



OBZORNIK

ZA MATEMATIKO

IN FIZIKO

LJUBLJANA

1 9 6 1

VIII. št. 3

V S Ě B I N A

Članki

	Stran
O zgodovini matematike (S. A. Janovskaja, prevedel F. Križanič) . . .	97
O čisto kvadratičnih formah s tremi spremenljivkami (B. Krušič) . . .	104
Liouville-Greenova metoda za aproksimativno reševanje linearnih ho- mogenih diferencialnih enačb drugega reda (S. Pahor)	112
Elektromagnetna struktura nukleonov (J. Strnad)	120

Novice

Mionij (J. Strnad)	128
------------------------------	-----

Šola

Tečaj eksperimentalne fizike (F. Plevnik)	132
Predlog učnega načrta iz matematike za gimnazije	133
Matematika in fizika pri zaključnih izpitih na gimnazijah (S. Uršič) . .	138

Odgovori

Težišče krožnega odseka (S. Černetič)	142
---	-----

C O N T E N T S

Articles

	Page
About the History of Mathematics (S. A. Janovskaja)	97
On ternary Quadratic Forms (B. Krušič)	104
Liouville-Green's Method in the Solution of Linear Second-Order Differential Equations (S. Pahor)	112
Electromagnetic Structure of Nucleons (J. Strnad)	120

News	128
----------------	-----

School	132
------------------	-----

Answers	142
-------------------	-----

O ZGODOVINI MATEMATIKE*

S. A. JANOVSKAJA

S predavanji o zgodovini matematike zaključimo na univerzi splošno matematično izobrazbo študenta. Od takih zaključnih, preglednih predavanj naravno pričakujemo, da se bomo v njih lahko ozrli na vso snov, kar smo je obdelali za šolanja, da bomo ob njej prišli do nekih splošnih zaključkov, da si bomo razjasnili zveze med deli in celoto, si predstavili potek zgodovinskega razvoja znanosti, njenih osnovnih pojmov in metod in, vsaj v najbolj splošnih obrisih, perspektivo njenega nadaljnjega razvoja.

Hkrati pa zgodovina matematike ni samo splošni, zgodovinski prikaz snovi, ki jo predavamo na univerzi. Zgodovina matematike ima svojo vsebino in metode, ima svoje, prav zanjo značilne naloge in cilje.

S čim se ukvarja zgodovina matematike? Komu in zakaj je potrebna?

Predvsem je jasno, da mora zgodovina matematike osvetliti pot, ki jo je prehodila ta znanost od zametkov prvih matematičnih pojmov in algoritmov do sodobnih vrhov matematike. Prikazati pa je ne sme statično, temveč v nastajanju in v razvoju. Odgovoriti mora na vprašanje o tem, kako so vznikli in se razvijali osnovni matematični pojmi, ideje in metode, katera osnovna obdobja je prešla matematika v svojem razvoju, kakšna je zgodovinska pot posameznih matematičnih disciplin in teorij, v kakšni zvezi s praktičnimi potrebami ljudi in z nalogami drugih ved je potekal razvoj matematike, kako se je izražala pri tem notranja logika razvoja, kakšen je bil značaj matematike pri različnih narodih, s čim so se proslavili veliki matematiki preteklosti, ki jih mora poznati vsak kulturni matematik, kakšen je bil prispevek naših domačih matematikov, ki s svojimi dosežki vzbujajo naravno čustvo patriotičnega ponosa.

Zgodovina matematike nam mora pomagati pri pojasnjevanju, kaj stimulira matematična odkritja, kakšno vlogo igrajo v razvoju matematike tehnika, naravoslovje in logika, kako se odraža ob tem razvoju ideološki boj, ki se bije okoli njenih pojmov in metod, s čim nasploh vplivata na razvoj matematike družbena baza in nadstavba, kako spet vpliva matematika na druga področja znanosti, tehnike in kulture, kakšno mesto pripada v zgodovini matematike ljudstvu in kakšna je vloga osebnosti matematika in pomen kolektivnih naporov matematičnih šol in smeri. Čeprav sodijo ta vprašanja v splošno teorijo znanosti, jih ni mogoče rešiti brez zgodovine matematike.

Tudi vrsta filozofskih vprašanj, ki so povezana z matematiko, zahteva pomoč zgodovine matematike. Taka so predvsem vprašanja o odnosu matematike do materialne realnosti, to je vprašanja o samem predmetu matematike in o dialektiki razvoja njenih osnovnih pojmov in metod.

* Vvodnaja lekcija k kursu »Istorija matematiki«, Istoriko matematičeskie issledovanija, vypusk XI, 1958, str. 193—208. Prevod je nebistveno okrajšan.

Prav zato je zgodovina matematike bistveno pomembna za razvoj matematike same. Da bi prav razumeli sedanost, se moramo ozreti v preteklost. Matematiki so od nekdaj čutili potrebo po zgodovinskem osvetljevanju vsebine tistih del, ki so pripadala njihovemu interesnemu krogu. Posebno ostra je potreba po zgodovini znanosti takrat, ko je treba korenito prečistiti osnovne pojme in metode. Znani izrek dialektičnega materializma pravi, da je logično — predelano in očiščeno zgodovinsko. Da bi se prav razgledali po logični naravi takih osnovnih pojmov matematike, kot so pojmi števila, funkcije, neskončnosti, zveznosti, prostora, množice in drugi, se moramo zateči k njihovi zgodovini. Da bi odgovorili na vprašanje, kaj je matematika, moramo poznati njeno zgodovino.

Osnovna zanimivost in hkrati osnovna težava pri raziskavah v zgodovini matematike je delo z viri. Samo sklicevanje na vire lahko dokaže pravilnost te ali one matematično-zgodovinske domneve. Viri za zgodovino matematike pa so silno pestri. To so lahko podatki, zbrani ob arheoloških izkopavanjih, jeziki prvobitnih narodov, stari napisi z egiptovskimi hieroglifi, klinopisne tablice starih Babiloncev, najrazličnejši papirusi in rokopisi, ki so se ohranili do današnjih dni, in predvsem dela klasikov matematike. Seznanjanje s takimi viri pa često pomeni več kot samo filološko težavo. Podobno, kot mora paleontolog iz ene same kosti skonstruirati vso obliko izumrle živali, mora zgodovinar matematike iz ohranjenih odlomkov sklepati o matematičnem znanju ljudi, ki so živeli že pred štirimi ali šestimi tisočletji, in o metodah, s katerimi so si svoje znanje gradili. Naloga zgodovinarja, ki iz rezultata sklepa na vso pot, ki je vodila do tega zaključka, pa mora predstavljati znatne težave, ki niso samo zgodovinskega, pač pa tudi povsem matematičnega značaja. S primeri takih težav se bomo v predavanjih srečali več kot enkrat. Tu naj le pripomnimo, da zahteva delo ob virih antične matematike nemalokrat globoko znanje moderne matematike in da so naloge, s katerimi so se ljudje srečavali že za stare Grčije, bistveno vplivale na razvoj matematike, včasih vse do naših dni in zahtevale napore največjih matematikov, preden so bile premagane.

Za pojasnilo navedimo nekaj dejstev! Spomnimo se predvsem na znamenito antično nalogo o kvadraturi kroga, ob kateri se je preskušal in brusil aparat matematične analize vse do odkritja transcendentnosti števila π (Lindemann, 1882). Pripomnimo, da je šele leta 1801 mladi Gauss rešil staro nalogo o pravih večkotnikih, ki jih je moč konstruirati s šestilom in z ravnilom (naloga o delitvi kroga). Naloga o konstrukcijah z ravnilom in šestilom, s katerimi so se toliko ubadali stari Grki, je bila lahko dokončno rešena šele s sredstvi Galoisove teorije (zgrajene leta 1832). Izredno ostre raziskave v Galoisovi teoriji je zahtevala Hipokratova naloga o izmerljivih lunicah (V. stoletje pred našim štetjem), ki jo je rešil N. G. Čebotarev (leta 1933). Šele P. L. Čebyšev je s svojimi klasičnimi deli o praštevilih (1848—1850) premaknil nalogo o porazdelitvi praštevil z mrtve točke, na kateri je bila vse od Evklida (III. st. pr. n. š.). Šele N. I. Lobačevski (1826, objavljeno 1829), J. Bolyai (objavljeno 1832) in Gauss (mesta iz dopisovanja, zlasti po 1818, objavljena šele po smrti), ki so zgradili in razvili prvo neevklidsko geometrijo, so hkrati s tem rešili nalogo, nad katero so se trudili že stari Evklidovi komentatorji. Zadostno fundacijo pa je našla ta rešitev šele v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja, ko sta F. Klein (1871) in A. Poincaré (1881) dokazala neprotislovnost geometrije Lobačevskega. Nadaljnja analiza aksiomov evklidske geometrije je bila zvezana z deli Riemanna (Riemannova eliptična geometrija 1854), Pascha (1882, Paschov aksiom) in

cele vrste geometrov s konca devetnajstega in z začetka dvajsetega stoletja. Polna aksiomatika evklidske geometrije je naloga, kateri so bile posvečene Hilbertove »Osnove geometrije« (1899). Stari paradoks o lažnivcu (Epimenid) je pokazal svoj pravi obraz šele ob najtežjih problemih matematičnih osnov, teorije množic in matematične logike, Zenonovi paradoksi pa so tesno zvezani z osnovami matematične analize, s problemi odnosov zveznega in diskretnega v matematiki in z odrazom gibanja v teh problemih.

Nič čudnega ni torej, da je treba pri reševanju nalog, ki vznikajo ob delu s takimi viri, kot so Evklidovi Elementi, dela Arhimeda, Apolonija in Diofanta, uporabljati sredstva matematične analize, teorije grup, teorije števil, neevklidove geometrije in mnogih drugih vej sodobne matematike. Razumljivo je, da se ne moremo znajti v delih klasikov matematike, ki so bližji našemu času, kdor ne obvlada sodobne matematike.

Ni treba dokazovati, da je najzanimivejši del zgodovine matematike zgodovina XIX. in XX. stoletja, zgodovina sodobne matematike. To pa je hkrati tudi najtežji del. Prav tu moramo najti potrebni obzor vse snovi, predelane na univerzi, šele tu moremo pogledati na snov s stališča celote, spoznati vse značilne posebnosti, povezane z nalogami naravoslovja in tehnike, praktično in spoznavno vrednost, osnovne težave in perspektive, prav tu moremo najbolj jasno razumeti ideološko borbo med materializmom in idealizmom ob osnovah matematike in pojasniti stališče dialektičnega materializma v teh vprašanjih. Toda prav zato, ker govorimo o najvažnejšem razdobju v zgodovini matematike, o njegovih značilnostih in objektivnih zakonih njegovega razvoja, moramo zadostno poznati tudi druga razdobja njenega razvoja. Rekli smo že, da moramo sedanost primerjati s preteklostjo, če naj jo prav razumemo; gledati jo moramo v gibanju in ne statično.

V zgodovini matematike ločimo več velikih razdobj, ki se odlikujejo z vrsto značilnih lastnosti. Predvsem se je treba seveda ustaviti ob tistem razdobju, ko so se prvič pojavili osnovni, prvinski in najvažnejši matematični pojmi in operacije. Matematika je zelo stara veda, morda najstarejša od vseh. Obstoje specialni matematični teksti, ki so stari štiri ali več tisoč let in ki so, kar moremo imeti za dokazano, snov za vaje v šoli. Toda šteti in računati s števili so znali ljudje že prej. Že prej so oblikovali take abstraktne pojme, kot so kot, ploščina, prostornina in drugi. To obdobje matematike z vso pravico imenujemo predznanstveno obdobje. Čeprav so v tem času že znani nekateri splošni algoritmi, so le-ti pojasnjeni le na posameznih primerih. Matematik tega obdobja še ne zna izoblikovati splošnega pravila. K temu obdobju prištevamo matematiko prvobitnih narodov in matematična znanja starih Egipčanov in Babiloncev.

Drugo obdobje v zgodovini matematike je zgodovina antične grške matematike. O tej smo že povedali dovolj. Zato je jasno, da gre za tako obdobje v zgodovini naše vede, da ne moremo razumeti marsičesa iz sodobne matematike, če nismo dovolj seznanjeni z njim. Ta čas je matematika že znanost z vsemi značilnimi potezami, ki jih je ohranila do današnjih dni.

Tretje veliko razdobje v zgodovini matematike, ki ga moremo imenovati obdobje elementarne matematike, obsega zgodovino raznih narodov, ne vselej iz istih vekov in stoletij: tako staro in srednjeveško Kitajsko in Indijo, narode Srednje Azije, ki so sedaj v sklopu SSSR, Arabce in srednjeveško Evropo vse do renesanse in z renesanso vred. Tu gre predvsem za izdelavo različnih računskih algoritmov, na primer za približno računanje trigonometričnih funkcij s poljubno naprej dano natančnostjo, za potrebe astronomije, pa tudi za pri-

bližno reševanje kubičnih enačb. V to obdobje sodijo tudi ruski matematični rokopisi XI.—XVI. stoletja. Zgodovina tega obdobja je pravzaprav šele sedaj postala predmet intenzivnih raziskav in novi podatki, zlasti o matematiki Srednje Azije, Kitajske in Indije, zavračajo vrsto netočnih predstav, ki so se že krepko zakoreninile med zgodovinarji matematike.

Četrto obdobje obsega zgodovino evropske matematike XVI.—XVIII. stoletja in s tem tudi delavnost Petrburške akademije znanosti v XVIII. stoletju. Po vsej pravici ga lahko imenujemo obdobje nastanka črkovnega računanja in matematične analize. To obdobje je uvedlo v matematiko spremenljive količine in splošen pojem funkcije, zadosten za obravnavo gibanja togega telesa (predvsem za potrebe dinamike in astronomije) in za potrebe posrednega merjenja količin (preko drugih količin). »Prelomnica v matematiki je bila kartezijska spremenljivka« je pisal Engels. »Temu se imamo zahvaliti, da sta vstopila v matematiko gibanje in dialektika in temu se imamo zahvaliti, da sta postala nemudoma potrebna diferencialni in integralni račun, ki sta ta čas tudi nastala in bila v splošnem in v celoti zaključena, ne pa izumljena v delih Newtona in Leibniza.« Tudi K. Marx je posvetil poseben sestavek zgodovini diferencialnega računa v tem obdobju, ko se je ukvarjal z dialektično-materialističnimi osnovami diferencialnega računa. Brez proučevanja del velikih matematikov tega obdobja: Keplerja, Cavallierija, Descartesa, Fermata, Pascala, Huygensa, Wallisa, Newtona, Leibniza, Bernoullijev (Jakoba, Ivana in Danijela), Eulerja, Lagrangea, Laplacea in drugih, ne moremo razumeti tudi matematike XIX. stoletja.

Poslednje, peto obdobje, ki obsega XIX. in XX. stoletje, smo že imenovali obdobje sodobne matematike. Zanj sta značilna pretres in razširitev vseh osnovnih pojmov matematike in to od pojma funkcije, ki ga je bilo treba posplošiti ne le za potrebe mehanike in astronomije, temveč zlasti za potrebe matematične fizike; zanj je značilna izdelava teorije specialnih funkcij (posebno eliptičnih), uvedba novih, abstraktnih, matematičnih disciplin, takih, kot sta teorija invariant, teorija grup, obsegov, kolobarjev, mrež in drugih algebrskih struktur (»sodobna algebra«), neevklidske geometrije; prav tako pa tudi teorija funkcij kompleksne spremenljivke, teorija množic in teorija funkcij realne spremenljivke, funkcionalna analiza, topologija, uveljavitev aksiomske metode in nalog osnovanja matematike, matematične logike in teorije algoritmov, matematične statistike in teorije informacij, teorije avtomatov.

Zgodovinsko-matematična problematika tega obdobja je posebno zanimiva, toda, priznati je treba, doslej nezadostno obdelana.

Naša periodizacija zgodovine matematike odraža v osnovnem vsebino matematičnih raziskav, ki so značilne za to ali ono obdobje. Seveda so nastala tudi v starogrškem obdobju dela, kakor je »Metrika« Herona Aleksandrijskega, ki je deloma bližje egiptski in babilonski matematiki, deloma pa že spominja na zbornike nalog in pravil, ki smo jih postavili v tretje obdobje. Že prej najdemo v Arhimedovih delih začetke integriranja in diferenciranja, v Apolonijevih »Presekih stožca« pa elemente analitične geometrije. V srednjeveški evropski matematiki, in to tudi v ruskih matematičnih rokopisih, naletimo na vprašanja, ki sodijo na primer v matematično teorijo zveznosti in k pojmu »nedeljivega«. To je razumljivo: V razvoju matematike, kot v vsakem razvoju, vladajo zakoni materialistične dialektike. Zaplodki novega morejo biti že v starem in matematik, ki razvija svojo vedo, se ne more izogniti srečanjem s takimi koreni in njihovimi mladikami, četudi mora govoriti o njih z izrazi srednjeveške shola-

stike, ki še posebej otežkočajo njegovo delo. Hkrati pa ne smemo zamenjavati prvih zarodkov s cvetočo rastjo. In v naši klasifikaciji upoštevamo prav to, ko govorimo o značilnostih posameznih obdobj.

Osnova naše periodizacije so torej najvažnejše matematične ideje, rezultati in metode, ki določajo vsebino del in karakteristične poteze vsakega obdobja. Ni pa težko opaziti, da so obdobja, ki smo jih našli, v splošnem in v celoti sovpadala z osnovnimi etapami v razvoju proizvodjalnih sredstev in družbenih odnosov. Izprva smo srečali matematično znanje ljudi prvobitne družbe in zgodnjih stopenj suženjskega sistema, potem smo prešli k matematiki starih Grkov, to je k matematiki najbolj razvite sužnjeposestniške družbe, tretje obdobje ustreza v glavnem fevdalnemu načinu proizvodnje, četrto pa nastajanju kapitalizma.

V nekam posebni situaciji je le poslednje, peto obdobje. To ustreza najprej razvitemu kapitalizmu, nato njegovemu višjemu stadiju — dobi imperializma in proletarskih revolucij in ko govorimo o razvoju matematike v Sovjetski zvezi — razvoju matematike v pogojih zmage socializma. Toda, kot smo že pripomnili, zgodovina sodobne matematike je doslej še nezadostno obdelana. Ogromno snov, ki pripada temu obdobju, bo treba še sistemizirati po povsem novih vidikih; dandanes je še težko govoriti o zgodovini novejših matematike nasploh, obravnavati moramo le zgodovino posameznih matematičnih vej. Toda tudi ko se ukvarjamo s kakšnim posameznim problemom iz zgodovine matematike XIX. stoletja, opazimo, da je značaj matematike v prvi polovici stoletja povsem drugačen, kakor recimo v sedemdesetih letih istega stoletja. Spremembo raznih etap v zgodovini sodobne matematike so doživljali še starejši člani iz sodobnega pokolenja matematikov. Ni še tako dolgo tega, kar smo preživeli čas, ko so igrale v razvoju matematike prvovrstno vlogo takrat še nove konceptije teorije množic in aksimatična metoda. Sedaj pa smo priče preoblikovanju matematike, ki je pogojeno z bujnim razvojem fizike in z uporabo izredno abstraktnih delov matematike — funkcionalne analize, matematične logike — kar vse služi razvoju konstrukcijskih sredstev računske matematike in gradnji računskih strojev in drugih avtomatiziranih priprav. Jasno je, da je tudi ta izmena tesno povezana z najvažnejšimi etapami razvoja proizvodjalnih sredstev in proizvodjalnih odnosov.

S stališča marksizma in leninizma je tako ustrezanje povsem razumljivo. Z razvojem proizvodjalnih sredstev družbe se komplicirajo naloge, ki jih mora reševati znanost, spreminjajo se pa tudi pogoji, v katerih dela. Rast proizvodjalnih sil in zmaga progresivnih družbenih plasti ustvarjata pogoje, ki posebno ugodno vplivajo na razvoj znanosti, gospodstvo reakcionarnih razredov in njihov svetovni nazor pa zavirata njen razvoj. Tako so ob zatonu suženjskega reda v Rimu, ki ni skoraj nič prispeval k razvoju matematike, juristi nastopali proti »zlikovcem, matematikom in njim podobnim«, določujoč, da je »prepovedano poučevati v umetnosti geometrije in sodelovati v javnih vajah v umetnosti, ki zasluži toliko graje kot matematika«. Sveti Avguštin pa je že v pogojih religioznega mračnjastva v Srednjeveški fevdalni družbi, ki je tudi zavirala razvoj znanosti, pisal, ko je matematike primerjal s čarodeji, da se mora »dober kristjan izogibati matematikov in vseh, ki se ukvarjajo s praznimi prerokbami. Preti nam realna nevarnost, da so matematiki sklenili dogovor s hudičem, da bi zatemnili um in okovali človeka v spone pekla.«¹ V našem času je borba idealizma z ma-

¹ Navajam po knjigi M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, London 1954, str. 3.

terializmom ob vprašanih metodologije matematike vse bolj pretkana in zamotana. V njej bomo govorili v zgodovini filozofskih vprašanj matematike, povezanih z razvojem njenih osnovnih pojmov in metod in s kritiko idej logizma, intuicionizma, formalizma, nominalizma in drugih, marksizmu tujih smeri sodobne filozofije matematike. Vsekakor pa velja osnovna zakonitost, ki veže zgodovino matematike z zgodovino proizvodjalnih sredstev in odnosov. Ni slučajno, da je toliko teoretičnih raziskovanj v sodobni matematiki nastalo pod vplivom zahtev sodobne fizike in računske tehnike, porojenih ob takih problemih, kot sta osvoboditev atomske energije in izstrelitev prvih sputnikov, kjer pripada sovjetski matematiki tako pomembna vloga.

Ob koncu tega kratkega uvoda bi rada povedala nekaj besedi o zgodovini same zgodovine matematike.

Potrebo po zgodovini svoje vede so čutili matematiki že v antični davnini. Prvo zgodovino matematike ki se je v odlomkih ohranila do nas, je napisal Aristotelov učenec Evdemos z Rodosa (IV. st. pred n. š.), ko še ni bilo Evklidovih »Elementov« (III. st. pred n. š.). Zahtevo po zgodovinskem prikazu idej in nalog znanosti in s tem tudi matematike, da bi bolje razumeli poti do odkrivanja resnice, je postavil Leibniz (leta 1674). Zgodovinske uvode ali orise — posebno ob spornih vprašanjih ali v boju za prioriteto — srečujemo v delih mnogih matematikov vse od XVII. stoletja dalje. Rojstvo zgodovine matematike kot samostojne vede pa lahko postavimo v XVIII. stoletje. Leta 1758 je izšla v dveh zvezkih zgodovina matematike, ki jo je napisal Francoz Montucla, druga izdaja tega dela — že v štirih zvezkih — pa je izšla za francoske meščanske revolucije (1789—1802). V ta čas (1796—1800) sodi tudi »Zgodovina matematike« nemškega matematika Kestnerja. V XIX. stoletju in pozneje vzpodbujajo zgodovinsko-matematična raziskovanja izdaje klasikov in prebujanje zanimanja za zgodovino nastajanja osnovnih matematičnih pojmov in metod. Hkrati z razvojem vrhov matematičnih teorij matematiki vse bolj čutijo potrebno po globljem razumevanju njihovih zgodovinskih in logičnih korenin. Ta čas je tudi razvozljanje egiptovskih hieroglifov in babilonskih klinopisov omogočilo zgodovinsko-matematično raziskavanje vse bolj oddaljenih obdobj človeške zgodovine. Interesna sfera zgodovinarjev matematike se vse bolj širi. V raziskave vključuje ne le dela velikih matematikov, temveč tudi brezimna matematična znanja narodov. Zapušča meje Evrope in opazi, da so v zgodovini matematike, in to tudi evropske, igrala veliko vlogo matematična znanja starega in srednjeveškega Horezma, Indije, Kitajske in drugih dežel Bližnjega in Daljnega vzhoda. V času se giblje ne le naprej — v smeri sodobne matematike, temveč sega tudi v globino stoletij in tisočletij in odkriva pri tem včasih povsem nepričakovana dejstva in nove zakonitosti.

Širi se tudi krog ljudi, ki jim je zgodovina matematike osnovna stroka. Med njimi moramo imenovati predvsem avtorja »Predavanj o zgodovini matematike« v štirih knjigah, M. Cantorja (1829—1920), dalje H. Zeuthena (1839—1920), katerega knjigi »Zgodovina matematike v starem in srednjem veku« in »Zgodovina matematike v XVI. in XVII. stoletju« sta bili prevedeni v ruščino in sta doživeli že dve sovjetski izdaji, nadalje francoskega zgodovinarja matematike P. Tanneryja (1843—1904), ruskega zgodovinarja matematike V. V. Bobynina (1849—1919), profesorja Moskovske univerze in avtorja številnih raziskav o zgodovini matematike v Rusiji (posebno ruskih matematičnih roko-

pisov) in v svetu (Od Rhindovega papirusa pa do biografij Abla, Gaussa, Weierstrassa in drugih znamenitih matematikov XIX. stoletja).

Posebno zanimive so raziskave naših sodobnikov O. Neugebauerja (njegova znana »Predavanja o zgodovini matematike v starem veku« imamo v ruskem prevodu iz l. 1937) in I. E. Hofmanna, strokovnjaka za obdobje renesanse in XVII.—XVIII. stoletja, avtorja kratke, a zelo popolne »Zgodovine matematike« v nemščini. Hkrati pa se v delo v zgodovini matematike vse bolj vključujejo matematiki sami. V tej zvezi naj omenimo francoskega geometra M. Chaslesa (1793—1880), nemškega matematika H. Hankelja (1839—1873), ki je razen obravnav o kompleksnih številskih sestavih, teoriji grup, projektivni geometriji in teoriji funkcij napisal knjigo »K zgodovini matematike v starem in srednjem veku« in brošuro »Razvoj matematike v zadnjih stoletjih«.

Posebej moramo omeniti F. Kleina (1849—1925). Njegova knjiga »Predavanja o razvoju matematike v XIX. stoletju« je izšla v ruskem prevodu leta 1937. Ne glede na izbor snovi, ki je v veliki meri pogojen z osebnimi avtorjevimi okusi in simpatijami, zasluži knjiga vso pozornost. Napisana je izredno živo in je največkrat podobna avtorjevim osebnim spominom. Hkrati pa nam pomaga, da bolje razumemo vrsto vodilnih idej v matematiki XIX. stoletja, njihovo zvezo z nalogami naravoslovja in tehnike; pomaga nam pa tudi, da si bolje predstavimo živi lik njihovih nosilcev in situacijo, v kateri so te ideje nastajale in se razvijale. (Nikakor ne delimo vselej avtorjevih pogledov, v marsikaterem primeru so nam lahko predmet vsebinsko bogate kritike.) Omeniti moramo še »Kratko zgodovino matematike« geometra D. Strujka in knjigo znanega algebraika Van-der-Vaerdena »Prebujajoča se znanost«, ki je posvečena egiptovski, babilonski in grški matematiki.

Izredno močno se je razvijala naša znanost po zmagi socializma v ZSSR. Med zgodovinarje matematike so se vključili taki znanstveniki kot A. D. Aleksandrov, P. S. Aleksandrov, N. I. Ahiezer, N. K. Bari, S. N. Bernštejn, N. G. Čebotarev, B. N. Delone, G. M. Fih tengol'c, F. I. Frankl', A. O. Gel'fond, B. V. Gnedenko, V. V. Golubev, V. L. Gončarov, V. F. Kagan, A. N. Kolmogorov, A. G. Kuroš, L. A. Ljusternik, A. I. Markuševič, I. P. Natanson, A. P. Norden, P. Ja. Polubarinova-Kočina, V. I. Smirnov, V. V. Stepanov, A. K. Suškevič, G. E. Šilov in drugi.

Na Moskovski univerzi, kjer je še v začetku našega stoletja predaval zgodovino matematike V. V. Bobynin, je po oktobrski socialistični revoluciji nastala cela šola zgodovinarjev matematike, ki se je zbrala okoli znanstveno-raziskovalnega seminarja, posvečenega zgodovini matematike, in okoli zbornikov »Istorisko-matematičeskie issledovanija«. V Sovjetski zvezi se bavi z zgodovino matematike zlasti Inštitut za naravoslovja in tehniko. Široko delo poteka ne le v Moskvi, Leningradu, Kijevu in Harkovu, temveč tudi v drugih mestih. Mnogo zgodovine matematike je izšlo ob izdajah klasikov matematike, mnogo gradiva je pa še pripravljenega za izdajo matematičnih rokopisov Karla Marxa.

Že iz teh navedb, ki pa niso izčrpne, je razvidno, kako je zraslo zanimanje za zgodovino matematike v ZSSR. V tej rasti ni nič presenetljivega. Že ko je govoril o nalogah mladinskih zvez, je Lenin izrecno poudaril, da ni mogoče postati komunist, ne da bi si obogatil svoje znanje z vsemi izsledki, ki si jih je priborilo človeštvo. Še posebno pa veljajo Leninove besede za dela klasikov znanosti in za njeno zgodovino.

Prevedel Francè Križanič

O ČISTO KVADRATIČNIH FORMAH S TREMI SPREMENLJIVKAMI

BOGDAN KRUSIČ

Čisto kvadratična forma s tremi spremenljivkami je izraz:

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2. \quad (1)$$

V pričujočem sestavku bodo koeficienti a , b in c poljubna cela števila. Če vzamemo še za x , y in z cela števila, potem je vrednost te forme tudi celo število, vendar pri poljubno izbranih koeficientih forma v splošnem ne bo zavzela vrednost vsakega celega števila. Posebno zanimiv je primer, če more forma biti enaka 0 pri primerni izbiri števil, ki niso vsa 0. Trivialen primer $x = y = z = 0$ ne štejemo v rešitev problema. Včasih pa more zavzeti vsako celo število. Tedaj pravimo, da je forma univerzalna.

Problema, rešiti enačbo $f = 0$ v celih številih, so se lotevali že stari Grki. Najpreprostejšo enačbo dobimo pri $a = b = -c = 1$. Glasi se $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Rešitve le-te so pitagorejska števila. Naša naloga pa bo rešiti splošno enačbo $f = 0$, če seveda rešitev eksistira. Prvi je ta problem rešil Legendre.

Primer forme, ki zavzame vrednost 0 v netrivialnem primeru, je

$$f_1 = x^2 - y^2 - Nz^2, \quad (2)$$

pri čemer je N poljubno celo število. Enačbo $f_1 = 0$ pišemo v obliki $(x - y)(x + y) = Nz^2$. Število Nz^2 razstavimo v dva faktorja: $Nz^2 = N_1 m^2 t \times N_2 n^2 t$, pri čemer je $N = N_1 N_2$ in $z = mnt$. Tu so N_1 , N_2 , m , n in t cela števila in t je brez kvadratnih faktorjev. Tako moremo vzeti: $x - y = N_1 m^2 t$ in $x + y = N_2 n^2 t$. Odtod pa dobimo:

$$x = \frac{1}{2}(N_2 n^2 + N_1 m^2)t, \quad y = \frac{1}{2}(N_2 n^2 - N_1 m^2)t, \quad z = mnt. \quad (3)$$

Naj pomeni simbol (a, b) največjo skupno mero števil a in b . Izberimo števila N_1 , N_2 , m in n tako, da velja še $(N_1, N_2) = (m, n) = (N_1, n) = (N_2, m) = 1$. Če je N liho število, vzamemo za m in n tudi lihi števili in $t = 1$; če pa je N sodo število in je n. pr. N_1 tudi sod, vzamemo za n liho število in $t = 2$. Tako dobimo iz (3) tri cela števila x , y in z , ki so paroma tuja, kar zapišemo v obliki:

$$(x, y) = (y, z) = (z, x) = 1 \quad (4)$$

V obeh primerih je vsaj eno od števil x in y liho. Tako dobljena števila ustrezajo enačbi $x^2 - y^2 - Nz^2 = 0$, ki ima torej neskončno mnogo rešitev.

Če število N ni deljivo s 4, je forma f_1 tudi univerzalna. Vsako celo število U je tedaj možno izraziti v obliki:

$$U = x^2 - y^2 - Nz^2, \quad (5)$$

če izberemo za x , y in z primerna cela števila. To dokažemo takole:

Naj odslej pomeni L liho število. Če vzamemo $U = L$ ali $U = 2^k L$, kjer je $k \geq 2$, je rešljivost enačbe (5) takoj razvidna. V prvem primeru vzamemo $z = 2n$, pri čemer je n poljubno celo število, in dobimo: $x^2 - y^2 = L + N(2n)^2 = L_1$. Če postavimo $x + y = L_1$ in $x - y = 1$, dobimo rešitev $x = \frac{1}{2}(L_1 + 1)$ in $y = \frac{1}{2}(L_1 - 1)$. V drugem primeru vzamemo zopet $z = 2n$; tu je $x^2 - y^2 = 2^k L + N(2n)^2 = 2^2(2^{k-2}L + Nn^2)$. Odtod vidimo, da moremo postaviti $x - y = 2$ in $x + y = 2(2^{k-2}L + Nn^2)$, odkoder sledi $x = 1 + 2^{k-2}L + Nn^2$ in $y = -1 + 2^{k-2}L + Nn^2$. Če pa je $U = 2L$, moramo vzeti $z = 2n - 1$; sedaj je $x^2 - y^2 = 2L + N(2n - 1)^2$. Če je N liho število, je $2L + N(2n - 1)^2 = L_1$ in števili x in y določimo kot v prvem primeru. Če pa je N sodo število, je izraz $2L + N(2n - 1)^2$ deljiv vsaj s 4; števili x in y pa določimo kot v drugem primeru. Tako vidimo, da moremo poljubno celo število U izraziti na neskončno načinov v obliki (5).

Vzemimo sedaj za a , b in c poljubna cela števila in ugotovimo najprej, kdaj more zavzeti forma (1) vrednost 0, oziroma, kdaj moremo rešiti enačbo $f = 0$ v celih številih.

Od števil a , b in c zahtevajmo, da niso vsa tri istega znaka, da je $abc \neq 0$ in da so si paroma tuja:

$$(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1 \quad (6)$$

Če lastnost (6) ni izpolnjena, moremo to doseči.

Pišimo $a = a_1 A^2$, $b = b_1 B^2$ in $c = c_1 C^2$, pri čemer števila a_1 , b_1 in c_1 nimajo več kvadratov kot faktorjev. S to označbo moremo prvotno enačbo $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ pisati v obliki: $a_1 (Ax)^2 + b_1 (By)^2 + c_1 (Cz)^2 = 0$. Odtod sledi rešljivost enačbe:

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 = 0, \quad (7)$$

pri čemer velja še:

$$(a_1, b_1) = (b_1, c_1) = (c_1, a_1) = 1, \quad (7^*)$$

če je rešljiva prvotna enačba. Tudi obratno je res. Če so števila u , v in w kaka rešitev enačbe (7), so števila $x = BCu$, $y = ACv$ in $z = ABw$ rešitev prvotne enačbe. Tako nam je treba reševati le še enostavnejšo enačbo (7).

Če vzamemo enačbo (7) kot kongruenco po modulu a_1 , dobimo: $-b_1 c_1 y^2 \equiv (c_1 z)^2 (a_1)$. Zaradi $(y, a_1) = 1$ eksistira tako celo število y^* , da je $yy^* \equiv 1 (a_1)$. Z množenjem prejšnje kongruence z y^{*2} dobimo: $-b_1 c_1 \equiv (c_1 y^* z)^2 (a_1)$. Z označbo $c_1 y^* z = \alpha$ moremo pisati $-b_1 c_1 \equiv \alpha^2 (a_1)$. Z analognim sklepanjem moremo dobiti še dve kongruenci po modulu b_1 in c_1 . Torej je:

$$-b_1 c_1 \equiv \alpha^2 (a_1), \quad -c_1 a_1 \equiv \beta^2 (b_1), \quad -a_1 b_1 \equiv \gamma^2 (c_1) \quad (8)$$

Če je enačba (7) rešljiva, morajo veljati pogoji (8). Naj bodo te kongruence rešljive. Ker niso vsi koeficienti enačbe istega znaka, smemo vzeti a_1 in $b_1 > 0$, c_1 pa < 0 . Pomnožimo enačbo (7) z $-c_1$ in pišimo $-c_1 = h$, $a_1 = P$, $b_1 = Q$, $-b_1 c_1 = Qh = M$ in $-a_1 c_1 = Ph = N$. Tako dobi imenovana enačba obliko:

$$Nx^2 + My^2 - z^2 = 0, \quad (9)$$

kjer velja še $N > 0$, $M > 0$ in $(N, M) = h$. Pogoji (8) pa dobe v novi označbi obliko:

$$M \equiv \alpha^2 (N), N \equiv \beta^2 (M), -PQ \equiv \gamma^2 (h). \quad (10)$$

Če je katero od števil N in M enako 1, je enačba (9) rešljiva, ker ima obliko (2). V primeru $M = N$ je netrivialen le zadnji od pogojev (10), ki se v tem primeru glasi $-1 \equiv \gamma^2 (M)$. Ta kongruenca je rešljiva tedaj in samo tedaj, kadar je število M vsota dveh kvadratov $M = u^2 + v^2$, pri čemer sta u in v celi tuji si števili (dokaz te trditve moremo najti v vsakem učbeniku teorije števil). Enačba (9) ima torej rešitev: $x = u$, $y = v$ in $z = M$.

Odslej smemo vzeti $N > M > 1$. Pišimo prvo kongruenco (10) kot enačbo:

$$\alpha^2 - M \equiv NM_1 M_1^2, \quad (11)$$

kjer naj bo število N_1 brez kvadratnih faktorjev. Število α moremo določiti še tako, da velja:

$$|\alpha| \leq \frac{1}{2} N. \quad (11^*)$$

Dalje velja $NN_1 M_1^2 > -M > -N$, odtod pa $N_1 M_1^2 > -1$ ali $N_1 M_1^2 \geq 0$. Ker pa število M nima kvadratov kot faktorjev, sledi $N_1 M_1^2 > 0$ in $N_1 \geq 1$.

Substituirajmo $z = MY + \alpha Z$, $y = \alpha Y + Z$ in $x = N_1 M_1 X$ v (9) in dobimo: $Nx^2 + My^2 - z^2 = NN_1 M_1^2 (N_1 X^2 + MY^2 - Z^2) = 0$, odtod pa:

$$N_1 X^2 + M Y^2 - Z^2 = 0 \quad (12)$$

Če je enačba (9) rešljiva, je rešljiva tudi enačba (12) in obratno. Vendar je zadnja preprostejša od prvotne, ker smo prvi koeficient zmanjšali. Res je:

$$N_1 = (\alpha^2 - M)/NM_1^2 < \frac{1}{4} N. \quad (13)$$

Iz (11) sledi:

$$M \equiv \alpha^2 (N_1). \quad (14)$$

Ker je $M = Qh$, $N = Ph$ in je h brez kvadratnih faktorjev, je α deljiv s $\bar{h}$, torej:

$$\alpha = \alpha_1 h, h \alpha_1^2 = Q + P N_1 M_1^2, h \alpha_1^2 \equiv P N_1 M_1^2 (Q). \quad (14a)$$

Druga kongruenca (10) nam da $\beta = h \beta_1$ in $P \equiv h \beta_1^2 (Q)$. Skupaj s (14a) in z upoštevanjem $(h, Q) = 1$ dobimo $\alpha_1^2 \equiv N_1 (\beta_1 M_1)^2 (Q)$. Ker število M nima kvadratnih faktorjev, velja še $(M, Q) = (\beta_1, Q) = 1$. Z analognim sklepanjem kot pri izvedbi kongruenc (8) dobimo, da je rešljiva kongruenca:

$$N_1 \equiv \beta_1^{*2} (Q). \quad (14b)$$

Iz enačbe $h \alpha_1^2 = Q P N_1 M_1^2$ dobimo kongruenco $-PQ \equiv (P M_1)^2 N_1 (\bar{h})$, z upoštevanjem zadnje kongruence (10) pa $\gamma^2 \equiv (P M_1)^2 N_1 (h)$. Ker je $(P, h) = (M_1, h) = 1$, dobimo po že večkrat uporabljenem sklepu, da je rešljiva kongruenca:

$$N_1 \equiv \beta_2^{*2} (h). \quad (14c)$$

Obe zadnji kongruenci moremo združiti v eno samo, ker velja $(Q, h) = 1$:

$$N_1 \equiv \beta^{*2} (M) \quad (14d)$$

Naj bo $H = (N_1, M)$ in pišimo $N_1 = HN^*$ in $M = HM^*$. Iz (11) sledi $\alpha = \alpha_1^* H$ in $H \alpha_1^{*2} = M^* + NN^* M_1^2$, odtod pa $-M^* N^* \equiv N (N^* M_1)^2 (H)$. Druga kongruenca (10) nam da še $N \equiv \beta^2 (H)$. Tako dobimo:

$$-M^* N^* \equiv \gamma^{*2} (H). \quad (14e)$$

Kongruence (14), (14d) in (14e) so analogne kongruencam (10). Zato se da postopek nadaljevati, pri čemer se števili M in N zmanjšujeta. Za vsako novo enačbo dobimo tri kongruence, analogne kongruencam (10). Končno pridemo do enega od primerov $M = N$ ali $M = 1$. Oba sta rešljiva, kot smo pokazali že v začetku. Tako dobimo izrek:

Naj bodo a, b in c cela števila, od katerih ni nobeno 0, niso vsa istega predznaka in so si paroma tuja. Enačba $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ je rešljiva v celih številih, ki niso vsa 0, tedaj in le tedaj, če so rešljive kongruence $-b_1 c_1 \equiv \alpha^2 (a_1)$, $-c_1 a_1 \equiv \beta^2 (b_1)$, $-a_1 b_1 \equiv \gamma^2 (c_1)$. Tu so a_1, b_1 in c_1 največji faktorji v a, b in c , ki ne vsebujejo kvadratov kot faktorjev.

Vzemimo kako rešitev prvotne enačbe $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, pri kateri so števila x, y in z paroma med seboj tuja. Kdaj ima ta enačba tako rešitev, bomo spoznali kasneje. Zaznamujmo to rešitev z $x = u, y = v$ in $z = w$. Če sedaj vzamemo enačbo $au^2 + bv^2 + cw^2 = 0$ kot kongruenco po vrsti po modulu a, b in c , dobimo z analognim postopkom kot pri izvedbi kongruenc (8) tri kongruence, ki so rešljive:

$$-ab \equiv \gamma^2 (c), \quad -bc \equiv \alpha^2 (a), \quad -ca \equiv \beta^2 (b) \quad (15)$$

Ker velja tudi $(au, bv) = (bv, cw) = (cw, au) = 1$, moramo določiti tri cela števila j, k in l tako, da ustrezajo enačbi:

$$auj + bvk + cwl = 1 \quad (16)$$

Eno od števil au, bv, cw je sodo, drugi dve pa lihi. Smemo vzeti n. pr., da je prvo sodo:

$$au \equiv 0 (2), \quad bv \equiv cw \equiv 1 (2). \quad (17)$$

V enačbi (16) moremo vzeti za j poljubno sodo število; če s tako izbranim j določimo še k in l , bo eno od teh dveh števil sodo, drugo pa liho. Očitno smemo vzeti n. pr. prvo sodo. Potem je:

$$j \equiv 0 (2), \quad k \equiv 0 (2), \quad l \equiv 1 (2). \quad (18)$$

Vpeljimo še naslednje izraze:

$$h = aj^2 + bk^2 + cl^2, \quad U = 2j - hu, \quad V = 2k - hv, \quad W = 2l - hw \quad (19)$$

in

$$2u_1 = vW - wV, \quad 2v_1 = wU - uW, \quad 2w_1 = uV - vU. \quad (20)$$

Iz (17) in (18) sledi, da je:

$$h \equiv 1 \text{ (2)}, U \equiv u, V \equiv v, W \equiv w \text{ (2)}. \quad (21)$$

Tako vidimo, da so števila u_1 , v_1 in w_1 cela. Z upoštevanjem (16) in (19) dobimo še:

$$aU^2 + bV^2 + cW^2 = 0, auU + bvV + cwW = 2 \quad (22)$$

Iz identitete $(bv^2 + cw^2)(bV^2 + cW^2) = (bvV + cwW)^2 + bc(vW - wV)^2$ in z upoštevanjem enačb (1), (20) in (22) dobimo $a^2 u^2 U^2 = (-a u^2)(-a U^2) = (2 - a u U)^2 + a b c u_1^2$. Analogno dobimo še dve taki enačbi. Če jih uredimo, dobimo:

$$b v V = 1 + a c v_1^2, c w W = 1 + a b w_1^2, a u U = 1 + b c u_1^2 \quad (23)$$

Vsota teh treh enačb da z upoštevanjem (22):

$$b c u_1^2 + a c v_1^2 + a b w_1^2 = -1. \quad (24)$$

Iz identitete $(a u U + b v V + c w W)(v W + w V) - a(w U - u W)(u V - v U) = (a u^2 + b v^2 + c w^2) V W + (a U^2 + b V^2 + c W^2) v w$ in z upoštevanjem enačb (1), (20) in (22) dobimo $w W + w V = 2 a v_1 w_1$. Podobno dobimo še dve taki enačbi:

$$v W + w V = 2 a v_1 w_1, w U + u W = 2 b w_1 u_1, u V + v U = 2 c u_1 v_1 \quad (25)$$

Oglejmo si sedaj linearno transformacijo:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(U + u) a x + \frac{1}{2}(V + v) b y + \frac{1}{2}(W + w) c z \\ Y &= \frac{1}{2}(U - u) a x + \frac{1}{2}(V - v) b y + \frac{1}{2}(W - w) c z \\ Z &= u_1 x + v_1 y + w_1 z \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Zaradi enačbe (21) so koeficienti v tej transformaciji cela števila. Zato so X , Y in Z cela števila pri poljubnih celih številih x , y in z . Enačbe (26) se dajo razrešiti na x , y in z . Rešitev se glasi:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(U + u) X - \frac{1}{2}(U - u) Y - b c u_1 Z \\ y &= \frac{1}{2}(V + v) X - \frac{1}{2}(V - v) Y - a c v_1 Z \\ z &= \frac{1}{2}(W + w) X - \frac{1}{2}(W - w) Y - a b w_1 Z \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Tudi koeficienti v tej transformaciji so cela števila. Pomnožimo zadnje enačbe po vrste z $a x$, $b y$ in $c z$ in jih seštejmo. Dobimo:

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = X^2 - Y^2 - a b c Z^2 \quad (28)$$

Če torej eksistira kaka rešitev prvotne enačbe $f = 0$ z lastnostjo (4), eksistira transformaciji (26) in (27), ki sta obrat druga druge. Transformacija (27)

prevede formo (1) na posebno formo $X^2 - Y^2 - abcZ^2$, ki je iste oblike kot forma f_1 pri (2). Če so si števila X, Y in Z paroma med seboj tuja, velja ista lastnost tudi za števila x, y in z , če je izpolnjena enačba $X^2 - Y^2 - abcZ^2 = 0$. Rešitev zadnje enačbe s predpisano lastnostjo moremo najti, kot smo že spoznali. Da so si ustrezna števila x, y, z , ki jih dobimo iz transformacij (27), med seboj tuja, dokažemo takole: Skupen faktor števil x in y je tudi v produktu cz in bi morali biti s tem faktorjem deljivi tudi števili X in Y , kot sledi iz prvih dveh enačb (26), kar ni mogoče.

Ostane le še vprašanje, kdaj ima enačba $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ rešitev z lastnostjo (4). Dokazali bomo, da sledi iz rešljivosti kongruenc (15) eksistenca take rešitve. Za ta dokaz potrebujemo še naslednji stavek:

Če ima enačba $f = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ rešitev $x = u, y = v, z = w$ z lastnostjo (4), poleg tega pa je rešljiva tudi kongruenca

$$-bc \equiv a_1^2 (ap^2), \quad (29)$$

pri čemer je p kako praštevilo, za katero velja $(bc, p) = 1$, tedaj eksistira taka rešitev x, y, z enačbe $f = 0$ z lastnostjo (4), da je

$$x \equiv 0 (p). \quad (30)$$

Dokaz: Vzemimo najprej $p = 2$. Če je $a \equiv 0 (2)$, toda $a \not\equiv 0 (8)$, velja lastnost (30) že za $x = u$. Iz kongruence $-bc \equiv a_1^2 (4a)$ namreč sledi $b + c \equiv 0 (8)$. Če vzamemo enačbo $f = 0$ kot kongruenco po modulu 8 in pišemo $x = u$, dobimo $au^2 \equiv 0 (8)$,* kar da $u \equiv 0 (2)$. Če pa je $a \equiv 0 (8)$, velja prav tako $b + c \equiv 0 (8)$. Dalje smemo uporabljati vse enačbe od (16) do (28). Vzemimo $Z = 1$ in $X - Y = 2$, $X + Y = \frac{1}{2}abc$; števila X, Y in Z so torej paroma tuja. Iz zadnje enačbe (23) sledi še $u_1 \equiv 1 (2)$ in iz prve enačbe (27) $x \equiv 0 (2)$. Če je končno $a \equiv 1 (2)$, je $-bc \equiv 1 (4)$. Iz zadnje enačbe (23) dobimo s predpostavko $u \equiv 1 (2)$, da je $u_1 \equiv 0 (2)$ in $auU \equiv 1 (4)$. Iz enačbe $X^2 - Y^2 - abcZ^2 = 0$ dobimo: $uU(X^2 - Y^2) = auU \cdot bcZ^2$ in $u(X + Y) \cdot U(X - Y) \equiv -Z^2 (4)$. Vzemimo $Z = 1, X - Y = 1$ in $X + Y = abc$. Tako izbrana števila X, Y, Z so paroma tuja. Iz zadnje kongruence dobimo $\frac{1}{2}(U + u)X - \frac{1}{2}(U - u)Y \equiv 0 (2)$, od tod pa z upoštevanjem prve enačbe (27) $x \equiv 0 (2)$. Za praštevilo 2 torej stavek velja.

Vzemimo sedaj kako liho praštevilo p , za katero velja (29) in $(bc, p) = 1$, in predpostavimo $(u, p) = 1$. Zaradi $(a_1, p) = 1$ sledi iz enačbe (29), da je $(bcu_1 + a_1, p) = 1$ pri primerno izbranem predznaku števila a_1 . Za vse rešitve ω kongruence $u\omega \equiv bcu_1 + a_1 (p)$ torej velja $(\omega, p) = 1$. Naj bo ω_0 ena izmed rešitev te kongruence. Med rešitvami $\omega = \omega_0 + kp$ so tudi take, za katere velja $\omega = \omega_0 + kp \equiv 1 (q)$ za poljubno izbrano število q z lastnostjo $(p, q) = 1$. Za tako izbran ω velja $(\omega, q) = 1$. Odtod sledi, da moremo iz prvotne kongruence določiti ω z lastnostjo $(\omega, T) = 1$, pri čemer je T poljubno izbrano celo število. Vzemimo $T = 2abc$; za primerno izbran ω velja torej $(\omega, 2abc) = 1$ in $\omega \equiv 1 (2)$. Dalje vzemimo $Z = e\omega, X + Y = e\omega^2$ in $X - Y = eabc$; če je $abc \equiv 1 (2)$, vzamemo $e = 1$, če pa je $abc \equiv 0 (2)$, pa $e = 2$. Tako določena števila

* Števili v in w nista obe sodi. Zato je kongruenca $au^2 + b(v^2 - w^2) \equiv 0 (8)$ mogoča le, če sta v in w liha in je $v^2 \equiv w^2 (8)$.

X, Y in Z so paroma tuja. Iz prve enačbe (27) sledi: $2ux = eu(u\omega^2 + Uabc - 2bcu_1\omega) = e[(u \equiv -bcu_1)^2 + bc(auU - bcu_1^2)] \equiv e(a_1^2 + bc)(p)$. odtod pa z upoštevanjem kongruence (29) končno $x \equiv 0(p)$, s čimer je izpričana veljavnost zgornjega stavka.

Lastnost (4) velja očitno za vsako rešitev enačbe (7), če velja le $(x, y, z) = 1$. Tako rešitev pa moremo dobiti z že znano redukcijo ((9) — (14e)). Zahtevajmo odslej rešljivost kongruence (15). Potem velja za vsako praštevilo p , ki je faktor v A , da je rešljiva kongruenca $-b_1c_1 \equiv a_1^2(p^2)$ in $(b_1c_1, p) = 1$. Po prejšnjem stavku eksistira rešitev x, y, z enačbe (7), ki ima lastnost (4) in $x \equiv 0(p)$; če pišemo $x = pX, y = Y$ in $z = Z$, vidimo, da ima enačba:

$$a_1p^2X^2 + b_1Y^2 + c_1Z^2 = 0 \quad (31)$$

tudi rešitev z lastnostjo (4). Opisani postopek moremo ponoviti za kak nadaljnji faktor p_1 v A , izhajajoč sedaj iz enačbe (31). Prav enako postopamo pri vseh nadaljnjih faktorjih v A , analogno pa še pri vseh faktorjih v B in C . Končno dobimo rešitev prvotne enačbe $f = 0$, ki ima lastnost (4).

Končno rešimo še vprašanje univerzalnosti forme (1). Vsa potrebna sredstva imamo že na razpolago, da dokažemo naslednji stavek:

Forma $f = ax^2 + by^2 + cz^2$, pri čemer je $abc \neq 0$, je univerzalna tedaj in le tedaj, če so izpolnjeni tile pogoji:

$$1. \text{ števila } a, b \text{ in } c \text{ niso istega predznaka,} \quad (32a)$$

$$2. (a, b) = (b, c) = (c, a) = 1, \quad (32b)$$

$$3. abc \equiv 1(2) \text{ ali } \frac{1}{2}abc \equiv 1(2), \quad (32c)$$

4. rešljive so kongruence

$$-ab \equiv \gamma^2(c), -bc \equiv \alpha^2(a), -ca \equiv \beta^2(b). \quad (32d)$$

Zadostnost teh pogojev je možno takoj potrditi. Če so izpolnjeni, eksistira rešitev u, v, w enačbe $f = 0$ z lastnostjo (4). Ta rešitev nam da transformaciji (26) in (27). Transformacija (27) prevede formo f v obliko $X^2 - Y^2 - abcZ^2$. Ta forma ima obliko (2) z $N = abc$, ki je univerzalna, ker abc ne sme biti deljivo s 4 zaradi (32c). Potemtakem je univerzalna tudi forma f .

Dokazati je le še treba potrebnost zgornjih štirih zahtev. Če bi bila a, b in c vsa istega predznaka, bi mogla forma zavzeti samo vrednosti enega predznaka. Torej mora veljati (32a). Dalje mora biti $(a, b, c) = 1$. V nasprotnem primeru ne bi mogli določiti tri cela števila x, y, z tako, da bi veljalo $f = 1$. Če imata n. pr. prva dva koeficienta a in b skupen lih prafaktor p in velja $(c, p) = 1$, vzamemo enačbo $f = U$, kjer je U poljubno celo število, kot kongruenco po modulu p . Tako dobimo kongruenco $cz^2 \equiv U(p)$, ki pa je rešljiva le v $\frac{1}{2}(p+1)$ primerih števila U po modulu p in forma ne bi bila univerzalna. Če pa je $(a, b) = 2^k$, dobimo po isti poti kot prej kongruenco $cz^2 \equiv U(4)$, če je $k \geq 2$; ta pa ni rešljiva za $U = 2$. Tako ostane le še primer $k = 1$. Pišimo $a = 2^r L_1, b = 2 L_2$ in $c = L_3$, pri čemer so L_1, L_2 in L_3 liha števila. Zdaj dobimo

enačbo $f = 2^r L_1 x^2 + 2 L_2 y^2 + L_3 z^2 = U$. Če je $r \geq 3$, vzamemo enačbo $f = U$ kot kongruenco po modulu (8): $2 L_2 y^2 + L_3 z^2 \equiv U \pmod{8}$. Ta kongruenca pa je rešljiva le v šestih primerih števila U po modulu (8), namreč za $U \equiv 0, 2 L_2, L_3, 2 L_2 + L_3, 4 L_3, 2 L_2 + 4 L_3$. Primer $r = 2$ moremo prevesti na primer $r = 1$, če vzamemo $U = 2 U_1$; tedaj mora biti število z deljivo z 2 in če pišemo $z = 2 z_1$ in krajšamo enačbo $f = U$ z 2, dobimo $f^* = 2 L_1 x^2 + L_2 y^2 + 2 L_3 z_1^2 = U_1$. Tako dobljena forma f^* mora biti tudi univerzalna, če je prvotna univerzalna, in sodi v primer $r = 1$. Tega bomo odpravili, če vzamemo za U_1 liha števila. Tedaj mora biti y liho število. Če vzamemo enačbo $f = U_1$ kot kongruenco po modulu 8, dobimo $2 (L_1 x^2 + L_3 z_1^2) + L_2 \equiv U_1 \pmod{8}$, ki mora biti rešljiva za vsako liho število U_1 po modulu 8; ker so števila $U_1 - L_2$ po modulu 8 enaka 0, 2, 4 in 6, mora biti izraz $L_1 x^2 + L_3 z_1^2$ pri primerni izbiri števil x in y kongruenten kateremukoli od števil 0, 1, 2 ali 3 po modulu 4. Vendar dobimo pri vseh možnih izbirah za števili x in z_1 po modulu 4 le ostanke 0, L_1, L_3 in $L_1 + L_3$, med katerimi sta pa vedno dva enaka: ali $L_1 \equiv L_3$ ali pa $L_1 + L_3 \equiv 0 \pmod{4}$. Torej velja tudi (32b).

Naj bo n. pr. prvi koeficient a deljiv s 4 in vzemimo formo f zopet kot kongruenco po modulu 4. Dobimo $b x^2 + c z^2 \equiv U \pmod{4}$, vendar ta kongruenca nima rešitve za vsak U , kot smo že zgoraj pokazali, kar potrjuje veljavnost zahteve (32c).

Vzemimo končno, da kaka kongruenca (32d) ni rešljiva, n. pr. — $b c \not\equiv a^2 \pmod{p}$. Tedaj eksistira neko liho praštevilo p , ki je faktor v a , za katero prav tako velja — $b c \not\equiv a^2 \pmod{p}$. Vzemimo $U = p U_1$ in pišimo formo f kot kongruenco po modulu p ; dobimo $b y^2 + c z^2 \equiv 0 \pmod{p}$ in odtod — $b c y^2 \equiv (c z)^2 \pmod{p}$. Ker kongruenca — $b c \not\equiv a^2 \pmod{p}$ ni rešljiva, sledi odtod $y \equiv z \equiv 0 \pmod{p}$; če vstavimo v formo $y = p y_1, z = p z_1, a = p a_1$ in $U = p U_1$, dobimo $a_1 x^2 + b p y_1^2 + c p z_1^2 = U_1$. Tako dobljena forma bi morala biti tudi univerzalna, kar pa ni zaradi (32b).

Vsaka univerzalna forma (1) more zavzeti vrednost 0 tako, da niso vsa tri števila x, y in z hkrati enaka 0. Obratno pa ni vsaka forma (1), za katero velj (32a), (32b) in (8), univerzalna.

Vprašanja, ki smo jih obravnavali v tem članku, je možno zastaviti za splošne kvadratične forme s tremi spremenljivkami, pa tudi za forme s poljubnim številom spremenljivk. Izkaže se, da je vsaka nedefinitna kvadratična forma z vsaj petimi spremenljivkami in poljubno izbranimi celimi koeficienti taka, da zavzame vrednost 0. Pri štirih spremenljivkah pa to vprašanje še ni v celoti rešeno, kot navaja L. E. Dickson v delu »Studies in the Theory of Numbers«. Končno je možna še razširitev v smislu pojma celega števila. Za koeficiente moremo vzeti cela števila kakega kvadratičnega obsega. Zelo preprosto moremo rešiti vprašanje, kdaj zavzame forma (1) vrednost 0, v obsegu $\sqrt{-1}$.

Literatura:

- A. Legendre: Théorie des Nombres,
- L. Dickson: Introduction to the Theory of Numbers,
- L. Dickson: Studies in the Theory of Numbers,
- H. Davenport: The higher Arithmetic,
- T. Nagell: Introduction to Number Theory.

LIIOVILLE-GREENOVA METODA ZA APROKSIMATIVNO REŠEVANJE LINEARNIH HOMOGENIH DIFERENCIALNIH ENAČB DRUGEGA REDA

SERGEJ PAHOR

1. Uvod

Rešitev diferencialne enačbe moremo redkokdaj izraziti v zaključeni obliki z znanimi funkcijami. Pogosto se zadovoljimo z aproksimacijo, če jo lahko preprosto izrazimo z znanimi funkcijami. Tudi v primerih, ko poznamo rešitev v zaključeni obliki, včasih raje računamo z bolj preprosto aproksimacijo. V tem članku je opisana posplošena Liouville-Greenova metoda, s katero lahko izračunamo aproksimacije za rešitev mnogih linearnih homogenih diferencialnih enačb drugega reda. Vsako tako enačbo moremo prevesti v standardno obliko ⁽¹⁾:

$$u'' + g(x)u = 0. \quad (1)$$

Zgled za enačbo (1) je amplitudna enačba za nihanje neenakomerno debele strune ⁽²⁾:

$$u'' + k^2 f(x)u = 0, \quad (2)$$

kjer je k^2 neko pozitivno število, ki je sorazmerno kvadratu frekvence, s katero niha struna. Funkcija $f(x)$, ki opisuje porazdelitev mase, naj bo na vsej struni, tudi na koncih, pozitivna. V tem članku se bomo omejili na enačbe oblike (2).

Rešitev enačbe za $f(x) = 1$ poznamo. Ta je:

$$u = A_1 \exp(ikx) + A_2 \exp(-ikx), \quad (3)$$

kjer sta A_1 in A_2 poljubni konstanti.

Naj bo funkcija $f(x)$ v enačbi (2) zvezno odvedljiva in blizu 1 na intervalu $a \leq x \leq b$. Domnevamo, da je za ta primer smiselno iskati rešitev enačbe (2) v obliki, ki je podobna rešitvi (3):

$$u = A_1(x) \exp[ikz(x)] + A_2(x) \exp[-ikz(x)], \quad (4)$$

kjer so $A_1(x)$, $A_2(x)$ in $z(x)$ za sedaj neznane funkcije. Če naj bosta člena v tem nastavku partikularni rešitvi enačbe (2), morata vsak zase zadoščati tej enačbi. Od tod sledi:

$$A'' + 2ikz' A' \pm ikz'' A - k^2 A (z'^2 - f) = 0. \quad (5)$$

Znak $+$ velja za $A = A_1$, znak $-$ pa za $A = A_2$. Izberimo funkcijo $z(x)$ tako, da je $z'^2 = f(x)$, zato da odpade zadnji člen v (5)! Potem je

$$z(x) = z(a) + \int_a^x f^{1/2} dx,$$

kjer po dogovoru vzamemo pozitivno vrednost korena funkcije $f(x)$. S tako izbrano funkcijo $z(x)$ dobimo za $A_1(x)$ in $A_2(x)$ enačbi:

$$\frac{A''}{2kf^{1/2}A} \pm i \left(\frac{A'}{A} + \frac{f'}{4f} \right) = 0. \quad (6)$$

Domnevamo, da smemo pri dovolj velikem k zanemariti prvi člen v obeh enačbah. Če to storimo, lahko izračunamo aproksimaciji za $A_1(x)$ in $A_2(x)$. Ti sta:

$$A_{1,2}(x) \approx B_{1,2} [f(x)]^{-1/4}, \quad (7)$$

kjer sta B_1 in B_2 poljubni konstanti. Aproksimacija rešitve enačbe (2) je potem:

$$u \approx C_1 f^{-1/4} \exp\left(ik \int_a^x f^{1/2} dx\right) + C_2 f^{-1/4} \exp\left(-ik \int_a^x f^{1/2} dx\right). \quad (8)$$

C_1 in C_2 sta poljubni konstanti.

Podobno dobimo aproksimacijo za rešitev enačbe (2) na intervalu $a \leq x \leq b$, če je funkcija $f(x)$ na tem intervalu zvezno odvedljiva in blizu -1 . Ta aproksimacija je:

$$u \approx C_3 |f|^{-1/4} \exp\left(k \int_a^x |f|^{1/2} dx\right) + C_4 |f|^{-1/4} \exp\left(-k \int_a^x |f|^{1/2} dx\right). \quad (9)$$

Dokazati se da ⁽³⁾, da je aproksimacija (8) oziroma (9) prvi člen v asimptotski vrsti za rešitev enačbe (2) za velik k na intervalu, kjer je $f(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija brez ničel.

Aproksimacijo (8) oziroma (9) sta prva odkrila leta 1837 Liouville ⁽⁴⁾ in Green ⁽⁵⁾. Če že mora imeti ta aproksimacija posebno ime, se zato spodobi, da jo imenujemo Liouville-Greenova aproksimacija. Takšno in sorodne aproksimacije so uporabili Wentzel, Kramers in Brillouin pri reševanju Schrödingerjeve enačbe. Njihov način reševanja valovne enačbe pa je že prej uporabljal Jeffreys ⁽⁶⁾. Zato imenujejo mnogi, posebno fiziki, to aproksimacijo WKB ali WKBJ aproksimacijo.

2. Prehod preko ničle funkcije $f(x)$

Naj ima funkcija $f(x)$ eno enojno ničlo x_0 na intervalu $a \leq x \leq b$. Za $x < x_0$ naj bo $f(x)$ negativna, za $x > x_0$ pa pozitivna. Razdelimo ta interval na tri podintervale $a \leq x \leq x_0 - \varepsilon$, $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ in $x_0 + \varepsilon \leq x \leq b$, kjer je ε dovolj majhno pozitivno število. Za oba prva podintervala moremo po zgornjem izračunati ustrezni aproksimaciji. Obe pa odpovesta pri $\varepsilon \rightarrow 0$. Če naj aproksimaciji (8) in (9) predstavljata isto rešitev enačbe (2) v različnih intervalih, morajo biti konstante C_1 in C_2 ter C_3 in C_4 med seboj odvisne. Kasneje bomo pokazali, da veljata v tem primeru pri prehodu iz ene strani enojne ničle na drugo tile zvezi:

$$\frac{1}{2} |f|^{-1/4} \exp\left(-k \int_x^{x_0} |f|^{1/2} dx\right) \gtrless f^{-1/4} \sin\left(k \int_{x_0}^x f^{1/2} dx + \pi/4\right) \quad (10)$$

$$|f|^{-1/4} \exp\left(\int_x^{x_0} |f|^{1/2} dx\right) \gtrless f^{-1/4} \cos\left(k \int_{x_0}^x f^{1/2} dx + \pi/4\right). \quad (11)$$

Izraz na levi strani zveze (10) ali (11) ni analitično nadaljevanje izraza na desni strani. Znak $\gtrless$ pomeni le, da rešitev, ki smo jo aproksimirali z izrazom na levi strani za $x < x_0$, aproksimiramo z izrazom na desni strani za $x > x_0$ in obratno.

Naj ima funkcija $f(x)$ v enačbi (2) po vsej osi x samo dve enojni ničli x_1 in x_2 . Med tema ničloma naj bo pozitivna, povsod drugod pa negativna. Funkcija $f(x)$ naj bo takšna, da eksistira za določene k^2 rešitev, ki gre proti nič, če gre $|x|$ čez vse meje. Kot zgled za uporabo zgornjih zvez izračunajmo

ustrezne aproksimacije. Te bomo gradili od leve proti desni. Za $x < x_1$ vzamemo:

$$u \approx \frac{1}{2} |f|^{-1/4} \exp \left(-k \int_x^{x_1} |f|^{1/2} dx \right). \quad (12)$$

Od tod dobimo iz (10). po kratkem računu aproksimacijo za $x_1 < x < x_2$ v obliki:

$$u \approx f^{-1/4} \sin \left(k \int_{x_1}^{x_2} f^{1/2} dx + \pi/2 \right) \cos \left(k \int_x^{x_2} f^{1/2} dx + \pi/4 \right) - \\ f^{-1/4} \cos \left(k \int_{x_1}^{x_2} f^{1/2} dx + \pi/2 \right) \sin \left(k \int_x^{x_2} f^{1/2} dx + \pi/4 \right). \quad (13)$$

Ustrezna aproksimacija za $x > x_2$ je potem:

$$u \approx |f|^{-1/4} \sin \left(k \int_{x_1}^{x_2} f^{1/2} dx + \pi/2 \right) \exp \left(k \int_x^{x_2} |f|^{1/2} dx \right) - \\ \frac{1}{2} |f|^{-1/4} \cos \left(k \int_{x_1}^{x_2} f^{1/2} dx + \pi/2 \right) \exp \left(-k \int_x^{x_2} |f|^{1/2} dx \right). \quad (14)$$

Ta aproksimacija pa bo šla z naraščajočim x proti nič le za diskretne vrednosti k , ki zadoščajo enačbi:

$$k \int_{x_1}^{x_2} f^{1/2} dx = (n + \frac{1}{2}) \pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Aproksimacija za k mora torej zadoščati enačbi (15), da moremo rešitev enačbe (2) za ta primer aproksimirati z (12), (13) in (14), kjer pa je prvi člen v zadnjih dveh izrazih enak nič. Te aproksimacije odpovedo pri x_1 ali x_2 . Domnevamo pa, da bodo v primerni oddaljenosti od ničel za dovolj velik k dobro aproksimirale rešitev.

Pri reševanju valovne enačbe za harmonični oscilator dobimo enačbo:

$$u'' + k^2 (1 - x^2) u = 0. \quad (16)$$

Zanimajo nas pa le tiste rešitve, ki gredo proti nič za velike $|x|$. Te rešitve so⁽⁷⁾:

$$u_n = (n! 2^n \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(z) \exp(-z^2/2), \quad (17)$$

kjer je $n = 0, 1, 2, \dots$, $z = \sqrt{2n+1} x$, H_n pa Hermitov polinom n -tega reda. Rešitev je tako normirana, da je integral funkcije u_n^2 po spremenljivki z v mejah od $-\infty$ do ∞ enak 1. Pripadajoče lastne vrednosti k_n so:

$$k_n = 2n + 1. \quad (18)$$

Primerjajmo te rešitve in pripadajoče lastne vrednosti z ustreznimi Liouville-Greenovimi aproksimacijami! Za lastne vrednosti k_n dobimo iz pojoja (15) slučajno eksaktne vrednosti, za u_n pa:

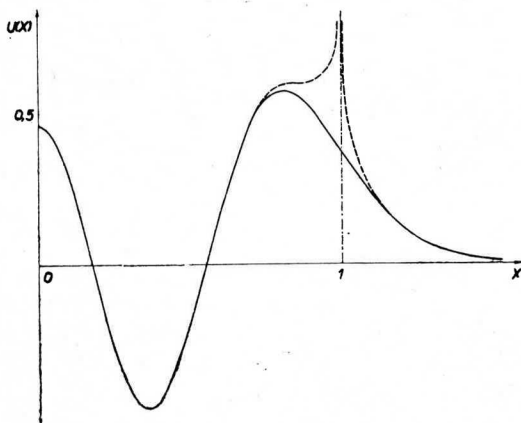
$$u_n \approx C_n (1 - x^2)^{-1/4} \sin \left[\frac{2n+1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x + \pi/2) + \pi/4 \right] \quad (19)$$

in

$$u_n \approx (-1)^n (C_n/2) (x^2 - 1)^{-1/4} (\sqrt{x^2 - 1} + x)^{\frac{2n+1}{2}} \exp \left(-\frac{2n+1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad (20)$$

$1 < x,$

kjer je C_n konstanta, ki jo moramo šele določiti. Aproksimacije za $x < -1$ nismo zapisali, ker so rešitve sode ali lihe funkcije. Ker gredo te hitro proti nič za velike x , določimo konstanto C_n tako, da se pri sodih rešitvah ujemata rešitev (17) in aproksimacija (19), pri lihih pa njihova odvoda v točki $x = 0$! Pri tako določeni konstanti C_n gredo rešitve in ustrezne aproksimacije proti nič za velike x kot $A_n x^n \exp [-(n + 1/2) x^2]$ oziroma $B_n x^n \exp [-(n + 1/2) x^2]$, kjer pa konstanti A_n in B_n nista enaki. Relativna napaka aproksimacije (20) je za velike x zato lahko velika, pač pa je absolutna napaka majhna (glej sliko 1).



Sl. 1. Diagram rešitve enačbe (16) za $n = 4$ (polno izvlečena krivulja) in ustrezna aproksimacija (črtkano izvlečena krivulja)

3. Posplošitev Liouville-Greenove metode

Aproksimaciji (8) in (9) odpoveša pri ničlah funkcije $f(x)$. Poskusimo zato dobiti novo aproksimacijo za rešitev enačbe (2), s katero bomo lahko aproksimirali rešitev tudi v ničlah funkcije $f(x)$! Pri iskanju te aproksimacije bomo šli na začetku po isti poti, po kateri smo prišli do Liouville-Greenove aproksimacije. Vzemimo, da poznamo rešitev enačbe $U'' + k^2 F(x) U = 0$: (21)

$$U = A_1 U_1(kx) + A_2 U_2(kx)$$

in iščemo rešitev enačbe (2):

$$u'' + k^2 f(x) u = 0.$$

Enačbo (21) imenujmo primerjalno enačbo, funkcijo $F(x)$ pa primerjalno funkcijo! Funkciji $F(x)$ in $f(x)$ naj imata na intervalu $a \leq x \leq b$ iste ničle in povsod isti predznak. Domnevamo, da je za ta primer smiselno izraziti rešitev enačbe (2) na tem intervalu v obliki, ki je podobna rešitvi enačbe (21):

$$u = A_1(x) U_1[kz(x)] + A_2(x) U_2[kz(x)].$$

Namesto da vnaprej določimo $z(x)$, poskusimo sedaj vnaprej določiti $A_1(x)$ in $A_2(x)$, kot je to storil Dingle⁽⁸⁾. Pri Liouville-Greenovi aproksimaciji je

$A_{1,2}(x) \approx B_{1,2} f(x)^{-1/4} = B_{1,2} (dz/dx)^{-1/2}$. To nas napelje, da si za $A_1(x)$ in $A_2(x)$ v enačbi (22) vnaprej izberemo:

$$A_{1,2}(x) = C_{1,2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1/2}. \quad (23)$$

Enačbo (22) zapišemo sedaj v krajši obliki:

$$u = \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1/2} U[kz(x)], \quad (24)$$

kjer je $z(x)$ zaenkrat še neznana funkcija. Odvajajmo izraz (24) dvakrat na x in zamenjajmo $d^2 U(kz)/d(kz)^2 \cdot z = F(z) U(kz)$ ter $U(kz) \cdot z (dz/dx)^{1/2} u(kx)$! Potem dobimo:

$$\frac{d^2 u}{u d(kx)^2} = -f(x) = -F(z) \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1/2}. \quad (25)$$

To je enačba za iskano funkcijo $z(x)$. Na prvi pogled nismo s to enačbo nič pridobili, saj nam že bolj preprosta enačba (2) dela težave. Domnevamo pa, da smemo pri dovolj velikem k^2 zanemariti zadnji člen na desni strani gornje enačbe. Potem dobimo bolj preprosto enačbo

$$f(x) = F(z) \left(\frac{dz}{dx} \right)^2, \quad (26)$$

oziroma

$$\int_{x_0}^z F(z)^{1/2} dz = \int_{x_0}^x f(x)^{1/2} dx, \quad (27)$$

ki jo včasih znamo rešiti. Vstavimo to rešitev v prej zanemarjeni člen! Če je dobljeni izraz dovolj majhen v primeri z $F(z) (dz/dx)^2$ po vsem intervalu $a \leq x \leq b$, domnevamo, da bo tudi aproksimacija

$$u \approx \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1/2} U[kz(x)] = \left(\frac{F(z)}{f(x)} \right)^{1/4} U[kz(x)], \quad (29)$$

kjer je $z(x)$ rešitev enačbe (26), dovolj dobra po vsem tem intervalu. Tako smo dobili novo, posplošeno Liouville-Greenovo aproksimacijo. Za $F(x) = \pm 1$ dobimo že znani aproksimaciji (8) oziroma (9). Omenimo, da bi do aproksimacije (29) prišli tudi po stari poti. Prednost nove poti pa se pokaže pri računanju višjih aproksimacij.

Posebej si oglejmo primer, ko ima funkcija $f(x)$ na območju, ki nas zanima, eno enojno ničlo. S primerno izbiro nove neodvisne spremenljivke moremo prevesti to ničlo v točko 0. Zato vzemimo, da ima funkcija $f(x)$ enojno ničlo v točki 0 in da je za pozitivne x pozitivna. Aproksimaciji (8) in (9) odgovesta v točki 0. Pričakujemo pa, da bomo z (29) dobro aproksimirali rešitev enačbe (2) vsaj v okolici ničle, če izberemo za primerjalno funkcijo $F(x) = x$. Rešitvi primerjalne enačbe sta Airyjevi funkciji z indeksom $1^{(9)}$. Iz praktičnih razlogov pa bomo posebej izračunali aproksimacijo za $f(x) \leq 0$ s primerjalno funkcijo $F(x) = -x$ ($x \geq 0$) in za $f(x) \geq 0$ z $F(x) = x$ ($x \geq 0$). Ustrezne rešitve bomo izrazili s primernimi kombinacijami Besslovih funkcij.

Za $F(x) = -x$ izberemo rešitvi primerjalne enačbe v obliki:

$$U_{1,2}(kx) = \left(\frac{2k}{3}\right)^{1/2} x^{1/2} [I_{-1/2}(2kx^{3/2}/3) \mp I_{1/2}(2kx^{3/2}/3)], \quad (30)$$

kjer sta $I_{-1/2}$ in $I_{1/2}$ prirejene Besslovi funkciji. Koeficient $(2k/3)^{1/2}$ je zaradi preglednejšega računa. Iz enačbe (26) dobimo:

$$\frac{3}{2} z^{1/2} = \int_0^0 |f|^{1/2} dx,$$

s tem pa aproksimaciji za rešitvi u_1 in u_2 :

$$u_1 \approx |f|^{-1/4} \mathcal{A} \left[k \int_x^0 |f|^{1/2} dx \right] \quad \text{in} \quad (31)$$

$$u_2 \approx |f|^{-1/4} \mathcal{B} \left[k \int_x^0 |f|^{1/2} dx \right]. \quad (32)$$

Pri tem smo z $\mathcal{A}(t)$ in $\mathcal{B}(t)$ zaznamovali funkciji:

$$\mathcal{A}(t) = t^{1/2} [I_{-1/2}(t) - I_{1/2}(t)] \quad \text{in} \quad (33)$$

$$\mathcal{B}(t) = t^{1/2} [I_{-1/2}(t) + I_{1/2}(t)]. \quad (34)$$

Če gre $t \rightarrow 0$, velja⁽⁹⁾:

$$\mathcal{A}(t) \approx \mathcal{B}(t) \approx \frac{2^{1/2} t^{1/4}}{(-1/2)!}, \quad (35)$$

tako da je

$$u_1(0) = u_2(0) = \frac{1}{(-1/2)!} \left[\frac{8k}{3|f'(0)|} \right]^{1/2} \quad (36)$$

Za $t \rightarrow \infty$ pa velja⁽⁹⁾:

$$\mathcal{A}(t) \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \exp(-t) \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(t) \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp(t). \quad (37)$$

Aproksimacija (31) pada, aproksimacija (32) pa narašča približno eksponentialno z naraščajočim argumentom $k \int_x^0 |f|^{1/2} dx$.

Pri $F(x) = x$ sta u strezni rešitvi primerjalne enačbe

$$U_{1,2}(kx) = \left(\frac{2k}{3}\right)^{1/2} x^{1/2} [J_{-1/2}(2kx^{3/2}/3) \pm J_{1/2}(2kx^{3/2}/3)], \quad (38)$$

tako da je

$$u_1 \approx f^{-1/4} A \left[k \int_0^x f^{1/2} dx \right] \quad \text{in} \quad (39)$$

$$u_2 \approx f^{-1/4} B \left[k \int_0^x f^{1/2} dx \right]. \quad (40)$$

Z $A(t)$ in $B(t)$ smo zaznamovali funkciji:

$$A(t) = t^{1/2} [J_{-1/2}(t) + J_{1/2}(t)] \quad \text{in} \quad (41)$$

$$B(t) = t^{1/2} [J_{-1/2}(t) - J_{1/2}(t)]. \quad (42)$$

Za $t \rightarrow 0$ velja tudi za funkciji $A(t)$ in $B(t)$ enačba (35), za $t \rightarrow \infty$ pa⁽⁹⁾:

$$A(t) \approx \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2} \sin(t + \pi/4) \quad \text{in} \quad B(t) \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \cos(t + \pi/4). \quad (43)$$

Aproksimacija (31), ki velja za $f(x) \leq 0$, preide v aproksimacijo (39), za $f(x) \geq 0$. Isto velja za aproksimaciji (32) in (40). Za velike vrednosti k in $x \neq 0$ pa dobimo iz teh aproksimacij z upoštevanjem enačb (37) in (43) že znane Liouville-Greenove aproksimacije ter zvezi (10) in (11).

V Dinglovem članku so funkcije $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $A(t)$ in $B(t)$ tabelirane v intervalu 0,05(0,05)9,15 na pet mest natančno, izračunanih pa je tudi sedem prvih ničel funkcij $A(t)$ in $B(t)$ na devet mest natančno.

Na podoben način dobimo aproksimacijo za rešitev enačbe (2) v primeru, ko ima funkcija $f(x)$ ničlo n -tega reda. Za primerjalno funkcijo vzamemo $F(x) = x^n$. Ustrezne rešitve so Airyjeve funkcije z višjimi indeksi. Za druge primerjalne funkcije glej tabelo v članku⁽⁹⁾.

Drugi zanimivi primer ko gre $f(x) \rightarrow \infty$, če gre $x \rightarrow x_0$, ki oglejmo kar na enačbi

$$u'' + k^2(1/x - 1/4)u = 0. \quad (44)$$

Iščemo tiste rešitve, ki zadoščajo robnima pogoju $u(0) = u(1) = 0$. Te rešitve so*:

$$u = x \exp(-kx/2) {}_1F_1(1 - k; 2; kx),$$

kjer je ${}_1F_1$ konfluentna hipergeometrična funkcija⁽⁹⁾. Prvemu robnemu pogoju je že zadoščeno, drugemu pa je za lastne vrednosti k , ki zadoščajo enačbi ${}_1F_1(1 - k; 2; k) = 0$. Prva lastna vrednost je 2. Za višje lastne vrednosti pa velja asimptotska ocena⁽¹⁰⁾:

$$k_n = \frac{(n + 1/4)}{\pi/3 + \sqrt{3}/2} + 0(n^{-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (45)$$

Poskusimo izraziti zgornjo rešitev z rešitvijo enačbe

$$U'' + \frac{k^2}{x} U = 0$$

* Rešitev diferencialne enačbe

$$u'' - \frac{a^2 x^{2k} + b x^{k'} + c}{(2/k)^2 x^2} u = 0$$

lahko izrazimo s konfluentno hipergeometrično funkcijo:

$$u = x \frac{1 \pm \sqrt{c k^2 + 1}}{2} \exp\left(-\frac{a x^k}{2}\right) {}_1F_1\left[\frac{b}{4a} + \frac{1 \pm \sqrt{c + 1/k^2}}{2}; 1 \pm \sqrt{c + 1/k^2}; a x^k\right].$$

pri istih robnih pogojih! Ta rešitev je: $U = x^{1/2} J_1(2 k x^{1/2})$. Z znanimi recepti hitro dobimo aproksimacijo za u :

$$u \approx \left(\frac{4 x z}{4 - x} \right)^{1/4} J_1(2 k z^{1/2}),$$

kjer je $2 z^{1/2} = (x - x^2/4)^{1/2} - 2 \arctg 2(1/x - 1/4)^{1/2} + \pi$. Iz pogoja $u(1) = 0$ dobimo za aproksimativne lastne vrednosti enačbo:

$$k_n \approx \frac{x_n}{\pi/3 + \sqrt{3}/2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

kjer smo z x_n zaznamovali ničle funkcije J_1 . Prva aproksimativna lastna vrednost je 2,0028. Napaka je 0,14 %. Napaka izraza (46) pa pada z naraščajočim n . Če vstavimo $x_n = (n + 1/4) \pi + 0(n^{-1})$, dobimo tako asimptotsko oceno (45).

4. Višje aproksimacije

Povrnimo se na enačbo (25) in jo zapišimo v spremenjeni obliki:

$$F(z) \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = f(x) + \frac{1}{k^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1/2}. \quad (47)$$

Od tod lahko izračunamo drugo aproksimacijo za $z(x)$ tako, da vstavimo v prej zanemarjeni člen rešitev enačbe (26). Za primerjalno funkcijo $F(x) = \pm 1$ se zgornja enačba glasi:

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \pm f(x) \pm \left(\frac{dz}{dx} \right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1/2}.$$

Predznak $+$ vzamemo pri $f(x) > 0$, predznak $-$ pa za $f(x) < 0$. Ker je prva aproksimacija za $(dz/dx)^2$ enaka $\pm f(x)$, dobimo tako za drugo aproksimacijo:

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \pm f \left(1 + \frac{5 f'^2 - 4 f f''}{16 k^2 f^3} \right).$$

Za druge primerjalne funkcije pa ustrezni izrazi niso več tako enostavni. Več o tem, posebej za $F(x) = x$ glej v članku⁽⁹⁾!

Literatura:

- (1) I. Vidav: Višja matematika, Ljubljana (DZS), 1951, 2. del, str. 340.
- (2) Lastna frekvenca neenakomerno debele strune, OMF, Ljubljana, 1955-56, 4, 140.
- (3) A. Erdelyi: Asymptotic Expansions, New York (Dover Publ.), 1956, str. 78.
- (4) J. Liouville: J. de Math., 1837, 2, 16 in 418.
- (5) G. Green: Trans. Camb. Phil. Soc., 1837, 6, 457-62.
- (6) E. C. Keemle: The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, New York (McGraw-Hill), 1937, str. 90.
- (7) Jahnke, Emde, Lösch: Tafeln höherer Funktionen, Stuttgart (B. G. Teubner), 1960, str. 102.
- (8) R. B. Dingle: The Method of Comparison Equation in the Solution of Linear Second-Order Differential Equations (Generalized WKB Method), Appl. sci. Res., Section B, 5, 345-367.
- (9) F. Križanič: Izbrana sredstva linearne analize za tehnike in fizike, Ljubljana (Inštitut »Jožef Stefan«), 1958, str. 229, 232 in 211.
- (10) L. J. Slater: Confluent Hypergeometric Functions (Cambridge University Press), 1960, str. 73.

ELEKTROMAGNETNA STRUKTURA NUKLEONOV

JANEZ STRNAD

Katedra za fiziko Univerze v Ljubljani

Delce, ki so tako majhni, da jih ne vidimo s prostim očesom, lahko opazujemo in merimo pod mikroskopom. Delec pa ne sme biti premajhen, kajti, če je manjši kot valovna dolžina svetlobe, ga vidimo v mikroskopu le kot temen ali svetel zmazek, ne da bi mogli razločiti njegove podrobnosti.

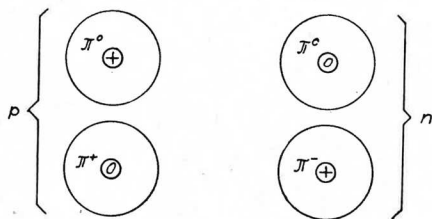
Nastanek slike v mikroskopu lahko prikažemo kot Fourierovo analizo in ponovno sintezo.¹ Ob predmetu uklonjena svetloba predstavlja Fourierovo transformiranko neke funkcije, ki opisuje strukturo predmeta. (Pri predmetu s periodično strukturo, kot n. pr. pri uklonski mreži, imamo opravka s koeficienti Fourierove vrste.⁴) Na drugi strani objektivna, v ravnini slike, se svetloba spet tako zbere, da nastane slika. (Pri upodabljanju mreže se v ravnini slike tako rekoč šestejejo členi omenjene vrste.) Zaradi končne odprtine objektivna je del Fourierove transformiranke odrezan (n. pr. del Fourierovih koeficientov manjka). To je vzrok, zaradi katerega slika nikoli ni popolnoma ostra, ampak so podrobnosti predmeta, ki so manjše kot valovna dolžina, vselej razmazane.

Če hočemo opazovati delce in njihove potankosti, ki se z navadnim mikroskopom ne razločijo več, moramo vzeti svetlobo ali kako drugo valovanje, ki ima manjšo valovno dolžino kot vidna svetloba. Ni treba, da bi vztrajali pri svetlobi, kajti uporabimo lahko tudi elektrone, protone in druge delce. Delec, ki se giblje, ima namreč, kot znano, tudi lastnosti valovanja, in sicer je valovna dolžina določena z enačbo $\lambda = h/p$. Pri tem je h Planckova konstanta, p pa gibalna količina, torej $p = mv$, če je hirost majhna v primeri s svetlobno hitrostjo. Najbolj se uporabljajo elektroni, ki nam v elektronskih mikroskopih pomagajo do posnetkov, na katerih še dobro razločimo po nekaj deset angströmov velike potankosti. To ni čudno, kajti po navedeni enačbi ustreza elektronu s kinetično energijo 10 keV valovna dolžina 0,1 Å.

Če nam ni zato, da bi neposredno videli ali fotografirali predmet, ni potreben mikroskop. Informacije o obliki in strukturi opazovanega predmeta namreč lahko dobimo — vsaj v načelu — tudi brez vsakršnih leč (optičnih ali električnih ali magnetnih). Treba je le, da izmerimo smerno porazdelitev uklonjenega valovanja, drugi korak, to je Fourierovo sintezo, pa prepustimo računarju. Informacije, ki jih tako dobimo o predmetu, so v načelu enakovredne tistim, ki jih daje mikroskop, pri pogoju, da smo zares zbrali dovolj informacij o uklonjeni svetlobi. Seveda zmoremo računsko Fourierovo sintezo samo, če struktura delca ni preveč zamotana. Pri majhnih delcih s preprosto obliko, zlasti če imajo krogelno simetrijo, pa se takšna »računska mikroskopija« velikokrat in s pridom uporablja. Po tej poti se dajo celo dobiti skromne informacije o strukturnih podrobnostih, ki so nekajkrat manjše kot valovna dolžina uporabljenega valovanja. Dalj pa ne pridemo, kajti pri zelo majhnih delcih ni smerna porazdelitev uklonjenega valovanja več odvisna od strukture delca. V načelu je torej situacija podobna kot v navadni mikroskopiji. Z vidno svetlobo dobimo neke informacije kvečjemu še o velikih molekulah. Za atome pa moramo vzeti n. pr. rentgensko svetlobo, s katero v resnici lahko izmerimo gostoto elektronskega ovoja in ugotovimo, kako je ta gostota odvisna od razdalje od jedra.

Pri elektronih nismo tako omejeni glede valovne dolžine, ker jo lahko pomanjšamo, s tem da povečamo njihovo kinetično energijo. Pri dovolj veliki kinetični energiji se odpira celo možnost, da raziščemo strukturo atomskih jeder in celo strukturo posameznih protonov in nevtronov, ki merijo v premeru samo nekaj fermijev ($1 \text{ f} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA}$). Potrebujemo pa zelo velike energije, kajti šele pri energiji 1 GeV ($= 1000 \text{ MeV}$) ustreza elektronu valovna dolžina okrog 1 f .

Težjih delcev, n. pr. protonov, devteronov ali delcev α , zaradi njihove večje mase ne bi bilo treba pospešiti do tako visokih energij, da bi imeli enako valovno dolžino. (Zares je E. Rutherford s sipanjem delcev α prvič določil razsežnosti atomskega jedra!) Vendar imajo elektroni pred težjimi delci dve veliki prednosti. Bržkone so skoraj točkasti, medtem ko motijo pri težjih delcih njihove lastne razsežnosti. Poleg tega delujejo med elektroni in nukleoni ali atomskimi jedri samo dobro znane elektromagnetne sile, ni pa jedrskih sil, ki jih še ne poznajo do kraja. Zato tudi pravimo, da s sipanjem elektronov raziskujemo elektromagnetno strukturo nukleonov in jeder.



Sl. 1. Preprosta prisposoba za zgradbo protona (levo) in nevtrona (desno) iz mezonskega oblaka (večji krog) in sredice (manjši krog). Resnično stanje nukleona si moramo predstavljati kot kombinacijo zgornjega in spodnjega stanja, kot sta prikazani na sliki¹¹

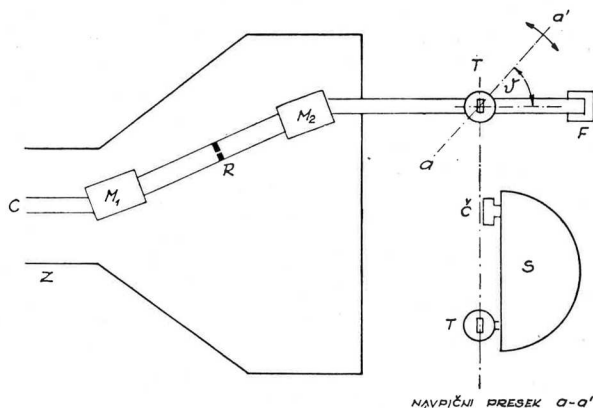
Posebno radi bi kaj več izvedeli o strukturi nukleonov, saj je to za spoznavanje teh osnovnih delcev velikega pomena. Nekaj časa je kazalo, da si smemo nukleone predstavljati kot ostro omejene homogene krogle. Vendar ta predstava ni obveljala, ker je proti njej govorilo naslednje dejstvo. Elektroni imajo spin $\frac{1}{2}$ in velja zanje Diracova teorija², iz katere sledi, da je magnetni moment elektrona enak Bohrovemu magnetonu $\mu_B = \frac{1}{2} e_0 \hbar / m_0 = 9,2 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$ (m_0 masa elektrona in $\hbar = h / 2\pi$). To se dobro ujema z rezultati poskusov. Nukleoni imajo tudi spin $\frac{1}{2}$, zato bi pričakovali, da velja tudi zanje Diracova teorija. Po tej teoriji bi moral imeti proton magnetni moment enak jedrskemu magnetonu: $\mu_j = (m_0/m) \mu_B$ (m je masa nukleona). Nevtron, ki je brez naboja, bi moral imeti magnetni moment nič. Izmerili pa so $\mu_p = 2,8 \mu_j$ za proton in $\mu_n = -1,9 \mu_j$ za nevtron. Opaženi razliki proti »normalnima« vrednostima, kot ju zahteva Diracova teorija, imenujemo anomalna magnetna momenta, zaznamovali ju bomo z μ_p' in μ_n' , torej

$$\mu_p = \mu_j + \mu_p', \quad \mu_n = \mu_n'.$$

Anomalna momenta za proton $\mu_p' = 1,8 \mu_j$ in nevtron $\mu_n' = -1,9 \mu_j$ sta po absolutni vrednosti skoraj enaka. Zato se vsiljuje misel, da imata skupen vzrok.

To je privedlo do domneve, da bi utegnili biti nukleona sestavljena iz sredice in mezonskega oblaka (sl. 1). Točkasta ali skoraj točkasta sredica nukleona naj bi se pokoravala Diracovi teoriji, mezonski oblak pa naj bi bil odgovoren za anomalni magnetni moment. Seveda je takšna predstava preveč enostavna, da bi ji smeli zaupati brez pridržka.

Ker sta sredica in oblak različno težka in različno velika, se morata razlikovati po gostoti mase. Če privzamemo, da je masa nabitega delca nosilec njegovega naboja, se morata obe področji razlikovati tudi po gostoti naboja. Domnevno neenakomerno gostoto naboja nukleonov pa lahko preverimo s sipanjem elektronov. Preprosto si lahko predstavljamo, da je gibanje elektronov skozi nabito kroglo odvisno od porazdelitve naboja v krogli.



Sl. 2. Shema naprav za merjenje sipanja elektronov na nukleonih in jedrih.³ C pospeševalna cev valovnega pospeševalnika, Z zaščitni zid, M magneti, T tarča, F Faradayeva kletka, R reža, S magnet spektrometra in $\check{C}$ števec Čerenkova.

Poskuse takšne vrste so delali z elektronskim curkom valovnega pospeševalnika Stanfordske univerze v Kaliforniji.³⁻⁷ Pospeševalnik so sproti podaljševali, tako da zmore danes že energije malo manj kot 1 GeV. Pri teh energijah je hitrost elektronov samo za nekaj 10 m/s manjša od hitrosti svetlobe. Na koncu pospeševalne cevi (sl. 2) odklonijo elektronski curek z magnetom (M_1 na sliki), da se znebijo zavornih žarkov γ . Curek gre nato skozi navpično režo, ki izreže iz njega samo tanek curek elektronov z določeno energijo. Magnetna leča (M_2) še enkrat odkloni curek in ga zbere na tarčo. Po prehodu skozi tarčo se curek neodklonjenih elektronov ujame v Faradayevi kletki. Tiste elektrone, ki se v tarči sipajo, pa analizirajo s 180-stopinjskih magnetnim spektrometrom. Elektroni z izbrano energijo zadenejo po prehodu skozi spektrometer na števec. Uporabljajo števec Čerenkova, ki zaznava samo elektrone, ne pa mionov in mezonov π .

Na opisani način merijo diferencialni sipalni presek, to je relativno število sipanih elektronov na enoto prostorskega kota in enoto energijskega intervala, v odvisnosti od sipalnega kota ϑ in v odvisnosti od energije W sipanih elektronov. Iz toka, ki teče na Faradayevo kletko, dobijo število elektronov, ki se niso sipali, tako da lahko za presek navedejo absolutne in ne samo relativnih vred-

nosti. Pri vsem tem je treba upoštevati več popravkov, predvsem dodatno izgubo energije elektronov zaradi zaviranja v tarči.

S primerjavo izmerjenih vrednosti in vrednosti, ki jih da teorija, lahko ugotovijo gostoto naboja v nukleonu. Elektron naj ima pred sipanjem gibalno količino $\mathbf{p}_0$, po sipanju pa gibalno količino $\mathbf{p}$. Pri prožnem sipanju sta obe gibalni količini, če jih preračunamo na težišče, po velikosti enaki. Zato lahko na preprošč način izračunamo velikost razlike obeh gibalnih količin $\hbar\mathbf{q}$, ki ji pravijo prenos gibalne količine,

$$\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}, \quad (1)$$

$$\hbar q = 2 k p_0 \sin \frac{1}{2} \vartheta.$$

Zadnjo enačbo, toda brez faktorja k , dobimo, če si predstavljamo $\hbar\mathbf{q}$ kot osnovnico enakokrakega trikotnika s krakoma p_0 in kotom ϑ ob vrhu. S popravnim faktorjem k , ki je takole določen

$$k = [1 + (2 W_0/mc^2) \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta]^{-1/2}$$

upoštevamo, da gibalni količini p_0 in p v resnici nista merjeni glede na težišče. (W_0 je pri tem celotna energija vpadlih elektronov.)

Diferencialni presek za prožno sipanje elektronov na točkastem delcu z nabojem Ze_0 ima obliko

$$d\sigma_0(W_0, \vartheta)/d\Omega = [(e_0^2 Z/8 \pi \varepsilon_0 W_0)^2 \sin^{-4} \frac{1}{2} \vartheta] k^2 \cdot \cos \frac{1}{2} \vartheta. \quad (2)$$

(ε_0 je influenčna konstanta). Prvi faktor predstavlja klasično Rutherfordovo formulo², zadnji, tako imenovani Mottov faktor, pa upošteva spin elektrona. Formula velja, če je energija vpadlih elektronov W_0 mnogo večja od njihove mirovne energije $m_0 c^2 \approx 0,5 \text{ MeV}$ (tako, da je $W_0 = p_0 c$), in če vrstno število Z ni preveliko.

Nukleoni pa niso točkasti; zato se izmerjena vrednost $d\sigma(W_0, \vartheta)/d\Omega$ razlikuje od izračunane vrednosti (2). Razmerje obeh vrednosti je pri majhnih prenosih gibalne količine $\hbar q$ odvisno samo od q . Za razlago poskusov vpeljemo oblikovni faktor naboja $F_1(q)$, ki je enak korenu iz tegale razmerja:

$$\frac{d\sigma(W_0, \vartheta)/d\Omega}{d\sigma_0(W_0, \vartheta)/d\Omega} = F_1^2(q). \quad (3)$$

Račun⁷ pokaže, da je tako vpeljani oblikovni faktor v zvezi z gostoto naboja $\varrho_1(r)$ (r razdalja od središča). Zvezo posreduje Fourierova transformacija

$$qF_1(q) = 4 \pi \int_0^\infty \sin(qr) \varrho_1(r) r dr, \quad (4)$$

in obratno

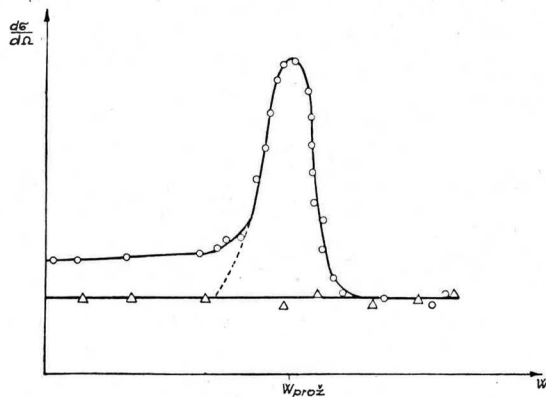
$$r \varrho_1(r) = (2 \pi)^{-1} \int_0^\infty \sin(qr) F_1(q) q dq. \quad (5)$$

Gostoto naboja lahko dobimo torej s takšnim postopkom: najprej je treba izračunati razmerje med izmerjenim in teoretičnim diferencialnim presekom za

prožno sipanje elektronov pri izbranih vrednostih W_0 in ϑ . Odtod dobimo s korenjenjem absolutno vrednost $F_1(q)$, kjer določa q enačba (1). Račun je treba ponoviti pri različnih vrednostih W_0 in ϑ , da lahko dobljeno funkcijo $F_1(q)$ vstavimo v enačbo (5), iz katere sledi gostota $\rho_1(r)$.

Omejitve postopka so te-le: enačba (2) velja, če energija W_0 ni prenizka (tudi zaradi drugih tehtnejših zahtev ni mogoče meriti pri energijah W_0 manjših kot nekaj sto MeV). Navzgor je energija W_0 omejena z zmogljivostjo naprave. Poleg tega dopušča stanfordska naprava spreminjanje sipalnega kota samo v obsegu od 35° do 145° . Zaradi vsega tega so vrednosti, ki so dostopne merjenju, precej omejene.

Posebno natančno so merili sipanje na vodiku, da bi dobili strukturo protona. Sprva so uporabljali plinaste vodikove tarče, pozneje pa so jih zamenjali z bolj preprostimi politenskimi. Toda politen vsebuje razen protonov



Sl. 3. Rezultati³ sipanja na politenski (o) in na grafitni tarči (Δ). Osenčena površina meri diferencialni presek za prožno sipanje na protonih. Rep na levi je posledica izgube energije elektronov zaradi zavornega sevanja v tarči.

še jedra ogljika, na katerih se elektroni tudi sipljejo. To upoštevajo tako, da ob nespremenjenih pogojih vstavijo namesto politenske tarče grafitno in dobljene vrednosti odštejejo (sl. 3).

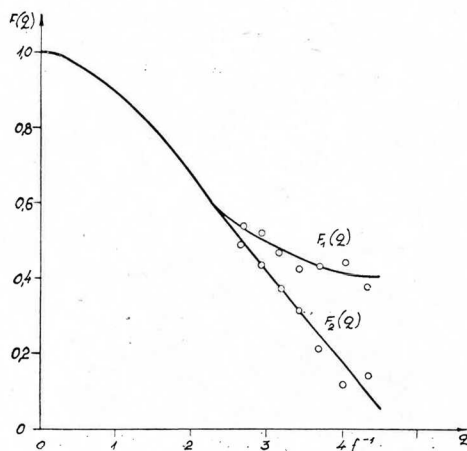
Merjenja sipanja na protonih pri velikih vrednostih q so pokazala, da razmerje (3) v resnici ni tako preprosto. Enačba (3) upošteva proton le kot delec, ki se pokorava Diracovi teoriji; z drugimi besedami, upošteva le sipanje na naboju in na njegovem normalnem magnetnem momentu. Pri večjih vrednostih za q pa je treba dodati še sipanje na anomalnem magnetnem momentu μ_p' . Potem ima enačba naslednjo bolj zapleteno obliko

$$\frac{d\sigma(W_0, \vartheta)/d\Omega}{d\sigma_0(W_0, \vartheta)/d\Omega} = a_{11} F_1^2(q) + 2 a_{12} F_1(q) F_2(q) + a_{22} F_2^2(q), \quad (6)$$

$$a_{11} = 1 + a \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \vartheta; \quad a_{12} = a (\mu_p'/\mu_j) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \vartheta; \quad a_{22} = a (\mu_p'/\mu_j)^2 (\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \vartheta)$$

Tu je $F_2(q)$ oblikovni faktor anomalnega magnetnega momenta. Le-ta je v zvezi z gostoto anomalnega magnetnega momenta $\rho_2(r)$ po enačbah, kakršni sta (4) in (5), v katerih je treba samo indeks 1 zamenjati z indeksom 2; faktor a pa je enak $\frac{1}{2} (\hbar q/mc)^2$.

Potek funkcij $F_1(q)$ in $F_2(q)$ dobijo eksperimentalno tako-le: za izbrano dvojico vrednosti W_0 in ϑ določijo levo stran enačbe (6), n. pr. za $W_0 = 500$ MeV in $\vartheta = 135^\circ$, pri čemer je po (1) $q = 3,4 \text{ f}^{-1}$. Ker so tedaj koeficienti a konstantni, predstavlja (6) v ravnini $F_1 F_2$ enačbo elipse. Meritev ponovijo pri drugi dvojici W_0 in ϑ , ki pa ima enak q , n. pr. $W_0 = 1000$ MeV, $\vartheta = 45^\circ$ in $q = 3,4 \text{ f}^{-1}$. Tako dobijo drugo elipso v ravnini $F_1 F_2$ in presečišče obeh da $F_1(q)$ in $F_2(q)$ za izbrano vrednost q , v našem primeru za $q = 3,4 \text{ f}^{-1}$. Postopek ponovijo tudi za druge vrednosti q in dobijo oba oblikovna faktorja v odvisnosti od q (sl. 4). Rezultati kažejo, da sta za majhne q oblikovna faktorja protona med seboj enaka; potem gre $F_1(q)$ proti nič, $F_2(q)$ pa proti konstantni vrednosti. To, da gre



Sl. 4. Potek obeh oblikovnih faktorjev za proton⁷. Meritve niso zelo natančne, vendar se razločno vidi, da se oblikovna faktorja razlikujeta.

$F_1(q)$ proti nič, pomeni, da je del naboja zbran v središču protona. To, da gre $F_2(q)$ proti konstantni vrednosti, pa pomeni, da je del anomalnega magnetnega momenta zbran v tanki lupini. Obe ti trditvi sledita iz enačbe (5).

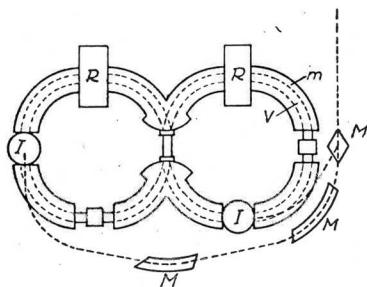
Določitev oblikovnih faktorjev nevtrona je težavnejša, ker ni čiste nevtron-ske tarče. Uporabljajo tarčo iz devterija in dobijo sipanje na nevtronu, tako da odštejejo ustrezne vrednosti za sipanje na vodik. Če bi bil nevtron čisto brez naboja, bi zanj pričakovali rezultat $F_1(q) \equiv 0$, za $|F_2(q)|$ pa približno isto odvisnost kot za proton, saj se anomalna magnetna momenta obeh delcev skoraj ujemata. Pri majhnih vrednostih q to približno velja. Merjenja pri večjih q pa so pokazala, da je $F_1(q)$ za nevtron vendarle različen od nič in da je $|F_2(q)|$ za nevtron malo večji kot za proton.

Po teh merjenjih je mogoče ločiti pri naboju nukleonov tri plasti. Sredica do radija okoli $0,5 \text{ f}$ vsebuje približno tretjino naboja. Druga plast, ki sega nekako do razdalje $1,4 \text{ f}$ od središča, vsebuje polovico naboja. Preostanek naboja pa je v tretji plasti, ki sega do 2 f in čez. Pri protonu je naboj v vseh treh plasteh pozitiven, pri nevtronu pa je v srednji plasti negativen. Ti podatki govorijo nekoliko v prid domneve o zgradbi nukleonov iz sredice in mezonskega oblaka.¹¹

V načrtu so nova merjenja. Vendar za zdaj valovni pospeševalnik v Stanfordu ne zmore energij preko 1 GeV. Nameravajo pa ga podaljšati tako, da bo dajal elektrone z energijo nekaj deset GeV. Odpirajo se še druge možnosti za poskuse. Medtem se je namreč posrečilo meriti sipanje elektronov z energijo do 1,2 GeV iz elektronskega sinkrotrona.⁹

Pri zelo velikih prenosih gibalne količine se pojavi vprašanje, kako daleč velja elektrodinamika in ali je elektron zares točkast. Za zdaj menijo, da utegne Coulombov zakon za silo med dvema elektronoma veljati nekako do razdalj, ki so večje kot 0,03 f. Bolj določen odgovor na to upajo dobiti z merjenjem sipanja elektronov na elektronih pri velikih prenosih gibalne količine.

V Stanfordu gradijo napravo za takšna merjenja (sl. 5). Sestavljata jo dve skoraj obročasti vakuumski cevi, ki ju obdajajo magneti. Gostota magnetnega polja je izbrana tako, da elektroni z energijo malo manj kot 1 GeV ravno krožijo po njiju. V ceveh bo zelo dober vakuum (10^{-9} tor), tako da skoraj ne bo



Sl. 5. Shema naprave za merjenje sipanja elektronov na elektronih¹⁰. *M* magneti, ki usmerijo elektronski curek iz valovnega pospeševalnika, *R* votlinska rezonatorja, *I* napravi za vbrizganje elektronov, ki obenem zadušita nihanje elektronov okoli ravnovesnega tira, *S* sipalna celica. Vakuumski cevi *V* obdajajo magneti *m*. Dolžina dvorane, v kateri je naprava, je okoli 35 m.

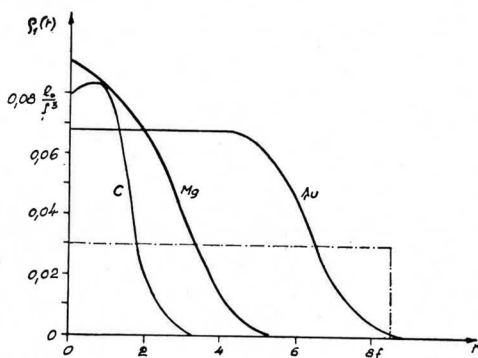
izgub zaradi trkov med elektroni in molekulami plina. Izgube zaradi zavornega sevanja bo nadoknadilo dodatno pospeševanje v votlinjskih rezonatorjih. Poleg tega bodo poskrbeli za to, da bodo elektroni čim manj nihali okoli stabilnega tira. Pod takimi pogoji bodo elektroni krožili po ceveh nekaj ur, preden se bodo zgubili iz curka.

V cevi bodo sunkovito vbrizgavali elektrone z visoko energijo iz valovnega pospeševalnika. Elektroni v obeh ceveh bodo krožili v nasprotnem smislu in se bodo v sipalni celici med seboj zadevali. S koincidenčnimi meritvami in analiziranjem energije sipanih elektronov bodo izmerili presek in ga primerjali z izračunano vrednostjo. Podobno kot pri nukleonih bo to mogoče razjasnilo postavljeno vprašanje. Napovedujejo, da bo naprava gotova že letos.

S sipanjem elektronov pa so raziskali tudi zgradbo atomskih jeder. V nasprotju s sipanjem na nukleonih nastopi pri sipanju na jedrih lahko tudi še neprožno sipanje, ko ostane jedro v vzbujenem stanju, in sipanje na posameznih nukleonih v jedru, pri čemer elektron izbije iz jedra nukleon. Za zgradbo jedra kot celote je slej ko prej odločilno prožno sipanje. Zato je postopek, ki vodi do gostote naboja $\rho_1(r)$, enak kot pri sipanju na nukleonih, le da je treba vstaviti v formulo (2) namesto mase nukleona m maso jedra in ustrezno vrstno število Z .

Do sedaj so merili le v takšnem območju, da ni bilo treba razlikovati obeh oblikovnih faktorjev.

Rezultati so ovrgli staro predstavo, da so jedra ostro omejene homogene krogle z radijem $R_0 = R_1 \sqrt[3]{A}$ (A masno število). Ugotovili so — kar so nekateri že domnevali — da gostota ni popolnoma enakomerna: v srednjem delu je dokaj konstantna, v zunanjem delu — jedrski površini — pa počasi pade na nič (sl. 6). Poleg tega je sipanje elektronov pokazalo, da so jedra nekoliko manjša, kot so do tedaj sodili na podlagi drugih merjenj, ki so dala za $R_1 = 1,45 f$. Če bi namreč računali, kot da je meja jedra tam, kjer $4\pi r^2 \rho_1(r)$ pade na polovico največje vrednosti, bi morali za konstanto R_1 vzeti 1,2 f namesto 1,45 f.



Sl. 6. Gostota naboja za jedra ogljika, magnezija in zlata³. S prekinjeno črto je zaznamovana gostota za zlato, če bi bil naboj enakomerno porazdeljen in bi računali z $R_1 = 1,45 f$.

Literatura:

1. F. Zernike: Fazni mikroskop. Obz. mat. fiz. **1**, 2 (1951).
2. I. Supek, Teorija fizika i struktura materije, Zagreb 1958.
3. R. Hofstadter, Electron Scattering and Nuclear Structure, Rev. Mod. Phys. **28**, 214 (1956).
4. D. G. Ravenhall, Electron Scattering and Nuclear Charge Distribution, Rev. Mod. Phys. **30**, 430 (1958).
5. R. Hofstadter, Comptes rendus du congrès international de physique nucleaire, Dunod, Paris 1958. S. 42.
6. R. Hofstadter, Ninth International Conference on High Energy Physics (Kiev), Academy of Science USSR, Moscow 1960. S. 355.
7. R. Hofstadter, F. Bumiller, M. Croissiaux, Phys. Rev. Letters **5**, 263 (1960).
8. M. E. Rose, The Charge Distribution in Nuclei and Scattering of High Energy Electrons, Phys. Rev. **73**, 279 (1948).
9. K. Berkelman, J. M. Cassels, D. N. Olson, R. R. Wilson, Proceedings of the Annual International Conference on High Energy Physics, University Press, Rochester 1960. S. 757.
10. W. K. H. Panofsky, ibid. S. 769.
11. H. Schopper, Die elektromagnetische Struktur des Protons und Neutrons, Phys. Blätter **17**, 316 (1961).

Op. ur.: R. Hofstadter je dobil za raziskave elektromagnetne strukture nukleonov in jeder letos (poleg R. Mössbauerja) Nobelovo nagrado za fiziko.

NOVICE

MIONIJ

Če si mislimo jedro ali elektrone v atomih nadomeščene z drugimi delci, dobimo tvorbe, ki imajo deloma podobne lastnosti kot navadni atomi. Najdalj znan je pozitronij¹, to je tvorba iz pozitrona in elektrona, ki sta povezana na podoben način kot proton in elektron v vodikovem atomu. Drug tak primer so mezonski atomi², ki nastanejo iz navadnih atomov na ta način, da namesto kakega elektrona vskoči negativen mion^{*3}.

Pozitroniju podobna tvorba nastane, če se namesto pozitrona z elektronom poveže pozitiven mion. Takšna tvorba, ki se imenuje mionij, nastane, če pozitiven mion, potem ko se zaustavi v snovi, zajame elektron. Mionij je najenostavnejši sistem, ki vsebuje mione in elektrone in je zato važen za preučevanje interakcije med tema delcema. Obstoj mionija so že dalj časa slutili, dokazali pa so ga šele pred kratkim.

Način merjenja, ki so ga pri dokazu uporabili, se je razvil pri opazovanju razpada mezona π (življenjski čas $2,6 \cdot 10^{-8}$ s),

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu,$$

in razpada miona (življenjski čas $2,2 \cdot 10^{-6}$ s),

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$$

(pri tem pomeni ν nevtrino in $\bar{\nu}$ antinevtrino). Oba razpada so posebno dobro preiskali v zvezi z raznimi posledicami neohranitve parnosti⁴. Najprej so napovedali, potem pa z meritvijo potrdili⁵, da so mioni, ki nastanejo z razpadom mezonov π v letu, polarizirani. Spin miona, ki je nastal z razpadom mezona π v letu, kaže, po domače povedano, v nasprotno smer kot hitrost miona.

Kotna porazdelitev pozitronov, ki nastanejo ob razpadu polariziranih mionov, je nesimetrična, in sicer ima obliko

$$w(\Theta) = \frac{1}{4\pi} (1 + a \cos \Theta). \quad (1)$$

Pri tem je Θ kot med smerjo mionovega spina in med smerjo izsevanega pozitrona. Konstanta a je merilo za stopnjo polarizacije mionov v trenutku njihovega razpada. V curku mionov, ki nastane z razpadom iz curka mezonov π , so zares vsi mioni na opisani način polarizirani. Pri meritvi pa morajo mione zaustaviti v tarči. Med zaustavljanjem se njihova stopnja polariziranosti zmanjša, s tem da se mioni delno dezorientirajo; pravimo, da se curek mionov depolarizira. Vzrok za depolarizacijo so lahko kratkotrajne interakcije med mioni in elektroni, ki so ali prosti ali vezani v atomih, dalj časa trajajoče interakcije med mioni in elektroni in naposled tvorba mionija.

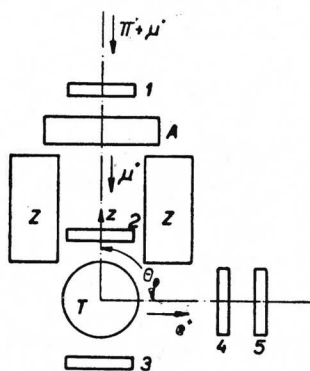
Ker mion v mioniju ni več prost, je razumljivo, da so vedno tedaj, ko so opazili veliko depolarizacijo (majhen a) sumili, da nastaja mionij. Samo, da tega

* Mion je krajši izraz za delec μ . Svoj čas so ta delec šteli med mezone. Danes pa vemo, da je zelo podoben elektronu, le da ima 207-krat težjo maso in je nestabilen.

niso mogli dokazati. Šele s posebno izdelano tehniko merjenja se je posrečilo v posebnih primerih zares dokazati nastanek mionija.

Pri poskusih uporabljajo curek mezonov π z energijo n. pr. 150 MeV, ki ga daje sinkrociklotron. Mezone π^+ , ki nastanejo v bližini tarče sinkrociklotrona, z magnetnimi lečami zberejo v curek. Curek vodi skozi absorber (A na sl. 1), kjer obtičijo mezoni π , ki še niso razpadli, medtem ko curek nastalih mionov naleti na tarčo (T). Mioni se v tarči zaustavljajo in končno tudi sami razpadejo.

Za zaznavanje mionov in pozitronov uporabljajo kot detektorje organske scintilatorje. Več zaporedno postavljenih scintilacijskih števecv sestavijo v poseben »teleskop«. Sl. 1 kaže napravo. Števca 1 in 2 sta med seboj koincidenčno, s števcem 3 pa antikoincidenčno zvezana. Suneč v teleskopu 123 sporoči, da se je mion zaustavil v tarči. Števca 4 in 5 v koincidenčni vezavi tvorita drug teleskop, ki je pripravljen za štetje samo kratek časovni interval po sunku v prvem teleskopu. Šteje n. pr. (to je odvisno od razsežnosti merske naprave)



Sl. 1. Shema naprave za merjenje kotne porazdelitve pozitronov, ki nastanejo pri razpadu mionov. 1—5 scintilatorji scintilacijskih števecv, A absorber, T tarča, Z zaščitni oklep

le sunke, ki so 0,2 do 2 μ s zakasneni proti sunkom iz prvega teleskopa. Suneč v drugem teleskopu priča, da je mion v tarči razpadel in da je nastali pozitron odletel skozi drugi teleskop.

Sprva so merili tako, da so šteli sunke v drugem teleskopu v odvisnosti od kota θ . Pri tem so iz relativnega števila prešteti sunkov dobili kotno porazdelitev in odtod velikost konstante a v enačbi (1). Pozneje pa so ta način izpopolnili⁶, tako da ni bilo treba spreminjati kota θ . V ta namen postavijo tarčo v šibko magnetno polje, ki je pravokotno na osi obeh teleskopov. Po zaustavitvi mionov začnejo njihovi spini zaradi magnetnega polja precesirati v ravnini obeh teleskopskih osi (pravokotni na smer polja) z Larmorovo frekvenco

$$\nu = 2 \mu B / \hbar. \quad (2)$$

Tu je μ magnetni moment, B gostota magnetnega polja in $\hbar$ Planckova konstanta. Magnetni moment miona je skoraj natančno⁷

$$\mu = e_0 \hbar / 4 \pi m^{\mu} = \frac{1}{207} \mu_B, \quad (3)$$

pri čemer je e_0 osnovni naboj, m_μ masa miona in μ_B Bohrov magneton, ki je približno enak lastnemu magnetnemu momentu elektrona ($\mu_B = e_0 \hbar / 4 \pi m_0 = 9,2 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$, $m_0 =$ masa elektrona).

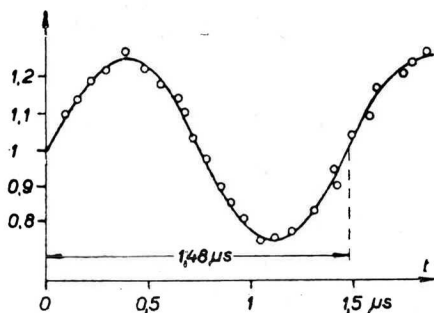
Zaradi precesije miona se kot Θ zdaj spreminja s časom: $\Theta = \Theta_0 - 2 \pi \nu t$, kjer je Θ_0 stalni kot med osema teleskopov. Verjetnost, da bo čas t med zaustavitvijo miona in njegovim razpadom, torej med sunkom iz prvega in sunkom iz drugega teleskopa, ležal med $t + dt$ in t , je potem

$$w(t) dt = dt \cdot \exp(-t/\tau) [1 + a \cos(\Theta_0 - 2 \pi \nu t)] / 2 \pi \tau.$$

Faktor $\exp(-t/\tau)$ upošteva še razpadanje mionov. V primeru, ko sta osi obeh teleskopov pravokotni druga na drugo ($\Theta_0 = \frac{1}{2} \pi$), je

$$w(t) = \exp(-t/\tau) (1 + a \sin 2 \pi \nu t) / 2 \pi \tau. \quad (4)$$

Posebna elektronska vezja — pretvorniki časa v višino sunka — lahko porazdelitev sunkov po časovnih intervalih, ki jo da naprava na sl. 1, nepo-



Sl. 2. Relativna pogostost časovnih intervalov pri prostih mionih v grafitni tarči^a. Točke so dobili z meritvijo, krivuljo pa iz enačbe (4). V obeh primerih so rezultate pomnožili z $\exp(-t/\tau)$, da so odpravljena eksponentna odvisnost. Pri vnašanju merskih rezultatov so upoštevali razne popravke. Krivulja je izračunana z naslednjimi

količinami: $a = 0,24$; perioda $\frac{1}{\nu} = \hbar / (2 \mu B) = 1,49 \mu\text{s}$, $B = 50$ gaussov.

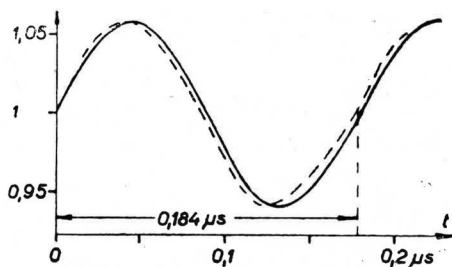
sredno posnamejo na večkanalni analizator. Na ta način so preiskali kotne porazdelitve mionov v raznih tarčah. Pokazalo se je, da je velikost konstante a , torej stopnje polarizacije, odvisna od snovi, iz katere je tarča. Vzrok depolarizacije pa s tem še ni bil pojasnjen. Treba je bilo šele izdelati posebno metodo, ki je pokazala, ali in v koliko je depolarizacija povzročena s tvorbo mionov.

Podobno kot pozitronij nastopa mionij lahko v dveh stanjih: v singletnem, ko sta spina elektrona ($\frac{1}{2}$) in miona antiparalelna in je celotni spin $I = 0$, in v tripletnem, ko sta spina obeh delcev paralelna in je celotni spin $I = 1$. Tripletno stanje ima tri podstanja: projekcija I v kaki smeri polarizacije vpadlih mionov je namreč lahko $M = -1$, $M = 0$ ali $M = 1$.

Za merjenje polarizacije z napravo na sl. 1 je uporabljen samo tisti delež mionija, ki nastane v tripletnem podstanju, pri katerem kaže spin elektrona v isti smeri kot spin prvotno longitudinalno polariziranega miona ($M = 1$). Pokaže se, da je polovica nastalega mionija v tem stanju.

Magnetni moment mionija v tripletnem stanju je enak vsoti magnetnih momentov elektrona in miona. Ker je prispevek miona malenkosten, je magnetni moment mionija približno enak μ_B , kar je do 207-krat toliko kot magnetni moment prostega miona. Ker pa je celotni spin mionija v tripletnem stanju enak 1, je pri enakem polju Larmorova frekvenca za mionij $\frac{1}{2}$. 207-krat tolikšna, kot pri prostem mionu. Vpliv vezave na življenjski čas miona je neznaten; mionij ima skoraj popolnoma isti življenjski čas kot prosti mion. Za porazdelitev po časovnih intervalih velja potemtakem pri mioniju spet enačba (4), le da je treba vanjo vstaviti drugačno Larmorovo frekvenco.

Poskusi, ki so jih napravili s trdnimi in tekočimi tarčami, niso pripeljali do odkritja mionija, kajti pokazalo se je, da depolarizacija v tem primeru ni posledica nastanka mionija. V porazdelitvi sunkov po časovnih intervalih namreč niso mogli zaslediti nobene komponente, ki bi ustrezala Larmorovi frekvenci za mionij. Šele pri poskusih s plinasto tarčo so dobili pozitiven rezultat⁸. Delali so z argonom pod tlakom 55 atm. Uporabili so šibkejšje magnetno polje kot pri poskusih s prostimi mioni in tudi uporabljeno časovno merilo je bilo drugačno. Rezultat poskusa (sl. 3) nedvoumno priča, da nastane v argonu pod opisanimi pogoji mionij. Zdi se, da se skoraj vsi v argonu zaustavljeni mioni, preden razpadejo, z elektroni spojijo v mionij.



Sl. 3. Relativna pogostost časovnih intervalov za mionij v argonu⁸. Velja isto kot pri sl. 2. Črtkana krivulja je dobljena za $a = 0,06$, $\frac{1}{\nu} = \hbar/(\mu_B B) = 0,184 \mu s$ in $B = 3,91$ gaussov, neprekinjena pa je določena s poskusi.

Neuspeh poskusov s trdnimi in tekočimi tarčami razlagajo s tem, da v trdnih in tekočih snoveh mionij sploh ne nastane ali pa po nastanku v izredno kratkem času zopet razpade v elektron in prost mion. Podrobna pojasnila, zakaj je tako, pa za zdaj še manjkajo.

J. Strnad

Literatura:

1. S. Kandare: Pozitronij, Obz. mat. fiz. 2, 181 (1952).
2. M. Pintar: Mezonski atomi, Obz. mat. fiz. 7, 49 (1960).
3. M. Gell-Mann, E. P. Rosenbaum: Osnovni delci, Obz. mat. fiz. 7, 62 (1960).
4. L. Pičman: Neohranitev parnosti, Obz. mat. fiz. 5, 157 (1957).
5. R. L. Garwin et al.: Observation of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays: The Magnetic Moment of the Free Muon, Phys. Rev. 105, 1415 (1957).
6. R. A. Swanson: Depolarization of Positive Muons in Condensed Matter. Phys. Rev. 112, 580 (1958).
7. M. Pintar: Meritev magnetnega dipolnega momenta mezonov μ , Obz. mat. fiz. 7, 129 (1960).
8. V. W. Hughes, D. W. McColm, K. Ziock, R. Prepost: Formation of Muonium and Observation of its Larmor Precession, Phys. Rev. Letters 5, 63 (1960).

TEČAJ EKSPERIMENTALNE FIZIKE

Aktiv matematikov in fizikov je priredil ob koncu preteklega šolskega leta tečaj za eksperimentiranje pri pouku fizike v osnovnih šolah. Taki tečaji so postali že kar tradicionalna oblika strokovnega izpopolnjevanja predmetnih učiteljev in profesorjev fizike, saj je bil letošnji že peti po vrsti.

Program letošnjega tečaja se ni bistveno razlikoval od prejšnjih. Pripravili smo kakih 250 eksperimentov iz vseh področij fizike približno na tak način, kot so opisani v brošuri »Zbirka poskusov iz fizike«, ki je izšla lansko leto. Eksperimentov nismo spreminjali predvsem zato, ker smo želeli, da bi se tečajniki med delom lahko posluževali omenjene brošure, ne da bi pri tem tratili čas za urejanje lastnih zapiskov.

Zaradi skopo odmrjenega časa, na razpolago smo imeli le šest dni, je bil tečaj za udeležence zelo naporen. Vsak dan dopoldne so imeli dve uri predavanj, ter štiri do pet ur eksperimentalnega dela, popoldne pa prav tako predavanja ali ekskurzije. Naj navedem glavne teme predavanj: pouk mehanike in pregled enot (F. Ahlin), metodične pripombe k pouku elektrike (E. Bračko), osnove elektronike in atomske fizike v osnovni šoli (F. Kvaternik), fizikalne vaje (I. Štalec), demonstracije domačih fizikalnih zbirk (F. Plevnik) in razgovor o pouku fizike v osnovni šoli po novih učnih načrtih (S. Uršič).

Kljub obsežnemu programu smo vendarle našli toliko časa, da smo si med tečajem ogledali tri naše znanstvene ustanove: Nuklearni inštitut J. Stefan, Vodogradbeni laboratorij, in Meteorološki zavod. Za učitelje-vodje šolskih ekskurzij, ki so vajeni, da jih v podjetjih ali v tovarnah čim hitreje odpravijo skozi svoje prostore, so pomenili ti trije ogledi pravo presenečenje zaradi izredne pozornosti, s katero so nas sprejeli v omenjenih treh inštitutih.

Prvotno smo nameravali organizirati tečaj le za učitelje ljubljanskega okraja. Ker pa je bilo premalo prijav, je Zavod za napredek šolstva LRS dopolnil število udeležencev še iz ostalih okrajev in končno se je zbralo na tečaju 55 učiteljev, predmetnih učiteljev in profesorjev iz vse Slovenije. Udeležba je bila za organizacijo dela kar primerna, nismo pa bili zadovoljni s sestavom. Želeli smo, da bi letos prišli na tečaj predvsem oni, ki poučujejo fiziko, pa nimajo ustreznih strokovnih kvalifikacij. V tem pogledu je bil uspeh le polovičen, kajti tistih, ki jim je bil tečaj prvenstveno namenjen, je bilo premalo. Če so že prilike take, da ni za pouk fizike dovolj učnih moči, bi se morali zlasti tisti, ki jo učijo v sili razmer, strokovno izpopolnjevati in se je vsaj do neke mere priučiti.

Vsi udeleženci, čeprav utrujeni od obilnega dela ob koncu šolskega leta, so pokazali mnogo volje in delovne discipline. Zlasti so se zanimali za predavanja iz atomske fizike, katere osnove so predvidene že v osnovni šoli. Prav za to temo bi bil potreben daljši, vsaj nekajdnevni seminar, ki bi ga morda lahko organiziral Zavod za napredek šolstva tako, kakor lani v Portorožu.

Zahvalo za uspešno izvedbo tečaja smo dolžni predvsem Zavodu za napredek šolstva LRS in Zavodu za prosvetno-pedagoško službo OLO Ljubljana, ki sta preskrbela potrebna finančna sredstva. Fizikalni inštitut univerze je dal na razpolago prostore in večino instrumentov, nekaj učil pa so posodile I. in II. gimnazija v Ljubljani, ter Višja pedagoška šola v Ljubljani.

F. Plevnik

PREDLOG UČNEGA NAČRTA IZ MATEMATIKE ZA GIMNAZIJE

Društvo matematikov in fizikov LRS je prejelo od Zavoda za napredek šolstva LRS predlog učnega načrta iz matematike za vse štiri razrede gimnazije, ki ga je izdelala posebna komisija, sestojeca iz prof. N. Prijatlja, S. Uršiča, J. Žabkarja, F. Tonina in F. Križaniča. Komisija se zaveda, da se osnutek še lahko izboljša in dopolni, zato prosi, da bi ji vse pripombe, predloge in ugotovitve sporočili in tako prispevali k izboljšanju pouka na naših šolah. Posebno dobrodošle bodo pripombe praktikov, ki so ali bodo uvedli nove prijeme pri pouku matematike na šolah druge stopnje.

Predlagani učni načrt upošteva izobraževalne in vzgojne naloge, ki so že določene matematiki v srednji šoli, hkrati pa poskuša pouk matematike čimbolj približati sodobnim težnjam po reformi pouka matematike. Razdeljen je na tri dele. V prvem delu so poudarjene naloge in smotri pouka matematike na gimnaziji; drugi del obravnava osnovne značilnosti ter daje navodila za izvedbo pouka v 1. razredu gimnazije; v tretjem delu pa je snov porazdeljena po raz. redih.

A. NALOGE POUKA

Naloge pouka so:

- seznanjati učence s tistimi matematičnimi dejstvi, ki so potrebna za sodobno šolanje in življenje;
- posredovati matematično znanje, ki je potrebno za proučevanje fizike in drugih naravoslovnih ved in ki omogoča reševati proizvodne, tehnične, ekonomske in družbene probleme;
- gojiti in razvijati v učencih logično, funkcionalno in dialektično mišljenje.

B. NAVODILA

Osnovne značilnosti novega učnega načrta so:

Porazdelitev in izbor snovi. Klasični vzporednici algebra z aritmetiko in geometrija tečeta le prva tri leta, v četrtem razredu pa se stopita v eno samo poglavje, ki nosi naslov infinitezimalni račun. Prej zelo obsežna poglavja o raznih posebnih oblikah enačb so skržena le na bežen obzor, prav tako je ekonomičneje porazdeljena snov analitične geometrije, ki ne nastopa več kot samostojno poglavje, ampak je smotrno vložena v sorodna poglavja algebre in infinitezimalnega računa. To je omogočilo uvedbo novih poglavij, ki naj pouk matematike tudi po snovi približajo praktični uporabi in sodobnosti. Povsem novo je poglavje o enačbah višjih stopenj, ki so obravnavane splošno, ne pa po posameznih oblikah, ki se dajo bolj ali manj bistroumno ugnati s korenjenjem. Obravnava je naravnana predvsem na približno določanje realnih korenov. Večje mesto je v učnem načrtu določeno tudi verjetnostnemu računu. V geometriji je novo poglavje o vektorskem računu. Razpored snovi skuša čimbolj zadovoljiti potrebe fizikov. Uporaba matematike v ekonomiji je nakazana v osnovnih pojmi o programiranju in v obrestno-obrestnem računu.

Ozka povezava analize in algebre. Vsi razdelki tega poglavja so zgrajeni tako, da se najprej obvlada analitična stran predmeta, osvoji funkcijsko gledanje, šele nato pa preide na algebrski aparata in formalizem. V to poglavje so vpleteni tudi določeni deli analitične geometrije. Tako se izognemo ponavljanju istega formalizma. Poudarjene so tudi nekatere praktične metode.

Na začetek algebre in analize je postavljeno poglavje o aritmetiki, ki gradi pojem realnega števila in številske premice. To poglavje in pozneje poglavje o potencah največ prispevata k oblikovanju dialektičnega mišljenja.

Ozka povezava planimetrije, stereometrije in opisne geometrije. Obravnava geometrije je naslonjena na aksiomatsko metodo. Mislimo, da je mogoče in celo nujno že v prvem razredu gimnazije začeti z vzgojo logičnega mišljenja, kakršno nudi aksiomatsko obravnavanje geometrije. Opisna geometrija spremlja vsa poglavja in skrbi za razvoj prostorskih predstav in oblikovalnih navad.

Preureditev trigonometrije. V skladu z načeli, ki so udeležena v načrtu za algebro, je tudi v trigonometriji postavljeno na čelo analitično obravnavanje trigonometričnih funkcij v fiziki (harmonično nihanje). Šele nato je na vrsti reševanje trikotnikov.

Uvedba infinitezimalnega računa. Ta naj zajame tako diferencialni, kot integralni račun in njuno najpreprostejšo uporabo. To poglavje naj še enkrat poveže vso analizo, ki so jo zgradila prva tri leta in jo dopolni do samostojne celote. Tudi analitična geometrija, kot vez med algebro, analizo in geometrijo je vključena v to poglavje, vendar samo vsebinsko, ker so osnovni formalizmi odpravljeni že prej. Le tista poglavja analitične geometrije, ki niso našla mesta v prejšnjih poglavjih, so vpletena v celoti.

Učna snov prvega razreda začenja z aritmetiko. To poglavje gradi pojem števila od naravnih števil do realnih števil in njihove geometrijske predstave. Pri tem poudarjamo osnovne računske zakone v njihovi algebrski obliki in vsakokratno potrebo po razširjavi pojma števila. Vzporedno z gradnjo pojma števila teče izpopolnjevanje dekadice sistema. Potrebo po razširitvi na realna števila spoznamo iz opazovanja številske premice in neperiodičnih neskončnih decimalnih števil. V to poglavje so vključeni tudi elementi teorije števil. Ob tem poglavju učenca že pripravljamo na algebrsko mišljenje, pri obravnavi računskih operacij označujemo števila s črkami, na primer: naravno število a , ulomek b itd. Doslej običajno ločevanje med običnimi in posebnimi števili je zato odveč in tako odpade nepotrebna pregrada med aritmetiko in algebro. Kot primer za uporabo računskih zakonov lahko pokažemo preprosta pravila: kvadrat vsote, produkt vsote in razlike itd. Ob zaključku tega poglavja naj bo učencu domač pojem realna števila in korespondenca med realnimi števili in točkami na premici. Hkrati naj dobi učenec tudi dovolj jasne pojme o računanju s približki.

Poglavje o analizi in algebri začenja z uvedbo koordinatnega sistema v ravnini in z obravnavo linearne funkcije. Koeficienta v enačbi $y = kx + n$ obravnavamo splošno in ju geometrijsko interpretiramo. Šele nato sledi obravnavanje linearne enačbe in sistemov linearnih enačb. Pri primerih obravnavamo presek dveh premic in premico, ki gre skozi dve dani točki. Med metodami za reševanje sistemov je posebno mesto odmerjeno Gaussovi metodi, ki naj predstavi priročno numerično metodo. Tako lahko v primerih obravnavamo tudi enačbe, ki nimajo celih koeficientov. Pri diskusijah naj bodo koeficienti splošno podani: a , b , c itd. Primeri lahko zahtevajo preprosto algebrsko znanje, pridobljeno ob aritmetiki. Tudi reševanje neenačb naj se od vsega začetka geometrično tolmači in uporabi na preprostih primerih linearnega programiranja.

Pojem potence razširimo do celih eksponentov. Razširjavo naslonimo na princip o ohranitvi računskih zakonov. Potence obdelamo tudi kot funkcijo. Grafično: x^0 , x^1 , x^2 , x^3 , x^{-1} , x^{-2} , x^{-3} .

Algebrske izraze obdelamo v zmerni obliki. Poudarimo polinome in racionalne funkcije ene spremenljivke. Grafično obdelamo $(x - 1)^{-1}$, $x(x - 1)^{-1}$, $(x^2 - 1)^{-1}$, $(x^2 + 1)^{-1}$.

Geometrijo gradimo po aksiomatični poti tako, da se planimetrija in stereometrija prepletata. Pojem aksioma, definicije, izreka in dokaza obrazložimo s strogostjo, ki ustreza stopnji. Aksiom uvedemo kot dogovor, povzet iz opazovanja. Aksiomi so porazdeljeni v tri skupine. Pri vsaki skupini izvedemo takoj izreke, ki so naslonjeni le na te aksiome. Prvi skladnostni izrek o trikotniku formuliramo kot aksiom. Pred aksiomom o vzporednici dokažemo vse izreke o trikotniku, ki gredo brez tega aksioma. Aksiom zveznosti povežemo s številsko osjo. Konstruktivske naloge izbiramo s pravo mero.

Vzporedno obravnavanje planimetrije in stereometrije omogoča zgodnjo uvedbo osnov opisne geometrije. Ta naj se izdelata tako daleč, da omogoči že v prvem razredu predložitev oglatih teles, stožca in valja v preprostih legah. Opisno geometrijo obravnavamo znotraj geometrijskega pouka in ne kot neodvisno vzporednico.

Izreka o tetivnem in tangentnem četverkotniku dokažemo v obeh smereh. Pri geometriji na krogli se omejimo na opis krogov na krogli, sfernega dvokotnika in sfernega trikotnika.

Vsako polletje pišemo dve šolski nalogi. Vsako polletje izdelajo dijaki tri obvezne geometrijske programe in en program iz analize in algebre.

C. UČNI NAČRT

I. razred

Aritmetika.

Naravna števila. Adicija in multiplikacija in njune lastnosti. Urejenost naravnih števil in njih grafična upodobitev. Dekadični sistem. Deljivost števil: definicija, osnovna pravila in kriteriji. Evklidov algoritem, največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik. Praštevila: izrek o enoličnem razcepu sestavljenih števil in Evklidov izrek, razstavljanje na praštevila.

Subtrakcija in negativna števila. Nič. Cela števila. Osnovne računske operacije s celimi števili. Urejenost celih števil in njih grafična upodobitev. Kolobar celih števil.

Deljenje in ulomki. Enakost in primerjanje ulomkov. Osnovne računske operacije z ulomki. Dekadični zapis ulomkov. Obseg racionalnih števil in njih grafična upodobitev. Gostota racionalnih števil.

Neperiodična, neskončna decimalna števila. Realna števila in številsko os. Računanje s približki in ocena napake.

Algebra in analiza.

Koordinatni sistem. Lega točke v ravnini: razdalja dveh točk. Linearna funkcija in enačba. Tabelarično in grafično prikazovanje linearnih funkcij. Interpolacija. Reševanje linearnih enačb. Diskusija. Pojem neenačbe in dopustne pretvorbe neenačb. Reševanje linearnih neenačb.

Sistemi linearnih enačb. Diskusija sistema dveh linearnih enačb z dvema neznankama. Grafične in numerične metode reševanja. Enačba premice. Gaussova metoda reševanja sistema več linearnih enačb z več neznankami. Sistemi linearnih neenačb. Linearno programiranje: enostavni zgledi.

Potence. Definicija potence in osnovne lastnosti potenc za naravne eksponente, večje od 1. Eksponenta 1 in 0. Negativni eksponenti. Potenčna funkcija za cele eksponente.

Algebrski izrazi: monom, binom, polinom in računanje z njimi. Razstavljanje in deljenje polinomov. Ulomljene racionalne funkcije in računanje z njimi. Grafičen prikaz preprostih racionalnih funkcij.

Geometrija.

Uvod v geometrijo. Geometrijski elementi. Osnovni odnosi med elementi. Aksiomi. Definicije. Izrek in dokaz.

Aksiomi lege in urejenosti. Izreki o odnosih med elementi v ravnini in prostoru.

Aksiomi gibanja. Skladnost. Definicija daljice, kota in trikotnika. Računanje z daljicami in s koti. Izreki o kotih. Skladnost trikotnikov. Odnosi med stranicami in koti v trikotniku. Klin. Trirobnik in večrobnik. Odnos med stranicami in koti v trirobniku.

Aksiom o vzporednici. Vsota notranjih kotov trikotnika. Aksiom zveznosti in Arhimedov izrek. Vzporednost v prostoru.

Osnovne geometrijske konstrukcije: pravokotnica, vzporednica, simetrala daljice in kota.

Osnovne metode opisne geometrije. Projekcijski sestav. Predočenje točke, premice in ravnine. Stranski ris.

Premiki, vrtenja in zrcaljenja v ravnini in v prostoru.

Poligoni. Četverokotniki. Osnovne lastnosti paralelogramov in trapezov. Znamenite točke trikotnika. Opis oglatih teles. Pravilni poligoni in poliedri. Predočenje oglatih teles.

Definicija in osnovne lastnosti kroga. Daljice in koti v krogu. Točka in krog, premica in krog, krog in krog. Tetivni in tangentni četverokotnik. Valj in stožec. Definicija in osnovne lastnosti krogle. Geometrija na krogli.

Enostavne konstrukcije geometrijskih likov z metodama geometrijskih mest in pomožnih likov. Osnovna geometrijska mesta. Kratka obravnava stožnic. Načrtovanje stožnic. Predočenje valja in stožca.

II. razred

Algebra in analiza.

Koreni. Definicija korena, aritmetična vrednost in osnovne lastnosti. Potence z racionalnimi eksponenti. Realni eksponent. Pojem inverzne funkcije. Potenčna funkcija za racionalen eksponent.

Kvadratna funkcija in njen grafikon: diskriminanta, teme, legä. Ničle funkcije. Kvadratna enačba. Kompleksna števila. Vietova pravila. Predznak kvadratne funkcije in kvadratne neenačbe.

Tangenta. Hitrost. Prvi pojem odvoda. Odvodi preprostih funkcij. Ekstremi. Poševni met.

Eksponentna in logaritemska funkcija. Grafičen prikaz. Osnovne lastnosti eksponentne in logaritemske funkcije. Logaritemske tabele (4 mestne vrednosti). Enostavni zgledi eksponentnih in logaritemskih enačb.

Geometrija.

Merjenje daljic in kotov. Skupna mera dveh daljic in dveh kotov. Evklidov algoritem. Razmerje in sorazmerje daljic.

Podobnostna preslikava. Ohranitev kotov in razmerij. Nomotetični in podobni liki. Podobnostni izreki o trikotnikih. Kotna simetrala trikotnika. Homotetija pri krogih.

Uporaba podobnosti v pravokotnem trikotniku: Evklidov, Pitagorov in višinski izrek. Trigonometrične funkcije ostrih kotov. Tabele naravnih vrednosti. Razreševanje pravokotnega trikotnika. Potenca točke glede na krog. Potenčna premica dveh krogov in potenčno središče treh krogov. Enostavne konstrukcije z metodo podobnih likov. Načrtovanje algebraskih izrazov. Konstrukcije z ravnilom in šestilom.

Obsegi in ploščine poligonov. Heronov obrazec. Površine oglatih teles.

Obseg in ploščina kroga in njegovih delov. Površina valja in stožca.

Vektorji. Definicija in enakost vektorjev. Vsota in razlika vektorjev. Produkt vektorja s številom. Linearna kombinacija, linearna odvisnost: kolinearni in komplanarni vektorji, razstavljanje vektorjev. Koordinatni sistem. Komponente vektorja in njegova dolžina. Krajevni vektor točke v prostoru. Enačba premice in ravnine v prostoru. Enačba premice v ravnini.

III. razred

Algebra in analiza.

Binomske in simetrične enačbe. Geometrično tolmačenje binomskih enačb.

Sistem linearne in kvadratne enačbe. Sistem dveh kvadratnih enačb. Enačba kroga. Pregled stožnic.

Polinomi. Hornerjeva delitev. Izrek o ostanku in razcepitvi. Število ničel polinoma. Identični polinomi. Metoda nedoločenih koeficientov. Celi in racionalni koreni algebrskih enačb. Lega korenov. Iracionalni koreni. Sekantna metoda.

Kombinatorika. Osnovni zakon kombiniranja. Permutacije, variacije, kombinacije in porazdelitve. Binomski koeficienti in binomski izrek. Moivreov obrazec.

Osnovni pojmi verjetnostnega računa. Dogodki, sestavljeni dogodki, elementarni dogodki. Klasična definicija verjetnosti. Verjetnost sestavljenih dogodkov.

Geometrija.

Trigonometrične funkcije. Vrtenje in kot. Pravokotni komponenti vektorja v ravnini in njegova dolžina. Funkcija tangens in kotangens in njun potek. Algebrski odnosi med trigonometričnimi funkcijami istega kota. Funkcije komplementarnih in suplementarnih kotov. Periodičnost, sodost in lihost trigonometričnih funkcij. Določanje kota iz vrednosti trigonometrične funkcije. Pojem obratnih trigonometričnih funkcij in njihove glavne vrednosti. Naravne vrednosti trigonometričnih funkcij in njihovi logaritmi. Uporaba tabel.

Adicijski teoremi trigonometričnih funkcij. Trigonometrične funkcije dvojnih in polovičnih kotov. Pretvarjanje trigonometričnih izrazov v obliki produkta. Harmonično nihanje: amplituda, frekvenca, faza. Superpozicija dveh nihanj z isto frekvenco in isto fazo. Enostavne trigonometrične enačbe.

Pravokotni trikotnik. Reševanje splošnega trikotnika: sinusni in kosinusni izrek, tangensni izrek in izrek o tangensu polovičnega kota. Uporaba trigonometrije v planimetriji. Sestavljanje sil.

Prostornine oglatih teles. Površina in prostornina krogle in njenih delov. Uporaba trigonometrije v stereometriji.

IV. razred

Infinitezimalni račun.

Aritmetično in geometrijsko zaporedje. Splošni člen in vsota prvih n členov zaporedja. Geometrijska vrsta. Pretvarjanje periodičnih decimalnih števil v ulomke. Obrestno-obrestni račun.

Matematična indukcija. Vsota kvadratov in kubov prvih n naravnih števil. Bernoullijeva neenačba.

Zaporedja. Definicija splošnega zaporedja. Limita zaporedja. Število e in zakon harmonične rasti. Kvadratura parabole.

Funkcije. Definicija funkcije. Tabela in grafikon. Pregled in načrtovanje elementarnih funkcij. Limita funkcije. Nekatere znamenite limite.

Linearna funkcija in premica v ravnini. Smerni koeficient premice. Različne oblike enačbe premice. Kot med dvema premicama. Pravokotni premici. Razdalja točke od premice. Ploščina trikotnika.

Sekanta. Povprečna hitrost in diferenčni kvocient. Tangenta, hitrost in odvod. Osnovna pravila odvajanja in odvodi elementarnih funkcij. Pojem diferenciala in aproksimacija funkcije z linearno funkcijo. Leibnitzeva oznaka odvoda.

Odvod in vedenje funkcije. Naraščanje in padanje funkcije, stacionarne točke: ekstremi in prevoji. Drugi odvod. Pospešek. Ekstremalni problem.

Tangente in normale na krivulje. Tangenta in normala na stožernice.

Nedoločeni integral. Temeljni izrek integralskega računa. Osnovna pravila integralskega računa in tablica osnovnih integralov. Začetna integralska praksa.

Ploščina in določeni integral. Leibnitzeva formula. Računanje ploščin, prostornin, vrtenin in povprečnih vrednosti.

Numerično integriranje: trapezna in Simpsonova formula.

Pregled sodobne zgradbe matematike.

MATEMATIKA IN FIZIKA PRI ZAKLJUČNIH IZPITIH NA GIMNAZIJAH

V šolskem letu 1960/61 so dijaki gimnazij že drugič pristopili k novim zaključnim izpitom, da dokažejo svojo zrelost. Navodila, ki jih je izdal Svet za šolstvo LRS določajo poleg pismenega dela izpita tudi domačo nalogo ter njen zagovor pred izpitno komisijo. Teme domačih nalog na gimnazijah so iz učnovzgojnih področij, ki jih vsebuje predmetnik ali učni načrt. Poglejmo, kako so dijaki izbirali snov za domače izdelke iz matematike in fizike! V večini primerov so profesorji sami predlagali naslove, dijaki so pa med predlaganimi temami izbirali ali pa samostojno predlagali snov iz tistega področja, ki je predmet njihovega posebnega zanimanja že nekaj let. Prvega novembra je izpitna komisija odobrila predlagane teme in tako so imeli dijaki pet mesecev časa, da so se poglobili in izdelali to svojo prvo samostojno in bolj zahtevno delo.

Zavod za napredek šolstva LRS je izdelal anketo o izbiri tém za domačo nalogo. Anketa zajema 24 gimnazij v Sloveniji, na katerih se je letos prijavilo na zaključni izpit 1627 dijakov. V letu 1960 jih je bilo 1517. Posamezna področja so bila v letu 1960 in letos takole zastopana:

	1960	1961
I. Materin jezik	139 ali 9,16 %	173 ali 10,63 %
II. Tuji jeziki in latinščina	95 ali 6,26 %	108 ali 6,64 %
III. Družbene vede (zgodovina, filozofija, sociologija, zg. umetnosti in zemljepis)	425 ali 28,02 %	521 ali 32,02 %
IV. Naravoslovne vede in matematika	821 ali 54,12 %	815 ali 50,10 %
V. Predvojaška vzgoja	5 ali 0,33 %	4 ali 0,25 %
VI. Telesna vzgoja	6 ali 0,39 %	6 ali 0,36 %
VII. Razno	6 ali 0,39 %	— —

Teme iz posameznih naravoslovnih predmetov pa so tako izbirali:

	1960	1961
1. Matematika	58 ali 3,82 %	62 ali 3,81 %
2. Fizika	248 ali 16,34 %	240 ali 14,75 %
3. Kemija	216 ali 14,24 %	204 ali 12,54 %
4. Biologija z geologijo	319 ali 21,03 %	309 ali 18,98 %

Vidi se, da so kandidati izbirali teme najraje iz naravoslovnih ved in matematike, saj jih je preko 50 % izbralo to področje.

Naslove tém iz matematike lahko tako razvrstimo:

	1960	1961	Skupaj
1. Funkcije (kvadratne, kotne, eksp., log.)	10	16	26
2. Enačbe (linearne, kvadratne, višje stopnje grafično reševanje, sistemi itd.)	6	12	18
3. Trikotnik	6	8	14
4. Števila (racionalna, iracionalna, sistemi)	5	3	8
5. Stožernice v splošnem	3	2	5
6. Konstrukcije (geometrijske)	3	1	4
7. Kompleksna števila	—	4	4
8. Osnove kombinatorike	3	1	4
9. Odvodi funkcij	2	2	4
10. Neenačbe	2	1	3
11. Logaritem	2	1	3
12. Osnove verjetnostnega računa	2	1	3
13. Tangente stožernic	2	1	3
14. Uporaba trigonometrije v geodeziji	1	2	3
15. Limitni procesi	1	1	2
16. Zaporedja	1	1	2
17. Projekcije in preseki	1	1	2
18. Krog	2	—	2
19. Pitagorov izrek in uporaba	2	—	2
20. Podobnost	—	2	2
21. Vektorji in uporaba v fiziki	1	—	1
22. Obrestno obrestni račun	1	—	1
23. Osnove gospodarskega računstva	—	1	1
24. Osnove evklidične geometrije	—	1	1
25. Analitična geometrija v ravnini	1	—	1
26. Vloga kontrole v sodobni proizvodnji	1	—	1

V splošnem je bila izbira nalog precej vezana na razpoložljivo literaturo. Zbirka »Sigma«, ki jo izdaja Mladinska knjiga s sodelovanjem Društva matematikov in fizikov LRS, je precej pripomogla pri izbiri tém iz matematike. Vendar je to še vse premalo, ker so bile zaradi pomanjkanja literature naloge dijakov povzete iz dveh ali treh knjig, redkeje pa so konzultirali več knjig. Iz vsega tega je jasno vidna potreba po sistematični dopolnitvi strokovnih knjižnic.

V fiziki je bila bolj pestra izbira. Po posameznih poglavjih, kakor je razdeljena snov v srednješolski fiziki, so takole izbirali:

		1960	1961	Skupaj
<i>Mehanika</i>	vseh	52	35	87
Energija (ohranitev, pretvorba, prenos)		10	10	20
Letalstvo		7	4	11
Mehanski stroji		5	6	11
Fizikalne osnove statike		6	3	9
Turbine		5	3	8
Merski sistemi in merjenje		5	1	6
Sateliti		3	2	5
Sile in tlak		2	2	4
Gibanje (premočrtno in kroženje)		2	2	4

Dvakrat ali enkrat so bile izbrane teme: Molekularni pojavi v tekočinah, Hidrodinamika, Črpalke, Trenje, Proste osi, Vzgon, Vakuum — doseganje in uporaba, Dela I. Newtona.

		1960	1961	Skupaj
<i>Kalorika</i>	vseh	47	41	88
Stroji z notranjim izgorevanjem		21	17	38
Parni stroji		14	9	23
Fizikalne osnove meteorologije		1	4	5
Plinski zakoni		3	1	4

Trikrat ali manj so bile izbrane teme: Agregatna stanja, Tehnika hlajenja in hladilniki, Prenos toplote, Kalorimetrija, Reakcijski motorji, Temperatura in merjenje, Parni kotli.

		1960	1961	Skupaj
<i>Akustika, nihanje in valovanje</i>	vseh	13	7	20
Nihanje in valovanje		6	2	8
Zvok		4	1	5

In še: Glasbila in glasba, Ultrazvok, Interferenca, Zvočni izolatorji.

		1960	1961	Skupaj
<i>Optika</i>	vseh	26	29	55
Optični instrumenti in fotografija		16	16	32
Zrcala in leče		3	5	8
Spektroskopija		2	3	5
Barve v fiziki		3	2	5

In, še: Fotometrija, Svetloba, Geometrijska optika.

<i>Elektrika in magnetizem</i>	vseh	67	68	135
Elektrostroji in merilni instrumenti		12	15	27
Elektromagnetna indukcija		7	10	17
Elektromagnetno nihanje in valovanje		7	8	15
Transformatorji		5	6	11
Elektrarne		6	2	8
Dela N. Tesle		4	3	7
Radio		2	4	6
Prenos električne energije		5	1	6
Elektroliza		2	3	5
Vodniki, polprevodniki in izolatorji		3	2	5
Generatorji		2	3	5
Elektromagnetni spektrum		3	1	4

In še: Televizija, Usmerniki, Kondenzatorji, Elektromagnet in uporaba, Ojačevalci, Magnetno poljo, Tranzistor, Radar in Kemični izvor elektrike.

Atomistika	25	36	61
Elektronika	12	9	21
Rentgenski žarki	2	7	9
Gibanje nebesnih teles	3	4	7

In še po enkrat: Pogled v vesolje, Od klasične do moderne fizike, O avtomatizaciji, Mehanizacija pražarne.

Tudi tu lahko rečemo, da je na izbiro vplivala razpoložljiva literatura. Tehnika je v splošnem zelo privlačevala, saj je skoraj četrтина takih tém, ki obravnavajo razne stroje (toplotne, električne, mehanske). Tudi atomistika je zelo dobro zastopana. Tu prevladujejo teme, kot: Proizvodnja atomske energije, Atomi in jedrska energija, Radioaktivnost, Reaktor, Izotopi in njihova uporaba, Zgradba materije.

Skoraj na vseh šolah so mnenja, da so kandidati izdelovali domačo nalogo samostojno. Prvič zato, ker so se pogosto zatekali po nasvete k svojim mentorjem in pri njih iskali potrebno literaturo. Bilo pa je tudi nekaj primerov, da so v nalogo vložili le malo samostojnega dela. Take naloge so bile površno sestavljene ali prepisane, kar se je odražalo pri zagovoru, ki je tudi potrdil nesolidno prapravo naloge.

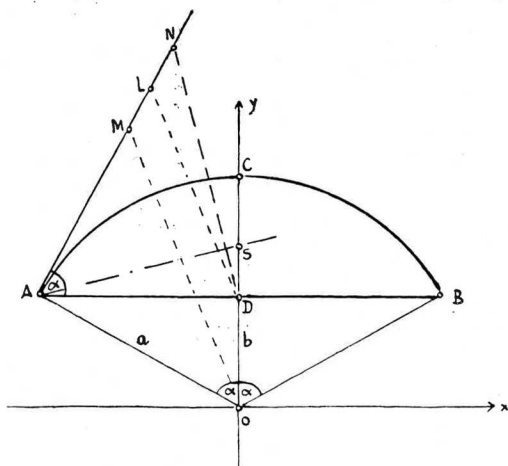
Stanko Uršič

ODGOVORI

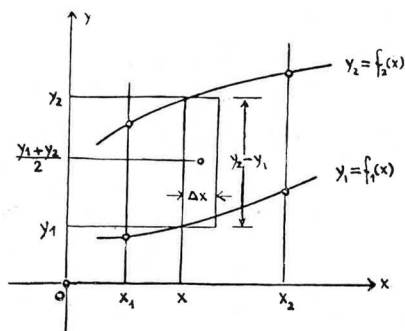
Odgovor na vprašanje v 1. številki Obzornika 1961 (str. 61).

TEŽIŠČE KROŽNEGA ODSEKA

Vprašanje se je glasilo: Nariši lok $\widehat{AB}$ s središčem v O. Nanesi na tangento v točki A dolžino, ki je enaka polovici omenjenega loka: $\overline{AL} = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \overline{AC}$. Zveži točko L z razpoloviščem D tetive AB ter potegni skozi C vzporednico: $\overline{OM} \parallel \overline{DL}$. Daljico AM podaljšaj za polovico njene dolžine: $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AM}$. Dobljeno točko N zveži z D in potegni iz A pravokotnico na to veznico. Dokaži, da je točka S, kjer seka nazadnje dobljena pravokotnica simetralo danega loka, težišče odseka, ki je definiran s tem lokom!



Sl. 1



Sl. 2

Krog s polmerom a naj bo v središčni legi. Vzporodnica k abscisni osi v razdalji b od nje naj preseka krog v točkah A in B. Nastalemu krožnemu odseku naj pripada središčni kot 2α (sl. 1).

Očitno leži težišče odseka na ordinatni osi in je zatorej abscisa težišča $\xi = 0$. Ordinata η težišča pa se izraža takole: $M\eta = \int y dM$,¹ kjer je M masa. Ker je odsek homogen, smemo s konstantno gostoto krajšati in imamo v nadaljnjem opravku le s površino.

Naj bo ravninski lik omejen zgoraj s krivuljo $y_2 = f_2(x)$ in spodaj s krivuljo $y_1 = f_1(x)$, na levi z ordinato x_1 , ne desni pa z ordinato x_2 (sl. 2). Tedaj je element ploščine $dM = (y_2 - y_1) dx$. Težišče elementarnega pravokotnika je $\frac{1}{2}(y_2 + y_1)$, elementarni moment pa je produkt tega z elementom ploščine, torej $\frac{1}{2}(y_2 + y_1) dM = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) dx = \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2) dx$. Tako je

$$(1) \quad M\eta = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (y_2^2 - y_1^2) dx$$

¹ I. Vidav, Višja matematika II, str. 153.

Ploščina M odseka je razlika ploščin krožnega izseka $OACBO$ in trikotnika OAB :

$$M = \frac{1}{2} a^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Pod integralnim znakom v (1) je $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$ in $y_1 = b = a \cos \alpha$. Integracijski meji sta $x_1 = -a \sin \alpha$ in $x_2 = a \sin \alpha$. Če integral izračunamo, dobi enačba (1) obliko

$$\frac{1}{2} a^2 (2\alpha - \sin 2\alpha) \eta = \frac{2}{3} a^3 \sin^3 \alpha$$

Ordinata težišča S krožnega odseka se izraža s polmerom a in središčnim kotom α takole

$$(2) \quad \eta = \frac{4a}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

V vprašanju navedena geometrična konstrukcija nas privede s pomočjo analitične geometrije do istega rezultata. Takoj je razvidno, da ima točka A koordinati $(-a \sin \alpha, a \cos \alpha)$. Ker je dolžina daljice AL enaka polovici loka ACB , torej $AL = a$, dobimo koordinati točke L , ki leži na tangenti skozi A , če upoštevamo, da je kot med tangento in tetivo pri A enak α . Tako je $L(-a \sin \alpha + a \cos \alpha, a \cos \alpha + a \sin \alpha)$. Koordinati točke D pa sta $D(0, a \cos \alpha)$. Od tod dobimo takoj smerni koeficient daljice DL

$$k_{DL} = \frac{-a \sin \alpha}{\sin \alpha - a \cos \alpha}$$

Enak smerni koeficient ima njej vzporedna premica OM . Njena enačba se glasi

$$(3) \quad y = \frac{-a \sin \alpha}{\sin \alpha - a \cos \alpha} \cdot x$$

Tangenta skozi A je $y - a \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha (x + a \sin \alpha)$. Koordinati presečišča M sta rešitvi te in enačbe (3). Z računom dobimo, da je

$$M \left(a \cdot \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha}, a \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)$$

Koordinati točke N dobimo iz pogoja, da je $AM:MN = (x_2 - x_1):(x - x_2) = 2:1$. Tu pomeni x_2 absciso točke M , x_1 absciso točke A in x absciso točke N . Iz te enačbe izhaja, da je $x = \frac{1}{2} (3x_2 - x_1)$, torej

$$x = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3\alpha \cos \alpha - 3 \sin \alpha + \sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Analogno je ordinata

$$y = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Smerni koeficient daljice DN izračunamo zdaj iz koordinat obeh krajišč

$$k_{DN} = \frac{3\alpha \sin \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{3\alpha \cos \alpha - 3 \sin \alpha + \sin^3 \alpha}$$

Smerni koeficient pravokotne premice skozi točko A pa je potem enak $-1/k_{DN}$. Enačba pravokotnice je torej

$$y - a \cos \alpha = \frac{3 a \cos \alpha - 3 \sin \alpha + \sin^3 \alpha}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha - 3 a \sin \alpha} (x + a \sin \alpha)$$

Presečišče S z ordinatno osjo dobimo pri $x = 0$. Ordinata y presečišča je torej

$$y = a \cos \alpha + \frac{3 a \cos \alpha - 3 \sin \alpha + \sin^3 \alpha}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha - 3 a \sin \alpha} \cdot a \sin \alpha = \frac{a}{3} \cdot \frac{2 \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

Po množenju števca in imenovalca z 2 dobimo za ordinato težišča izraz (2).

Silvester Černetič

Ljubljana, Detelova 1

POPRAVEK

Pri članku »Radiacijski defekti« iz prejšnje številke Obzornika (8, 79, 1961) je pomotoma izpadlo pojasnilo o izvoru nekaterih slik:

Sl. 3 (ref. 1) je vzeta iz članka G. H. Kinchin, R. S. Pease, Repts. Progr. in Phys. 18, 1 (1955),

Sl. 5 (ref. 3) je iz članka J. W. Marx, H. G. Cooper, and J. W. Henderson, Phys. Rev. 88, 106 (1952) in

Sl. 6 (ref. 4) iz članka K. Kobayashi, Phys. Rev. 102, 348 (1956).

Uredništvom naštetih revij in avtorjem se za ljubeznivost, s katero so dovolili reprodukcijo slik, iskreno zahvaljujemo.

Podobno velja za slike v članku M. Kregarja in B. Povha o jedrskih reakcijah v zvezdah (OMF 8, 72, 1961). Te slike so vzete iz članka W. A. Fowlerja v knjigi Modern Physics of the Engineer II, ki jo je izdala založba McGraw-Hill (New York), kateri se najlepše zahvaljujemo.

Iščemo fizike!

Sprejememo več fizikov za delo v razvojnih laboratorijih in proizvodnji v redno ali honorarno zaposlitev, s polnim ali s skrajšanim delovnim časom. V poštev pridejo tudi študentje zadnjih letnikov in absolventi. Plača po dogovoru.

Delovna področja: Proizvodnja GM števec, razvoj polvodnikov, razvoj magnetnih materialov, električne in fizikalne meritve na radijskih sestavnih delih, razvoj visokofrekvenčne keramike itd.

Zaradi dogovora se čimprej zglasite v Razvojnem sektorju Industrije za elektroizveze, Ljubljana, Vegova 2, tel. 22-675!

INDUSTRIJA ZA ELEKTROIZVEZE LJUBLJANA

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin scientifique, Zagreb 1960, T. 6, No. 1, 2.

Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb 1960.

Gospodarski vestnik, Ljubljana 1961, št. 56—87.

Matematičko-fizički list, Zagreb 1961/62, št. 1.

Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1960/61, No. 9/10, 11, 12.

Physics Today, New York 1961, Vol. 14, No. 5.

Proteus, Ljubljana 1960/61, št. 1, 2.

Publikacije elektrotehničkog fakulteta, Beograd 1960, No. 44—48, 1961, No. 49—60.

Sodobna pedagogika, Ljubljana 1961, št. 5—6.

Ukrajinskij matematičeskij žurnal, Kiev 1961, T. XIII., No. 2.

Uspehi matematičeskijh nauk, Moskva 1961, T. XVI, Vyp. 4, 5.

Vestnik moskovskogo universiteta, Moskva 1961, No. 3, 4.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod oznacbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-3-207.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227, tel. št. 23-304