OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA
1 9 6 1
VIII. št. 2

VSEBINA

Članki Stran

O definiciji določenega integrala (I. Vidav) 49

Limitni cikli (G. Tomšič) 55

Lastnosti rešitev problemov linearnega programiranja (A. Vadnal) . . 65

Jedrske reakcije v zvezdah (M. Kregar, B. Povh) 72

Radiacijski defekti (E. Pirkmajer) 79

Šola

Prispevek Franca Hočevarja pouku elementarne matematike (J. Povšič) 87

Fizikalne vaje na Bežigrajski gimnaziji (F. Plevnik) 92

... in na Tehniški šoli za KMRL (F. Kvaternik) 93

Uspeli smo (S. Uršič) 94

Poskusi

Sesalec za prah — pomočnik pri fizikalnih poskusih (F. Ahlin) 96

Vprašanja 96

CONTENTS

Articles Page

On the Definition of the Definite Integral (I. Vidav) 45

Limit Cycles (G. Tomšič) 55

On the Properties of the Solutions of Linear Programming (A. Vadnal) . 65

Nuclear Reactions in Stars (M. Kregar, B. Povh) 72

Radiation Defects (G. Pirkmajer) 79

School 87

Experiments 96

Question 96

LETO VIII
1 9 6 1 OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO ŠTEV. 2
1. VIII. 1961

O DEFINICIJI DOLOČENEGA INTEGRALA

IVAN VIDAV

Eden izmed najpomembnejših pojmov matematične analize je brez dvoma pojem določenega integrala. Danes poznamo več vrst določenega integrala: Riemannov, Lebesgueov, Stieltjesov itd. Lebesgueov integral je razširitev Riemannovega. Kajti vsaka funkcija, integrabilna v Riemannovem smislu, je integrabilna tudi v Lebesgueovem smislu in vrednosti obeh integralov se za tako funkcijo ujemata. Za »vsakdanjo« rabo po navadi zadošča Riemannov integral. Vendar pa je potrebno poznanje Lebesgueovega integrala v vedno širših področjih teoretične in uporabne matematike. Ta integral se namreč odlikuje z nekaterimi lastnostmi, ki jih Riemannov nima.

B. Riemann (1826—1866) je bil prvi, ki je natančno definiral pojem določenega integrala in tudi strogo dokazal, da eksistira integral zveznih funkcij. Prikličimo si v spomin njegovo definicijo: Naj bo funkcija $f(x)$ na zaprtem intervalu $[a, b]$, $a < b$, povsod enolično definirana. Interval razdelimo s točkami $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ na n manjših delov. Tu naj bo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Dolžina enega izmed delnih intervalov je enaka $x_k - x_{k-1} = \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Na vsakem delnem intervalu si izberimo neko točko in funkcijsko vrednost v tej točki pomnožimo s širino ustreznega delnega intervala. Če vse te produkte seštejemo, dobimo vsoto

$$f(\xi_1)\,\delta_1 + f(\xi_2)\,\delta_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\delta_n = \Sigma f(\xi_k)\,\delta_k \qquad (1)$$

Tu leži ξ_1 na prvem, ξ_2 na drugem itd., ξ_n na zadnjem delnem intervalu. Če eksistira limita te vsote, ko gredo dolžine δ_k delnih intervalov proti nič, imenujemo limitno vrednost vsote določeni integral funkcije $f(x)$ v mejah od a do b. Funkcija $f(x)$ je tedaj na intervalu $[a, b]$ v Riemannovem smislu integrabilna. Limita mora eksistirati pri poljubnih številih ξ_k, da je le vsak ξ_k na ustreznem delnem intervalu. Vse zvezne funkcije so v tem smislu integrabilne. Dokaz za to ni preprost in dela začetnikom precej težav. Limita vsote (1) pa eksistira tudi pri nekaterih nezveznih funkcijah.

Tako so n. pr. v Riemannovem smislu integrabilne vse monotone funkcije, ki morejo imeti neskončno točk nezveznosti. Za kakšen drug razred funkcij pa pride Riemannov integral komaj kdaj v poštev. Še manj pa se danes izplača uvajati tako imenovana Darbouxjeva integrala.

V svojem učbeniku Mathématiques générales sta C. Pisot in M. Zamansky prelomila z opisano tradicionalno uvedbo Riemannovega integrala. V njem definirata najprej integral za zelo preproste funkcije in nato razširita definicijo na bolj komplicirane funkcije. Ta definicija integrala zajema vse funkcije, ki pridejo praktično v poštev, med njimi vse zvezne funkcije. Namen tega članka je seznaniti bralce z njuno potjo. V ta namen se najprej spomnimo nekaj osnovnih pojmov iz teorije vektorskih prostorov.

Vzemimo množico vseh funkcij, ki so zvezne na nekem intervalu $[a, b]$. To množico imenujmo C. Vsota $f(x) + g(x)$ dveh zveznih funkcij $f(x)$ in $g(x)$ je zvezna funkcija in isto velja za produkt $Af(x)$, kjer je A poljubno število. Zato pravimo, da tvori množica C linearen vektorski prostor: Elementi množice C — to so zvezne funkcije — se dajo seštevati, odštevati in množiti s števili kakor navadni vektorji. Rezultat teh računskih operacij je neka zvezna funkcija, torej spet element množice C.

Vsaka zvezna funkcija je na obe strani omejena in ima natačno spodnjo in zgornjo mejo. Natančna zgornja meja absolutne vrednosti $|f(x)|$ (to je tudi zvezna funkcija), je neko nenegativno število. Zaznamujemo ga z znakom $\|f\|$. Torej je $\|f\|$ natančna zgornja meja funkcije $|f(x)|$ na intervalu $[a, b]$. Zato je $|f(x)| \leqq \|f\|$ za vsak x od a do b. Če je $\|f\| = 0$, je natančna zgornja meja funkcije $|f(x)|$ enaka nič. To pa je očitno mogoče le tedaj, kadar je funkcija $f(x)$ identično enaka nič. Število $\|f\|$ imenujemo *normo* funkcije $f(x)$. To število ima isto vlogo kakor absolutna vrednost pri vektorjih.

Norma vsote dveh funkcij je manjša ali kvečjemu enaka vsoti norm obeh sumandov. Normo produkta funkcije $f(x)$ s številom A pa dobimo tako, da pomnožimo normo funkcije $f(x)$ s številom $|A|$. Torej ima norma tele lastnosti:

1. $\|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\|$
2. $\|Af\| = |A| \, \|f\|$
3. $\|f\| \geqq 0$. Če je $\|f\| = 0$, je $f(x) \equiv 0$.

Tu sta $f(x)$ in $g(x)$ poljubni funkciji iz množice C, A pa je poljubno realno število. Lastnosti 1 in 2 se dasta brez težave dokazati. Vendar dokaz tu opustimo. Pravimo, da je množica C zveznih funkcij *normiran vektorski prostor.*

Naj bo

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \tag{2}$$

zaporedje funkcij iz množice C. To zaporedje konvergira v smislu norme proti funkciji $f(x)$, če pripada vsakemu pozitivnemu številu ε tak indeks n_0, da je izpolnjena neenačba

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \tag{3}$$

za vse indekse $n \geqq n_0$. Norma razlike $f_n(x) - f(x)$ je enaka največji vrednosti funkcije $|f_n(x) - f(x)|$ na intervalu $[a, b]$. Neenačba (3) torej pove, da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

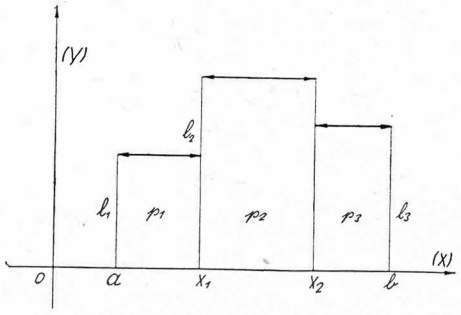
za vsak x na intervalu $[a, b]$ in za vsak indeks $n \geqq n_0$. Z drugimi besedami: zaporedje (2) konvergira v smislu norme proti funkciji $f(x)$, če konvergira enakomerno na intervalu $[a, b]$. Vemo, da je limita enakomerno konvergentnega zaporedja zvezna funkcija, če so členi zvezne funkcije. Zato je limita vsakega v smislu norme konvergentnega zaporedja funkcij iz C spet neka funkcija iz množice C. Zaradi te lastnosti imenujemo vektorski prostor C poln.

Množica C je le poseben primer verktorskega prostora, katerega elementi so funkcije. Vzemimo n. pr. množico vseh polinomov. To je tudi vektorski prostor. Vsota polinomov je namreč polinom in produkt polinoma s poljubnim številom prav tako. Oglejmo si še en zgled, ki bo pozneje pomemben pri uvedbi

integrala. Funkcija $f(x)$ se imenuje *stopničasta* na intervalu $[a, b]$, če se da ta interval razdeliti na manjše dele tako, da je funkcija $f(x)$ na vsakem izmed delnih intervalov konstanta. Slika 1 prikazuje stopničastvo funkcijo. Od a do x_1 ima $f(x)$ vrednost l_1, od x_1 do x_2 vrednost l_2 in od x_2 do b vrednost l_3.

Vse na intervalu $[a, b]$ stopničaste funkcije tvorijo vektorski prostor. Res je vsota dveh stopničastih funkcij spet stopničasta funkcija in produkt vsakega števila s stopničasto funkcijo prav tako. Zaznamujmo ta vektorski prostor s S.

Ali je lahko stopničasta funkcija zvezna? Očitno je samo konstanta zvezna stopničasta funkcija. Vektorska prostora C in S torej razen konstant nimata drugih skupnih funkcij.

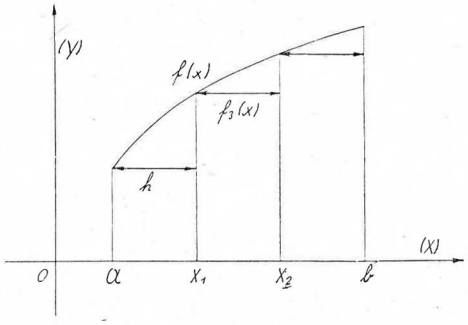


Slika 1.

Vsaka stopničastva funkcija je na obe strani omejena. Označimo tudi tu z $\| f \|$ natančno zgornjo mejo absolutne vrednosti $| f(x) |$! Funkcija $| f(x) |$ je obenem s $f(x)$ stopničasta funkcija. Število $\| f \|$ imenujemo norma funkcije $f(x)$. Norma $\| f \|$ ima iste lastnosti kakor pri zveznih funkcijah, namreč lastnosti 1, 2 in 3. Vektorski prostor S je torej normiran. Zato lahko tudi pri tem prostoru govorimo o konvergenci zaporedij. Zaporedje stopničastih funkcij $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ konvergira v smislu norme proti funkciji $f(x)$, če pripada vsakemu številu $\varepsilon > 0$ tak indeks n_0, da je $\| f_n - f \| < \varepsilon$ za vsak indeks $n \geqq n_0$. Če to prevedemo v navadno govorico, vidimo, da je $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$ za vsak x na intervalu $[a, b]$ in za vsak indeks $n \geqq n_0$. Torej zaporedje konvergira v smislu norme, če konvergira enakomerno na intervalu $[a, b]$.

Med vektorskim prostorom S in vektorskim prostorom C pa je neki pomemben razloček. Limita enakomerno konvergentnega zaporedja funkcij iz prostora C je zvezna funkcija, je tedaj element prostora C. Limita enakomerno konvergentnega zaporedja stopničastih funkcij pa ni nujno stopničasta funkcija. To pomeni, da prostor S ni poln. Tako je n. pr. vsaka zvezna funkcija limita enakomerno konvergentnega zaporedja stopničastih funkcij. Res! Vzemimo poljubno na intervalu $[a, b]$ zvezno funkcijo $f(x)$. Zaznamujmo s $f_1(x)$ funkcijo, ki ima na intervalu $[a, b]$ konstantno vrednost $f(a)$. Nadalje naj bo $f_2(x)$ funkcija, ki zavzame na intervalu $(a, \frac{1}{2}(a + b))$ vrednost $f(a)$, na intervalu $(\frac{1}{2}(a + b), b)$ pa vrednost $f[\frac{1}{2}(a + b)]$. Splošno definirajmo funkcijo $f_n(x)$ takole: Postavimo $h = (b - a)/n$. Funkcija $f(x)$ naj ima na intervalu $(a, a + h)$ vrednost $f(a)$, na intervalu $(a + h, a + 2h)$ konstantno vrednost $f(a + h)$, na

intervalu $(a + 2h, a + 3h)$ konstantno vrednost $f(a + 2h)$ itd., na zadnjem intervalu $(b - h, b)$ pa vrednost $f(b - h)$. Funkcijo $f_n(x)$, ki je za vsak n stopničasta, prikazuje za $n = 3$ slika 2. Zaporedje $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ konvergira proti prvotno dani zvezni funkciji $f(x)$. Izberimo si namreč poljubno majhno pozitivno število ε. Ker je funkcija $f(x)$ zvezna na intervalu $[a, b]$, eksistira tak $\delta > 0$, da je $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, kjer koli ležita x' in x'' na intervalu $[a, b]$, da je le $|x'' - x'| < \delta$. Iz konstrukcije členov našega zaporedja je razvidno, da velja ocena $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kakor hitro je indeks n tako velik, da je $h = (b - a)/n < \delta$. Od tod sledi, da se da vsaka zvezna funkcija s poljubno natančnostjo aproksimirati s stopničastimi funkcijami.



Slika 2.

Integral stopničaste funkcije. Naj bo stopničasta funkcija $f(x)$ povsod na intervalu $[a, b]$ pozitivna! Določeni integral pomeni geometrično ploščino lika med krivuljo $y = f(x)$ in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$. Razdelimo interval $[a, b]$ s točkami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ na tako majhne dele, da je funkcija $f(x)$ na vsakem delnem intervalu (x_{k-1}, x_k) konstanta. In sicer naj bo $f(x) = l_k$, kadar je $x_{k-1} < x < x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Če v vsaki razdeliščni točki postavimo pravokotnico na os (x), smo lik razrezali na same pravokotnike (sl. 1). Ploščina lika je zato kar $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, kjer so $p_1, p_2, \ldots p_n$ ploščine posameznih pravokotnikov. Če zaznamujemo širino k-tega delnega intervala z $\delta_k = x_k - x_{k-1}$, je $p_k = l_k \delta_k$. Torej $p = \Sigma l_k \delta_k$. To je integral naše funkcije. Ista definicija naj velja za vsako stopničasto funkcijo, tudi če ni pozitivna. Vedno razdelimo interval $[a, b]$ na tako majhne dele, da je funkcija $f(x)$ na vsakem delnem intervalu konstantna, in postavimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = l_1 \delta_1 + l_2 \delta_2 + \ldots + l_n \delta_n \tag{4}$$

Vrednost integrala zaznamujemo na kratko z $I(f)$, tako da je

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \Sigma l_k \delta_k \tag{4*}$$

Vsota na desni se nanaša na vse delne intervale.

Tako definirani integral stopničastih funkcij ima vse običajne lastnosti integrala. Brez posebnih težav se da namreč dokazati, da je integral vsote enak vsoti integralov posameznih sumandov

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

in da se konstantni faktor sme izpostaviti pred znak integrala

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

Nadalje naj omenimo še neko pomembno lastnost. Zaznamujmo z m in M natančno spodnjo in zgornjo mejo stopničaste funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Očitno je ena izmed vrednosti $l_1, l_2, \ldots, l_n$ enaka m, ena pa M. Ker je $m \leqq l_k \leqq M$ za vsak indeks k, leži vrednost integrala v mejah

$$(b-a)\,m \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M\,(b-a)$$

Norma funkcije $f(x)$ je enaka največjemu izmed števil $|l_1|, |l_2|, \ldots, |l_n|$, Ker je $|\Sigma l_k \delta_k| \leqq \Sigma |l_k|\,\delta_k \leqq \Sigma \|f\|\,\delta_k = (b-a)\,\|f\|$, velja ocena

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq (b-a)\,\|f\|$$

Naštejmo pravkar ugotovljene lastnosti integrala:

1^0 $I(f+g) = I(f) + I(g)$

2^0 $I(Af) = AI(f)$

3^0 $|I(f)| \leqq (b-a)\,\|f\|$

Tu sta $f(x)$ in $g(x)$ poljubni stopničasti funkciji, A pa poljubno realno število.

Stopničaste funkcije tvorijo normiran vektorski prostor S. Vsaka funkcija iz te množice S ima določeni integral. To se pravi, vsakemu elementu $f(x)$ iz vektorskega prostora S pripada neko število $I(f)$. Integral je torej neka zvrst funkcije: neodvisna spremenljivka je stopničasta funkcija $f(x)$, »funkcijska vrednost« pa je integral $I(f)$. Tako funkcijo funkcije imenujemo *funkcional*. Ker sta izpolnjeni enačbi 1^0 in 2^0, imenujemo funkcional $I(f)$ *linearen*. Zaradi neenačbe 3^0 pa pravimo, da je funkcional $I(f)$ omejen. Torej je integral omejen linearen funkcional v vektorskem prostoru S. Gre zdaj za to, da pojem integrala razširimo še na druge funkcije, z drugimi besedami rečeno, da razširimo definicijsko področje funkcionala $I(f)$. Preden to storimo, si oglejmo neko lastnost integrala, ki sledi iz omejenosti.

Naj bo $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ zaporedje stopničastih funkcij, ki konvergira v smislu norme proti nič: $\lim \|f_n\| = 0$. Ker je $|I(f_n)| \leqq (b-a)\,\|f_n\|$, vidimo od tod, da konvergira ustrezno zaporedje integralov proti nič

$$\lim I(f_n) = 0, \qquad n \to \infty$$

Integral bomo zdaj definirali za vse tiste funkcije, ki se dajo s poljubno natančnostjo aproksimirati s stopničastimi funkcijami. Kajti vsaka taka funk-

cija $f(x)$ je limita enakomerno konvergentnega zaporedja stopničastih funkcij $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ Ker je to zaporedje konvergentno v smislu norme, pripada vsakemu pozitivnemu številu ε tak zadosti velik indeks n, da je $\| f_{n+p} - f_n \| < \varepsilon$ za vsako naravno število p. Od tod sledi $| I(f_{n+p}) - I(f_n) | = | I(f_{n+p} - f_n) | \leqq \leqq (b-a) \| f_{n+p} - f_n \| < (b-a)\,\varepsilon$. Torej zadošča ustrezno zaporedje integralov $I(f_n)$ Cauchyjevemu pogoju in je zato konvergentno. Limita $\lim I(f_n)$ je po definiciji enaka integralu limitne funkcije $f(x)$. Če konvergira razen zaporedja $f_n(x)$ tudi zaporedje $g_n(x)$ proti funkciji $f(x)$, imata zaporedji integralov $I(f_n)$ in $I(g_n)$ isto limito. Zaporedje razlik $f_n(x) - g_n(x)$ konvergira namreč v smislu norme proti nič. Te razlike so seveda stopničaste funkcije. Po prejšnjem limitira zaporedje integralov $I(f_n - g_n)$ proti nič. Ker je $I(f_n - g_n) = I(f_n) - I(g_n)$, vidimo, da je res $\lim I(g_n) = \lim I(f_n)$. Od tod sklepamo, da je naša definicija smiselna. Če postavimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$$

je s tem integral funkcije $f(x)$ nedvoumno določen. Pri tem je $f_n(x)$ poljubno zaporedje stopničastih funkcij, ki konvergira proti $f(x)$. Tako smo razširili pojem integrala na tiste funkcije, ki se dajo s poljubno natančnostjo aproksimirati s stopničastimi funkcijami. Med te funkcije sodijo vse zvezne funkcije. Tako definirani integral ima seveda vse lastnosti 1^0, 2^0 in 3^0.

To je v kratkih obrisih pot, ki sta jo ubrala C. Pisot in M. Zamansky pri definiciji določenega integrala. Vidimo, da je njuna metoda v principu tale: Integral je omejen linearen funkcional. Najprej ga skušamo definirati za kak poseben razred funkcij. Ta razred mora biti tak, da je uvedba integrala za ustrezne funkcije čimbolj preprosta in da se dajo vse zvezne funkcije aproksimirati s poljubno natančnostjo s funkcijami iz razreda. V našem primeru je bil to razred stopničastih funkcij. Misel, uvesti določeni integral z uporabo stopničastih funkcij, seveda ni nova. Pač pa doslej ta način definicije ni bil v navadi v elementarnih učbenikih.

S podobno metodo moremo definirati Lebesgueov integral. Le normo stopničaste funkcije je treba drugače definirati. Naj bo zdaj norma $\| f \|$ stopničaste funkcije $f(x)$ definirana z enačbo

$$\| f \| = I(|f|)$$

Integral pozitivne stopničaste funkcije je pozitiven. Enak nič je le v primeru, ko je funkcija enaka nič. Zato je $\| f \| \geqq 0$ in velja $\| f \| = 0$ samo, če je $f(x) \equiv 0$. Brez težave se da dokazati, da ima nova norma $\| f \|$ tudi lastnosti 1 in 2 s strani 50. Ker je $| I(f) | \leqq I(|f|) = \| f \|$, je integral $I(f)$ tudi za novo normo omejen linearen funkcional. Na isti način kakor prej razširimo definicijsko območje integrala na vse tiste funkcije, ki se dajo aproksimirati s poljubno natančnostjo s stopničastimi funkcijami v smislu nove norme. M. Zamansky je dokazal, da se tako razširjeni integral ujema z Lebesgueovim integralom.

Literatura:

C. Pisot — M. Zamansky: Mathématiques générales. Pariz, 1959.

LIMITNI CIKLI

GABRIJEL TOMŠIČ

Članek, ki ga objavljamo na tem mestu, posega deloma v vsakdanjo tehniško prakso, deloma pa se dotika najnovejših matematičnih raziskovanj. Izvoru nihanja, na primer, skušamo vselej določiti tak režim dela, da bo izvor periodično spreminjal svoje stanje, in to tako, da bo to spreminjanje stabilno. V faznem portretu izvora slika tâko vedenje zaključen fazni tir, kateremu se poljubno približujejo fazni tiri iz njegove neposredne okolice. Tak fazni tir imenujemo limitni cikel.

Matematiku se ob tem kar samo po sebi zastavi vprašanje: Koliko limitnih ciklov imajo lahko dana diferencialna vprašanja? Raziskave v tej veji kvalitativne teorije diferencialnih enačb so šele v povojih. Prvi pomembnejši korak v tej smeri pomeni nedavno delo I. G. Petrovskega in E. M. Landisa. Temu delu bo posvečen zaključni del članka.

1. Najprej si oglejmo kar preprosto harmonično nihanje. Tako nihanje nastane, če deluje na masno točko sila iz središča in je sorazmerna razdalji masne točke od središča. Enačba takega nihanja, pri katerem ne upoštevamo nikakršnega trenja, je linearna diferencialna enačba drugega reda:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

kjer je m masa točke, k pa pozitiven sorazmernostni faktor. Postavimo $k/m = \omega_0^2$ in dobimo znano enačbo harmoničnega oscilatorja. Harmoničnemu oscilatorju ustreza nihajni krog, sestavljen iz kapacitivnosti C in samoinduktivnostti L.

Splošna rešitev diferencialne enačbe (1) se glasi:

$$x = K \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2}$$

Torej harmonični oscilator periodično niha. Nihanja ne dobimo edino v primeru, če je $x_0 = 0$ in $\dot{x}_0 = 0$, to je le tedaj, kadar je harmonični oscilator v začetnem trenutku v ravnotežju. Amplitudo K in začetno fazo φ_0 določata začetna pogoja, krožna frekvenca ω_0 oziroma perioda $T = 2\pi/\omega_0$ pa nista odvisni od začetnih pogojev, temveč le od parametrov nihajočega sistema.

Postavimo $\dot{x} = y$ in si oglejmo, kako se odraža gibanje harmoničnega oscilatorja na ravnini x, y, kjer sta x, y pravokotni Descartesovi koordinati. Vsakemu stanju sistema, ki je določen s koordinatama x in y (y je hitrost), ustreza točka na ravnini x, y. Tudi obratno ustreza vsaki točki x, y na ravnini eno samo stanje sistema. Ravnino x, y imenujemo fazno ravnino. Tako nam fazna ravnina predstavlja množico vseh stanj našega sistema. Kako se spreminja stanje sistema, lahko ponazorimo z gibanjem neke točke na fazni ravnini. Krivuljo, po kateri se taka točka giblje, imenujemo fazni tir in hitrost točke fazno hitrost. Cel fazni tir je tista krivulja, ki jo opiše točka v vsem času gibanja, t. j. od $t = -\infty$ do $t = +\infty$.

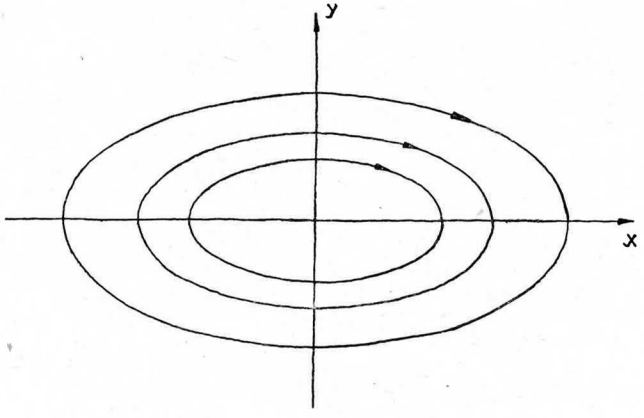
Če se vrnemo na diferencialno enačbo harmoničnega oscilatorja, bomo hitro dobili fazne tire. Rešitev diferencialne enačbe nam že izda parametrične enačbe faznih tirov

$$x = K \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad y = -K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Eliminirajmo čas iz obeh enačb! Tako dobimo enačbe faznih tirov:

$$x^2/K^2 + y^2/K^2\,\omega_0^2 = 1$$

Taka enačba pa predstavlja družino elips (sl. 1). Vsa ravnina je napolnjena z elipsami, ki so vložene druga v drugo, izvzeto je edino izhodišče, kajti tam elipsa degenerira v točko. Kot vidimo, ustrezajo periodičnemu gibanju, kakršno smo opisali sedaj, na fazni ravnini sklenjene krivulje, v našem posebnem primeru elipse. Ravnotežnemu stanju oscilatorja ustreza na ravnini tisti tir, ki degenerira v točko; to je pa ravno trivialna rešitev enačbe (1) in predstavlja središče (center) elips. Prav lahko zaključimo, da se splošne lastnosti gibanja pojavljajo kot lastnosti faznih tirov. Tako nam da fazna ravnina prav pregledno sliko nekega dinamičnega sistema z vso množico gibanj, ki jih dobimo pri najrazličnejših začetnih pogojih.



Slika 1.

V našem primeru harmoničnega oscilatorja smo prišli do faznih tirov na fazni ravnini z uporabo rešitev enačbe oscilatorja. Vendar lahko pridemo do zaključkov o gibanju točke na fazni ravnini direktno iz prvotne diferencialne enačbe (1), ne da bi poznali njene rešitve. Na tak način dobimo podatke o gibanju predvsem v primeru, kadar težko pridemo do analitičnih izrazov za integralne krivulje. V takem primeru zamenjamo prvotno enačbo drugega reda z dvema ekvivalentnima enačbama prvega reda, kot n. pr.:

$$dx/dt = y \quad \text{in} \quad dy/dt = -\omega_0^2\,x$$

Delimo te enačbi eno z drugo! Pri tem dobimo takole diferencialno enačbo:

$$dy/dx = -\omega_0^2\,x/y \tag{3}$$

Odvisnost x od t je izražena z diferencialno enačbo drugega reda, odvisnost y od x pa se izraža z diferencialno enačbo prvega reda. Izintegrirajmo diferencialno enačbo (3)! Hitro uvidimo, da integralne krivulje enačbe (3) sovpadajo s faznimi tiri enačbe (1).

Kako naj v splošnem določimo točko ravnotežnega stanja? Ravnotežnemu stanju ustrezajo take točke, za katere sta hkrati izpolnjeni enačbi $dx/dt = 0$ in $dy/dt = 0$. S fizikalnega stališča je to popolnoma očitno, saj je takrat hitrost

enaka nič in prav tako sta pospešek oziroma sila tudi enaka nič. V splošnem ravnotežnemu stanju ustrezajo singularne točke enačb, kakršna je enačba (3). Singularne točke poljubne diferencialne enačbe so take točke, v katerih je naklon tangente nedoločen.

Na kratko lahko označimo linearni sistem brez trenja (harmonični oscilator), da je to tak sistem, ki pri poljubnih začetnih pogojih povzroči periodično gibanje okoli ravnotežne lege $x = 0$, $y = 0$, če le izključimo primer, da bi bili začetni pogoji enaki ravnotežnemu stanju ($x = 0$, $y = 0$).

2. Sedaj si oglejmo, kako se spremene rezultati, ki smo jih dobili, če vzamemo malo zahtevnejši primer, t. j. linearni oscilator, pri katerem upoštevamo trenje. Tedaj se enačba gibanja glasi:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

kjer je b koeficient trenja. Analogen primer v elektriki je nihajni krog z omsko upornostjo. Pri tem se nihanje podreja tejle enačbi:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0,$$

kjer so L, R, C kot običajno induktivnost, upornost in kapacitivnost, q pa naboj na ploščah kondenzatorja. Vzemimo $b/m = 2h$, $k/m = \omega_0^2$ oziroma $R/L = 2h$, $1/LC = \omega_0^2$, pa dobimo prejšnji dve enačbi v splošni obliki:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4}$$

Vzemmio, da je $h^2 < \omega_0^2$! V tem primeru imamo opraviti z dušenim oscilatorskim procesom.

Splošna rešitev diferencialne enačbe (4) se glasi:

$$x = Ke^{-ht}\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{5}$$

Tu je

$$\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

K in φ_0 spet določimo z začetnimi pogoji.

Izraz za hitrost se pa glasi:

$$\dot{x} = -Ke^{-ht}[h\cos(\omega t + \varphi_0) + \omega\sin(\omega t + \varphi_0)] \tag{6}$$

Hitro opazimo, da funkciji $x(t)$ in $\dot{x}(t)$ nista periodični. Kot vemo, mora za periodične funkcije veljati tole: $f(t + l) = f(t)$, in sicer za vsako vrednost argumenta t. Najmanjši l imenujemo periodo $f(t)$. Pri nas pa za poljubno vrednost t zgornji pogoj ni izpolnjen. Le časovna razdalja med dvema zaporednima prehodoma čez ravnotežno stanje je stalna in je enaka $T = 2\pi/\omega$. To časovno razdaljo bomo imenovali pogojno periodo pri dušenem oscilatorskem procesu. Slika 2 nam kaže odvisnost koordinat od časa. Hitrost dušenja je določena z vrednostjo h, ta pa je odvisna od izbire časa. Poglejmo si razmerje dveh zaporednih ekstremov, n. pr. maksimumov $x_m'/x_m'' = e^{hT} = e^{2\pi h/\omega}$ Logaritem razlike dveh zaporednih maksimumov bomo imenovali logaritmični dekrement dušenja d. Torej je $d = hT = 2h\pi/\omega$.

Poglejmo si fazno ravnino za tak sistem in sliko na njej, ki nam kaže množico vseh možnih gibanj. Ker spet poznamo rešitev diferencialne enačbe (4), imamo takoj parametrične enačbe na fazni ravnini x, y

$$x = Ke^{-ht}\cos(\omega t + \varphi_0),\quad y = -Ke^{-ht}[h\cos(\omega t + \varphi_0) + \omega\sin(\omega t + \varphi_0)].$$

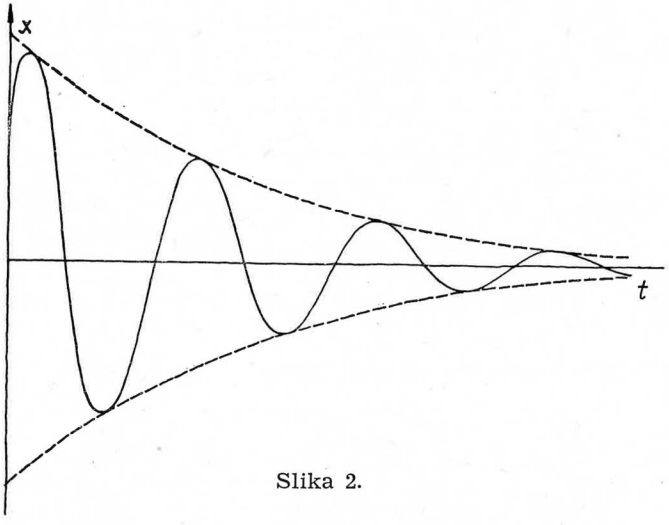
Spoznali bomo, da je to družina spiral, ki ima asimptotično točko v koordinatnem izhodišču. Preidimo zato na nove koordinate s tole linearno transformacijo:

$$u = \omega x \text{ in } v = y + h x \qquad (*)$$

Zaznamujmo še $\omega K = C'$ in bo $u = C'e^{-ht} \cos(\omega t + \varphi_0)$, $v = -C'e^{-ht} \sin(\omega t + \varphi_0)$. Še bolj preprosto bo, če uvedemo polarni koordinati: $u = \varrho \cos \psi$, $v = \varrho \sin \psi$. Tako dobimo: $\varrho = C'e^{-ht}$, $\psi = -(\omega t + \varphi_0)$. Eliminirajmo čas t in pridemo do:

$$\varrho = Ce^{h\psi/\omega} \qquad (7)$$

kjer je $C = C'e^{h\varphi_0/\omega}$. Oglejmo si fazne tire na ravnini u, v. Hitro vidimo, da so to logaritmične spirale z asimptotično točko v koordinatnem izhodišču. Ko gre $t \to \infty$, ψ pada in tudi $\varrho \to 0$. Točka, ki se giblje po spirali. se asimptotično



Slika 2.

približuje koordinatnemu izhodišču (sl. 3). Lastnosti faznih tirov se pri obratni transformaciji ne spremene, zato lahko trdimo, da je družina faznih tirov na ravnini x, y, tudi družina spiral z asimptotično točko v koordinatnem izhodišču. Skozi vsako točko fazne ravnine teče ena sama spirala. Vsa ravnina je polna spiral, ki so vložene ena v drugo in po katerih se točka asimptotično približuje koordinatnemu izhodišču. Izjema pa je spet ravnotežno stanje $x = 0$, $y = 0$, ki ga štejemo za posebni fazni tir. Pri gibanju po spirali ni fazna hitrost nikoli nič, postopoma pa se manjša z vsakim obratom, čas vsakega obrata pa ostane stalen: $T = 2\pi/\omega$.

Sliko na fazni ravnini smo dobili z že prej znanimi rešitvami diferencialne enačbe (4), vendar bi lahko prišli do tega rezultata tudi direktno. Kot je znano, lahko enačbo (4) nadomestimo z dvema diferencialnima enačbama prvega reda:

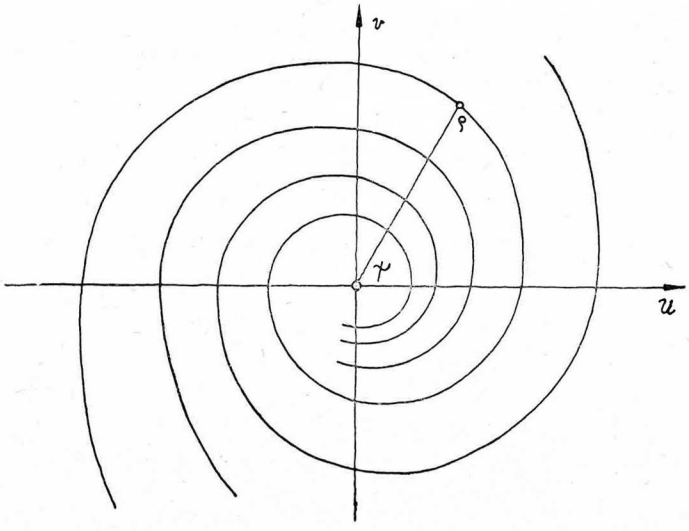
$$dx/dt = y,\ dy/dt = -2hy - \omega_0^2 x$$

Delimo eno enačbo z drugo in dobimo diferencialno enačbo

$$dy/dx = (-2hy - \omega_0^2 x)/y.$$

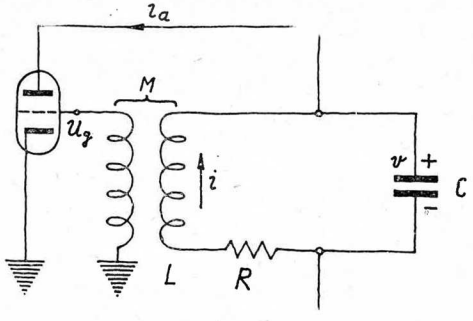
Dalje postopamo kot v primeru 1.

Torej zaključimo, da sistem, ki smo ga sedaj obravnavali, pri poljubnih začetnih pogojih dušeno niha okoli ravnotežnega stanja. Edina izjema bi nastala tedaj, kadar bi začetni pogoji sovpadali z ravnovesnim stanjem. Pri



Slika 3.

poljubnih začetnih odklonih pa se sistem v določenem času vedno vrne poljubno blizu k ravnotežnemu stanju. Torej je ravnotežno stanje stabilno. Take vrste stabilnost, da začetni odkloni ne naraščajo, ampak se celo duše, imenujemo absolutno stabilnost.



Slika 4.

3. Poglejmo si, kakšne so razmere pri še bolj zapletenem primeru. Vzemimo elektronski generator z nihajnim krogom v anodnem tokokrogu in z induktivno povratno zvezo, kot nam to kaže slika 4.

Po Kirchhoffovem zakonu napišemo diferencialno enačbo za nihanje elektronskega generatorja:

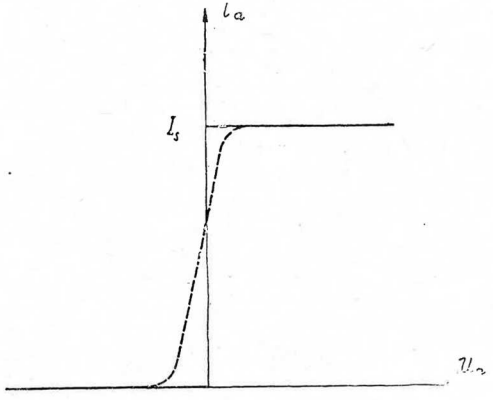
$$Ri = -v - Ldi/dt,\ i = i_a + Cdv/dt,$$

kjer je C — kapacitivnost, R — upornost, L — induktivnost, i_a — anodni tok, u_g — mrežna napetost, v napetost na nihajnem krogu, M — medsebojna induktivnost.

Eliminirajmo v in dobimo:

$$LCd^2i/dt^2 + RCdi/dt + i = i_a \tag{8}$$

Zaradi nihanja nihajnega kroga in induktivne zveze niha tudi u_g, ta pa spreminja anodni tok i_a v skladu s karakteristiko elektronke. Torej je anodni tok odvisen od mrežne napetosti $i_a = i_a(u_g)$, pri čemer je $u_g = -Mdi/dt$. Karakte-



Slika 5.

ristika elektronke naj bo pravokotna, tok nasičenja pa I_s. Karakteristika elektronke je razvidna s slike 5. Grobo lahko rečemo, da se i_a vede takole:

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{za } u_g < 0 \\ I_s & \text{za } u_g > 0 \end{cases} \tag{**}$$

Torej je i_a večji del časa ali enak nič ali pa I_s. Izberimo si táko razporeditev tuljav, da bo koeficient medsebojne induktivnosti $M < 0$. V enačbo (8) vstavimo $x = i/I_s$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $2h = R/L$. Upoštevajmo še (**), pa dobimo tako enačbo

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} 0, & \text{kadar je } \dot{x} < 0 \\ \omega_0^2, & \text{kadar je } \dot{x} > 0 \end{cases} \tag{9}$$

Ta enačba je nelinearna, ker je desna stran nelinearno odvisna od $\dot{x}$. Vedenje funkcije $x(t)$, ki sledi tej enačbi pa moremo obravnavati v dveh delih. Dokler je $\dot{x} < 0$ je $x(t)$ rešitev linearne enačbe

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{9a}$$

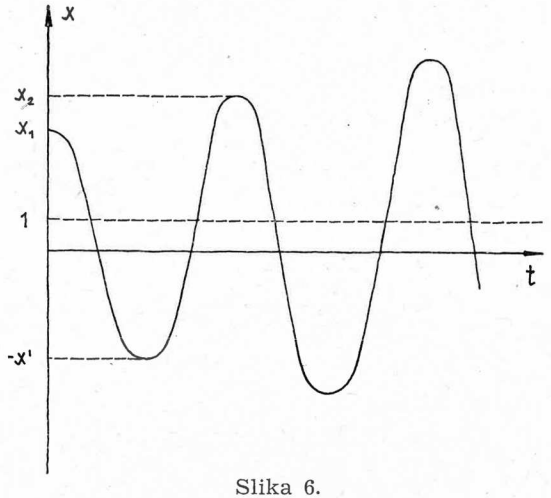
ko pa je $\dot{x} > 0$ reši $x(t)$ enačbo

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \tag{9b}$$

Fazni tiri enačbe (9) sovpadajo na spodnji polovici fazne ravnine s faznimi tiri enačbe (9 a), na zgornji polovici fazne ravnine pa so identični s faznimi

tiri enačbe (9 b). Funkcija $x\,(t)$ in njen odvod $\dot{x}\,(t)$ pa morata biti zvezni in omejeni funkciji, kot zahteva njun fizikalni pomen. To pa pomeni, da zgornje veje faznih tirov enačbe (9) zvezno in gladko prehajajo v spodnje veje teh tirov.

Poglejmo si, kje je ravnotežna lega? Prav gotovo mora biti tedaj $\dot{x} = 0$. To je v prvem primeru pri enačbi (9 a) pri koordinati $x = 0$, v drugem primeru pri enačbi (9 b) pa pri koordinati $x = 1$. Če n. pr. začnemo s primerom, da je $x < 0$, nam gibanje opiše diferencialna enačba (9 a). Hitrost $\dot{x}$ se po absolutni vrednosti manjša in postane po času $t = t_1$ enaka nič in sistem doseže koordinato



Slika 6.

$x = -x'$. Zatem hitrost spremeni znak in nihanje opisuje enačba (9 b), ki ima, kot smo prej ugotovili, ravnotežno lego v koordinati $x = 1$. Začetni pogoj za ta drugi polnihaj je ravno stanje, v katero je prišel sistem v prejšnjem polnihaju. Na ta način dobimo nihanje, sestavljeno iz dveh polnihanj (sl. 6).

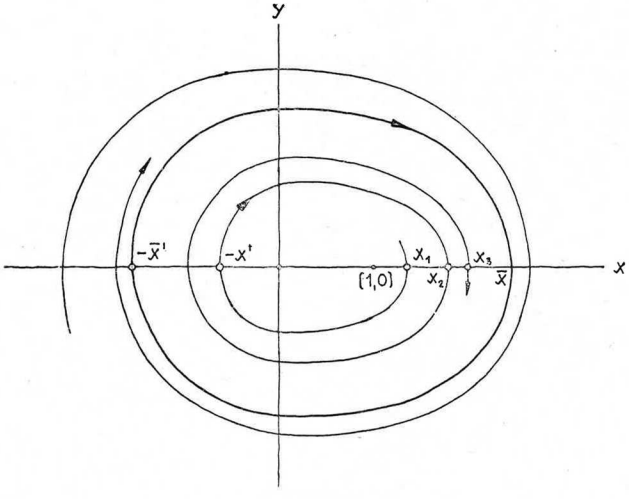
Oglejmo si spet fazne tire na fazni ravnini $x, y = \dot{x}$ za elektronski generator s pravokotno karakteristiko. Fazni tiri v spodnji polravnini ($y < 0$) so enaki faznim tirom dušenega linearnega oscilatorja, kakršnega smo obravnavali v prejšnjem primeru 2; so torej spirale z asimptotično točko. V zgornji polravnini imamo ravno take fazne tire kot v spodnji polravnini, le da ima oscilator ravnotežno stanje v točki (1, 0). Z zlepljenjem spiral s spodnje in zgornje polravnine na abscisni osi dobimo cele fazne tire, ki so zvezne funkcije. Slika 7 je obča slika fazne ravnine elektronskega generatorja s pravokotno karakteristiko. Pokažimo, da na fazni ravnini eksistira sklenjen fazni tir — c i k e l. Poglejmo si poljuben fazni tir, ki gre na spodnjo polravnino, čez neko točko x_1 polosi pozitivnih x (sl. 7). Iz spodnje polravnine se ta tir vrne skozi točko $-x'$ na zgornjo polravnino, in v točki x_2 spet preseče pozitivno polos. Za vse te točke velja, da je $x_1, x_2, x' > 0$. Poiščimo zvezo med x_1 in x_2. V spodnji polravnini tvorijo tiri, kot smo prej rekli, spirale, ki smo jih dobili kot fazne tire pri oscilatorju z dušenjem in ravnotežnim stanjem v točki (0, 0) v prejšnjem primeru 2. Tako velja $x' = x_1 e^{-d/2}$, kjer je $d = hT = 2\pi h/\sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ logaritmični dekrement nihajnega kroga generatorja. V zgornji polravnini so fazni

tiri ravno tako spirale oscilatorja, le da je njegovo ravnotežno stanje premaknjeno za enoto v desno, t. j. v točko (1, 0). Zato imamo:

$$x_2 - 1 = (x' + 1)\, e^{-d/2},$$

kjer sta $x' = 1$ in $x_2 - 1$ razdalji začetne in končne točke polkrivulje od ravnotežnega stanja (1, 0). Eliminirajmo x' in dobimo:

$$x_2 = 1 + e^{-d/2} + x_1\, e^{-d} \tag{10}$$



Slika 7.

Ta funkcija je preslikava poltraka vase. Točke polosi povratno enolično in zvezno preslika v točke iste polosi. Stalna (fiksna) točka te transformacije je taka točka, ki se preslika sama vase. Očitno bo točka, ki se preslika sama vase, ravno presečišče sklenjenega faznega tira s polosjo pozitivnih x. V enačbo (10) postavimo $x_1 = \bar{x}$ in $x_2 = \bar{x}$ in dobimo enačbo za stalno točko:

$$\bar{x} = 1 + e^{-d/2} + \bar{x}\, e^{-d} \text{ oziroma}$$

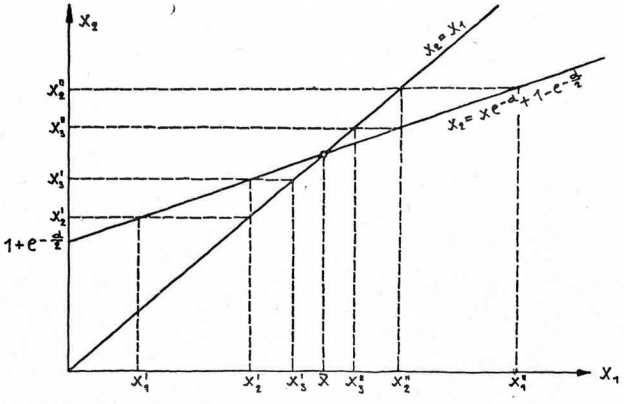
$$\bar{x} = (1 + e^{-d/2})/(1 - e^{-d}) = 1/(1 - e^{-d/2}) > 1$$

Poglejmo si še naslednji diagram (sl. 8)! Funkcija (10) nam da premico z naklonskim kotom e^{-d} in odsekom na ordinatni osi $1 + e^{-d/2}$. Stalna točka $\bar{x}$ pa mora po definiciji ležati na premici $x_1 = x_2$ in jo določimo kot presečišče te premice z (10).

Vzemimo poljuben fazni tir (naj ta ne bo sklenjen) in si poglejmo zaporedje točk presečišč s polosjo $y = 0$, $x > 0$. Vsaka naslednja točka je določena s prejšnjo po enačbi (10). Na sliki 8 imamo tak primer za dve zaporedji: za prvo, kjer je začetna točka $x_1 < \bar{x}$, in drugo, kjer je začetna točka $x_1'' > \bar{x}$. Iz slike se lepo vidi, da se obe zaporedji $x_1', x_2', x_3', \ldots$ in $x_1'', x_2'', x_3'', \ldots$ približujeta k stalni točki $\bar{x}$. Od tod očitno sledi, da se vsi fazni tiri z naraščajočim t asimptotično približujejo k sklenjenemu faznemu tiru, bodisi od zunaj ali od znotraj. Tako lahko definiramo pojem limitnega cikla. Vsak sklenjen fazni tir,

proti kateremu drugi tiri limitirajo (pri $t \to \infty$) in ki ustreza nekemu periodičnemu procesu v sistemu, imenujemo limitni cikel. Tako torej periodičnemu gibanju ustreza sklenjen fazni tir na fazni ravnini in seveda obratno vsakemu sklenjenemu tiru periodično gibanje.

Pomudimo se še malo ob pojmu stabilnosti! Poleg dejstva, da eksistirajo periodična gibanja, nas zanima še, ali so taka periodična gibanja stabilna. Kot smo ugotovili, ustreza periodičnemu gibanju gibanje točke po sklenjenem faznem tiru. Pa obkrožimo točko na faznem tiru z majhno okolico ε, ki naj se giblje skupaj s točko! Če sedaj lahko pri dovolj majhni okolici ε dobimo tako okolico $\delta(\varepsilon)$, da nobena točka, ki leži v začetnem trenutku v okolici $\delta(\varepsilon)$, nikoli ne zaide izven okolice ε, smatramo po Ljapunovu tako gibanje za stabilno.



Slika 8.

Pokažimo zgornjo definicijo nekoliko nazorneje. Vzemimo gibanje periodičnega sistema. Dajmo sistemu trenuten impulz v poljubni smeri! Točka, ki se giblje po faznem tiru, se premakne in nadaljuje gibanje po nekem drugem tiru. To točko zanamujemo s T_1 (sl. 9). Pri prvotnem gibanju, kjer še ne deluje impulz in katerega stabilnost raziskujemo, zaznamujemo točko s T. Pogoj za stabilnost gibanja lahko sedaj izrazimo takole: Če je točka T_1 v začetnem trenutku dovolj blizu točke T in ostane ves čas dovolj blizu nje, je gibanje, ki ga ponazarja točka T, po Ljapunovu stabilno.

Vrnimo se na naš primer in se vprašajmo, kdaj je limitni cikel stabilen. Če eksistira taka okolica ε limitnega cikla, v kateri se vsi fazni tiri asimptotično (pri $t \to \infty$) približujejo k limitnemu ciklu, je limitni cikel stabilen. Če pa eksistira v okolici ε le en fazni tir, ki se ne približuje (pri $t \infty \leftarrow$) k limitnemu ciklu, pa je limitni cikel nestabilen.

O limitnih ciklih se razvija posebna teorija. Z vrsto vprašanj in problemov, ki se tu pojavljajo, se bavijo nekateri ruski matematiki. Rezultati pa so danes še razmeroma skromni. Najprej bi nas zanimalo, v kakšnih sistemih nastopajo periodična gibanja in kakšni sistemi imajo limitne cikle. Periodična gibanja lahko srečamo v takih sistemih, ki se dajo opisati z diferencialnimi enačbami oblike:

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y).$$

Sistemi z analitičnimi desnimi stranmi pa imajo v splošnem limitne cikle. Za sistem $dx/dt = y + x[1 - (x^2 + y^2)]$, $dy/dt = -x + y[1 - (x^2 + y^2)]$ je tir

$x^2 + y^2 = 1$ ali v parametrični obliki $x = \cos(t - t_0)$, $y = \sin(t - t_0)$ limitni cikel, a enačbe vseh ostalih faznih tirov so: $x = \cos(t - t_0)/\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}$, $y = \sin(t - t_0)/\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}$. Za $C > 0$ se fazni tiri pri $t \to \infty$ navijajo na limitni cikel od znotraj, za $0 < C < +1$ pa od zunaj.

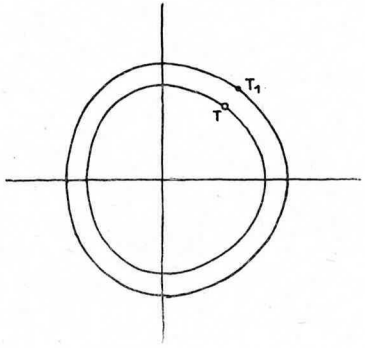
Eno izmed zanimivih vprašanj iz te teorije bi bilo vprašanje po številu limitnih ciklov določene diferencialne enačbe. Popolnega splošnega odgovora nanj še ni bilo. I. G. Petrovski in E. M. Landis sta na vprašanje sicer odgovorila, vendar se jima je posrečilo pokazati število limitnih ciklov le pri diferencialni enačbi take oblike:

$$dy/dx = P_2(x, y)/Q_2(x, y), \tag{11}$$

kjer sta $P_2(x, y)$ in $Q_2(x, y)$ polinoma druge stopnje:

$$P_2(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

$$Q_2(x, y) = A_1 x^2 + B_1 x y + \ldots + F_1.$$



Slika 9.

Dokazala sta, da enačba tipa (11) ne more imeti več kot tri limitne cikle. N. N. Bautyn pa je skonstruiral primer enačbe naše vrste (11) tako, da je imela ravno tri limitne cikle. Torej je ocena natančna.

Rešitev problema je osnovana na tejle ideji. Če menjamo koeficiente polinomov P_2 in Q_2, se število limitnih ciklov enačbe (11) lahko spreminja. Limitni cikli lahko celo izginejo ali pa se pojavijo novi. Zgoraj omenjena matematika sta razširila rešitev še na kompleksno polje, kjer vsakemu limitnemu ciklu ustreza kompleksni cikel, t. j. kompleksna integralna krivulja z določenimi topološkimi lastnostmi. Število teh kompleksnih ciklov pa se ne spreminja, če menjamo koeficiente na komplesnem področju polinomov P in Q. Kompleksni cikel ni treba da ustreza kakemu realnemu ciklu, zato je v splošnem število realnih limitnih ciklov manjše ali kvečjemu enako številu kompleksnih ciklov.

Literatura:

A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Hajkin: Teorija kolebanij, Moskva 1959.

I. G. Petrovski, E. M. Landis: Čislo predel'nyh ceklov diferencial'nogo uravnenija $dy/dx = P_2(x, y)/Q_2(x, y)$, Matematičeskoe prosveščenije, Moskva 1957.

N. N. Bogoljubov, J. A. Mitropol'skij: Asimptotičeskie metody v teoriji nelinejnyh kolebanij, Moskva 1958.

M. Gruden: Elektromagnetna nihanja in valovanja, Ljubljana 1955.

LASTNOSTI REŠITEV PROBLEMOV LINEARNEGA PROGRAMIRANJA

ALOJZIJ VADNAL

V naslednjem se bomo omejili na obravnavanje splošnega problema linearnega programiranja za minimum; prilagoditev problema za maksimum ne predstavlja nikakršne težave in jo zato opuščamo. Problem linearnega programiranja bomo obravnavali v naslednji splošni standardni[1] obliki:

Izračunati je treba vrednosti spremenljivk

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

ki ne morejo biti negativne:

$$x_1 \geqq 0, \; x_2 \geqq 0, \; \ldots, \; x_n \geqq 0 \tag{1a}$$

in ki zadoščajo linearnim enačbam:

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{aligned} \tag{1b}$$

tako, da ima linearna funkcija

$$f = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \tag{1c}$$

za te vrednosti spremenljivk minimum. Pri tem je $m < n$.

Če uvedemo naslednje matrike:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{Vmatrix}$$

in $C = \| c_1 \ldots c_n \|$,

formuliramo lahko problem v matrični obliki takole:

Izračunati je treba stolpni vektor X, ki zadošča neenačbi:

$$X \geqq 0 \tag{2a}$$

in matrični enačbi:

$$A X = B \tag{2b}$$

tako, da ima zanj linearna funkcija:

$$f(x) = C X \tag{2c}$$

minimum.

[1] A. Vadnal: Linearno programiranje. Obzornik za matematiko in fiziko. V. Št. 3. 1957. Ljubljana.

Postavljeni problem lahko izrazimo še v vektorski obliki, če uvedemo naslednje vektorje:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad P_0 = \begin{Vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{Vmatrix}, \quad P_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{Vmatrix}, \quad \ldots, P_n = \begin{Vmatrix} a_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{Vmatrix}$$

in $C = \| c_1 \ldots c_n \|$ takole:

Izračunati je treba stolpni vektor X, ki zadošča neenačbi:

$$X \geqq 0 \tag{3a}$$

in vektorski enačbi:

$$x_1 P_1 + \ldots + x_n P_n = P_0 \tag{3b}$$

tako, da ima zanj linearna funkcija:

$$f(x) = C X \tag{3c}$$

minimum.

Postavljeni problem si lahko geometrijsko ponazorimo na več načinov.

Vektor X naj bo vektor n-dimenzionalnega vektorskega prostora. Zaradi pogoja nenegativnosti se omejimo v tem vektorskem prostoru samo na vektorje, ki nimajo nobene komponente negativne. Vsaka izmed pogojnih enačb (1 b) je enačba kake hiperravnine tega vektorskega prostora. Linearna funkcija (1 c) je enačba družine hiperravnin; na vsaki od teh hiperravnin ima linearna funkcija $f(X)$ konstantno vrednost. Pri taki geometrični ponazoritvi lahko formuliramo problem geometrično takole: Določiti je treba tiste vektorje X n-dimenzionalnega vektorskega prostora, ki nimajo negativnih komponent, ki leže na preseku hiperravnin (1 b) in za katere ima linearna funkcija (1 c) minimum.

Vektorji $P_0, P_1, \ldots, P_n$ naj bodo vektorji m-dimenzionalnega vektorskega prostora. Iz enačbe (3 b) sledi, da mora biti vektor P_0 nenegativna linearna kombinacija vektorjev $P_1, \ldots, P_n$; komponente vektorja X so pri tem koeficienti linearne kombinacije. Pri taki geometrični ponazoritvi dobimo naslednjo geometrično formulacijo problema: Med vsemi mogočimi nenegativnimi linearnimi izražavami vektorja P_0 z vektorji $P_1, \ldots, P_n$ je treba poiskati tisto, ki ima take koeficiente, za katere ima linearna funkcija $f(X)$ minimum.

Omenimo še eno možno geometrično razlago! Vektor X naj bo vektor n-dimenzionalnega prostora R_n, vektor B pa vektor m-dimenzionalnega prostora R_m. Enačbe (1 b) imamo lahko za transformacijske enačbe, ki prevedejo prostor R_n v prostor R_m. V skladu s tako razlago dobimo naslednjo geometrično formulacijo problema: Želimo poiskati tiste vektorje prostora R_n, ki jih prevede linearna transformacija (1 b) v vektor B prostora R_m in med temi izbrati tiste, ki imajo nenegativne komponente in za katere ima linearna funkcija $f(X)$ minimum.

Stolpni vektor:

$$X = \{ x_1, \ldots, x_n \}$$

imenujemo *možno rešitev* postavljenega problema, če zadošča neenačbam (a) in enačbam (b), ni pa še treba, da bi imela za njo linearna funkcija (c) minimum.

Pri možni rešitvi X je lahko nekaj komponent enakih 0, sicer so pa pozitivne. Možno rešitev, v kateri ni več kakor m pozitivnih komponent, imenujemo *bazično možno rešitev*; če pa ima možna rešitev več kot m pozitivnih komponent, je *nebazična*. Ponavljamo, da je pri tem m število pogojnih enačb (b).

Če ima bazična možna rešitev natančno m pozitivnih vrednosti, dočim so vse druge vrednosti enake 0, jo imenujemo *nedegenerirano* bazično možno rešitev. Če pa ima možna rešitev manj kot m pozitivnih vrednosti, je *degenerirana*.

Vsako možno rešitev, za katero ima linearna funkcija $f(X)$ minimum, imenujemo *optimalno možno rešitev*. Med optimalnimi rešitvami razlikujemo nebazične in bazične in med zadnjimi še nedegerirane in degenerirane. Optimalna možna rešitev je potemtakem bazična in nedegenerirana, če ima natančno m pozitivnim komponent; po prejšnjem zadošča pogojem (a) in (b) in zanjo ima linearna funkcija (c) minimum.

Rešitve postavljenega problema odlikujejo neke zanimive lastnosti, ki omogočajo povezati linearno programiranje s teorijo konveksnih poliedrov.

Za možne rešitve velja naslednji izrek:

Vse možne rešitve linearnega programa tvorijo konveksno množico.

Izrek dokažemo v naslednji obliki, ki je prejšnji ekvivalentna: Če sta X^1 in X^2 dve možni rešitvi linearnega programa, tedaj je tudi vsaka konveksna linearna kombinacija

$$X = q\,X^1 + (1 - q)\,X^2 \qquad (0 \leqq q \leqq 1)$$

teh dveh rešitev tudi možna rešitev.

Ker sta X^1 in X^2 dve možni rešitvi, zadoščata pogoju nenegativnosti (a); očividno ustreza temu pogoju tudi vsaka njuna konveksna linearna kombinacija. Ker sta to dve možni rešitvi, zadoščata tudi pogojem (b); zato velja zanju:

$$A\,X^1 = B \quad \text{in} \quad A\,X^2 = B\,.$$

Za njuno konveksno linearno kombinacijo X sledi od tod:

$$\begin{aligned} A\,X &= A\,(qX^1 + (1 - q)\,X^2) = \\ &= q\,A\,X^1 + (1 - q)\,A\,X^2 = \\ &= q\,B + (1 - q)\,B \qquad\quad = B; \end{aligned}$$

konveksna linearna kombinacija X zadošča torej tudi pogojem (b) in je zato možna rešitev linearnega programa, kar je bilo treba dokazati.

Vsaka možna rešitev X je pravzaprav vektor ali točka n-dimenzionalnega prostora R_n; vse možne rešitve pa tvorijo po prejšnjem izreku neko konveksno množico tega prostora. Iz geometrične ponazoritve problema pa že vemo, da tvorijo vse možne rešitve presek m hiperravnin, ki so podane z enačbami (b). Presek vsakega končnega števila hiperravnin pa je kak konveksen polieder, ki ima samo kako končno število ekstremnih točk. Pri tem je ekstremna

točka definirana tako, da jo ni mogoče izraziti kot konveksno linearno kombinacijo drugih poliedrovih točk. Konveksni polieder, ki ga sestavljajo vse možne rešitve pa je lahko končen ali neskončen. Ker nas praktični problemi linearnega programiranja privedejo skoraj izključno na končne poliedre, bomo v naslednjem zanemarili možnost, da je polieder neskončen. Nadaljujmo torej razpravljanje samo za primere, ki jim ustrezajo končni konveksni poliedri možnih rešitev.

Denimo, da je množica vseh možnih rešitev konveksni končni polieder K, ki ima naslednje ekstremne točke:

$$E^1, E^2, \ldots, E^t.$$

Iz teorije konveksnih poliedrov je znano, da je mogoče vsako poliedrovo točko X izraziti kot konveksno linearno kombinacijo njegovih ekstremnih točk:

$$X = q_1 E^1 + \ldots + q_t E^t,$$

kjer je $0 \leqq q_i \leqq 1$ in $q_1 + \ldots + q_t = 1$.

Med možnimi rešitvami, ki sestavljajo končni konveksni polieder rešitev, so posebno odlikovane tiste, ki ustrezajo ekstremnim točkam poliedra; zanje velja namreč izrek:

V končnem konveksnem poliedru K eksistira vsaj ena ekstremna točka, v kateri ima linearna funkcija $f(X)$ minimum.

Denimo, da ima linearna funkcija $f(X)$ minimum v točki X^0 in da znaša ta minimum w. V tem primeru zadoščajo vse točke X poliedra K neenačbi:

$$w = f(X^0) \leqq f(X);$$

dokazati nam je torej treba, da je točka X^0 ena izmed ekstremnih točk poliedra K. Ker lahko izrazimo vsako točko poliedra K kot konveksno linearno kombinacijo njegovih ekstremnih točk, izrazimo na ta način lahko tudi točko X^0:

$$X^0 = p_1 E^1 + \ldots + p_t K^t,$$

kjer je $0 \leqq p_i \leqq 1$ in $p_1 + \ldots + p_t = 1$.

Zaradi aditivnosti linearne funkcije sledi po prejšnjem:

$$w = f(X^0) = f(p_1 E^1 + \ldots + p_t E^t) = p_1 f(E^1) + \ldots + p_t f(E^t).$$

Če v tem izrazu nadomestimo vse izraze $f(E^i)$, kjer je $i = 1, 2, \ldots, t$, s tistim od teh izrazov, ki ima najmanjšo vrednost, denimo, da je to $f(E^j)$, dobimo neenačbo:

$$w = f(X^0) \geqq (p_1 + \ldots + p_t) f(E^j),$$

in od tod neenačbo:

$$f(X^0) \geqq f(E^j).$$

Iz izhodiščne neenačbe $f(X^0) \leqq f(X)$ in iz zadnje neenačbe sledi enačba

$$f(X^0) = f(E^j),$$

iz katere sledi, da eksistira vsaj ena ekstremna točka poliedra K, v kateri ima linearna funkcija minimum; s tem pa je izrek dokazan.

Iz dokazanega izreka sledi, da ima linearna funkcija $f(X)$ minimum v kaki ekstremni točki konveksnega poliedra K. Če ima linearna funkcija minimum samo v eni točki, tedaj je ta točka prav gotovo ekstremna točka poliedra. Če pa ima linearna funkcija minimum v več točkah, tedaj ima minimum lahko v kakih ekstremnih točkah (v eni prav gotovo!), lahko pa tudi še v kakih drugih točkah, ki niso ekstremne. Glede teh možnosti velja naslednji izrek:

Če ima linearna funkcija $f(X)$ minimum v več ekstremnih točkah konveksnega poliedra K, tedaj ima minimum tudi v vseh točkah poliedra K, ki so konveksne linearne kombinacije vseh tistih ekstremnih točk poliedra, v katerih ima linearna funkcija minimum.

Denimo, da ima linearna funkcija $f(X)$ minimum w v ekstremnih točkah:

$$E^1, E^2, \ldots, E^h,$$

tako, da je:

$$w = f(E^1) = \ldots = f(E^h).$$

Vzemimo poljubno konveksno linearno kombinacijo teh ekstremnih točk:

$$Y = q_1 E^1 + \ldots + q_h E^h,$$

kjer je $0 \leqq q_i \leqq 1$ in $q_1 + \ldots + q_h = 1$.

Če izračunamo zanjo vrednost linearne funkcije $f(X)$, dobimo:

$$f(Y) = f(q_1 E^1 + \ldots + q_h E^h) =$$

$$= q_1 f(E^1) + \ldots + q_h f(E^h) =$$

$$= (q_1 + \ldots + q_h) w = w,$$

kar pomeni, da ima linearna funkcija $f(X)$ minimum tudi v točki Y; to pa je bilo treba dokazati.

Zaradi dokazanih izrekov zadostuje torej pri računanju optimalne rešitve problema, če upoštevamo samo tiste množne rešitve, ki ustrezajo ekstremnim točkam poliedra K; med njimi pa je treba izbrati tiste, za katere ima linearna funkcija minimum.

Vrnimo se k vektorsko izraženemu problemu linearnega programiranja. Vektorji $P_1, \ldots, P_n$ so vektorji m-dimenzionalnega vektorskega prostora R_m; zaradi enačbe (3 b) je vektor P_0 njihova nenegativna linearna kombinacija. Med vektorji $P_1, \ldots, P_n$ je največ po m linearno neodvisnih, vsaka skupina po več kot m vektorjev pa tvori sistem linearno odvisnih vektorjev. Vsaka skupina m linearno neodvisnih vektorjev tvori bazo vektorskega prostora R_m. Z baznimi vektorji je mogoče enolično linearno izraziti poljuben vektor prostora R_m.

Vzemimo kako bazično možno rešitev problema; taka rešitev ima največ m pozitivnih komponent. Problem vedno lahko priredimo tako, da pridejo

v vzeti bazični množni rešitvi pozitivne komponente na prva mesta, za njimi pa same ničle. Tako bazično možno rešitev pišemo torej takole:

$$X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0 \},$$

kjer je $k \leqq m$. Za bazične možne rešitve velja izrek:

Če eksistira $k \leqq m$ linearno neodvisnih vektorjev

$$P_1, P_2, \ldots, P_k$$

tako, da je

$$x_1 P_1 + \ldots + x_k P_k = P_0,$$

tedaj je bazična možna rešitev

$$X = \{ x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0 \}$$

ekstremna točka končnega konveksnega poliedra K.

Vzemimo pri dokazu napačno domnevo, da točka X ni ekstremna točka poliedra K. V tem primeru bi jo bilo mogoče izraziti kot konveksno linearno kombinacijo vsaj dveh drugih točk X^1 in X^2 poliedra takole:

$$X = q X^1 + (1 - q) X^2,$$

kjer je $0 < q < 1$. Ker so komponente $x_1, \ldots, x_k$ in oba koeficienta q in $1 - q$ pozitivna števila tako, da ne more priti do kompenzacije, morata imeti tudi točki X^1 in X^2 naslednjo strukturo:

$$X^1 = \{ x_1^1, \ldots, x_k^1, 0, \ldots, 0 \},$$

$$X^2 = \{ x_2^2, \ldots, x_k^2, 0, \ldots, 0 \}.$$

Ker sta točki X^1 in X^2 tudi možni rešitvi problema, ustrezata enačbama:

$$x_1^1 P_1 + \ldots + x_k^1 P_k = P_0,$$

$$x_1^2 P_1 + \ldots + x_k^2 P_k = P_0.$$

Ker so vektorji $P_1, \ldots, P_k$ linearno neodvisni, eksistira samo ena linearna izražava vektorja P_0 s temi vektorji. Zaradi tega velja za vse indekse:

$$x_i^1 = x_i^2$$

in od tod $X^1 = X^2$. Bazične rešitve X torej ni mogoče izraziti kot konveksno linearno kombinacijo dveh drugih rešitev; zato predstavlja ekstremno točko poliedra K, kar je bilo treba dokazati.

Dokažimo še obraten izrek:

Vektorji $P_1, \ldots, P_k$, ki ustrezajo kaki bazični rešitvi problema oziroma kaki ekstremni točki poliedra K, so linearno neodvisni.

Vzemimo bazično možno rešitev

$$X = \{ x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0 \},$$

kjer je $k \leqq m$; tej rešitvi ustrezajo vektorji $P_1, \ldots, P_k$ tako, da velja enačba:

$$x_1 P_1 + \ldots + x_k P_k = P_0 .$$

Dokazati je treba, da so vektorji $P_1, \ldots, P_k$ linearno neodvisni. Če bi bili ti vektorji linearno odvisni, bi eksistirala enačba:

$$a_1 P_1 + \ldots + a_k P_k = 0,$$

v kateri ne bi bili vsi koeficienti $a_1, \ldots, a_k$ hkrati enaki 0. Če zadnjo enačbo najprej prištejemo k predzadnji, nato pa jo od predzadnje še odštejemo, dobimo enačbi:

$$(x_1 + a_1) P_1 + \ldots + (x_k + a_k) P_k = P_0 ,$$

$$(x_1 - a_1) P_1 + \ldots + (x_k - a_k) P_k = P_0 .$$

Iz teh dveh enačb bi sledilo, da eksistirata še dve novi bazični možni rešitvi:

$$X^1 = \{ x_1 + a_1, \ldots, x_k + a_k, 0, \ldots, 0 \} \quad \text{in}$$

$$X^2 = \{ x_1 - a_1, \ldots, x_k - a_k, 0, \ldots, 0 \},$$

ki bi bili različni, ker niso vsi koeficienti $a_1, \ldots, a_k$ enaki 0. S tema dvema rešitvama bi bilo mogoče linearno izraziti prvotno možno rešitev takole:

$$X = \frac{X^1}{2} + \frac{X^2}{2} .$$

To pa je protislovje, ker je točka X ekstremna točka. Zaradi tega je predpostavka, da so vektorji $P_1, \ldots, P_k$ linearno odvisni, napačna.

Dokažimo še izrek, ki je važen za praktično razreševanje problemov linearnega programiranja:

Vsaki bazični možni rešitvi problema oziroma vsaki ekstremni točki konveksnega poliedra rešitev K je mogoče izmed vektorjev $P_1, \ldots, P_n$ prirediti natančno m linearno neodvisnih vektorjev.

Po prej dokazanem izreku ustreza vsaki bazični možni rešitvi $k \leqq m$ linearno neodvisnih vektorjev $P_1, \ldots, P_k$. Te vektorje priredimo dani bazični rešitvi.

Če je $k = m$, ni več kaj dokazovati, ker priredimo bazični rešitvi vektorje $P_1, \ldots, P_m$, ki so po prejšnjem izreku linearno neodvisni.

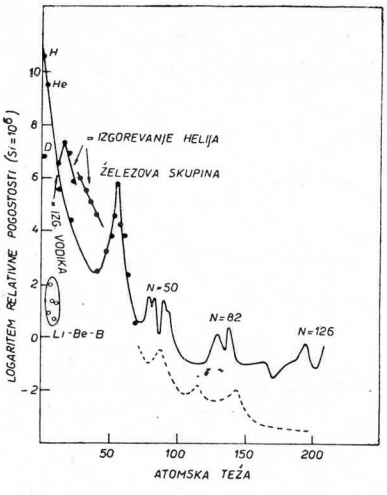
Razmotrimo pa še primer, ko je $k < m$. Bazični rešitvi ustreza po prejšnjem izreku, denimo, kar prvih k linearno neodvisnih vektorjev $P_1, \ldots, P_k$. Ker so to vektorji m-dimenzionalnega prostora R_m, je sistem vektorjev $P_1, \ldots, P_k$ mogoče dopolniti z $m-k$ vektorji $P_{k+1}, \ldots, P_m$ tako, da tvorijo vsi skupaj nov sistem linearno neodvisnih vektorjev, ki tvorijo bazo vektorskega prostora R_m. Ta razširjeni sistem vektorjev priredimo dani bazični rešitvi problema.

JEDRSKE REAKCIJE V ZVEZDAH*

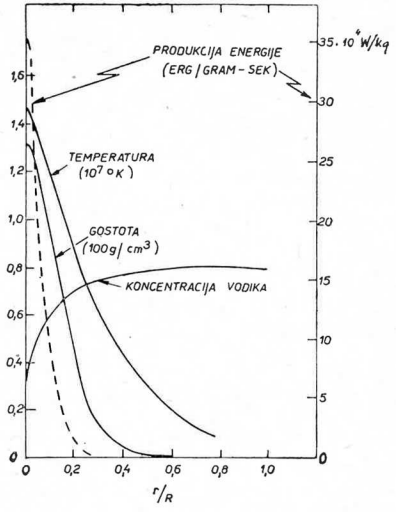
M. KREGAR in B. POVH

1. Pogostost elementov

Osrednji problem, ki ga proučuje astrofizika v zadnjem času, je razvoj zvezd. Pri tem je bistveno potrebno, da poznamo zvezdne energijske izvore. Ker dobiva zvezda svojo energijo v glavnem iz jedrskih reakcij, je izredno naraslo zanimanje za reakcije, ki so možne v zvezdah. Poleg drugih podatkov ki jih potrebujemo za študij teh reakcij, moramo poznati tudi zaloge različnih jedrskih goriv, torej pogostost posameznih elementov v vesolju.



Sl. 1. Pogostost elementov v vesolju. Z naraščanjem števila A pade pogostost elementov za faktor 10^{10}. Nad krivuljo leže elementi, ki nastanejo z izgorevanjem helija. Elementi okrog železa imajo največjo vezavno energijo na nukleon, zato vrh okrog železa ne preseneča. Pogostost težjih elementov (od A 100) je grobo gledano približno enaka. Spodnja črtkana krivulja velja za najlažje izotope posameznih elementov, ki ne morejo nastati z običajno absorpcijo nevtronov, ampak nastanejo z mnogo redkejšo absorpcijo protonov.



Sl. 2. Gostota, temperatura, produkcija energije in koncentracija vodika v zvezdi kot funkcija razdalje r od središča. Vrednosti spremenljivk so izračunane za tako veliko zvezdo kot je naše sonce ($R = 7 \cdot 10^8$ m). Enota na levi skali pomeni pri temperaturi 10^7 °K, pri gostoti pa 10^5 kg/m^3. Na desni pa je skala za energijski tok, ki izhaja iz 1 kg zvezdne snovi zaradi izgorevanja vodika. Leva skala (z enoto 1 = 100 masnih %) velja tudi za izračunano koncentracijo vodika pri starosti $4{,}5 \cdot 10^9$ let, za primer, da je bilo v začetku 80 masnih odstot. vodika.

Iz opazovane pogostosti elementov na zemlji, v meteorjih, na soncu in delno v ostalih zvezdah sta Suess in Urey leta 1956 sestavila tabelo za pogostost elementov v vesolju (sl. 1). Ali veljajo ti podatki za vse vesolje, se ne da dokazati, smemo pa domnevati, da imata osončje in njegova bližnja okolica približno podobno sestavo kot ostalo vesolje.

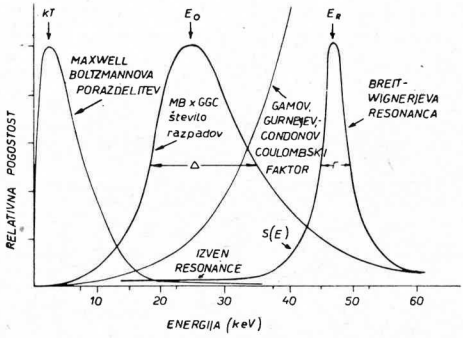
* Članek je večidel povzet po delu W. A. Fowler: The Origin of the Nuclear Species, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., 1958. Članek je tudi objavljen v knjigi Modern Physics for the Engineer, II.

Iz slike 1 se vidi, da pogostost elementov z naraščajočim atomskim številom do A = 100 pade za faktor 10^{10}. Daleč najbolj pogost je vodik, ki ga je 93 % vseh atomov v vesoljstvu oziroma 76 % vse vesoljne mase. Naslednji je helij, ki prispeva 23 % celotne mase. Samo 1 % vesoljne mase pa tvorijo težji elementi.

Hitro padanje krivulje, ki prikazuje pogostost elementov, prekine močan vrh okoli železa, ki štrli za faktor 10^4 iznad svoje okolice. To ne preseneča, saj imajo ti elementi največjo vezavno energijo na nukleon. Krivulja od A = 100 dalje je približno vodoravna.

2. Termonuklearne reakcije

Temperatura v središču zvezd se giblje med 10^7 in 10^9 °K, potem pa hitro pade proti površini, kot je prikazano na sliki 2. Temperaturam v središčih ustrezajo po znani enačbi $\langle \frac{1}{2} mv^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$ povprečne kinetične energije atomov od 1 do 100 keV.



Sl. 3. Diagrami za faktorje, ki odločajo o hitrosti reakcije (za T = 10^7 °K). Od leve proti desni si sledijo: Maxwell-Boltzmannova energijska porazdelitev delcev, hitrost reakcije na enoto energijskega intervala: coulombski faktor za ogljiko-dušikovo verigo, funkcija S (E). Navpična skala podaja samo relativne vrednosti.

Upoštevati moramo, da so v zvezdah zastopani v glavnem nabiti delci. Verjetnost, da dva takšna delca doživita reakcijo, je zelo odvisna od nabojev obeh delcev in njune kinetične energije. Presek za reakcijo med dvema nabitima delcema z nabojema Z_0 in Z_1 ter kinetično energijo E (glede na skupno težišče je podan z izrazom

$$\sigma (E, Z_0, Z_1) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{Z_0 Z_1 e^2}{2 \varepsilon_0 \hbar v}\right),$$

pri čemer je e osnovni naboj, ε_0 influenčna konstanta, v relativna hitrost obeh delcev, $\hbar$ pa Planckova konstanta, deljena z 2π.

Funkcija S (E) opisuje specifične lastnosti obeh jeder. Ločimo dva tipična primera obnašanja funkcije S (E). V energijskem območju, kjer za dano reakcijo ni nobene tako imenovane resonance, je S (E) približno konstanten. V bližini resonance pa ima funkcija S (E) obliko Breit-Wignerjeve disperzijske krivulje (sl. 3).

Eksponencialni faktor v zgornji enačbi pa opiše (po Gamovu, Gurneyu in Condonu) vpliv coulombskih odbojnih sil. Energijska odvisnost preseka tiči v glavnem v eksponencialnem faktorju; zato presek v tem območju hitro raste (sl. 3).

Za množino sproščene energije v zvezdi pa je važna hitrost reakcije, to je število reakcij na sekundo v prostorski enoti. Za hitrost reakcije sta torej važni poleg preseka še gostota delcev, ki nastopajo v reakciji, in temperatura, ki je parameter za energijsko porazdelitev delcev (slika 3, leva krivulja). Hitrost reakcije za vsak energijski razred delcev je proporcionalna produktu gostote, reakcijskega preseka in relativnega števila delcev v tistem energijskem intervalu. Na sliki 3 je narisana krivulja (druga od leve proti desni), ki opisuje hitrost reakcije na enoto energijskega intervala v odvisnosti od energije, in sicer za primer, ko je v bližini pragu resonanca. Z integriranjem te funkcije po energiji šele dobimo celotno hitrost reakcije. Le-ta je torej na sliki prikazana s ploščino pod omenjeno krivuljo.

Če v bližini pragu ni resonance, je S (E) približno konstanten, kar pa ne vpliva bistveno na obliko dobljene krivulje, le da se v splošnem vrh premakne k nižjim energijam in je hitrost reakcije manjša. Zaradi močne odvisnosti eksponencialnega faktorja od naboja sodelujočih delcev so pri najnižjih energijah (temperaturah) možne le reakcije, kjer nastopajo delci z nizkim nabojem. Šele pri višjih energijah (pri višjih temperaturah) lahko konkurirajo reakcije, v katerih sodelujejo delci z višjim Z.

3. Jedrske reakcije v zvezdah

Vzemimo, da imamo nekje v medzvezdnem prostoru dovolj snovi prej opisanega sestava, ki se zaradi naključnih neenakomernosti zgosti na nekaterih mestih. Taka zgoščina zaradi težnosti privlačuje snov iz okolice. Zaradi težnosti se celotna zgoščina nadalje krči in pretvarja pri tem svojo potencialno energijo v toplotno. Ker zvezda ne more oddati s sevanjem takoj vse toplotne energije, temperatura in gostota snovi naraščata. Ko doseže temperatura v središču okrog 10^7 °K in gostoto 100 g/cm³, se začno prve jedrske reakcije, ki dovajajo zvezdi dovolj energije, da doseže ravnotežje. Tipičen primer za temperaturo in gostoto posameznih plasti zvezde je prikazan na sliki 2.

Ker je v zvezdi največ vodika in so tudi električne sile med protoni manjše kot med drugimi dvojicami jeder, so izmed vseh trkov trki med protoni najbolj pogosti. Ko protona trčita, se ponavadi odbijeta. Včasih, toda zelo redko (enakrat na 10^{30} trkov) pa se z izsevanjem pozitrona in nevtrina združita v stabilno jedro devterija:

$$H^1 + H^1 \rightarrow D^2 + \beta^+ + \nu.$$

To je pravzaprav poseben primer razpada beta, pri katerem je začetno »jedro« $H^1 + H^1$ (»diproton«) nestabilno.

Nastanek devterija je šele prvi člen v verigi reakcij, do katerih pride pri nadaljnjih trkih. Devterij se kmalu združi s protonom v He^3. Dve jedri He^3 reagirata in dasta He^4 ter dva protona. Celotna veriga reakcij se glasi:

$H^1 + H^1 \rightarrow D^2 + \beta^+ + \nu$	$2 \cdot 1{,}19$ MeV = 2,38 MeV
$D^2 + H^1 \rightarrow He^3 + \gamma$	$2 \cdot 5{,}49$ MeV = 10,98 MeV
$He^3 + He^3 \rightarrow He^4 + 2\,H^1$	12,85 MeV
	26,21 MeV

Rezultat tega procesa je izgorevanje vodika v helij: $H^1 \rightarrow He^4 + 2\,\beta^+ + 2\,\nu$, pri čemer se sprosti 26,21 MeV energije na nastali atom He^4. Pri tem nismo upoštevali energije, ki jo v povprečju odnese nevtrino, ker tako slabo sodeluje z zvezdno snovjo, da praktično neovirano uide iz zvezde.

Hitrost te verige določa najpočasnejši člen, to pa je $H^1 + H^1 \rightarrow D^2 + \beta^+ + \nu$. Vsi ostali členi imajo tako velik reakcijski presek, da praktično takoj zaključijo verigo. Ta proces daje zvezdi dovolj energije, da prepreči njeno krčenje in krije energijske izgube zaradi sevanja. Take ravnotežne pogoje s središčno temperaturo okrog $10^7\,^0K$ najdemo pri zvezdah, ki imajo manjšo ali enako maso kot naše sonce.

Izkaže pa se, da zvezde, ki so težje od našega sonca, dosežejo ravnotežne pogoje šele pri višji temperaturi v središču (več kot $2 \cdot 10^7\,^0K$). Pri teh temperaturah število možnih reakcij znatno naraste. Možne so že reakcije protonov z jedri C^{12}, C^{13}, N^{14} itd. Bethe in von Weizsacker sta leta 1938 predlagala tako imenovano ogljiko-dušikovo verigo reakcij ,preko katere vodik lahko izgoreva v helij:

$$C^{12} + H^1 \rightarrow N^{13} + \gamma,$$

$$N^{13} \rightarrow C^{13} + \beta^+ + \nu,$$

$$C^{13} + H^1 \rightarrow N^{14} + \gamma,$$

$$N^{14} + H^1 \rightarrow O^{15} + \gamma,$$

$$O^{15} \rightarrow N^{15} + \beta^+ + \nu,$$

$$N^{15} + H^1 \rightarrow C^{12} + He^4.$$

Skupna bilanca je spet $4\,H^1 \rightarrow He^4 + 25$ MeV. Jedra C^{12}, C^{13}, N^{14} in N^{15} so le katalizatorji.

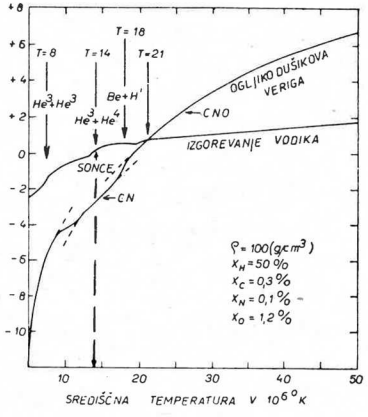
Okoli 90 % vseh zvezd, ki jih poznamo, dobiva energijo v glavnem na eden izmed obeh opisanih načinov. Središčna temperatura zvezde pa določa, na kateri način bo zvezda izgorevala. Na sliki 4 vidimo, da hitrost reakcij ogljiko dušikove verige s temperaturo dosti hitreje narašča kot hitrost direktnega izgorevanja vodika. (To je zaradi večjega naboja jeder C^{12} — glej eksponentni faktor v formuli za reakcijski presek — § 2.) Zato izgoreva vodik v zvezdah, ki imajo temperaturo v središču manjšo kot $2 \cdot 10^7\,^0K$ v glavnem preko prvega procesa. (To velja torej za zvezde, ki so enake našemu soncu, ali manjše.) V zvezdah z višjo središčno temperaturo in z zadostno zalogo vodika pa izgoreva vodik pretežno preko ogljiko-dušikove verige.

Energijski tok, ki ga oddaja zvezda, ni sorazmeren z njeno maso, ampak oddajajo velike zvezde svojo energijo relativno dosti hitreje kot manjše zvezde. Tako n. pr. oddaja zvezda z maso deset naših sonc svojo energijo desettisočkrat hitreje kot sonce. Taka zvezda porabi vodih v svojem jedru že v 10^7 letih. Naše sonce izgoreva bolj ekonomično in ima dovolj goriva za deset milijard let. Življenjska doba manjših zvezd pa je še dosti daljša.

Tako nastane vprašanje, kaj se zgodi z zvezdo, ko se večji del vodika v jedru pretvori v He^4. Z dokajšnjo gotovostjo so astrofiziki dognali, da je mešanje snovi v zvezdi šibko, tako da zvezda ne more izkoristiti vodika, ki je izven njene sredice. Računsko pa pridemo do domneve, da je nadaljnji razvoj zvezde naslednji: sredica zvezde, v katerem sedaj prevladuje helij, se začne

krčiti, ker nima več izvora energije, ki bi jedro podpiralo. Zvezda torej ponovno pretvarja svojo gravitacijsko potencialno energijo v toplotno. Temperatura in gostota naraščata tako dolgo, dokler se ne začno reakcije med jedri He^4. Ker se zvezda v središču segreje, oddaja potem dosti večji energijski tok, kot v prvem stadiju. Računi pokažejo, da se pri novih pogojih svetlobni pritisk na plašč zvezde poveča in ga razširi za deset do stokrat. Zato pa se temperatura na površini zvezde zmanjša in zvezda le še rdeče žari. To je potem rdeča velikanka.

Pričakovali bi, da se sedaj lahko tvori Be^8 iz dveh atomov He^4. Toda ustrezna vezavna energija je negativna. Jedra Be^8 v naravi ni; če ga umetno naredimo, pa se izkaže, da je zelo nestabilno in v 10^{-16} s razpade na dve jedri



Sl. 4. Povprečna produkcija energije v zvezdi v odvisnosti središčne temperature zvezde za direktno izgorevanje vodika in za ogljiko-dušikovo verigo Navedena gostota in koncentracija posameznih elementov so nekako takšne kot v sredicah zvezd, ki so podobne našemu soncu (starost $4{,}5 \cdot 10^9$ let). Levo zgoraj so zapisane temperature (v enotah $10^6\,^oK$), pri katerih začenjajo navedene reakcije zaznavno prispevati k produkciji energije. Na navpični skali je naesen dekadni logaritem energijskega toka (merjenega z 10^4 W), ki izhaja iz 1 kg zvezne snovi.

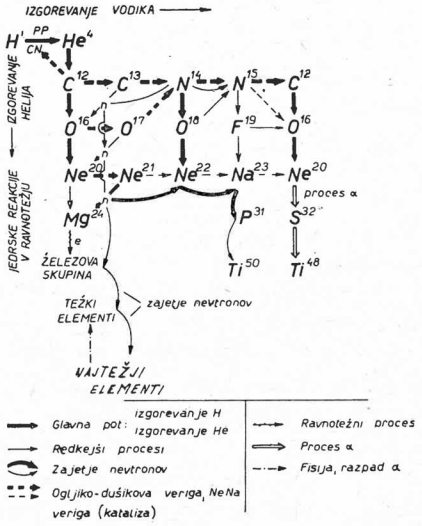
He^4. Vendar je treba upoštevati, da je energija razpada le okrog 100 keV. Sklepati moramo, da je v plinu He^4 pri temperaturi $10^8\,^oK$ in gostoti 15^5 g/cm^3 zaradi pogostih trkov vselej navzoč majhen, toda končen odstotek jeder Be^8. Računi pokažejo, da pride pri teh pogojih eno jedro Be^8 na deset milijard jeder He^4. Že ta koncentracija Be^8 pa zadošča, da omogoči nadaljnjo produkcijo energije z ujetjem še enega jedra He^4. Pri tem nastane C^{12}, ki odda energijo 7,6 MeV v obliki žarka gama. Zaporedje obeh reakcij na kratko napišemo takole:

$$3\,He^4 \rightarrow C^{12} \rightarrow C^{12} + \gamma.$$

Da je kljub majhni kocentraciji Be^8 v rdečih velikankah ta reakcija tako pomembna, je treba pripisati velikemu preseku za ujetje He^4 v Be^8 pri energijah nekaj 10 keV. Izkaže se namreč, da je presek za ujetje He^4 v Be^8 pri teh energijah resonančen.

Ker so jedra z atomskima številoma A = 5 in A = 8 nestabilna, ni mogoče postopoma graditi težjih jeder z dodajanjem protonov jedru He^4. Zato predstavlja zgornja reakcija edini most pri gradnji težkih jeder iz vodika.

Ker je oddajanje energije v tej razvojni stopnji hitrejše kot v prvi, goriva pa manj na razpolago, je življenjska doba rdečih velikank krajša kot zvezd v prvi razvojni stopnji. Nadaljnji razvoj zvezde ni natančno poznan. Slutimo pa, da so temperature jedra zvezde v nadaljnjem razvoju še večje in da so zato možne še nove jedrske reakcije, ki gradijo nadaljnja jedra. Tako lahko reagira He^4 s težjimi jedri: $C^{12} + He^4 \rightarrow O^{16}$; $O^{16} + He^4 \rightarrow Ne^{20}$ itd. Nekatere jedrske



Sl. 5. Pregled glavnih jedrskih reakcij, po katerih domnevno nastajajo elementi v zvezdah. V vodoravni smeri je prikazana sinteza elementov z vodikom (izgorevanje vodika). Izgradnja elementov s He^4 je prikazana v navpični smeri (t .j. izgorevanje He^4 in pa proces α, ki se od prvega razlikuje le v tem, da potrebni helij nastaja z razpadom nekaterih jeder, zlasti Ne^{20}). V celoti je prikazano, kako nastanejo vsi stabilni izotopi ogljika, dušika, fluora, neona in natrija. Nastanek elementov z zajetjem nevtronov (na sliki levo spodaj) poteka v dveh fazah. V prvi fazi se izgrajujejo elementi z zajetjem nevtronov v stabilnih razvojnih stopnjah zvezde. Druga faza pa obstoji v eksplozivni izgradnji težkih radioaktivnih elementov.

reakcije, kot n. pr. $C^{13} + He^4 \rightarrow O^{16} + n$, sproščajo nevtrone, ki nimajo naboja in zato zlahka reagirajo z vsemi elementi in postopoma izgrajujejo težke atome. Na sliki 5 je shematično prikazano, kako se po teh domnevah izgrajujejo elementi v zvezdah.

Po sedanji predstavi o razvoju zvezd končajo zvezde svojo razvojno pot med belimi pritlikavkami, potem ko so šle skozi nestabilna stanja in so pri tem odvrgle velik del svoje mase. Bele pritlikavke so zvezde z majhnim premerom in veliko gostoto ter so bržkone sestavljene v glavnem iz težkih elementov.

4. Nastanek elementov v zvezdah

Zaradi raznolikosti možnih jedrskih reakcij se vsiljuje misel, da te reakcije spreminjajo pogostost različnih elementov v vesolju. Zato se vprašamo, ali je mogoče razložiti današnjo krivuljo pogostosti kot rezultat jedrskih reakcij

v zvezdah in na osnovi neke domneve o začetni pogostosti posameznih elementov.

Na osnovi različnih opazovanj pojavov v vesoljstvu so astronomi vpeljali pojem starosti vesoljstva in jo ocenili na približno 10^{10} let. (Pojem starosti vesoljstva ne zahteva nujno nekakšnega začetka vesoljstva in ima v različnih kozmoloških modelih lahko različne pomene.) Če domnevamo, da je bil pred tem časom, torej pred 10^{10} leti v vesoljstvu samo vodik, lahko današnjo pogostost elementov neprisiljeno razložimo kot posledico jedrskih reakcij, ki so se dogajale v zvezdah. Razlaga je nekako naslednja.

Prva generacija zvezd je bila sestavljena iz čistega vodika in je v prvi razvojni fazi pretvarjala vodik v helij samo preko direktnega izgorevanja vodika, ker težjih elementov še ni bilo. Velike zvezde s kratko življenjsko dobo pa so kmalu prešle med rdeče velikanke in so začele z izgradnjo težjih elementov preko reakcije $3\,He^4 \rightarrow C^{12}$. V naslednjih stopnjah se s pomočjo reakcij s He^4 gradijo jedra do železa, nevtroni pa skrbe za izgradnjo elementov še nad železom.

Preden izkoristi zvezjda vse svoje gorivo v notranjosti, gre skozi nestabilna in včasih eksplozivna stanja. Tedaj izvrže zvezda v prostor del svoje mase, ki je bogata na težkih elementih. Pri eksploziji zvezde se verjetno sproste velike množine nevtronov, ki se hitro ujamejo v težkih elementih zvezde in naenkrat zgradijo najtežje elemente, ki so radioaktivni. Tak mehanizem gradnje dobro razloži ugotovljeno pogostost elementov nad železom. (Posebno dramatične eksplozije velikih zvezd opazujemo kot pojave supernov.)

Ta mehanizem je v malem podoben onemu, ki ga je Gamow pred leti predlagal kot edini mehanizem za nastanek vseh elementov. Gamow je hotel razložiti nastanek elementov in pojasniti opazovano ekspanzijo vesoljstva s hipotezo, da je bilo vesoljstvo pred 10^{10} leti v obliki zelo skoncentrirane nevtronske krogle, ki je začela ekspandirati. Pri tem naj bi nastali elementi. Ta teorija sicer razloži pogostost težkih elementov, ne pa lahkih. Teorija nikakor ne more razložiti, kako se pri izgradnji elementov preskočita vrzeli pri atomskih masah $A = 5$ in 8.

Za razliko proti teoriji Gamowa predstavlja v novejši teoriji eksplozija supernove le dodaten možen mehanizem za nastanek elementov. Po takih eksplozijah se medzvezdni vodik pomeša s težjimi elementi in kasneje nastale zvezde izgrajujejo elemente že iz mešanice elementov. Tokrat velike zvezde že lahko izkoriščajo ogljiko-dušikovo verigo reakcij. Opazovanja kažejo, da je v nekaterih ozvezdjih veliko število velikih in svetlih zvezd z življenjsko dobo do 10^7 let. Sklepamo, da ta ozvezdja niso starejša od 10^7 let in da zvezde neprestanov nastajajo. Če elementi res nastajajo, kakor je bilo zgoraj opisano, lahko sklepamo iz poznane kemične sestave našega sonca, da je to vsaj zvezda tretje generacije. S tem hočemo reči, da se je v našem soncu zgostila materija, ki je poprej že dvakrat prestala rojstvo in razvoj zvezde do eksplozije nove ali supernove, pri čemer se je ta snov vrnila v medzvezdni prostor. Takšna ugotovitev tudi ni v protislovju z ocenami starosti našega sonca, ki je baje okrog 4,5 milijarde let.

Literatura:

E. M. Burbidge, G. r. Burbidge, W. A. Fowler, F. Hoyle: Synthesis of Elements in Stars, Revs. Modern Phys. **29**, 547 (1957).

RADIACIJSKI DEFEKTI

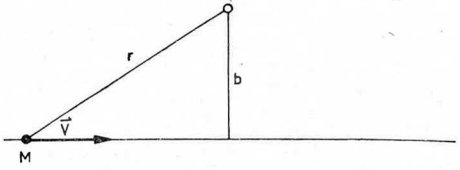
E. PIRKMAJER

Nuklearni institut J. Stefan, Ljubljana

Če izpostavimo snov elektromagnetnemu valovanju kratkih valovnih dolžin, ali bombardiranju z elektroni kakor tudi z drugimi nabitimi ali nenabitimi delci, se spremene mnoge njene lastnosti. Znano je, da fotografska emulzija počrni, da steklo spremeni barvo, da se mnogi materiali deformirajo, da se električna in toplotna prevodnost spremeni in da struktura snovi postane drugačna. Vse takšne spremembe, ki jih povzroča sevanje, imenujemo radiacijske defekte.

V nadaljnjem si bomo ogledali razlago za te pojave ter navedli nekaj najznačilnejših primerov vpliva sevanja na snovi.

V vseh primerih gre za to, da oddajajo vpadajoči delci ali fotoni svojo energijo snóvi, skozi katero letijo. Lahko jo oddajajo posameznim vezanim elektronom, ki jih vzbude ali celo odtrgajo od atoma, morejo jo pa oddati tudi atomskim jedrom z elastičnimi ali neelastičnimi trki.



Slika 1.

VZBUJEVANJE ELEKTRONOV

Poglejmo si najprej sodelovanje med hitrim nabitim delcem mase M in hitrosti v z elektronom v snovi. Za tak primer lahko privzamemo, da se delec ne odkloni od svoje poti. Najkrajša razdalja med potjo vpadlega delca in elektrona v snovi naj bo b (sl. 1). Sila med elektronom in vpadnim delcem je

$$\mathbf{F} = \frac{Z_1 e^2 \mathbf{r}}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \tag{1}$$

kjer je $Z_1 e$ naboj padlega delca, $\mathbf{r}$ pa razdalja do elektrona. Gibalna količina, ki jo prejme elektron od delca, je

$$\mathbf{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}\, dt \tag{2}$$

Vektor $\vec{p}$ kaže nedvomno pravokotno na pot delca; zato smemo namesto enačbe (2) pisati za absolutno vrednost gibalne količine

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} F_b\, dt \tag{3}$$

kjer je $F_b = F \frac{b}{r}$.

Ker je razdalja $r = \sqrt{b^2 + v^2t^2}$, dobimo za p izraz

$$p = \frac{Z_1 e^2 b}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2t^2)\sqrt{b^2 + v^2t^2}} = \frac{2 Z_1 e^2}{4\pi\varepsilon_0 v b} \tag{4}$$

Energija, ki jo vpadajoči delec odda enemu elektronu, je $p^2/2m$, kjer je m masa elektrona. V razdalji med b in $b + db$ od poti vpadlega delca je na enoto poti $N \cdot 2\pi b\, db$ elektronov, kjer je N število elektronov v enoti volumna. Da dobimo izraz za energijo, ki jo izgubi delec na enoto poti, moramo upoštevati različno oddaljene elektrone. Izraz $p^2/2m \cdot 2\pi N b\, db$ moramo torej še integrirati. Kot zgornjo integracijsko mejo postavimo b_{max}, to je razdaljo, ki ustreza najmanjšemu možnemu prehodu energije z delca na elektron. Najmanjši kvant energije, ki jo elektron more sprejeti, pa, kot je znano, ustreza prehodu elektrona na prvi vzbujeni nivo. Podobno, kot smo določili zgornjo integracijsko mejo z minimalno energijo, ki jo more elektron sprejeti, izberemo spodnjo integracijsko mejo b_{min} glede na maksimalno energijo, ki jo more oddati delec elektronu. Iz mehanike vemo, da se to zgodi pri centralnem elastičnem trku. (Primerjaj enačbo 7.) b_{min} izračunamo iz enačbe (4). Pri centralnem trku je seveda najmanjša razdalja med delcem in elektronom nič. Toda v tem primeru naša teorija ne velja več, ker tu ne moremo več privzeti, da obdrži delec svojo hitrost in smer. b_{min} moramo zato šteti bolj za parameter v računu kot pa za dejansko razdaljo.

Z integracijo dobimo

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{N Z_1 e^4}{4\pi\varepsilon_0 m v^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \tag{5}$$

Strožja izpeljava da točnejšo formulo

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{Z_1 e^4}{2\varepsilon_0 E'} N_0 Z_2 \ln \frac{4E'}{B} \tag{6}$$

Tu je N_0 število atomov na enoto volumna in Z_2 njihovo atomsko število. B je parameter velikostnega reda nekaj sto eV. Energijo B moremo izračunati, običajno pa jo določimo eksperimentalno. $4E' = 4\frac{m}{M}E$ je največja možna energija, ki jo more oddati delec elektronu.

Iz enačb (5) in (6) vidimo, da sta za izgubljanje energije z vzbujanjem elektronov odločilni hitrost delca in njegov naboj, ne pa energija.

Hitri delec izgubi večino svoje energije z vzbujevanjem elektronov, nekako tisočkrat toliko kot s trki z jedri. Če pa je energija delca manjša od neke mejne — kritične energije, zgublja svojo energijo v glavnem le s trki. Kritična energija je velikostnega reda $10^3 - 10^4$ eV. Za izolatorje je meja precej ostra. Tu je $E'_{krit} = \frac{E_e}{8}$, kjer je E_e energija prvega absorpcijskega traku. Pri kovinah

je meja manj ostra, saj morejo sprejeti elektroni v prevodnem pasu tudi zelo majhne energije. Privzeti pa moremo, da je za kovine $E'_{krit} = \frac{E_F}{16}$, kjer je E_F Fermijeva energija.

TRKI Z JEDRI

Če energija vpadlega delca ni prevelika, moremo atome aproksimirati s kroglicami. Iz mehanike vemo, da odda gibajoči se delec mirujočemu del svoje kinetične energije, največ

$$E_{max} = \frac{4 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} E \tag{7}$$

kjer sta M_1 in M_2 masi obeh delcev, E pa kinetična energija vpadlega delca. Če trk ni centralen, velja

$$E_\vartheta = E_{max} \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{8}$$

kjer je ϑ kot, pod katerim se delca odbijeta v težiščnem sistemu.

Pri elektronih z energijo nad 1 MeV moramo upoštevati še relativistične popravke, ker je njihova hitrost že dovolj blizu svetlobni. Enačba za maksimalno oddano energijo se tedaj glasi:

$$E_{max} = \frac{2 E (E + m c^2)}{M c^2} \tag{9}$$

kjer je E energija elektrona, M pa masa atoma, ki ga elektron zadene.

Vpadli delci morejo izbijati atome iz njihovega položaja. Prag za ta proces je v vseh snoveh nekako 25 eV. Seitz razlaga to takole: Energija, ki je potrebna, da sublimira atom iz površine trdne snovi, je nekako 5 eV. V notranjosti snovi je atom vezan še enkrat močneje, ker ima še enkrat toliko sosedov kot na površini. Ker moramo postaviti izbiti atom na mesto, kjer vladajo odbojne sile, je energija, ki jo za to porabimo, vsaj dvakrat tolikšna, to je štirikratna energija sublimacije, kar dobro ustreza opazovanemu pragu za izbijanje atomov.

Energija delcev, s katerimi izbijamo atome, mora biti seveda mnogo večja. (Enačbi 7 in 9.) Podatki o tem so zbrani v tabeli I.

TABELA I

Minimalna energija v elektronskih voltih, ki je potrebna za izbitje atoma mase M_2 z delcem mase M_1

	$M_2 = 10$	$M_2 = 50$	$M_2 = 100$	$M_2 = 200$
M_1 = m (masa elektrona)	$1 \cdot 10^5$	$4{,}1 \cdot 10^5$	$6{,}8 \cdot 10^5$	$11{,}0 \cdot 10^5$
$M_1 = 1$	76	325	638	1263
$M_1 = 4$	31	91	169	325
M_1 = razcepni produkti	76	38	25	28

Število atomov, ki jih delec izbije na enoto poti, je

$$\frac{dn}{dx} = N_0 \sigma_d \tag{10}$$

Tu je σ_d presek za izbitje, N_0 pa število atomov na enoto volumna.

Za nabite delce bomo presek približno izračunali. Vprašamo se, v kakšni razdalji od jedra mora leteti delec, da more povzročiti izbitje. Gibalno količino, ki jo prejme atomsko jedro z maso M_2 in z nabojem $Z_2 e$, izračunamo prav tako, kot smo to že izračunali za mirujoč elektron. Energija atoma, ki ustreza tej gibalni količini, je

$$E_a = \frac{p^2}{2 M_2} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{8 \pi^2 \varepsilon_0^2 v M_2 b} \tag{11}$$

Za izbitje mora biti ta energija večja od energije praga za izbitje E_d. Presek za izbitje je od tod:

$$\sigma_d = \pi b_0^2 \tag{12}$$

kjer je b_0 razdalja b, pri kateri je $E_a = E_d$.

Od tod dobimo

$$\sigma_d = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16 \pi \varepsilon_0^2 E E_d} \cdot \frac{M_1}{M_2} \tag{13}$$

Gornjo enačbo pišejo pogosto tudi v obliki

$$\sigma_d = \frac{4 \pi}{E} a_0^2 \frac{M_1}{M_2} \frac{Z_1^2 Z_2^2 (Rhc)^2}{E_d} \tag{14}$$

kjer je a_0 Bohrov radij $a = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

R pa Rydbergova konstanta $R = \dfrac{e^4 m}{\varepsilon_0^2 \cdot 8 h^3 c}$

Iz zgornje enačbe vidimo, da je presek obratno sorazmeren energiji vpadajočega delca. To pomeni, da hiter delec bolj poredko izbija atome kot počasnejši, čeprav jih v celoti izbije več.

Za primer, da obstreljujemo Na s protoni energije 200 MeV, dobimo po tem računu $\sigma = 7 \cdot 10^{-28}\, m^2$ in $b_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-14}\, m$.

Število primarno izbitih atomov na razdalji Δx dobimo z integracijo enačbe (10). Če za σ_d vpeljemo $\sigma_d = \dfrac{\eta}{E}$, velja

$$n = N_0 \eta \int_0^{\Delta x} \frac{dx}{E} \tag{15}$$

Poznati moramo še spreminjanje energije s potjo. Tu uporabimo empirično enačbo

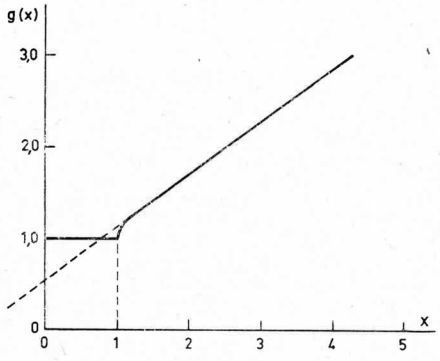
$$R(E) = C E^{\gamma} \tag{16}$$

Ko preleti delec razdaljo dx, se mu doseg spremeni za $-dR = dx = -C^{\gamma} E^{\gamma-1} dE$.

Enačbo (15) moremo sedaj pisati takole:

$$n = N_0 \eta \int_{R_1-\Delta x}^{R_1} \frac{dR}{E} \tag{17}$$

kjer je R_1 prvotni doseg delca, ki se po preteku razdalje Δx zmanjša na $R_1 - \Delta x$.



Slika 2.

Zgornji integral bomo izračunali za dva primera; za $\Delta x = R_1$ in $\Delta x << R_1$.

V prvem primeru izvemo za število izbitih atomov, ki jih izbije nabiti delec, dokler se ne ustavi. To nas zanima, kadar imamo opraviti z debelo tarčo oziroma z debelo plastjo materiala, ki delec popolnoma zadrži. Za število izbitih atomov dobimo

$$n = N_0 R_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\eta}{E} \tag{18}$$

V drugem primeru pa izračunamo število izbitih atomov, ki jih izbije hitri delec v tenki plasti, ki delec prebije in izgubi v njej le malo svoje energije. Če se zadovoljimo s kvadratnim približkom v integraciji, je rezultat

$$n = N_0 \Delta R \frac{\eta}{E} \left[1 + \frac{1}{2\gamma} \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{6} \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 \right] \tag{19}$$

γ ima vrednosti med 1,6 in 2.

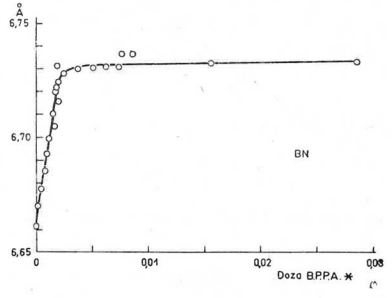
Izbiti atomi imajo često dovolj energije, da morejo izbiti še druge. Slika 2 je diagram, ki kaže teoretično izračunano krivuljo za število izbitih atomov $g(x)$ na en primarno izbiti delec z energijo $E = x \cdot E_d$. Eksperimentalna verifikacija te krivulje je precej težavna. Preiskave z nevtroni kažejo, da je račun pravilen, medtem ko dopuščajo drugi eksperimenti o tem še dvome.

Vpadli delec more trčiti z mirujočim atomskim jedrom tudi neelastično. Pri tem gre za jedrsko reakcijo. Hitri delec se absorbira v jedru, ki more potem oddati več delcev. Namesto prvotnega delca dobimo po neelastičnem trku lahko več razmeroma počasnejših delcev, ki povzroče več defektov, kot bi jih prvotni delec. Številov delcev, ki nastanejo z neelastičnimi trki, se z energijo veča; zato raste z energijo tudi število izbitih atomov.

PRIMERI ZNAČILNIH RADIACIJSKIH DEFEKTOV

Oglejmo si na kratko še, kako vpliva sevanje na nekatere lastnosti snovi!

Mrežna konstanta se spremeni pri večini snovi. Pri nekaterih snoveh raste. Primer za to je borov nitrid[1], kjer mrežna konstanta pod vplivom del-



Slika 3.

cev α z dozo najprej raste, nato pa doseže konstantno vrednost (slika 3). To si moremo razlagati s tem, da izbijejo vpadli delci atome iz prvotnega položaja. Ustavljajo se med atomi kristalne mreže in postanejo vrinjeni — intersticialni atomi. Odbojne sile, ki vladajo med njimi in sosedi, povečujejo mrežno konstanto. Pri večjih dozah dosežemo ravnotežje, to je izbiti atomi najdejo prazna mesto v kristalni mreži, ki so jih zapustili drugi atomi, ter mrežna konstanta zato ne raste več.

Mnoge kovine se pod vplivom sevanja skrčijo, kar pripisujejo vrzelim, ki nastanejo na mestih izbitih atomov.

Zanimiv je primer pri litijevem fluoridu (slika 4), ki je bil obsevan z nevtroni. Mrežna konstanta najprej raste, nato pa zopet pade. Defekte povzročajo tu delci α in tritijeva jedra, ki nastanejo po reakciji Li^6 (n, α) H^3.

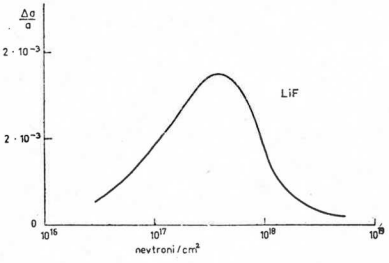
---

* B. P. P. A. (Bombarding Particles per Atom) — Število vpadlih delcev na atom obsevanega materiala.

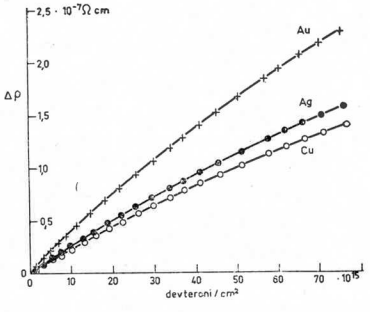
Zmanjševanje mrežne konstante moremo tolmačiti s tem, da se začne defekti zbirati na nekaterih mestih, kjer tvorijo skupke, sicer pa je mreža urejena.

Električna prevodnost se v kovinah in zlitinah, ki so bile obsevane, zmanjšuje. Tako intersticialni atomi kakor tudi vrzeli v kristalni zgradbi povečujejo sipanje prevodnih elektronov. Slika 5 kaže povečanje specifične upornosti Au, Ag in Cu v odvisnosti od fluksa devteronov.

Zanimiva je tudi odvisnost električne prevodnosti od energije vpadajočih delcev. Pri nizkih energijah, za protone do nekako 50 MeV, pada sprememba prevodnosti kot $1/E$. Pri energijah med 50 in 100 MeV je v glavnem neodvisna od energije, nato pa z energijo raste. Pojav si razlagamo takole: Pri nizkih energijah nastajajo defekti v glavnem zaradi elastičnih trkov. Kot smo videli v enačbah (18) in (19), pada število izbitih atomov kot $1/E$, kar razlaga pojav v območju nizkih energij. Pri višjih energijah vplivajo še neelastični trki, kjer število defektov z energijo raste. V srednjem območju med 50 in 100 MeV sta oba efekta približno enaka, pri višjih energijah pa prevladujejo defekti, ki jih povzročajo neelastični trki z jedri in sprememba prevodnosti z energijo zato raste.



Slika 4.



Slika 5.

Tu naj mimogrede omenimo, da pri izolatorjih število defektov z energijo vedno pada; to pa zato, ker povzročajo defekte tam v glavnem vzbujeni in odtrgani elektroni. Tega v prevodnikih ni, ker je v njih že itak dovolj elektronov, ki se morejo prosto gibati.

Odvisnost upornosti kovin od doze sevanja, kot jo kaže slika 5, so posneli pri temperaturi 10 °K. Pri višjih temperaturah od 30 °K navzgor pa opazovani efekti izginjajo; pravimo, da defekti okrevajo. Okrevanje si razlagamo s tem, da potujejo izbiti atomi zaradi termičnega gibanja po snovi in najdejo vrzeli, ki jih zasedejo.

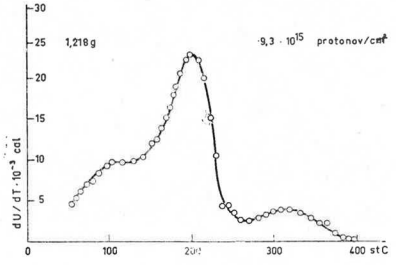
Iz temperaturnega poteka okrevanja moremo sklepati na aktivacijske energije za te pojave. Enotne kvantitativne razlage za vse te efekte pa še vedno ni.

Pri okrevanju defektov se sprošča energija. Slika 6 kaže rezultat takšnih merjenj pri NaCl. Meritve so delali po Overhauserjevi metodi. Če dovajamo telesu toploto, se segreje do temperature, ko je oddana toplota enaka sprejeti.

Če napravimo isti poskus z obsevanim in neobsevanim vzorcem, je temperatura obsevanega večja, ker se v njem zaradi okrevanja sprošča toplota. Iz razlike temperatur moremo izračunati sproščeno toploto. Upoštevati pa moramo še vrsto popravkov zaradi različnosti obeh vzorcev, različnih toplotnih kontaktov in še drugih vzrokov. V sliki 6 je na ordinato nanesena toplota, ki se je sprostila v vzorcu v dveh minutah, odkar je bil segret na temperaturo, ki jo kaže abscisa.

Zelo lepo moremo opazovati okrevanje defektov z infrardečo spektroskopijo. V spektru se med okrevanjem nekateri absorbcijski trakovi večajo, drugi zopet zginevajo, dokler spekter ne postane zopet tak kot pred obsevanjem vzorca.

Sevanje vpliva še na mehanske lastnosti, toplotno prevodnost, hitrost kemijskih reakcij in na druge pojave, vendar bi nas vodilo predaleč, če bi obravnavali vsak primer posebej.



Slika 6.

Mnogi radiacijski efekti so tako značilni, da se uporabljajo v dozimetriji. Med metodami, ki slone na tem principu, so najbolj znane meritve s fotografskimi ploščami in filmi. Uporabljajo se pa še meritve spremembe barve stekla, spremembe luminiscence, fotoemisije, sproščanja plinov iz polimerov, polimerizacije monomerov in slično. V primernih območjih moremo meriti s temi metodami doze tudi do 2 % natančno.

Literatura:

1. G. H. Kinchin, R. S. Pease, Repts. Progr, in Phys. **18**, 1 (1955).

2. G. Mayer, P. Perio, J. Gigon, and M. Tournarie, Proceedings of the International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva), Vol. 7, United Nations, 1955, p. 647.

3. J. W. Marx, H. G. Cooper, and J. W. Henderson, Phys. Rev. **88**, 106 (1952).

4. K. Kobayashi, Phys. Rev. **102**, 348 (1956).

Pregledni članki

5. R. Smoluchowski, Molecular Science and Molecular Engineering (Arthur R. von Hippel), 207—221, The Massachusetts Institute of Technology 1959.

6. F. Seitz and J. S. Koehler, Solid State Physics, Vol. 2 (F. Seitz, D. Turnbull), 307—457, Academic Press, 1956.

7. Nucleonics **17**, No. 10 (1959): Več obširnih člankov o merjenju velikih doz.

ŠOLA

PRISPEVEK FRANCA HOČEVARJA POUKU ELEMENTARNE MATEMATIKE

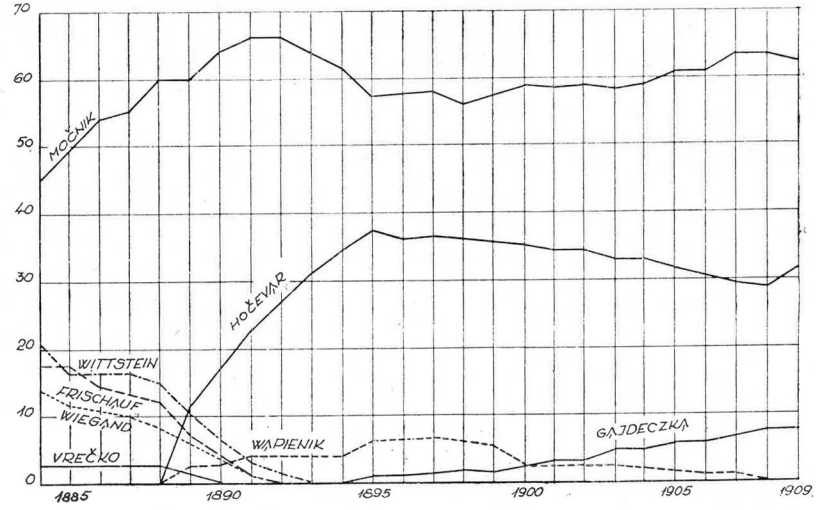
Felix Klein je v svojem znamenitem delu Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus dal izrecno prednost avstrijskemu učnemu načrtu pred pruskimi in drugimi. Tako pravi na str. 511 (Teubner 1909): »Najzanimivejša v učnem načrtu so njegova natančna navodila o matematičnem pouku, ki kažejo, da je njihov avtor odličen strokovnjak; ni pa znano, od koga izvirajo. To je razveseljivo nasprotje siceršnjim uradnim učnim načrtom, ki so za matematiko največkrat tako pičli, da iz njih skoraj ni mogoče posneti kaj določenega.« Zaradi tako podrobno izdelanih predpisov o učni snovi in učnih metodah je bil značaj vseh avstrijskih matematičnih učbenikov skorajda enakšen. Imeli (so vse dobre in slabe strani ministrskih predpisov in odredb. V teh knjigah se ponekod, kakor pravi Jacobi, »strelja na vrabce s topovi«, vse na voljo strogi sistematičnosti in dozdevni znanstvenosti. O vsakem učbeniku, ki je na novo izšel, so bile objavljene v šolskih in strokovnih revijah recenzije, večkrat obširne in bogate; pisali so jih razgledani in znani strokovnjaki. Učiteljski zbori so za svojo šolo izbrali od odobrenih učbenikov tistega, ki se jim je zdel najbolji, in predlagali nadrejeni šolski oblasti, da jim ga dovoli vpeljati. Pisci po drugih evropskih deželah so te učbenike prevajali ali pa po njih sestavljali svoje. Od vseh najbolj znani so bili tisti, ki sta jih pisala Franc Močnik in Franc Hočevar, »velika mojstra matematične šolske literature«, kakor so ju večkrat imenovali v strokovnem tisku. Ob stoletnici Hočevarjevega rojstva je Obzornik za matematiko in fiziko (1953/III, št. 4) že objavil članek o njegovem življenju in delu. Pa naj se seznanimo še s prvimi izdajami njegovih učbenikov, z nekaterimi prevodi teh in z njegovim propagiranjem uvedbe elementov infinitezimalnega računa v srednješolski pouk. To zadnje je posebno zanimivo danes, ko pri nas z novo reformo zopet uvajamo v srednje šole elemente tega računa.

Hočevarjevi učbeniki na prav malo straneh, vendar izredno precizno podajajo napisano učno snov in zadostno število nalog in to v popolnoma korektnem jeziku, zraven pa še strokovno, logično in didaktično neoporečno. Težko bi našli v tekstu kako odvečno besedo, težko kako pogrešili; težko zasledili v slikah odvečno črko ali črto, težko kako pogrešili.

Svoj prvi učbenik, *Geometrija za nižjo gimnazijo*, je Hočevar napisal leta 1886, ko so bile v avstrijskem nemškem šolstvu že v rabi štiri tovrstne knjige piscev: Gernertha 4. izd. v priredbi F. Wallentina, Witteka 3. oz. 2. izd., F. Wallentina in Močnika 22. oz. 17. izd. Od teh so bili na pristojnih mestih najbolj naklonjeni Gernerthovi, a najbolj udomačena in prevladujoča je bila Močnikova. Hočevar je torej posegel v tekmo kot peti in takoj popolnoma uspel. Knjiga je bila učiteljem matematike zelo všeč in presenečeni kritiki so jo pohvalili. Pooblaščeni poročevalec I. G. Wallentin jo imenuje »najboljšo ali najmanj prav dobro« med tovrstnimi, takrat dovoljenimi učnimi knjigami predvsem zato, ker se natančno ravna po novih uradnih navodilih in ker se sestavi pozna strokovno znanje in velika didaktična izurjenost. Pri obdelavi tvarine za prva dva razreda daje avtor prednost geometrijskim dokazom pred tistimi, ki se dajo izvršiti z aritm. oz. algebr. operacijami. Tako n. pr. nazorno,

z obratom trikotnika, izpelje dokaz stavka, da leži v trikotniku večji stranici večji kot nasproti. Mnoge dokaze in konstrukcijske naloge izvede presenetljivo kratko in elegantno z vpeljavo straničnih in kotnih simetral, ne da bi predpostavljal znanje skladnostnih izrekov. Pri obdelavi tvarine tretjega in četrtega razreda pa posebno skrbno uporablja algebrajske operacije in računske naloge.

Stari učni načrt za višje razrede avstrijskih gimnazij je za pouk stereometrije sicer podčrtaval nazornost in poudarjal vrednost risanja, toda učbeniki, posebno še Močnikov, so razvijali stereometrijo večidel po togi Evklidovi sistematiki. S tem pa je prav to poglavje postalo eno izmed najbolj dolgočasnih, tako za učence kakor za učitelja, če se je ta natanko držal učbenika. Takrat so preosnavljali okorele oblike stare Evklidove geometrije po novejših metodah in to je bilo za srednješolski pouk zelo koristno. To je zlasti uspelo Hočevarju,

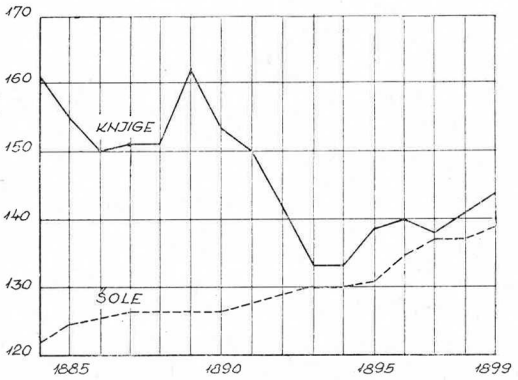


Sl. 1. Diagram procentualne razširjenosti geometrijskih učbenikov za višje razrede na avstrijskih srednjih šolah z nemškim učnim jezikom od l. 1884 do l. 1909 (po Ph. Freudu)

in sicer v njegovi *Geometriji za višje gimnazije,* ki so jo ob izidu leta 1888 prav zaradi tega strokovni tovariši tako toplo sprejeli. Znano je, da vsak učbenik matematike za višje razrede srednjih šol pomeni hud kompromis med zahtevami znanosti in tradicionalne didaktike. I. G. Wallentin pravi v svoji oceni, da »je piscu pri vsej preprosti razlagi na najlepši način uspelo varovati strogo znanstvenost, pri tem pa odkloniti vse, kar bi moglo na kakršenkoli način odvračati učenčev pogled od poglavitnega«. Pri postavljanju osnovnih pojmov in pri izpeljavi temeljnih stavkov geometrije je upošteval aksiomatiko mnogo primerneje učenčevi zmogljivosti kakor drugi učbeniki. Izločil je vse nepotrebno in manj važno, izognil se je vsem umetno konstruiranim dokazom in je speljal dostikrat zelo izumetničeno razlago geometrijskih stavkov v drugih učnih knjigah na preprostejšo pot. V predgovoru k 1. izdaji trdi, da se je pri sestavljanju knjige opiral na lastne izkušnje pri pouku in na dela avtorjev: Baltzer, Frischauf, Henrici-Treutlein, Hubert Müller, Sonndorfer-Anton itd. Otto Stolz se v svoji jedrnati recenziji dotakne vseh štirih delov knjige (planimetrije, elementov stereometrije, ravninske trigonometrije in analitične geometrije) in zlasti pohvalno omenja Hočevarjevo prizadevnost in natančnost

pri obdelavi analitične geometrije. Svoje mnenje o tem delu knjige na kratko povzame in pravi, da »to, kar nudi, ustreza vsem zahtevam učnih ciljev, v posameznem pa bi se dalo komaj kaj nadomestiti s čim boljšim«. Splošna opredelitev kotnih funkcij je bila takrat v večini učbenikov razložena z določitvijo nasprotnih predznakov pravokotnic in projekcij nasprotnih smeri, Hočevar — kakor tudi Gajdeczka — pa jih že definirata s pomočjo na novo vpeljanega pravokotnega koordinatnega sestava. Knjigo je pisec dopolnil z zadostno zbirko skrbno izbranih in metodično urejenih nalog, prvotno — sledeč uradnim navodilom — v dveh posebnih zvezkih, kasneje v enem; končno pa je zbirko združil z učno snovjo v eno knjigo.

Diagram na sl. 2 kaže razločno, kako so se v osemdesetih letih šole po preizkušnji različnih učbenikov počasi začele naslanjati na enega. Medtem ko so uporabljali še l. 1884 na 122 višjih gimnazijah in realkah 162 učbenikov geometrije, kaže diagram v l. 1899 za 139 takih šol le še 144 učbenikov, tako da ima skoraj vsaka šola v vseh razredih učbenik istega avtorja. Nagel vzpon krivulje l. 1889 sovpada z uvedbo Hočevarjeve geometrije v prve razrede



Sl. 2. Število geometrijskih učbenikov na nemških višjih gimnazijah in realkah v primerjavi s številom teh šol od l. 1884 do l. 1899 (po Ph. Freudu)

višje stopnje, zaradi česar je bilo v tem letu v rabi zopet več učbenikov; takoj v naslednjem letu pa se je težnja poenotenja učbenikov spet nadaljevala — sedaj v Hočevarjevo korist.

Tudi v *Aritmetiki za nižjo gimnazijo* (1. izd. 1892) je Hočevar v učnih načrtih odkazano snov obdelal v gladki, jasni in natančni dikciji. Posebno pa se odlikuje v intenzivni uporabi hevristične metode in tako imenovane matematične indukcije. Pisec odbira bistveno od nebistvenega že v zasnovi dela in posebej v izpeljavi. Zgledi in naloge so najskrbneje izbrani, brez dolgih in za učenca utrudljivih številčnih računov ter brez raznih premetenih in zvitih nalog, ki so bile včasih zelo priljubljene. Povsod se kaže težnja, napeljati učenca na samostojno mišljenje in preprečiti mehanično računanje po naučenih pravilih. Zasledovanje tega cilja je razvidno tudi v neprestanem upoštevanju mestne vrednosti in v vpletenih vprašanjih. Knjižica docela pripravi učenca na strožji in bolj znanstveni pouk v višjih gimnazijskih razredih.

Večkrat izražena želja šolskih krogov, naj Hočevar obdela tudi učno snov znanstvene *aritmetike za višje razrede srednjih šol,* se je izpolnila šele leta 1899. Novo delo se v podajanju učnega gradiva v marsičem bistveno raz-

likuje od običajnih razlag. V uvodu pisec najprej poudarja, da znanstvena aritmetika ni zgrajena na aksiomih kakor geometrija, ampak na definicijah, nato pa vpelje pojem količine mnogo ostreje, kot je bilo do takrat v navadi. Zlasti natančno in obširno pa obdelava iracionalna števila. Prehod na logaritem zahteva definicijo potenc z iracionalnimi eksponenti. Te razširitve se večina učbenikov niti ne dotakne, drugi, n. pr. Močnikov, jo le omenjajo, Hočevar pa poda eksistenčni dokaz. Tvarina je v knjigi porazdeljena na deset poglavij — po takratnem učnem načrtu. Novi učni načrt iz leta 1900 je vseboval predpis, da je treba pouk prvih štirih računskih operacij znanstveno izpeljati. Toda ni mogoče kar prevzeti metode znanstvene aritmetike za srednje šole, ampak jih je treba preobraziti ustrezajoče učenčevi zmogljivosti. O načinu, kako se da to najbolje izvesti, pa se mnenja pogosto zelo ločijo in uradna navodila tudi takrat niso nudila skoraj nobene opore. Zato je Hočevar ob izidu svoje knjige sprožil o tem vprašanju javno diskusijo, in sicer s svojo razpravo »O aritmetičnem pouku v višji gimnaziji« (»Zeitschr. f. d. ö. Gymn.«). V tem članku obširno pretresa naslednja splošna vprašanja, ki so po njegovem mnenju odločilne važnosti za znanstveni karakter pouka temeljnih operacij: 1. Pojmi »količina, enako, večje, manjše«. 2. O tako zvanih aritmetičnih aksiomih. 3. O dokazih aritmetičnih izrekov. V istem letniku »Zeitschr. f. d. ö. Gymn.« je tudi recenzija Stolza Hočevarjeve knjige. V njej recenzent našteva pomanjkljivosti starejših učnih knjig aritmetike in algebre, ki so po njegovem mnenju zlasti: 1. Pri seštevanju in množenju se ne navaja asociativni zakon. 2. Učencu se ne zabiči, da z ničlo ne sme deliti. 3. Iracionalna števila se premalo obdelajo. Stolz pravi, da piščevo delo teh pomanjkljivosti nima in da je to rešil na način, ki zadovolji zahteve tako znanosti kakor pedagogike, zahteve, ki se marsikaterikrat razlikujejo. Na to se Stolz dotakne le temeljnih operacij s celimi in ulomljenimi števili ter na kratko še operacij tretje stopnje, ker o ostalih nalogah algebre ni toliko različnih mnenj. Referent G. v. »Monatshefte« poudarja, da je ta matematični učbenik v znanstvenem pogledu najboljši, kar jih je v rabi na avstrijskih srednjih šolah.

V prvem desetletju našega stoletja se je razširilo močno gibanje za preosnovo matematičnega pouka, in to najprej v Franciji, potem pa v Nemčiji, Angliji, Italiji in Ameriki. Klein, čigar vpliv na tedanje matematike je bil izreden, je odločno zahteval, naj se uvedejo v gimnazijski pouk elementi dif. in integr. računa. Na seji Društva nemških prirodoslovcev in zdravnikov v Breslavi leta 1904 je bila na Kleinov predlog izbrana komisija (Breslauer Unterrichtskomission) in ta je dobila nalogo, da za naslednjo skupščino Društva izdela konkreten predlog za reformo učnega načrta na srednjih šolah. O svojih zaključkih je komisija poročala na naslednji skupščini v Meranu leta 1905. Na zborovanju sta imela referat o *uvedbi infinitezimalnega računa v srednješolski pouk* Czuber in Hočevar.

Hočevar v svojem referatu na kratko navaja razloge za uvedbo (velika izobrazbena vrednost, priprava za različne strokovne študije na visokih šolah, korektnejša razrešitev nekaterih važnih matematičnih in fizikalnih nalog v srednji šoli); navaja tudi zapreke pri uvajanju (snov za učence pretežka, preobremenitev učencev). Če bi se infinitezimalni račun uvedel, naj bi se po njegovem tedanje učno gradivo skrčilo. — Hočevar meni, da se mora uvesti nova učna snov v vse srednje šole. Pri določanju, koliko naj gradivo obsega, pa je treba upoštevati: 1. dojemljivost učencev; 2. čas, ki se lahko dobi s skrčenjem do sedaj predpisane učne snovi; 3. tiste matematične in fizikalne naloge na

srednji šoli, ki zahtevajo uporabo infinitezimalnega računa. »Novo gradivo je treba podati nazorno,« zaključuje govornik, »razjasniti ga na mnogih primerih, vendar tako, da ne bodo zanemarjeni zakoni logike. Matematiko moramo namreč v vseh njenih delih prikazati učencem kot zgled eksaktne znanosti.«

Po meranskem učnem načrtu ni končni cilj matematičnega pouka samo »razvijati učencem sposobnost za logično mišljenje in sklepanje«, ampak je njegova glavna naloga »utrjevati prostorno predstavo in navajati učenca na funkcionalno mišljenje.« — Klein je bil še nadalje najbolj vneti zagovornik vpeljave. V nekem svojem predavanju leta 1906 v Göttingenu je trdil, da morajo postati pojem funkcije in elementi dif. in integr. računa svojina vsakega izobraženega človeka.

To gibanje je kmalu tudi v Avstriji rodilo zaželeni sad. Ministrstvo za prosveto je izdalo leta 1909 nov učni načrt za gimnazije in realke, ki je prinesel nekaj bistvenih sprememb in upošteval v dovoljni meri reformne težnje. Učni načrt je zahteval razširjenje snovi in bistvene spremembe; vpeljali so na novo n. pr.: pojem funkcije, elemente dif. in integr. računa, osnove verjetnostnega računa, osnovne pojme poševne in pravokotne projekcije; zahtevali so, naj se poudarja povezanost matematike z življenjskimi pojavi; geometrija v nižji se je pričela z ogledovanjem geometrijskih teles, ne več strogo sistematično in abstraktno s premico, itd.

Hočevar je vse nove izdaje svojih učbenikov prikrojil po novem učnem načrtu. Vendar pa je referent F. v »Monatshefte«, ko je naštel vse odlike teh preurejenih učbenikov, ugotovil, da imajo glede izbire in obdelave snovi v primeri z drugimi, takrat izdanimi, bolj konservativen značaj, posebno v geometriji. — Vseeno so tudi tako predelane Hočevarjeve učne knjige še po letu 1919 doživele v nasledstvenih državah mnogo izdaj, tako v nemščini kakor v prevodih.

Kako zelo so cenili v inozemstvu Hočevarjeve učbenike, nam najlepše priča to, da sta angleška matematika C. Godfrey in E. A. Price leta 1903 prevedla njegovo Geometrijo v *angleščino.* Ker na Angleškem takrat sploh niso imeli učnih načrtov v našem smislu, se prevajalca nista mogla zadovoljiti z enostavnim prevodom, temveč sta morala gradivo spremeniti in ga prilagoditi takrat tam veljavnim izpitnim predpisom. Zmanjšala sta število dokazov, kajti iz marsikaterega pravila sta kratko in malo naredila nalogo. Tako sta omilila izrazito Hočevarjevo strogost v dokazovanju, razumevanje pa olajšala. Nekatere naloge v izvirniku sta podrobno obdelala kar v tekstu. Nekaj nalog sta dodala, nekaj poglavij pa skrajšala. Zaradi teh razlik knjiga ustreza nekako vmesni stopnji med našimi današnjimi učnimi knjigami osnovne šole in gimnazije, vendar se bolj približuje zadnji. Kljub nekaterim oddaljitvam od izvirnika je knjiga v glavnem le obdržala značilnosti Hočevarjevih učbenikov. — Izmed prevodov izven Avstrije je treba omeniti še *srbske.* Beograjska profesorja Dj. Roknić in V. Zdelar sta prevedla leta 1900 Aritmetiko in Geometrijo za nižje razrede srednjih šol. Oba prevoda sta doživela pred prvo svetovno vojno še več izdaj.

Pri Hočevarjevih učbenikih in razpravah o pouku stopata v ospredje znanstveni in logični moment. Toda ta njegova smer v učbenikih je tudi v takratni dobi dajala malo upanja na uspeh. Lahko je ugajala strokovnjaku, se pa izpostavljala nevarnosti, da gre preko zmogljivosti dijakov. Zaradi znanih vsebinskih in metodičnih vrlin pa so se Hočevarjevi učbeniki vseeno uveljavili. Ohranili bodo svojo vrednost, čeprav danes tudi v matematiki, kakor v drugih

znanostih, na marsikaj drugače gledamo kakor pred šestdesetimi leti. Za nas niso le zgodovinskega pomena, marveč zaslužijo, da jih še danes temeljito proučujemo in iz njih črpamo to, kar je še uporabno.

Literatura:

H. Kleinpeter, Hočevar F. Solid Geometry, Z. f. d. Rw. 1904.

F. Klein, Neue Beiträge zur Frage des math. u. physik. Unterrichts an höheren Schulen, Leipzig u. Berlin, Teubner 1904.

E. Dintzl, Eine vergleichende Studie über die mathematischen Lehrpläne für die österreichischen u. preussischen Realgymnasien, Z. f. d. ö. G. 1909.

Ph. Freud, Die mathematischen Schulbücher an den Mittelschulen u. verwandten Anstalten, Wien, Hölder 1910.

P. Dimić, Bibliografija matematičkih knjiga, Bilten na Društvoto na mat. i fiz. od NR Makedonija, kn. VIII., Skopje 1957.

Jože Povšič

FIZIKALNE VAJE NA BEŽIGRAJSKI GIMNAZIJI

S fizikalnimi vajami smo poskusili na naši šoli že pred nekaj leti, sprva skromno, nekaj vaj, pri vsaki se je gnetla kopica za fiziko vnetih dijakov. Vaje smo sestavljali sproti, ter ob koncu spet skrbno pospravili vse instrumente v omare. Navodila so bila ustna, ali pa na majhnem kosu papirja. Počasi smo izpopolnjevali inventar, nekaj se je dobilo v trgovinah, nekaj smo izdelali sami. Po združitvi Realke z Bežigrajsko gimnazijo je fizikalna zbirka že toliko obogatela, da smo lahko mnoge aparate namenili samo za fizikalne vaje. Danes je na tej šoli sestavljenih približno 90 takih vaj, katerih vsaka zaposli dijaka z najmanj eno uro skrbnega dela.

Najlaže je bilo sestavljati vaje iz mehanike. Precej smo pobrali iz Battestinove zbirke, izvlekli na dan nekaj tehtnic, menzur, epruvet, kroglic, napenjali smo vrvice, navijali vzmeti, krivili steklene cevke ter tu in tam tudi kaj pobarvali. Za toploto smo kupili nekaj lončkov, termovk, termometrov, plinskih gorilnikov. V akustiki smo zbrali nekaj glasbenih vilic, naredili Kundtovo cev. Tudi za optiko niso bile zahteve prehude: nekaj leč, sveče, avtomobilske žarnice, preprosta uklonska mreža, kadičke, okensko steklo. Težave imamo edino s prostorom, ki bi ga lahko zatemnili. Optične vaje še danes delamo kar v predavalnici, seveda moramo vedno vse sproti pospravljati. Z električnimi vajami pa smo imeli veliko težav. Merilni instrumenti so dragi, potrebni so transformatorji, usmerniki, treba je gledati tudi na varnost pri delu. Kljub prizadevanju nimamo do danes niti 20 kompletnih električnih vaj. Poskusili smo tudi s čisto kvalitativnimi vajami, pa se niso obnesle. Vse one vaje, kjer ni bilo meritev, so se izrodile v navadno igračkanje.

Naenkrat lahko postavimo le polovico vseh vaj, ob semestru pa jih zamenjamo. Pri vsaki vaji je na kartonu navodilo s seznamom potrebščin, opisom vaje in napotki za meritve in račune. V preteklem letu je redno delalo vaje 80 dijakov in dijakinj. Razdeljeni so bili v štiri skupine tako, da so bili v vsaki zastopani vsi trije razredi. Pri vajah zato ni bilo prehude gneče in vsakdo je imel svoje delovno mesto. Nikakor ne vztrajamo na tem, da bi snov pri vajah morala teči vzporedno s snovjo pri rednem pouku. Dijak lahko dela vajo iz snovi prejšnjega leta, lahko pa se spoprime tudi z vajo iz njemu še neznane snovi, toda v tem primeru se mora na vajo predhodno pripraviti, potrebna pa je tudi še dodatna pomoč vodje.

Čeprav delajo dijaki vaje prostovoljno, vendarle zahtevamo od prijavljencev redno udeležbo (enkrat tedensko 6. in 7. ura) ter skrbno delo. Ob

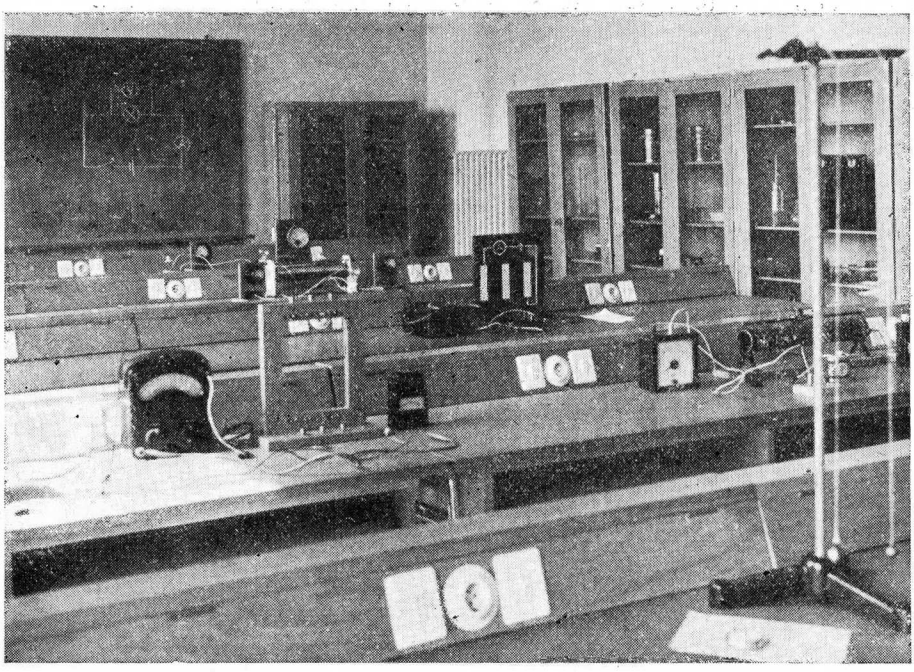
semestru in na koncu leta na krajšem izpitu temeljito pregledamo izdelke ter vaje ocenimo kot neobvezen predmet.

Ne moremo se še pohvaliti z blestečimi uspehi. Mnoge stvari bo treba še izboljšati in izpopolniti. Toda prvi koraki so bili storjeni, najhujše delo opravljeno. Bodoči učni načrt za reformirano gimnazijo predvideva približno četrtino rednih učnih ur za fizikalne vaje, ki se na ta način uvajajo kot obvezni del rednega pouka za vse dijake. Prav bi bilo, da se na naših gimnazijah že sedaj pričnó pripravljati na to, kajti sestavljanje takih vaj zahteva od učitelja več let skrbnega in napornega dela.

F. Plevnik

... IN NA TEHNIŠKI ŠOLI ZA KMRL

Tudi na Tehniški šoli za kemijsko, metalurško, rudarsko in lesnoindustrijsko stroko je fizika v zadnjem šolskem letu zaznamovala pomemben napredek:



Fizikalni laboratorij na tehniški šoli za KMRL

dobila je nov, sodobno opremljen fizikalni laboratorij. Do upravne reorganizacije Tehniške srednje šole pred dvema letoma je bila fizika precej potisnjena v ozadje kot eden izmed pomožnih predmetov, in to kljub vlogi, ki jo ima fizika za izobrazbo tehnikov. Nova uprava Tehniške šole za KMRL pa je pokazala za fiziko veliko razumevanje. Pri izdelavi novih učnih načrtov je bilo fiziki dodeljenih znatno večje število tedenskih ur: na kemijskem oddelku 10 (4 + 4 + 2), na metalurškem in rudarskem 7 (4 + 3) in na lesnoindustrijskem oddelku 8 (4 + 4). Poleg tega pa je bil med prvimi deli nove uprave urejen fizikalni laboratorij za praktične vaje učencev ter adaptirana majhna delavnica za popravilo starih in izdelavo preprostejših novih učil.

V preteklem šolskem letu so že bile v fizikalnem laboratoriju vaje iz fizike in elektrotehnike. Fizikalne vaje so imeli prvi in drugi razredi vseh oddelkov po enkrat na vsako konferenčno obdobje, tretji razredi kemijskega oddelka pa vsak drugi teden. Vaj je bilo okrog 40 v vseh treh letnikih. Vse vaje, določene za posamezni letnik, so menjaje opravili vsi dijaki tistega letnika. Vendar pa so morali — zaradi pomanjkanja učil in merilnih instrumentov — vsako vajo opravljati v skupinah po dva učenca. Navodilo za potek vaje s seznamom potrebščin so dobili dijaki na listu natipkano. V šoli so dijaki opravljali samo meritve, dokončen izračun pa so morali izvršiti doma, naslednjo uro pa prinesti izdelan »program«.

V splošnem so dijaki z zanimanjem in z veseljem opravljali vaje. Dobljeni rezultati so bili zadovoljivi. Pokazalo se je le, da ni najboljše, da delajo dijaki vaje v skupinah po dva ali celo več dijakov, ker se s tem zmanjšuje samostojnost posameznika. Zato bo treba v prihodnje pripraviti več učil in merilnih instrumentov, da bo lahko vsak dijak delal svojo vajo. *F. Kvaternik*

DOMAČE VESTI

USPELI SMO

Kar prijetno mi je pisati o uspehu naših mladih matematikov tudi izven naše republike. Najboljši tretje in četrtošolci na republiškem tekmovanju mladih matematikov so se udeležili 14. maja zveznega tekmovanja v Beogradu. Zvezna komisija za tekmovanje, sestavljena iz predstavnikov vsehljudskih republik in iz predsednika Zveze društev matematikov in fizikov Jugoslavije je na sestanku določila vse podrobnosti o načinu tekmovanja ter izbrala naloge. Komisija je tudi ugotovila, da se letošnjega tekmovanja niso udeležili predstavniki LR Bosne in Črne gore, češ da na republiškem tekmovanju njihovi dijaki niso dosegli niti 50 % uspeha.

Prijavljenih je bilo — in tekmovanja se je tudi udeležilo — 14 dijakov iz Srbije, 10 iz Hrvatske, 4 iz Makedonije in 5 iz Slovenije. Iz vseh predlogov, ki so jih poslale posamezne republike, je komisija izbrala naslednje naloge:

III. razred

1. x_1 in x_2 sta korena enačbe $x^2 + kx + 1 = 0$. Poišči vrednosti k, za katere velja neenačba:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 2$$

2. Stranice trikotnika ABC so a, b, c ($a < b < c$). Nad njimi so konstruirani podobni pravokotniki, tako da je ploščina nad stranico c večja od vsote ploščin ostalih dveh pravokotnikov za ploščino kvadrata s stranico m.

Poišči višino teh pravokotnikov! Diskusija.

3. Določi največjo vrednost izraza

$$\log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \,.\, \log_2 \left(\frac{8}{x}\right)$$

za vrednosti spremenljivke x v intervalu $1 \leq x \leq 64$!

4. Pokončni valj in stožec imata isto osnovno ploskev; vrh stožca se nahaja v središču druge osnovne ploskve valja. Določi kot, ki ga tvorita stranica stožca in os valja, ako je razmerje površin valja in stožca 7 : 4!

IV. razred

1. Dan je splošni člen zaporedja $a_n = \frac{c^2 + n - 2}{c}$, kjer je c naravno število.

a) Napiši zaporedje in določi vsoto prvih n členov S_n!

b) Napiši izraza za S_n, ako je $n = c$ in pokaži, da je vsota deljiva s 25, če je $c = 10\,k + 1$! (k je naravno število).

2. Dokaži, da je vsota kvadratov razdalj poljubne točke kroga do vseh treh ogljišč enakostraničnega trikotnika, ki je včrtan temu krogu, stalna količina!

3. Določi parameter λ v enačbi premice $x - (\lambda + 2)\,y - \lambda - 4 = 0$ tako, da je premica oddaljena od središča kroga $x^2 + y^2 + 4\,x - 4\,y - 17 = 0$ za $5/\sqrt{2}$. Tangenti kroga v sečiščih z dano premico in ta premica tvorijo trikotnik. Določi ploščino lika, ki ga skupno pokrivata dani krog in temu trikotniku opisan krog! Za λ izberi celoštevilčno rešitev.)

4. Dokaži, da so daljice a, b in c stranice trikotnika takrat in samo takrat, kadar je neenačba

$$a^2\,p + b^2\,q > c^2\,pq$$

izpolnjena za vsako dvojico realnih števil p in q, ako je $p + q = 1$!

V veliki predavalnici narodnih herojev v prirodno-matematični fakulteti se je razvrstilo vseh 33 udeležencev tako, da so bile »astronomske« razdalje med posamezniki. Naloge so bile prilično težke, saj so vsi oddali izdelke po predpisanem triurnem delu. Po pregledu vseh nalog smo ugotovili, da so vsi dijaki bili dobro pripravljeno, posebne četrtošolci, saj so vsi, razen enega izdelali nad polovico naloge.

V tretjem razredu sta oba naša tekmovalca zasedla prvo in drugo mesto. Vrstni red je bil naslednji:

1. nagrado je prejel Alojz Kodre iz gimnazije na Jesenicah;

2. nagrado Andrej Kmet iz II. gimnazije v Ljubljani,

3. nagrado Ivica Dadić iz IX. gimnazije v Zagrebu.

Pohvaljeni pa so bili: Blagoje Ilić iz gimnazije v Kragujevcu, Ratomir Jošić iz XIII. gimnazije v Beogradu in Aleksander Grgić iz XIV. gimnazije v Beogradu.

V četrtem razredu si delita prvo nagrado: Primož Bradač iz I. gimnazije v Ljubljani in Dragomir Lugomirski iz gimnazije v Kragujevcu.

Tudi drugo nagrado si delita Marija Hribšek iz XIV. gimnazije v Beogradu in Jadranka Milić iz II. gimnazije v Beogradu.

Tretjo nagrado si delijo: Dragoljub Arandelović iz gimnazije v Svetozarevu, Špiro Matošin iz V. gimnazije v Zagrebu in Dragomir Vočanski iz II. gimnazije v Zrenjaninu.

Pohvaljeni pa so bili: Florijan Pohar iz gimnazije v Kranju, Vesna Herkov iz III. gimnazije v Zagrebu in Ante Marinović iz VII. gimnazije v Zagrebu.

Letošnji uspeh naših dijakov je posebno razveseljiv, saj lahko rečemo, da je na ta uspeh vplivalo poglobljeno delo z našimi mladimi matematiki, ki ga je naše društvo razvilo z raznimi krožki, tečaji in tekmovanji. Tudi organizatorji zveznega tekmovanja zaslužijo vse priznanje, saj je tekmovanje potekalo v prisrčnem in prijateljskem vzdušju.

Stanko Uršič

POSKUSI

SESALEC ZA PRAH — POMOČNIK PRI FIZIKALNIH POSKUSIH

Marsikatera šola ima že sesalec za prah, ki ima seveda dosti posla pri snaženju, vendar le ne toliko, da ne bi utegnil pomagati tudi fiziku pri nekaterih njegovih poskusih. Mislimo na sesalec, ki ima na eni strani sesalno šobo, na drugi pa pihalno. Zato nam lahko do neke mere koristi kot črpalka in kompresor, ki je sposoben narediti tlak za kake četrt atmosfere večji ali manjši od atmosferskega. Naštejmo nekaj poskusov, pri katerih nam je sesalec koristen.

Kot vetrovnik lahko uporabimo sesalec za skoraj vse tokovne poskuse: 1. za merjenje statičnega in celotnega tlaka ter zastojnega tlaka, 2. za kazanje, da je tlak v hitrih mestih toka majhen, 3. za kazanje upora simetričnih in simetrično v tok položenih teles, 4. za kazanje upora in vzgona modela letalskega krila, 5. za kazanje ping-pong žogice v zračnem curku, 6. za pogon različnih modelov turbin, itd.

Delno nam pomaga sesalec kot šibka pumpa tudi za poskus z magdeburškima polkroglama.

Pri akustiki nam je sesalec koristen za vzbujanje različnih piščali, narejenih (Galtonova, navadna ustnična, piščal na jeziček) in improviziranih (kovinska, steklena ali kaka drugačna cev). Za vzbujanje improviziranih piščali uporabljamo ozko šobo, ki jo dobimo kar pri sesalcu ali pa po potrebi naredimo manjšo. Jakost pihanja reguliramo s stransko na prosto vodečo vejo cevovoda od sesalca k piščali. Stransko vejo lahko bolj ali manj zapremo s stiščkom z regulacijo.

Pri toploti nam je sesalec koristen, ko na primer kažemo, kako se izhlapevanje ob vetru poveča, ali pri določanju rosišča z Regnaultovim higrometrom.

Najbrž je možna še marsikatera uporaba sesalca v fiziki, tako da je ta res splošno koristna fizikalna priprava.

F. A.

VPRAŠANJA

STISLJIVOST MEGLE

Kolikšni so razteznostni koeficient ter izotermna in adiabatna stisljivost megle pri 760 tor in 25 °C? Nasičeni parni tlak vode pri 25 °C je 23,8 tor, izparilna toplota vode pri tej temperaturi pa je $2{,}44 \cdot 10^6$ J/kg.

Mitja Rosina

Iščemo fizike!

Sprejmemo več fizikov za delo v razvojnih laboratorijih in proizvodnji v redno ali honorarno zaposlitev, s polnim ali s skrajšanim delovnim časom. V poštev pridejo tudi študentje zadnjih letnikov in absolventi. Plača po dogovoru.

Delovna področja: Proizvodnja GM števcev, razvoj polvodnikov, razvoj magnetnih materialov, električne in fizikalne meritve na radijskih sestavnih delih, razvoj visokofrekvenčne keramike itd.

Zaradi dogovora se čimprej zglasite v Razvojnem sektorju Industrije za elektrozveze, Ljubljana, Vegova 2, tel. 22-675!

INDUSTRIJA ZA ELEKTROZVEZE LJUBLJANA

POZIV NAROČNIKOM!

Prosimo cenjene naročnike, da spremembe naslova sproti sporočajo upravi lista. Mnogo je namreč primerov, ko »Obzornik« prihaja nazaj, ker je naslovljenec, ki je sicer reden plačnik naročnine, neznanokam odšel ali se preselil. Enako prosimo tiste naročnike, za katere nimamo natančnega naslova, da nam javijo pravi naslov, ker bo pošta v bodoče vračala upravi vse izvode, ki ne bodo naslovljeni tako, da je mogoče najti naslovnika brez poizvedovanja.

Uprava »Obzornika«

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

Bulletin scientifique, Zagreb 1960, T. 6, No. 1.
Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1960, št. 6-7, 8-10.
Fotokemijska industrija, Zagreb 1961, št. 1, 2.
Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb 1960, T. 15, No. 4.
Gospodarski vestnik, Ljubljana 1961, št. 30-55.
Idrijski razgledi, Idrija 1961, št. 1.
Matematičko fizički list, Zagreb 1960/61, št. 4.
Philip's Technische Rundschau, Eindhofen, 1960/61, No. 4, 5, 6, 7, 8.
Physics Today, New York 1961, Vol. 14, No. 2, 3, 4.
Proteus, Ljubljana 1960/61, 8, 9-10.
Sodobna pedagogika, Ljubljana 1961, št. 1-2, 3-4.
Ukrainskij matematičeskij žurnal, Kiev 1961, T. XIII, No. 1.
Uspehi matematičeskih nauk, Moskva 1961, T. XVI, Vyp. 2.
Varilna tehnika, Ljubljana 1961, št. 1.
Vestnik moskovskogo universiteta, Moskva 1961, No. 1, 2.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima štiri številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 300 din, posamezna številka 75 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-21-5-883.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina znaša 600 din, za redne člane Društva 300 din, za ustanove 1000 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-21-3-323 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 400 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 450 din. Posamezna številka 120 din. Naročnino nakažite na čekovni račun 600-14-3-207.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227, tel. št. 23-304