



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

**LJUBLJANA
1960
VII. št. 4**

VSEBINA

Članki	Stran
Nicolas Bourbaki (N. Prijatelj)	145
Diskretni potencial (T. Skubic)	151
Fizikalne količine in matematične strukture (A. Suhadolc)	158
Mössbauerjev pojav (J. Strnad)	161
 Novice	
Fotonuklearna absorpcija (M. Kregar in M. Rosina)	174
 Šola	
Pouk naravoslovnih predmetov v splošnoizobraževalnih šolah (S. Uršič)	179
Zbirka poskusov iz fizike (F. Ahlin)	182
Podiplomski tečaj o uporabi radioaktivnih izotopov v industriji (E. Pirkmajer)	183
Matematična olimpiada v Bukarešti (S. Uršič)	184
Delo sekcije za popularizacijo znanosti (S. Uršič)	186
 Domače vesti	
III. kongres matematikov in fizikov Jugoslavije v Beogradu (F. Šušteršič)	187
Vprašanja	188
Nove knjige	190

CONTENTS

Articles	Page
Nicolas Bourbaki (N. Prijatelj)	145
The Discrete Potential (T. Skubic)	151
Physical Quantities and Mathematical Structures (A. Suhadolc)	158
Mössbauer's Effekt (J. Strnad)	161
 News	
Photonuclear Absorption (M. Kregar in M. Rosina)	174
 School	
Lessons of Natural History in Public Schools (S. Uršič)	179
A Collection of Experiments in Physics (F. Ahlin)	182
Post Diploma Course about the Use of Radioactive Isotops in Industry (E. Pirkmajer)	183
A Competition of Young Mathematicians in Bukarest (S. Uršič)	184
The Work of the Section for Popularization of Science (S. Uršič)	186
 Home News	
3 th Congress of Mathematicians and Physicists of Yugoslavia in Beograd (F. Šušteršič)	187
Questions	188

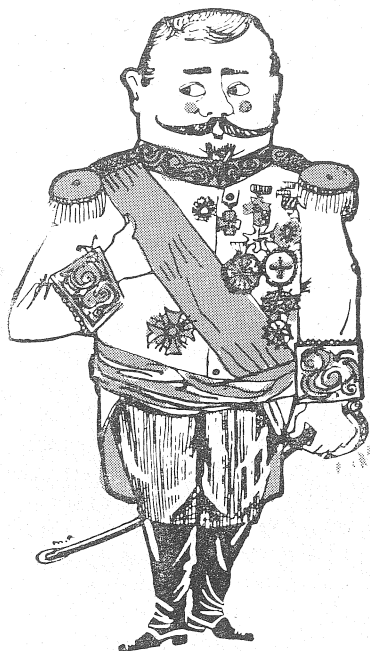
NICOLAS BOURBAKI

NIKO PRIJATELJ

I.

Pred petindvajsetimi leti, novembra 1935, je zdaj že umrli E. Cartan, senior profesor matematike na Sorbonni, prejel kratko znanstveno sporočilo s podpisom: Nicolas Bourbaki. To pismeno obvestilo, ki se je nanašalo na teorijo integracije, je vzbudilo med pariškimi matematiki nemalo začudenja in presenečenja. Vzrok temu pa ni bila toliko vsebina obvestila kot ime njegovega avtorja.

Das ime Bourbaki ne zveni francoskemu ušesu posebno domače, mu je vendarle poznano še iz žalostnih časov francosko-pruske vojne (1870–1871). Francoski vzhodni armadi je namreč tedaj poveljeval general Charles Bourbaki, ki je po predhodni zmagi pri Villersexelu doživel temeljit polom na Lisaini. Poraz je bil tako popoln, da si je hotel ubogi general zato sam vzeti življenje. Te namere sicer ni uresničil in je kljub vsemu dočakal častitljivo starost 81 let. Njegov neuspeh pa se je vendarle vtisnil v spomin Francozov in še danes radi opišejo kak temeljit polom kot »défaite à la Bourbake« ...



No, matematik Nicolas Bourbaki ni imel razen priimka sicer nobene sorodstvene zveze z nesrečnim generalom. To, kar je povzročilo razburjenje ob njegovem imenu, je bil spomin na neki drug dogodek, ki se je pripetil na sloviti Ecole Normale Supérieure v ulici Ulm, kjer se že od nekdaj vzgaja in neguje mladi rod in cvet francoske znanosti. Bilo je leta 1901 ali 1902, ko je nekega lepega dne nenadoma počastil to znamenito šolo s svojim obiskom skrivnostni matematik iz daljne finske dežele. Ravnatelju in profesorjem se je predstavil: Nicolas Bourbaki. Pred tem častitljivim zborom in študenti je imel visoko učeno predavanje, prepleteno s povsem nepoznanimi in nerazumljivimi matematičnimi formulami. Pod globokim dojemom njegovih izvajanj so ga hoteli zbegani poslušalci po končanem predavanju še posebej počastiti. Toda Nicolas Bourbaki je izginil tako hitro, kakor se je bil pojavil ... Kaj kmalu so odkrili tajno tega prečudnega matematičnega gosta. Ugotovili so, da bradati gospod, ki se je predstavil z imenom Nicolas Bourbaki, sploh ni bil kak učen finski matematik, ampak le našemljen pariški clochard (klatež), ki so ga prešerni študentje naučili sumljive matematične pridige, da bi se tako malo poveselili, tokrat na račun svojih spoštovanih učiteljev. Te duhovite potegavščine zlepa niso pozabili.

Bourbakijevo predavanje na Ecole Normale je prišlo v ustno izročilo šole pod imenom: »zadeva Bourbaki«. Po vsem tem je torej lahko umljivo, da je v začetku omenjeno prvo pismeno sporočilo podpisano s tem dvomljivim imenom bilo sprejeto s precejšnjimi pridržki. Ali je bila po sredi nova potegavščina? Toda glej, vsebina sporočila je bila tokrat matematično povsem neoporečna.

Štiri leta kasneje, leta 1939, pa je izšel pri znanem pariškem založniku Hermannu droben zvežčič na petdesetih straneh: *Éléments de Mathématique* par Nicolas Bourbaki. To je začetek velikega, na široko zasnovanega, držnega podjetja, kakó aksiomatično zgraditi celotno stavbo moderne matematike in pokazati njeno enovitost tako, da začne njena gradnja prav pri začetku, torej pri logičnih osnovah. Avtor obljublja v tem prvem zvezku še nadaljnje, ki se bodo družili v knjige. Vsaka knjiga naj bi obravnavala posamezne temeljne strukture matematične analize in naj bi bila praviloma zaključena z zvezkom rezultatov, kjer bi imel bralec zbrane vse definicije in izsledke, ki jih ustrezná knjiga vsebuje. Tako začenja s tem prvim zvezkom prvo knjigo, ki naj obravnava teorijo množic. Toda kakor v zasmeh vsakemu pričakovanju, je to zvezek rezultatov...

Senca norčavega clocharda, megalomanski načrt, čudaški začetek z zvezkom rezultatov, vse to je upravičeno vzbujalo sum v resnóbnost tega podjetja. Toda kaj kmalu za prvim zvezkom so sledili nadaljnji. In zopet ne tako, kakor bi bilo pričakovati, lepo po vrstnem redu, ampak: najprej dva zvezka tretje knjige, nato en zvezek druge knjige, pa zopet en zvezek tretje knjige, pa dva zvezka druge knjige, medtem ko je prvo knjigo vztrajno zastopal le zvezek rezultatov. Vendar, naj so bile te okoliščine še tako nenavadne in avtor muhav kakor je bil, prizadetim in pristojnim ni bilo težko ugotoviti, da je pisal Nicolas Bourbaki sicer svojevrstno, toda dobro matematiko.

S tem je seveda »zadeva Bourbaki« prerasla okvir interne pariške dogodivščine in je postala predmet pozornosti svetovne matematične publike. Z vseh koncev matematičnega sveta so prihajala pisma na založnika, in preko njega tudi na avtorja z vprašanji, željami in vabili. Toda založnik je ljubosumno čuval avtorjevo skrivnost, izgovarjajoč se na svojo obvezno poklicno tajnost, in hkrati odločno zavrnil vsak predlog, da bi se Bourbakijevo delo prevedlo v druge jezike.¹ Bourbaki pa je odgovarjal na vsa strokovna vprašanja, toda ljubeznivo odklanjal vsa vabila na predavanja, ki so mu jih pošiljale evropske in ameriške univerze. Medtem pa je vztrajno izhajal zvezek za zvezkom tega velikega dela, seveda v enakem »neredu« kakor od vsega začetka.

Če je bilo torej jasno, da gre v tem primeru zares in ne samó za veličavo norčijo, pa je bilo prav tako na dlani, da Nicolas Bourbaki kot individuum, kot realna oseba, ne more eksistirati. Kajti delovni načrt, ki je bil zastavljen in ki se je postopoma tudi uresničeval, je po obsegu in po globini obenem odločno presegal zmogljivost enega samega človeka, pa naj bi bil ta še tako izjemne narave. Takega dela ne zmore opraviti en sam matematik, ampak samo izbrana skupina matematikov, ki so hkrati kot posamezniki odlični specialisti. Nicolas Bourbaki torej ni ime individua, ampak ime skupine. Čeprav založnik Hermann še zmeraj zvesto čuva svojo tajno, pa ne more biti nobenega dvoma, da so v to skupino vključeni najboljši možje, ki jih premore matematična Francija. Zato lahko mirno trdimo, da predstavlja Nicolas Bourbaki sodobno francosko matematično šolo.

¹ Res so doslej prevedli del Bourbakija samo v ruščino, v Sovjetski zvezi, seveda brez dovoljenja založnika Hermanna.

Upamo, da ne bomo preveč indiskretni, če zapišemo, da šteje trenutno Nicolas Bourbaki osemnajst glav. Saj število tukaj tako nič ne pove, štejejo le glave... Sicer pa se to število seveda v času spreminja. Poleg tega velja v tej družbi dogovor, da se vsak član, naj bo še tako častitljiv, ko doseže petdeseto leto, poslovi in napravi prostor mlajšim. Ta dogovor izvira iz prepričanja, da vobče od matematika ni več pričakovati pomembnih stvaritev, brž ko začno njegovi lasje siveti. S tem ukrepom si je seveda Nicolas Bourbaki zagotovil »večno« mladost.

Doslej je izšlo 26 zvezkov Bourbakijeve matematike. Vsako leto se to število poveča za enega ali dva nova zvezka. Če upoštevamo večno mladost avtorja, so torej možnosti praktično neomejene. Predvsem se zato bourbakistom prav nič ne mudi in včasih mine od osnutka pa do končne realizacije kakšnega zvežčiča tudi deset let. Če potrebuje kak drug zvezek manj časa, izide pač prej. Od tod navidezni nered izhajanja posameznih zvezkov. Kajti od osnutka do uresničitve je dolga pot: najprej drobno in trdo delo specialistov, potem pa neusmiljena kritika celotne skupine. Dokler ni vsa bratovščina z delom zadovoljna, delo ni končano. In to traja včasih leta in leta. Pa kaj je to njemu, ki je večno mlad...

Ko smo tako precej natančno opisali romantično življenjsko zgodbo Nikolaja Bourbakija, klepetavega clocharda in genialnega matematika naših dni, se lotimo še druge, težavnejše naloge. Poskusimo na kratko razložiti tudi osnovne ideje, na katerih sloni njegovo delo.

II.

Že sam naslov Bourbakijevega dela, *Éléments de Mathématique*, izdaja eno izmed osnovnih značilnosti avtorjevega pogleda na matematiko. V skladu s tradicijo francoskega jezika bi se namreč glasilo pravilneje: *Éléments des Mathématiques*. Zakaj torej ednina, če je sicer v navadi množina? Ali je matematika enorodna ali mnogorodna znanost? To se pravi: ali imajo osnovni pojmi in definicije, ki tvorijo podlago različnim matematičnim disciplinam, kakšen skupni imenovalac, ali ne?

Dobro nam je poznano, da so imeli Pitagorejci za tak skupni imenovalac (naravno) število. Toda prav tako dobro tudi vemo, da je doživela ta prva hipoteza o enorodnosti matematike svoj tragični brodolom z odkritjem, da sta diagonalna in stranica danega kvadrata nesoizmerljivi. To se je zgodilo pred okroglo 2500 leti. Pod mogočnim vtisom tega spoznanja so Grki strogo ločili aritmetiko od geometrije. Šele 2000 let kasneje je Descartova analitična geometrija zopet zblížala obe področji. Do popolne sprave med njima pa je prišlo komaj v prejšnjem stoletju, ko se je posrečilo z vso ostrino tudi aritmetično definirati pojem iracionalnega števila.

Toda matematika se je nenehoma razraščala. Na njenem starem deblu so poganjale nove in nove veje, ki so rasle samohotno v vse smeri in se vzajemno prepletale. Vsaka veja je prinesla s seboj nove pojme, nove definicije, pa tudi nove metode. Bolj in bolj je matematika vzbujala vtis množstva posameznih avtonomnih znanosti, ki jih veže med seboj nekaj nedoločljivega, če ne samo tradicija. Deblo je izginilo v mreži gostih vej...

Z nastopom teorije množic se je zmešnjava, vsaj za nekaj časa, še povečala. Poleg tega je postalo očitno, da vseh novih pojmov, ki so že pognali v matematiki, ni mogoče reducirati na pojem števila. S tem je bil starodavni sen Pitagorejcev dokončno spoznan kot neuresničljiv. Toda kaj hitro so se tudi

prepričali, da je obratno mogoče pojem števila definirati s pojmi teorije množic, ki so logično prvobitnejši od pojma števila. Tako je morala aritmetika odstopiti častno mesto osnovne matematične discipline teoriji množic. Od tega časa naprej govorimo o moderni matematiki.

Kakšni pa so v teh spremenjenih razmerah izgledi, da najdemo skupni imenovalec raznovrstnim matematičnim disciplinam? »Danes vemo,« odgovarja Nicolas Bourbaki, »da je v smislu logike mogoče izpeljati skoraj vsa sodobno matematiko iz enega samega vira, iz teorije množic.« Toda za to, da pridemo do enovite podobe matematičnega univerzuma, še ni dovolj, če samo premaknemo izhodišče od aritmetike na teorijo množic. Za to je potrebna tudi ustrezna metoda, predvsem pa določen urejevalni princip, ki ločuje, razmešča in združuje.

Kar zadeva metodo, ne more biti nobenega dvoma. Vse od Grkov naprej je matematiki lastna aksiomatična metoda. Pot od aksiomov do izrekov je torej, če zanemarimo določene tančine logične narave, ista pri Evklidu kot pri kateremkoli modernem matematiku. Vse drugače pa je z zgodbo, kako pridemo do aksiomov. Evklid je črpal aksiome geometrije iz nazorne predstave geometrijskih elementov. Lahko bi rekli, da mu je specifična narava teh elementov vsilila izbor aksiomov. Morda najznačilnejša črta moderne matematike pa je ravno v tem, da hoté abstrahira prav določeno naravo elementov, s katerimi ima posla, in se zanima samo za lastnosti in odnose, ki med njimi veljajo, ali točneje povedano, ki n a j med njimi veljajo. Ti elementi tvorijo torej v tem primeru neko abstraktno množico, kateri tokrat matematik vsili aksiome, ki določajo lastnosti in odnose med elementi. S tem dejanjem je v množici definirana določena matematična s t r u k t u r a.

Bistvo in pomen tega abstraktnega postopka ni v samovoljni izbiri strukture, ampak v dejstvu, da ostane narava elementov nespecificirana. To nam namreč omogoči, da najdemo isto strukturo uresničeno na »konkretnih« množicah, katerih elementi morejo sicer imeti zelo različno specifično naravo. Za vse te množice veljajo potem tudi vse logične posledice te strukture, ki jih torej ni treba ponovno dokazovati, ampak le interpretirati v skladu s specifično naravo ustreznih elementov.

Abstraktne strukture pa ne pomenijo samo ekonomije dokazovalnega postopka, ampak določajo predvsem nov, abstrakten urejevalni princip. Tako v moderni matematiki zamenja klasično porazdelitev disciplin po posebni naravi elementov, delitev po strukturah, oziroma točneje delitev po hierarhiji struktur, s tem da prehajamo od enostavnih struktur do sestavljenih in od splošnejših do manj splošnih.

Kako to izgleda? Najprej imamo osnovne tipe struktur, ki jih imenuje Bourbaki — matične strukture. Naštejmo tri najpoglavitnejše! Iz aritmetičnega pojma urejenosti števil po velikosti so izšle s postopno posplošitvijo in abstrakcijo narave elementov tako imenovane strukture urejenosti. Iz posplošenja klasičnega pojma algebraične operacije dobimo algebraične strukture. In generalizacije geometričnih pojmov, kakor okolica, limita, zveznost, konvergenca, so dale povod za topološke strukture. Že v okviru vsake teh struktur imamo pisano raznolikost. Kajti treba je razlikovati med najsplošnejšo strukturo danega tipa, ki je določena z najmanjšim številom aksiomov, od drugih, manj splošnih, ki jih dobimo s privzemom dodatnih, utesnjujočih aksiomov. Poleg tega pa moremo te osnovne tipe struktur med seboj tudi kombinirati. Tako pridemo od enostavnih na sestavljene strukture.

V takih sestavljenih ali, kakor pravi Bourbaki, multiplih strukturah osnovni tipi seveda niso samo položeni eden na drugega, ampak intimno združeni s posebnimi aksiomi, ki jih vežejo v novo organsko celoto. Sestavljena struktura vektorskih topoloških prostorov na primer, druží osnovno algebraično strukturo vektorskega prostora s strukturo topološkega prostora. To pa tako, da sta obe algebraični operaciji, ki sta definirani v vektorskem prostoru, zvezni v dani topologiji.

No, in če tako nadaljujemo to pot od splošnih struktur k posebnim in sestavljenim ter zamenjamo abstraktne elemente naše množice s specificiranimi, pridemo naposled do posebnih disciplin klasične matematike: do teorije števil, teorije funkcij realne ali kompleksne spremenljivke, algebraične geometrije, diferencialne geometrije itd. Toda tokrat jih ne vidimo več klasično, kot samostojne discipline. Moderna optika nam jih predstavi kot vozlišča mreže, kjer se križajo in prepletajo abstraktne matematične strukture.

»Po aksiomatičnem pojmovanju,« pravi Bourbaki, »je matematika v bistvu rezervoar abstraktnih form — matematičnih struktur.« In: »To se pravi, da je matematika manj kot le kdaj omejena na čisto mehanično igro z izoliranimi formulami. Intuicija še prav močno prevladuje pri nastanku odkritij; toda zdaj razpolaga z mogočnimi vzvodi, ki jih ji daje teorija velikih tipov struktur in tako obvladuje z enim samim pogledom neizmerna področja, združena po aksiomatiiki, kjer je nekdaj izgledalo, da vlada najbrezličnejši kaos.«

Toda, ali je ta strukturna mreža, ki smo jo le v grobih obrisih prikazali zgoraj, res že tako nagosto stkana, da lahko najdemo v njej vsa danes poznana matematična dejstva? Treba je povedati, da obstoje še številni osamelí rezultati v nekaterih matematičnih teorijah, kot na primer v teoriji števil, ki jih zaenkrat še niso uspeli zadovoljivo povezati z doslej poznanimi strukturami. Vendar te nepopolnosti Bourbakija ne zavajajo v malodušje in odgovarja:

»... kajti nič ni bolj tuje aksiomatični metodi kot statično pojmovanje znanosti; in ne bi radi pustili bralca v veri, da smo nameravali začrtati njeno dokončno stanje. Strukture niso neizpremenljive niti po številu, niti po svojem bistvu. Zelo mogoče je, da bo nadaljnji razvoj matematičnih znanosti povečal število osnovnih struktur s tem, da bo odkril plodonosnost novih aksiomov ali novih kombinacij aksiomov; in naprej lahko računamo na odločilna napredovanja, ki jih bodo povzročile te iznajdbe struktur, če sodimo po tistih, ki so jih prinesle doslej znane strukture. Sicer pa te zadnje še nikakor niso dovršene zgradbe in bilo bi zelo presenetljivo, če bi bila vsa vsebina njihovih principov že doslej izčrpana.

Tako smo si lahko, upoštevajoč te nujno potrebne popravke, bolje v svesti notranjega življenja matematike in tega, kar jo dela hkrati enotno in različno. Podobna je velikemu mestu, katerega predmestja se v rahlem neredu nenehno razraščajo v okolico, medtem ko se središče občasno prenavlja, vsakokrat po razločnejšem načrtu in v veličastnejši razporeditvi, s tem da se rušijo stare četrti in njihove labirintske uličice, zato, da se speljejo do periferije široke ceste, ki so zmeraj bolj ravne, širše in udobnejše.«

To bi bile, sumarično povedano, vodilne ideje, iz katerih izvira Bourbakijevo delo. Menda ne bo napak, če to delo na koncu tudi navedemo. Toliko seveda, kolikor ga je do današnjega dne že uresničenega; tokrat pa v »pravem« vrstnem redu. Torej:

Elementi matematike

Prvi del: Osnovne strukture analize

Prva knjiga: Teorija množic

1. Opis formalne matematike. — 2. Teorija množic. — 3. Urejene množice. Kardinalna števila. Cela števila. — 4. Strukture. — Zvezek rezultatov.

Druga knjiga: Algebra

1. Algebraične strukture. — 2. Linearna algebra. — 3. Multilinearna algebra. — 4. Polinomi in racionalni ulomki. — 5. Komutativni obsegi. — 6. Urejene grupe in obsegi. — 7. Moduli na osnovnih kolobarjih. — 8. Poluenostavni moduli in kolobarji. — 9. Seskvilinearne in kvadratne forme.

Tretja knjiga: Splošna topologija

1. Topološke strukture. — 2. Enakomerne strukture. — 3. Topološke grupe. — 4. Realna števila. — 5. Grupe z enim parametrom. — 6. Numerični in projekтивni prostori. — 7. Aditivne grupe $\mathbb{R}^n$. — 8. Kompleksna števila. — 9. Uporaba realnih števil v splošni topologiji. — 10. Funkcionalni prostori. Slovar. — Zvezek rezultatov.

Četrta knjiga: Funkcije ene realne spremenljivke

1. Odvodi. — 2. Primitivne funkcije in integrali. — 3. Elementarne funkcije. — 4. Diferencialne enačbe. — 5. Lokalni študij funkcij. — 6. Posplošene Taylorjeve razvrstitve. Euler-Mac Laurinova sumacijska formula. — 7. Funkcija gama. Slovar.

Peta knjiga: Vektorski topološki prostori

1. Vektorski topološki prostori nad obsegom z absolutno vrednostjo. — 2. Konveksne množice in lokalno konveksni prostori. — 3. Prostori zveznih linearnih preslikav. — 4. Dualnost v vektorskih topoloških prostorih. — 5. Hilbertovi prostori: elementarna teorija. Slovar. — Zvezek rezultatov.

Šesta knjiga: Integracija

1. Neenačbe konveksnosti. — 2. Rieszovi prostori. — 3. Mere na lokalno kompaktnih prostorih. — 4. Razširjava mere. Prostori L^p . — 5. Integracija mer. — 6. Vektorska integracija.

Izven tega prvega dela je izšlo, kot zadnji zvezek, še prvo poglavje s področja Liejevih grup in algeber

Liejeve algebre.

Pripomba: Bourbakijevo »biografijo« sem povzel iz podatkov, ki mi jih je dal ljubeznivo na razpolago gospod Monnet, tehnični urednik založbe Hermann, za kar se mu prisrčno zahvaljujem. Upošteval sem tudi podatke, ki so bili objavljeni v Courier Bull., No. 42, 1959 in v Le Bulletin du Livre (Sciences et techniques), št. 20 z dne 15. 10. 1959. Pri drugem delu pa sem poleg »listanja« po Elementih uporabil tudi Bourbakijev članek L'architecture des Mathématiques, ki je izšel v knjigi Les grands courants de la Pensée mathématique présentés par F. le Lionnais, Cahiers du Sud, 1948.

DISKRETNİ POTENCIAL

TOMISLAV SKUBIC

(Oddelek za tehniško fiziko)

Potencial imenujemo vsako funkcijo u , ki zadošča Laplaceovi diferencialni enačbi $\Delta u = 0$. V treh dimenzijah se ta parcialna diferencialna enačba drugega reda glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Njene rešitve $u(x, y, z)$ se imenujejo Newtonovi potenciali. V dveh dimenzijah pa se Laplaceova diferencialna enačba glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Ta enačba ima nešteto rešitev. Zadošča ji na primer funkcija $u(x, y) = xy$ ali $y^2 - x^2$. Vsaka rešitev enačbe (1) se imenuje logaritmčni potencial in sicer zato, ker je rešitev, ki je odvisna samo od razdalje r od neke začetne točke, enaka $u(r) = C \log r$. Ta rešitev je regularna povsod v končnosti, razen v izhodišču.

Oglejmo si sedaj neko enačbo, ki je podobna enačbi (1), samo da nastopajo v njej namesto odvodov (t. j. diferencialnih kvocientov) diferenčni kvocienti. Da bomo to lažje razumeli, ponovimo definicijo odvoda. Odvod $f'(x)$ funkcije ene neodvisne spremenljivke $y = f(x)$ je limita diferenčnega kvocienta $[f(x+h) - f(x)]/h$, ko gre h proti nič. Podobno je definiran parcialni odvod. Vzemimo funkcijo ene neodvisne spremenljivke $f(x)$. Diferenčni kvocient te funkcije tvorimo tako, da razliko funkcijskih vrednosti v točkah $n + \frac{1}{2}$ in $n - \frac{1}{2}$ delimo z razliko argumentov, ki je v tem primeru enaka 1. Zato je diferenčni kvocient kar enak spremembi funkcije $\Delta f(n) = f(n + \frac{1}{2}) - f(n - \frac{1}{2})$. Drugo diferenco te funkcije pa dobimo tako, da poiščemo diferenco prve difference, torej je $\Delta^2 f(n) = f(n+1) - f(n) - f(n) + f(n-1) = f(n+1) - 2f(n) + f(n-1)$. Če pa imamo funkcijo dveh neodvisnih spremenljivk $f(m, n)$, ki je definirana v vseh točkah ravnine s celoštevilčnimi koordinatami, lahko tvorimo podobno kot zgoraj parcialne diferenčne kvociente z oziroma na spremenljivko m ali n . Oba druga parcialna diferenčna kvocienta, ki sta kar enaka obema drugima diferencama funkcije, se glasita

$$\begin{aligned} \Delta_m^2 f(m, n) &= f(m+1, n) - 2f(m, n) + f(m-1, n) \\ \Delta_n^2 f(m, n) &= f(m, n+1) - 2f(m, n) + f(m, n-1) \end{aligned} \quad (2)$$

Če nadomestimo v enačbi (1) odvoda z diferenčnima kvocientoma (2), dobimo tej enačbi analogno diferenčno enačbo za funkcijo $u(m, n)$

$$(\Delta_m^2 + \Delta_n^2) u(m, n) = 0 \quad (3)$$

ki jo zaradi enačb (2) lahko pišemo tudi v naslednji obliki:

$$u(m+1, n) + u(m-1, n) + u(m, n+1) + u(m, n-1) - 4u(m, n) = 0 \quad (3')$$

Ker se imenuje vsaka rešitev diferencialne enačbe (1) potencial, hočemo po analogiji imenovati vsako rešitev $u(m, n)$ diferenčne enačbe (3) tudi potencial, in sicer diskretni potencial. Podobno kot enačba (1) ima tudi enačba (3) nešteto rešitev. Ena izmed rešitev enačbe (3) je na primer $u(m, n) = mn$. O tem se hitro prepričamo, če vstavimo to funkcijo v enačbo (3'). Tudi funkcija $u(m, n) = n^2 - m^2$ je rešitev enačbe (3').

Izmed rešitev enačbe (3) hočemo poiskati tisto, ki ustreza logaritmичnemu potencialu $\log r$. Ker pa je za to funkcijo izhodišče koordinatnega sistema singularna točka, si hočemo ogledati nehomogeni primer enačbe (3), ko za $m = n = 0$ desna stran ni enaka nič, ampak ena. Gre torej za reševanje enačbe

$$(\Delta_m^2 + \Delta_n^2) u(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{za } m = n = 0 \\ 0, & \text{v vseh drugih točkah } (m, n) \end{cases} \quad (4)$$

Preden se lotimo reševanja enačbe (4), bomo najprej poiskali rešitev neke druge nehomogene diferenčne enačbe, namreč

$$(\Delta_m^2 + \Delta_n^2 + k^2) u(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{za } m = n = 0 \\ 0, & \text{za vse ostale točke } (m, n) \end{cases} \quad (5)$$

pri čemer je k realno število. Homogeni primer te enačbe je analogen valovni enačbi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

Ena izmed rešitev enačbe (5) je podana z izrazom

$$u = u_1(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(m\varphi + n\psi)}}{2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + k^2 - 4} d\psi \quad (6)$$

O tem se prepričamo takole: Če uporabimo operator Δ_n^2 na funkcijo $u(m, n) = e^{i(m\varphi + n\psi)}$, pri čemer sta φ in ψ konstanti, dobimo

$$\Delta_n^2 u(m, n) = (e^{i\psi} - 2 + e^{-i\psi}) e^{i(m\varphi + n\psi)}$$

$$\begin{aligned} \text{Torej je } (\Delta_m^2 + \Delta_n^2 + k^2) e^{i(m\varphi + n\psi)} &= \\ &= (e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi} + e^{i\psi} - 2 + e^{-i\psi} + k^2) e^{i(m\varphi + n\psi)} = \\ &= (2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + k^2 - 4) e^{i(m\varphi + n\psi)} \end{aligned}$$

Prvi faktor je enak imenovalcu integranda v rešitvi (6), tako da je

$$(\Delta_m^2 + \Delta_n^2 + k^2) u_1(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\varphi + n\psi)} d\psi$$

Integral na desni strani pa je enak 1 za $m = n = 0$, za vse druge točke (m, n) pa je enak 0.

Vidimo torej, da funkcija $u_1(m, n)$, ki je dana z enačbo (6), resnično zadošča parcialni diferenčni enačbi (5). Ker je rešitev soda z ozirom na m in n , se njena vrednost nič ne spremeni, če številu m ali številu n spremenimo predznak.

Vrnimo se sedaj k enačbi (4) in jo poskušajmo rešiti s pomočjo rešitve (6)! Najpreprosteje bi dobili rešitev tako, da bi v (6) postavili $k = 0$. Izkaže pa se, da bi bil tako dobljeni integral divergenten. To težavo odpravimo tako, da vzamemo novo funkcijo $u_2(m, n)$, ki je definirana takole:

$$u_2(m, n) = \lim_{k \rightarrow 0} [u_1(m, n; k) - u_1(0, 0; k)]$$

Tako dobimo funkcijo

$$u_2(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{i(m\varphi + n\psi)}}{4 - 2\cos\varphi - 2\cos\psi} d\psi \quad (7)$$

Integral na desni konvergira in je res rešitev enačbe (4). Diskretni potencial (7) bomo na kratko zaznamovali z $u(m, n)$.^{*} Ta rešitev pa je tista, ki ustreza logaritmичnemu potencialu — rešitvi diferencialne enačbe (1). To sledi neposredno iz rezultata, ki ga je dobil Soboljev: Če neka rešitev enačbe (3) narašča v neskončnosti počasneje kot $\sqrt{m^2 + n^2}$, je ta rešitev konstanta. Diskretni potencial (7), ki ima v izhodišču vrednost nič, se obnaša v neskončnosti kot $\log \sqrt{m^2 + n^2}$ in ima edini to lastnost. Zato rešitev (7) res ustreza logaritmичnemu potencialu $\log r$.

Naša nadaljnja naloga je, poiskati vrednosti diskretnega potenciala za poljubno dvojico (m, n) , to se pravi v poljubni točki $T(m, n)$. V splošnem bi bilo treba računati integral v enačbi (7) za posamezne vrednosti dvojic (m, n) . Izkaže pa se, da se dajo dobiti vrednosti diskretnega potenciala (7) veliko bolj preprosto. Pri tem nam pomaga enačba (3'), iz katere je razvidno, da je vrednost potenciala v poljubni točki, razen v izhodišču, enaka aritmetični sredini njegovih vrednosti v najbližjih točkah, to je v točkah $(m+1, n)$, $(m-1, n)$, $(m, n+1)$ in $(m, n-1)$. Vrednost diskretnega potenciala v izhodišču pa tudi določimo brez težav, ker iz rešitve (7) takoj vidimo, da je

$$u(0, 0) = 0 \quad (8)$$

Vrednost diskretnega potenciala v točki $(1, 0)$ dobimo lahko direktno iz enačbe (3'), če postavimo vanjo $m = n = 0$. Potem je

$$u(1, 0) + u(-1, 0) + u(0, 1) + u(0, -1) - 4u(0, 0) = 1$$

Če upoštevamo še, da je zaradi simetrije

$$u(1, 0) = u(-1, 0) = u(0, 1) = u(0, -1),$$

dobimo

$$4u(1, 0) = 1$$

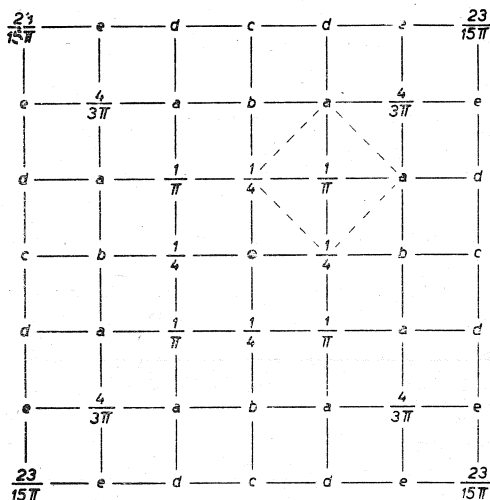
in od tod

$$u(1, 0) = \frac{1}{4} \quad (9)$$

^{*} Integral (7) ima realno vrednost, čeprav je integrand kompleksen.

Če hočemo izračunati vrednosti diskretnega potenciala v nadaljnjih točkah, moramo poznati njegove vrednosti samo še v diagonalnih točkah (n, n) , to je v točkah, ki imajo enaki koordinati. Po daljših transformacijah integrala (7), ki jih tu ne bomo navajali, pridemo do naslednjega rezultata za diagonalne vrednosti $u(n, n)$ diskretnega potenciala

$$u(n, n) = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2|n|+1} \right) \quad (10)$$



Slika 1.

Tako dobimo naslednje vrednosti:

$$u(1, 1) = \frac{1}{\pi}$$

$$u(2, 2) = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi}$$

$$u(3, 3) = \frac{23}{15} \frac{1}{\pi}$$

S pomočjo enačb (8), (9) in (10) lahko določimo vse nadaljnje vrednosti diskretnega potenciala na zelo preprost način. Na sliki 1 so nanesene vse vrednosti, ki jih dobimo s pomočjo omenjenih treh enačb. Neznane vrednosti so na sliki zaznamovane z $a, b, c, d, \dots$. Zaradi simetričnosti našega problema nastopa vrednost a osemkrat, b in c nastopata po štirikrat, vrednost e imamo osemkrat itd. Vrednost a določimo tako, da upoštevamo, da je vrednost $1/\pi$ aritmetična sredina vrednosti v najbližjih točkah. Zato je

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \left(a + a + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

in od tod

$$a = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{4}$$

Če poznamo vrednost a , določimo vrednost b tako, da vzamemo točko, v kateri ima naš potencial vrednost $1/4$, in upoštevamo, da je ta vrednost aritmetična sredina najbližjih vrednosti. Tako dobimo

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi} + b + \frac{1}{\pi} + 0 \right)$$

in od tod

$$b = 1 - \frac{2}{\pi}$$

Če vzamemo za izhodišče točko z vrednostjo a , dobimo

$$a = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{4}{3\pi} + d + b \right)$$

in od tod

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{3\pi} + d + 1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

ali

$$d = \frac{23}{2} \frac{1}{\pi} - 2$$

Podobno dobimo za e in c vrednosti

$$e = \frac{2}{3\pi} + \frac{1}{4}$$

in

$$c = \frac{17}{4} - \frac{12}{\pi}$$

Iz tega je razvidno naslednje: Če poznamo vrednosti diskretnega potenciala (7) v točkah $(0, 0)$, $(1, 0)$ ter v diagonalnih točkah, dobimo vrednosti v vseh ostalih točkah s pomočjo elementarne aritmetike. Tako dobljene vrednosti so razvidne s slike 2.

Oglejmo si še preprost fizikalni zgled! Vzemimo v ravnini kovinsko mrežico, ki je sestavljena iz samih kvadratkov, kot kaže slika 3. Oglišča teh kvadratkov naj bodo ravno točke s celoštevilčnimi koordinatami. Upor stranice vsakega kvadrata zaznamujmo z R ! Mrežica naj se razteza v neskončnost. To si predočimo tako, da si mislimo na mrežico zvarjen neskončno prevoden obroč s središčem v izhodišču in da gre polmer tega obroča preko vsake meje.

Naj bo električni potencial v točki (m, n) enak $V_1(m, n)$. Potem je po Ohmovem zakonu tok, ki teče od točke (m, n) k točki $(m + 1, n)$, enak

$$[V_1(m + 1, n) - V_1(m, n)]/R$$

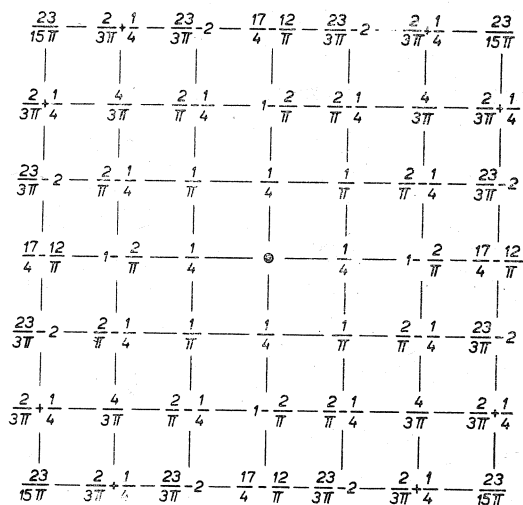
Vsota vseh tokov, ki zapuščajo točko (m, n) , mora biti enaka nič; torej

$$[V_1(m + 1, n) - V_1(m, n) + V_1(m - 1, n) - V_1(m, n)]/R = 0$$

To velja za vse točke (m, n) , razen za izhodišče, kjer je vsota enaka toku I_0 , ki v tej točki vstopa v mrežico (slika 3). Zato zadošča potencial $V_1(m, n)$ diferencialni enačbi

$$(\Delta_m^2 + \Delta_n^2) V_1(m, n) = \begin{cases} RI_0, & \text{za } m = n = 0 \\ 0, & \text{v vseh drugih točkah } (m, n) \end{cases} \quad (11)$$

Rešitev te enačbe je $V_1(m, n) = RI_0 u(m, n)$, kjer je $u(m, n)$ rešitev enačbe (4).



Slika 2.

Vzemimo sedaj drug primer, ki ga kaže slika 4. Tok I_0 naj priteka v neskončnosti in naj odteka iz poljubne točke (m_1, n_1) . Potencial $V_2(m, n)$, ki ustreza temu primeru, se s prejšnjim izraža takole:

$$V_2(m, n) = -V_1(m - m_1, n - n_1)$$

Namesto izhodišča je namreč sedaj točka (m_1, n_1) , znak — pa je zato, ker v tej točki tok odteka.

Če oba primera združimo, se tok v prvem primeru, ko odteka v neskončnosti, in tok v drugem primeru, ko priteka v neskončnosti, medsebojno uničita in dobimo primer, kjer tok I_0 vstopa v mrežico v izhodišču in jo zapušča v točki (m_1, n_1) (slika 5). Potencial je zdaj enak

$$V_1(m, n) + V_2(m, n) = V_1(m, n) - V_1(m - m_1, n - n_1)$$

Izračunajmo potencialno razliko med točkama $(0, 0)$ in (m_1, n_1) ! Če jo zaznamujemo z $V_{1,2}(m_1, n_1)$, se glasi

$$V_{1,2}(m_1, n_1) = [V_1(m_1, n_1) - V_1(0, 0)] - [V_1(0, 0) - V_1(-m_1, -n_1)]$$

Ker je potencial določen le do aditivne konstante, smemo vzeti $V_1(0, 0) = 0$. Nadalje je zaradi simetrije $V_1(-m, -n) = V_1(m, n)$. Od tod sledi

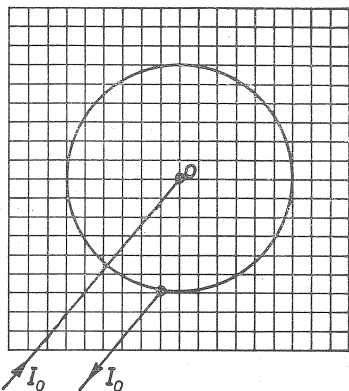
$$V_{1,2}(m_1, n_1) = 2 V_1(m_1, n_1) = 2 RI_0 u(m_1, n_1)$$

Po Ohmovem zakonu je potencialna razlika $V_{1,2}(m_1, n_1)$ enaka produktu toka I_0 in merjenega upora med točkama $(0, 0)$ in (m_1, n_1) . Če zaznamujemo ta upor z $R_{1,2}$, je

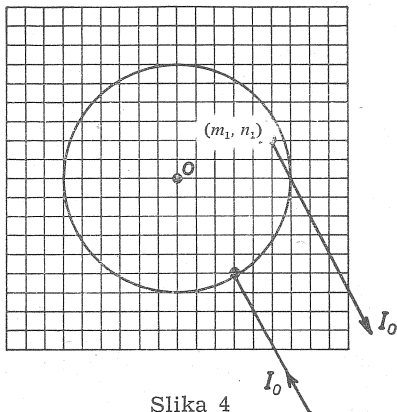
$$V_{1,2}(m_1, n_1) = R_{1,2} I_0$$

Torej

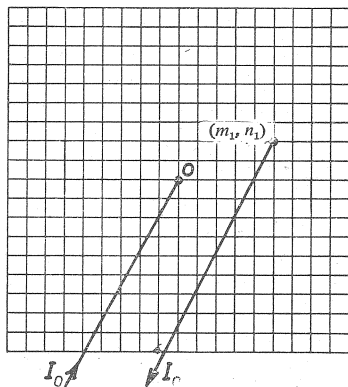
$$R_{1,2} = 2 Ru(m_1, n_1)$$



Slika 3



Slika 4



Slika 5

Kakor rečeno, ustreza funkcija $u(m, n)$ enačbi (4). Ker narašča upor počasneje kakor razdalja točke (m_1, n_1) od izhodišča $(0, 0)$, sledi iz rezultatov Soboljeva, da je $u(m, n)$ enak diskretnemu potencialu (7). Če vzamemo, da je upor R vsake stranice mreže enak 1 ohm, je upor, ki ga izmerimo med točko $(0, 0)$ in katero koli drugo točko (m, n) , enak dvakratnim vrednostim potenciala, ki so dane na sliki 2. Posebej je upor med točkama $(0, 0)$ in $(1, 0)$ enak $\frac{1}{2}$, med točkama $(0, 0)$ in $(1, 1)$ pa $2/\pi$.

Literatura:

1. B. Van Der Pol: The Finite -- Difference Analogy of the Periodic Wave Equation and the Potential Equation. Lectures in Applied Mathematics, Vol. I. Str. 237—257.
2. J. Plemelj: Teorija analitičnih funkcij, Ljubljana, 1953.
3. I. Vidav: Višja matematika II, Ljubljana, 1951.

FIZIKALNE KOLIČINE IN MATEMATIČNE STRUKTURE

ANTON SUHADOLC

V naslednjem članku bomo študirali fizikalne količine in njihove dimenzije. Spoznali bomo, da tvorijo dimenzije fizikalnih količin komutativno grupo in tudi tridimenzionalen vektorski prostor.

Vzemimo nekaj fizikalnih količin: dolžina mize je 120 cm, debelina stekla je 3 mm, obseg trikotnika je 4 dm. Naštete fizikalne količine se razlikujejo v dveh stvareh: v enoti, s katero merimo, in v numeričnih vrednostih. Imajo pa nekaj skupnega: pomenijo dolžine. Množico vseh fizikalnih količin bomo sedaj razdelili na podmnožice, razrede. V en razred denimo vse fizikalne količine, ki pomenijo dolžine, v drugega vse fizikalne količine, ki pomenijo mase, itd. Razred vseh dolžin označimo z $[d]$. Rekli bomo, da je d dimenzija razreda $[d]$. Po tej delitvi spada vsaka fizikalna količina v en razred. Razredi se med seboj ne sečejo; nobena fizikalna količina ne more biti član dveh razredov, saj ne more istočasno pomeniti n. pr. mase in hitrosti. Dva razreda sta enaka tedaj in le tedaj, kadar sta sestavljena iz istih elementov; torej sta identična.

Zanima nas, če moremo z razredi računati, podobno, kot računamo s fizikalnimi količinami. Množenje fizikalnih količin moremo prenesti na razrede. Kako to napravimo, nam pokažejo fizikalni zakoni. Vzemimo n. pr. zakon enakomernega gibanja: $d = vt$! Ta pove: če pomnožimo hitrost s časom, dobimo pot, to je, dolžino. Vzemimo razred hitrosti $[v]$ in razred časov $[t]$ ter množimo na vse mogoče načine člane prvega razreda s člani drugega razreda! Dobimo množico produktov $v_1 t_1, v_1 t_2, v_2 t_1, v_2 t_2, \dots$. To množico imenujemo produkt razredov $[v]$ in $[t]$, v znakih $[v][t]$. Fizikalni zakon $d = vt$ pove, da je produkt katerekoli hitrosti s katerimkoli časom neka dolžina — torej je množica produktov ravno razred dolžin; $[d] = [v][t]$. To enačbo imenujemo enačbo med dimenzijami.

Vzemimo splošni primer: Imamo poljubna razreda $[A]$ in $[B]$. Člane prvega označimo s črko a , člane drugega z b . Produkt razredov $[A]$ in $[B]$, $[A][B] = [C]$, naj bo razred, sestavljen iz vseh mogočih produktov $c = ab$ članov razredov $[A]$ in $[B]$.

Na opisani način definirano množenje razredov je očitno komutativno.

Produkt dveh članov istega razreda ni več član tega razreda; n. pr. produkt dolžin je ploščina: $[d][d] = [S]$. Levo stran zapišemo krajše takole: $[d]^2 = [S]$. Ta primer nam pokaže, kako lahko vpeljemo pri množenju razredov pojem potence s poljubnim pozitivnim celim eksponentom: n -to potenco razreda $[A]$ naj sestavljajo n -te potence članov razreda $[A]$. Seveda ni treba, da imajo potence $[A]^n$ pri vsakem n nazoren pomen. N. pr., $[d]^2$ je razred ploščin, $[d]^3$ je razred prostornin, razred $[d]^4$ pa že nima nazornega pomena.

Množici razredov fizikalnih količin bomo dodali še en razred, ki ga bomo označili z $[I]$. V ta razred naj spadajo vsa realna števila brez dimenzije. Produkt poljubnega razreda fizikalnih količin $[A]$ z razredom $[I]$ tvorimo na isti način kot produkt dveh razredov fizikalnih količin. $[A][I]$ vsebuje torej produkte števil s količinami iz razreda $[A]$. Ker je produkt fizikalne količine s številom zopet fizikalna količina istega razreda, velja $[A][I] = [A]$. Ta lastnost pove, da igra razred $[I]$ pri množenju razredov vlogo enote.

Vzemimo, n. pr., razred vseh časov $[t]$! Tega pomnožimo z razredom frekvenc $[v]$. Produkt poljubnega časa s kako frekvenco je število, kar za-

pišemo z razredi takole: $[t][\nu] = [I]$. Ta enačba pove, da je razred $[\nu]$ recipročen razredu $[t]$ in obratno, saj je njun produkt enak enoti.

Splošno: k razredu $[A]$ inverzni razred zaznamujemo z $[A]^{-1}$. Razred $[A]^{-1}$ obsega vse recipročne člane $1/a$ razreda $[A]$. Produkt razreda $[A]$ s članom razreda $[A]^{-1}$ je število brez dimenzije $[A][A]^{-1} = [I]$.

Deljenje razreda $[A]$ z razredom $[B]$ definiramo kot množenje razreda $[A]$ z razredom $[B]^{-1}$.

Množico razredov fizikalnih količin skupaj z razredom števil bomo označili na kratko z D . Ugotovili bomo, da je D grupa. Spomnimo se najprej, kaj je grupa.

Množica X elementov $a, b, c, \dots$ je grupa, če so izpolnjene vse tele zahteve:

1. Eksistira neka računaska operacija — imenovali jo bomo kar množenje — po kateri pripada vsakemu paru elementov a, b iz množice X neki enolično določeni element, ki ga zaznamujemo z ab in ki je tudi v množici X .

1. Pri množenju velja asociativnostni zakon: $(ab)c = a(bc)$ za poljubno trojico elementov iz množice X .

3. V X eksistira element e — imenujemo ga enota — za katerega velja $ae = a$ za vsak a iz X .

4. K vsakemu elementu a iz množice X eksistira tak element a^{-1} , da je $aa^{-1} = e$.

Naša množica razredov D res zadošča vsem štirim zahtevam. Enota e je tu razred števil $[I]$. Ker je množenje komutativno, je D komutativna grupa.

V nadaljnjem bomo spoznali, da je D vektorski prostor. Še prej si oglejmo, kakšne operacije so z razredi mogoče! Dva razreda lahko med seboj zmnožimo in rezultat je zopet neki razred. Vpeljali smo že tudi potence razredov s celimi pozitivnimi eksponenti. Potenciranje razredov razširimo na poljubne racionalne eksponente λ takole: Če je $\lambda > 0$, naj $[A]^\lambda$ pomeni razred, sestavljen iz λ -tih potenc a^λ članov razreda $[A]$. Simbol $[A]^0$ naj pomeni razred števil: $[A]^0 = [I]$. $[A]^{-\lambda}$ naj pomeni $([A]^{-1})^\lambda$. (Seveda nimajo vsi takó definirani razredi nazornega pomena.) Za računanje s potencami razredov veljajo običajna pravila potenciranja.

Prikličimo si v spomin zahteve, katerim mora zadoščati množica X , da je vektorski prostor! V množici X morata biti definirani dve operaciji, ena notranja in ena zunanja. Notranja priredi vsakemu paru elementov iz množice X enolično neki nadaljnji element iz X . To operacijo bomo imenovali vsoto in jo zaznamovali z znakom $+$. Tako pripada elementoma a, b vsota $a + b$. Zunanja operacija priredi enolično vsakemu paru a, λ — a je element iz X , λ pa število nekega obsega P (n. pr. obsega realnih števil, kompleksnih števil, ostankov modulo praštevila) neki element iz množice X , ki ga označimo z λa . Operacijo imenujemo množenje s skalarjem. Operaciji morata zadoščati naslednjim zahtevam:

1. Množica X je komutativna grupa za seštevanje. Torej je v njej element 0 , za katerega velja $a + 0 = 0 + a = a$ pri poljubnem elementu a iz X .

2. Množenje s skalarjem je distributivno; torej veljata zakona:

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

za vsak par števil λ, μ iz obsega P in za vsak par elementov a, b iz množice X .

3. Množenje s skalarjem je asociativno

$$\lambda (\mu a) = (\lambda \mu) a$$

4. Ničla obsega P in element 0 komutativne grupe sta v naslednji zvezi:

$$0 a = 0.$$

Ničla na levi strani enačbe pomeni število 0, ničla na desni pa element 0 iz množice X.

V množici D razredov naj bo notranja operacija produkt dveh razredov: $[A] [B]$. Produkt s skalarjem λ (λ je poljubno racionalno število) naj pomeni potenciranje razreda s številom $\lambda : [A]^\lambda$. Pri takó definirani notranji in zunanji operaciji so izpolnjene vse štiri zahteve. Prepričali smo se že, da je prva zahteva izpolnjena — D je namreč komutativna grupa. Ostale se v našem primeru glase takole (grupna operacija je množenje):

$$2'. [A]^{\lambda+\mu} = [A]^\lambda [A]^\mu$$

$$([A] [B])^\lambda = [A]^\lambda [B]^\lambda$$

$$3'. ([A]^\lambda)^\mu = [A]^{\lambda\mu}$$

$$4'. [A]^0 = [I]$$

Veljavnost zahtev 2', 3' in 4' sledi iz definicij in pravil za potenciranje razredov. Tako smo se prepričali, da tvorijo vsi razredi vektorski prostor.

Razrede fizikalnih količin smemo tedaj smatrati za vektorje. Vemo, da se da vsak vektor vektorskega prostora izraziti kot kombinacija baznih vektorjev. Bazne vektorje izberemo še precej poljubno. Fizikalne količine, ki so člani baznih razredov, bomo imenovali osnovne, člane ostalih razredov pa izpeljane količine. Baza prostora D sestoji iz treh razredov — prostor je tridimenzionalen. Najbolj v rabi je baza, sestavljena iz razreda dolžin $[d]$, razreda mas $[m]$ in razreda časov $[t]$. S temi moremo izraziti vsak nadaljnji razred.

Pišimo osnovne razrede brez oklepajev! Vsak drugi razred se da izraziti v obliki $[A] = d^\alpha m^\beta t^\gamma$, kjer so α, β in γ števila. Imenujemo jih komponente vektorja $[A]$ glede na izbrano bazo d, m, t : $[A] = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Enačbo $[A] = d^\alpha m^\beta t^\gamma$ imenujemo dimenzijsko enačbo.

Dosedanje ugotovitve nam služijo pri računanju dimenzij fizikalnih količin. Če hočemo izračunati n. pr. dimenzijo hitrosti glede na izbrano bazo, postopamo takole: Za izhodno enačbo nam služi fizikalni zakon $d = v t$; tega zapišemo z razredi $d = [v] t$. Od tod: $[v] = d t^{-1}$ ali $[v] = (1, 0, -1)$.

Izhodišče za računanje dimenzije pospeška $[a]$ je lahko fizikalni zakon $d = \frac{1}{2} a t^2$ ali $d = [a] t^2$; od tod dobimo takoj $[a] = (1, 0, -2)$.

Podobno za delo: $[W] = (2, 1, -2)$.

V rabi je tudi druga trojica baznih vektorjev: razred dolžin $[d]$, sil $[F]$ in časov $[t]$. Dimenzijska enačba dela je v tej bazi druga: $[W] = (1, 1, 0)$. Dimenzijska enačba mase pa je $[m] = (1, 1, -2)$.

Literatura:

Philippe Ronsmans, L'enseignement des sciences, 1960, T. 1., No. 4—5.

MÖSSBAUERJEV POJAV

JANEZ STRNAD,

Inštitut za fiziko Univerze v Ljubljani

1. UVOD

Znano je, da ima notranja energija atomov in molekul in ravno tako notranja energija atomskih jeder lahko le določene diskretne vrednosti. To se kaže v črtastih absorpcijskih in emisijskih spektrih plinov in v črtastih spektrih žarkov γ , ki jih sevajo vzbujena jedra. Vsaki emisijski črti ustreza prehod molekule, atoma ali jedra iz više vzbujenega stanja v nižje vzbujeno ali v osnovno stanje, absorpcijski črti pa prehod v nasprotni smeri. Energija W_0 emitiranega ali absorbiranega fotona je enaka razliki med energijama obeh stanj:

$$W_0 = h \nu_0 = W_2 - W_1. \quad (1)$$

Pri tem je ν_0 frekvenca emitirane ali absorbirane svetlobe, h pa Planckova konstanta.

Atom, ki je v vzbujenem stanju, si klasično predstavljamo kot nihajoč električni dipol; podobno je pri jedru. Takšen dipol emitira energijo, zato je njegovo nihanje dušeno. Časovna konstanta za pojemanje energije nihanja ustreza povprečnemu življenjskemu času τ , ki ga atom preživi v vzbujenem stanju. Ker je nihanje dušeno, to se pravi, da ni čisto sinusno, spektralna črta ni popolnoma ostra, ampak ima neko končno širino. Natančneje povedano: če razstavimo to nihanje v sama sinusna nihanja (to razstavitev opišemo s Fourierovim integralom), ne dobimo samo nihanja s frekvenco ν_0 , ampak tudi bližnje frekvence. V rezultatu dobimo porazdelitev energije po frekvencah. Ta rezultat zapišemo lahko v drugačni obliki, če izkoristimo znano povezavo med energijo in frekvenco: $W = h \nu$. Končno dobimo

$$w(W) = (\Gamma/2\pi) [(W - W_0)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}, \quad (2)$$

kjer smo vpeljali

$$\Gamma = h/(2\pi\tau). \quad (3)$$

Pri tem je $w(W) dW$ verjetnost, da ima foton energijo med W in $W + dW$. Funkcija $w(W)$ opisuje obliko spektralne črte. Iz (2) preberemo, da je širina črte na polovični višini (sl. 1a) enaka ravno Γ . Γ imenujemo naravno širino črte, Γ/W_0 pa je relativna širina.

V resnici imajo spektralne črte večjo širino od naravne, in sicer zaradi termičnega gibanja molekul. Razširitev črte lahko na preprost način izračunamo za plin, ki je tako razredčen, da ne motijo trki med molekulami. Da bomo lažje govorili, vzemimo enoatomen plin. Če seva atom, ki se giblje s hitrostjo u proti opazovalcu, se opazovana frekvenca in s tem tudi energija fotona zvišata zaradi Dopplerjevega pojava. Za majhne hitrosti velja enak račun kot v akustiki, torej

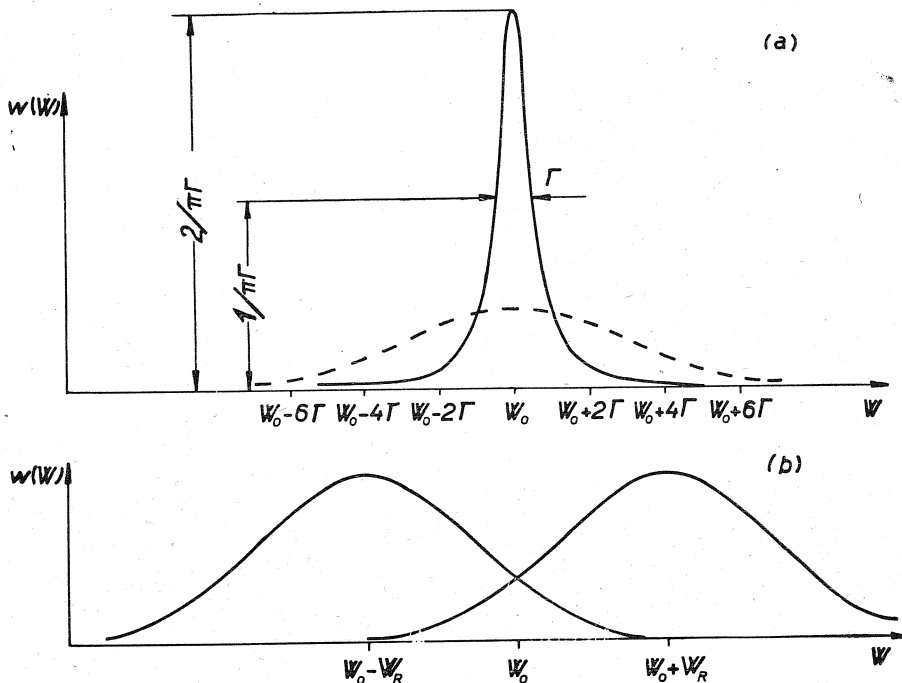
$$W = W_0 (1 + u/c). \quad (4)$$

Ker atomi v plinu nimajo vsi enake hitrosti, se črta v spektru svetlobe, ki jo seva plin, razširi za $\Gamma_D = W_0 \bar{u}/c$, kjer je $\bar{u}$ neka srednja hitrost atomov (sl. 1a).

Izkaže se, da moramo za $\bar{u}$ vstaviti $\sqrt{\pi}$ -kratno vrednost povprečne hitrosti, torej

$$\Gamma_D = (8 kT/mc^2)^{1/2} W_0, \quad (5)$$

če je m masa atoma, T pa absolutna temperatura. Γ_D se imenuje Dopplerjeva širina črte. Če plin ni dovolj razredčen, medsebojni trki skrajšajo življenjski čas vzbujenih atomov in se črta zato še dodatno razširi.



Slika 1. (a) Spektralna črta z naravno širino Γ (izvlečena krivulja) in spektralna črta, ki je zaradi Dopplerjevega pojava razširjena (črtkana krivulja). Zaradi preglednosti smo vzeli pretirano majhno Dopplerjevo širino $\Gamma_D = 8\Gamma$. Ploščini pod obema krivuljama sta enaki. — (b) Emisijska (levo) in ustrezna absorpcijska črta (desno). Črti sta zaradi odriva razmaknjeni za $2W_R = \Gamma_D$

Trditev, da sta absorpcijska in emisijska črta, ki ustrežata istemu prehodu, natančno pri isti energiji, torej pri isti frekvenci, moramo še nekoliko popraviti. Upoštevati moramo, da odnese foton z energijo W gibalno količino W/c in morata zato atom ali jedro prevzeti enako veliko odrivno gibalno količino $m v$. Odriv torej povzroči, da se energija emitiranega fotona zmanjša za odrivno energijo W_R :

$$W_R = m v^2/2 = W^2/2 mc^2 \approx V_0^2/2 mc^2, \quad (6)$$

ker je $v = W/mc$. Emisijska črta se torej premakne od energije W_0 k nižji energiji $W_0 - W_R$. Nasprotno pa se absorpcijska črta premakne od energije W_0 k višji energiji $W_0 + W_R$. Foton, ki se absorbira, mora imeti namreč presežek energije (W_R), ki ga prevzame jedro v obliki kinetične energije. Absorp-

cijska črta je torej premaknjena za $2W_R$ proti višji energiji v primeri z emisijsko.

Enačba (6) kaže, da je opisani premik črte tem večji, čim večja je energija fotona. Pri optičnih spektrih je premik tako majhen, da ga sploh ni mogoče zaznati. Pač pa je premik zaznaven pri žarkih γ . Za primerjavo sta na spodnji tabeli navedena dva tipična številska zgleda. Za atom smo izbrali foton z energijo 2 eV ($\lambda = 6200\text{ \AA}$), za jedro pa foton z energijo 2.10^5 eV ; življenjska časa naj bosta 10^{-8} s in 10^{-10} s . V zadnjih treh stolpcih so navedeni: ustrezni naravni širini, odzivna premika (za atomsko maso 100) ter Dopplerjevi širini (za temperaturo plina 0°C).

TABELA

	W_0	τ	Γ	$2W_R$	Γ_D
Atom:	2 eV	10^{-8} s	7.10^{-8} eV	4.10^{-11} eV	3.10^{-6} eV
Jedro:	2.15^5 eV	10^{-10} s	7.10^{-6} eV	0,4 eV	0,3 eV

Vidimo, da je naravna širina v obeh primerih precej manjša od Dopplerjeve. (Pri atomu je tako majhna, da je ni mogoče izmeriti z nobenim spektroskopom). Pri atomu je dvojna odzivna energija v primeri z Dopplerjevo širino in celo v primeri z naravno širino zanemarljivo majhna; zato po pravici trdimo, da sta tu emisijska in ustrezna absorpcijska črta pri isti energiji. Pri jedrih tega ne smemo več reči, ker ima odzivna energija enako velikostno stopnjo kot Dopplerjeva širina (sl. 1b).

Ujemanje emisijske in absorpcijske črte pri atomih omogoča neposredno opazovanje tako imenovane resonančne absorpcije in resonančne fluorescence. Pri tem poskusu obsevamo plin s svetlobo, ki jo daje svetilka z enakim plinom. Vzamemo n. pr. natrijevo svetilko in svétimo z njo skozi posodo, v kateri je hladnejša natrijeva para¹. Para je v tej svetlobi videti, kot da bi bila motna, ker na vse strani odseva rumeno svetlobo. Razlaga je naslednja: atomi natrija v svetilki sevajo fotone pri prehodu iz prvega vzbujenega v osnovno stanje. Te fotone atomi natrija v hladnejši pari absorbirajo in preidejo pri tem iz osnovnega v prvo vzbujeno stanje. To stanje zapuščajo z emisijo sekundarnih fotonov, ki imajo enako energijo kot absorbirani primarni fotoni. Sekundarna svetloba je porazdeljena po vseh smereh. Pojav lahko preiskujemo s tem, da merimo tok prepuščene primarne svetlobe, ki je zaradi absorpcije oslavljen, ali pa s tem, da merimo sekundarno svetlobo. V prvem primeru merimo resonančno absorpcijo, v drugem pa resonančno fluorescenco ali kakor tudi pravimo resonančno sipanje.

Pri jedrih se zaradi znatnega odzivnega premika $2W_R$ emisijska in ustrezna absorpcijska črta, kot rečeno, le malo prekrivata. Zata v splošnem jedrske fluorescence ne moremo meriti tako preprosto kot pri atomih. Le malo žarkov γ se namreč resonančno absorbira v jedrih. Razen tega je resonančno sipane žarke težko ločiti iz močnega ozadja comptonso sipanih žarkov, ker imajo detektorji za žarke γ razmeroma majhno ločljivost.

Treba je omeniti še nadaljnjo razliko med atomi in jedri. Pri atomih je meritev resonančne absorpcije enakovredna meritvi resonančnega sipanja. Pri jedrih ima pa merjenje resonančne absorpcije prednost, ker je število resonančno sipanih fotonov pomanjšano zaradi notranje konverzije. Pri notranji konverziji vzbujeno jedro ne rodi fotona, ampak odda energijo W_0

bližnjemu elektronu in ga s tem izbije iz elektronskega ovoja atoma. Pri merjenju absorpcije pa notranja konverzija ne moti, saj je odločilno samo, da se žarek γ absorbira.

Delež resonančno sipanih žarkov se da povečati, če izvir in absorber segrejemo. S tem se namreč povečata Dopplerjevi širini emisijske in absorpcijske črte, ki se zaradi tega bolj prekrivata. Drug način za povečanje resonančne absorpcije je ta, da premikamo izvir z dovolj veliko hitrostjo proti absorberju. Izvir je pritrjen na vrtavki, absorber pa je nameščen tako, da dospejo do njega le tisti žarki γ , ki so zapustili izvir v trenutku, ko se je gibal proti absorberju². Če je obodna hitrost u vrtavke dovolj velika, nadoknadi ustrezni Dopplerjev premik odrivno izgubo energije; emisijska in absorpcijska črta se tedaj prekrijeta. Po enačbah (4) in (6) vidimo, da mora biti hitrost u za ta namen enaka $u = W_0/mc$, torej za večino jedrskih prehodov vsaj nekaj sto metrov na sekundo.

2. BREZODRIVNA EMISIJA IN ABSORPCIJA ŽARKOV GAMA

Pri računu odrivne energije smo molče domnevali, da je atom, katerega jedro emitira žarek γ , popolnoma prost. Atomi pa so prosti edino v plinih; zato velja naše izvajanje samo za emisijo v plinih. Do nedavnega so mislili, da je podobno tudi pri emisiji žarkov γ v kristalih: žarek γ naj bi pri emisiji odrinil jedro, ki ga je emitiralo. Zaradi tega naj bi se, enako kot pri plinih, tudi tu pokazal odrivni premik emisijske in absorpcijske črte. Mössbauer³ je prvi opozoril, da ta trditev za atome, ki so vezani v kristalni mreži, ni vselej pravilna. Ugotovil je, da lahko včasih, če je temperatura kristala dovolj nizka in odrivna energija ne prevelika, kristalna mreža kot celota prevzame odrivno gibalno količino, kakor da bi bila toga. Že pri zelo majhnem kristalu, ki ima n. pr. samo 10^6 atomov, se na ta način ustrezna odrivna izguba energije zmanjša za šest velikostnih stopenj, tako da postane zanemarljivo majhna v primeri z naravno širino črte. V takem primeru govorimo o brezodrivni emisiji. Ustrezno pravimo, da je absorpcija brezodrivna, če prevzame gibalno količino žarka γ , ki se je absorbiral v jedru, kristalna mreža kot celota.

Črta brezodrivno emitiranih ali absorbiranih žarkov γ ima samo naravno širino. Na ta način se torej dobijo žarki γ z zelo natančno definirano energijo. Absorpcijska in emisijska črta se prekrivata, če sta izvir in absorber enaka in mirujeta. S premikanjem izvira lahko emisijsko in absorpcijsko črto razmaknemo, tako da se le delno prekrivata. Meritev resonančne absorpcije pokaže, kolikšno je prekrivanje, in s tem, kolikšna je širina črte. Podobno lahko merimo morebitne premike ali razcepitve emisijske ali absorpcijske črte, ki jih povzročijo kaki zunanji vplivi (magnetno polje itd.). Pred seboj imamo torej novo spektroskopsko metodo z izredno ločljivostjo, ki je nemara milijonkrat večja kot doslej največja dosežena ločljivost v optični spektroskopiji.

Teorijo za podoben pojav, kot je brezodrivna absorpcija žarkov γ , je že prej izdelal Lamb⁴ za resonančno absorpcijo nevtronov v kristalih. Mössbauer³ je Lambovo teorijo prilagodil za resonančno absorpcijo žarkov γ in jo razširil še na emisijo žarkov γ . Mössbauerjeva izvajanja je dopolnil Visscher⁵. Poskusili si bomo površno razložiti, kako pride do brezodrivne emisije žarka γ v kristalu. Zaključki veljajo skoraj v nespremenjeni obliki tudi za absorpcijo.

Kristal je nekakšna velika molekula, ki ima prav tako kot jedro in atom stacionarna stanja z diskretnimi vrednostmi energije. Ker so sile med atomi v kristalu v primeru z jedrskimi silami zelo šibke in ker imajo jedrske sile

kratek doseg, lahko stanja kristalne mreže obravnavamo ločeno od stanj jeder, ki so vanjo vgrajena. Kristal, v katerem je N atomov, si predstavljamo kot množico N masnih točk z enakomerno razmaknjenimi ravnovesnimi legami. Točke, to je atomi, nihajo okoli svojih ravnovesnih leg. Njihova nihanja niso med seboj neodvisna, temveč si lahko predstavljamo, da nihajo atomi kot sklopljena nihala. Če zanihamo enega od atomov, se nihanje kmalu prenese tudi na druge atome.

Sile med atomi v kristalu lahko zelo dobro izrazimo s harmoničnimi silami, to je s takšnimi, ki so po velikosti sorazmerne z odmikom atoma iz njegove ravnovesne lege in so usmerjene proti ravnovesni legi. Zapletena nihanja atomovo lahko v tem primeru opišemo s sestavljanjem stoječih valovanj (tako imenovanih normalnih valovanj). Pri tem se spomnimo na struno, pri kateri lahko vsako gibanje opišemo s sestavljanjem velikega števila stoječih valovanj. Število za opis potrebnih stoječih valovanj v kristalu je enako številu vseh prostostnih stopenj N atomov, to je $3N$.

Kvantna mehanika pove, da valovanja ne morejo imeti poljubne energije, ampak ima energija, ki ustreza posameznemu valovanju, lahko le diskretne vrednosti. Če računamo s harmoničnimi silami, se pokaže, da ima energija W_s s-tega normalnega valovanja lahko samo tele v rednosti:

$$W_s = (2n_s + 1)h\nu_s/2, \quad (7)$$

kjer je ν_s frekvenca s -tega valovanja ($s = 1, 2, 3 \dots 3N$). Frekvence posameznih valovanj so odvisne od vrste in velikosti kristala. Večidel leže te frekvence v območju do kakih 10^{13} s^{-1} . Kvantna števila n_s povedo, koliko energije je naložene v valovanje s frekvenco ν_s . Verjetnost, da naletimo pri danem valovanju na velik n_s , je tem večja, čim višja je temperatura kristala. Pri absolutni ničli so vsa kvantna števila n_s enaka nič. Vendar je energija valovanja pri absolutni ničli končna in sicer enaka tako imenovani ničelni energiji:

$$W_{s0} = h\nu_s/2. \quad (7a)$$

Celotna energija kristalne mreže je v vsakem primeru enaka vsoti energij vseh valovanj:

$$W = \sum_{s=1}^{3N} W_s. \quad (8)$$

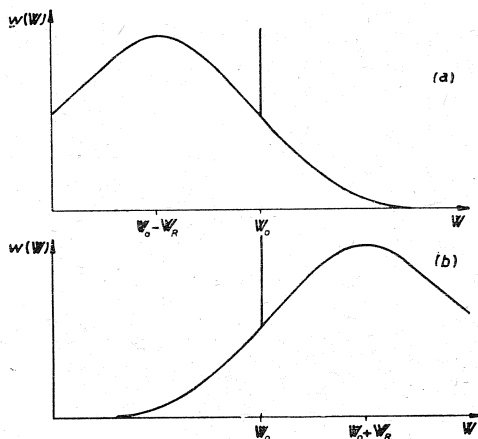
Energija kristalne mreže se zaradi tega, ker so lahko n_s samo cela števila, ne more zvezno spreminjati, ampak se lahko spremeni samo za $\pm h\nu_s$. Kristalna mreža pri tem preide v više ali v nižje vzbujeno stanje. Po analogiji s fotoni imenujemo kvant energije $h\nu_s$ fonon.

Če emitira atom, ki je vezan v kristalni mreži žarek γ , sta možna dva različna pojava. Energija, ki ustreza odrivni gibalni količini, lahko v obliki fotona $h\nu_s$ obogati valovanje s frekvenco ν_s . Lahko pa se tudi pripeti, da se stanje kristalne mreže sploh ne spremeni. Pri prvem pojavu so razmere pri prenosu gibalne količine podobne kot pri prostem atomu; valovanje prevzame energijo $h\nu_s$ in je zato izguba energije, ki jo utrpi foton, podobna, kot da bi bil atom, ki je emitiral žarek γ , prost. Pri drugem pojavu, ko ostane stanje kristalne mreže nespremenjeno, deluje kristal kot togo telo in zato kot celota prevzame odrivno gibalno količino. Po zakonih kvantne mehanike se dasta izračunati verjetnosti za nastop enega in drugega pojava. Izkaže se, da je

verjetnost f_0 za brezodrivno emisijo, to se pravi za relativno število brezodrivno emitiranih fotonov pri absolutni ničli, podana z naslednjim izrazom:

$$f_0 = \exp \left(-\frac{3}{2} W_R/k\theta \right). \quad (9)$$

Pri tem je θ tako imenovana Debyeova temperatura⁶. (Pomen Debyeve temperature lahko površno pojasnimo s trditvijo, da nad to temperaturo približno velja Dulong-Petitovo pravilo, ki pove, da je atomska toplota enaka $3k$. Nasploh je Debyeova temperatura za lažje elemente višja kot za težje.)



Slika 2. Emisijski (zgoraj) in absorpcijski (spodaj) spektrum žarkov γ za ^{191}Ir pri temperaturi 88°K . Ozki črti pri energiji W_0 pripadata brezodrivno emitiranim in absorbiranim žarkom. Njuni višini nista narisani v merilu, ampak sta v resnici 200-krat večji. Široki črti pripadata žarkom γ , ki so utrpeli odzivno izgubo energije⁸

Pri višjih temperaturah je delež f brezodrivno emitiranih žarkov γ manjši:

$$f = f_0 \exp \left(-T^2 W_R/k\theta^3 - \dots \right). \quad (10)$$

Navedeni enačbi kažeta, kdaj lahko pričakujemo znaten delež brezodrivno emitiranih ali absorbiranih žarkov γ . Poiskati moramo žarke γ z majhno energijo, zato da je odzivna energija W_R majhna, in snov z visoko Debyeovo temperaturo, ali pa moramo izvir in absorber hladiti.

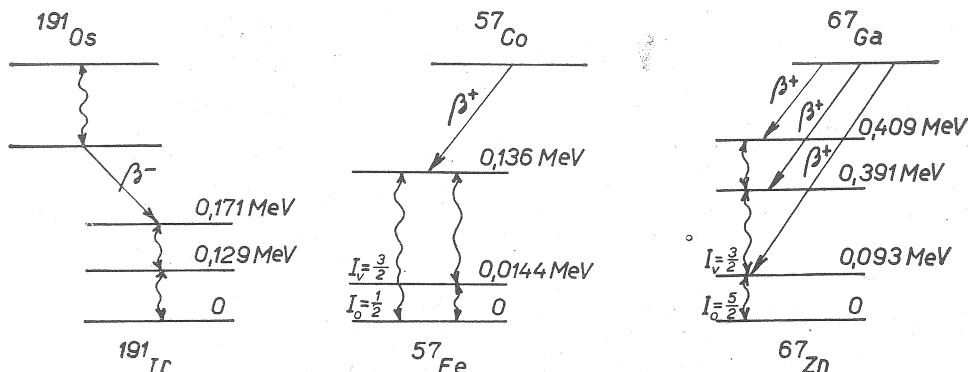
Del $1 - f$ žarkov γ , ki se ne emitirajo brezodrivno, utрпи različno velike odzivne izgube. Ti žarki prispevajo k široki črti, ki ima maksimum pri energiji $W_0 - W_R$. Tako sta v emisijskem spektru γ iz kristalov dve črti: črta z naravno širino pri energiji W_0 in dosti širša črta s sredino pri energiji $W_0 - W_R$. Površini pod obema črtama sta v razmerju $f/(1 - f)$. Podobno sta v absorpcijskem spektru kristalov tudi dve črti: črta z naravno širino pri energiji W_0 in dosti širša črta pri energiji $W_0 + W_R$ (sl. 2).

Pričakovali bi, da zvišanje temperature sicer vpliva na zmanjšanje deleža brezodrivno emitiranih žarkov γ , ne pa tudi na položaj emisijske ali absorpcijske črte. Vendar je v resnici energija brezodrivno emitiranih ali absorbiranih žarkov γ nekoliko odvisna od temperature⁷. Vzrok za to je zmanjšanje mase $\Delta m = W/c^2$, ki jo utрпи jedro, ko odnese brezodrivno emitirani žarek γ

energijo W . Zato bi se zmanjšala povprečna kinetična energija, ki jo ima jedro zaradi nihanja v kristalni mreži za $\Delta W_{kin} = W_{kin} \Delta m/m = W_{kin} W_o/m c^2$. Toda pri brezodrivni emisiji se ne sme spremeniti stanje kristalne mreže. Zaradi tega se emitira žarek γ z malo manjšo energijo:

$$W \approx W_o (1 - W_{kin}/m c^2) = W_o (1 - W'/2 m c^2).$$

Pri tem smo upoštevali, da je povprečna potencialna energija atoma, ki niha v kristalu s harmoničnimi medatomske silami, enaka njegovi povprečni kinetični energiji, tako da je celotna nihajna energija atoma (W') enaka dvojni povprečni kinetični energiji. Spremembe te energije zaradi spremembe temperature kristala lahko izrazimo s specifično toploto, ker vemo, da je $m c_V =$



Slika 3. Razpadne sheme izotopov, ki so važni pri meritvah jedske resonančne absorpcije. Za vsak izotop je na ordinatno os nanescena energija, na abscisno pa vrstno število. Vodoravne črte ustrezajo stanjem jeder: najnižja osnovnemu, višje pa vzbujenim stanjem. Ker sheme niso narisane v merilu, je k stanjem pripisana energija v MeV. Za osnovni in prvi vzbujeni stanji ^{57}Fe in ^{67}Zn je naveden jedrski spin. Valovita črta predstavlja prehod z emisijo ali absorpcijo žarka γ . Črta $\swarrow$ pomeni razpad β^+ in črta $\searrow$ razpad β^- .

$= \partial W'/\partial T$. Pri majhnih temperaturnih razlikah ΔT med izvirom in absorberjem se torej emisijska črta premakne proti absorpcijski za

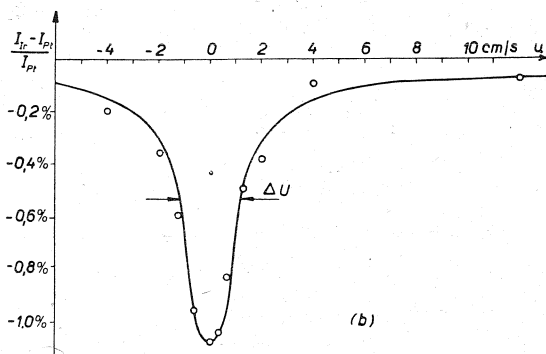
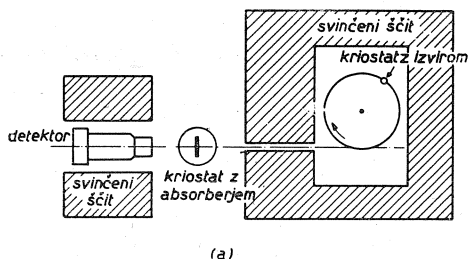
$$W = -W_o c_V \Delta T/2 c^2. \quad (11)$$

3. MERITVE BREZODRIVNE ABSORPCIJE

Mössbauer³ je prvi meril resonančno absorpcijo žarkov γ z energijo 129 keV, ki jih emitira jedro ^{191}Ir pri prehodu iz najnižjega vzbujenega stanja v osnovno stanje. To vzbujeno jedro, ki ima življenjski čas okoli 10^{-10} s, nastane po razpadu izotopa ^{191}Os (sl. 3). Le-tega je dobil z obsevanjem 0,6 g naravnega osmija (26,4 % ^{190}Os). Aktivnost tako dobljenega izvira je bila 65 mC. Kot absorber mu je služila 0,4 mm debela folija iz naravnega iridija (38,5 % ^{191}Ir), kot detektor pa je uporabil kristal NaJ(Tl) s fotopomnoževalsko. Le-ta je bila preko predojačevalnika in ojačevalnika priključena na enokanalni analizator, ki je bil ves čas naravnan na energijo 129 keV, in na števec. Ker je Debyeva

temperatura iridija razmeroma nizka (285 °K), sta morala biti izvir in absorber vsak v svojem kriostatu s tekočim zrakom.

Povprečni presek za resonančno absorpcijo v ^{101}Ir je zelo majhen in ga ni mogoče neposredno meriti. Zato je Mössbauer napravil primerjalne meritve z absorberjem iz platine, ki je imel pri sobni temperaturi enak absorpcijski učinek kot iridijeva folija. Iz razlike gostot toka žarkov γ za pravim in primerjalnim absorberjem pri različnih temperaturah je uspelo določiti naravno širino črte in s tem življenjski čas vzbujenega stanja ^{101}Ir pri energiji 129 keV. Meritev je bila še dokaj negotova in zamudna.



Slika 4. (a) Razporeditev naprav pri Mössbauerjevi meritvi in (b) dobljena črta žarkov pri ^{101}Ir . Na ordinatno os so nanesene vrednosti $(I_r - I_{Pt})/I_{Pt}$, kjer je I_r gostota toka žarkov γ za absorberjem iz iridija in I_{Pt} gostota toka žarkov γ za absorberjem iz platine⁸

Z izboljšanim načinom merjenja je Mössbauer⁸ pozneje lahko neposredno posnel obliko absorpcijske črte. Izvir je namestil na obod kolesa. Kolo se je vrtelo z majhno obodno hitrostjo, ki se je dala spreminjati v obsegu od 0 do 10 cm/s.* Detektor je bil isti kot pri prejšnji meritvi. Števec pa je krmilila fotocelica tako, da je štel samo v trenutkih, ko se je izvir gibal proti absorberju (sl. 4). Žarki γ , ki zadenejo absorber, imajo zaradi Dopplerjevega pojava višjo energijo. Kot pove enačba (4), je premik sorazmeren z obodno hitrostjo kolesa u . Izmerjena gostota toka žarkov γ v odvisnosti od hitrosti da obliko črte. Širino črte v hitrostnem merilu (Δu) lahko neposredno preberemo in jo po enačbi $2\Gamma = W_0 \Delta u/c$ preračunamo v energijsko merilo. Tu upoštevamo,

* Hitrost je tu desetstisočkrat manjša kot pri Moonovih poskusih². Tam imamo opravka z Dopplerjevo širino črte, tu pa z okroglo desetstisočkrat manjšo naravno širino.

da ima tako izmerjena črta dvojno naravno širino. Pri poskusu se namreč širini emisijske in absorpcijske črte seštejeta.**

Mössbauerjeve poskuse so ponovili in jih nadaljevali najprej v ZDA^{9, 10}. Tu so se tudi prvi lotili iskanja jeder, ki bi bila za meritev resonančne absorpcije primernejša kot ¹⁹¹Ir.

Merili so¹¹ resonančno absorpcijo žarkov γ z energijo 77 keV, ki jih emitira ¹⁹⁷Au v prvem vzbujenem stanju z življenjskim časom okoli 10^{-9} s. Izvir so dobili po obstreljevanju platine, ki je bila obogatena z izotopom ¹⁹⁶Pt, z nevtroni. Po razpadu β^- nastane potem zlato v zaželenem vzbujenem stanju. Isto stanje nastane tudi po zajetju elektrona v jedru ¹⁹⁷Hg. Preizkusili so izvire obeh vrst. Absorber je bilo navadno zlato, ki ga sestavlja samo izotop ¹⁹⁷Au. S poskusi pri temperaturi 4 °K je uspelo izmeriti obliko absorpcijske črte in določiti življenjski čas.

V Angliji¹² so delali poskuse z resonančno absorpcijo žarkov γ z energijo 24 keV, ki jih emitira izomerno stanje kositra ^{119m}Sn. Pri temperaturi tekočega zraka se polovica vseh žarkov emitira brezodrivno.

Bolj pomemben¹³ je izotop železa ⁵⁷Fe. Pri prehodu iz prvega vzbujenega stanja v osnovno emitira žarke γ z energijo 14,4 keV; življenjski čas vzbujenega stanja pa je 10^{-7} s. Izračunana relativna širina te črte je $4,6 \cdot 10^{-13}$, kar je približno stokrat manj kot pri iridiju. Železo ima sorazmerno visoko Debyeovo temperaturo. Zato je možna meritev resonančne absorpcije še pri sobni temperaturi, pri kateri se 20 % vseh žarkov γ emitira brezodrivno. ⁵⁷Fe v vzbujenem stanju nastane pri razpadu β^+ ⁵⁷Co. Ta izotop dobijo z obstreljevanje niklja s protoni v ciklotronu. Izločijo ga iz tarče in električno naparijo na tanko železno folijo. Folijo za eno uro segrejejo na 1000 °C v vodikovi atmosferi, da atomi kobalta difundirajo v povprečju za 1000 mrežnih razdalj v železo in se tam vgradijo v kristalno mrežo. S takó obdelanim izvirom so dobili črto z relativno širino $1,13 \cdot 10^{-12}$ (sl. 5), kar je za $2,1 \cdot 10^{-13}$ več, kot je dvojna naravna širina. Te razlike še niso mogli razložiti.***

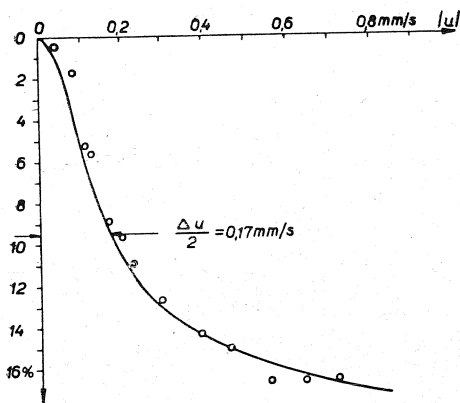
Navadno železo, ki vsebuje samo 2,17 % ⁵⁷Fe, ni primerno za absorberje. Zato uporabljajo železo, ki je obogateno z ⁵⁷Fe. Naparijo ga na tanko berilijevo folijo. Merijo na poseben način. Detektor priključijo na dve popolnoma enaki ojačevalni in števnici napravi. Izvir spravijo v sinusno nihanje v smeri proti absorberju z zelo majhno amplitudo, od nekaj mikronov do nekaj desetink milimetra. Običajno ga pritrdijo kar na gibljivi del elektrodinamičnemu zvočniku podobne naprave, skozi katero vodijo izmenični tok. Frekvenca tega toka (po navadi 10 ali 50 s⁻¹, delali so pa tudi z zelo visokimi frekvencami¹⁵) določa frekvenco nihanja izvira. Prva izmed obeh števnih naprav šteje sunke za absorberjem v tisti polovici periode, ko se izvir približuje absorberju. Druga števna naprava šteje sunke v polovici periode, ko se izvir oddaljuje od absorberja.

** To velja le, če je izvir tako tanek, da ne moti njegova lastna absorpcija. Pri Mössbauerjevih poskusih z ¹⁹¹Ir je bil izvir nekoliko predebel, da bi gornja zveza natančno veljala (sl. 4b).

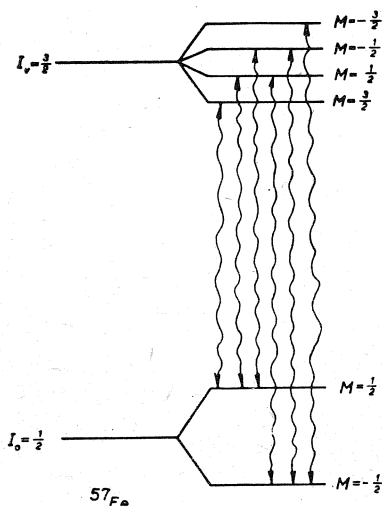
*** Pomislili so, da bi omenjena razlika utegnila biti posledica neenakomerne porazdelitve mase v galaksiji¹⁴. Teorija napoveduje v tem primeru za ⁵⁷Fe maksimalno razširitev $\Delta W = \frac{15}{2} (1 - m''/m') \bar{W}_{kin}$. Tu je m' vztrajna masa jedra pri pospeševanju proti središču galaksije, m'' vztrajna masa jedra pri pospeševanju pravokotno na to smer in $\bar{W}_{kin} \approx 10$ MeV povprečna kinetična energija nukleonov v jedru. Poskusi so pokazali, da je zgornja meja za neenakomernost mase $1 - m'/m''$ manjša od 10^{-16} in je torej treba vzrok za ugotovljeno razliko iskati drugje.

Če sta emisijska in absorpcijska črta natančno pri isti energiji, preštejeta obe napravi enako število sunkov v sekundi. Ako pa se emisijska črta proti absorpcijski premakne, šteje ena izmed naprav več. Dokler je premik majhen proti razpolovni širini črt, je razlika sunkov, ki jih obe napravi preštejeta v sekundi, sorazmerna z velikostjo premika.

Po vsem svetu poskušajo meriti resonančno absorpcijo z žarki γ , ki bi imeli še ožjo črto kot pri ^{57}Fe . Dosti si obetajo od izotopa ^{67}Zn , ki emitira pri prehodu iz prvega vzbujenega stanja v osnovno stanje žarka γ z energijo 93 keV. Življenjski čas tega vzbujenega stanja je $9,4 \cdot 10^{-6}$ s, tako da je relativna širina črte manjša kot 10^{-15} .



Slika 5. Izmerjena črta žarkov γ pri ^{57}Fe . Zvočniku podobno napravo, na kateri je bil pritrjen izvir, so napajali s trikotniško napetostjo spremenljive amplitude. Zato je nanesena absolutna vrednost hitrosti izvira in je narisana samo polovica črte. Na ordinatno os je naneseno relativno povečanje gostote toka žarkov γ za absorberjem¹³



Slika 6. Razcepitev osnovnega in prvega vzbujenega stanja ^{57}Fe v magnetnem polju na mestu jedra¹⁹. I je jedrski spin in M magnetno kvantno število, to je projekcija I v smeri magnetnega polja. Valovite črte predstavljajo prehode z emisijo ali absorpcijo žarkov γ . Širina razcepitve je na sliki 10^{10} -krat pretirana

S tem izotopom se je meritev po dolgem poskušanju¹⁶ posrečila v ZDA¹⁷. Pri tem so premerili črto z najmanjšo doslej izmerjeno relativno širino. Eksperimentatorji pa so naleteli na mnogoštevilne težave. Delež žarkov γ , ki jih vzbujena jedra ^{67}Zn brezodiravno emitirajo, je tudi pri nizkih temperaturah zelo majhen, n. pr. $f = 0,005$ pri 4°K . Izvir in absorber so morali zato hladiti s tekočim helijem, s katerim so dosegli temperature okoli 2°K . Zaradi izredno majhne relativne širine se je treba skrbno izogniti vsem mogočim motnjam. Temperaturi izvira in absorberja se morata čim bolj ujemati. Prav tako se morata ujemati kemijska in izotopska sestava izvira in absorberja. Moti tudi nihanje sten v laboratoriju, tako da morajo kriostata posebej zaščititi pred tresljaji.

Vseh naštetih motenj ne morejo popolnoma odpraviti in je zato absorpcijska črta verjetno od vsega začetka precéj premaknjena proti emisijski. Merjenje oblike črte z Dopplerjevim premikom (kot pri ^{57}Fe), pri ^{67}Zn ni dalo nobenih

rezultatov¹⁶. Zato so se morali lotiti drugačnega načina merjenja. Absorber so postavili v magnetno polje, tako da se je absorpcijska črta zaradi Zeemannovega pojava¹⁹ razcepila. S preminjanjem magnetnega polja so dosegli, da se je ena izmed tako nastalih črt prekrila z emisijsko črto.

Izvir so napravili z obstreljevanjem cinkovega oksida ^{66}ZnO v ciklotronu. Z reakcijo $^{66}\text{Zn}(\text{d}, \text{n})^{67}\text{Ga}$ nastane galij, ki z razpadom β^+ preide v vzbujeno jedro ^{67}Zn . Po obsevanju so izvir za eno uro segreti na 1000°C , da so izginile napake, ki jih je v kristalih povzročilo obsevanje. Absorber je bil iz sintranega ZnO , obogatênega na 42 % ^{67}Zn (v naravnem cinku je tega izotopa samo 1,4 %).

4. UPORABA

Največ poskusov so do sedaj napravili s ^{57}Fe , ker je merjenje z njim najpreprostejše. Med prvimi poskusi¹⁸, ki so jih napravili, je bilo merjenje polarizacije brezodrivno emitiranih žarkov γ . V ta namen so postavili izvir in absorber v magnetno polje. Velik magnet je imel dva para vrtljivih polovih čevljev: en par za izvir in enega za absorber. Z vrtenjem čevljev so spreminjali kot ϑ med smerjo magnetnega polja v izviru in smerjo magnetnega polja v absorberju. Smeri obeh polj sta bili zmerom pravokotni na smer žarkov γ . Magnetno polje je imelo tolikšno gostoto, da so bile feromagnetne domene izvira in absorberja orientirane v smeri zunanjega polja. Pokazalo se je, da se je tudi presežek jedrskih spinov ^{57}Co in ^{57}Fe orientiral v smeri polja ali v nasprotni smeri. Brezodrivno emitirani žarek iz jedra z orientiranim spinom je polariziran pravokotno na smer magnetnega polja. Zato je verjetnost za resonančno absorpcijo največja tedaj, ko je smer polja v absorberju pravokotna na smer polarizacije žarka. Magnetno polje izvira služi torej kot polarizator, magnetno polje absorberja pa kot analizator. Od kota ϑ odvisni del gostote toka žarkov γ za absorberjem bi moral biti zato sorazmeren s $\sin^2 \vartheta$. Poskusi so to potrdili. S tem so prvič dokazali, da obstaja v feromagnetni snovi že pri sobni temperaturi korelacija med orientacijo atomskih in orientacijo jedrskih spinov.

Izmerili so tudi razcep črte ^{57}Fe zaradi Zeemannovega pojava¹⁹. Jedro ^{57}Fe ima v najnižjem vzbujenem stanju spin $I_v = 3/2$ in v osnovnem stanju spin $I_o = 1/2$. V magnetnem polju se spin I_v orientira lahko na $2I_v + 1 = 4$ načine, spin I_o pa na $2I_o + 1 = 2$ načina. Izvira in absorberja ni treba postavljati v zunanje magnetno polje. Polje, zaradi katerega pride do cepitve črt, je magnetno polje na mestu jedra. Tako se osnovno stanje razcepi na dve in prvo vzbujeno stanje na 4 stanja, katerih energije se razlikujejo med seboj za $\mu_o B/I_o$ in $\mu_v B/I_v$, kjer je μ_o magnetni moment jedra v osnovnem stanju in μ_v magnetni moment vzbujenega jedra. Iz vzbujenega stanja v osnovno stanje je v tem primeru mogočih šest prehodov (sl. 6). Namesto ene same črte nastopa šest črt, ki leže simetrično okoli mesta, kjer bi pričakovali črto, če ne bi bilo Zeemannovega pojava. Dobljeni rezultati v vsem potrjujejo teorijo.

Z merjenjem širine razcepitve so določili, da je $\mu_o = 0,09 \mu_j$ in $\mu_v = -0,15 \mu_j$ ($\mu_j = 5,01 \cdot 10^{-27} \text{ Am}^2$ je jedrski magneton) ter gostoto magnetnega polja na mestu jeder v železu $33,3 \text{ Vs/m}^2$. Atome ^{57}Co so vgradili tudi v folije niklja in kobalta in z resonančno absorpcijo izmerili gostoto magnetnega polja na mestu jeder²⁰. Dobili so $B = 26 \text{ Vs/m}^2$ pri niklju in 31 Vs/m^2 pri kobaltu.

Zelo natančna meritev energije brezodrivno emitiranih žarkov γ je omogočila dokaz gravitacijskega premika spektralnih črt. Ta premik napoveduje

splošna teorija relativnosti²¹, a ga do sedaj ni uspelo nedvoumno potrditi. Mislimo si dva popolnoma enaka oscilatorja na istem mestu. Za opazovalca nihata oscilatorja z enako frekvenco. Če pa enega izmed oscilatorjev prestavimo na mesto z različnim gravitacijskim potencialom φ , bo zaznal opazovalec razliko frekvenc obeh oscilatorjev. V energijskem merilu znaša ta razlika

$$\Delta W = -W_0 \Delta\varphi/c^2. \quad (12)$$

Po tem mora biti emisijska črta izvira ^{57}Fe , ki je nameščen v višini H nad absorberjem, za

$$\Delta W = g H W_0/c^2 \quad (12a)$$

premaknjena proti absorpcijski črti. Pojav si razložimo po domače takole: foton z energijo W_0 ima maso $m' = W_0/c^2$. Ko pade foton proti zemlji z višine H , pridobi energijo $m'gH = gh W_0/c^2$. Pri dvigu za višino H pa se energija fotona za enak iznos zmanjša. Poskusa z vidno svetlobo na Zemlji ni mogoče napraviti, ker je dosegljiva razlika potencialov gH tako majhna, da leži ustrezni premik daleč pod ločljivostjo spektroskopov.

Ločljivost resonančne absorpcije pa dopušča meritev takšne vrste, saj se dadó meriti s prej opisanim načinom še relativni premiki med absorpcijsko in emisijsko črto, ki merijo nekaj stotin relativne širine. Prvi tovrstni poskus so napravili Cranshaw in sodelavci v Harwellu²². Imeli so izvir ^{57}Co z aktivnostjo 30 mC in absorber iz železa, obogatenega do 24 % ^{57}Fe . Izvir je nihal sinusno v smeri proti absorberju s frekvenco 50 s^{-1} . Prva števna naprava je štela polovico periode, ko se je izvir bližal absorberju, druga pa polovico periode, ko se je izvir oddaljeval od absorberja. Detektor je bil proporcionalni števec, poljen s kriptonom pod tlakom $1/2 \text{ atm}$. Višinska razlika med izvirom in absorberjem je znašala 12,5 m. Oba je povezovala evakuirana cev, da je bila absorpcija žarkov γ čim manjša. Po 250 ur trajajočem štetju se je premik približno ujemal z napovedano vrednostjo, pri čemer pa je bila izmerjena velikost premika še za 45 % gotova.

Bolj skrbne meritve sta napravila Pound in Rebka²³. Med pripravami za to meritev sta potrdila veljavnost enačb (11)²⁴; to je uspelo tudi skupini iz Manchester¹². Pound in Rebka sta uvidela, da je treba upoštevati že najmanjšo razliko temperatur med izvirom in absorberjem. Poleg tega sta opazila, da emisijska črta izvira in absorpcijske črte absorberjev ne ležijo natančno pri isti energiji. Medsebojni premik je različen za vsako dvojico izvir-absorber. Tudi ta premik je treba pri natančni meritvi upoštevati. Vzrok zanj je to, da je efektivna Debyeova temperatura za vsak izvir za malenkost drugačna kot za absorber. To je posledica majhnih razlik v kemijski in izotopski sestavi in različno gostih kristalnih napak. Tem motnjam sta se Pound in Rebka izognila z meritvijo razlike: najprej sta namestila izvir nad absorberjem in poiskala premik, nato sta zamenjala položaj izvira in absorberja in zopet poiskala premik. Razlika obeh opazovanih premikov je zagotovo posledica razlike gravitacijskih potencialov.

Uporabila sta izvir ^{57}Co z aktivnostjo 0,4 C, absorberji pa so bili iz 32 % obogatene ^{57}Fe . Kot detektor je služila fotopomnoževalka. Izvir je nihal sinusno s frekvenco 10 s^{-1} . Vsaka izmed obeh števnih naprav je štela samo četrtino periode okoli maksimalne hitrosti: prva, ko se je izvir bližal absorberju, druga, ko se je od njega oddaljeval. Napravo so umerili tako, da so izvir z znano

stalno hitrostjo premikali proti absorberju in merili premik. Višinska razlika med izviro in absorberjem je bila 25 m. Od izvira je vodila k absorberju cev iz plastične mase, polnjena s helijem. Tako so zmanjšali absorpcijo žarkov γ na najmanjšo možno mero. Razliko temperatur izvira in absorberja so merili s termočlenom na $0,03^\circ$ natančno. Izmerjena vrednost premika se je ujemala s teoretično vrednostjo $2 W_0 gH/c^2$ (z zamenjavo izvira in absorberja se višinska razlika navidezno podvoji). Negotovost meritve je bila samo 10 %.

V Harwellu so nadaljevali začetno delo²⁵. Po splošni teoriji relativnosti opazovalec ne more ločiti gravitacijskega polja od pospešenega sistema. Zato so merili premik energije brezodrivno emitiranih žarkov γ v pospešenem sistemu. Izvir so namestili ob osi vrtavke v razdalje R_1 od osi, absorber pa na obodu v razdalji R_2 od osi. Vrtavko so vrteli z različnimi frekvencami vse do 500 s^{-1} . Za premik energije velja po (12)

$$W = W_0 \int_{R_1}^{R_2} \omega^2 r dr / c^2 = \frac{W_0 \omega^2}{2} (R_2^2 - R_1^2) / c^2, \quad (13)$$

kjer je ω kotna hitrost vrtavke.

Poskusi so potrdili veljavnost enačbe (13). Ta enačba se da izpeljati tudi s specialno teorijo relativnosti.

Poskuse z brezodrivno absorpcijo žarkov γ nadaljujejo v mnogih smereh in zato lahko v prihodnosti pričakujemo nove uspehe. Vse navedene meritve so le začetek daljšega raziskavanja. Skoraj brez razlike so jih objavila Physical Review Letters kot poročila o novih poskusih. Možnosti, ki jih je prineslo odkritje brezodrivne emisije in absorpcije, pa še zdaleč niso izčrpane.

Literatura:

- ¹ R. W. Pohl: Einführung in die Optik, Berlin, Göttingen, Heidelberg (Springer) 1948, str. 215—230.
- ² P. B. Moon, Proc. Phys. Soc. **A 64**, 76 (1951), **A 66**, 956 (1953).
- ³ R. L. Mössbauer, Z. F. Phys. **151**, 124 (1958).
- ⁴ W. E. Lamb, Phys. Rev. **55**, 190 (1939).
- ⁵ W. M. Visscher, Ann. Phys. **9**, 1954 (1960).
- ⁶ I. Supek: Teorijska fizika II, Zagreb (Školska knjiga) 1952, str. 313. M. Bošančić et al., Obz. mat. fiz. **7**, 82 (1960).
- ⁷ B. D. Josephson, Phys. Rev. Letters **4**, 341 (1960).
- ⁸ R. L. Mössbauer, Naturwiss. **45**, 538 (1958), Z. f. Naturforschg. **14a**, 211 (1959).
- ⁹ P. P. Craig et al., Phys. Rev. Letters **3**, 221 (1959).
- ¹⁰ L. L. Lee et al., Phys. Rev. Letters **3**, 223 (1959).
- ¹¹ D. Nagle et al., Phys. Rev. Letters **4**, 237 (1960).
- ¹² A. J. F. Boyle et al., Proc. Phys. Soc. **76**, 165 (1960).
- ¹³ R. V. Pound, G. A. Rebka jun., Phys. Rev. Letters **3**, 556 (1959); J. Schiffer, W. Marshall, Phys. Rev. Letters **3**, 556 (1959); S. S. Hanna et al., Phys. Rev. Letters **4**, 28 (1960).
- ¹⁴ C. G. Sherwin et al., Phys. Rev. Letters **4**, 341 (1960).
- ¹⁵ S. L. Ruby, D. I. Bolef, Phys. Rev. Letters **5**, 5 (1960).
- ¹⁶ R. V. Pound, G. A. Rebka jun., Phys. Rev. Letters **4**, 397 (1960).
- ¹⁷ P. P. Craig et al., Phys. Rev. Letters **4**, 561 (1960).
- ¹⁸ J. Perlow et al., Phys. Rev. Letters **4**, 74 (1960).
- ¹⁹ S. S. Hanna et al., Phys. Rev. Letters **4**, 177 (1960).
- ²⁰ G. K. Wertheim et al., Phys. Rev. Letters **4**, 403 (1960).
- ²¹ S. Breskvar, Obz. mat. fiz. **3**, 165 (1953).
- ²² T. E. Cranshaw et al., Phys. Rev. Letters **4**, 163 (1960).
- ²³ R. V. Pound, G. A. Rebka jun., Phys. Rev. Letters **4**, 337 (1960).
- ²⁴ R. V. Pound, G. A. Rebka jun., Phys. Rev. Letters **4**, 274 (1960).
- ²⁵ H. J. Hay et al., Phys. Rev. Letters **4**, 165 (1960).

FOTONUKLEARNA ABSORPCIJA

Kadar govorimo o absorpciji elektromagnetnega valovanja v snovi, mislimo običajno na sodelovanje elektromagnetnega valovanja z elektroni. To valovanje učinkuje na elektronski ovoj atomov na več načinov. Foton vidne svetlobe lahko dvigne elektron z osnovne lupine na višjo lupino, pri čemer mu odda vso svojo energijo. Fotoni rentgenske svetlobe imajo dovolj energije, da celo lahko izbijajo elektron iz atoma. Pri tem se lahko absorbira foton v celoti (fotoefekt), ali pa izgubi samo del energije zaradi prožnega trka z elektronom (comptonski efekt). Pri visokih energijah (nad 1,02 MeV) pa se absorbirajo fotoni še na tretji način, namreč s tvorbo parov elektron–pozitron v močnem električnem polju blizu atomskega jedra.

Pri doslej naštetih pojavih se jedro atoma nič ne spremeni. Fotoni z energijo več milijonov elektronvoltov pa lahko povzročijo tudi spremembe v atomskem jedru. Zato se dajo uporabljati kot učinkovito sredstvo za raziskavo jeder. Iz vzbujenega jedra, ki je nastalo z absorpcijo takšnega fotona, odleti eden ali več delcev, ki odnesejo s seboj odvisno energijo. Tako pride do jedrskih reakcij: (γ, p) , pri kateri jedro absorbira foton in odda proton; (γ, n) , pri kateri izleti nevtron; $(\gamma, n p)$, $(\gamma, 2 n)$ itd. Vsaka jedrska reakcija ima svoj prag, to je najmanjšo energijo, ki jo mora imeti vpadli delec, da lahko sproži reakcijo. Pragovi za omenjene jedrske reakcije ležijo običajno v območju okrog 5 do 25 MeV; zato je to območje najzanimivejše za raziskave.

Reakcije (γ, p) , (γ, n) itd. niso vse enako verjetne. Da bomo videli, kako se izraža ta verjetnost, si zamislimo jedro kot tarčo s ploščino σ , na katero na slepo streljamo s fotoni! Verjetnost zadetka je enaka razmerju med ploščino tarče σ in ploščino prazne stene okrog tarče. Če pade en foton na enoto ploskve, je verjetnost zadetka kar σ . Prenesimo to preprosto predstavo v dogajanja pri jedrskih reakcijah! Namesto geometrijskega preseka jedra lahko podamo neke efektivne preseke, ki povedo, kolikšne so verjetnosti za posamezne jedrske reakcije. Parcialni reakcijski presek σ_x pove verjetnost, da jedro doživi reakcijo (γ, x) , če pade en foton na enoto ploskve. Če imamo n jeder na enoto ploskve in vpade N fotonov, se zgodi $\sigma_x N n$ reakcij (γ, x) . Pri tem računu smo predpostavili, da je plošča tako tanka, da se curek fotonov ne oslabi znatno.

Ker se pri vseh reakcijah foton absorbira, je celotni jedrski absorpcijski presek σ_j enak vsoti vseh parcialnih reakcijskih presekov: $\sigma_j = \sum \sigma_x$. To potrebujemo, če hočemo izračunati, koliko fotonov se absorbira pri prehodu skozi debelejšo plast. V tanki plasti z dn atomi na enoto ploskve absorbirajo atomska jedra $\sigma_j N dn$ fotonov od prvotnega števila N fotonov, elektroni v atomu pa absorbirajo $\sigma_e N dn$ fotonov. Če to integriramo, dobimo $N = N_0 \exp [-(\sigma_j + \sigma_e)n]$. Če torej merimo oslabitev curka fotonov in če poznamo elektronski absorpcijski presek σ_e , lahko izračunamo jedrski absorpcijski presek σ_j .

Jedrski absorpcijski presek je funkcija energije fotonov in je za vsako snov različen. Meritve so pokazale, da v energijskem območju med približno 10 in 25 MeV močno naraste. Absorpcijski spekter, ki so ga dobili s prvotnimi meritvami, so aproksimirali s široko resonančno krivuljo in so ga imenovali veleresonanco (angleško: giant resonance). Zaradi nenatančnosti meritev ni bilo razvidno, ali je to ena sama široka resonanca, ali je sestavljena iz več posa-

meznihi »črt«. Oglejmo si, kako jedrski absorpcijski spekter merimo in kako si ga razlagamo!

Jedrski absorpcijski spekter lahko merimo na dva načina: ali merimo, koliko fotonov se v snovi absorbira, ali pa štejemo, koliko nastane reakcijskih produktov (protonov, nevtronov itd.). Doslej so potek veleresonance merili največkrat s štetjem reakcijskih produktov. Na ta način dobimo parcialne reakcijske preseke. Če bi imeli enobarven izvor fotonov s poljubno spremenljivo energijo, bi bile meritve enostavne. Pri znanem številu vpadlih fotonov $N(E)$ z energijo E bi šteli število reakcijskih produktov $R_x(E)$. Kot smo videli zgoraj, je število reakcijskih produktov enako $R_x(E) = \sigma_x(E) N(E) n$, iz česar bi lahko izračunali reakcijski presek. Ker takih izvorov ni, običajno uporabimo zavorno sevanje iz betatrona. To sevanje ima podoben zvezni spekter, kot ga dobimo z navadno rentgensko cevjo, le da ima mnogo večjo maksimalno energijo E_0 . Obliko spektra podamo s funkcijo $f(E, E_0)$, ki nam pove število fotonov v enotnem energijskem intervalu okrog energije E , deljeno s celotnim številom fotonov. Število reakcijskih produktov dobimo, če seštejemo prispevke vseh fotonov v spektru. To število, deljeno s številom vseh fotonov in s številom jeder na ploskovno enoto, imenujemo pridelek $Y_x(E_0)$, ki znaša:

$$Y_x(E_0) = \int_0^{E_0} \sigma_x(E) f(E, E_0) dE. \quad (1)$$

Pridelek Y_x je funkcija maksimalne energije E_0 . Meriti moramo torej pridelek v odvisnosti od maksimalne energije. Zato mora biti maksimalna energija točno določena in se mora dati spreminjati. Pri betatronu jo spreminjamo tako, da spreminjamo trenutek, ko se elektroni nehajo pospeševati in udarijo v tarčo. Poznati moramo tudi spekter betatrona $f(E, E_0)$. Ker dobimo reakcijski presek v bistvu z odvajanjem merjene krivulje pridelka, se natančnost rezultata močno poslabša. To je slaba stran te metode. Dobra stran pa je, da lahko dobimo parcialne reakcijske preseke.

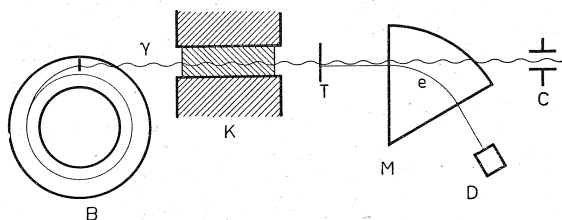
Lahko pa merimo tudi nastalo aktivnost obsevanega vzorca. Tako dobimo število jeder, ki so doživela reakcijo (γ, x) in se pri tem aktivirala. To število je seveda enako številu reakcijskih produktov. Če ga merimo v odvisnosti od maksimalne energije E_0 , dobimo spet krivuljo pridelka.

Kadar nas ne zanimajo parcialni reakcijski preseki, ampak celotni absorpcijski presek, dobimo najboljše rezultate, če merimo oslabitev curka fotonov pri prehodu skozi merjeno snov. Ker imajo fotoni, s katerimi merimo, zvezni spekter, moramo ta spekter izmeriti, in sicer najprej brez absorberja, nato z vloženim absorberjem. Iz razmerja obeh spektrov dobimo absorpcijski spekter. Metoda je analogna meritvi Fraunhoferjevih črt v optičnem spektru; v zveznem spektru sončne svetlobe dobimo temne črte, ker mora svetloba prodreti skozi sloj sončne in zemeljske atmosfere, kjer se absorbirajo značilne valovne dolžine. Medtem ko nam optični absorpcijski spektri nekaj povedo o energijskih nivojih in pojavih v atomih, skušamo izvedeti iz visokoenergijskih rentgenskih absorpcijskih spektrov nekaj o atomskih jedrih.

Slaba stran opisane metode je v tem, da se fotoni ne absorbirajo samo v atomskih jedrih, ampak tudi zaradi fotoefekta, comptonskega efekta in tvorbe parov. Ta elektronska absorpcija je mnogo močnejša od jedrske, saj doseže jedrska absorpcija kvečjemu 10 % celotne absorpcije. Vendar je elektronska absorpcija teoretično izračunana in tabelirana ter jo lahko pri računu odštejemo. Ker je elektronski absorpcijski spekter v merjenem območju razmeroma raven in gladek, lepo izstopijo iz njega hribi in doline jedrskega absorpcijskega

spektra. Kljub temu je zaradi močne elektronske absorpcije potrebna natančnost meritev na 1 %, če hočemo dobiti rezultate na 10 do 20 % natančno.

Oglejmo si ta način merjenja nekoliko podrobneje (sl. 1)! Obliko betatronskega spektra merimo s comptonским spektrometrom, ki ga odlikuje razmeroma dobra energijska ločljivost. Ker fotonov ne moremo razkloniti z električnim ali magnetnim poljem, jih spektrometriramo posredno. Pri vходу v comptonский spektrometer je tarča; pri prehodu skozi njo tvori del fotonov (nekaj promilov) comptonске elektrone in elektronsko-pozitrone pare. Te potem spektrometri-ramo tako, da štejemo elektrone in pozitrone pri raznih vrednostih magnetnega polja v spektrometru. Iz njihovega spektra lahko sklepamo na spekter fotonov. Magnetni spektrometer zajame samo ozek šop elektronov v stožcu s kotom ob vrhu okrog 2° . Comptonski elektroni, ki se sipljejo v ta stožec, imajo približno isto energijo kot foton, zato nam dajo dobro sliko spektra fotonov. Poleg comptonских elektronov pa štejemo tudi parske elektrone. Ti so nezaželeni, ker



Sl. 1. Shema merilnih naprav za fotonuklearno absorpcijo. B — betatronska cev, K — svinčen kolimator z vloženim absorberjem (merjencem), T — tarča spektrometra, M — magnetni spektrometer, D — detektor za elektrone, C — ionizacijska celica; γ — foton, e — elektron

je iz njihovega spektra dosti težje dobiti spekter fotonov. Na srečo pa je njihovo število in energijska porazdelitev popolnoma enaka kot pri pozitronih. Tako lahko dobimo število parskih elektronov, s tem da obrnemo magnetno polje in štejemo pozitrone. Število comptonских elektronov je torej enako razliki med celotnim številom elektronov in številom pozitronov.

Magnetno polje v spektrometru nastavimo tako, da padejo na detektor elektroni z energijo E . V posameznih točkah spektra moramo šteti elektrone in pozitrone vedno na isto število vpadlih fotonov. Zato postavimo v šop fotonov ionizacijsko celico; naboj, ki preteče skozi njo, je merilo za število vpadlih fotonov. Detektor nam prešteje $M_e(E)$ elektronov in pri obrnjenem magnetnem polju $M_p(E)$ pozitronov. V tem je všteto še ozadje $O_e(E)$ oz. $O_p(E)$; to so elektroni in pozitrone, ki ne nastajajo v tarči spektrometra, ampak pridejo na detektor od drugod. Te moramo odšteti. Ozadje merimo, če odstranimo tarčo. Število comptonских elektronov $M(E)$ je torej enako:

$$M(E) = M_e(E) - O_e(E) - [M_p(E) - O_p(E)]. \quad (2)$$

število comptonских elektronov z energijo E je sorazmerno številu fotonov v energijskem intervalu okrog iste energije E . Sorazmernostni faktor $k(E)$ je funkcija energije in je odvisen od verjetnosti za tvorbo comptonских elektronov v tarči in od tega, koliko elektronov zajame spektrometer. Zveza med spektrom comptonских elektronov $M(E)$ in spektrom fotonov $f(E, E_0)$ je torej naslednja:

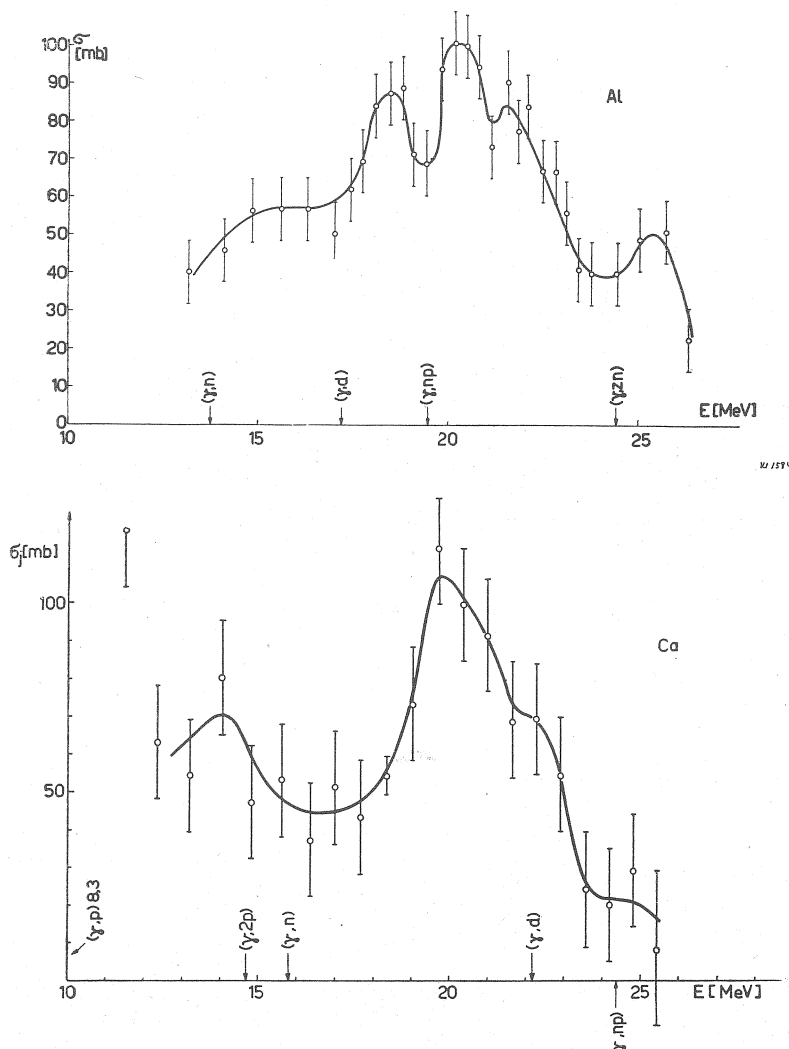
$$M(E) = k(E) f(E, E_0). \quad (3)$$

Če na pot fotonov pred spektrometer vložimo absorber, dobimo drugačen spekter:

$$M'(E) = k(E) f(E, E_0) \exp \{ - [\sigma_e(E) + \sigma_j(E)] n \}, \quad (4)$$

kjer pomeni n ploskovno gostoto atomov v absorberju, σ_e oz. σ_j pa elektronski oz. jedrski absorpcijski presek. Jedrski absorpcijski presek izračunamo iz enačb (3) in (4), v katerih so merjene količine le $M(E)$ in $M'(E)$:

$$\sigma_j(E) = \frac{1}{n} \ln \frac{M(E)}{M'(E)} - \sigma_e(E). \quad (5)$$



Sl. 2. Jedrski absorpcijski presek aluminija in kalcija. Preseki so podani v milibarih: $1 \text{ mb} = 10^{-31} \text{ m}^2$. Vsaka točka predstavlja povprečje več meritev, »repi« pa kažejo velikost statistične napake. Na abscisi so zaznamovani pragovi reakcij (γ, n) , (γ, p) itd.

Po opisani metodi so bile v letih 1958–59 na Nuklearnem inštitutu »J. Stefan« napravljene meritve na aluminiju, siliciju, žveplu, fosforju in kalciju. Rezultati (sl. 2) kažejo, da ne moremo govoriti o enostavni resonančni absorpciji, kajti krivulje imajo neko strukturo. Kako si to razlagamo?

Atomsko jedro je tako komplicirano, da dandanes še nismo sposobni popolnoma razložiti njegovih lastnosti. Zato si pomagamo z jedrskimi modeli, s katerimi na zelo poenostavljen način popišemo dogajanja v jedru. Pri modelu napravimo nekaj osnovnih predpostavk o lastnostih sestavnih delcev in njihovem medsebojnem vplivu, s katerimi poizkušamo razložiti posamezne pojave v jedru. Če se rezultati dobro ujemajo z eksperimentalnimi podatki, sklepamo, da je model dober. Za razlago veleresonance sta bila približno enako uspešno uporabljena kolektivni in lupinski model. Model mora povedati, kako se spreminja veleresonanca z naraščajočim masnim številom jedra A , razložiti mora širino resonance in po možnosti tudi njeno strukturo.

Po kolektivnem modelu si predstavljamo, da je jedro sestavljeno iz protonske in nevtronske tekočine. Absorbirani foton povzroči, da ti dve tekočini zanihata ena proti drugi. Veleresonanca se po tem modelu pojavi zaradi dipolnega nihanja obeh jedrskih tekočin. Z nekaterimi predpostavkami lahko izračunamo tudi frekvenco tega nihanja. Širino resonančne črte pa tolmačimo z dušenjem tega nihanja zaradi viskoznosti jedrske tekočine.

Lupinski model jedra je napravljen po analogiji z lupinskim modelom atoma, ki se je pokazal za zelo uspešnega. Eksperimenti so pokazali, da je jedro posebno stabilno, če je število protonov ali nevtronov enako 2, 8, 20, 28, 50 itd. Ta števila so imenovali magična števila. Po analogiji z žlahtnimi plini domnevamo, da tvori magično število protonov ali nevtronov v jedru zaključene lupine. Podobno kot za elektrone v atomu so skušali dobiti tudi energijske nivoje za lupine v jedru. V prvem približku lahko predpostavljamo, da se nukleoni v jedru prosto gibljejo v povprečnem jedrskem potencialu. Bolj komplicirane sile upoštevamo naknadno v korekturah. Žal pa jedrskih sil in s tem tudi povprečnega jedrskega potenciala ne poznamo dobro. Pomagamo si s približki. Kot preprost približek lahko vzamemo potencialni lonec ali pa potencial trodimenzionalnega harmoničnega oscilatorja; pravilni potencial je nekaj vmes med tema skrajnima približkoma. Energijski nivoji, ki jih izračunamo s povprečnim jedrskim potencialom, še niso pravi. Pravilne energijske nivoje in pravilna magična števila dobimo, če upoštevamo, da je energija nukleona v veliki meri odvisna od sklopitve spina nukleona z njegovo obhodno vrtilno količino. Kot pokažejo računi, ležijo energijski nivoji v posameznih ločenih skupinah. Te skupine nivojev ustrezajo lupinam. Število vseh stanj v teh lupinah od prve lupine do neke zaključene lupine je enako magičnemu številu.

Jedro, ki absorbira foton, preide iz osnovnega stanja v vzbujeno stanje. Če bi imeli samo eno vzbujeno stanje, bi dobili enostavno resonančno krivuljo. Ker pa imamo mnogo energijskih nivojev, dobimo v območju veleresonance množico resonančnih krivulj, ki se zaradi svoje širine lahko prekrivajo. Na ta način je podana oblika veleresonance in njena fina struktura. Računi pokažejo, da dobimo pravilno grobo obliko veleresonance in pravilen integral absorpcijskega preseka že iz dipolnih prehodov jedra iz osnovnega stanja v višje energijske nivoje.

Konkretni računi veleresonance s pomočjo modelov pa niso tako enostavni, ker je treba upoštevati vrsto korektur. Vendar je uspelo Elliottu in Flowersu² eksperimentalno znani spekter ^{16}O in ^{16}N teoretično reproducirati z lupinskim

modelom, in to tako, da sta določila energijskim nivojem lego, lupino, parnost in spin. Za ^{16}O sta n. pr. izračunala, da sestoji veleresonanca iz dipolnih prehodov iz osnovnega stanja na energijske nivoje 13,1; 17,1; 20,4; 22,6 in 25,2 MeV.

Meritve veleresonance so pokazale še to, da imajo jedra z magičnim številom nukleonov (n. pr. $^{40}_{20}\text{Ca}$) ožje resonance od ostalih (n. pr. $^{27}_{13}\text{Al}$). Širina resonance se veča in njega struktura postaja izrazitejša, čimbolj je jedro oddaljeno od polne lupine. Upati je, da bi z natančnejšo analizo teh krivulj lahko prišli do nekaterih izpopolnjenih podatkov za jedrske modele.

Mitja Kregar in Mitja Rosina

Literatura:

1. J. Dular, G. Kernel, M. Kregar, M. V. Mihailović, G. Pregl, M. Rosina, Č. Zupančič: Nuclear Absorption of Gamma Rays in Al, Si, P, S and Ca. Nuclear Phys. **14**, No. 1, 131 (1959).
2. J. P. Elliot, B. F. Flowers, Proc. Roy. Soc. (London), **A 242**, 57 (1957).

ŠOLA

POUK NARAVOSLOVNIH PREDMETOV V SPLOŠNOIZOBRAŽEVALNIH ŠOLAH

Od 10. do 15. oktobra 1960 je bil v Beogradu sestanek strokovnjakov za naravoslovne vede, ki sta ga organizirala Jugoslovanska nacionalna komisija za Unesco in Zvezni zavod za proučevanje šolskih in prosvetnih vprašanj, s pomočjo Mednarodne organizacije Unesco.

Na tem sestanku so sodelovali poleg domačih še zastopniki iz ČSSR, iz Velike Britanije, iz Francije, iz Nemčije, iz Sovjetske zveze in predstavniki Unesca.

Podani so bili trije referati: 1. Josip Lukatela: Naravoslovne vede, njihov pomen za sodobno družbo in njihovo mesto v vzgoji državljanov. 2. G. Šindler: Pripombe k problematiki strukture učnega procesa. 3. Petar Živojinović: Obča vzgoja v splošnoizobraževalnih šolah.

Diskusija, ki je sledila referatom, je bila zelo živahna. Sodelovali so vsi tuji in domači predstavniki. Na osnovi referatov, izmenjanih misli in pismenih prispevkov so udeleženci posvetovanja prišli do naslednjih zaključkov in predlogov:

1. Zasluga Mednarodne organizacije Unesco je, da je omogočila Jugoslovanski nacionalni komisiji Unesco in Zveznemu zavodu za proučevanje šolskih in posvetnih vprašanj, da se je vršil sestanek strokovnjakov, ki se ukvarjajo s problematiko pouka naravoslovnih ved v dobi, ko te postajajo vse bolj važne v vseh vrstah šol, kot tudi v izobraževanju odraslih.

2. Naravoslovne vede v medsebojni zvezi s tehniko in proizvodnjo doprinašajo k nadaljnjemu razvoju proizvodnih sil in družbe. Te so si zaradi doseženih rezultatov in njih uporabe pridobile ogromen poučni kulturni in politični vpliv, ki ga moramo izkoristiti za napredek in razvijanje čedalje boljših in bolj humanih odnosov med ljudmi in narodi.

3. V sodobnem svetu imajo naravoslovne vede in njih uporaba nenehen in v bodoče vse večji vpliv na življenje mladega naraščaja, na njegov razvoj

in aktivnost. Učno-vzgojno dejavnost moramo prilagajati taki situaciji, upoštevajoč tudi ostale faktorje družbeno-ekonomskega razvoja.

4. Z ozirom na vključevanje mladih generacij v bodoče aktivno družbeno in gospodarsko življenje in glede na potrebe njihovega neposrednega udejstvovanja v upravljanju, zavzema prirodno-znanstveno, tehnično in proizvodno izobraževanje, kot sestavni del izobraževanja, ki ga dajejo splošno izobraževalne šole, vedno bolj pomembno mesto.

5. Prirodne vede, tehnika, tehnologija in ekonomija se toliko izražajo v človekovi dejavnosti, naj si bo v proizvodnji ali na kakšnem drugem delovnem mestu in vsakodnevnem življenju, da je nujno to upoštevati v okviru vzgojno-izobraževalnega procesa, kakor pri izbiri vsebine, tako tudi pri nje-govi interpretaciji in uporabi učnih metod.

Na ta način pride do polnega izraza povezovanje teorije s prakso in sploh šole z življenjem.

6. Mednarodni sestanki strokovnjakov za pouk prirodnih ved v teku zadnjih desetih let so obravnavali problematiko pouka v novih pogojih znanstvenega in družbenega razvoja. Rešitve takih problemov so bile vpoštevane v inozemstvu in v FLRJ. Vse to je služilo za osnovo razmišljanja o problematiki pouka prirodnih ved na tem sestanku.

Kot pomembno se poudarja naslednje:

a) Prirodne vede predstavljajo integralni del obče kulture. Ta poleg humanističnih vrednot vsebuje znanje o strukturi družbe in njenem razvoju, v živi in neživi prirodi in njeni evoluciji ter o svetu tehnike, proizvodnje, tehnologije in ekonomike;

b) Pouk prirodnih ved ima za cilj, poleg proučevanja narave in njenega razvoja, osvajanje metodologije dela in mišljenja, ki so ga razvile prirodne vede, seznanjenje z uporabo prirodnih ved na področju tehnike in proizvodnje, razvijanje kulture dela pri učencu, doprinos k znanstvenemu pogledu na svet in razvijanju učenčevega moralnega lika.

7. Da bi bil vzgojni vpliv prirodnih ved čimbolj učinkovit, jim moramo pri pouku povezovati tako s tehnično vzgojo učenca, kakor z delom učenca v proizvodnji.

8. Pouk prirodnih ved mora usmeriti pozornost na celokupno osebnost učenca in razvijati vse njegove sposobnosti, še posebno organizacijske, inventivnost in kreativnost ter občo kulturo dela, odpornost, vztrajnost pri delu, natančnost in čut odgovornosti za naloge in kolektiv, s katerim in za katerega dela.

9. Prirodne vede tvorijo področje, ki pri pouku prispeva k razvijanju znanstvenega načina mišljenja in formiranja kulturnega, aktivnega, ustvarjalnega lika mladega človeka.

10. Matematika, fizika, kemija, mineralogija, geologija, astronomija, fizikalna geografija in biologija predstavljajo v pouku enotno področje. Vsebinsko si morajo te vede v dobri koordinaciji medseboj pomagati druga drugi in dati čvrst temelj za ustrezen poučno-vzgojni vpliv na učenca.

11. Prirodne vede v osnovnih in srednjih šolah služijo ciljem splošnega izobraževanja. Spoznavajo učenca z načinom dela in mišljenja, ki je svojstveno prirodnim vedam. Delovne metode, ki so jih razvile prirodne vede, prispevajo k intelektualni vzgoji učenca in k razvijanju njegove celokupne osebnosti.

Praktične vaje v laboratoriju in na terenu morajo zavzeti čimvažnejše mesto pri pouku. S tem ciljem moramo nuditi predavateljem neobhodna materialna sredstva in prostor.

12. V učnih načrtih mora biti zagotovljeno, da prirodne vede v vsakem letu šolanja vplivajo na razvoj učenca.

13. Pri dodeljevanju časa, potrebnega za pouk prirodnih ved, je treba upoštevati mesto, značaj, obseg učnega gradiva in učne metode, primerne prirodnim vedam.

14. Pri interpretaciji gradiva se morajo strogo upoštevati starost in sposobnosti učenca. Vedno je treba imeti pred očmi, da učni proces služi kultiviranju učenčevega mišljenja in dela. Pri tem je treba vedno izhajati iz konkretnega in praktičnega k teoretskemu znanju, ki se nato ponovno izkoristi v praksi.

15. Glede na to, da se učno gradivo kopiči zaradi naglega razvoja znanosti in tehnike, je treba nenehno filtrirati vsebino pri pouku prirodnih ved. Pri tem morajo programi vedno vsebovati to, kar je osnovno, upoštevajoč stalni napredek v znanosti in tehniki. Programi morajo vsebovati vprašanja, ki imajo aktualno, znanstveno, kulturno, izobraževalno in vzgojno vrednost.

16. Učni programi, kakor tudi proces in učinek v pouku prirodnih ved, morajo postati področje stalnih znanstvenih izsledkov in raziskovanja, kako najti čim boljšo zvezo med vsebino učnih načrtov, razpoložljivim časom za odvijanje pouka, učnimi oblikami, starostno dobo učenca, pripravo predavatelja in potrebnimi učnimi sredstvi.

17. Danes ni mogoče proučevati prirodnih ved brez pomoči matematičnega aparata. Ta aparat je učinkovit instrument za proučevanje funkcionalnih zvez in statističnih zakonitosti. Pač pa se mora matematični aparat uporabljati primerno, da ne zasenči smisla prirodnih pojavov in zakonitosti.

18. Proučevanje prirodnih pojavov zahteva raznovrstne metode. Da bi bilo učenčevo znanje stvarno in ustvarjalno, je nujno, da se učenec postopno seznani s temi metodami in da jih uporablja v taki meri, ki ustreza njegovim intelektualnim sposobnostim. Pri učencu je treba razvijati sposobnost in smisel za izbiro najprikladnejših metod za njihovo kombiniranje in medsebojno podporo.

V učnem načrtu je treba prepustiti zelo važno mesto zgodovini prirodnih ved, evoluciji človekove misli na vseh področjih prirodnih ved, kakor tudi metodi s takim aspektom, ki kar najbolj doprinaša k razumevanju in zbliževanju med ljudmi in narodi.

19. Glede na to, da pouk prirodnih ved postaja vedno bolj obsežen in odgovoren, je potrebno stimulirati pridobivanje in izobraževanje novega učnega kadra in izpopolnjevati obstoječi kader.

Zato je nujno potrebno reformirati študij na fakultetah in drugih visokih šolah (kjer se vzgajajo učitelji) ter izboljšati delovne in življenjske pogoje učiteljev. Še posebej je treba, zaradi naglega razvoja znanosti in tehnike ter hitrega psihofizičnega razvoja učencev, organizirati stalno izpopolnjevanje učiteljev v obliki postdiplomskega študija, specializacije, počitniških seminarjev, mednarodnih zamenjav, ustrežajočih publikacij in podobno.

20. Glede na to, da področje pouka postaja vedno bolj predmet znanstvenega raziskovanja, se morata didaktika in metodika prirodnih ved izpopolnjevati kot novi in samostojni znanstveni disciplini. Zato moramo pritegniti

k sodelovanju strokovnjake za pouk prirodnih ved v posameznih državah in v mednarodnem merilu s pomočjo strokovnih društev, unij, znanstvenih inštitutov in Unesca.

Zato moramo sklicevati nacionalne in tudi internacionalne sestanke, seminarje, simpozije in posvetovanja strokovnjakov-metodikov prirodnih ved za skupine predmetov, za posamezne predmete in tudi za posamezne probleme.

Z oziroma na širino in težo načete problematike ter njen mednarodni pomen, obsežnost in možnosti organizacije Unesca

p r e d l a g a m o ,

da Unesco s pomočjo mednarodnih unij strokovnih društev in ustrežajočih institucij organizira s sodobnimi, znanstvenimi in, kjer je primerno, statističnimi metodami proučevanje naslednjih problemov:

1. Doprinos prirodnih ved v razvijanju intelektualnih sposobnosti učenca, formiranje njegove celokupne osebnosti in razvijanju znanstvenega svetovnega nazora.

2. Problem vnašanja sodobnih dosežkov in uporabnosti posameznih prirodnih ved v učne načrte ter njihova metodična obdelava pri pouku v zvezi s starostno dobo učenca.

3. Vloga matematike pri pouku prirodnih ved.

4. Težave učencev pri obvladanju matematike, fizike, kemije in biologije ter njihove uporabe na ostalih področjih.

5. Koordinacija pouka prirodnih ved.

6. Povezava pouka prirodnih ved s tehničnim poukom, proizvodnjo in delom učenca.

7. Oblikovanje in izpopolnjevanje učitelja prirodnih ved.

8. Problem opreme in učnih pripomočkov z ozirom na znanstveni in tehnični napredek, ki daje nove možnosti za izpopolnjevanje učnega procesa.

9. Vsakoletno sklicevanje rednih internacionalnih posvetov v navedenih vprašanjih in sicer za posamezne predmete prirodnih ved ali za skupine predmetov.

St. Uršič

ZBIRKA POSKUSOV IZ FIZIKE

Kot majhen pripomoček za pouk fizike na osemletkah so profesorji, ki so pripravili in vodili tečaj za eksperimentiranje pri pouku fizike na osemletkah v začetku julija v letošnjem letu, napisali majhno »Zbirko poskusov iz fizike«. Zbirka vsebuje 242 poskusov iz fizike za osemletke.

Za izdajo je prišla pobuda s Fizikalnega inštituta Univerze, nato pa tudi od udeležencev tečaja. Pedagoški center LRS, ki je tečaj finansiral, je to pobudo takoj sprejel in obljubil materialno in organizacijsko pomoč pri izdaji. Končno so reorganizacijski dogodki v našem šolstvu nanесли, da je Zbirko razmnožil, izdal in založil Zavod za proučevanje izobraževanja odraslih LRS, Erjavčeva c. 18 v Ljubljani. Tam lahko zainteresirane ustanove in posamezniki Zbirko naroče.

F. A.

PODIPLOMSKI TEČAJ O UPORABI RADIOAKTIVNIH IZOTOPOV V INDUSTRIJI

V letnem semestru študijskega leta 1959/60 je bil od 21. marca do 8. junija na ljubljanski univerzi podiplomski tečaj o uporabi radioaktivnih izotopov v industriji. Vodstvo tečaja je prevzela Fakulteta za rudarstvo, metalurgijo in kemijsko tehnologijo, izvedel pa ga je inštitut za fiziko univerze v sodelovanju z Nuklearnim inštitutom »Jožef Stefan«.

Program je obsegal 150 ur predavanj in računskih ter 31 laboratorijskih vaj.

Podrobnejši spored je bil takle:

- I. Kuščer, J. Strnad, R. Blinc, P. Gosar:* Osnove atomske fizike — 20 ur;
M. V. Mihailović: Osnove jedrske fizike — 20 ur;
J. Pahor: Detektorji — 15 ur;
D. Jamnik: Osnove jedrske elektronike — 8 ur;
J. Kušar: Osnove avtomatizacije — 4 ure;
P. Horvat: Metode za merjenje radioaktivnosti — 20 ur;
Z. Milavc: Zaščita pred sevanjem — 8 ur;
D. Horvat: Industrijska radiografija — 12 ur;
J. Pahor, L. Kosta, B. Čerček: Uporaba radioaktivnih izotopov — 33 ur;
R. Kladnik: Produkcija in nabava izotopov — 10 ur.

Predavatelji so si razdelili čas tako, da so ga porabili $\frac{2}{3}$ za predavanja in $\frac{1}{3}$ za računske vaje.

Po štirih tednih so udeleženci tečaja začeli še s praktičnim delom v laboratorijih. Opravili so 31 vaj z vseh področij merjenja in uporabe radioaktivnosti. Vaje so bile:

1. Ionizacijska celica.
2. Geigerska števna cev.
3. Statistika in mrtvi čas pri geigerski števni cevi.
4. Scintilacijski števec kot detektor in spektrometer.
5. Merjenje aktivnosti Co^{60} s koincidenkami.
6. Jedrske fotografske plošče.
7. Merjenje absorpcije žarkov gama s fotografsko ploščo.
8. Stabilizacija visokonapetostnega usmernika.
9. Merjenje linearnosti ojačevalnika.
10. Enokanalni analizator.
11. Absorpcija žarkov alfa.
12. Absorpcija žarkov beta.
13. Merjenje absorpcije žarkov gama z geigersko števno cevjo.
14. Zaviranje in absorpcija nevtronov.
15. Aktiviranje indija z nevtroni.
16. Kalibriranje dozimetra.
17. Ugotovitev globinske lege napake.
18. Radiografski pregled jeklenega zvara.
19. Ugotovitev položaja in debeline napake z geigersko števno cevjo.
20. Merjenje debeline s presevanjem.
21. Merjenje debeline s povratnim sipanjem delcev.
22. Določevanje gladine tekočin z radioaktivnimi izotopi.
23. Merjenje pretoka zraka.
24. Aktivacijska analiza.
25. Analiza z izotopskim razredčevanjem.

26. Določitev topnosti s tracersko metodo.
27. Uporaba nosilcev.
28. Določevanje radioaktivnosti na papirnih kromatogramih.
29. Merjenje doze pri 300 curieskem izvoru Co^{60} .
30. Merjenje vlage v gradbenem materialu.
31. Radiografija v »Litostroju«.

Vaje so bile pripravljene tako, da je delal vsak udeleženec vsako vajo sām, razen ene radiografske vaje, ki je bilo bolj demonstracijska in so si udeleženci ogledali naprave za delo z velikimi odlitki v »Litostroju«.

Večina vaj je bila pripravljenih v posebnem laboratoriju, ki ga je dal za tečaj Kemični inštitut »Boris Kidrič«, radiografske vaje so bile v prostorih Inštituta za metalne konstrukcije in so jih vodili tamkajšnji strokovnjaki, ena vaja je bila v »Litostroju«, vse ostale pa na Nuklearnem inštitutu »Jožef Stefan«. Naprave in merilne aparate je dal za tečaj na razpolago Nuklearni inštitut »J. Stefan«, čigar strokovnjaki so vodili v glavnem vse vaje. Nekaj instrumentov je posodila še Zvezna komisija za nuklearno energijo, vaje za radiografijo pa je opremil Inštitut za metalne konstrukcije.

Na tečaj se je prijavilo 14 kandidatov iz vse države. Prišli so v glavnem iz industrije in inštitutov, nekaj pa je bilo tudi asistentov in predavateljev učnih zavodov (fakultet in srednjih šol).

Del tečajnikov ni mogel sodelovati do konca, ker jih je moralo nekaj opravljati tudi redno delo v službi, tako da se je na zaključni izpit javilo le 8 kandidatov, ki so ga vsi uspešno opravili. Izpit je bil pred komisijo, ki jo je imenovala uprava Fakultete za rudarstvo, metalurgijo in kemijsko tehnologijo, ter je obsegal tri računske naloge, laboratorijsko nalogo ter usnen del.

Posebnost tečaja so bila skripta, ki so izhajala v glavnem vzporedno s tečajem. V nakladi 400 izvodov jih je založil Nuklearni inštitut »J. Stefan«. Obsegajo 6 zvezkov s približno 550 ciklostiranimi stranmi.*

Sredstva za tečaj in skripta je dala na razpolago Skupnost jugoslovanskih univerz (Zajednica jugoslovenskih univerzitet) ter Zvezna komisija za nuklearno energijo preko NI »J. Stefan«.

Tečaj je prav dobro uspel, čeprav smo pričakovali večjo udeležbo. Tudi za bodoče kaže, da bodo takšni tečaji koristni. Gotovo bi bilo dobro, da bi z radioaktivnostjo in njeno uporabo seznanili tudi predavatelje srednjih strokovnih šol, da bi mogli ti posredovati vsaj osnovne principe svojim učencem. Tako bo zajamčena primerna izobrazba s tega področja tudi srednjemu strokovnemu kadru.

Edo Pirkmajer

MATEMATIČNA OLIMPIADA V BUKAREŠTI

Od 23. do 31. julija 1960 je bila v Bukarešti mednarodna matematična olimpiada za absolvente vseh srednjih šol. Na to tekmovanje je bila povabljen tudi naša država. Žal se tega merjenja umskih sil nismo mogli udeležiti iz tehničnih razlogov. Toda naši štirje kandidati in tudi drugi lahko ugotovijo, kakšen bi bil njihov uspeh na tem tekmovanju. Preizkusijo naj svoje znanje, in ker so pri vsaki nalogi navedene tudi točke, bodo lahko ugotovili, koliko zmorejo. Pri pravilni rešitvi je bilo določenih skupno 40 točk. Samo eden od kandidatov je dosegel 40 točk, in sicer mladinec iz Češke, drugo mesto je dosegel kandidat

* Skripta so na razpolago interesentom za ceno 650 din v centru za dokumentacijo Nuklearnega inštituta »J. Stefan«.

iz Romunije, tretje pa iz Madžarske. Po ekipah pa je bil vrstni red naslednji: 1. Romunija, 2. Madžarska, 3. Sovjetska zveza. Predloge za naloge so dali predstavniki raznih držav. Komisija, sestavljena iz enega zastopnika iz vsake države, je izbrala šest nalog. Tekmovali so dva dni, vsakokrat po tri ure. Prvi dan so reševali tri naloge iz področja aritmetike, algebre in trigonometrije, drugi dan pa iz planimetrije in stereometrije. Naloge so bile naslednje:

1. Dokaži, da ne moremo okrajšati ulomka $\frac{12n+4}{14n+3}$ za nobeno naravno število $n!$ (5 točk)

2. Za katere realne vrednosti x imamo:

$$a) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$$

$$b) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 2$$

$$c) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 1$$

pri čemer upoštevamo samo pozitivne korene. (8 točk)

3. Določi kvadratno enačbo, ki vsebuje števila a , b , c in $\cos 2x$, če je x določen kot (in sicer realno število), a , b in c poljubna realna števila, in če realna števila a , b , c in $\cos x$ zadovoljujejo kvadratni enačbi:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0,$$

če je $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$; primerjaj enačbi! (7 točk)

II. dan.

1. Načrtaj pravokotni trikotnik, če je dana hipotenuza c in je srednica hipotenuze srednja geometrijska sorazmernica med katetama! (5 točk)

2. Na daljici AB izbereš med A in B poljubno točko M in nad daljicama AM in MB kot stranicama načrtaj kvadrata $AMCD$ in $MBEF$, ki ležita na isti strani daljice AB . Tema kvadratoma očrtana kroga s središčema P in Q se sekata, razen v točki M , še v točki N . Premici skozi AF in skozi BC se sekata v točki N' .

a) Dokaži, da N in N' sovpadata.

b) Dokaži, da vse premice skozi MN gredo skozi določeno točko S , kakorkoli izberemo točko M .

c) Določi geometrijsko mesto središč daljic PQ , ako točko M premikamo od A do B ! (8 točk)

3. Dani sta ravnini P in Q , ki se sekata v premici p . Nadalje je dana v ravnini P točka A in v ravnini Q točka C . Nobena od teh točk ne leži na premici p . Enakokraki trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kateremu moremo včrtati krog, nariši tako, da točka B leži v ravnini P in točka D v ravnini Q ! (7 točk)

Naloge in poročilo o uspehu so bili objavljeni v nemški reviji »Mathematik und Physik in der Schule« št. 8 — 1960. Pisec članka ugotavlja neuspeh vzhodnonemške delegacije, ker je njihov najboljši kandidat dosegel le 10 točk.

Na tej prvi mednarodni matematični olimpiadi so sklenili, da bodo prirejali tako tekmovanje vsako leto v drugi državi. Upajmo, da bodo prihodnje leto odpadle vse tehnične ovire in se bodo tudi naši dijaki pomerili v matematiki v mednarodnem merilu. Uspeh prav gotovo ne bo izostal, saj imamo že večletno tradicijo v republiškem in zveznem tekmovanju mladih matematikov.

Stanko Uršič

Kakšno delo čaka naše društvo v odseku za popularizacijo matematike in fizike v tem šolskem letu?

Kakor že tri leta, bomo tudi letos priredili republiško tekmovanje mladih matematikov. To bo v mesecu marcu 1961. Profesorji na posameznih šolah ali v skupini šol naj pred tem izvedejo izbirna tekmovanja po posameznih razredih vseh šol druge stopnje. Eventualne pripombe o načinu tekmovanja sporočite našemu društvu! Republiško tekmovanje mladih matematikov bo potekalo v Ljubljani kakor dosedanja tekmovanja. Tekmovali bodo po posameznih razredih, snov bo zajeta iz prejšnjih šolskih let in prvega semestra tekočega šolskega leta po programu za gimnazije. Tudi letos opisna geometrija še ne bo prišla v poštev za tekmovanje. Ker bo nekaj nalog bolj zahtevnih, vendar še vedno v okviru učnega načrta za gimnazije, je priprava na to tekmovanje potrebna. »Matematičko fizički list« bo lahko uspešen pripomoček dijakom za pripravo na tekmovanje. Najboljši tretješolci in četrtošolci bodo izbrani za zvezno tekmovanje, ki bo meseca aprila v Zagrebu.

Do sedaj smo že tri leta zapored imeli krožke iz matematike. Ti krožki so se vršili tedensko in vsaka učna enota je bila skoraj neodvisna od ostalih. Na teh krožkih smo dosegli prav lepe uspehe, saj je marsikateri dijak utrdil svoje znanje iz matematike in se tudi za ta poklic odločil. Udeležba je bila zelo dobra, kar nas je iz leta v leto vzpodbujalo pri organiziranju krožkov. Tudi v letošnjem šolskem letu ne bomo odnehali, vendar mislimo, da bi bilo dobro spremeniti način našega dela. V razgovoru z dijaki smo spoznali, da bi bil zelo zaželen tečaj iz kakega področja matematike, ki se v srednji šoli ne obravnava, ki pa je vendar dostopno vsem srednješolcem, na primer infinitezimalni račun ali verjetnostni račun in podobno. Posamezne šole so take tečaje že imele in uspeh ni izostal.

Prirejali smo tudi razne krožke iz vseh področij fizike. Le-ti so bolj uspešni, če jih vodijo po posameznih šolah, ker je odziv s strani dijakov zelo velik, kajti v centralnem krožku za fiziko bi bilo eksperimentalno delo s posamezniki onemogočeno zaradi velikega števila udeležencev. Zavod za napredek šolstva LRS je s pomočjo nekaterih predavateljev srednjih šol in VPŠ izdal skripta zbirke fizikalnih poizkusov. Ta zbirka, ki je nastala iz navodil, ki so jih dobili v juniju 1960 udeleženci tečaja za fizikalno eksperimentiranje na nižji stopnji, bo prav gotovo veliko pripomogla k organiziranju krožkov na srednji šoli.

Organizacija krožkov in tečajev je prepuščena posameznim predavateljem na šolah. Vendar bo naše društvo po potrebi z veseljem pomagalo pri organizaciji in izvedbi tega dela.

Tudi knjižna zbirka »Sigma«, ki jo izdaja Mladinska knjiga pod strokovnim vodstvom našega društva, si je utrla pot med ljubitelje te eksaktne znanosti. Do sedaj so v njej izšle že tri knjige, od katerih je prva že razprodana. Izšle pa bodo še: dr. France Križanič — Elektronski računalniki, Oto Sajovic — Aksonometrija, dr. Ivan Vidav — Sodobna algebra in dr. France Križanič — Vektorji, matrike, tenzorji. Člani bodo te knjige lahko dobili pri našem društvu po nekoliko znižani ceni.

Stanko Uršič

III. KONGRES MATEMATIKOV IN FIZIKOV JUGOSLAVIJE V BEOGRADU

Zveza društev matematikov in fizikov FLRJ je svoj tretji kongres, ki bi se bil moral vršiti že lani, izvedla šele letos v času od 19. do 24. septembra. Hkrati je ob sodelovanju Internacionalne komisije za pouk matematike organizirala tudi mednarodni simpozij za koordinacijo pouka matematike in fizike.

V častnem kongresnem odboru so bili najvidnejši predstavniki naših prosvetnih oblasti in znanstvenih institucij, med njimi tudi naš starosta in častni član Zveze prof. dr. Josip Plemelj.

Devetčlanskemu pripravljalnemu odboru, ki je moral opraviti ogromno in težko organizacijsko delo, sta bila na čelu univ. prof. dr. Sreten Šljivić kot predsednik in univ. docent dr. Vojin Dajović kot tajnik.

Simpozij je organiziral in vodil tričlanski odbor, ki so ga tvorili: dr. M. H. Stone, univ. profesor iz Chicaga, dr. Djuro Kurepa, tačasni predsednik zveze in univ. prof. iz Zagreba, ter docent beograjske univerze dr. V. Dajović.

Kongres kakor tudi simpozij sta se vršila v poslopju Prirodoslovno-matematične fakultete na Študentskem trgu.

Letošnji kongres se je razlikoval od prejšnjih dveh, ki sta bila na Bledu in v Zagrebu, po tem, da je bila udeležba naravnost velikanska (ca. 1200!) ter da je bil kongresni program izredno pester in bogat — lahko bi rekli — prenatrpan. Najbrž je bilo oboje kongresu prej na škodo kot v korist. Slovencev, ki smo morali opraviti najdaljšo pot, je bilo relativno precej (ca. 100), za kar je treba izreči toplo zahvalo in priznanje ne-le našim okrajnim odborom, temveč tudi mnogim občinam, ki so z izdatno gmotno podporo omogočile udeležbo svojim ljudem. Študijsko delo na kongresu je bilo precej naporno, saj se je često zavleklo od jutranjih ur pozno v noč. Nepregledne in dela voljne množice udeležencev pa je nemalo motilo dejstvo, da so v kongresnem programu zaman iskale naslove predavanj, pa so se morale zato večkrat seliti od predavalnice F_x do M_y in obratno. Kako obširen je bil program tega kongresa, lahko posnamemo že iz naslovov področij, na katerih se je zvrstilo na stotine referatov in predavanj: algebra in teorija števil, analiza I in II, geometrija in topologija, osnove matematike, praktična matematika in pouk matematike; iz fizike p: splošna fizika in geofizika, nuklearna fizika in radioaktivnost, jonska optika in pospeševalniki, nuklearne reakcije (instrumenti in metode), fizika trdnih teles, optika, teoretična fizika, nuklearna spektroskopija, reaktorji, problemi znanstvenega dela v fiziki in pouk fizike. Vzporedno so potekala še predavanja iz astronomije in delo simpozija, kjer so poleg jugoslovanskih predavateljev sodelovali še matematiki, fiziki in astronomi iz Anglije, Belgije, Francije, Grčije, Japonske, Nemčije, Poljske, ZSSR, Švedske in ZDA.

Slovenski matematiki in fiziki so za kongres prispevali nekaj nad 20 predavanj oz. referatov, ki pa so jih nekateri udeleženci zaradi neznanja jezika premalo razumeli. Podobno je bilo tudi s predavanji, ki so jih imeli tovariši iz LR Makedonije. Kot že rečeno, je bil celotni program kongresa tako obsežen, da mu enostavno ni bilo mogoče v celoti slediti in ga zato tudi danes še ni mogoče kritično pregledati in oceniti. Za prihodnji kongres, ki bo bodisi v Bosni in Hercegovini bodisi v Makedoniji, bo pač treba ubrati boljšo in smotrnejšo pot. Zlasti bo treba misliti na učitelje srednjih in strokovnih šol, ki

jih — kot smo videli v Beogradu — mnogo bolj zanimajo problemi pouka matematike in fizike na teh šolah kakor znanstveni referati.

Naj omenim še, da so si udeleženci kongresa prvi dan popoldne ogledali izredno zanimivo razstavo nuklearne energije na beograjskem velesejmu in da je bil zadnji dan kongresa, t. j. v soboto, 24. septembra dopoldne, občni zbor Zveze, ki je odločil, da naj sedež Zveze še naprej ostane v Beogradu, in delno izpremenil dosedanja pravila Zveze. V plenumu so med 30 člani bili izvoljeni tudi štirje Slovenci (tov. dr. F. Dominko, dr. F. Križanič, prof. J. Povšič in predsednik Društva matematikov in fizikov LRS dr. A. Vadnal), v tričlanski revizijski odbor pa eden (prof. F. Šušteršič). Novi izvršni odbor se je še istega dne konstituiral; za novega predsednika je bil izbran dr. Sreten Šljivić.

Gotovo je beograjski kongres prinesel mnogo dobrega, novega in koristnega, ne le v znanstvenem, didaktičnem in pedagoškem smislu, temveč je tudi zblížal številne matematike in fizike iz vse države. Da pa je ta kongres potekel v tako lepem in tovariškem slogu, je velika zasluga naših srbskih tovaršev, še posebej pa organizacijskega odbora, ki so neumorno in požrtvovalno delali dolge mesece, da je končno ta silni kongresni stroj srečno stekel in brezhibno deloval vseh šest dni.

France Šušteršič

VPRAŠANJA

Vesoljska ladja se radialno oddaljuje od zemlje s konstantnim pospeškom 10 msek^{-2} . Kako daleč pride v 10 letih, če je začetna hitrost enaka nič? Pri računanju upoštevaj specialno relativnostno teorijo! Potovanje traja 10 let za opazovalca v ladji. Kako dolgo traja za zemeljskega opazovalca? *Ivan Vidav*

Dana je zvezna pozitivna funkcija $f(x)$, ki ni na nobenem delnem intervalu konstantna in ima le končno število maksimov in minimov. Pri tem naj bo največji relativni minimum manjši od najmanjšega relativnega maksima.

Naj bosta a_k in b_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, zaporedji realnih števil. Tvorimo zaporedje funkcij $G_n(x)$ takole: $G_1(x) = a_1 f(x) + b_1$, $G_2(x) = a_2 |G_1(x)| + b_2$, in splošno $G_{n+1}(x) = a_n |G_n(x)| + b_n$. Kakšnim pogojem morajo ustrezati števila a_k in b_k , da doseže funkcija $G_n(x)$ največje število realnih ničel? Določi spodnjo in zgornjo mejo tega števila! *J. Ušan, Vršac*

1 m visoko nad vodoravno podlago je nameščen točkast izotropen izvir enobarvne rentgenske svetlobe. Z njo hočemo obsevat 1 dm³ neke snovi, ki jo v obliki tanke plasti porazdelimo po podlagi. Razpolovna debelina snovi, to je debelina tiste plasti, ki zaradi absorpcije oslabi pravokotno prehajajoči svetlobni tok na polovico prvotne vrednosti, meri pri uporabljeni rentgenski svetlobi 0,8 mm. Snov in podlaga sta takšna, da te svetlobe nič ne razpršujeta, ampak jo samo absorbirata. Če hočemo, da bo snov učinkovito obsevana, to se pravi, da se bo v njej absorbiral velik delež rentgenskega svetlobnega toka, jo moramo na pameten način porazdeliti. Pod izvirom, kjer je svetlobni tok najgostejši, bomo naredili plast bolj debelo, v večji oddaljenosti pa bolj tanko.

Kako naj bo snov porazdeljena (kakšen naj bo profil plasti), da bo obsevanje najbolj učinkovito, to se pravi, da se bo v snovi absorbiral maksimalen delež svetlobnega toka, ki ga seva izvir? Kolikšen je ta delež? Kolikšna je največja debelina plasti?

Problem je matematično dokaj preprost, vendar se nepričakovano pojavi majhna težava, ki ni samo matematična. Bralca, ki mu uspe problem do konca rešiti, prosimo, da pošlje uredništvu rešitev v roku 1 meseca po izidu te številke. Rešitev bo objavljena v naslednji številki.

Ivan Kuščer

KAKO UJETI LEVA V PUŠČAVI?

V običajnih zbirkah matematičnih nalog podobnega problema ne srečamo. No, skušajmo si zamisliti, da smo to vprašanje zastavili nekaterim namišljenim fanatičnim predstavnikom raznih področij matematike in fizike, ki so globoko prepričani, da so le metode njihove panoge univerzalno uporabne. Tedaj bi lahko dobili od njih približno takšne rešitve:

Analiza. Puščavo omejimo s kvadratom, ki ga smatramo za kvadrat enote. Naj bo premer leva enak d . Kvadrat razdelimo na štiri enake kvadrate in vsaj v enem izmed njih se nahaja lev. Ta kvadrat znova razdelimo in ta proces delitve na manjše kvadrate nadaljujemo vse dotlej, dokler ne postane stranica zadnjega kvadratka manjša od $2d$. Lev se bo sekal največ s štirimi sosednimi kvadrati, ki tvorijo kvadrat z dvojno stranico $\frac{1}{2}d$. Tedaj, če prekrijemo kvadrat s streho, leva ujamemo.

Ta metoda je uspešna le, če lev miruje. Čeprav problem ujetja leva ni v celoti rešen, pa je s tem reduciran na manj splošen primer — ujeti leva pri pogoj, da se ta giblje.

Geometrija. Opazovalec se nahaja v puščavi v okrogli kletki. Lev je izven kletke. Izvršimo inverzijo. Tedaj pride lev v kletko, a opazovalec — iz nje.

Teorija realnih funkcij. S pomočjo Peanove krivulje preslikamo puščavo na interval $[0, 1]$. Vsak lev pade pri tem na kvečjemu števno množico intervalov, ki so paroma brez skupne točke. Za te bomo rekli »da pripadajo danemu levu«. Vzemimo množico vseh racionalnih števil $\{r_k\}$, ki leže na intervalu $[0, 1]$ in jih numerirajmo: $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$. To zaporedje predstavlja povsod gosto množico na $[0, 1]$. V tem zaporedju gremo od števila do števila, dokler ne pridemo prvič do števila r_k , ki leži na intervalu, ki pripada enemu izmed levov. Tega leva imenujemo Lev_1 . Nato nadaljujemo pot po zaporedju r_{k+1} , dokler ne srečamo prvič števila r_{k_2} , ki leži na intervalu, ki pripada levu različnemu od Lev_1 ; tega leva bomo imenovali Lev_2 . Na ta način smo ustvarili regularen proces, s pomočjo katerega lahko efektivno numeriramo (brez uporabe Zermelovega aksioma) vse leve v puščavi:

$$Lev_1, Lev_2, \dots, Lev_n, \dots$$

Sedaj je treba le postaviti Lev_1 v prvo kletko, Lev_2 v drugo kletko itd.

Topologija. Vpeljimo pojem »kože«. To je množica točk, ki so robne tako za leva kot za puščavo. Nastane vprašanje, ali je lahko lev brez kože? No, tedaj mora biti oddvojen od puščave z drugim levom. To je klasičen primer breje levinje, ki jo bomo skupaj z levi v njej imenovali »posplošeni lev«. Postavimo vprašanje, ali imata lahko dva leva skupno kožo? Tedaj imajo 3 območja — puščava in 2 leva — skupno mejo in ta je nedeljiv kontinuum. Vpeljimo pojem »regularnega leva«, katerega koža ni nedeljiv kontinuum, in vzpostavimo enolično korespondenco med množicami posplošenih regularnih levov in množicami njihovih kož.

Nadalje dokažemo, da je koža dvorazsežni cikel. Po dualnem principu Aleksandrova eksistira v komplementarnem prostoru k levu dvorazsežni cikel, ki je homologen koži. To je kletka, ki vsebuje danega leva.

Kvantna fizika. S stališča fizike so zanimivi le tisti pojavi, ki so principiелно observabilni. Lev, ki ni v kletki, ni principiелно observabilen, ker tedaj počre opazovalca. Zato tak lev ne more interesirati fizika in mi se prav nič ne pregrešimo zoper znanstveno resnico, če vzamemo, da se lev že nahaja v kletki.

*

Bili so še drugi primeri (n. pr. predstavnik matematične logike je dokazal, da iz hipoteze, da je lev v kletki, ne sledi, da je $0 = 1$), pa se moramo zaradi pomanjkanja prostora zadovoljiti z gornjimi navedbami.

Iz aspirantske folklore MGU 20 let. Prevod iz časopisa
»Matematičeskoe prosvetšenie«, No. 4, 1959.

NOVE KNJIGE

France Križanič, Križem po matematiki, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.

Pred kratkim je izdala založba Mladinska knjiga v zbirki Priroda in ljudje delo Franceta Križaniča »Križem po matematiki«. Naslov knjige ne pove dosti, zato navedimo na kratko njeno vsebino. Za uvod razpravlja avtor o matematičnem jeziku in pisavi. Nato sledi kot prvi del knjige deset poglavij, ki obravnavajo števila. (1. Naravna števila; 2. Racionalna števila; 3. Realna števila; 4. Kompleksna števila; 5. Potence in koreni; 6. Polinomi; 7. Linearne enačbe; 8. Kvadratne enačbe; 9. Enačbe višjih stopenj; 10. Nedoločene enačbe.) Šest poglavij, ki tvorijo drugi del knjige, pa je posvečenih proučevanju funkcij. (11. Množice, zaporedja, vrste; 12. Analitična geometrija; 13. Racionalne in algebrske funkcije; 14. Infinitesimalni račun; 15. Določeni integral; 16. Transcendentne funkcije.) Iz teksta (str. 239) bi bilo mogoče sklepati, da šteje avtor tudi enajsto poglavje v prvi del knjige, dejansko pa je zdaj uvrščeno v drugi del. Zagovarjati je seveda mogoče obe uvrstitvi.

Vsebino knjige torej tvori v glavnem uvod v matematično analizo. Izjemo pomenita le deveto in deseto poglavje, ki sodita v algebro oziroma teorijo števil. Vendar pozitivna matematična vsebina ni poglavitna reč pri tem delu. Pisec ne želi toliko razširiti bravcu matematično znanje kot prepričati ga, da je matematika živa in mikavna reč. Ta namen skuša doseči tako, da obravnava snov historično. Novih pojmov ne uvaja neposredno v današnji obliki, ampak jim sledi od prvih zametkov do današnje podobe; spotoma pa nam razkriva vedno nove lastnosti obravnavanih elementov. Seveda je tak način obravnave zamudnejši od neposrednega, toda kakšno pisano življenje se zato odstre pred nami! Ob branju človek nima vtisa, da pasivno sprejema znanje, ampak se mu zdi, da je dejansko prisoten pri njegovem nastajanju. Zato se živo prepriča, da matematik ni zbirka formul, ki so iz ne vem kakšnih razlogov tu (navadno ljudje niti ne mislijo, da bi zanje sploh mogli biti kaki razlogi) in ki se jih je treba s trudom zapomniti; nasprotno, bralec uvidi, da je matematika zaklad znanja, ki si ga je pridobil človek v dolgih stoletjih in ki ga je mogoče še povečati. V tem pogledu so posebno značilni uvod in prvi dve poglavji; v njih izvemo, koliko truda je bilo treba, preden se je človek dokopal do stvari, ki so nam danes skoraj samoumevne.

V skladu s svojim osnovnim namenom je delo pisano poljudno, tudi kar zadeva povsem matematično, ne zgodovinsko plat. Pripoved spremljajo številni zgledi, predvsem iz fizike. Kjer bi kak dolg dokaz zameglil osnovni tok pripovedi, se mu pisec odreče in napoti bralca k popolnejšim učbenikom. Seveda bi bilo mogoče zbrati take dokaze tudi v knjigi kot dodatek, vendar rešitvi, ki se je zanjo odločil avtor, ni kaj oporekati.

Knjiga je torej pisana poljudno in — to bodi posebej poudarjeno — v imenitnem slogu. Zato jo bo s pridom in z užitkom bral vsakdo s srednješolsko izobrazbo. Koristna bo tudi dijakom zadnjih razredov srednjih šol; vsaj uvod in prvi dve poglavji bi ne smeli iti mimo njih, saj bodo malokje tako na kratko zvedeli toliko kulturne zgodovine. Delo je zanimivo tudi po čisto matematični plati, celo za bralca, ki mu je snov znana. Pri tem imam na umu predvsem šestnajsto poglavje; v njem so uvedene logaritemska, eksponentna in kotne funkcije na drugačen način, kot smo ga navajeni.

Založnica je poskrbela za solidno grafično opremo knjige. Želeli bi si le nekaj večjo razliko med navadnim in drobnim tiskom. V knjigi je nekaj tiskovnih napak, vendar niso na škodo razumevanju. Tudi cena knjige (950 din) je glede na obseg (čez 400 strani) kar zmerna.

R. Jamnik

G. A. Dirac — M. D. Stojaković: Problem četiri boje. Matematička biblioteka, 16. Beograd 1960. Strani 63.

Problem štirih barv je eden izmed znamenitih nerešenih matematičnih problemov. Gre za tole vprašanje: Na zemljevidu je dostikrat ugodno, da označimo razne predele (n. pr. države) z različnimi barvami. Če bi vsako državo pobarvali s svojo barvo, bi potrebovali toliko barv, kolikor je držav. Za preglednost zemljevida pa zadošča, če pobarvamo z različnimi barvami le dve taki državi, ki imata skupno mejo. Dve državi, ki ne mejita druga na drugo, pa smemo označiti z isto barvo. Pri takem načinu barvanja potrebujemo manjše število barv. V vseh konkretnih primerih se je pokazalo, da zadoščajo štiri barve. Iz knjige vzemo, da jo to preverjeno za vse zemljevide, na katerih je manj od 86 različnih držav (Reynolds). Heawood je l. 1890 dokazal, da je pet barv v vsakem primeru dovolj, naj bo zemljevid še tako kompliciran. Domnevamo, da so v resnici potrebne za vsak zemljevid kvečjemu štiri barve. Dokazati oziroma ovreči to domnevo je problem štirih barv. Doslej ga še nihče ni rešil, čeprav so si največji matematiki z njim belili glave. Ta problem lahko izrazimo tudi drugače, s pomočjo grafikov. Vsakemu zemljevidu pripada namreč neki grafik. Grafik je vsaka končna množica točk $A_1, A_2, \dots, A_n$, od katerih so nekatere točke med seboj povezane, druge pa ne. Grafik je natančno določen, če vemo za vsak par njegovih točk, ali sta točki med seboj povezani ali ne. Zemljevidu priredimo grafik takole: Vsaki državi pripada po ena točka grafika. Dve točki sta povezani, če imaja ustrezni državi skupno mejo. Prej smo definirali grafik popolnoma splošno. Tak grafik izhaja iz nekega zemljevida le, če je ravninski. To pomeni: Točke $A_1, A_2, \dots, A_n$ se dajo narisati na ravnini tako, da lahko povezane točke med njimi zvežemo v tej ravnini s krivuljami, ki se niti same sebe niti med seboj ne sečejo. Grafik pobarvati se pravi, vsaki točki grafika dati tako barvo, da nimata dve povezani točki nikdar skupne barve. Problem štirih barv formuliramo zdaj takole: Vsak ravninski grafik se da pobarvati z največ štirimi barvami.

Pričujoča knjiga je posvečena temu problemu in nas seznanja z zadnjimi izsledki, ki so bili v tej smeri doseženi. Oba avtorja se sama aktivno ukvarjata

s tem vprašanjem in zato vsebuje delo tudi mnogo njunih dognanj. Knjiga obravnava najprej strogo matematično formulacijo problema in definicijo grafika, o ponesrečenih poizkusih reševanja problema, nadalje vsebuje dokaz, da je pet barv v vsakem primeru dovolj. Na koncu pa je obdelan še podoben problem barvanja, če je zemljevid narisana na ploskvi z večjo sovisnostjo (n. pr. na kotaču). Presenetljivo je dejstvo, da se dá ta problem zmerom rešiti na ploskvah z večjo sovisnostjo.

Knjiga ne zahteva od bralca nobenega posebnega znanja matematike. Zato je dostopna vsem dijakom iz višjih razredov srednjih šol.

I. Vidav

Biblioteka »Materija i broj«. Zagrebško založniško podjetje »Školska knjiga« izdaja zanimivo knjižno zbirko z naslovom »Materija i broj« — Biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju. Knjižnica je namenjena predvsem učencem gimnazij in njim sorodnih šol v pomoč pri poglobljanju znanja. Zbirka bo dobro služila tudi pri izvenšolskem delu v krožkih. Moto zbirke je: »Znanje je moč«.

Prva knjižica je izšla že 1. 1957, letos pa so po daljšem presledku izšle nadaljnje tri.

I. Ignacije Smolec: Matematika i stvarnost. Naslovi poglavij so: Uvod: O matematiki kao nauci; 1. Broj kao rezultat brojenja; 2. Broj kao rezultat aritmetičke operacije; 3. Broj kao rezultat mjerjenja; 4. O osnovnim geometrijskim apstrakcijama; 5. Jedinstvo matematike; 6. Skup racionalnih brojeva; 7. O vektorima; 8. Dijalektička povezanost aritmetičkih operacija; 9. Iracionalni brojevi; 10. Približne vrednosti i računanje s njima; 11. O numeričkom računanju.

Vsakemu poglavju je dodanih nekaj vprašanj oz. nalog. Na koncu knjige je dodan obširen tolmač matematičnih pojmov in strokovnih terminov. Knjiga obsega 189 strani. Cena je 250 din.

II. Dr. Đuro Kurepa: Što su skupovi i kakva im je uloga. Poglavlja so naslednja: 1. Nekoliko osnovnih pojmova o skupovima; 2. Koliko zadan skup ima članova? Glavni ili kardinalni brojevi; 3. O preslikavanjima skupova; 4. Uređenje skupova; 5. Nekoliko vrsta skupova i funkcija.

Vsako poglavje ima na koncu naloge z rešitvami in navodili. Obseg knjige je 190 strani. Cena je 340 din.

III. Franjo Hrabak: U svijetu matematičkih pojmova i simbola.

Avtor obravnava razvoj matematičnih pojmov in simbolov po naslednjih poglavjih: Aritmetika in algebra, planimetrija in stereometrija, algebrajska analiza, trigonometrija, analitična geometrija, infinitezimalni račun. Na koncu je kronološki pregled. Knjiga obsega 116 strani, stane pa 260 din.

IV. Vranić-Serdar: Statističke metode. Poglavlja: 1. O statističkim metodama; 2. Osnovni pojmovi računa vjerojatnosti; 3. Relativni brojevi; 4. Grafičko prikazivanje; 5. Distribucija frekvencija; 6. Prosječne vrijednosti; 7. Standardna devijacija; 8. Krivulje frekvencije; 9. Metoda uzoraka; 10. Teorija korelacije; 11. Trend.

Za posameznimi poglavji so naloge, na koncu pa rezultati in razlaga. Obseg knjige je 159 strani, cena pa 320 din.

Knjižice so brošure z lepo skupno opremo. Naklada je 2000 izvodov. Zbirka je po vsebini in ceni povsem dostopna srednješolcem. Vse knjižice so v prodaji v naših knjigarnah.

Z. Bohte

Iščemo fizike!

Sprejememo več fizikov za delo v razvojnih laboratorijih in proizvodnji v redno ali honorarno zaposlitev, s polnim ali s skrajšanim delovnim časom. V pošteev pridejo tudi študentje zadnjih letnikov in absolventi. Plača po dogovoru.

Delovna področja: Proizvodnja GM števecv, razvoj polvodnikov, razvoj magnetnih materialov, električne in fizikalne meritve na radijskih sestavnih delih, razvoj visokofrekvenčne keramike itd.

Zaradi dogovora se čimprej zglasite v Razvojnem sektorju Industrije za elektrozeve, Ljubljana, Vegova 2, tel. 22-675!

INDUSTRIJA ZA ELEKTROZVEZE LJUBLJANA

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

- Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1960, T. 88, No. 3.
- Bulletin scientifique, Zagreb 1960, T. 5, No. 3.
- Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1960, št. 1—4.
- Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb 1960, T. 15, No. 1, 2.
- Gospodarski vestnik, Ljubljana 1960, št. 61—98.
- Idrijski razgledi, Idrija 1960, št. 2, 3.
- Kemija u industriji, Zagreb 1960, št. 3, 4, 5, 6.
- Nastava matematike i fizike, Beograd 1959, VIII, 1—4.
- Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1959/60, No. 11, 12, 1960/61, No. 1, 2.
- Physics Today, New York 1960, Vol. 13, No. 3, 4, 5, 6.
- Proteus, Ljubljana 1960/61, št. 1, 2, 3.
- Sodobna pedagogika, Ljubljana 1960, št. 3, 4, 5—6.
- Studii si cercetari de matematica, Cluj 1959, T. X, No. 1.
- Ukrajinskij matematičeskij žurnal, Kiev 1960, T. XII, No. 1, 2.
- Uspehi fizičeskikh nauk, Moskva 1960, T. LXXI, Vyp. 3.
- Uspehi matematičeskikh nauk, Moskva 1960, T. XV, Vyp. 4, 5.
- Varilna tehnika, Ljubljana 1960, IX, št. 2, 3.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro-račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod oznacbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 240 din, posamezna številka 60 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-73-5-1884.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina za leto 1958 znaša 480 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-73-3-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na čekovni račun $\frac{600-70}{3-207}$.

Dopise pošiljajte in list naročate na naslov: