesto mase prostega delca uporabljati navidezno ciklotronsko maso m_c.

Meritve ciklotronske resonance v plinih

Prve res dobre meritve ciklotronske resonance so naredili, ko so iskali najmanjšo amplitudo mikrovalovnega električnega polja, ki še ionizira plin pri nizkih tlakih. Na sliki 5 je narisana odvisnost jakosti električnega polja frekvence 3000 MHz, ki povzroči električni preboj, od gostote magnetnega polja. Minimalna vrednost električne poljske jakosti ustreza tisti vrednosti magnetne poljske gostote, pri kateri je izpolnjen resonančni pogoj.

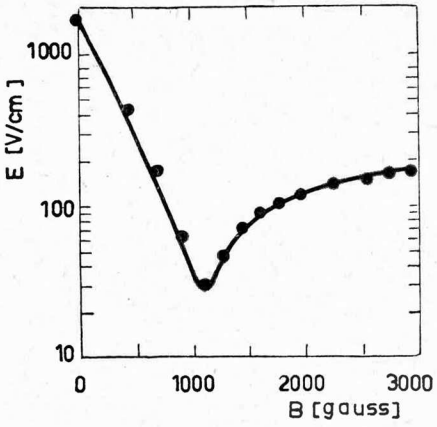
Meritve v polprevodniških kristalih

Najbolj pravilne in čiste kristale so vzgojili v industriji polprevodnikov, zato so bile prve meritve ciklotronske resonance v kristalih narejene v germaniju in siliciju.

Pri temperaturi nekaj stopinj Kelvina so polprevodniki že dobri izolatorji. Kolikor je preostalo elektronov v prevodnem pasu, so pri teh temperaturah ujeti na nečistočah, ki jih je pri najbolj čistih kristalih še vedno 10^{13} na cm^3. Takšne

razmere so v nekem oziru prav ugodne. Z vzbujanjem moremo spraviti v prevodni pas zaželeno število elektronov in meriti ciklotronsko resonanco pri optimalnih pogojih. Prevelika koncentracija prevodnih elektronov namreč nikakor ni ugodna: polprevodnik se tedaj obnaša kot kovina in odbija elektromagnetne valove.

V nečistočah zajete elektrone so ponovno ionizirali z mikrovalovi energije nekaj miliwatov. Na ta način so dobili $10^8 - 10^{10}$ elektronov na cm^3. V ta namen so uporabljali tudi infrardeče žarke in vidno svetlobo. Energija ionizirajočih valovanj je morala biti tako velika, da je kvant energije pretrgal električno vez med elektronom in nečistočo v kristalu.



Sl. 5. Električno polje frekvence 3000 MHz, ki povzroči preboj v heliju pri tlaku 1 tora, v odvisnosti od magnetnega polja

Kadar so obsevali kristale z vidno svetlobo, pri kateri so kvanti energije večji od širine prepovedane cone, so črpali elektrone iz valenčnega pasu v prevodni pas. Istočasno so nastale tudi vrzeli. V takem primeru so dobili resonančno absorpcijo elektronov in vrzeli. Na sliki 6 je spekter germanijevega kristala. Orientacija magnetnega polja proti kristalnim osem je bila taka, da so dobili osem resonančnih črt.

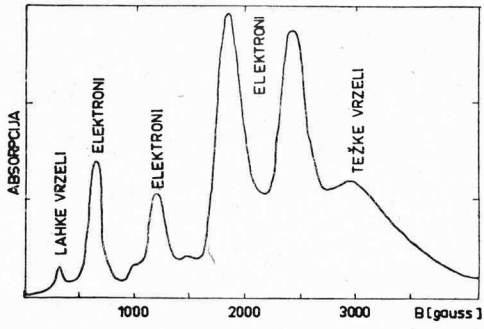
Za navidezno ciklotronsko maso elektrona so dobili n. pr. v indijevem antimonidu 0,013 m (m je masa prostega elektrona). Navidezna ciklotronska masa elektronov v germaniju je med 0,6 in 0,08 m. Opazili so dve vrsti vrzeli. Ene z maso 0,04 m, ki je malo odvisna od orientacije in druge z maso med 0,28 in 0,37 m, ki se z orientacijo bolj spreminja.

Vrzeli se vrtijo v magnetnem polju v nasprotni smeri kot elektroni, obnašajo se kot bi imele pozitiven električni naboj. V kakšnem smislu se nosilec naboja v magnetnem polju vrti, lahko izmerimo s cirkularno polariziranim električnim poljem. Takšno električno polje pospešuje namreč samo tiste naboje, ki se vrtijo v istem smislu kot vektor električnega polja. Ker se vrtijo elektroni v enem, vrzeli pa v nasprotnem smislu, lahko s cirkularnim električnim poljem pospešujemo ali elektrone ali pa vrzeli in dobimo ali samo resonančne maksime elektronov, ali samo maksime vrzeli. Ker so relaksacijski časi v večini polprevodniških máterialov približno 10^{-12} sekunde, se da brez težav meriti ciklotronsko absorpcijo pri frekvencah okrog 6×10^{12} Hz. To frekvenco ima daljna

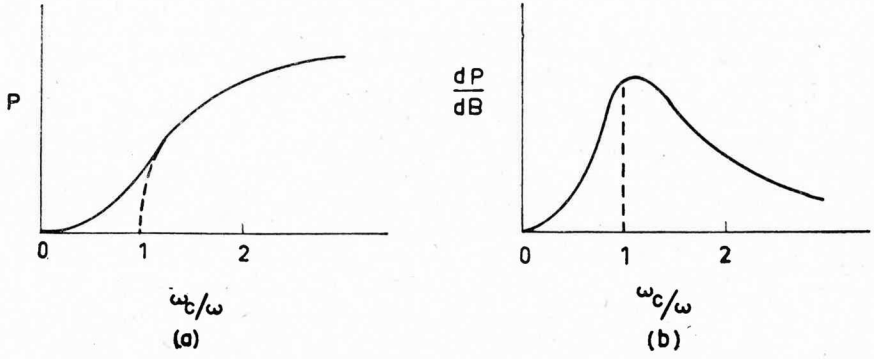
infrardeča svetloba (ustrezna valovna dolžina je 50 mikronov). Pri teh frekvencah pa je tudi za majhne navidezne elektronske mase potrebno polje okrog 50.000 gaussov. Prve meritve infrardeče ciklotronske resonance so napravili v indijevem antimonidu pri 40-tih mikronih. Poskuse so delali tudi pri višjih frekvencah v pulznih magnetnih poljih jakosti do 300.000 gaussov.

Ciklotronska resonanca v kovinah

Čeprav pridobivajo nekatere kovine v dovolj čisti kristalni obliki, se ciklotronska resonanca v kovinah ne da meriti v mikrovalovnem frekvenčnem območju tako kot pri polprevodnikih. Kovine so namreč zelo dobri reflektorji



Sl. 6. Ciklotronski spekter germanija pri 4 °K, mikrovalovna frekvenca je 23 000 MHz

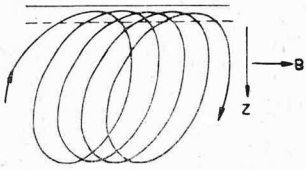


Sl. 7. Neresonančna ciklotronska absorbcija v kovini. Levo je narisana odvisnost absorbirane moči P od ω_c/ω, desno pa odvisnost odvoda P po magnetnem polju od ω_c/ω

za mikrovalove. Kljub temu se absorbira nekaj energije v tanki plasti ob površini kovine. Globino, do katere sega visokofrekvenčno električno polje, imenujejo »globino skin efekta« (prevod), slovenski izraz je »vdorna globina«.

Zanimivo je, da absorpcija v kovinah ni resonančno odvisna od magnetnega polja. Tako ne-resonančno ciklotronsko resonančno absorpcijo so merili na bizmutu. Ciklotronsko resonanco dobimo v takem prmeru iz odvoda absorpcije, slika 7. Podobne poskuse so naredili tudi na grafitu, antimonu in njegovih zlitinah. Ne-resonančno ciklotronsko resonanco pravtako dobimo, če je magnetno polje paralelno na kovinsko površino. V takem primeru pridejo elektroni v svo-

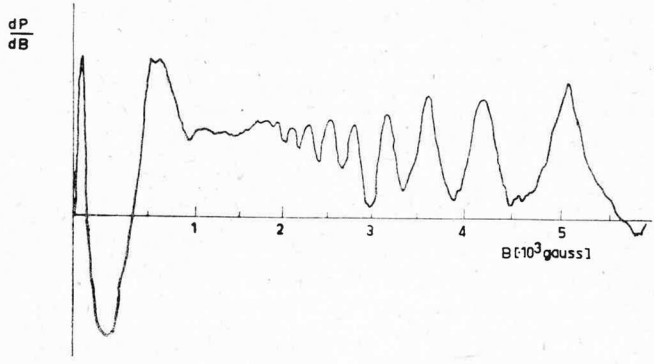
jem spiralnem gibanju okrog magnetnega polja večkrat zapored v področje, kamor sega visokofrekvenčno električno polje, slika 8. Kadar je frekvenca mikrovalovnega polja celoštevilčni mnogokratnik ciklotronske frekvence $\omega = n\,\omega_c$, dobimo resonančno absorpcijo za vsak neprevelik n. Poskusi so potrdili pričakovanja. Na sliki 9 vidimo vrsto absorpcijskih maksimov, ki ustrezajo višjim harmoničnim frekvencam električnega polja.



Sl. 8. Elektronske orbite v kovini, kadar je magnetno polje vzporedno površini kovine. Vdorna globina (označena je s črticami), je nekaj mikronov, kar je približno 100-krat manj kot prosta pot elektronov v kovinah pri nizkih temperaturah

Uporaba ciklotronske resonance

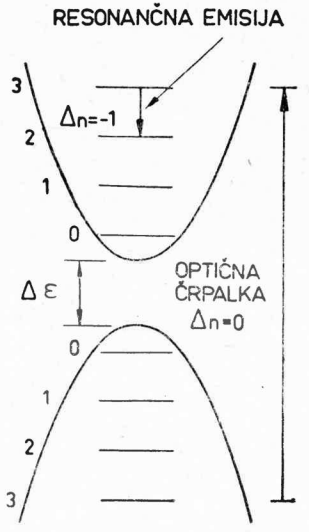
Pred dvema letoma so naredili na principu ciklotronske resonance občutljiv detektor za dolgovalovno infrardečo svetlobo. Detektor sestoji iz čistega kristala indijevega antimonida in iz elektromagneta. Ves detektor je hlajen s tekočim helijem. Navitje elektromagneta je supraprevodna niobijeva žica. Z napetostnim izvorom spreminjajo magnetno polje tako, da služi ciklotronska resonančna absorpcija v polprevodniku za detekcijo valovanj z valovnimi dolžinami med 60 in 1000 mikroni.



Sl. 9.Odvod absorbcije mikrovalovne moči v kristalu kositra po magnetnem polju B v odvisnosti od B. Temperatura kristala je 4 °K, mikrovalovna frekvenca pa 24000 MHz

Na principu ciklotronske resonance so naredili tudi maser[9] (ime maser pomeni »microwave amplification by stimulated emission of radiation«). Če namreč postavimo polprevodnik v magnetno polje, se kvantizira energija elektronov v valenčnem pasu in elektronov v prevodnem pasu. Oba »harmonična oscilatorja«, slika 10, ločuje prepovedana cona. S primerno infrardečo ali vidno svetlobo moremo črpati elektrone iz polno zasedenega valenčnega pasu v skoraj prazen prevodni pas. Pri tem prehodu se mora ohraniti kvantno število nivoja — tako absorpcijo imenujejo optična magnetoabsorbcija. Zaradi elektronov, ki smo jih dvignili v prevodni pas, iz valenčnega pasu postane zasedba n. pr.

tretjega nivoja v prevodnem pasu veliko večja kot zasedba drugega nivoja v istem pasu. Če nato vzbujamo polprevodnik, ki ima takšno umetno povečano zasedbo nivojev s šibkim valovanjem, katerega Fourierjev spekter ima vsaj nekaj fotonov s frekvenco enako ciklotronski frekvenci, dobimo ojačen signal frekvence ν_c. Ciklotronski maser se uporablja za skoraj brezšumno ojačevanje.



Sl. 10. Gornji nivoji na sliki so nivoji elektronov v prevodnem pasu, spodnji nivoji so nivoji elektronov v valenčnem pasu polprevodnika v magnetnem polju. Z optično magnetoabsorpcijo (optična črpalka) dvigamo elektrone iz energijskega pasu $n = 3$ v valenčnem pasu v energijski pas $n = 3$ v prevodnem pasu ($\triangle n = 0$). Resonančna emisija, ki jo moremo vzbuditi s fotonom frekvence ν_c (energijski kvant fotona mora biti enak razcepu med magnetnimi nivoji $h\nu_c$), je na sliki označena s puščico, ki sega od nivoja $n = 3$ do nivoja $n = 2$ ($\triangle n = -1$)

Vsak vzbujevalni foton frekvence ν_c namreč sproži plaz koherentnih fotonov iste frekvence. Ker lahko razcepe $h\nu_c$ z zunanjim magnetnim poljem spreminjamo, je ciklotronski maser monokromatičen izvor valovanja, ki mu lahko frekvenco v malih mejah spreminjamo.

Literatura:

(1) I. Zupančič: Obzornik **6**, 120, 1958.
(2) B. Lax: Science **134**, 1333, 1961.
(3) A. F. Kip: Contemporary Phys. **1**, 355, 1960.
(4) S. Poberaj: Elektrotehnika 1687, 1958.
(5) P. Gosar: Obzornik **7**, 116, 1960.
(6) P. Gosar: Predavanja »Trdna snov« v 3. stopnji fizike.
(7) A. B. Pippard: Repts. Prog. Phys. **23**, 176, 1960.
(8) G. C. Dousmanis: Phys. Rev. **124**, 1417, 1961.
(9) S. Poberaj: Obzornik **7**, 108, 1960.

DOMAČE VESTI

DRUGI SEMINAR IZBRANIH POGLAVIJ MODERNE FIZIKE

Kakor v lanskem šolskem letu bo tudi letos dvodnevni seminar moderne fizike. Ta seminar, ki ga prireja Zavod za napredek šolstva LRS s sodelovanjem Društva matematikov in fizikov LRS ter ob pomoči nuklearnega inštituta »J. Stefan«, bo letos v gradu Štatenberg pri Makolah. Grad Štatenberg je delno opremljen kot hotel, delno kot muzej. Lepa lega in ugodnosti, ki jih nudi gostinsko podjetje, ter možnosti nemotenega dela je napotila prireditelje, da so letos izbrali za kraj seminarja ta znamenit grad na Štajerskem. Do Poljčan se pride z vlakom, od tu v Makole pa z avtobusom.

Seminar bo v petek 18. in v soboto 19. maja t. l. Pri sestavljanju letošnjega programa nas je vodila misel, naj bi se predavatelji na srednjih šolah seznanili z odkritji in pridobitvami moderne fizike. Vsebna predavanj ne posega neposredno v učni načrt fzike, je pa tesno povezana z njim, posebno v zvezi z astronomijo, ki je po novem učnem načrtu sestavni del fizike. Seminar naj bi tudi obravnaval take znanstvene probleme, ki se pogosto pojavljajo pri zaključnih izpitih na gimnazijah in strokovnih šolah. Poleg tega bo ta seminar zbližal predavatelje srednjih, višjih in visokih šol ter tako prispeval k spoznavanju skupnih problemov.

Študijski program seminarja obsega naslednja predavanja:

Dr. ing. R. Blinc: Osnove teorije relativnosti.

1. Prostor in čas v klasični fiziki.

Galilejeve transformacije, inercialni sistemi, prostor in čas v mehaniki, akustiki in optiki.

2. Lorentzove transformacije in relativistična mehanika.

Hitrost svetlobe in istočasnost, Lorentzove transformacije in njihova geometrijska interpretacija, četverni vektorji, transformacijska enačba za hitrost, gibalna količina, energija, masa in sila.

3. Relativistična formulacija elektrodinamike.

Četverni potenciali, tenzor elektromagnetnega polja.

4. Osnove splošne teorije relativnosti.

Ing. J. Strnad: Eksperimentalni temelji teorije relativnosti.

1. Poskusi, ki opravičujejo uvedbo specialne teorije relativnosti.

a) Poskusi s širjenjem svetlobe. Podroben opis Michelsonovega poskusa. Opis nekaterih sorodnih poskusov.

b) Nadaljni poskusi. Potrditev Einsteinove relacije med maso in energijo, spremembe frekvence svetlobe pri širjenju v težnostnem polju, razpad nekaterih osnovnih delcev v letu.

2. Stanje eksperimentalnih dokazov v prid splošni teoriji relativnosti.

Vrtenje perihelija planetov in umetnih satelitov; odklon svetlobnega curka pri prehodu mimo zvezd; spremembe frekvence svetlobe pri širjenju v težnostnem polju.

Dr. ing. B. Povh: Jedrske reakcije v zvezdah.

Karakteristike zvezd. Reakcije v zvezdah. Teorija razvoja zvezd.

Tematika, ki bo obdelana na drugem seminarju moderne fizike, je zelo pestra in bo zanimala večino naših predavateljev, ki so že lani izrazili željo, da bi radi nekaj slišali o osnovah teorije relativnosti.

Stanko Uršič

NOVE KNJIGE

Ing. M. Brezinščak: Mjere i sistemi jedinica, Tehnička knjiga, Zagreb 1961, 320 strani, cena 1200 din.

Učencem in vsem, ki se ukvarjajo s fizikalnimi in tehničnimi problemi, je dobrodošla vsaka knjiga, ki skuša v zmedo različnih merskih sistemov vnesti jasnost in jim tako olajšati delo. Med take knjige spada tudi Brezinščakova. Njena vsebina je naslednja: A. Osnova nauka o merah in sistemih enot, B. Merski sistem v mehaniki, C. Merski sistem v akustiki, D. Merski sistem v kaloriki, E. Merski sistem v elektromagnetizmu. V vsakem poglavju je opis posameznih fizikalnih količin ter definicija njihovih enot. Knjiga ima veliko število tabel in bo lahko dobro služila kot priročnik v šolah in fizikalnih laboratorijih.

P. Laberen, Postanak svetova, Nauka i svet, Kultura, Beograd 1961, cena 600 din.

V Beogradu izhaja poljudno znanstvena knjižnica Nauka i svet pod uredništvom dr. V. Dajovića. V prvi zbirki te knjižnice so navedene naslednje knjige: Dr. Tomović, Elektronski računski avtomati; Ing. Kručičanin, Raketni let; Dr. Ristić, Nervni sistem človeka; D. Hjoose, O nuklearnoj energiji; V. Vernadski, Biosfera; in P. Laberen, Postanak svetova. Kakor je razvidno iz naslovov — same knjige, ki pritegujejo splošno pozornost v današnjem času.

O knjigi »Postanak svetova« piše prevajalka, da je »prodor raket in umetnih satelitov v vsemirje pokazal na vsestranski pomen poučevanja vprašanj o nastanku in življenju svetov in na možnost preverjanja kozmogonskih teorij, oziroma preverjanja upravičenosti osnovnih postavk teh teorij . . .« in da je »cilj te knjige čim širšemu krogu bralcev pomagati, da v velikanskem številu zadevnih informacij spoznajo njihovo povezanost in da uvidijo idejno osnovo različnih kozmogonskih hipotez in na njih osnovanih teorij«. Bralci bodo dobili v tej knjigi pregleden prikaz teorij o postanku sveta od nekdaj pa do danes. Knjiga bo zanimala vse, ki se ukvarjajo z naravoslovjem ali z osnovnimi filozofskimi problemi.

I. V. Tanastović in R. Debijadi: Putovanje čoveka u vasionu, Nauka i svet, Kultura, Beograd 1961, cena 500 din.

Knjiga se peča s fiziološkimi problemi potovanja človeka v vesolje. To je razvidno iz naslovov posameznih poglavij: Kozmična medicina, Hermetična kabina, Pospešek, Breztežno stanje, Vsemirsko sevanje, Materija in meteorski prah, Psihološki problemi kozmičnega poleta, Človek na Luni, Medplanetno in medzvezdno potovanje. Knjiga je pisana jasno in razumljivo ter opremljena s številnimi slikami. Zato bo dobrodošla vsem, ki se zanimajo za aktualne probleme, nastale okrog potovanja človeka v vesolje.

F. K.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-3-207.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227.

IZID 6. REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA MLADIH MATEMATIKOV V LJUBLJANI 8. APRILA 1962

Prvo nagrado so prejeli:

Stane Vrščaj, drugošolec gimnazije Ljubljana Vič,

Boris Butina, prvošolec I. gimnazije v Ljubljani,

Franc Dacar, prvošolec TSŠ, strojni oddelek v Ljubljani.

Drugo nagrado so prejeli:

Josip Globevnik, drugošolec gimnazije Ljubljana Vič,

Vladimir Vrbovšek, drugošolec I. gimnazije v Ljubljani,

Aleš Brinar, prvošolec II. gimnazije v Ljubljani,

Alojz Kodre, četrtošolec gimnazije na Jesenicah,

Niko Potočnik, četrtošolec gimnazije v Škofji Loki.

Tretjo nagrado so prejeli:

Vojko Antončič, prvošolec gimnazije v Postojni,

Matija Burgar, prvošolec gimnazije v Novem mestu,

Peter Petek, tretješolec I. gimnazije v Ljubljani,

Ivan Pojavnik, četrtošolec gimnazije v Novi Gorici.

Knjižne nagrade so prejeli:

Andrej Kmet, četrtošolec II. gimnazije v Ljubljani,

Jože Malenšek, četrtošolec gimnazije v Novem mestu,

Mihael Munda, četrtošolec gimnazije v Ptuju,

Tomaž Bajuk, drugošolec TSŠ, elektro stroke v Ljubljani,

Vanja Bufon, prvošolka I. gimnazije v Ljubljani,

Gojko Stare, prvošolec I. gimnazije v Ljubljani,

Drago Čepar, prvošolec gimnazije v Postojni.