OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA
1 9 6 1
VIII. št. 4

VSEBINA

Članki Stran

Vloga matematike v naravoslovju (E. Wigner — S. Oblak) 145
O relacijah (N. Prijatelj) 155
Električna upornost enovalentnih kovin (M. Pintar) 162
Termoelektrično hlajenje (D. Leskovšek) 168

Novice

Statistika in jezikoslovje (J. Strnad) 175

Šola

Problemi pouka matematike (S. Uršič) 178
O vprašanju pouka matematike na tehniških šolah (J. Povšič) 180
O vzgoji matematikov pri nas (F. Križanič) 186

Domače vesti

Matematična šola (S. Uršič) 190
Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (F. Kvaternik) . . . 191

Utrinek 192

CONTENTS

Articles Page

Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences (E. Wigner — S. Oblak) 145
On Relations (N. Prijatelj) 155
Electrical resistivity of monovalent metals (M. Pintar) 162
Thermoelectric Cooling (D. Leskovšek) 168

News 175

School 178

Home News 190

LETO VIII
1 9 6 1 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 4
1. XII. 1961

VLOGA MATEMATIKE V NARAVOSLOVJU[1]

EUGÉNE P. WIGNER, Princeton University
Prevedla SETA OBLAK

»in verjetno je tu kaka skrivnost,
ki je še ne poznamo.«
(C. S. Peirce)

Povedal bom zgodbo, kako sta se dva prijatelja, sošolca na visoki šoli, pogovarjala o svojem delu. Eden od njiju je postal statistik in se je ukvarjal s populacijo. Pokazal je bivšemu sošolcu neki ponatisk, ki se je kot navadno začel z Gaussovo porazdelitvijo. Razložil mu je pomen simbolov za dejansko in povprečno populacijo in tako dalje. Sošolec mu ni prav verjel, mislil je, da se mogoče norčuje iz njega. »Kako moreš to vedeti?« je podvomil. »Kaj pa pomeni ta simbol tukaj?« »O, to je pa π,« je odgovoril statistik. »Kaj pa je to?« »Razmerje med obsegom kroga in njegovim premerom.« »No, zdaj greš pa v svojem norčevanju malo predaleč,« je rekel sošolec. »Populacija gotovo nima nobene zveze z obsegom kroga.«

Seveda nam gre na smeh ob takem načinu pojmovanja. Vendar moram priznati, da me je ta zgodba navdala z bojaznijo. Statistikov sošolec je vendar reagiral po preprosti zdravi pameti. Še bolj me je zmedlo, ko mi je kmalu nato nekdo rekel[2], kako ga je osupnilo to, da precej ozko izbiramo podatke, na katerih preizkušamo teorijo. »Kako pa vemo, kaj bi bilo, ko bi zgradili teorijo, ki bi temeljila in posvetila glavno pozornost pojavom, ki jih mi ne upoštevamo, ne bi pa upoštevala nekaterih pojavov, ki smo mi zdaj pozorni nanje. Zakaj ne bi mogli dobiti nove teorije, ki bi imela s sedanjo malo skupnega, vendar pa bi razložila prav toliko pojavov kot ta?« Priznati moramo, da nimamo nobenega končno veljavnega dokaza, da take teorije ni.

Obe zgodbi osvetljujeta dvoje glavnih točk, o katerih bom govoril v tej razpravi. Prva je, da se matematični pojmi pojavijo v popolnoma nepričakovanih zvezah. Še več, v teh zvezah nam omogočijo nepričakovano dober in natančen opis pojavov, drugič, prav zaradi te okoliščine in zato, ker ne razumemo vzroka njihove uporabnosti, ne moremo vedeti, ali je teorija, formulirana v obliki matematičnih pojmov, res edina primerna teorija. V podobnem položaju smo kot človek, ki je dobil sveženj ključev, da bi odprl z njimi vrsto vrat druga za drugimi, pa je vedno že pri prvem ali drugem poskusu zadel pravi ključ. Podvomil je o tem, da bi res vsakim vratom posebej pripadal en sam ključ.

Večina stvari, kar jih bomo povedali o teh vprašanjih, ne bo nova. Verjetno so jih spoznali že vsi znanstveniki v eni ali drugi obliki. Moj namen je,

[1] Originalni članek, ki podaja vsebino predavanja na Newyorški univerzi dne 11. V. 1959, je izšel v Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume XIII, Number 1, februarja 1960. Zahvaljujemo se založbi Interscience Publishers, Inc., New York, ki izdaja to revijo, da je dovolila objavo prevoda.

[2] To je izjavil F. Werner, ko je študiral v Princetonu.

osvetliti ta vprašanja z raznih strani. Prvič, da neverjetna uporabnost matematike v naravoslovju meji že na tajinstvenost in da ni zanjo nobene razumske razlage. Drugič pa, da prav ta skrivnostna uporabnost matematičnih pojmov privede do vprašanja, ali so naše fizikalne teorije res edine možne. Da bi dokazali prvo točko, namreč to, da ima matematika nerazumljivo važno vlogo v fiziki, je koristno, da spregovorimo nekaj besed o vprašanju »Kaj je matematika?« in »Kaj je fizika?«, o tem, kako vstopi matematika v fizikalne teorije, in nazadnje, zakaj se zdi uspeh matematike v njeni vlogi v fiziki tako osupljiv. O drugi točki, to je o enoličnosti fizikalnih teorij, bomo govorili mnogo manj. Zadovoljiv odgovor na to vprašanje bi terjal zamotano eksperimentalno in teoretično delo, ki se ga ni še nihče lotil.

K a j j e m a t e m a t i k a ? Nekoč je nekdo rekel, da je filozofija zloraba terminologije, ki so jo iznašli prav v ta namen.[3] V istem smislu bi rekel tudi jaz, da je matematika veda spretnih operacij s pojmi in pravili, ki so jih iznašli prav v ta namen. Njen glavni poudarek leži na iznajdbi pojmov. Matematiki bi kmalu zmanjkalo zanimivih teoremov, če bi jih morala formulirati s pojmi, ki nastopajo že v aksiomih. Sicer je popolnoma res, da so pojmi elementarne matematike in še posebej elementarne geometrije nastali zato, da bi popisali bitnosti, ki jih dejanski svet direktno sugerira. Vendar to ne drži za višje pojme, posebno ne za tiste, ki imajo tako važno vlogo v fiziki. Tako so očitno pravila za operacije z dvojicami števil nastala zato, da dajo iste rezultate kot računske operacije z ulomki, ki smo jih spoznali že prej brez ozira na dvojice števil. Pravila za operacije z zaporedji, to je za iracionalna števila še vedno pripadajo kategoriji takih pravil, ki posnemajo pravila za operacije z že znanimi količinami. Kasnejši matematični pojmi, na primer kompleksna števila, algebre, linearni operatorji, Borelove množice — to naštevanje bi lahko nadaljevali neskončno dolgo — pa so večinoma nastali kot primerna sredstva, na katerih lahko matematik pokaže svojo domiselnost in smisel za formalno lepoto. V resnici je definicija teh pojmov obenem s spoznanjem, da jih lahko uporabimo za zanimiva in duhovita razmišljanja, prva demonstracija domselnosti matematika, ki jih definira. Globino misli, ki formulira matematične pojme, kasneje opraviči spretnost, s katero se ti pojmi uporabljajo. Velik matematik popolnoma in neusmiljeno izkorišča področje dopustnega sklepanja in se izogne nedopustnemu. Da ga njegova brezobzirnost ne privede do protislovij, je že samo po sebi čudež. Gotovo je težko verjeti, da je naša moč sklepanja zrasla do take popolnosti po Darwinovem procesu naravne selekcije. Vendar o tem zdaj ne bomo govorili. Glavno, kar bomo pri tej razpravi potrebovali, je, da bi matematik lahko formuliral le peščico zanimivih teoremov, ko ne bi definiral tudi novih pojmov poleg tistih, ki so vsebovani v aksiomih. Ti novi pojmi, ki niso vsebovani v aksiomih, so definirani v ta namen, da nam posredujejo domiselne logične operacije, ki ugajajo našemu čutu za estetiko prvič kot operacije in drugič zaradi rezultatov, ki se odlikujejo po svoji preprostosti in splošnosti.[4]

Kompleksna števila so posebno presenetljiv zgled za to. Gotovo nam jih ne sugerira naše izkustvo. Celo matematik, ki naj opraviči svoje zanimanje

[3] To ugotovitev navajamo iz W. Dubislavove knjige Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, Junker und Dünnhaupt Verlag, Berlin 1932.

[4] M. Polanyi pravi v svoji knjigi Personal Knowledge, University of Chicago Press 1958: »Vse te težave so samo posledica našega upiranja misli, da matematike ne moremo definirati brez njene najbolj očitne lastnosti: da je zanimiva.«

zanje, bo samo ogorčeno pokazal na lepe teoreme v teoriji enačb, potencialov in analitičnih funkcij sploh, ki se morajo za svoj nastanek zahvaliti uvedbi kompleksnih števil. Matematik noče opustiti zanimanja za te najlepše dosežke svojega duha.[5]

Kaj je fizika? Fizik odkriva zakone neživе prirode. Da bi to razumeli, moramo analizirati pojem »zakon prirode«.

Svet okoli nas je neverjetno zamotan in njegova najbolj očitna lastnost je, da ne moremo napovedati njegove prihodnosti. Čeprav dovtip pripisuje le optimistu mnenje, da je prihodnost negotova, ima optimist v tem primeru prav. Prihodnost se ne da napovedati. Kot je omenil Schrödinger, je čudež, da kljub tej silni kompleksnosti sveta lahko odkrijemo v dogodkih določene pravilnosti (1). Eno tako pravilnost je ugotovil Galilei: dve skali, ki ju vržemo ob istem času z iste višine, padeta na tla ob istem času. Zakoni narave se ukvarjajo s takimi pravilnostmi. Galilejeva pravilnost je prototip velikega takega razreda. Osupljiva je iz treh razlogov.

Prvi razlog je, da ni veljala le v Pisi in v Galilejevem času, ampak velja povsod na zemlji, je vedno veljala in bo vedno veljala. Ta lastnost pravilnosti je dobila ime invarijantna lastnost. Kot sem imel že pred časom priliko povedati (2), fizika ne bi mogla obstajati brez principov invarijantnosti take vrste. Druga osupljiva lastnost je, da je pravilnost, ki jo obravnavamo, neodvisna od tolikih pogojev, ki bi lahko vplivali nanjo. Tako na primer velja, če dežuje ali ne in če poskus izvršimo v sobi ali na poševnem stolpu v Pisi. Velja celo, če spustita dve skali istočasno in iz iste višine dva različna človeka. Očitno je še neštetо drugih pogojev, ki ne vplivajo na veljavnost Galilejeve pravilnosti. Nepomembnost toliko količin, ki bi pri opazovanem pojavu lahko imele važno vlogo, so tudi imenovali invarijantnost. Vendar ima ta invarijantnost drugačen značaj kot prejšnja, ker je ne moremo podati v obliki splošnega principa. Raziskovanje pogojev, ki vplivajo in ne vplivajo na pojav, je del zgodnjega eksperimentalnega raziskovanja področja. Spretnost in domiselnost je tista, ki pokaže eksperimentatorju pojave, odvisne od razmeroma majhnega števila sorazmerno lahko izvedljivih in ponovljivih pogojev.[6] Prav v tem primeru je bila najvažnejši korak v tej smeri Galilejeva omejitev na razmeroma težka telesa. Spet drži, da fizika ne bi bila mogoča, ko ne bi bilo pojavov, ki so odvisni od tako majhnega števila pogojev, da lahko delamo z njimi.

Omenjeni dejstvi sta sicer za filozofa zelo pomembni, nista pa Galilea najbolj presenetili in tudi ne vsebujeta posebnega naravnega zakona. Naravni zakon je podan v ugotovitvi, da je čas, ki ga potrebuje težko telo za prosti pad z določene višine, neodvisen od velikosti, oblike in snovi telesa, ki pada. V okviru Newtonovega drugega zakona nam pomeni to ugotovitev, da je gravitacijska sila, ki deluje na prosto padajoče telo, sorazmerna njegovi masi, ni pa odvisna od velikosti, snovi in oblike prosto padajočega telesa.

---

[5] Mogoče bodo bralca v tej zvezi zanimale precej čemerne Hilbertove opazke, »da intuicionizem želi matematiko uničiti in popačiti«, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Vol. 157, 1922, ali Zbrana dela, Springer, Berlin, 1935, stran 188.

[6] V tej zvezi glej grafični esej M. Deutscha, Daedalus, Vol. 87, 1958, str. 86. A. Shimony me je opozoril na podoben odstavek v knjigi C. S. Peircea Essays in the Philosophy of Science, The Liberal Arts Press, New York, 1957, str. 237.

To razpravljanje ima namen opozoriti nas, da sploh ni samo po sebi umevno, da »naravni zakoni« obstajajo, še manj kot to, da jih je človek zmožen odkriti.[7] Pisec tega članka je imel pred kratkim priliko opozoriti na zaporedje sistemov naravnih zakonov, katerih vsak naslednji sistem vsebuje bolj splošne in zaokrožene zakone kakor prejšnji, njegovo odkritje pa pomeni globlji prodor v strukturo vesolja (3). Najbolj značilno v zvezi s to razpravo pa je, da vsi ti naravni zakoni vsebujejo celo v najbolj oddaljenih posledicah samo majhen del našega poznavanja nežive prirode. Vsi naravni zakoni so pogojene trditve, ki dopuščajo napovedi za prihodnje dogodke na podlagi poznavanja sedanjosti. Vendar nekateri pojavi v sedanjem stanju sveta, praktično velika večina pogojev, ki določajo sedanje stanje sveta, niso bistveno pomembni pri napovedovanju prihodnosti. Mislim na pomembnost v smislu druge točke razpravljanja o Galilejevem teoremu.[8]

O sedanjem stanju sveta, na primer o eksistenci zemlje, na kateri živimo in kjer je Galilei izvedel svoje poskuse, o eksistenci sonca in vsega našega okolja pa naravni zakoni povsem molčijo. Prav zato lahko uporabimo naravne zakone za napoved prihodnosti le pod izrednimi pogoji, to je, ko poznamo vsa bistveno važna določila v sedanjem stanju sveta. Zato tudi predstavlja konstrukcija strojev najbolj spektakularen dosežek za fizika, saj njihovo delovanje lahko vnaprej napove. Tu fizik ustvari položaj, kjer so znani vsi bistveni vplivi, tako da lahko predvidi njihovo obnašanje. Primer takih strojev so radarji in jedrski reaktorji.

Namen dosedanjega razpravljanja je, da pokaže, da so vsi naravni zakoni pogojene trditve in da se nanašajo le na zelo majhen del našega poznavanja sveta. Tako nam klasična mehanika, najbolj znan prototip fizikalne teorije, posreduje drugi odvod krajevnih koordinat teles na osnovi poznavanja njihovega položaja itd. Nič nas ne pouči o eksistenci, o sedanjem položaju ali o hitrosti teh teles. Zaradi točnosti moramo omeniti, da smo pred približno tridesetimi leti spoznali, da celo pogojene ugotovitve ne morejo biti popolnoma natančne. Pogojene trditve so verjetnostni zakoni, ki nam omogočajo le, da delamo pametne stave o bodočih lastnostih nežive prirode na osnovi sedanjega stanja. Ne dopuščajo nam kategoričnih trditev, še takih, pogojenih na sedanjem stanju sveta, ne. Verjetnostni značaj naravnih zakonov se kaže tudi pri strojih in ga lahko dokažemo vsaj v primeru jedrskih reaktorjev, če delamo z zelo majhno močjo. Vendar se na omejitev naravnih zakonov,[9] ki nastopi zaradi njihovega verjetnostnega značaja, ne bomo ozirali v nadaljevanju razprave.

V l o g a m a t e m a t i k e v f i z i k a l n i h t e o r i j a h : Ko smo osvežili spomin na bistvo matematike in fizike, bomo laže premislili vlogo matematike v fiziki.

Matematiko neprestano uporabljamo v fiziki, da določimo posledice naravnih zakonov in da uporabimo pogojene trditve za posebne pogoje, ki slučajno prevladujejo ali pa nas zanimajo. Da bo to mogoče, moramo že same fizikalne zakone formulirati v matematičnem jeziku. Vendar najvažnejša naloga matematike v fiziki ni računanje posledic že postavljenih teorij. V tej vlogi

[7] E. Schrödinger pravi v svoji knjigi What is Life, Cambridge University Press 1945, da je ta drugi čudež prav mogoče izven človeškega umevanja.

[8] Piscu se zdi nepotrebno omenjati, da Galilejev teorem, podan v tem članku, ne izčrpa vseh Galilejevih ugotovitev v zvezi z zakonom prostega pada.

[9] Glej na primer E. Schrödinger (1).

matematika, oziroma bolje uporabna matematika ni toliko gospodar položaja, ampak služi le kot sredstvo.

Matematika ima namreč v fiziki v resnici veliko višjo vlogo. To dejstvo vsebuje že ugotovitev, da moramo naravne zakone same formulirati v matematičnem jeziku, če naj delamo z uporabno matematiko. Trditev, da so naravni zakoni napisani v matematičnem jeziku, so jasno postavili že pred tri sto leti.[10] Zdaj je še bolj resnična kot kdajkoli. Da bi pokazali pomembnost matematičnih pojmov pri formulaciji fizikalnih zakonov, pomislimo na primer na aksiome kvantne mehanike, kot jih je eksplicitno formuliral veliki matematik von Neumann in implicitno veliki fizik Dirac (4, 5). Kvantna mehanika ima dva osnovna pojma: stanja in observable. Stanja so vektorji v Hilbertovem prostoru, observable pa sebi adjungirani operatorji na teh vektorjih. Vrednosti, ki jih lahko dobimo s poskusi, so lastne vrednosti operatorjev. Tukaj se raje ustavimo, drugače bomo našteli vrsto matematičnih pojmov iz teorije linearnih operatorjev.

Seveda je res, da fiziki izbirajo določene matematične pojme za formulacijo naravnih zakonov. V fiziki se uporablja samo del vseh matematičnih pojmov. Res je tudi, da ti pojmi niso bili poljubno izbrani iz liste matematičnih izrazov. V mnogih primerih, če ne celo v večini, so jih razvili fiziki neodvisno od matematikov in šele potem videli, da jih matematiki že poznajo. Vendar pa ne drži, kar tako pogosto trdijo, namreč da se je moralo zgoditi tako zato, ker matematika uporablja najpreprostejše možne pojme in ti morajo nastopiti v vsakem formalizmu. Kot smo videli prej, matematični pojmi niso izbrani po svoji enostavnosti. Celo zaporedja dvojic števil še daleč niso enostaven pojem. Izbrani so zato, ker služijo pri pametnih manipulacijah in vodijo do nenavadnih, odličnih argumentov. Ne pozabimo, da operira kvantna mehanika v kompleksnem Hilbertovem prostoru s Hermitskim skalarnim produktom. Kompleksna števila za laično mišljenje še daleč niso naravna ali enostavna in jih fizikalna opazovanja ne sugerirajo. Poleg tega uporaba kompleksnih števil v tem primeru ni računski trik uporabne matematike, ampak je pri formulaciji zakonov kvantne mehanike skoraj gotovo potrebna. Končno je zdaj videti, da ne igrajo odločilno vlogo v formulaciji kvantne teorije samo kompleksna števila, ampak tudi analitične funkcije. Pri tem mislim na teorijo sipanja, ki se v tem času razvija.

Težko se je izogniti vtisu, da stojimo tu pred čudežem, po svoji presenetljivosti podobnem temu, da lahko človeški um poveže tisoč argumentov, ne da bi zašel pri tem v protislovja, ali pa čudežema o eksistenci naravnih zakonov in o zmožnosti človeškega uma, da jih ugane. Še najbližja razlagi o pojavljanju matematičnih pojmov v fiziki je Einsteinova trditev, da smo voljni sprejeti edinole lepe fizikalne teorije. Lahko bi zdaj razpravljali o tem, ali so matematični pojmi, ki zahtevajo toliko domiselnosti, res lepi. Vendar Einsteinova trditev v najboljšem primeru pojasni lastnosti teorij, ki smo jih voljni verjeti, nima pa zveze z resnično točnostjo teorije. Zato bomo spregovorili o tem zadnjem vprašanju.

Ali je uspeh fizikalnih teorij res presenetljiv? Fizikovo uporabo matematike pri formulaciji naravnih zakonov bi mogoče lahko razložili s tem, da je nekako neodgovoren človek. Zato bo tedaj, ko najde med dvema količinama zvezo, kot jo pozna matematika, takoj sklepal, da je ta zveza

[10] To pripisujejo Galileu.

tista, o kateri govori matematika, preprosto zato, ker ne pozna nobene druge podobne zveze. Namen te razprave ni, da bi izpodbijala obdolžitev, da je fizik nekako neodgovoren človek. Mogoče v resnici je. Vendar je treba povedati, da matematična formulacija fizikovega izkustva, često zelo približnega, daje v mnogo primerih presenetljivo točen opis velikega razreda pojavov. To nam kaže, da je matematika nekaj več kot samo edini jezik, ki ga znamo govoriti. Kaže nam, da je v zelo točnem smislu pravilen jezik. Poglejmo nekaj primerov.

Prvi primer je gibanje planetov, ki ga pogosto navajamo. Zakone prostega pada so dobro utemeljili na podlagi poskusov, ki so jih izvedli v glavnem v Italiji. Ti poskusi niso mogli biti natančni v takem smislu, kot poznamo natančnost danes, deloma zaradi zračnega upora in deloma zaradi tedanje nesposobnosti, meriti kratke časovne intervale. Vendar z ozirom na njihovo proučevanje ni nič čudnega, da so se italijanski znanstveniki dobro seznanili s tem, kako potujejo predmeti skozi atmosfero. Newton je potem poiskal zvezo med zakonom prostega pada in gibanjem meseca. Opazil je, da sta parabola, po kateri pada kamen na zemlji, in mesečeva krožna pot po nebu posebna primera istega matematičnega pojma — eliptičnega kroženja. Postavil je splošni zakon gravitacije na osnovi ene same numerične koincidence, v tistem času zelo približne. Filozofsko ni bil gravitacijski zakon, kot ga je formuliral Newton, všeč niti njegovemu času niti njemu samemu. Empirično je bil osnovan na zelo pomanjkljivih ugotovitvah. Matematični jezik, v katerem je bil formuliran, je vseboval pojem drugega odvoda. Tisti, ki smo poskušali narisati pritisnjeni krog na krivuljo, vemo, da drugi odvod še malo ni neposreden pojem. Izkazalo se je, da je gravitacijski zakon, ki ga je Newton le nerad postavil in ki ga je lahko preskusil le z natančnostjo okoli 4 %, natančen še bolj kot na desettisočinko procenta. Postal je pravzaprav skoraj pojem za absolutno točnost in šele nedavno so fiziki spet postali toliko drzni, da raziskujejo meje njegove točnosti.[11]

Gotovo je ta Newtonov zakon, ki ga citiramo še in še, najbolj znamenit primer zakona, formuliranega v pojmih, enostavnih za matematika, ki se je izkazal točnega nad vsa pametna pričakovanja. Samo pomislimo: zakon je prvič preprost samo za matematika, ne pa za zdravo pamet ali za laika, posebno ker nastopa v njem drugi odvod. Drugič pa je pogojen in zelo omejenega obsega. Nič nam ne razloži o zemlji, ki privlači Galilejeve kamne, ne o krožni obliki mesečeve poti ne o planetih. Razlaga teh začetnih pogojev je prepuščena geologom in astronomom in ni prav nič lahka.

Drugi primer je elementarna kvantna mehanika. Nastala je, ko je Max Born opazil, da so nekatera Heisenbergova računska pravila ista kot pravila za računanje z matrikami, ki so jih matematiki postavili že davno prej. Born, Jordan in Heisenberg so potem predlagali, da bi krajevne in impulzne spremenljivke klasične mehanike nadomestili z matrikami (6). Uporabili so pravila matrične mehanike pri nekaj zelo idealiziranih problemih in dobili kar zadovoljive rezultate. Seveda pa tedaj še ni bilo nobenega racionalnega dokaza, da se bo matrična mehanika izkazala za pravilno pri realnih pogojih. Saj v resnici pravijo, »če bi bila mehanika, kot smo jo predlagali, že pravilna v bistvenih potezah«. Dejansko je uporabil njihovo mehaniko prvič v realnem problemu, in sicer v problemu vodikovega atoma, šele Pauli nekaj mesecev kasneje. Rezultat je bil v skladu z izkustvom. To je bilo sicer zadovoljivo, a še vedno

[11] Glej na primer R. H. Dicke, American Scientist, Vol. 25, 1959.

razumljivo, ker je Heisenberg izpeljal svoja pravila iz problemov, ki so vsebovali tudi staro teorijo vodikovega atoma. Čudež se je zgodil šele, ko so z matrično mehaniko oziroma z matematično ekvivalentno teorijo rešili probleme, kjer Heisenbergova računska pravila nimajo nobenega smisla. Heisenbergova pravila so predpostavljala, da imajo klasične enačbe gibanja rešitve z določenimi periodičnimi lastnostmi. Enačbe gibanja za dva elektrona helijevega atoma ali pa še za večje število elektronov pri težjih atomih tega enostavno nimajo, torej se pri njih ne dajo uporabiti Heisenbergova pravila. Vendar se računski rezultat za najnižji helijev energijski nivo, ki sta ga pred nekaj meseci izvedla Kinoshita v Cornellu in Bazley v Bureau of Standards, sklada z eksperimentalnim v meji natančnosti eksperimenta, ki je ena desetmilijoninka. V tem primeru smo prav gotovo »dobili nekaj« iz enačb, česar jim nismo dali.

Isto velja za kvalitativno karakteristiko kompleksnih spektrov, to je spektrov težjih atomov. Rad bi ponovil razgovor z Jordanom, ki je rekel takrat, ko je bila izpeljana kvalitativna slika spektrov, da bi nesoglasje med pravili, izpeljanimi iz kvantnomehanske teorije, in pravili, dobljenimi z empiričnim raziskovanjem, dalo poslednjo priložnost za to, da bi spremenili ogrodje matrične mehanike. Z drugimi besedami, Jordan je čutil, da bi bili vsaj začasno brez pomoči, ko bi se v teoriji helijevega atoma pojavilo nesoglasje. V tistem času sta to teorijo razvijala Kellner in Hilleraas. Matematični formalizem je bil preveč jasen in nespremenljiv, tako da bi nastala prava kriza, ko se ne bi pojavil omenjeni čudež pri heliju. Fizika bi seveda gotovo prebredla to krizo na en ali drug način. Po drugi strani pa je res, da taka fizika, kot jo poznamo, ne bi mogla obstajati brez neprestanega ponavljanja čudežev, podobnih temu pri helijevem atomu. Ta je mogoče najbolj presenetljiv od vseh, kar se jih je pojavilo v razvoju elementarne kvantne mehanike, vendar še daleč ni edini. Dejansko je število takih čudežev omejeno z našega vidika samo zaradi tega, ker raziskujemo le take, ki so si bolj podobni. Vendar je kvantna mehanika dosegla mnogo skoraj enako presenetljivih uspehov, ki so nas trdno prepričali, da je »pravilna«, kakor temu pravimo.

Zadnji primer je kvantna elektrodinamika oziroma teorija Lambovega premika. Medtem ko je imela Newtonova gravitacijska teorija še očitne zveze z izkustvom, ima formulacija matrične mehanike edino zvezo z izkustvom v tem, da je rafinirana in prečiščena oblika Heisenbergovih predpisov. Kvantna teorija Lambovega premika, kot jo je osnoval Bethe in dokazal Schwinger, je popolnoma matematična teorija in edini prispevek eksperimenta je bil, da je pokazal, da učinek res eksistira in se da meriti. Račun in eksperiment se ujemata bolj kot na tisočinko natančno.

Ti trije primeri, ki bi jih našteli lahko še veliko, naj osvetlijo prikladnost in točnost matematične formulacije naravnih zakonov, izražene s pojmi, ki so izbrani zaradi svoje prikladnosti za manipulacije. Pri tem so naravni zakoni skoraj fantastično točni, vendar veljajo za strogo omejeno območje. Predlagam, da se sklicujemo na ugotovitev, ki nam jo ti primeri razlagajo, kot na empirični zakon epistemologije.[12] Ta je obenem z zakoni invarijantnosti fizikalnih teorij njihova nepogrešljiva osnova. Brez zakonov invarijantnosti ne bi imele fizikalne

[12] Epistemologija — veda o metodi in osnovah znanja, posebno z ozirom na njegove meje in veljavnosti. (Op. prev.)

teorije nobene dejanske osnove. Če pa empirični zakon epistemologije ne bi držal, ne bi imeli dovolj poguma in samozavesti, čustev, brez katerih ne bi nikoli uspešno raziskali naravnih zakonov. Dr. R. G. Sachs, s katerim sem razpravljal o empiričnem zakonu epistemologije, ga je imenoval vero teoretičnega fizika, kar res drži. Vendar to, kar on imenuje našo vero, lahko dobro podpremo z dejanskimi primeri, ki jih je še mnogo poleg teh treh, o katerih smo govorili.

Enoličnost fizikalnih teorij: Zdi se mi samo po sebi razvidno, da je bila prejšnja ugotovitev empirične narave. Gotovo ni »razumska potreba«. Da bi to dokazali, najbrž ni treba opozoriti na dejstvo, da se tiče le zelo majhnega dela našega poznavanja nežive prirode. Neumno bi bilo verjeti, da je eksistenca matematično preprostih zvez za drugi odvod krajevnih koordinat sama po sebi razumljiva, kadar ne obstaja nobena zveza za same krajevne koordinate ali za prvi odvod. Zato je nenavadno, kako hitro so čudoviti dar, vsebovan v empiričnem zakonu epistemologije, smatrali kot samo po sebi umeven. Podoben dar je tudi zmožnost človeškega duha, da napravi tisoč sklepov in vendar še vedno ostane »pravilen«, kot smo prej omenili.

Vsak empirični zakon ima vznemirljivo lastnost, da ne moremo spoznati njegovih meja. Videli smo, da so med dogodki v svetu okoli nas pravilnosti, ki jih lahko formuliramo z matematičnimi pojmi s skrivnostno natančnostjo. Na drugi strani pa imamo v svetu pojave, pri katerih ne verjamemo v eksistenco kakršnihkoli natančnih pravilnosti. Te pojave imenujemo začetne pogoje. Postavlja se nam vprašanje, ali se bodo združile različne pravilnosti, to je različni naravni zakoni, ki jih bomo še odkrili, v eno samo skladno celoto oziroma ali se bodo vsaj asimptotično bližali taki združitvi. Druga možnost je, da bo vedno obstajalo nekaj naravnih zakonov, ki ne bodo imeli nič skupnega eden z drugim. Danes velja to na primer za zakone o dedovanju in fizikalne zakone. Možno je celo, da si bodo naravni zakoni v nekaterih točkah nasprotovali, a vsak bo na svojem področju dovolj prepričljiv, tako da ga ne bomo hoteli zavreči. Mogoče se bomo vdali v tako stanje ali pa nas ne bo več zanimala razjasnitev konflikta med raznimi teorijami. Morda bomo izgubili zanimanje za »končno resnico«, to je za sliko, v kateri se bodo mali delci, nastali iz različnih vidikov narave, zlili v skladno, enovito celoto.

Morda bi bilo koristno osvetliti obe alternativi s primerom. Zdaj imamo v fiziki dve zelo močni in zanimivi teoriji: teorijo kvantnih pojavov in relativnostno teorijo. Ti dve sta osnovani na skupinah pojavov, ki se medsebojno izključujejo. Relativnostna teorija ustreza makroskopskim telesom, recimo zvezdam. Koincidenca oziroma v svoji končni analizi trk je prvobiten dogodek v relativnostni teoriji in določa točko v štiridimenzionalnem prostoru kraja in časa oziroma bi določil točko, ko bi bili delci, ki trčijo eden v drugega, neskončno majhni. Kvantna teorija pa sloni na mikroskopskem svetu in z njenega vidika koincidenca oziroma trk sploh ni prvobiten dogodek, celo če se res pojavi med delci, ki nimajo nobene prostorske razsežnosti, in tudi ni niti malo ostro definiran v prostoru kraja in časa. Obe teoriji operirata z različnimi matematičnimi pojmi, prva s štiridimenzionalnim Riemannovim prostorom, druga pa z neskončno dimenzionalnim Hilbertovim prostorom. Doslej se ju ni dalo združiti, to se pravi, da ne obstaja taka matematična formulacija, da bi bili obe teoriji njeni aproksimaciji. Vsi fiziki so prepričani, da je združtev obeh teorij

možna in da jo bomo našli. Vendar je tudi možno, da je ne bomo. Ta primer nam osvetljuje alternativni možnosti združitve in konflikta, ki smo ju prej omenili. Obe imata svojo osnovo.

Da bi vsaj zaslutili, katero alternativo lahko končno pričakujemo, si predstavljajmo, da vemo malo manj kot v resnici. Postavimo se na nižjo stopnjo znanja, kot jo dejansko imamo. Če bomo na tej nižji inteligenčni stopnji lahko našli združitev teorij, moremo z zaupanjem pričakovati, da jo bomo našli tudi na naši dejanski stopnji. Če bi pa po drugi strani na malo nižji stopnji znanja prišli do teorij, ki so v nasprotju ena z drugo, tudi na naši stopnji ne smemo izključiti možnosti, da bo konflikt med teorijami ostal. Stopnja znanja in domiselnosti je zvezna spremenljivka in nič posebno verjetno ni, da bi razmeroma majhna sprememba te spremenljivke zamenjala nam dosegljivo protislovno sliko sveta z neprotislovno.[13]

S tega stališča je dejstvo, da dajo nekatere teorije, za katere vemo, da so napačne, tako presenetljivo dobre rezultate, neugoden faktor. Ko bi vedeli malo manj, bi se nam skupina pojavov, ki jih razložijo te »napačne« teorije, zdela dovolj velika, da »dokaže« te teorije. Vendar smatramo, da so te teorije napačne prav zato, ker so v končni analizi nezdružljive z bolj zaokroženimi slikami. Če odkrijemo dovolj takih napačnih teorij, se bo moralo izkazati tudi, da so v protislovju ena z drugo. Prav tako je mogoče, da so tiste teorije, za katere smatramo, da smo jih »dokazali« z določenim številom numeričnih soglasij, ki se nam zdi dovolj veliko, napačne zato, ker so v protislovju z neko možno bolj obsežno teorijo, ki je s svojim razumom ne moremo odkriti. Ko bi bilo to res, bi morali pričakovati protislovja med našimi teorijami, čim bi obsegle neko dovolj veliko število posameznih skupin pojavov. To je v nasprotju z vero teoretičnega fizika, ki smo jo prej omenili, njegova mora.

Premislimo nekaj primerov »napačnih« teorij, ki so nam kljub svoji »napačnosti« neverjetno točno opisale skupine pojavov. Z malo dobre volje lahko opustimo del pričanja, ki ga dajeto ti primeri. Bohrove zgodnje ideje, ki so utrle pot poznejšim, so bile vedno uspešne le v precej ozkem področju. Isto velja tudi za Ptolomejeve epicikle. Naše današnje znanje nam da točen popis vseh pojavov, ki jih zmorejo popisati te primitivnejše teorije. To pa ne velja več za tako imenovano teorijo prostih elektronov, ki nam da čudovito točno sliko mnogih, če ne celo večine lastnosti kovin, polprevodnikov in izolatorjev. Prav posebej nam razloži dejstvo, ki ga na podlagi »realne teorije« nismo nikoli zares razumeli, namreč da imajo izolatorji 10^{26} krat večji specifični električni upor kot kovine. Dejansko nimamo nobenega eksperimentalnega dokaza, da upor ni neskončno velik pod takimi pogoji, kjer bi po teoriji prostih elektronov pričakovali neskončen upor. Vendar smo kljub temu prepričani, da je teorija prostih elektronov samo zasilna aproksimacija, ki jo bo treba pri opisovanju vseh pojavov v trdnih snoveh nadomestiti z natančnejšo sliko.

---

[13] Ta stavek je bil napisan po dolgem oklevanju. Pisec je prepričan, da je v epistemologičnih razpravah potrebno opustiti idealizacijo, da ima stopnja človeškega razuma edinstven položaj na neki absolutni lestvici. V nekaterih primerih je celo koristno, da si predstavljamo tako sliko, kot je mogoča na razumski stopnji kake druge vrste živih bitij. Vendar se pisec zaveda, da so bila njegova razmišljanja, kot jih je mogoče razbrati iz omenjenih vrstic, prekratka in jih ni dovolj kritično presodil, da bi bila lahko zanesljiva.

Z našega dejanskega stališča sicer situacija, v katero nas spravlja teorija prostih elektronov, ni prijetna, ni pa verjetno, da nam napoveduje protislovja, ki jih ne bi mogli premagati. Teorija prostih elektronov nam vzbuja dvom, ali smemo zaupati numeričnemu soglasju med teorijo in eksperimentom kot dokazu za pravilnost teorije. Takih dvomov pa smo vajeni.

Veliko težja in bolj zmedena situacija pa bi nastala, če bi nekega dne lahko postavili teorijo o pojavih v zavesti ali v biologiji, ki bi bila tako skladna in prepričljiva kot naše današnje teorije o neživi prirodi. Mendelovi zakoni o dednosti in delo na genih, ki je temu sledilo, so prav lahko začetek take teorije pri biologiji. Prav mogoče je tudi, da se da najti abstrakten argument, ki bo pokazal, da obstaja protislovje med tako teorijo in že znanimi fizikalnimi principi. Morda bo argument tako abstrakten, da protislovja ne bo mogoče razrešiti z eksperimentom v korist eni ali drugi teoriji. Taka situacija bi nam zelo omajala vero v naše teorije in prepričanje v realnost pojmov, ki jih tvorimo. Bili bi globoko razočarani v svojem tako imenovanem iskanju končne resnice. Razlog, da je taka situacija mogoča, je, da v bistvu ne vemo, zakaj dajo naše teorije tako dobre rezultate. Zato ni nujno, da njihova natančnost dokazuje njihovo resničnost in skladnost. Pisec v resnici misli, da bi nastala zelo podobna situacija, če bi primerjali sedanje zakone dednosti in fizikalne zakone.

Naj končam bolj veselo. Čudež, da je matematični jezik tako primeren za formulacijo fizikalnih zakonov, je čudovit dar, ki ga ne razumemo in ne zaslužimo. Bodimo torej hvaležni zanj in upajmo, da bo obveljal tudi v prihodnjih raziskavanjih in da se bo razširil še na široke veje znanosti, pa bodisi v naše dobro ali slabo. v naše zadovoljstvo ali pa celo v našo sramoto.

Pisec bi se rad na koncu zahvalil dr. M. Polanyiju, ki je pred mnogo leti globoko vplival na njegov odnos do problemov epistemologije, in V. Bargmannu, čigar prijateljska kritika mu je pomagala do jasnosti, kolikor jo je pač dosegel. Zelo je hvaležen tudi A. Shimonyju, ker je pregledal ta članek in ga opozoril na C. S. Peireove eseje.

Bibliografija:

(1) Schrödnger. E., Über Indeterminismus in der Physik, J. A. Barth, Leipzig 1932; tudi Dubislav, W., Naturphilosophie, Junker und Dünnhaupt Verlag, Berlin 1933, pogl. 4.

(2) Wigner, E. P., Invariance in physical theory, Proc. Amer. Philos. Soc., Vol. 93, 1949, pp. 521—526.

(3) Wigner, E. P., The limits of science, Proc. Amer. Philos. Soc., Vol. 94, 1950, pp. 422, tudi Margenau, H., The Nature of Physical Reality, McGraw-Hill, New York 1950, pogl. 8.

(4) Dirac, P. A. M., Quantum Mechanics, tretja izdaja, Clarendon Press Oxford 1947.

(5) Von Neumann, J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin 1932. Angl. prev. Princeton Univ. Press 1955.

(6) Born, M., in Jordan, P., On quantum mechanics, Zeits. f. Physik, 7o. 34, 1925, pp. 858—888. Born, M., Heisenberg, W., in Jordan, P., On quantum mechanics, Part II, Zeits, f. Physik, No. 35, 1926, pp. 557—615 (citirani stavek je iz tega poglavja, str. 558).

O RELACIJAH

NIKO PRIJATELJ

Kakor za večino drugih znanosti, velja v pretežni meri tudi za klasično matematiko, da začenja svoje teorije z r e č m i, katerih naravo takoj na začetku bolj ali manj nazorno opredeli. Potem pa raziskuje in ugotavlja l a s t n o s t i teh reči in r e l a c i j e, ki med njimi veljajo. Nasprotno temu pa gradi moderna matematika svoje teorije na pojmu a b s t r a k t n e m n o ž i c e, katere elementi nimajo nobene vnaprej določene posebne narave ali vsebine. To zadobe šele tako, da položimo v tako abstraktno množico določeno matematično s t r u k t u r o, s tem da njenim elementom a k s i o m a t i č n o pripišemo določene lastnosti in relacije. Če torej v klasični matematiki posebna narava reči determinira njihove lastnosti in relacije, pa v moderni matematiki prav obratno lastnosti in relacije implicitno opredeljujejo naravo elementov dane strukture. Študij take strukture obstoji potem v tem, da iz lastnosti in relacij, ki so eksplicitno zahtevane v aksiomih, izvajamo nove lastnosti in relacije med elementi. Zaradi takega preobrata v stališču in metodi je razumljivo, da je postala abstraktna klasifikacija in proučevanje značilnih matematičnih lastnosti in relacij osrednji predmet moderne matematične analize. S tem v zvezi želimo v naslednjem opisati nekaj najpreprostejših dejstev in pregledati nekatere osnovne binarne relacije.

1.

Abstraktno množico, ki je izhodišče določene matematične teorije, imenujemo o s n o v n o m n o ž i c o ali u n i v e r z u m te teorije. S tem hočemo poudariti, da se pri razvijanju dane teorije zanimamo i z k l j u č n o le za elemente in delne množice te množice in da torej v tej zvezi za nas ni nobenih drugih reči ali drugih množic. To torej ne pomeni, da vsebuje univerzum vse reči nasploh, kajti pojem take univerzalne množice vodi brž do logičnih protislovij in se ga je zato skrbno izogibati, marveč le, da vsebuje vse reči, ki nas v okviru dane teorije zanimajo.

Naj bo zdaj na priliko za neko dano teorijo $\mathcal{T}$ množica S tak univerzum. Če označimo s P neko lastnost, ki je smiselna za teorijo $\mathcal{T}$, potem eksistira natanko ena podmnožica množice S, ki vsebuje vse tiste pa samo tiste elemente množice S, katerim pripada lastnost P. Tako moremo torej vsaki lastnosti, ki je smiselna za dano teorijo, enolično prirediti neko podmnožico množice S. Očitno sta dve lastnosti, katerima pripada i s t a podmnožica, logično ekvivalentni. Pa tudi obratno je res. Vsaki podmnožici osnovne množice S ustreza neka lastnost, ki je značilna natanko za elemente te podmnožice. Namreč prav lastnost, da pripadajo k tej podmnožici. Med lastnostmi teorije $\mathcal{T}$ in podmnožicami univerzuma S velja potemtakem tale zveza: vsaki lastnosti pripada natanko ena podmnožica in obratno pripada tudi vsaki podmnožici ena sama lastnost, če med logično ekvivalentnimi lastnostmi ne delamo nobene razlike, za kar tudi ni nobenega logičnega razloga. Potem pa tudi ni potrebno razlikovati med pojmoma »lastnost« in »množica«, ali z drugimi besedami, teorijo lastnosti lahko prevedemo v teorijo množic. Zaradi tega smemo torej lastnosti predstavljati kar z množicami, ki so jim prirejene. Potemtakem bomo rekli, da je lastnost P

teorije $\mathcal{T}$ reprezentirana z množico vseh elementov univerzuma S, ki imajo to lastnost in bomo to dejstvo zapisali takole

$$P = \{ x, \ x \in S \ \text{ in } \ P(x) \},$$

kjer stoji simbol $P(x)$ namesto besed: x ima lastnost P.

Ker pa so elementi osnovne množice S za dano teorijo $\mathcal{T}$ edine reči, ki sploh pridejo v poštev, je zahteva $x \in S$ vedno izpolnjena. Zato smemo pisati enostavneje kar

$$P = \{ x, \ P(x) \}.$$

Prav podobno moremo tudi relacije, ki so smiselne za dano teorijo $\mathcal{T}$, reprezentirati z množicami. Glede na število elementov, med katerimi kaka relacija velja, ali kakor tudi rečemo, kateri so v dani relaciji, razlikujemo dvomestne ali binarne, trimestne in splošno n-mestne relacije. Oglejmo si to najprej na nekaterih zgledih! Če vzamemo za osnovno množico na primer množico celih števil, potem so smiselne dvomestne relacije na primer tiste, ki jih izražamo z besedami »enak«, »manjši«, »večji«, »kongruenten po modulu 3« in jih simbolično zaznamujemo z znaki »$=$«, »$<$«, »$>$«, »$\equiv$, mod. 3«. Tako je na priliko $3 < 8$ in $10 \equiv 1$, mod. 3, kar lahko opišemo z besedami tudi takole: 3 je v relaciji »manjši« z 8 in 10 je v relaciji »kongruence po modulu 3« z 1. Ali tudi: med 3 in 8 velja relacija »manjši« in med 10 in 1 velja relacija »kongruence po modulu 3«. Operacije, ki so definirane med dvema elementoma dane osnovne množice, recimo »vsota« in »produkt« dveh celih števil, pa so zgledi za trimestne relacije. Dejstvo, da je $3 + 5 = 8$, lahko povemo tudi v tejle »nerodni« obliki: 3 in 5 sta v relaciji »vsote« z 8 ali med 3, 5 in 8 velja relacija »vsote«. Iz elementarne geometrije so gotovo vsem dobro znane dvomestne relacije »skladen«, »podoben«, »paralelen« in trimestna relacija »leži med«, na primer: točka A »leži med« točkama B in C. Vzemimo naposled za zgled še »ljudi«, čeprav ta množica na srečo ne sodi v matematiko. V njej so na primer »oče«, »mati«, »sin«, »hči«, »mož«, »žena«, »stric« ipd. zgledi binarnih relacij.

Naj bo teh zgledov dovolj! Iz njih je očitno mogoče razbrati, da gre pri dvomestnih relacijah za urejene pare elementov dane osnovne množice, pri katerih je prva koordinata para v ustrezni relaciji z drugo koordinato. Da so ti pari res urejeni, vidimo že iz našega prvega primera. Kajti 3 je v relaciji »manjši« z 8, nikakor pa ni 8 v relaciji »manjši« s 3. In analogno imamo pri trimestnih ali splošno pri n-mestnih relacijah dane osnovne množice opraviti z urejenimi trojicami oziroma urejenimi n-toricami elementov te množice, katerih koordinate so v ustrezni tri- oziroma n-mestni relaciji. Potemtakem moremo, tako kot smo to storili že pri lastnostih, tudi vsaki relaciji, ki je smiselna za dano teorijo $\mathcal{T}$, enolično prirediti neko množico. In sicer tisto, ki vsebuje natanko tiste urejene pare, oziroma trojice ali n-torice elementov ustrezne osnovne množice, med koordinatami katerih dana relacija velja. Seveda sta zopet dve relaciji, katerima je na tak način prirejena ista množica, logično ekvalentni. Pa tudi obratno lahko vsaki množici urejenih parov, trojic ali n-toric elementov osnovne množice priredimo neko dvo-, tri-, oziroma n-mestno relacijo. Namreč tisto, ki je karakterizirana prav s tem, da velja za natanko tiste urejene pare, trojice ali n-torice elementov, ki jih dana množica vsebuje. S tem je torej tudi teorija relacij prevedena v jezik teorije množic in

vsako relacijo lahko reprezentiramo z množico, ki ji je na zgoraj opisani način prirejena.

Če je torej R neka smiselna binarna relacija v osnovni množici S, potem jo bomo pač reprezentirali z množico natanko tistih urejenih parov tega univerzuma, katerih prva koordinata je v relaciji R z drugo koordinato. Dejstvo, da je x v relaciji R z y, zapišemo simbolično

$$R(x, y) \quad \text{ali} \quad xRy .$$

Potemtakem je torej relacija R reprezentirana z množico

$$R = \{ (x, y),\ x \in S \ \text{ in } \ y \in S \ \text{ in } \ xRy \} .$$

Če zahteve, da sta x in y elementa osnovne množice S, ki je seveda zmeraj izpolnjena, zopet ne pišemo, imamo kar kratko

$$R = \{ (x, y), \quad xRy \} .$$

In analogno je vsaka smiselna n-mestna relacija R v osnovni množici S reprezentirana z množico

$$R = \{ (x_1, x_2, \ldots x_n),\ R(x_1, x_2, \ldots x_n) \} ,$$

če z

$$R(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

simbolično izrazimo dejstvo, da so elementi $x_1, x_2, \ldots x_n$ v tem redu, med seboj v relaciji R.

2.

Ker torej relacije reprezentiramo z množicami, lahko med njimi vpeljemo vse operacije, ki so definirane med množicami. Če sta na primer R in T dve binarni relaciji, potem je u n i j a teh dveh relacij $R \cup T$ relacija, ki velja za natanko tiste urejene pare elementov osnovne množice S, za katere velja v s a j ena izmed relacij R ali T. P r e s e k $R \cap T$ relacij R in T pa je relacija, ki velja za prav tiste urejene pare univerzuma S, za katere veljata h k r a t i relaciji R in T. In r a z l i k a $R - T$ relacij R, T je relacija, ki določa prav tiste urejene pare, za katere relacija R velja, relacija T pa ne. Tako je na primer v množici celih števil relacija »$\neq$« unija relacij »$<$«, »$>$«, relacija »$=$« je presek relacij »$\leqq$« in »$\geqq$« in relacija »$>$«, je razlika relacij »$\geqq$« in »$=$«.

Naj bo zdaj R neka binarna relacija! Množico vseh p r v i h koordinat elementov relacije R imenujemo d o m e n o , množico vseh d r u g i h koordinat, pa z a l o g o v r e d n o s t i relacije R. K relaciji R i n v e r z n o relacijo dobimo tako, da zamenjamo koordinati pri vsakem paru, ki pripada k relaciji R. Če zaznamujemo to inverzno relacijo s simbolom R^{-1}, potem je torej y v relaciji R^{-1} z x natanko tedaj, kadar je x v relaciji R z y. Potemtakem je

$$R^{-1} = \{ (y, x) , \quad xRy \} .$$

Očitno je domena relacije R^{-1} ravno zaloga vrednosti relacije R in zaloga vrednosti relacije R^{-1} je prav domena relacije R. Iz definicije inverzne relacije je tudi neposredno razvidno, da je

$$(R^{-1})^{-1} = R .$$

V množici celih števil sta na primer »manjši« in »večji« inverzni relaciji, v množici »ljudi« pa recimo »mož« in »žena« ali »roditelj« in »otrok«.

Nadaljnja važna operacija med binarnimi relacijami je tako imenovani produkt ali kompozitum dveh relacij. Naj bosta torej R in T dve binarni relaciji. Potem je produkt ali kompozitum relacije R z relacijo T, ki ga simbolično zapišemo

$$RoT, \text{ ali tudi kar } RT$$

relacija, ki velja med elementoma x in y natanko tedaj, kadar eksistira vsaj en element u tako, da je x v relaciji R z u in u v relaciji T z y. Torej je

$$RT = \{ (x, y), \quad (\exists u)\ (xRu \quad \text{in} \quad uRy) \},$$

če z logičnim simbolom $(\exists u)$ označimo besede: eksistira vsaj en u.

Na zgledu se takoj lahko prepričamo, da produkt dveh relacij ni komutativen. Vzemimo, da je

$$R = \{ (1, 3), (2, 3) \} \quad \text{in} \quad T = \{ (3, 1) \}.$$

Potem je po definiciji

$$RT = \{ (1, 1), (2, 1) \} \quad \text{in} \quad TR = \{ (3, 3) \}.$$

Pač pa velja asociativnostni zakon

$$R\,(TV) = (RT)\,V,$$

in važno pravilo v zvezi z inverzno relacijo, da je namreč

$$(RT)^{-1} = T^{-1}\,R^{-1}.$$

O obeh pravilih se ni prav nič težko prepričati. Dokažimo na primer asociativnostni zakon! Upoštevaje definicijo produkta smemo sklepati takole: x je v relaciji $R\,(TV)$ z y natanko tedaj, kadar eksistira vsaj en u tako, da je xRu in $uTVy$. To pa se pravi, da eksistira vsaj en t tako, da je xRu, uTt in tVy. Potemtakem pa je natanko tedaj tudi $xRTt$ in tVy, oziroma natanko tedaj je tudi $x\,(RT)\,Vy$, torej x v relaciji $(RT)\,V$ z y, kar je bilo treba dokazati.

V zvezi s produktom dveh binarnih relacij gre posebno mesto tako imenovani relaciji identitete, ki jo bomo označili s črko I in ki je množica vseh urejenih parov oblike (x, x), za vsak element x osnovne množice S. Torej je

$$I = \{ (x, x), \ x \in S \}.$$

Neposredno je namreč razvidno, da velja za vsako binarno relacijo R osnovne množice S

$$IR = RI = R.$$

Relacija identitete predstavlja torej pri produktu enotski element.

Na prvi pogled se zdi, kakor da bi imela množica vseh binarnih relacij dane osnovne množice S glede na operacijo »produkt« strukturo grupe. Saj je ta operacija asociativna, eksistira enotski element in tudi vsaki relaciji pripada inverzna relacija. Vendar to ni res! Kajti v primeru grupe bi moralo veljati za vsako relacijo R, da je $R\,R^{-1} = R^{-1}\,R = I$. Tako je namreč pri grupi inverzni element definiran. To pa v primeru relacij nikakor ni obvezno. Če je namreč $x\,(RR^{-1})\,y$, to pomeni, da eksistira vsaj en u tako, da je xRu in $uR^{-1}y$, torej, da je xRu in yRu. Odtod pa še nikakor ne smemo sklepati, da je xIy, torej, da je $x = y$, saj sta nasploh lahko dva različna elementa x in y v relaciji R z istim elementom u.

Vzemimo zgled produkta v množici realnih števil! Naj bo v njej relacija R definirana z urejenimi pari (x, u), ki ustrezajo enačbi $x + u = a$, relaciji T

pa s pari (u, y), ki ustrezajo enačbi $u + y = b$, pri čemer sta a in b konstanti. Potem je po definiciji produkta, relacija RT množica natanko tistih urejenih parov (x, y), ki ustrezajo enačbi $x - y = a - b$. Prav lahko se tudi prepričate, da je v množici »ljudi« na primer produkt relacij »mož« in »hči« relacija »zet« ali pa da je »sin« . »sin« relacija »vnuk«.

3.

Oglejmo si naposled še nekaj posebnih tipov binarnih relacij, ki nastopajo v matematiki zelo pogosto in ki jih zato tudi imenujemo s posebnimi imeni!

1. F u n k c i j e. Pojem funkcije je centralni pojem v matematični analizi. Cauchy in Rieman sta dala zanj tole klasično definicijo: y je funkcija x, če pripada določeni vrednosti x določena vrednost y. Pri tem je treba razumeti, da so vrednosti neodvisne in odvisne spremenljivke števila, saj je klasična matematika gradila svoje teorije na pojmu števila. Že iz antike pa so dobro poznani posamezni primeri funkcij, kjer na primer vsaj neodvisna spremenljivka ali argument x nima za svoje vrednosti števila. To velja na priliko že za elementarne funkcije geometrije, kot sta »ploščina«, ki jo oklepa kaka zaprta ravninska krivulja ali pa »prostornina«, ki jo objema kaka zaprta ploskev v prostoru. V teh dveh primerih je vrednost, ki jo »zavzame« neodvisna spremenljivka, prav od zaprte krivulje omejeni del ravnine, oziroma od zaprte ploskve omejeni del prostora, katerima pripada potem določeno število kot ustrezna ploščina oziroma prostornina. Moderna matematika, ki izhaja iz teorije množic, je zato posplošila pojem funkcije tako, da jo definira kot p r e s l i k a v o ene abstraktne množice v drugo. Če sta A in B dve abstraktni množici, potem je funkcija vsak predpis, ki preslika vsak element množice A v določen element množice B. Pri tem je množica A definicijsko področje ali domena dane funkcije, tisti elementi množice B, ki so slike elementov množice A pa predstavljajo zalogo vrednosti te funkcije. Naj bosta zdaj A in B podmnožici osnovne množice S in naj bo f funkcija, ki preslika množico A v množico B. Če označimo z $f(x)$ tisti element množice B, ki je slika elementa x iz množice A, potem očitno lahko reprezentiramo to preslikavo ali funkcijo z množico urejenih parov, katerih prva koordinata je element množice A, druga koordinata pa njegova slika $f(x)$ v množici B, torej

$$f = \{ (x, f(x)),\ x \in A \text{ in } f(x) \in B \} .$$

To pa pomeni, da je funkcija po svojem bistvu binarna relacija. Vendar ima binarna relacija, ki predstavlja funkcijo, neko posebno lastnost. Ker se namreč vsak element x iz množice A preslika v e n s a m element $f(x)$ množice B, mora biti ustrezna binarna relacija taka, da ne vsebuje dveh r a z l i č n i h urejenih parov, ki bi imela i s t o p r v o koordinato. Z drugimi besedami: če sta urejena para (x, y) in (x, z) h k r a t i elementa take binarne relacije, potem mora biti $y = z$. Binarno relacijo, ki ima to lastnost, imenujemo e n o l i č n o. Potemtakem smemo zaključiti, da je vsaka funkcija neka enolična binarna relacija in obratno.

Če ima enolična binarna relacija še to lastnost, da ne vsebuje dveh r a z l i č n i h urejenih parov, ki bi imela i s t o d r u g o koordinato, pravimo, da je p o v r a t n o e n o l i č n a. V tem primeru je seveda tudi preslikava ali funkcija, ki jo predstavlja ta relacija, povratno enolična in zato je tudi inverzna relacija funkcija.

Na zelo različnih področjih matematike imamo kaj pogosto opraviti tudi s temile posebnimi relacijami:

2. Refleksivne relacije. Relacija R je v dani množici S refleksivna, če je vsak element x te množice v relaciji R sam s seboj; torej če je za vsak $x \in S$

$$xRx.$$

3. Irefleksivne relacije. Relacija R je v dani osnovni množici S irefleksivna, če noben element te množice ni v relaciji R sam s seboj.

4. Simetrične relacije. Relacija R je v dani množici S simetrična, če velja za poljubna dva elementa x, y te množice, da

$$\text{iz } xRy \text{ sledi } yRx.$$

5. Asimetrične relacije. Relacija R je v množici S asimetrična, če velja za poljubna dva elementa x, y te množice, da

$$\text{iz } xRy \text{ sledi, da } yRx \text{ ne velja.}$$

6. Antisimetrične relacije. Relacija R je v dani množici S antisimetrična, če velja za poljubna dva elementa x, y te množice, da

$$\text{iz } xRy \text{ in } yRx \text{ sledi } x = y.$$

7. Tranzitivne relacije. Relacija R je v dani množici S tranzitivna, če velja za poljubne tri elemente x, y, z te množice, da

$$\text{iz } xRy \text{ in } yRz \text{ sledi } xRz.$$

8. Sovisne relacije. Relacija R je v dani množici S sovisna, če velja za poljubna dva različna elementa x, y te množice vsaj ena izmed možnosti

$$xRy \text{ ali } yRx.$$

Med naštetimi tipi binarnih relacij, za katere pač ni težko najti zgledov z različnih področij matematike, obstoje zelo zanimive zveze. Tako je na primer vsaka tranzitivna in simetrična relacija tudi refleksivna in vsaka asimetrična relacija je tudi irefleksivna. O obojem se ni prav nič težko prepričati. Posebej zanimive pa so relacije, ki imajo več zgoraj naštetih lastnosti hkrati. Oglejmo si to le na dveh zgledih!

9. Relacije linearne urejenosti. Relacija R je v množici S relacija linearne urejenosti, če je asimetrična, tranzitivna in sovisna.

Zlahka se prepričamo, da je taka relacija tudi irefleksivna, ker je asimetrična. Relacija te sorte pravimo, da ustvarja v dani množici S red, ali da je množica S na osnovi te relacije urejena. Zgleda za tako relacijo sta na primer relaciji »manjši« in »večji« v množici realnih števil.

10. Ekvivalenčne relacije. Relacija R je v dani množici S ekvivalenčna relacija ali kratko ekvivalenca, če je hkrati refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Pa recimo, da je v neki dani množici S definirana kaka ekvivalenčna relacija R.

To torej pomeni, da

(a) je za vsak element $x \in S$, xRx

(b) iz xRy sledi yRx

(c) iz xRy in yRz sledi xRz.

Zdaj pa tvorímo v dani množici S skupine elementov, ki jih bomo imenovali ekvivalenčne razrede glede na relacijo R. In sicer na takle način: poljuben element x naj določa ekvivalenčni razred, v katerem so natanko tisti elementi množice S, ki so v relaciji R s tem elementom x. Označimo ta ekvivalenčni razred z $R[x]$! Potem velja očitno tole:

(A) Element x je sam v $R[x]$, saj je zaradi (a) xRx.

(B) Vsak element y, ki je v $R[x]$, določa prav razred $R[x]$. Torej

$$\text{če je } y \in R[x], \text{ potem je } R[y] = R[x].$$

Kajti, če je $z \in R[y]$, je zRy. In ker je $y \in R[x]$, je yRx. Zaradi (c) je torej zRx, kar pomeni, da je $z \in R[x]$. In obratno, če je $z \in R[x]$, je zRx. Ker pa je yRx, je zaradi (b) tudi xRy. Torej je zaradi (c) tudi zRy, potemtakem je res $z \in R[y]$.

(C) Če element y ni v $R[x]$, potem razreda $R[y]$ in $R[x]$ nimata nobenega skupnega elementa. Torej

$$\text{če } y \notin R[x], \text{ potem je } R[y] \cap R[x] = \emptyset .$$

Kajti, če bi bil kak element z hkrati v $R[y]$ in v $R[x]$, potem bi veljalo zaradi (B) $R[y] = R[z] = R[x]$. Zato bi bil zaradi (A) tudi $y \in R[x]$, kar je v nasprotju s predpostavo, da $y \notin R[x]$..

Iz (A), (B), (C) potemtakem sledi, da je vsak element x množice S v natanko enem ekvivalenčnem razredu; namreč v tistem, v katerem so združeni vsi elementi množice S, ki so z njim v relaciji R. Ekvivalenčni razredi dane ekvivalenčne relacije R predstavljajo torej porazdelitev množice S na same neprazne in paroma tuje delne množice. Pokazati pa je mogoče tudi obratno: k vsaki porazdelitvi množice S na neprazne in paroma tuje delne množice eksistira natanko ena ekvivalenčna relacija R tako, da so te neprazne in paroma tuje delne množice prav ekvivalenčni razredi glede na to relacijo R.

Množico, katere elementi so ekvivalenčni razredi glede na dano ekvivalenčno relacijo R, imenujemo prirejeno faktorsko množico in jo označimo s simbolom S/R.

Zgledi:

1. V množici celih števil je na primer relacija kongruence po modulu m, kjer je pač m poljubno dano celo število, ekvivalenčna relacija. Ekvivalenčni razredi so v tem primeru razredi ostankov po modulu m. Faktorska množica pa je tako imenovana množica celih števil po modulu m.

2. V množici ulomkov a/b, kjer sta a in b dve poljubni celi števili in $b \neq 0$, je relacija enakosti dveh ulomkov ekvivalenčna relacija. Vsak ulomek določa torej ekvivalenčni razred, ki vsebuje prav vse njemu enake ulomke in predstavlja potemtakem ustrezno racionalno število. Faktorska množica je torej prav množica racionalnih števil.

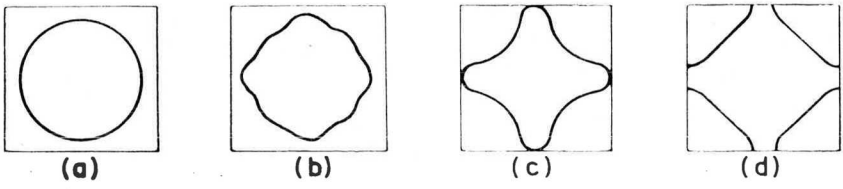
3. V množici vseh premic je relacija »paralelen« ekvivalenčna relacija. Vsaka premica določa ekvivalenčni razred, ki vsebuje natanko vse premice, ki so z njo paralelne in predstavljajo zato ustrezno smer. Prirejena faktorska množica je torej množica smeri.

ELEKTRIČNA UPORNOST ENOVALENTNIH KOVIN

M. PINTAR, Inštitut J. Stefan, Ljubljana

V kovinah zasedajo elektroni pri 0 °K vse energijske nivoje do Fermijeve energije E_f. Nad E_f so stanja nezasedena. V kovinah je E_f nekaj elektronskih voltov, tako energijo bi imel običajen plin pri temperaturi nekaj 10.000 °K. Energija, ki jo lahko pridobijo elektroni od mreže zaradi njenega termičnega nihanja, je velikostnega reda kT, kar ustreza energiji 0,025 eV pri sobni temperaturi. Ta energija je zanemarljiva v primerjavi z E_f in zato lahko elektrone v nekaterih primerih obravnavamo kot da bi imeli efektivno temperaturo 0 °K.

Če se zadovoljimo s približkom prostih elektronov, so ploskve konstantne energije v prostoru valovnega vektorja $\mathbf{k}$ elektronov krogle ($E = \hbar^2 k^2/2\,m$). Če vključimo električno polje, začno posamezni valovni vektorji $\mathbf{k}$ naraščati s konstantno hitrostjo $\dot{\mathbf{k}} = -\frac{e\mathbf{E}}{h}$ v smeri polja. Prvotna krogelna energijska ploskev elektronov z energijo enako Fermijevi energiji (Fermijeva krogla) se zato premakne v smeri polja in se ustavi v ekscentrični legi, ko se vzpostavi ravnotežje zaradi sipanja elektronov. Elektroni se sipljejo na fononih in nepravilnostih kristalne mreže in preskakujejo nazaj na nivoje, ki so se izpraznili, ko se je Fermijeva krogla premaknila.



Sl. 1. Dvodimenzionalni presek Brillouinove cone in Fermijeve ploskve, ki je (a) kroglasta, (b) malo deformirana, ki se dotika mejnih ploskev Brillouinove cone (c) in ki se z mejnimi ploskvami Brillouinove cone stika in je zato mestoma prekinjena (d).

V realnem kristalu elektroni seveda niso prosti in ploskve konstantne energije niso krogle, so bolj ali manj deformirane (sl. 1).

Pomen Fermijeve ploskve je v tem, da loči zasedene nivoje od nezasedenih. To pa je točno le pri absolutni ničli. Pri višjih temperaturah je prehod v zasedenosti nivojev bolj postopen, širina prehoda je približno enaka kT. Samo elektroni, ki ležijo na Fermijevi ploskvi ali zelo blizu nje, se lahko sipljejo.

V enovalentni kovini, ki ima po en valenčni elektron na atom, objema Fermijeva ploskev ravno polovico prostornine prve Brillouinove cone. Če ima kristal visoko simetrijo in je Fermijeva ploskev približno krogla, vsebuje prva Brillouinova cona Fermijevo kroglo, ne da bi se njuni površini stikali. V takem primeru je Fermijeva ploskev neprekinjena. Če pa je Fermijeva ploskev tako deformirana, da se stika z mejnimi ploskvami prve Brillouinove cone, je na takih mestih prekinjena. (Slika 1 c, d.)

Fermijeve ploskve v dragih kovinah, bakru, srebru in zlatu se vse na nekaterih mestih stikajo z mejnimi ploskvami prve Brillouinove cone. Ni pa še znano, kakšne so razmere pri alkalnih kovinah. Z indirektnimi metodami se da predvidevati, da je Fermijeva ploskev v kristalu natrija in kalija skoraj krogla-

sta, v kristalu rubidija nekoliko, v cezijevem in litijevem kristalu pa močno deformirana. Pri ceziju in litiju se Fermijeva ploskev stika z mejnimi ploskvami prve Brillouinove cone. Meritve so pokazale, da sta kalij in natrij najboljša električna prevodnika, rubidij in cezij slabša, litij in žlahtne kovine pa še slabši. Taka razvrstitev je v skladu z današnjim poznanjem Fermijevih ploskev.

Zanemarimo sipanje elektronov na mrežnih nepravilnostih in si oglejmo razmere pri sipanju elektronov na fononih.

Termičnemu nihanju kristalne mreže pravimo tudi fononsko nihanje. Energija kvantov tega nihanja je $\hbar\omega$, kjer je ω frekvenca nihanja mreže.

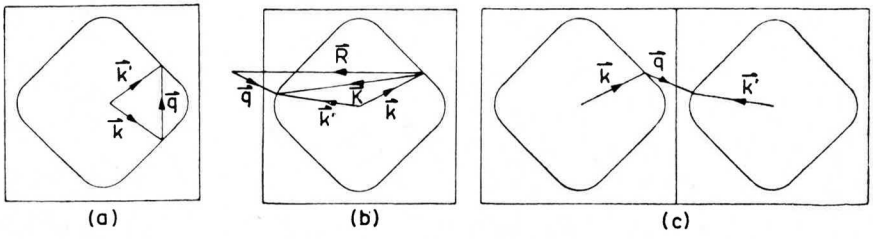
Verjetnost W, da se elektron siplje iz stanja $\mathbf{k}$ v stanje $\mathbf{k}'$ je sorazmerna kvadratu matričnega elementa za prehod:

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \propto |\langle k' | U | k \rangle|^2 \tag{1}$$

Prehod iz stanja $\mathbf{k}$ v stanje $\mathbf{k}'$ vzbudi motilni potencial U, s katerim popišemo vpliv nihanj ionov na elektrone. Matrični element v izrazu (1) lahko še drugače napišemo:

$$\langle k' | U | k \rangle = \int \psi^*(\mathbf{k}')\, U\, \psi(\mathbf{k})\, d\mathbf{r} \tag{2}$$

$\psi(\mathbf{k})$ je Blochova valovna funkcija za elektron v stanju $\mathbf{k}$, $\psi(\mathbf{k}) = u_k\, e^{i\mathbf{kr}}$ in integral je izvršen po celotni prostornini kristala.



Sl. 2. Normalno sipanje elektronov na fononih (a) in sipanje Umklapp (b) in (c).

Motilni potencial, ki je posledica nihanj mreže, se da izraziti z ravnimi valovanji, ki se širijo skozi kristal. Za posamezno fononsko nihanje mreže z valovnim vektorjem $\mathbf{q}$ lahko zapišemo U v obliki

$$U = U_o(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{qr}},$$

kjer je $U_o(\mathbf{r})$ periodično se ponavljajoča funkcija v osnovnih celicah kristala.

Če vstavimo izraz za U in $\psi(\mathbf{k})$ v integral (2) dobimo:

$$\langle k' | U | k \rangle = \int u_k^*, e^{-i\mathbf{k'r}}\, U_o\, e^{i\mathbf{qr}}\, u_k\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{r} \tag{3}$$

Ker so u_k^*, u_k in U_o periodične funkcije mreže, je integral (3) od nič različen samo, če je vsota eksponentov enaka nič ali enaka vektorju recipročne mreže $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q} = 0 \tag{4}$$

ali

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q} = \mathbf{K} \tag{5}$$

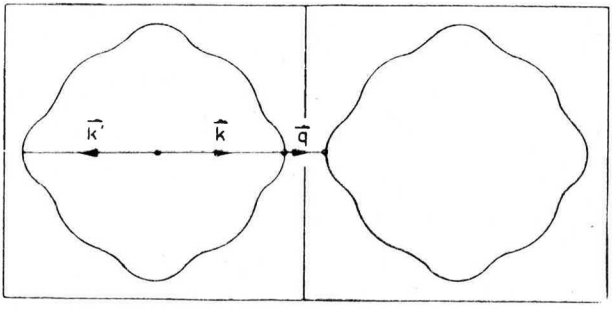
Z enačbama (4) in (5) je omejeno sipanje elektronov na fononih. Sipanje ki zadošča enačbi (4) se imenuje normalno sipanje (slika 2a). Sipanje, pri katerem zadoščajo vektorji $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ in $\mathbf{q}$ enačbi (5), pa je sipanje »Umklapp« ali kratko, sipanje — U. (Slika 2b in 2c.)

Pri sipanju se mora ohraniti celotna energija kristala. Ker so energije mrežnih nihanj — fononov — velikostnega reda kT, sledi, da mora biti energija elektrona v končnem stanju praktično enaka energiji elektrona v začetnem stanju. To nadalje omejuje možna sipanja.

Sipanje elektronov je tem večje, čim višja je temperatura kristala. Z naraščanjem temperature se povečuje termično nihanje atomov in s tem sipanje elektronov. Čim bolj pa se elektroni sipljejo, tem večja je električna upornost kovine. Odvisnost upornosti od temperature zapišemo po navadi v naslednji obliki:

$$\varrho = \frac{G}{T} f\left(\frac{T}{\Theta}\right) \tag{6}$$

Tu meri konstanta G sklopitev med gibanjem elektronov in nihanji mreže, $f\left(\frac{T}{\Theta}\right)$ pa je funkcija, ki je za vse enovalentne kovine približno ista in Θ je Debyeva temperatura.



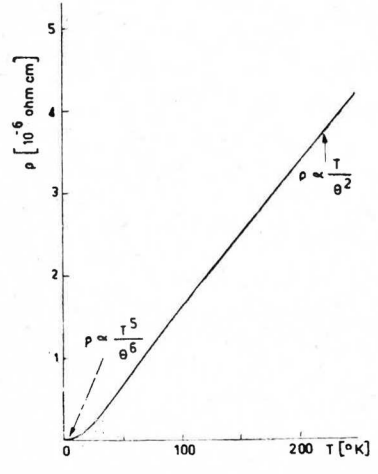
Sl. 3. Sipanje elektronov pod kotom π na fononu, ki ima najmanjše valovno število, ki lahko povzroči sipanje U.

Ker je vektor **q** po velikosti omejen, je omejen tudi kot sipanja elektronov pri normalnem sipanju, ki zadošča enačbi (4). Pri nizkih temperaturah, ko so vzbujeni samo ioni z zelo majhno energijo in zato majhnim **q**, se elektroni pri normalnem sipanju odklonijo od prvotne smeri le malo. Zato tako sipanje ne prispeva dosti k električni upornosti kovine. Pri sipanju U (enačba 5) pa je kot sipanja zelo velik, čeprav je **q** majhen (slika 2b). Na sliki 3 je narisan primer, ko se siplje elektron pod največjim kotom π. Vidimo, da povzročijo najmanjši vektorji **q** sipanje pod največjimi koti, večji **q** pa sipanje pod manjšimi koti. Če se Fermijeve ploskve ne stikajo z mejnimi ploskvami prve Brillouinove cone, mora biti **q** najmanj enak razdalji med sosednjima Fermijevima ploskvama, da lahko povzroči sipanje U. Odtod sklepamo, da vpliva oblika Fermijeve ploskve močno na temperaturno odvisnost električne upornosti pri nizkih temperaturah. Prav tako seveda vpliva na velikost upornosti, ker je število fononov, ki morejo povzročiti sipanje elektronov, večje, če je razdalja med Fermijevimi ploskvami majhna.

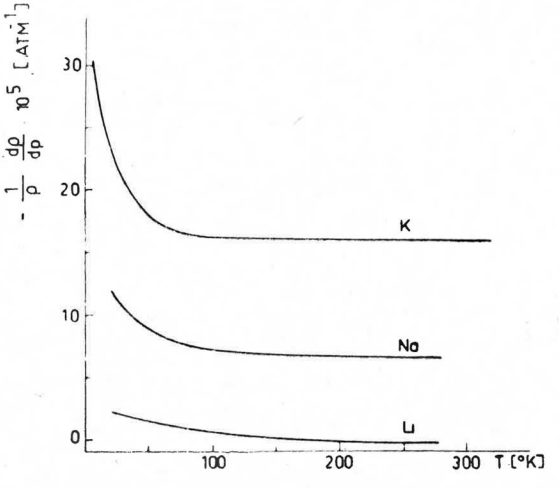
Če primerjamo električne upornosti enovalentnih kovin, res ugotovimo, da je upornost tem večja, čim bolj je Fermijeva ploskev deformirana.

Pri študiju električnih lastnosti kovin nas zanimajo energijski nivoji v kovini in porazdelitev elektronov po nivojih (zasedba). Energijski nivoji se spremnjajo, če spreminjamo prostornino kovine, zasedba pa, če spreminjamo temperaturo. Z drugimi besedami, spremembe v zasedbi lahko preiskujemo s spreminjanjem temperature pri stalni prostornini, spremembe v legi nivojev pa s spreminjanjem prostornine kovine.

Ker je razteznostni koeficient pri večini snovi pozitiven, sledi iz termodinamske identitete $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$, da se zmanjša entropija kristala, če ga izotermno stisnemo. Prav tako se zmanjša entropija, če kristalu znižamo temperaturo. Povečanje pritiska je zato v tem smislu podobno znižanju temperature.



Sl. 4. Odvisnost električne upornosti kalija od temperature pri konstantni prostornini.



Sl. 5. Odvisnost $-\frac{d \ln \varrho}{d p}$ od temperature pri konstantnem volumnu.

Pri visokih temperaturah je upornost približno proporcionalna povprečnemu kvadratu amplitude ionskih nihanj.

Kvadrati amplitud so pa tem večji, čim višja je temperatura in čim šibkejše so sile, ki silijo atome nazaj v mirovno lego. Merilo za te sile je kvadrat Debyeve temperature.

Od tod sledi, da je električna upornost sorazmerna T/Θ^2. Pri zelo nizkih temperaturah pa je upornost sorazmerna T^5/Θ^6 (slika 4).

Zaradi tega pričakujemo, da bo pri visokih temperaturah $\frac{d \ln \varrho}{d p} = -2\frac{d \ln \Theta}{d p}$, pri nizkih pa $\frac{d \ln \varrho}{d p} = -6\frac{d \ln \Theta}{d p}$. Enačbi bosta izpolnjeni le v primeru, če vpliva pritisk na električno upornost samo preko karakteristične temperature. Kadar stisnemo mrežo, se namreč povečajo frekvence mrežnih nihanj in s tem Debyeva temperatura Θ.

Na sliki 5 je narisana odvisnost $\frac{d \ln \varrho}{d p}$ litija, natrija in kalija od temperature. Opazimo, da ima litij anomalen, pozitiven koeficient pritiska.

Iz omenjene podobnosti med pritiskom in temperaturo sklepamo, da sta $\frac{d \ln \varrho}{d p}$ in $\frac{d \ln \varrho}{d T}$ v linearni zvezi. Izkazalo se je, da je bolj ugodno zapisati zvezo med $\frac{d \ln \varrho}{d \ln V}$ in $\frac{d \ln \varrho}{d \ln T}$. Z upoštevanjem izraza (6) dobimo:

$$\frac{d \ln \varrho}{d \ln V} = \frac{d \ln G}{d \ln V} - \frac{d \ln \Theta}{d \ln V}\left(1 + \frac{d \ln \varrho}{d \ln T}\right) \tag{7}$$

$\frac{d \ln G}{d \ln V}$ in $\frac{d \ln \Theta}{d \ln V}$ nista odvisna od temperature. Enačba (7) pove, da moramo meriti upornost pri nizkih temperaturah, če želimo preiskovati odvisnost upornosti od pritiska, ker se samo pri nizkih temperaturah $\frac{d \ln \varrho}{d \ln T}$ dovolj spreminja. Iz meritev lahko na osnovi enačbe (7) določimo $\frac{d \ln G}{d \ln V}$ in $\frac{d \ln \Theta}{d \ln V}$ ločeno.

Upornost so merili pri tlakih do 1000 atm in pri temperaturah do 1 °K. Medij za prenos tlaka je bil pri teh temperaturah problematičen. Uporabljali so vodik in helij.

Rezultati meritev za litij, natrij, kalij in baker so potrdili predvideno linearno zvezo (slika 6).

Iz podobnih meritev so zračunali $\frac{d \ln G}{d \ln V}$ za vse enovalentne kovine:

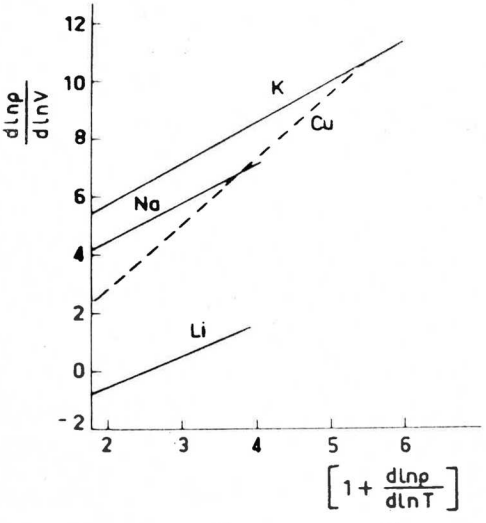
	Li	Na	K	Rb	Cu	Ag	Au
$\frac{d \ln G}{d \ln V}$	— 2,3	2,0	3,1	0,7	— 1,0	— 0,9	— 0,7

Poskusimo razložiti, zakaj je $\frac{d \ln G}{d \ln V}$ pri kovinah, ki imajo skoraj kroglasto Fermijevo ploskev, pozitiven, pri kovinah z najbolj deformiranimi Fermijevimi ploskvami pa negativen.

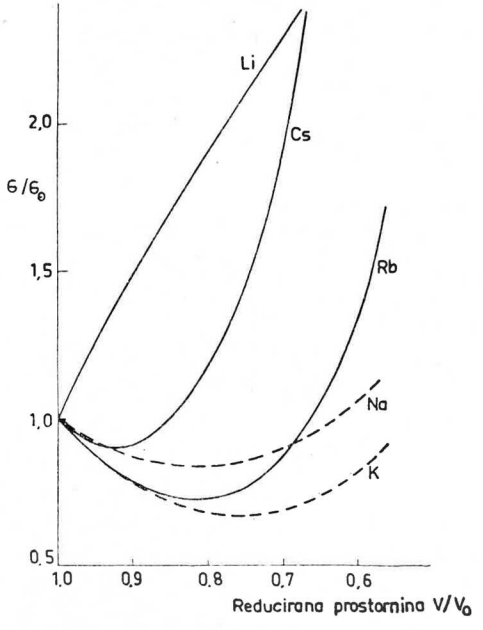
Vzemimo, da je Fermijeva ploskev krogla, katere oblika se pri stiskanju ne spremeni. Pozitivna vrednost $\frac{d \ln V}{d \ln G}$ pomeni, da elektroni manj interagirajo s fononi, če zmanjšamo kovini prostornino. Lahko si razlagamo, da se je zaradi manjše prostornine povečala Fermijeva energija, ki je sorazmerna $V^{-3/2}$. Elektroni z večjo energijo se pa manj sipljejo. Taka razlaga je verjetno pravilna za natrij in kalij, ki imata med vsemi enovalentnimi kovinami najbolj kroglasti Fermijevi ploskvi. Če pa je Fermijeva ploskev kovine deformirana glede na kroglo že pri normalnih pogojih, bomo s tlakom le še povečali to deformacijo in v primeru, ko se Fermijeva površina že dotika mejnih ploskev Brillouinove

cone, povečali stično ploskev. Zato se poveča število možnih sipanj U. Sklepamo lahko, da se G v prvem primeru zmanjša, v drugem pa zveča in, da je drugi proces toliko močnejši, kolikor bolj je Fermijeva ploskev že deformirana. Zato nam $\frac{d \ln G}{d \ln V}$ posredno meri razdaljo med Fermijevimi ploskvami in mejnimi ploskvami Brillouinove cone.

Na sliki 7 je narisana odvisnost G/G_o, kjer pomeni G_o vrednost pri normalnih pogojih, od reducirane prostornine V/V_o. Tu je V_o normalna prostornina kristala.



Sl. 6. Odvisnost $\frac{d \ln \varrho}{d \ln V}$ od $1 + \frac{d \ln \varrho}{d \ln T}$



Sl. 7. Odvisnost G/G_o od reducirane prostornine V/V_o pri alkalijskih kovinah.

Na sliki 7 izstopa litij, pri katerem konstanta G stalno raste s tlakom. Sklepamo, da se Fermijeva ploskev litija stika z mejnimi ploskvami Brillouinove cone že pri normalnih pogojih. G/G_o za cezij doseže minimum, ko se volumen cezijeve osnovne celice zmanjša za 5 %. Razlagamo si, da se pri tako zmanjšanemu volumnu Fermijeva ploskev dotakne mejnih ploskev Brillouinove cone. Podobne so razmere tudi pri Rb, le da ima G/G_o minimum pri precej večjih tlakih. Pri natriju in kaliju doseže G/G_o najmanjšo vrednost pri zelo velikih tlakih. To pomeni, da se šele pri največjih dosegljivih tlakih dotakneta njuni Fermijevi ploskvi mejnih ploskev Brillouinove cone.

Literatura:

P. Gosar, Obzornik 7, 116 (1960).
F. J. Blatt, Solid State Physics, Volume 2 (1957).

TERMOELEKTRIČNO HLAJENJE

DRAGO LESKOVŠEK
Inštitut za fizikalno kemijo, Univerza v Ljubljani

Uvod

Med pojavi, ki se dajo tehnično izkoristiti za hlajenje, je le malo takih, ki omogočajo neposredno hlajenje majhnih prostornin. Eden od teh je termoelektrično hlajenje, katerega osnova je peltierski efekt, znan že od leta 1834.

Kadar teče električni tok skozi stik dveh različnih prevodnikov, se stik segreje, če teče tok v eni smeri, ali ohladi, če teče v nasprotni. Kljub vabljivi enostavnosti pojava je komaj leta 1911 Altenkirch dosegel s kovinskimi prevodniki, ki so bili takrat na razpolago, ohladitev za nekaj stopinj. Šele uporaba polprevodnikov je omogočila večje temperaturne razlike in boljši izkoristek. Prvi, ki so začeli raziskovati polprevodnike za ta namen, so bili: Justi (1952) v Nemčiji, Goldsmid (1954) v Angliji in Joffe s sodelavci (1954) v Sovjetski zvezi. Danes je termoelektrično hlajenje s polprevodniki še vedno v razvoju.

Osnove

Homogen prevodnik elektrike in toplote naj bo v dobrem električnem in termičnem stiku z dvema razsežnima kovinskima poloma. Med njima je enosmerna električna napetost U in oba imata isto stalno temperaturo T_0. Dolžina prevodnika je l, njegov prerez pa S.

Specifična električna prevodnost prevodnika σ in njegova toplotna prevodnost $\varkappa$ naj bosta neodvisni od temperature. Tudi temperaturni koeficient termonapetosti α med prevodnikom in polom naj bo zaenkrat stalen.

Skozi prevodnik teče električni tok I. Produkcija joulske toplote v enoti časa q_J je enaka električni moči:

$$q_J = U I = R I^2 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} \cdot I^2 . \tag{1}$$

Od smeri toka je neodvisna, ker je sorazmerna kvadratu toka. Nastala toplota odteka iz prevodnika v oba pola. V vsak pol teče polovica toplotnega toka $\left(\frac{1}{2} q_J\right)$.

Poleg toplote, ki nastaja pri prehodu električnega toka v prevodniku, se toplota sprošča tudi na njegovem stiku z enim polom in ravno toliko se je absorbira ob drugem polu. Dobila je ime peltierska toplota. Peltierski toplotni tok q_P se obrne, če se obrne električni tok in je sorazmeren temu toku:

$$q_P = U_P I \tag{2}$$

Koeficient sorazmernosti U_P je tako imenovani peltierski koeficient ali peltierska napetost. Iz entropijskega zakona se da izpeljati, da je ta koeficient enak produktu temperaturnega koeficienta termonapetosti (α) in absolutne temperature, $U_P = \alpha T$.

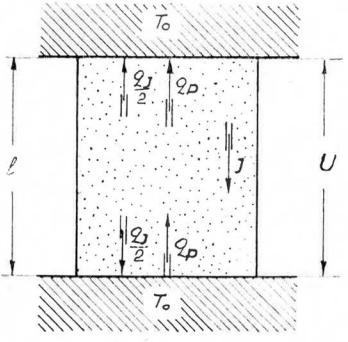
Če hočemo en pol ohladiti na temperaturo $T < T_0$, ga moramo vsaj delno toplotno izolirati od okolice. Zaradi nastale temperaturne razlike med poloma

$T_0 - T = \triangle T > 0$ teče skozi prevodnik dodaten toplotni tok q_t, ki pa ima obratno smer kot tok peltierske toplote,

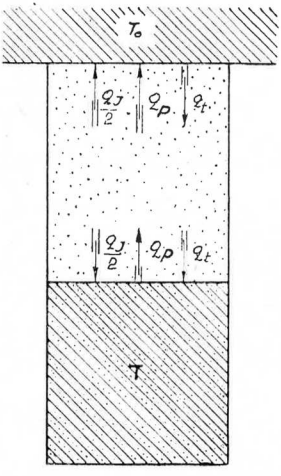
$$q_t = \varkappa S \cdot \frac{\triangle T}{l} \tag{3}$$

V stacionarnem stanju je c e l o t n i toplotni tok q, ki uhaja iz hladnega pola

$$q = q_P - \tfrac{1}{2} q_J - q_t = \alpha T I - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} \cdot \frac{I^2}{2} - \varkappa \cdot \frac{S}{l} \cdot \triangle T \tag{4}$$



Sl. 1. Polprevodnik med termostatiranima poloma.



Sl. 2. Polprevodnik med termostatiranim in toplotno izoliranim polom.

Zanima nas največja temperaturna razlika, ki jo na ta način lahko dobimo. Hladni pol mora biti pri tem toplotno popolnoma izoliran, torej $q = 0$. Tedaj je

$$\triangle T = \frac{\alpha T}{\varkappa} \cdot \frac{l}{S} \cdot I - \frac{1}{\varkappa \sigma} \cdot \left(\frac{l}{S}\right)^2 \cdot \frac{I^2}{2} = \triangle T_P - \triangle T_J \tag{5}$$

Pri toku $I_m = \sigma \alpha T \cdot S/l = \alpha T/R$ ima temperaturna razlika svoj maksimum

$$\triangle T_m = \frac{\alpha^2 \sigma}{\varkappa} \cdot \frac{T^2}{2} \tag{6}$$

Vidimo torej, da je največja dosegljiva ohladitev odvisna le od materialnih konstant α, σ in $\varkappa$ ter od absolutne temperature. Za učinkovito termoelektrično hlajenje mora imeti material čim večji temperaturni koeficient termonapetosti, veliko električno prevodnost in majhno toplotno prevodnost.

Material

Dokler so bile na razpolago samo kovine in kovinske zlitine, se termoelektrično hlajenje tehnično ni moglo razviti. Za kovine velja Wiedemann-

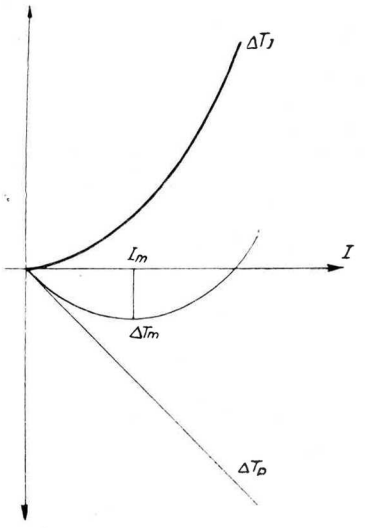
Franz-Lorenzov zakon, ki veže njihovo toplotno in električno prevodnost ter absolutno temperaturo

$$\frac{\varkappa}{\sigma T} = C = \frac{\pi^2}{3} \cdot \left(\frac{k}{e_0}\right)^2 = 2{,}45 \cdot 10^{-8} \left(\frac{V}{st}\right)^2 \tag{7}$$

kjer je k Boltzmannova konstanta in e_0 osnovni naboj. Največja relativna ohladitev za kovine je po enačbah (6) in (7) enaka

$$\eta = \frac{\triangle T}{T} = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\sigma T}{\varkappa} = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{C}$$

in je obratno sorazmerna vrednosti C. Da bi dosegli $\eta = \frac{1}{2}$, bi moral biti ustrezni temperaturni koeficient termonapetosti $\alpha = \sqrt{C} \doteq 156\ \mu V/st$. Tako velikega α pa pri kovinah ni mogoče najti.



Sl. 3. Odvisnost ohlajenja od jakosti električnega toka.

Temperaturni koeficient termonapetosti α pada z rastočo gostoto nosilcev naboja n v prevodnikih. Zato so iskali primeren material med polprevodniki, ki imajo znatno manjši n kot kovine, v katerih je okrog 10^{23} prevodniških elektronov na cm³. Izraz $\alpha^2 \sigma/\varkappa$ ima pri določeni gostoti nabojev maksimum, in sicer blizu $n = 10^{19}/\text{cm}^3$. Ta vrednost je okoli tisočkrat manjša kot pri kovinah in je značilna za »polkovine«.

Računska določitev optimalnih vrednosti za n, α, σ in $\varkappa$ je težavna. Elektronski »plin«, ki ga tvorijo prevodniški elektroni, je pri omenjeni gostoti v polkovinah pri sobni temperaturi še deloma degeneriran (izrojen). Vendar dobimo tudi brez upoštevanja degeneracije precej pravilno oceno. Za čiste polprevodnike z atomsko kristalno mrežo se izkaže, da je koeficient termonapetosti

$$\alpha = \frac{k}{e_0}\left(2 - \frac{\mu}{k\frac{1}{4}T}\right) \tag{8}$$

kjer je μ kemijski potencial elektronov pri temperaturi T. Kemijski potencial delcev je takole odvisen od njihove mase m in gostote n:

$$\mu = -kT \ln \frac{2\,(2\pi mkT)^{3/2}}{n\,h^3} \tag{9}$$

pri čemer je h Planckova konstanta.

Predpostavimo, da je električna prevodnost σ sorazmerna gostoti elektronov n in da je toplotna prevodnost $\varkappa$ v tem območju dana pretežno s toplotno prevodnostjo kristalne mreže, ki ni odvisna od n. Ko iščemo maksimum funkcije $\alpha^2\,\sigma$ v odvisnosti od n, dobimo optimalni vrednosti za n in α:

$$n_0 = \frac{2\,(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \tag{10}$$

$$\alpha_0 = 2\,\frac{k}{e_0} = 172\ \mu\text{V/st} \tag{11}$$

Temperaturni koeficient termonapetosti α v resnici ni konstanten, kot smo privzeli na začetku, ampak je funkcija temperature. Saj dobimo iz enačb (8) in (9) z odvajanjem, da je

$$T\,\frac{d\alpha}{dT} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{e_0} = 129\ \mu\text{V/st}. \tag{12}$$

V posameznih raziskovalnih centrih so izbrali za termoelektrično hlajenje različne polkovine. V tabeli je zbranih nekaj primerov s potrebnimi podatki. Za primerjavo sta navedena še bizmut in telur.

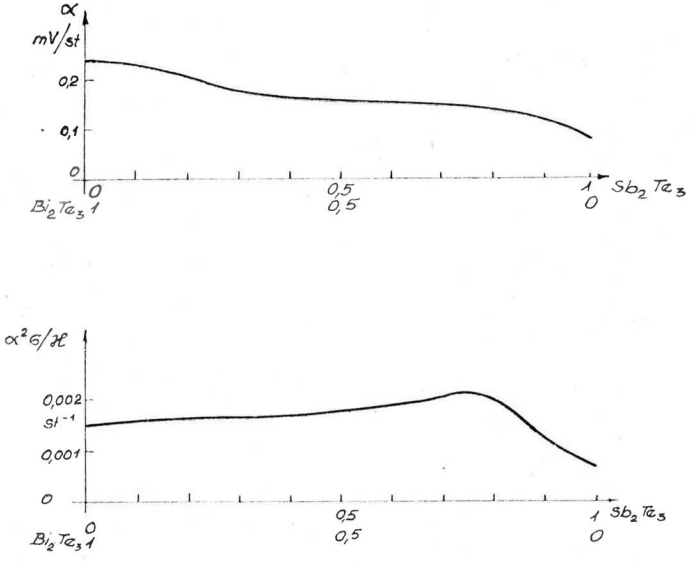
T 300 °K	$10^{-19}\,n$ cm^{-3}	σ $\text{ohm}^{-1}\,\text{cm}^{-1}$	$\varkappa$ $\text{W cm}^{-1}\,\text{st}^{-1}$	α proti Pt $\mu\text{V st}^{-1}$	$10^3\,\alpha^2\,\sigma/\varkappa$ st^{-1}
Te		16	0,06	180	0,003
Bi		10^4	0,082	60	0,45
Bi_2Te_3	1,2	525	0,020	240	1,51
Sb_2Te_3	8,8	4380	0,044	79	0,74
PbTe	1	2000	0,038	130	0,90
Bi_2Te_2 + Sn (0,1 %)	3,2	774	0,021	184	1,26
Bi_2Te_2 + AgJ (0,1 %)	2	1150	0,022	— 202	2,18

Navedene spojine oblikujejo s sintranjem pri temperaturi okrog 400° C in pri visokem pritisku (4000 do 6000 at). Da še bolj zmanjšajo toplotno prevodnost in s tem povečajo učinkovitost (koeficient $\alpha^2\,\sigma/\varkappa$), dodajo zmesi nekaj analogne spojine, n. pr. PbSe k PbTe ali Bi_2Te_3 k Sb_2Te_3. Z minimalnimi dodatki primernih snovi lahko tudi dosežejo, da se predznak obrne, ne da bi se ostale lastnosti bistveno spremenile. Vpliv sestave takšne zmesi na njene lastnosti kaže sl. 4.

Izvedba

Dva obdelana kosa ustreznih polkovin (n, p) z nasprotnim predznakom temperaturnega koeficienta termonapetosti (α) tvorita s primerno kovino (Cu) hladilni element. Več takih zaporedno vezanih elementov sestavlja hladilni blok. Na obeh straneh bloka so hladilna rebra iz bakra ali aluminija.

Optimalne dimenzije, število elementov in potrebni električni tok se dajo izračunati iz lastnosti uporabljenih polkovin ter želenega toplotnega toka. Primerna dolžina polelementov je 1 do 2 cm, prerez 1 cm² in tok okoli 15 A. Za vsak polelement potrebna električna napetost je vsota termonapetosti $U_T = \alpha \triangle T$ ter napetosti za premagovanje ohmske upornosti polelementa (R) in obeh stikov (R_s) $U_R = (R + R_s)\,I$. Ker je upornost polelementa zelo majhna ($R = 10^{-3}$ ohm), mora biti upornost stikov še dosti manjša ($R_s < 10^{-4}$ ohm).



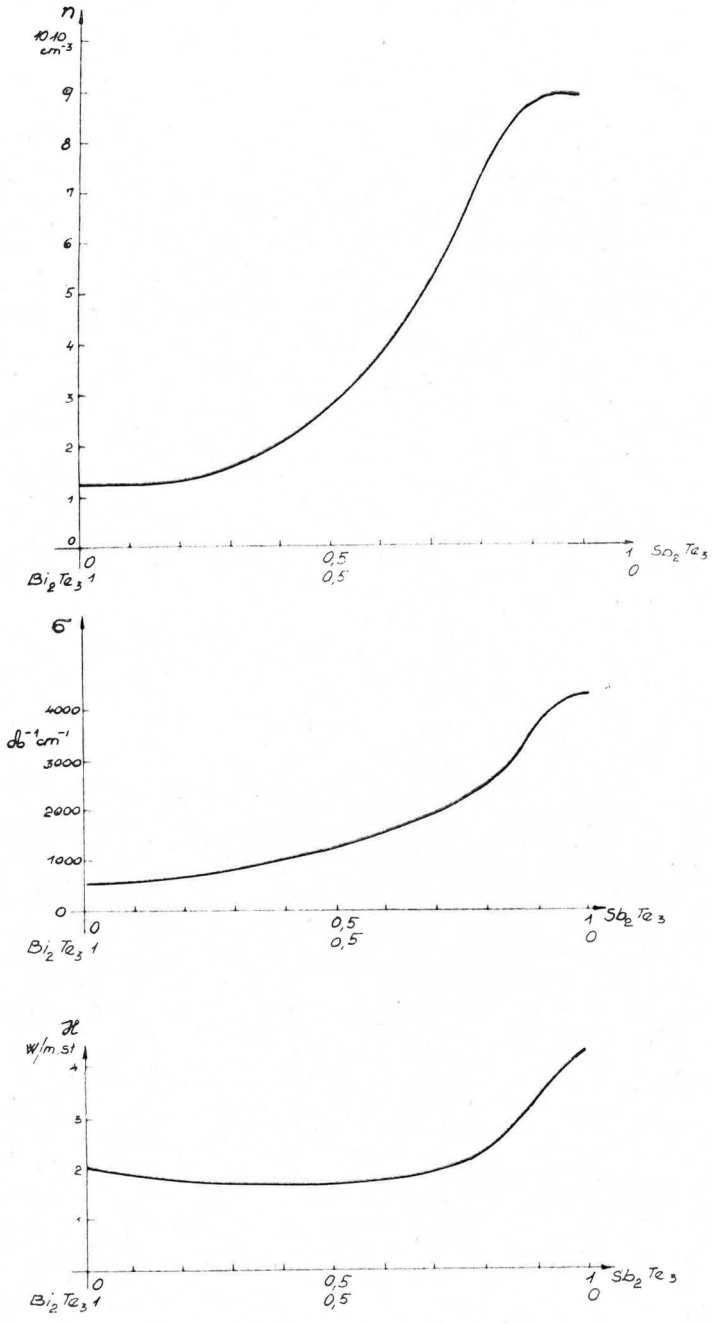
Sl. 4. Odvisnost lastnosti zmesi polprevodnikov Bi_2Te_3 in Sb_2Te_3 od sestave pri 300 °K: α — koeficient termonapetosti, $\alpha^2\sigma/\varkappa$ — »efektivnost«.

Poleg tega morajo biti stiki termično prav dobro prevodni in mehanično zelo odporni. Pri delovanju se namreč topli konci širijo, hladni krčijo in ves blok se hoče zviti. Pri tem nastanejo v elementih tudi natezne napetosti, ki jih sintrani material slabo prenaša. Končno mora biti vsak uporabljeni material sam zase in v zvezi z ostalim materialom odporen proti koroziji.

Uporaba

Zaradi opisanih težav ter zaradi visoke cene materiala, posebno telurja, in drage izdelave termoelektrično hlajenje še ni splošno v rabi. Zaenkrat je v intenzivni razvojni fazi, ki je dala od leta 1953 že precej uporabnih modelov za določene namene. Zanje le nekaj primerov.

Hladilnik za gospodinjstvo sovjetske izvedbe ima koristno prostornino 40 l. Pri zunanji temperaturi 20° C doseže znotranj — 5° C. Rabi 55 W enosmerne moči pri porabi 75 W iz omrežja.

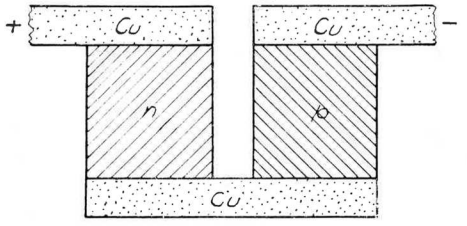


Sl. 4. Odvisnost lastnosti zmesi polprevodnikov Bi_2Te_3 in Sb_2Te_3 od sestave pri 300 °K: n — gostota nosilcev naboja, σ — električna prevodnost, $\varkappa$ — toplotna prevodnost,

Servirni voziček ameriške izvedbe (Westinghouse) je kombinacija hladilnika in grelca. V spodnjem delu so hladna spojišča hladilnih elementov, v zgornjem delu pa topla. Za gretje s takšno termoelektrično toplotno pumpo se porabi nekajkrat manj moči kot pri direktnem upornem električnem gretju. Zato sme biti pogon baterijski.

»Globoko« hlajenje se da doseči s kaskadnim hladilnikom v treh stopnjah iz 82 elementov (= 62 + 16 + 4). Ohlajenje za 73° (od +26° C do — 47° C) zahteva moč 65 W. Hladilni blok meri 12 × 9 × 8 cm³ in tehta 2300 g.

Za merjenje vlage v meteorologiji se termoelektrično hlajenje že danes rabi. Zrcalno površino izmenično hladijo in grejejo okoli temperature rosišča. Postopek se da avtomatizirati, regulacija je fotoelektrična, napajanje baterijsko.



Sl. 5. Hladilni element iz polprevodnikov tipa *n* in *p*.

Termostatiranje aparatov je možno s kombinacijo termoelektričnega hlajenja in gretja v širokem območju zunanjih temperatur, n. pr. med +65° C in — 21° C. To utegne imeti znaten pomen, kajti natančno termostatirano hlajenje merilnih aparatov, ki vsebujejo temperaturno občutljive polprevodniške elemente, n. pr. fotoupore, znatno izboljša njih učinek.

Zaključek

Termoelektrično hlajenje je ugodno zato, ker omogoča pri majhni prostornini preprosto obratovanje in ker nima gibljivih delov, ki bi se trošili. Njegova tehnična uporaba ne bo posledica slučajnega odkritja, temveč vztrajnega dela nekaj skupin raziskovalcev, ki se korakoma bližajo cilju. Tega bi ne bilo mogoče doseči brez širokega razvoja fizike in kemije trdnih snovi, zlasti polprevodnikov. Iste raziskave že služijo tudi nadaljnjemu cilju — uporabi termoelementov za termoelektrične generatorje moči.

Literatura:

E. Altenkirch, Phys. Z. **12**, 920, 1911.

E. Justi, G. Lautz, Z. Naturf. **7 a**, 191, 602, 1952.

H. J. Goldsmid, Proc. Phys. Soc., London, **B 67**, 360, 599, 1954.

A. V., A. F. Joffe, Žurn. tehn. fiz., **24**, 1910, 1954.

A. F. Joffe, L. S. Stilbans, E. K. Jordanišvili, T. S. Stavickaja, Termoelektričeskoe ohlaždenie, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, Leningrad, 1956.

W. Hänlein, Kältetechnik, **12**, 137, 1960.

H. Schreiner, F. Wendler, Z. angew. Phys., **13**, 117, 1961.

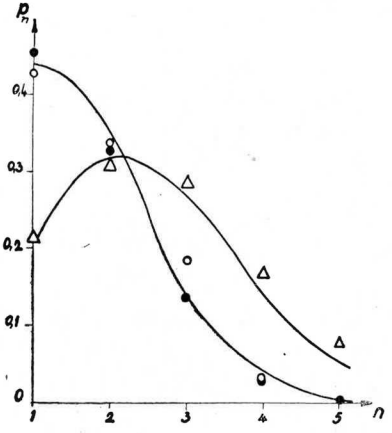
NOVICE

STATISTIKA IN JEZIKOSLOVJE

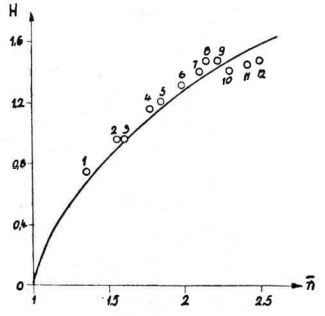
Mogoče se bo kateri jezikoslovec ali matematik začudil povezovanju statistike in jezikoslovja. Na tem mestu naj z nekaterimi primeri pokažemo, da je uporaba statističnih metod v jezikoslovju dala uporabne rezultate.

V nekem napisanem besedilu lahko napravimo statistiko različnih elementov, n. pr. glasov (namesto katerih lahko v nekaterih jezikih, najbrž tudi v slovenščini, upoštevamo kar črke), zlogov, besed, stavkov. Pri tem pa je treba včasih jezikoslovno definicijo za kak element prilagoditi statističnim namenom.

Potem ko se odločimo za element, za katerega se bodo zanimali, razvrstimo vse takšne elemente iz kakega dovolj dolgnga besedila po njihovih lastnostih, n. pr. besede po številu zlogov, stavke po številu besed in podobno. Nato izračunamo relativno pogostost, s katero nastopa element z neko lastnostjo.



Sl. 1. Porazdelitev besed po številu zlogov. p_n je relativna pogostost besed z n zlogi. ○ F. Prešeren: Krst pri Savici. ● F. Levstik: Martin Karpan. △ J. Cezar, De bello gallico[1]. Ustrezni Poissonovi porazdelitvi sta zaradi boljše preglednosti prikazani s krivuljami.



Sl. 2. Informacijska entropija za porazdelitev besed po številu zlogov[2]. Vsaka točka ustreza enemu jeziku: 1 angleščina, 2 francoščina, 3 nemščina, 4 slovenščina, 5 esperanto, 6 italijanščina, 7 grščina, 8 japonščina, 9 ruščina, 10 madžarščina, 11 latinščina, 12 turščina. Krivulja je izračunana za Poissonovo porazdelitev.

(Čim daljše je besedilo, tembolj se te pogostosti ujemajo z ustreznimi verjetnostmi.) Tako pridemo do porazdelitve, za katero izračunamo momente in druga statistična povprečja. S primerjavo vrednosti istih povprečij v različnih besedilih dobi jezikoslovec zanimive in pogosto zanj koristne podatke o različnih besedilih nekega avtorja, o besedilih različnih avtorjev ali o različnih jezikih.

Oglejmo si porazdelitev besed po številu zlogov v latinskem in dveh slovenskih besedilih (sl. 1)! Zaznamujmo z n število zlogov v besedi in s p_n relativno pogostost, s katero nastopa beseda z n zlogi v tem besedilu. Vidimo, da se porazdelitve za različna jezika dosti bolj razlikujejo kot porazdelitvi za isti jezik. Z obdelavo večjega števila besedil v istem jeziku pridemo do neke povprečne porazdelitve, ki je značilna za tisti jezik.

Iz dobljene porazdelitve lahko izračunamo povprečno število zlogov v besedi:

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n . \tag{1}$$

(Znamenje ∞ ima tu le simboličen pomen, ker je v resnici le malo členov vsote od nič različnih.) Za slovenščino je povprečno število zlogov v besedi $\bar{n} = 1{,}8$. Sl. 1 kaže tudi, da se dobljene porazdelitve zelo dobro ujemajo s Poissonovo porazdelitvijo[3]

$$P_n = \bar{m}^m \exp(-\bar{m})/m;, \tag{2}$$

če vstavimo $m = n - 1$ in $\bar{m} = \bar{n} - 1$. Poissonovo porazdelitev dobimo n. pr., če vprašamo, kakšna je verjetnost, da naletimo na določeno število (m) molekul idealnega plina v neki prostornini $\triangle V$, pri čemer je povprečno število molekul ($\bar{m}$) v tej prostornini znano. Zakaj nastopi Poissonova porazdelitev tudi pri zlogih v besedi, ni lahko pojasniti. Z razglabljanji, ki naj bi osvetlila to vprašanje, se je podrobno ukvarjal Fucks[4].

Kadar primerjamo porazdelitev besed po številu zlogov z ustrezno Poissonovo porazdelitvijo, ni treba, da bi zmeraj uporabljali sliko, kakršna je sl. 1. Primerjavo lahko namreč izvedemo tudi na drug način. Najprej po predpisih informacijske teorije[5] izračunamo informacijsko entropijo za dobljeno porazdelitev

$$H = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln p . \tag{3}$$

V diagramu, kjer nanesemo na abscisno os povprečno število zlogov $\bar{n}$, na ordinatno os pa izračunamo entropijo (3), dobimo za vsak jezik po eno točko. Potem izračunamo še informacijsko entropijo za Poissonovo porazdelitev (2)

$$H' = -\sum_{m=0}^{\infty} P_m \ln P_m \tag{4}$$

za nekaj vrednosti $\bar{m}$. Krivuljo, ki jo tako dobimo, vnesemo v isti diagram. Za točke, ki ne bi ležale na krivulji, vemo, da ustrezna porazdelitev ni Poissonova. Sl. 2 pa kaže, da točke samo zelo malo odstopajo od krivulje.

Zanimajo nas lahko tudi relativne pogostosti, s katerimi nastopajo črke v besedilih. Tu potem, ko smo izračunali relativno pogostost za vsako črko, uredimo črke tako, da je črka z največjo relativno pogostostjo na 0-tem mestu, črka z naslednjo največjo pogostostjo na 1. mestu itd. Tako ima vsaka črka svoje vrstno število r. Sl. 4, kjer so relativne pogostosti črk za neko slovensko besedilo razvrščene po vrstnem številu, kaže, da se da relativna pogostost p_r precej dobro takole opisati:

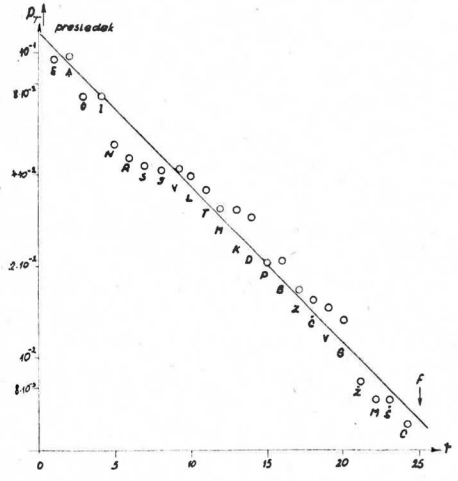
$$p_r = a \exp(-r/b). \tag{5}$$

Težko je najti utemeljitev, zakaj naj bi takšna »Boltzmannova« porazdelitev veljala za črke v nekem besedilu. Pač pa je Mandelbrot[6] našel argumente, s katerimi je prišel do podobne porazdelitve $p_r + a'(r + c)^{-1/b'}$, za katero se je pokazalo, da opiše približno tudi pogostost nastopanja besed v danem besedilu. Konstante a in b ali a', b' in c imenujejo parametre besedila, b ali b' pa še posebej »temperaturo« besedila. Čim večja sta namreč b ali b', tem bolj pestro

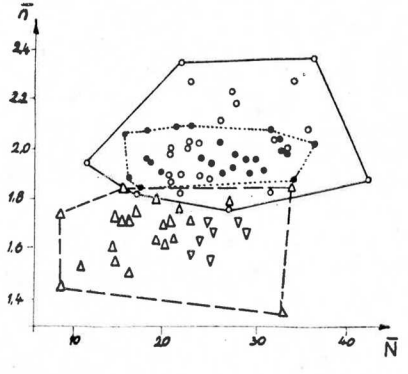
je besedilo, to se pravi: tem več različnih elementov je v enaki meri zastopanih v njem.

Zanimivo je tudi povprečno število besed v stavku. Pokaže se, da so stavki v umetniški prozi dosti krajši kot v strokovni (sl. 4). Med strokovnimi pisci pa so zopet fiziki med tistimi, ki uporabljajo sorazmerno najkrajše stavke in besede.

Navedena in še nekatera druga povprečja in parametri dokaj dobro označujejo neki jezik ali neko besedilo in ga razločujejo od drugih. Pri tem se pokaže, da so razlike med besedili istega avtorja dosti manjše kot razlike med besedili različnih avtorjev. Na označeni način je menda s primerjavo različnih delov Iliade uspelo podpreti trditev, da je Iliada delo enega avtorja, da torej zelo verjetno Homer ni samo legendarna osebnost.



Sl. 3. Porazdelitev črk in presledkov med besedami v odvisnosti od njihovega vrstnega števila za Krst pri Savici. Premica prikazuje funkcijo $p_r = 0{,}12 \exp(-r/8{,}5)$.



Sl. 4. Povprečno število besed v stavku ($\overline{N}$) v odvisnosti od povprečnega števila zlogov v besedi ($\overline{n}$) za nekatere znane nemške strokovne pisce (○), fizike (●) in pisatelje (△). Z izvlečenim, pikčastim in črtkanim likom so naznačena področja, kjer nastopajo točke navedenih treh vrst.

Vsa povprečja in parametri, ki so značilni za nekega avtorja ali neki jezik, so nekoliko odvisna od časa, v katerem je besedilo nastalo. Opazili so, da velja za izginjanje nekaterih glasovnih skupin ali skupin znamenj približno eksponentna časovna odvisnost. Iz takšnega poteka se da za dva jezika, ki sta danes različna, domnevati, pred kakšnim časom sta se ločila od skupnega debla.

J. Strnad

(1) Meyer-Eppler, Physikalische Analogien linguistischer Strukturen, Phys. Blätter **11**, 445 (1956).

(2) W. Fucks, Mathematische Analyse von Werken der Sprache und der Musik, Phys. Blätter **16**, 452 (1960).

(3) E. Whittaker, G. Rorinson, Tečaj numeričke matematike, Beograd 1951.

(4) W. Fucks, Statistische Verteilungen mit gebundenen Anteilen, Z. Phys. **145**, 520 (1956).

(5) R. Jamnik, Osnovni pojmi teorije informacij, Obz. mat. fiz. **6**, 97 (1958).

(6) B. Mandelbrot, Communication Theory, London 1953.

ŠOLA

PROBLEMI POUKA MATEMATIKE

Zvezni zavod za proučevanje šolstva je organiziral s sodelovanjem Zveze društev matematikov in fizikov Jugoslavije v Beogradu 2. in 3. junija 1961 posvetovanje o aktualnih problemih iz matematičnega področja. Na posvetovanju so bile obravnavane naslednje teme:

1. Razvoj matematike danes in njen pomen za razvoj drugih ved, tehnike industrije in gospodarstva nasploh ter s tem v zvezi potrebe po raznih specialistih matematikih dandanes v svetu.

2. Vloga in pomen matematike v splošni izobrazbi mladine; realiziranje te vloge v predmetnikih in učnih načrtih matematike na šolah.

3. Razvijanje učnih načrtov matematike z namenom, da se ta pouk bolje poveže z današnjim razvojem matematike in z njenimi spremembami:

a) formiranje učnega kadra,
b) kreativno izpopolnjevanje predavateljev matematike,
c) novi učbeniki, priročniki in ostala literatura.

4. Razvijanje raznih oblik aktivnosti učencev, ki kažejo posebno zanimanje za matematiko (matematične grupe, tekmovanje idr.).

Iz Slovenije se se posvetovanja udeležili prof. Jože Povšič, ki je imel koreferat k 2. točki, dr. France Križanič, ki je imel koreferat k 3. točki (oba koreferata sta objavljena v tej številki Obzornika) in prof. Stanko Uršič, ki je koreferiral k 4. točki.

Po uvodnih besedah prof. S. Šljivića je direktor Zavoda za proučevanje šolstva tovarišica Mitra Mitrović nakazala nekatere osnovne probleme iz matematičnega področja. Rekla je: Po vsem svetu, kakor tudi pri nas se ugotavlja, da je pomen in vloga matematike pri znanstvenem, tehničnem in ekonomskem napredku v sedanjem času ogromna, da živimo pravzaprav, kot se je izrazil nekdo iz krogov matematikov-znanstvenikov, v času visoke matematične konjunkture in matematizacije skoraj vseh ved. Drugič je naša dežela v izrednem razvoju v družbenem in gospodarskem pogledu in nikakor ne moremo prezreti dejstva o vlogi, ki jo ima matematika kot znanost v sedanjem času, ampak se javlja močnejša družbena potreba, kar se tiče nadaljnjega uspešnega razvoja matematike kot znanosti in njene praktične uporabe.

In tretjič, mi izvajamo radikalno in zelo sodobno reformo šolstva v vseh njenih komponentah, tako šolskega sistema kakor tudi strukture izobraževanja v sodobnem smislu in napredka ter modernizacije pouka. V okviru take reforme ni dvoma, da je nujno, da negujemo in zboljšamo pouk matematike in da ne sme izostati široka akcija, ki je k temu usmerjena.

Mi moramo pojačati našo aktivnost na področju matematike in pouka te vede v tem smislu, da damo večji družbeni značaj matematiki, da se bolj posvetimo temu vprašanju ter si zagotovimo večje razumevanje javnosti v najširšem smislu. Na šolskem področju pa moramo postaviti med pedagoškimi problemi matematiko na prvo mesto.

Značilno je, da v naši osnovni šoli od 5. do 8. razreda, od skupnega števila ur odpade na matematiko komaj 12,1 %. V drugih deželah je povprečno okoli 20 % namenjenih matematiki, v nekaterih šolah celo 40 %. Te ugotovitve veljajo tudi za gimnazije.

Drugi problem, o katerem se moramo pogovoriti, je problem učiteljskega kadra in njegove strokovnosti. V letu 1958/59 je bilo od 26 000 učiteljev, ki so poučevali matematiko v višjih razredih osnovne šole, manj kot 50 % strokovno usposobljenih. Tudi na šolah druge stopnje je potreba po učiteljih matematike zelo velika, število vpisanih na fakultetah pa ne daje dosti upanja o rešitvi tega problema.

Naslednje vprašanje, ki ga moramo postaviti, so razna posvetovanja, tečaji in seminarji. Po neki analizi, izvršeni v 14 okrajih, so ugotovili, da je od 600 oblik takega dela bilo v letu 1959/60 komaj 25 posvečenih matematiki. Očividno je, da izostaja sistematična in stalna aktivnost o izpopolnjevanju učiteljskega kadra v matematiki. Druga oblika dela so matematični krožki. Teh je bilo okoli 11 na 100 šol. Relativno največ v Slovenij, nato v Srbiji. Ko pa pogledamo število udeležencev, vidimo, da je to število zelo nizko, in sicer 1,73 % v osnovnih šolah in 4,2 % na gimnazijah. V tem procentu so zajeti tudi tisti, ki kažejo posebno zanimanje za matematiko; tem bi morali posvečati večjo pozornost.

Sledilo je več referatov in koreferatov iz zgoraj navedenih področij, dva od teh sta priobčena v tej številki Obzornika. Na koncu so vsi udeleženci sprejeli naslednje zaključke:

Glede na pomen, ki ga ima matematika v razvoju sodobne kulture, in na njen pomen in vlogo v znanstvenem, tehničnem in ekonomskem razvoju naše dežele je nujno:

da maksimalno izboljšamo pogoje za razvoj matematike pri nas;

da damo v šolskem in izvenšolskem izobraževanju matematiki (v skladu z značajem šole) eno od primarnih mest in da nenehno izboljšujemo vsebino matematičnega pouka.

Da bi mogli izpolniti to nalogo, je potrebno:

1. Preskrbeti potrebna sredstva za nagel razvoj novoustanovljenih inštitutov za matematiko.

2. Omogočati stalno in sistematično izpopolnjevanje in specializacijo obstoječega znanstvenega kadra matematikov.

3. Skrbeti, da se v redni in izredni podiplomski študij zajame čimvečje število diplomiranih matematikov.

4. Zaskrbljujoč pojav, da število predavateljev in profesorjev matematike v osnovni šoli in v srednjih šolah niti zdaleka ne narašča s potrebami, medtem ko število študentov matematike naglo in nenehno upada, nam nalaga, da hitro ukrepamo, da bi se naglo povečalo število študentov matematike. (Štipendije, ki naj bodo večje od povprečnih, več mest v študentovskih domovih, izboljšanje položaja predavateljev in profesorjev matematike.)

5. V osnovni šoli povečati število ur matematike, tako da bo v vsakem razredu matematika zastopana s 5 urami tedensko.

6. V gimnaziji — v oddelkih naravoslovne matematične smeri — povečati število ur matematike v vseh razredih na 5.

7. V srednjih tehničnih šolah dati matematiki pomen in vlogo splošnoizobraževalnega in strokovnega predmeta in v skladu s tem organizirati pouk matematike v teku vseh štirih let.

8. Da bi realizacija obstoječih učnih programov matematike v osnovni šoli in gimnaziji bila čimbolj uspešna, sestaviti za predavatelje in profesorje teh šol ustrezajoče učbenike in ostalo potrebno strokovno literaturo ter omogočiti objavljanje eksperimentalnih učbenikov.

9. Nujno potrebno je, da so vse osnovne šole, gimnazije in srednje strokovne šole naročene na revijo »Nastava matematike i fizike«, ki je namenjena izpopolnjevanju predavateljev, in da preskrbijo sredstva za nabavo strokovne matematične literature za šolsko knjižnico.

10. Potreba po načrtnem in sistematičnem izpopolnjevanju predavateljev in profesorjev matematike nam nalaga:

a) da veljata prvi dve leti praktičnega dela mladega matematika v šoli kot staž;

b) da v času staža vzdržuje predavatelj stalen stik s svojim mentorjem, ki mu ga je določila republiška komisija za opravljanje učiteljskega in profesorskega izpita;

c) da v teku vsakega leta staža sodeluje predavatelj na petnajstdnevnem seminarju, ki ga posebej za predavatelje- stažiste organizira republiški zavod za šolstvo;

č) da se v večjih krajih in republiških centrih redno vrše seminarji, ki so namenjeni izpopolnjevanju ostalih predavateljev in profesorjev;

d) za inšpektorsko in inštruktorsko službo je treba pritegniti profesorje, ki so se odlikovali v svojem strokovnem delu in ki bi še naprej ostali na svojih šolah, vendar z zmanjšanim delovnim časom.

11. V osnovni šoli in gimnaziji moramo posvetiti več pozornosti raznim oblikam dela z učenci, ki kažejo posebno zanimanje za matematiko in njeno praktično uporabo (matematične grupe, matematična tekmovanja, izdajanje lista za učence osnovnih šol, širjenje naročnikov na »Matematičko fizički list« med učenci srednjih tehniških šol).

Stanko Uršič

O VPRAŠANJU POUKA MATEMATIKE NA TEHNIŠKIH ŠOLAH

Pouk matematike na strokovnih šolah mora opraviti dve nalogi: dati splošno in specifično izobrazbo. Na splošnoizobraževalnih šolah je pouk matematike enak pouku drugih predmetov, saj ima tam eno samo nalogo: splošnoizobraževalno. Na strokovnih šolah pa ima čisto posebno mesto: doseči mora predvsem praktične cilje. Čeprav je torej na teh šolah poudarjen praktični cilj, ne bi smeli podcenjevati pomena matematike kot splošnoizobraževalnega predmeta, kar se tako često dogaja.

Na strokovni šoli je treba matematično znanje uporabiti za razreševanje nalog, ki jih vsiljuje praksa kake stroke. Izbiro snovi in metode dela je treba uravnati tako, da se ta cilj kar najlaže in najbolje doseže. Kakovost in količina matematičnega znanja naj se ujemata s praktičnimi potrebami in s kakovostjo strokovne izobrazbe. Pouk matematike in pouk strokovnih predmetov se morata med seboj dopolnjevati in prepletati. Pravilna vskladitev je neogibno potrebna, drugače trpi v prvi vrsti strokovno izobraževanje učencev. Čeprav se pouk matematike tudi na strokovni šoli ne sme oddaljiti od metod, s katerimi se dosežejo njegovi splošni cilji — zlasti od tistih ne, s katerimi razvijamo sposobnosti logičnega mišljenja in sklepanja in s katerimi dosežemo določeno stopnjo abstrakcije in posploševanja pri formiranju matematičnih pojmov — mora biti njegovo težišče v opravljanju praktične naloge. Najvažnejša je vsekakor vaja. Učencem je treba omogočiti, da jih napravijo kar največ, če hočemo doseči, da se bodo naučili uporabljati matematiko pri nalogah iz stroke. Za nas ni dovolj, če dijak snov le pozna in jo razume. Treba je tvarino utrjevati

in dovolj uriti učenca z nalogami, da bo znal zanesljivo in hitro izračunati ter dobiti pravilne rezultate. Pri dobro vodenih razreševanjih nalog se razvijajo matematična kultura in delovne navade učencev, kar mora med drugim imeti absolvent strokovne šole. Treba je vztrajati, da je naloga natančno rešena in da se primerno pretrese. Poleg tega je treba zahtevati, da ima naloga estetsko obliko, pravilen razpored in lepo tehniško podobo. Če so v njej numerični računi, morajo biti končani; ocenjena mora biti tudi natančnost rezultata. Dijak mora imeti dobro računsko spretnost. V praksi bo imel opraviti z numeričnimi računi, zato mu moramo omogočiti, da si v šoli pridobi potrebno računsko tehniko.

Pri pouku matematike na strokovni šoli pogosto naredimo znano napako. Mislimo namreč, da je tako imenovana »teoretična« razlaga v matematiki nepotrebna navlaka oziroma breme za strokovne šole in da je mogoče z zelo majhno količino tega znanja preiti na uporabo. Toda uporaba mora predpostavljati solidno, tako imenovano »teoretično« znanje matematike. Brez te učenec ne bo mogel razreševati nalog. Pri razreševanju nalog se mora osvoboditi znanih primerov, sam mora iskati pot rešitve. Dosedanje izkušnje v delu na strokovnih šolah nam ne obetajo, da bi mogli doseči take rezultate brez temeljite reforme. Po tej mora matematika dobiti tisto mesto, ki ji po njeni vlogi na strokovni šoli pripada. Zaradi velike pomanjkljivosti in praznin v znanju matematike so učenci do sedaj pokazali slabe uspehe, tudi tisti, ki so jih učili najboljši učitelji. Pri razreševanju nalog preveč pogosto prevladuje samo formalno, šablonsko, mehanično razreševanje brez globljega razumevanja. Pouk matematike na strokovnih šolah je treba organizirati tako, da bodo učenci pri delu samostojni in kritični. Dokler tega ne dosežemo, bo ves trud tudi najboljših učiteljev brez uspehov. Učitelj bo dajal zaman tudi najzanimivejše primere iz stroke, če učenci ne bodo razpolagali s potrebnim matematičnim znanjem.

Že iz teh navedb sledi, da splošni in specifični cilji pouka matematike na strokovnih šolah pri nas še niso doseženi. Zato je naša dolžnost, da vprašanje matematične izobrazbe in vprašanje pouka matematike na strokovnih šolah resno postavimo pred našo javnost.

V tem koreferatu hočem prikazati težkoče, s katerimi imajo opraviti učitelji matematike in kako je ta zapostavljena na osrednjih strokovnih, to je tehniških šolah. Nakazati hočem tudi smernice pouka matematike na teh šolah.

Matematika je na tehniških šolah neogibno potrebna za razumevanje in obvladanje strokovnih predmetov. Pouk matematike nikakor ne sme teči izolirano, kakor teče na primer na gimnaziji. Zato je skoraj redno popolnoma podrejen strokovnim predmetom. Ker učenci ne morejo obvladati strokovnih predmetov brez znanja matematike, zato obstoji težnja, da se pouk matematike pomakne, kolikor se da, v prve razrede. Vse do leta 1936 je bila na TSŠ matematika predmet zaključnega izpita in ji je bil s tem dan poudarek, ki ji na taki šoli gre. Tega leta pa je bila kot maturitetni predmet odpravljena. Takrat so utilitaristično razpoloženi sestavljalci predmetnikov ponižali matematiko na samo pomožni predmet — ne da bi se ozirali na smoter matematičnega pouka — in premaknili v korist ožjih strokovnih predmetov težišče matematičnega pouka na prvi oziroma drugi razred. Te tendence so prišle do izraza še bolj leta 1949 v Opatiji, in sicer pri sestavljanju novih učnih načrtov, ko je bila matematika odpravljena iz četrtega razreda. To je povzročilo, da so učenci pozabili še tisto, kar so se že naučili. Tako se žrtvuje postopnost in preciznost pri razlagi, kar pripelje do obubožanja matematične misli in do nesposobnosti obvladanja matematičnih metod. Snov in pojmi, ki so težki tudi za učence

zadnjih razredov gimnazije, se morajo često obdelati v drugem razredu tehniških šol. Tako je treba poučevati v prvem in drugem razredu — zlasti v drugem — preveč tvarine in prezgodaj obremenjevati učenca s pretežkimi pojmi za ustrezno starost. Če še upoštevamo, da so učenci teh šol zaradi velikega števila predmetov, praktičnega dela in risanja bolj obremenjeni od gimnazijskih in da se v nekatere teh šol navadno vpisujejo slabši učenci, potem je jasno, da tak odnos do matematike pripelje do obubožanja ne samo glede na znanje elementarne matematike, ampak tudi glede na strokovno izobrazbo.

Močna težnja na tehniških kakor tudi na industrijskih in vajenskih šolah je, da bi se pouk matematike kolikor mogoče omejil na razreševanje enostavnih nalog iz prakse. Tak pouk ne more dovolj razvijati funkcionalnega in logičnega mišljenja, ker se ogiblje dokazovanja, posploševanja in drugih abstraktnih obravnavanj matematične snovi. Če bi se pri pouku omejili samo na tako metodo dela in še pri tako zoženem učnem načrtu, bi se morali absolventi takih šol znajti pred ogromnimi težavami, ker ne bi znali abstraktno misliti.

Popolnoma napačno bi pa bilo, če bi zaradi tega gimnazijske učne načrte enostavno prenašali na tehniške šole. Merilo na gimnaziji pri izbiri snovi in njeni razporeditvi ne more biti isto kakor na tehniških šolah, kjer jo je treba vskladiti s strokovnimi predmeti. Po drugi strani pa je treba reči, da prav zaradi tega trpi zaporednost v razlagi, saj je treba povezovati sorodne snovi. Ta podrejenost matematike strokovnim predmetom povzroča velike pomanjkljivosti in težkoče, ki jih ni mogoče popolnoma izločiti. Prizadevati si pa moramo, da to zlo zmanjšamo na najmanjšo možno mero. V tem vprašanju bi morala osemletna osnovna šola odigrati pomembno vlogo. Dati bi morala učencem trdno osnovo iz matematike; na tej bi se dal laže graditi učni načrt, ki ga zahteva stroka. Potem na šolah naslednje stopnje ne bi bilo treba neprenehoma poslušati pritožb, da učenci iz osemletnih šol ne prinesejo zadovoljivega znanja in da se mora zaradi tega povsod ponovno začeti z elementarnim poukom matematike. Kvaliteto pouka matematike je treba dvigniti v vsaki šoli na njej ustrezno raven, sicer bomo neprestano hlapčevali nepotrebnemu »ponavljanju« snovi, ki bi morala biti že obdelana in osvojena na predhodnji stopnji. Ker pa moramo še nekaj časa računati na učence, ki bodo prihajali z določenimi vrzelmi v osnovnem znanju matematike, pač zaradi nepopolnega ali skrajšanega šolanja, pa tudi zaradi drugih objektivnih težkoč, je edini izhod, da se za te dijake v prvem letniku uvede nekajurni tečaj matematike, ki bo olajšal obvladanje manjkajočega gradiva.

Kakor sem že omenil, se na nekaterih naših tehniških in drugih strokovnih šolah pojavljajo ob zahtevah po tesnejši povezanosti matematike s strokovnimi predmeti nezdrava prizadevanja, poenostaviti učno gradivo in reducirati pouk matematike na čisto praktično stran, zanemariti vse, kar je bolj splošnega, bolj teoretičnega. Pričakovati moramo, da se bodo take težnje še okrepile, ko bodo strokovne šole prešle pod pristojnost strokovnih združenj in gospodarskih organizacij, saj bo strokovno šolstvo tudi gmotno odvisno od industrije in bo ta določala njegov profil. — Slišimo takele pripombe: »Matematika je važna le toliko, kolikor nam služi pri strokovnih predmetih.« »Matematika je strokovni predmet, zato je treba pri pouku tega predmeta obravnavati le to, kar spada v stroko.« »Pri matematiki zgubljajo čas z dokazi, ki so na strokovni šoli nepotrebni.« »Matematiki pri pouku preveč filozofirajo.« »Učenci se morajo učiti taka poglavja, ki jih mi ne znamo in jih pri strokovnih predmetih ne potrebujemo, ne znajo pa računati z decimalnimi števili in ulomki.«

Taka utilitaristična, plitva, prakticistična in diletantska gledanja žal niso osamljena. Kolikor jih ne povzroči kak učitelj matematike, ki se pri pouku ne ozira dovolj na potrebe stroke in ne zna dati poudarka tistim metodskim enotam, ki so važne za ostale predmete, ali pa se ogiblje aplikacije na stroko, so vsekakor plod napačne miselnosti in napačnega gledanja na matematiko. Prav abstraktnost omogoča matematiki mnoge sklepe in mnogo spoznanj, ki so tako splošna, da jih lahko izkoriščajo praktične vede, kot je na primer tehnika. V njeni abstraktnosti tiči njena moč, v tem je tudi njena skrivnost, zakaj se njena uporaba vse bolj in bolj širi, saj se da uporabiti povsod, kjer gre za odnose med količinami. Takoj pa moramo poudariti tole: Ko se tako upiramo zanemarjanju abstraktnega, teoretičnega v matematiki, pa nočemo zaiti v pretiravanje, da bi pri tem prezirali, kar je v njej koristnega in praktičnega. Čeprav se matematika na določeni stopnji po nujnosti dialektičnega razvoja loči od realnega sveta kot nekaj samostojnega, nas pa to ne more zavesti, da bi pozabili na njen izvor, na dejstvo, da imajo njene abstrakcije korenine v praksi. — To vprašanje bi lahko najbolje pojasnili, če se seznanimo z izkušnjami, ki jih je doživela sovjetska šola. V SZ je moral namreč prva leta po revoluciji pouk matematike zaradi njene abstraktnosti malodane izginiti z urnika srednje šole. O tem nam pripoveduje razprava »Pouk matematike v sovjetski šoli od 1917 do 1947« pisca Nikitina v moskovski reviji »Matematika v škole« iz leta 1947. V okviru, ki mi je na razpolago, žal, ni mogoče podrobneje reproducirati značilne izkušnje iz zgodovine sovjetske šole, ki jih ta nadvse zanimiva razprava ugotavlja.

Zaradi skrajno utilitarističnega učnega načrta, ki je bil uveden v šolskem letu 1924/25, je pri sovjetski mladini prišlo do poraznega upada matematičnega znanja. Učenci so dobivali le površno, priložnostno znanje nekaterih nepovezanih matematičnih resnic. Poseči je moral vmes CK VKP (b). Ko je podrobno pretresal razmere v sovjetski šoli, je 5. septembra 1931 izdal posebno resolucijo, v kateri nalaga, naj se z letom 1932 preide na nove učne načrte. Narkompros (Komisariat za ljudsko izobrazbo) je takoj organiziral delo za sestavo novih učnih načrtov. Za te načrte je značilen že uvod o učnih načelih. Glede matematike se glasi takole:

»Pri nobenem drugem predmetu nima sistem tako važne vloge kakor v aritmetiki in geometriji. Tu je moči vsako novo stopnjo razumeti in osvojiti le v primeru, če je bila dobro predelana in dobro osvojena prejšnja. Tu se vsaka nova spretnost vrašča v prejšnje. Zato pri matematiki vsak, celo najmanjši izpuščeni drobec v temeljih otežkoča vsako nadaljnje delo. Mi pa smo doslej v praktičnem šolskem delu pogosto rušili sistem. Učenje matematike je imelo slučajnostni značaj; mnogokrat smo zanemarili najosnovnejše metodske korake, temeljev nismo predelali dovolj trdno in učenci jih niso osvojili dovolj zavestno. Proti tej pomanjkljivosti se mora šola odločno boriti. Znanje in spretnosti v matematiki, ki jih učencem posredujemo, morajo biti razporejene v določenem sistemu in v strogi zaporednosti. Temelje matematike je treba predelati posebno skrbno, od ene stopnje na drugo se sme preiti le, če je bila prejšnja dobro osvojena.«

To stališče je seveda v pravem nasprotju s stališčem, po katerem se je poučevala matematika v SZ med letom 1924 in letom 1931, ko je bilo naravnost ukazano izogibati se vsakemu teoretičnemu vprašanju. Teoretična poglavja so dobila v novem učnem načrtu zopet primerno mesto. V novih učnih načrtih je bila poudarjena zlasti sistematičnost znanja. — Pozneje so učne načrte mate-

matike sicer še izpreminjali, toda ne bistveno. Novi sistematski učni načrt in nova metodska navodila so kmalu pripomogla, da se je znanje matematike v sovjetskih šolah dvignilo in danes lahko rečemo, da je v primeri s šolami na zahodu na zelo visoki stopnji.

Že iz naštetih težkoč, ki jih imamo pri pouku matematike na tehniških šolah, sledi in iz vsakdanje šolske prakse vemo, da uspeh, ki ga povprečno dosežejo učenci na naših tehniških šolah, nikakor ne zadovoljuje. Čeprav lahko ugotovimo nekaj osvojenega znanja, je to dostikrat formalistično, se hitro pozabi in učencu ne nudi prave koristi. Slabosti in pomanjkljivosti pouka matematike na tehniških šolah se čutijo še v večji meri zaradi dvojne vloge, ki jo ima v teh šolah pouk tega predmeta. Zato je tudi vprašanje reorganizacije pouka matematike na naših tehniških šolah bolj zapleteno kot na splošnoizobraževalnih šolah. Modernizacija učnih načrtov matematike je bila že nakazana v referatih in resolucijah kongresov matematikov in fizikov Jugoslavije, Medtem ko novi osnutki predmetnikov in učnih načrtov bodoče reformirane gimnazije že kažejo zvezo z novejšimi matematičnimi pojmi in sredstvi, pa dosedanje zapostavljanje matematike na tehniških šolah nikakor ne jamči, da bodo moderne reformne težnje uveljavljene tudi na teh. Vse je odvisno od tega, komu bo prepuščena odločitev. Že prva reorganizacija tehniških šol v LRS je pokazala, da bo celo težko obdržati status quo za matematiko, fiziko in opisno geometrijo. Razne vrste strokovnih šol bodo zahtevale posebne in podrobne predelave tega važnega vprašanja. Danes je še prezgodaj lotiti se ga. Najprej je namreč potrebno določiti vsaki strokovni šoli pravo mesto v novem šolskem sistemu, ki ga bo uvedla in pravno utrdila skorajšnja reforma strokovnega šolstva. Tega momenta pa ne smemo pričakati nepripravljeni, brez jasne opredelitve in brez prečiščenih mnenj, ker bomo sicer zopet delali na hitrico, površno in nenačrtno. Za kakršnokoli korenito spremembo pa so potrebne sistematične, obsežne in študijske priprave. Tako so n. pr. v SZ v zadnjem času samo politehnizaciji matematičnega pouka posvečene zelo obsežne študije. Vprašanje uvajanja pojmov in metod sodobne znanosti v pouk se šele postavlja; prav tukaj se priporoča največja opreznost ter se predvidevajo predhodne študijske priprave in preverjanja v praksi. Tudi ta koreferat je treba razumeti kot poizkus pripravljanja gradiva za bodoče podrobno predelovanje vprašanja pouka matematike na tehniških šolah. Poleg že nakazanih smernic, mislim, da bo treba vsekakor premotriti zlasti še tole:

1. Elementi infinitezimalnega računa naj se zopet uvedejo v vse tehniške šole, iz katerih so bili l. 1949 črtani.

2. Sodobna tehnika računanja je še vedno zapostavljena. Postavlja se vprašanje veliko večje uporabe raznih matematičnih pomožnih sredstev (numeričnih tablic, diagramov, instrumentov, priročnikov, formul itd.).

3. V sodobni tehniki računanja se vedno bolj uporabljajo nomogrami, t. j. grafikoni, s katerimi rešujemo nekatere matematične probleme. V bližnji bodočnosti bodo zanesljivo uvedeni v učni načrt elementi nomografije.

4. Matematika je sicer eksaktna veda in imamo pri njej večinoma opravka z natančno določenimi števili. Vendar pa pogosto naletimo, zlasti pri uporabi matematike v stroki, na števila, ki so rezultat merjenj in torej niso natančna. V takih primerih moramo kritično premotriti nastanek in natančnost vsakega podatka, na katerega naletimo pri nalogi, ker je od tega odvisna natančnost rezultata. N. pr.: v praktičnih nalogah imamo kote z natančnostjo do sekunde; ali: v eni in isti nalogi so neki podatki zelo, drugi malo natančni; ali še drug

primer: paziti moramo na smiselnost rezultatov, da učenec ne bo računal kake količine, n. pr. svojske teže v fiziki na 5 ali 6 decimalnih mest, če pa sta teža in prostornina podani komaj, recimo, na 2.

5. Zato je potrebno, da se v učni načrt vnese poglavje o računanju s približnimi vrednostmi ali o okrajšanem računanju. Mimogrede naj omenim, da je to poglavje sicer v gimnazijskem učnem načrtu, toda tudi na gimnaziji pri pouku ni izvedeno na zadovoljujoč način. Z okrajšanim računanjem bo šola učencu privzgojila občutek za natančnost računskih rezultatov, da mu to vprašanje ne bo več novo, ko se bo z njim srečal v praksi. Učenec mora vedeti, do katerega decimalnega mesta je v danem primeru potrebno računati.

6. Na nekih naših tehniških šolah so ob reorganizaciji opisno geometrijo kar črtali iz seznama učnih predmetov, na drugih pa so jo združili s tehniškim risanjem. Opisna geometrija se mora obdelati tako kakor na vseh strokovnih tehniških, srednjih, višjih in visokih šolah, to je kot poseben predmet. Značaj opisne geometrije kot učnega predmeta zahteva posebno metodo in specifične oblike dela, tako da bi bilo škodljivo spajati jo z matematiko ali s tehniškim risanjem v skupen predmet.

7. Grafične metode, t. j. načrtovanje diagramov ali vektorskih črtežev, iz katerih moremo iskano količino neposredno izmeriti, se na naših šolah sploh še ne uporabljajo, a prizadevati si moramo, da jih bodo novi načrti vsebovali in da jim bomo dali na novi šoli tisti pomen, ki jim pripada.

8. Fizika in elektrotehnika imata precej opravka z vektorskimi količinami. Zato naj tudi tu da matematika vsaj elemente.

Treba bi bilo govoriti še o mestu matematike v predmetniku, podrobneje o učnih načrtih, o metodah, o učnih sredstvih in o učnem osebju — toda v okviru, ki nam je na razpolago, to ni mogoče.

Pouk matematike na strokovnih šolah ima v primeri s poukom na splošnoizobraževalnih šolah to prednost, da je v neposredni povezavi s stroko, s praktičnim delom, s stvarnostjo. To veliko prednost so dolžni učitelji matematike pri organiziranju pouka spretno in neprestano izkoriščati, ne da bi se pri tem oddaljili od ciljev matematičnega pouka in ne da bi zašli v plitki prakticizem. Znamenti nemški matematik Felix Kelin je napisal v svojem znanem delu »Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus« tele tehtne besede, s katerimi zaključujem svoja izvajanja: »To, kar je živega v matematiki, njene najvažnejše spodbude, njena učinkovitost vendar popolnoma temelje na uporabah, se pravi, na vzajemnih odnosih čisto logičnih stvari do vseh drugih področij. Pregnati uporabe iz matematike bi bilo prav tako, kakor če bi bistvo žive živali hote iskali samo v okostju, mišic, živcev in žil pa ne bi upoštevali.«

Literatura:

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Teubner 1909.

Nikitin, Učenije matematike v sovjetskoj škole ot 1917 g. do 1947 g., »Matematika v škole«, Moskva 1947.

Lietzmann, Methodik des math. Unterricht, Heidelberg 1953.

H. Behnke, Der math. Unterricht, Göttingen 1954.

L. Gabrovšek, Ideološka vprašanja v zvezi s poukom matematike, »Popotnik« 1949, št. 8—10.

I. Smolec, Nastava matem. u sred. školama, »Nastava mat. i fiz.«, Beograd 1954, br. 3—4.

T. Gjivović, Nastavni problemi matem. u stručnim školama, »Stručno obrazovanje«, Rijeka 1957, br. 3.

Jože Povšič

O VZGOJI MATEMATIKOV PRI NAS

V svojem koreferatu ne bom obravnaval obstoječega izobraževanja in formiranja matematikov v naši državi. Od vsega začetka se bom omejil na nekatere splošne teze, na nekatere probleme, s katerimi se bomo po mojem mnenju spoprijemali ob nadaljnjem reševanju celotne problematike našega šolstva. Tudi v teh tezah se odražajo v glavnem naše lokalne, slovenske razmere, naše izkušnje in naši problemi, gledani v luči analogij z razvojem matematike v svetu kot celoti. V kolikšni meri lahko posplošimo te teze na našo jugoslovansko skupnost pa bo odločil, upam, ta zbor v diskusiji.

Izhodišče moje obravnave je enotnost matematike, enotnost, ki se odraža v celi vrsti aspektov, v celi vrsti dialektičnih protislovij, ki jih moramo reševati pri vsaki obdelavi zastavljene naloge. Navedimo tiste najvažnejše, ob katerih se bomo najdalj zadržali:

teorija — praksa
klasično — sodobno
splošno — specialno
nacionalno — internacionalno.

Druga opora postavljenih tez pa je povezanost matematike z drugimi vejami našega družbenega življenja, njena vloga in njene naloge v nadaljnji rasti in procvitu naše socialistične skupnosti.

Matematika je enotna veda. To se ne kaže le v ozki povezanosti znotraj matematike, v Hilbertovi trditvi, da matematika ne bo nikdar razpadla v nove, med seboj izolirane znanosti. Za nas je danes pomembnejša enotnost teorije in prakse v matematiki. Meje med uporabnim in neuporabnim v matematiki ni. Taka meja — in to često z obeh strani dobro utrjena in branjena — je v ljudeh. Ljudje se dele na te, ki znajo uporabljati matematiko in na tiste, ki je ne znajo uporabljati. Ljudi druge skupine pa najdemo tako med matematiki, kot med strokovnjaki v tehniški praksi.

Matematika mora v razvoju naše industrije odigrati pomembno vlogo. To vsi čutimo, toda danes vezi med industrijo in matematiko skorajda ni, vsaj pri nas v Sloveniji ne. Poudariti pa je le treba, da že danes čutimo povpraševanje za matematiki, specializiranimi v statistični smeri. To povpraševanje je posledica pomembnega razvoja proizvodnih odnosov pri nas v toku zadnjih let, uvajanja delavskega samoupravljanja, raznih ekonomskih ukrepov itd. Toda z modernizacijo industrijskega procesa šele začenjamo. Nepovezanost z industrijo torej ni samo napaka matematike, to dejstvo enako odraža tako nerazvitost matematike kot nerazvitost in nesamostojnost industrije. Velik del naše industrije je še vedno le višje organizirana obrt ali pa je industrija z licenčno proizvodnjo, vsaj tista industrija, ki je za matematiko zanimiva. Jasno je, da od take industrije ne moremo pričakovati velikega povpraševanja po uslugah ali po sodelovanju matematike. Vendar nam to ne sme vzeti poguma, saj bo vzpodbuda, ki jo daje ljudska oblast vprav osvobajanju in modernizaciji industrije, slej ko prej privedla do povečanega povpraševanja po matematikih v naši industriji. Najprej moremo pričakovati tako sodelovanje ob uvajanju avtomatizacije v našo industrijo. Takemu sodelovanju bi močno pomagalo tudi ustanavljanje računskih centrov. Usluge takih centrov bi lahko izkoriščala tudi manj razvita industrija in bi tako v določeni meri krepila svoje zanimanje za matematiko. Osnova za planiranje mora biti povpraševanje v času, ko naši absolventi

zapuščajo šolo, do takrat pa je še dovolj časa, da vskladimo razvoj matematike in razvoj naše industrije.

Kakšnega matematika zahteva (ali bo zahtevala) naša skupnost? Do danes smo osnovno pozornost posvečali matematiku — profesorju srednje šole. Le posamezni, boljši študentje so se po diplomi vključevali v delo univerznih ali drugih inštitutov. Skrb za matematika-učitelja bo še naprej ena od važnih nalog univerz pa tudi prosvetnih oblasti. Že danes pa moramo vzporedno in z močnejšim programom formirati še matematika-raziskovalca, matematika, ki bo lahko sodeloval v industriji kot član raziskovalnih ali razvojnih skupin (teamov) ali pa bo delal v računskih centrih, v nadaljnjem razvoju pa stremel k matematiku-znanstveniku.

Čeprav usmerjena v prakso, ne sme biti izobrazba takega matematika čisto prakticistična. Današnja uporabna matematika terja od matematika globoko teoretsko pripravo. Ne samo, da vstopajo v vrste uporabnih matematičnih poglavij nekatere do včeraj čisto teoretske veje, kot na primer matematična logika in v določeni meri celo teorija števil. Vse več sodobnega teoretskega znanja zahtevajo tudi nekatere klasične uporabne smeri. Navedimo le najznačilnejši primer: diferencialne enačbe in njihovo uporabo v tehniki. Z zastavljanjem vse več in več nalog, ki ne dopuščajo več linearnih približkov, ampak terjajo bistveno nelinearno obravnavo, dalje s problemi stabilnosti in optimalnosti posameznih tehniških procesov, postajajo vse pomembnejše kvalitativne metode obravnavanja diferencialnih enačb. Kvalitativne metode pa zahtevajo primerno znanje topologije.[1] Tako moremo ugotoviti, da je treba dati tudi matematiku-praktiku solidno teoretsko pripravo, da je treba večji del njegovega študija posvetiti vprav tej pripravi tako v klasičnih, kot v sodobnih smereh. Drugo, kar zahtevamo od tega matematika, so zadostne računske navade, numerične in analitične. Ob numeričnih metodah pa mora študent že na univerzi spoznati tudi sodobne računske pripomočke od mehaničnih namiznih računalnikov do elektronskih aritmetičnih (cifernih) računalnikov. To pa zahteva določeno materialno bazo na univerzah, vsaj računski praktikum; najugodneje za pouk in za delo univerzitetnih inštitutov pa bi bilo formiranje univerznih računskih centrov. Tretja zahteva, ki jo postavljamo izobrazbi matematika-praktika pa je vsaj delno seznanjenje s tehniškimi področji, ki jih utegne srečavati v praksi.

Uvajanje sodobnih matematičnih pojmov moremo organizirati po dveh poteh. Samostojno s tečaji v višjih letnikih, na primer iz funkcionalne analize, teorije mere, topologije ali matematične logike. Pomembnejše pa je uvajanje sodobnih pojmov že v okviru klasičnih vej, kar pomeni modernizacijo pouka že od samega začetka. Tako je mogoče že ob temeljih infinitezimalnega računa uvajati osnovne pojme teorije množic in splošne topologije, v skrajnem primeru pa vsaj njihovo terminologijo. Tečaji diferencialnih enačb in numerične analize pa nudijo zadosti možnosti za uvajanje mnogih pojmov funkcionalne analize. Posebno važno mesto gre tečaju linearne algebre v prvem letniku, ki mora dati algebrsko in geometrijsko pripravo za nadaljnje uvajanje funkcionalno-analitičnih pojmov. Osnovne pojme matematične logike pa je mogoče obdelati ob teoriji elektronskih računalnikov.

Ojačiti moramo tečaje numerične analize, ki naj jih spremlja čim več praktičnih vaj, uvesti predavanja iz teorije in uporabe sodobnih računskih sredstev.

[1] Za ilustracijo navedimo, da se topološki seminar v matematičnem inštitutu AN SSSR, ki dela pod vodstvom znanega topologa L. S. Pontrjagina, intenzivno ukvarja z nekaterimi problemi avtomatičnega upravljanja (posebno z optimalnostjo) in da je podobno delo v ZDA v rokah prav tako znanega topologa S. Lefschetza.

Specializacijo v posamezne tehniške smeri bi lahko dosegli s posebnimi tečaji v višjih letnikih. Taka specializacija ne zahteva samostojnih študijskih skupin.

Celotni sistem vzgajanja matematičnih kadrov pa vendar terja neko minimalno specializacijo tudi v študijskih skupinah. Morda bi bile najprimernejše tri skupine, ki naj ob koncu študija dajo

matematika-učitelja.

matematika-statistika

matematika-tehniškega in računskega delavca.

Tako izobrazbo lahko dajo naše univerze v toku prvih dveh etap (v štirih letih).

Nadaljnja izobrazba matematika, študij tretje stopnje in priprava doktorata pa zahteva poseben način dela, ki bi ga morali pravzaprav v manjšem obsegu gojiti že na nižjih etapah. Organizacija študija na tej stopnji mora zagotoviti najtesnejšo povezanost pouka z raziskovalnim delom. Osnovna karakteristika pouka na tej stopnji mora biti uvajanje v samostojno znanstveno delo. Na tem mestu moramo torej povezati diskusijo o pouku matematike z diskusijo o znanstvenem delu, o nekaterih organizacijskih vprašanjih naše matematike v celoti.

Matematika je internacionalna znanost, hkrati pa je pomemben del vsake nacionalne kulture. Internacionalna je po svoji vsebini in po svojih izraznih sredstvih, njen razvoj pa je geografsko vendarle vezan na posamezne nacionalne centre. Nivo vsakega centra pa je pogojen z zaledjem, iz katerega mu pritekajo kadri, in z zvezami z ostalimi centri. Tudi pri nas moramo povečati komunikacije matematike z ostalim svetom. V zvezo z večjimi centri moramo uvajati že mlajše ljudi in jim zagotoviti zadosti časa za obvladanje nove snovi, s katero se bodo tam srečali in za začetek samostojnega dela. Več let specializacije v mlajših letih, že ob tretji stopnji, mora postati pravilo v naši politiki štipendiranja. V to štipendiranje bi morali uvesti tudi določene elemente planiranja, da zagotovimo pravilni razvoj posameznikov in ustrezno razporeditev kadrov po posameznih področjih. Vsekakor so potrebne take vezi s svetom tudi vsakemu znanstvenemu in izobraževalnemu centru v celoti. Da bi mogel tak center pravilno delovati, gojiti znanstveno in šolsko delo, hkrati pa skrbeti za svojo povezanost z življenjem matematike v svetu, mora biti številčno zadosti krepak, da občasna odsotnost posameznikov ne bi ovirala delo v centru.

Zveze naše matematike s tujino so še vedno zelo šibke, pa tudi vezi znotraj Jugoslavije nas ne morejo zadovoljiti. Čeprav je matematika internacionalna veda, ki tudi organizacijsko teži k vse večji povezanosti, pri nas še ne moremo govoriti niti o jugoslovanski matematiki. V bodoče bomo morali še okrepiti tendence po ustanovitvi nekega jugoslovanskega matematičnega središča, ne kot antagonizma obstoječim nacionalnim centrom, temveč kot oporo njihovega razvoja, kot organ, ki bo združeval vse naše napore na matematičnem polju. Tako središče bi moglo zagotoviti stalne vezi z večjimi centri v svetu, zagotoviti sodobnost naše matematike in njeno učinkovitost v praktičnih nalogah.

V prihodnjih letih moremo pričakovati ustanavljanje večjih računskih centrov po posameznih republikah. Tudi tu bi morali in to takoj od začetka, misliti na sodelovanje v jugoslovanskem merilu, ki naj zagotovi racionalno izkoriščanje računskih sredstev in razpoložljivih kadrov.

Taka organizacija jugoslovanske matematike bi predstavljala primerno materialno in strokovno bazo za delo naših univerz.

Razen organizacije univerznega dela in njegove materialne baze moramo obravnavati še dotok kadrov na matematične skupine naših univerz. Ta dotok je danes nezadosten celo za potrebe prosvete, za potrebe industrije pa ne ustreza niti po količini niti po kakovosti dijakov, ki prihajajo na univerzo. Ugotovljeno je, da mnogi maturantje, ki bi po svojih sposobnostih morali na študij matematike, izbirajo študij na tehniških fakultetah.[2] Društva matematikov in fizikov se že danes dosti trudijo s popularizacijo matematike in z dopolnilnim izobraževanjem učencev srednjih šol. O tem bo na posvetovanju govoril poseben koreferat. Tu pa bi vprašanje pomanjkljivega dotoka kadrov na univerze povezal z drugim vprašanjem, ki je še neaktualno, ki ga pa lahko pričakujemo v nadaljnjem razvoju. To je vprašanje srednjega matematičnega kadra, programistov, računarjev za potrebe računskih centrov in statističnih zavodov.

Morda bi mogli že sedaj, v razmahu reorganizacije naših srednjih šol, ko gimnazijo vse bolj nadomeščajo srednje strokovne šole, misliti tudi na srednjo matematično šolo. Taka srednja splošno-izobraževalna šola z okrepljenim matematičnim programom ali z več matematičnimi predmeti, bi bila hkrati izvor srednjih kadrov in študentov za naše univerze. Tako šolanje bi mogli opravičiti tudi z dejstvom, da se nagnjenje do matematike najbolj razvija prav v tej starosti in da tako pridobimo tudi dragocen čas za formiranje bodočih matematikov.

V že obstoječih srednjih šolah, predvsem pa v še obstoječih gimnazijah moramo povečati vpliv učitelja matematike na prebujanje zanimanja za matematiko med dijaki. Predvsem pa moramo povečati zanimanje učiteljev samih. Seminarji za učitelje matematike, ki naj uvajajo v nova matematična in fizikalna področja, morajo postati stalna oblika dela naših društev in naših univerz. Diploma pravzaprav ne bi smela prekiniti zvez študenta z univerzo. Diplomant, profesor srednje šole, se mora občasno vračati na univerzo, da obnovi in razširi svoje znanje, da ostane v stalnem stiku z življenjem svoje stroke. Tak učitelj bo gotovo mnogo bolj in mnogo bolje vplival na svoje učence. Za tako organizacijo bi bili potrebni tudi določeni ukrepi prosvetnih oblasti, predvsem v omejevanju prekorednih honorarnih ur. Čeprav so te ure ekonomsko upravičene, vendar ovirajo razvoj profesorja in znižujejo kakovost celotnega njegovega pouka.

Podobne naloge stoje pred našimi univerzami tudi na drugi fronti, pri krepitvi vezi med matematiko in industrijo. Te vezi bi močno olajšali, če bi dali solidnejšo, sodobnejšo matematično izobrazbo tudi našim inženirjem. Zelo koristni bi bili seminarji, tečaji ali druge oblike dopolnilnega matematičnega izobraževanja za inženirje, pa tudi za naprednejše študente tehniških fakultet. Pozneje, z večjo matematizacijo drugih ved lahko pričakujemo še nove potrošnike matematike: ekonomiste, biologe, lingviste. Povsem ob strani so ostale v koreferatu še vezi z našimi najbližjimi partnerji, s fiziki. O tem pa upam, bo govoril naslednji koreferat.

France Križanič

[2] Na posvetovanju je o tem obširneje poročal bivši tajnik Zveze društev matematikov in fizikov dr. B. Rašajski. Navedel je anketo, ki jo je preteklo leto izvedla Zveza med udeleženci zveznega matematičnega tekmovanja. Niti eden od tekmovalcev ni v anketi navedel, da namerava na študij matematike, vsi so se odločali za druge poklice. Delegati iz Slovenije pa smo se vendarle lahko pohvalili, da je pri nas z osebno agitacijo le uspelo pridobiti večino naših tekmovalcev za študij tehniške matematike.

DOMAČE VESTI

MATEMATIČNA ŠOLA

Društvo matematikov in fizikov LRS je svoje vsakoletne tečaje iz matematike preimenovalo v matematično šolo, saj imamo letos kar tri tedenske tečaje, na katerih je vpisanih preko 250 dijakov gimnazij in strokovnih šol iz Ljubljane in bližnje okolice. Tečaji bodo trajali nekaj mesecev, dokler ne bo obdelana snov po spodaj navedenem programu. Tečaj vodijo naši priznani strokovnjaki, in sicer: uvod v matematiko dr. N. Prijatelj, geometrični uvod v linearno programiranje in teorijo iger dr. A. Vadnal ter infinitezimalni račun dr. I. Vidav. Okvirni program tečajev matematične šole je naslednji:

1. Naslov tečaja: Uvod v matematiko.

Množice in operacije med njimi.

Množica naravnih števil. O deljivosti. Permutacije in kombinacije. Binomski izrek.

Množica celih števil. Kongruenca števil. Cela števila po modulu m.

Razmerja celih števil in racionalna števila. Pitagorov izrek in iracionalna števila. Konstrukcije racionalnih izrazov in kvadratnih iracionalitet z ravnilom in šestilom.

Funkcije kot preslikave. Zaporedja in realne funkcije. Grafi enostavnih funkcij. Zgledi nezveznih funkcij.

Polinomi in njihove ničle. Elementarna teorija enačb. Kompleksna števila.

2. Naslov tečaja: Geometrični uvod v linearno programiranje in teorijo iger.

Linearno programiranje in teorija iger sta neki posebni in razmeroma zelo mladi panogi uporabne matematike, ki se vedno uspešneje uveljavljata pri praktičnem obravnavanju raznih gospodarskih, tehniških, strateških in drugih problemov.

Zelo na kratko povedano obsegata obe panogi po svojem bistvu računske metode, s katerimi se ocenjujejo razne možnosti pri kakih gospodarskih, tehničnih in drugih postopkih z namenom, da se najdejo najboljše rešitve.

Obe panogi prihajata kot raziskovalni metodi v poštev tam, kjer se lahko predvidi ukrepanje, ki naj bo s kakega vidika, navadno gospodarskega, optimalno. Zaradi tega ju lahko zelo koristno uporabimo n. pr. v gospodarstvu pri planiranju optimalnih dejavnosti, v tehniki pri izbiranju optimalnih tehnoloških procesov, v prometu za najbolj ekonomično razporeditev obstoječih prometnih sredstev, v agronomiji pri planiranju posevkov itd.

Z matematičnega vidika gre pri teh panogah za probleme, pri katerih želimo določiti neke vrste ekstreme, pri katerih so predpisani določeni pogoji. S teoretičnega vidika sta obe panogi razmeroma precej zahtevni in zahtevata zlasti poznavanje višje algebre in geometrije. Na nižji stopnji pa je mogoče obe panogi zelo dobro osvetliti in obravnavati s skromnimi matematičnimi sredstvi, s kakršnimi razpolaga že srednješolec.

Namen predavanj je podati slušateljem na zelo elementaren način problematiko linearnega programiranja in teorije iger in pokazati na možnosti uporabe v tehniki in gospodarstvu. Pri tem bodo zvedeli tudi marsikaj novega in zanimivega s področja analitične geometrije in verjetnostnega računa. Znanje, ki si ga bodo pridobili na tem tečaju, bo zelo razširilo splošno matematično

izobrazbo, odprlo bo možnosti nove, pri nas še malo znane uporabnosti matematike, dalo bo pa tudi mnogo znanja, ki je potrebno za razumevanje teh disciplin na višji stopnji.

3. Naslov tečaja: Infinitezimalni račun.

Pregled števil: naravna, racionalna in realna števila.

Osnovne operacije z množicami. Upodabljanje množic.

Zaporedja. Pojem konvergence. Cauchyjev pogoj. Računanje z zaporedji. Število e.

Pojem funkcije ene spremenljivke. Pregled elementarnih funkcij. Geometrična ponazoritev funkcij.

Zveznost funkcij. Limitne vrednosti funkcij. Monotone funkcije.

Pojem določenega integrala. Primeri za direktno računanje vrednosti integrala. Lastnosti določenega integrala.

Pojem odvoda. Pravila za odvajanje. Odvajanje elementarnih funkcij. Pojem diferenciala. Rolleov in Lagrangov izrek.

Pojem nedoločenega integrala (primitivna funkcija). Zveza med določenim in nedoločenim integralom ter med odvodom.

Elementarne metode za računanje integralov. Logaritem in eksponentna funkcija.

Uporaba infinitezimalnega računa: Ploščine krivočrtno omejenih likov. Prostornine vrtenin, računanje momentov. Določanje tangente na krivuljo. Hitrost in pospešek. Določanje ekstremnih vrednosti funkcij.

Društvu je tudi znano, da so v drugih krajih Slovenije razni tečaji iz matematike na posameznih šolah. Želeli bi, da nam sporočite, kakšni krožki ali tečaji so na vaši šoli in kakšna je udeležba. Na Društvo se tudi lahko obrnete po nasvete glede organizacije in vodenja tečajev. V našem Obzorniku bomo priobčili, kolikšna je ta dejavnost v Sloveniji.

Stanko Uršič

OBČNI ZBOR DRUŠTVA MATEMATIKOV IN FIZIKOV LRS

Dne 16. decembra je bil v Ljubljani redni občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS. Udeležilo se ga je okrog 60 članov.

O delovanju Društva v pretekli poslovni dobi so poročali: predsednik dr. A. Vadnal, tajnik F. Šušteršič, blagajnik V. Sladič, tehnični urednik Obzornika F. Kvaternik, S. Uršič — referent za popularizacijo matematike in fizike, F. Plevnik — referent za dvig pouka in predavanja; tov. Petrač — o delu v kranjskem okraju, tov. Lep pa o delu v Ravnah.

Iz poročil je bilo razvidno, da se je dejavnost Društva v preteklem letu zelo razmahnila. Društvo je organiziralo matematične krožke za srednješolce, ki so se jih udeleževali v velikem številu; priredilo je republiško tekmovanje matematikov-srednješolcev in najboljše tekmovalce nagradilo; najboljši med njimi so se udeležili tudi zveznega tekmovanja v Beogradu, kjer so se prav dobro izkazali. Materialno podporo za to dejavnost sta dala Svet za šolstvo in OLO Ljubljana. Razen tega izdaja Društvo knjižnico »Sigma«, v kateri je doslej izšlo že 5 knjig. Knjige je Društvo še posebej subvencioniralo, tako da jih je lahko dobilo veliko število dijakov po znižani ceni.

Obzornik za matematiko in fiziko redno izhaja, za kar gre v prvi vrsti zahvala Svetu za prosveto in kulturo ter Inštitutu »J. Stefan«, ki sta ga izdatno

podprla. Brez njune pomoči Obzornik ne bi mogel izhajati. — Vsem, ki so materialno ali kako drugače pomagali Društvu in tako omogočili njegovo delovanje, se občni zbor najprisrčneje zahvaljuje.

V debati je bila posebej poudarjena nujnost, da se v delo Društva aktivneje vključijo tudi člani iz raziskovalnih centrov in tako tesneje povežejo s tovariši v pedagoški službi.

V novi upravni odbor so bili izvoljeni: dr. A. Vadnal, predsednik; J. Povšič, podpredsednik; F. Šušteršič, tajnik; V. Sladič, blagajnik; odborniki: F. Kvaternik — za Obzornik, M. Potisek — sekcija za dvig pouka in predavanja, S. Uršič — sekcija za popularizacijo matematike in fizike, ing. M. Rosina (Inštitut »J. Stefan«); tovariši: Vrabec — zastopnik študentov, Petrač (Kranj), Bezjak (Maribor), Avsec (Murska Sobota), Lep (Ravne), Kovač (Novo mesto), Vagaja (Koper) in po en zastopnik Celja in Jesenic.

Za svetovalce pa so izbrani: F. Ahlin, dr. F. Dominko, dr. P. Gosar, dr. Jamnik, dr. F. Križanič, dr. J. Kuščer, dr. A. Moljk, F. Plevnik, dr. N. Prijatelj in dr. I. Vidav.

V revizijski odbor so bili izvoljeni: M. Lenarčič, V. Pilgram, I. Štalec; v častno razsodišče pa: F. Čemažar, I. Molinaro in dr. A. Vakselj.

France Kvaternik

UTRINEK

VESELE IN ŽALOSTNE PRI IZPITIH IZ FIZIKE

(Po enem letu na univerzi)

Arhimedov zakon. — *Vsako telo, ki je potopljeno v tekočino, izpodrine toliko tekočine, kolikršen je njegov volumen.*

Čuden stroj. — *Carnotov stroj je sestavljen iz dveh izoterm in dveh adiabat.*

Od česa je odvisna kapaciteta ploščnega kondenzatorja? — *Kapaciteta je odvisna od naboja in napetosti, ker je* $C = e/U$.

Kaj je relativna vlažnost? — *Relativna vlažnost je, ako je delni tlak vodne pare enak delnemu tlaku vode pri isti temperaturi.*

Kaj je specifična toplota? — *Specifična toplota je toplota, ki jo ima neko telo.*

Kaj je viskoznost? — *Viskoznost je sposobnost proti gibanju tekočine.*

Kaj je osvetljenost? — *Osvetljenost je osvetljenost nekega predmeta.*

Kaj je osvetljenost? — *Osvetljenost je pojav, da neko telo sveti.*

Kaj je pospešek? — *Pospešek je, če se telo giblje z neko določeno hitrostjo in če telo tisto hitrost zvišuje.*

Enota newton. — *Newton je sila 1 kilograma, ki pritiska na 1 meter.*

Kaj je permeabilnost? — *Permeabilnost je sprejemljivost snovi za magnetno polje.*

Zakaj kaže mokri termometer drugačno temperaturo kot suhi? Od česa je ta razlika odvisna? — *Mokri termometer kaže za 10 več, kajti nahaja se v vodi pri tlaku 1 atmosfere, 1 atmosfera pa ustreza 10 m vodnega stebra.*

I. K.

OBZORNIK
ZA
MATEMATIKO
IN
FIZIKO

1961 LJUBLJANA LETNIK VIII

Uredniški odbor:

Robert Blinc, Peter Gosar, France Križanič, Anton Kuhelj, Ivan Kuščer, Anton Moljk, Niko Prijatelj, Ivan Vidav, Franc Kvaternik (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov in fizikov Ljudske republike Slovenije
Natisnila tiskarna ČZP »Ljudske pravice« v Ljubljani

VSEBINA

Članki

Proporcionalni števci (A. Moljk, J. Pahor) 1
Magnetna zrcala za električno nabite delce (N. Bezič) 16
Spoj P—N (F. Herman) 20
Sile med molekulami (J. Strnad) 28
O definiciji določenega integrala (I. Vidav) 49
Limitni cikli (G. Tomšič) 55
Lastnosti rešitev problemov linearnega programiranja (A. Vadnal) 65
Jedrske reakcije v zvezdah (M. Kregar, B. Povh) 72
Radiacijski defekti (E. Pirkmajer) 79
O zgodovini matematike (S. A. Janovskaja, prevedel F. Križanič) 97
O čisto kvadratičnih formah s tremi spremenljivkami (B. Krušič) 104
Liouville-Greenova metoda za aproksimativno reševanje linearnih homogenih diferencialnih enačb drugega reda (S. Pahor) 112
Elektromagnetna struktura nukleonov (J. Strnad) 120
Vloga matematike v narovoslovju (E Wigner — S. Oblak) 145
O relacijah (N. Prijatelj) 155
Električna upornost enovalentnih kovin (M. Pintar) 162
Termoelektrično hlajenje (D. Leskovšek) 168

Novice

Ločenje izotopov s plinsko centrifugo (J. Strnad) 33
Izobrazba, zaposlitev in specializacija fizikov v ZDA (A. Moljk) 38
Mionij (J. Strnad) 128
Statistika in jezikoslovje (J. Strnad) 175

Domače vesti

Seminar izbranih poglavij moderne fizike (S. Uršič) 39
Tekmovanje mladih matematikov (S. Uršič) 41
Matematična šola (S. Uršič) 190
Občni zbor Društva matematikov in fizikov LRS (F. Kvaternik) 191

Šola

Matematika in naravoslovni predmeti v reformirani gimnaziji (S. Uršič) . 43
Deset obrazcev za razreševanje pravokotnega sfernega trikotnika (F. Ahlin) 47
Prispevek Franca Hočevarja pouku elementarne matematike (J. Povšič) . 87
Fizikalne vaje na Bežigrajski gimnaziji (F. Plevnik) 92
. . . in na Tehniški šoli za KMRL (F. Kvaternik) 93
Uspeli smo (S. Uršič) 94
Tečaj eksperimentalne fizike (F. Plevnik) 132
Predlog učnega načrta iz matematike za gimnazije 133
Matematika in fizika pri zaključnih izpitih na gimnazijah (S. Uršič) . . . 138
Problemi pouka matematike (S. Uršič) 178
O vprašanju pouka matematike na tehniških šolah (J. Povšič) 180
O vzgoji matematikov pri nas (F. Križanič) 186

Poskusi

Ponazoritev vozlov in hrbtov v piščali z žarečo žico (F. Ahlin) 46
Sesalec za prah — pomočnik pri fizikalnih poskusih (F. Ahlin) 96

Vprašanja 48, 96

Odgovori 142

Utrinek 48, 192

Iščemo fizike!

Sprejmemo več fizikov za delo v razvojnih laboratorijih in proizvodnji v redno ali honorarno zaposlitev, s polnim ali s skrajšanim delovnim časom. V poštev pridejo tudi študentje zadnjih letnikov in absolventi. Plača po dogovoru.

Delovna področja: Proizvodnja GM števcev, razvoj polvodnikov, razvoj magnetnih materialov, električne in fizikalne meritve na radijskih sestavnih delih, razvoj visokofrekvenčne keramike itd.

Zaradi dogovora se čimprej zglasite v Razvojnem sektorju Industrije za elektrozveze, Ljubljana, Vegova 2, tel. 22-675!

INDUSTRIJA ZA ELEKTROZVEZE LJUBLJANA

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin scientifique, Zagreb 1961, T. 6, No. 1.

Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1961, št. 1—4.

Fotokemijska industrija, Zagreb 1961, št. 1, 2, 3.

Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb 1961, T. 16, No. 1—2.

Gospodarski vestnik, Ljubljana 1961, št. 88—96.

Idrijski razgledi, Idrija 1961, št. 1, 2, 3.

Philip's Technische Rundschau, Eindhofen 1961/62, Nr. 1, 2.

Physics Today, New York 1961, Vol. 14, No. 6.

Proteus, Ljubljana 1960/61, št. 3, 4, 5—6, 7—8, 9—10, 1961/62, št. 1, 2, 3.

Publikacije elektrotehničkog fakulteta, Beograd 1961, No. 61—69.

Sodobna pedagogika, Ljubljana 1961, št. 7—8.

Varilna tehnika, Ljubljana 1961, št. 1, 2.

Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1961, št. 7—8.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-3-207.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227, tel. št. 23-304