



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA

1960

VII. št. 3

VSEBINA

Članki

	Stran
Moore-Smithova konvergenca (Z. Bohte)	97
Vertikalni kratkoperiodični Seizmograf Hilles »Stuttgart« (V. Ribarič)	100
Maserji (S. Poberaj)	108
O elektronih v kristalih (P. Gosar)	116

Novice

Meritev magnetnega dipolnega momenta mezonov (M. Pintar)	129
Nova potrditev specialne relativnostne teorije (J. Strnad)	133
K članku »Cestne krivine« (J. Ušan)	135

Šola

Meritev gravitacijske konstante kot demonstracijski poskus (S. Pahor, J. Strnad, R. Korbar)	138
--	-----

Domače vesti

Tekmovanje mladih matematikov v Beogradu	142
--	-----

CONTENTS

Articles

	Page
On Moore-Smith's Convergence (Z. Bohte)	97
Vertical Short-Period Seismograph Hiller »Stuttgart« (V. Ribarič)	100
Masers (S. Poberaj)	108
Electrons in Crystals (P. Gosar)	116

News

Measurement of the Magnetic Moment of the Muon (M. Pintar)	129
New Confirmation of the Special Theory of Relativity (J. Strnad)	133
Remark about Road Curvatures (J. Ušan)	135

School

Measurement of the Gravitational Constant as a Demonstration Experiment (S. Pahor, J. Strnad, R. Korbar)	138
---	-----

Home News

Competitions of Young Mathematicians in Beograd	142
---	-----

MOORE-SMITHOVA KONVERGENCA

ZVONIMIR BOHTE

Pojem limite srečamo v analizi skoraj na vsakem koraku, a ne vedno v isti obliki. Najprej spoznamo najosnovnejši in najpreprostejši primer limite — limito zaporedja. Pri funkcijah naletimo na limito, ki je splošnejša, a še vseeno podobna prejšnji. Integralni račun pa nas privede na povsem svojevrsten limitni proces, ki nastopa pri definiciji določenega integrala, ločne dolžine, ploščine itd. Vsi ti primeri se dajo načelno prevesti na limito zaporedja. Možno pa je tudi definicijo limite posplošiti tako, da zajame vse te in še druge primere limite, ki se pojavljajo v matematiki (topologiji, funkcionalni analizi itd.). Posplošitev je možna na več načinov. V tem članku si bomo ogledali posplošeno definicijo limite, ki sta jo postavila matematika E. H. Moore in H. L. Smith v začetku tega stoletja (1915).

Oglejmo si najprej tri tipične primere limite.

a) Zaporedje $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ je funkcija, ki je definirana na množici naravnih števil. Vsakemu naravnemu številu — indeksu — pripada člen zaporedja. Členi so urejeni tako, da večjemu indeksu pripada poznejši člen zaporedja. Limita je definirana takole: Zaporedje je konvergentno in ima limito A , če eksistira k vsakemu številu $\varepsilon > 0$ tak indeks n , da je $|A_p - A| < \varepsilon$ za vsak $p \geq n$. Vsi nadaljnji členi od A_n naprej se od limite razlikujejo za manj od ε . To dejstvo na kratko zapišemo v obliki $A = \lim A_n, n \rightarrow \infty$.

b) Vzemimo sedaj neko funkcijo $f(x)$, ki je definirana na intervalu (a, β) . Naj bo a neka točka tega intervala. Število A je limita funkcije $f(x)$, ko gre $x \rightarrow a$, če pripada vsakemu pozitivnemu številu ε tako število $\delta > 0$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, kakor hitro je $|x - a| < \delta$. V tem primeru zapišemo podobno: $A = \lim f(x), x \rightarrow a$. Limita funkcije se razlikuje od limite zaporedja in je od nje splošnejša. Funkcijo $f(x)$ lahko smatramo za zaporedje, pri katerem pa indeksi niso samo naravna števila, ampak vsa števila intervala (a, β) . V tem zaporedju je člen tem poznejši, čim bližji je argument številu a .

c) Bolj komplicirana pa je limita pri definiciji določenega integrala. Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Ta interval razdelimo z vmesnimi točkami na n delnih intervalov z dolžinami $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Natančna spodnja meja funkcije $f(x)$ na k -tem delnem intervalu naj bo m_k . Tvorimo spodnjo vsoto $s_n = \sum m_k \delta_k$. Pravimo, da je določen integral limita te vsote, če narašča število delnih intervalov preko vsake meje tako, da gre dolžina vsakega delnega intervala proti nič. To limito označimo z A . Po definiciji je A limita zaporedja spodnjih vsot, če ustreza poljubnemu $\varepsilon > 0$ tako število $\delta > 0$, da je $|s_n - A| < \varepsilon$, če so le vsi $\delta_k < \delta$. Tudi tu zapišemo na kratko

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n m_k \delta_k, \quad \delta_k \rightarrow 0.$$

V tem primeru so členi zaporedja spodnje vsote, indeksi tega zaporedja pa so vse možne delitve intervala $[a, b]$. Čim gostejša je delitev, tem poznejši členi so v zaporedju.

Iz vseh teh primerov limite vidimo, da je zanjo bistvena nekakšna usmerjenost členov zaporedja, pri čemer pa je narava členov in indeksov, katerim ti pripadajo, postranskega pomena.

V zvezi z Moore-Smithovo definicijo limite si moramo najprej ogledati pojem usmerjene množice. Naj bo M množica elementov $a, b, c, \dots$. Ta množica je delno urejena, če eksistira med nekaterimi elementi relacija »večji«, ki jo označimo z znakom $\rightarrow$, z naslednjimi lastnostmi:

1. $a \rightarrow a$ velja za vsak $a \in M$ (simetričnost).
2. Iz $a \rightarrow b$ in $b \rightarrow a$ sledi $a = b$.
3. Iz $a \rightarrow b$ in $b \rightarrow c$ sledi $a \rightarrow c$ (tranzitivnost).

Namesto » a je večji od b « pravimo tudi » a sledi elementu b « ali » a je naslednik elementa b «. Če je relacija definirana za vse elemente množice, t. j. če lahko na osnovi te relacije primerjamo poljubna dva elementa, potem je množica urejena.

Kadar ima delno urejena množica M še lastnost:

4. K poljubnima elementoma $a, b \in M$ eksistira v M tak element c , da je $c \rightarrow a$ in $c \rightarrow b$,

imenujemo množico M usmerjena množica. Zadnja lastnost pomeni, da lahko vsakemu paru elementov iz M najdemo skupnega naslednika, četudi elementov para med seboj ne moremo primerjati.

Preprost zgled za usmerjeno množico je množica vseh naravnih števil. Če uredimo člene po velikosti, je to trivialen primer usmerjene množice. Lahko pa relacijo $\rightarrow$ definiramo takole: Število b sledi za številom a , če je b večkratnik števila a :

$$b \rightarrow a, \text{ če je } b = ka, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ta relacija množico naravnih števil le delno uredi. Hitro se lahko prepričamo, da je vsem štirim pogojem zadoščeno. V pogoju 4., na primer, je c skupni večkratnik števil a in b .

Vzemimo sedaj neko poljubno usmerjeno množico M . Elementi te množice naj bodo $a, b, c, \dots$. Na tej množici naj bo definirano zaporedje $A_a, A_b, A_c, \dots$ t. j. neki zakon, ki vsakemu elementu $a \in M$ priredi realno število A_a . Elemente množice M imenujemo potem indekse tega zaporedja.

V takem posplošenem zaporedju definiramo limito takole: Zaporedje A_a , $a \in M$, je konvergentno in ima limito A , če je možno najti po predpisu poljubnega pozitivnega števila ε tak indeks $n \in M$, da je

$$|A_p - A| < \varepsilon, \text{ za vsak } p \rightarrow n.$$

Neenačba $|A_p - A| < \varepsilon$ je v veljavi za vsak indeks p , ki sledi indeksu n v smislu relacije, ki je definirana v M .

Brez dokaza naj omenim, da je tudi v tem primeru Cauchyjev pogoj potreben in zadosten za konvergenco zaporedja. Zaporedje zadošča Cauchy-

jevemu pogoju, če eksistira po predpisu poljubnega $\varepsilon > 0$ tak indeks $n \in M$ da je $|A_p - A_q| < \varepsilon$ za vsak par indeksov p in q , za katera velja $p \geq n$ in $q \geq n$.

Hitro se lahko prepričamo, da konvergentno zaporedje ne more imeti dveh različnih limit. Pa vzemimo, da ima zaporedje A_n , $n \in M$, dve različni limiti A in B . Po definiciji limite lahko najdemo k vsakemu $\varepsilon > 0$ indeks $n \in M$ tako, da je $|A_p - A| < \varepsilon$ za vsak $p \geq n$. Ravnotako pa eksistira indeks $m \in M$ da je $|A_p - B| < \varepsilon$ za vsak $p \geq m$, ker je tudi B limita. Zaradi pogoja 4. pa lahko najdemo v množici M tak element q , da je $q \geq n$ in $q \geq m$. Potem sta za vsak $p \geq q$ neenačbi $|A_p - A| < \varepsilon$ in $|A_p - B| < \varepsilon$ obe izpolnjeni. Tako dobimo

$$|A - B| \leq |A_p - A| + |A_p - B| < 2\varepsilon$$

Ta neenačba pa je v protislovju s predpostavko, da sta A in B različni števili. Torej je limita kvečjemu ena sama.

Posplošena limita, ki smo si jo ogledali, ima skoraj vse običajne lastnosti limite. Neko važno lastnost pa pri tej posplošitvi le izgubimo. Ker je množica indeksov le delno urejena, ni treba, da je poljubna podmnožica tudi usmerjena množica. Torej ne moremo trditi, da je poljubno podzaporedje konvergentnega zaporedja tudi konvergentno. Če pa je podzaporedje tudi usmerjeno in je konvergentno, pa nima vedno iste limite kot celo zaporedje. To nam bo pokazal zgled.

Vzemimo sedaj naše tri primere za limito in se prepričajmo, da gre v vseh teh primerih za Moore-Smithovo konvergenco.

a) Pri zaporedju $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ je množica indeksov množica vseh naravnih števil. Očitno je ta množica usmerjena množica, če so števila urejena po velikosti. V tem primeru se navadna in posplošena definicija limite popolnoma ujemata.

b) Množica indeksov je v drugem primeru ves interval (a, β) z izjemo točke a . Ta množica postane usmerjena množica, če relacijo $\geq$ definiramo s predpisom: Element y sledi elementu x , $y > x$, če je $|y - a| < |x - a|$. Potem naj pomeni $y \geq x$, da je bodisi $y > x$ bodisi $y = x$. Indeksi so torej urejeni po oddaljenosti od točke a . Pri tem ne moremo primerjati le dveh takih indeksov, ki sta enako oddaljena od a , ležita pa na nasprotnih straneh. Lahko se prepričamo o veljavnosti vseh štirih pogojev za usmerjene množice. Definicijo limite funkcije, ki smo jo navedli v primeru b), lahko sedaj povemo takole: A je limita funkcije $f(x)$, ko gre $x \rightarrow a$, če lahko najdemo po predpisu poljubnega $\varepsilon > 0$ tak indeks $x \in M$, da je $|f(y) - A| < \varepsilon$ kakor hitro je $y \geq x$. Če vzamemo $|x - a| = \delta$, potem je zgornja neenačba v veljavi za vsak $y \in M$, da je le $|y - a| \geq \delta$. Potrebno je seveda, da je a stekališče množice M . Limita funkcije je torej poseben primer posplošene limite. S podobnim razmišljanjem bi lahko obdelali tudi limito funkcije več spremenljivk.

c) Nekoliko natančneje pa si bomo ogledali definicijo določenega integrala. Spodnje vsote, ki pripadajo raznim delitvam intervala $[a, b]$, tvorijo zaporedje, katerega indeksi so vse možne delitve intervala. Delitve bomo označevali z grškimi črkami $\alpha, \beta, \dots$. Vsaka delitev je določena s točkami, ki razdelijo interval $[a, b]$ na manjše dele. Vse delitve tvorijo usmerjeno množico, če se dogovorimo: delitev α sledi za delitvijo β (oz. delitev α je nadaljevanje delitve β), v znakih $\alpha \geq \beta$, če delitev α vsebuje kot delitvene točke vse točke delitve β . Tako definirana relacija $\geq$ zadošča vsem štirim pogojem. Na primer, pogoj 4. zahteva, da je možno najti k poljubnima delitvama α in β delitev γ ,

ki je nadaljevanje obeh delitev α in β . Delitev γ je vsaka delitev, ki vsebuje vse delitvene točke obeh delitev α in β .

Vsaki delitvi α pripada spodnja vsota A_α . Spodnje vsote konvergirajo k limiti A , če je možno najti po predpisu poljubnega $\varepsilon > 0$ tako delitev ν , da je $|A_\alpha - A| < \varepsilon$ za vsako delitev π , ki je nadaljevanje delitve ν . Če je $f(x)$ zvezna funkcija, spodnje vsote res konvergirajo k določenemu integralu. V prejšnji definiciji (ε, δ) je treba delitev ν izbrati tako, da so dolžine vseh delnih intervalov manjše od δ .

Na tem zgledu se lahko prepričamo, da ni treba, da tudi vsako usmerjeno podzaporedje konvergira k isti limiti. Vzemimo namreč tako usmerjeno podzaporedje delitev intervala, pri katerem pa ostane neki podinterval, na katerem funkcija $f(x)$ ni konstantna, ves čas nadaljevanja delitev nedeljen. Potem to podzaporedje konvergira, limita pa ni določeni integral funkcije $f(x)$ od a do b .

Tudi v tem primeru gre torej za Moore-Smithovo konvergenco.

Literatura:

Kelley: General Topology, New York (1955).

Fih tengolc: Kurs diferencialnega i integralnogo iščilenija. Tom. II., Moskva (1948).

VERTIKALNI KRATKOPERIODIČNI SEIZMOGRAF HILLER »STUTT GART«

VLADIMIR RIBARIČ

Astronomsko-geofizikalni institut v Ljubljani

1. UVOD

Seizmograf je naprava, ki ob potresu zabeleži gibanje tal z določeno povečavo in tako omogoči razpoznavanje in obdelavo posameznih značilnih potresnih valov ali njihovih skupin. Seizmograf je pravzaprav nihalo, katerega osnovni del je gibljiva utež, ki pa mora biti pritrjena tako, da se lahko premika le v določeni smeri. Ob premiku tal med potresom povzroča vztrajnost uteži njeno relativno gibanje glede na okolico. To gibanje seizmograf preslika na registrirni papir ali film.

Med seizmološke naprave prištevamo razen seizmografov še seizmoskope, katerih zgodovina sega nazaj v čase starih kitajskih kultur, saj pripisujejo prvo takšno napravo Kitajcu Čang Hengu v letu 132 po našem štetju. Kasneje se je pojavilo še nekaj podobnih seizmoskopov, ki so bili občutljivejši od človeških čutil; te naprave so pokazale tudi smer najmočnejših potresnih sunkov. Šele ob koncu 19. stoletja so se na Japonskem in v Italiji, ki spadata med izrazito potresna področja, pojavili prvi »klasični« seizmografi. Na Japonskem so zgradili seizmograf po zamislih F. Omorija, v Italiji pa so zgradili podobne naprave G. Vicentini, G. Agamennone in drugi seizmologi. S seizmografom tipa Vicentini, ki danes seveda že zdavnaj ne ustreza več zahtevam seizmologije, je bila dve leti po velikem ljubljanskem potresu opremljena leta 1897 tudi ljubljanska seizmološka postaja. Te potresomere so kmalu nasledili sodobnejši, saj je teorija seizmoloških instrumentov, ki se je vzporedno hitro razvijala, pokazala velike hibe primitivnih nihali, s katerimi so seizmologi takrat raz-

polagali. Kmalu so na zahtevo teorije tudi v praksi zgradili potresomere, ki so se pogojem teorije zelo približali. Aparati, ki so bili konstruirani v tem obdobju, se pogostoma uporabljajo še dandanes, saj imajo, tudi če jih primerjamo z najsodobnejšimi seizmografi, še vedno svojevrstne prednosti. Omenimo naj predvsem seizmografe E. Wiecherta, C. Mainke, A. de Quervaina in A. Piccarda, ki še vedno delujejo na številnih svetovnih seizmoloških postajah. Wiechertov astatični horizontalni seizmograf z 200-kilogramsko utežjo, ki je postavljen v kleti ljubljanskega observatorija na Golovcu, tudi danes zadovoljivo beleži potrese. Ta seizmograf beleži premike zemeljskih tal v vodoravni smeri in to za dve komponenti hkrati: sever—jug in vzhod—zahod. Osajen papir drsi na enakomerno vrtečem se valju pod konicama dveh peres. Njihovi ostrini puščata v sajnati plasti svoje sledi, točna ura, povezana s seizmografom, pa daje vsako minuto časovno znamenje na seizmogram. To uro vsakodnevno primerjajo z natančnimi časovnimi signali posebnih radijskih oddajnikov; na tak način ne samo kontroliramo uro, ampak določujemo tudi popravke za časovna znamenja na seizmogramu. S tem pa je možna natančna časovna opredelitev pojava potresnega vala in seveda tudi časovna primerjava z drugimi seizmološkimi postajami. Premiki tal, ki nastanejo ob prehodu longitudinalnih, transverzalnih in površinskih potresnih valov, se zaradi vztrajnosti uteži nihala s pomočjo prenosnega mehanizma povečani preneso na osajeni papir. Lastna nihanja seizmografskega nihala se duše v dušilni napravi ali amortizerju. Dušenje je potrebno, ker nas zanima le slika gibanja tal, ne pa sestavljenega gibanja tal in seizmografa.

Mimo prednosti, med katere spada predvsem takojšnja preglednost seizmograma neposredno po potresu in pa ceneno vzdrževanje opazovanj, ima vsak seizmograf, ki nihanja mehanično zapisuje, veliko pomanjkljivost: v ležajih se pri gibanju seizmografske uteži pojavlja znatno trenje. Trenje nastane seveda tudi zaradi drsenja pisalke po osajenem papirju. Ob velikem trenju se občutljivost seizmografu zelo zmanjša, kar se odraža v majhnem številu zabeleženih šibkih potresov. Zaradi tega so konstruktorji bili prisiljeni zgraditi seizmografe z utežmi do 21 ton, da bi pri dani periodi seizmografa dosegli čim večjo povečavo. Za seizmografe z mehanično registracijo in lastno periodo 2 sekund, kar ustreza zahtevam potresomercov za bližnje potrese, moramo vzeti nihalo z maso

$$m = \frac{1}{200} \cdot V^2 \text{ kg,}$$

kjer je V statična povečava seizmografa.

Pri bližnjih potresih (do nekaj sto kilometrov) prevladujejo potrebni valovi s krajšimi periodami. Če ima seizmograf lastno periodo približno enako periodam potresnih valov, dosežemo lahko z izkoriščanjem pojava resonance zelo velike povečave. Slabo pa je potem to, da je povečava močno odvisna od dolžine periode in da zato zapis v splošnem ni veren.

Da je trenje velika ovira za instrumentalno seizmologijo, je kmalu opazil Rus B. Golicev, ki je že leta 1910 zgradil seizmograf z galvanometrično-optično registracijo. V tem seizmografu se pri relativnem gibanju mase glede na okvir inducirajo v posebnih tuljavah tokovni sunki; ti odklanjajo tuljavo zrcalnega galvanometra. Žarek, ki se odbija od zrcalca, riše po prehodu skozi lečje sled po fotografskem papirju.

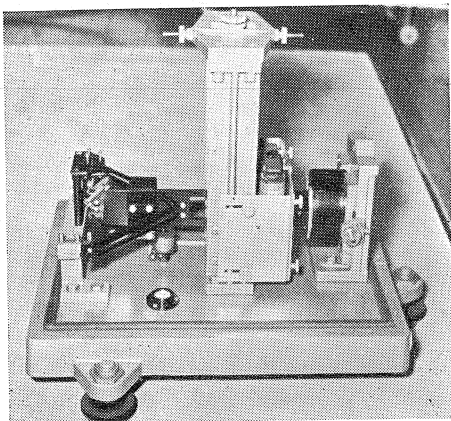
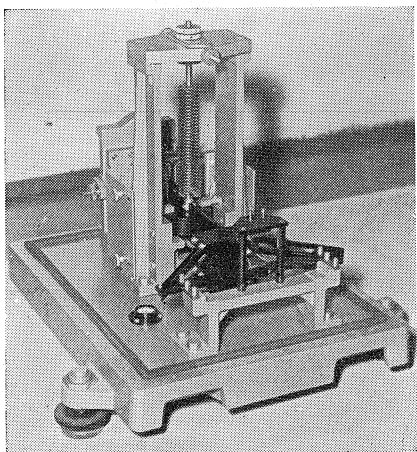
Prednost takšnega seizmografa je predvsem v skoraj popolni eliminaciji trenja, zaradi česar so lahko začeli graditi seizmografe z razmeroma lahкими

nihali. Robustne konstrukcije klasičnih nihalo so s tem odpadle. V novem času so predvsem v Združenih državah, Sovjetski zvezi in Nemčiji razvili mnogoštevilne seizmografe, ki skoraj vsi izkoriščajo zgoraj omenjeni princip indukcije.

Ponekod obstaja še vrsta seizmografov s sestavljeno mehanično-optično registracijo, pri čemer mehanični vzvodi, povezani z nihalom, služijo le za premikanje majhnega zrcala, ki posreduje optični prenos žarka k fotograf-skemu papirju. Omenimo naj, da v svetovni mreži seizmoloških postaj še zdaj dela seizmograf s tovrstno registracijo, ki so ga zgradili pred nekaj desetletji v Ljubljani po zamisli seizmologa Albina Belarja. Postavljen je na češkoslovaški postaji Cheb in ima naziv Belar-Zlatorog.

2. HILLERJEV SEIZMOGRAF

Predvsem nas bo zanimal opis seizmografa, ki je postavljen v Astro-nomsko-geofizikalnem observatoriju na Golovcu pri Ljubljani. To je Hillerjev



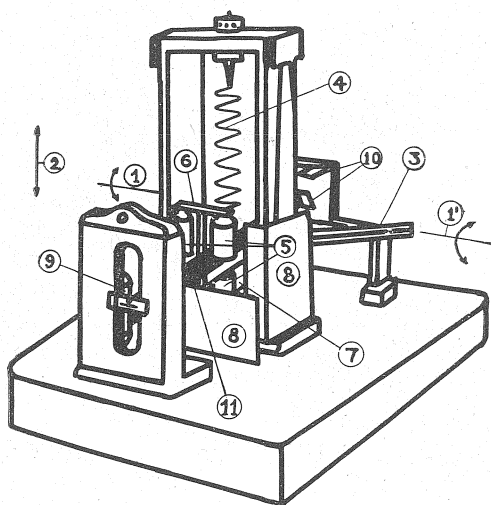
Sl. 1. Kratkoperiodični vertikalni seizmograf Hiller »Stuttgart«

kratkoperiodični elektromagnetni seizmograf tipa »Stuttgart« z galvano-metrično-optično registracijo. Namenjen je za beleženje vertikalnih tresljajev. Obstajajo še horizontalni seizmografi istega tipa; dvojica horizontalnih seizmo-grafov in pa vertikalni seizmograf tvorijo tako imenovani homogeni kratko-periodični komplet. Nabava takšnega kompleta naj bi bila nadaljnji korak v izgradnji ljubljanske seizmološke postaje.

Seizmografi te vrste so postavljeni na nekaterih postajah v zahodni Nemčiji in v avstrijskem geofizikalnem observatoriju Cobenzl pri Dunaju. Ver-tikalni Hillerjev seizmograf je nihalo z eno stopnjo svobode; njegova naravna perioda nihanja je astazirana, to je: umetno povečana s posebno magnetno na-pravo. Vodoravna os tega nihala je sestavljena iz dveh 0,05 mm debelih jeklenih vzmeti, nihalo samo pa visi na navpični vijačni vzmeti, ki je pritrjena na ogrodje seizmografa. Ta vzmet je iz posebne ameriške zlitine »Isoelastic«, ki s spremem-bami temperature v normalnem »sobnem« intervalu ne menja svoje dolžine niti elastičnih svojstev. Ročica vodoravno ležečega nihala nosi na svoji osi še kovinsko

utež, težko približno 1 kg. Prijemališče uteži ali pa zgornje prijemališče vijačne vzmeti se dasta s pomožnimi napravami spreminjati. Indukcijska naprava v seizmografu je enostavna: štiri zaporedno vezane tuljave, kakor tudi močan podkvast magnet, so trdno pritrjene na ogrodje seizmografa, medtem ko je del magneta, ki je sestavljen iz dveh železnih armaturnih ploščic, pritrjen simetrično zgoraj in spodaj na gibljivo ročico nihala. Spremembe v magnetnem pretoku, ki nastanejo ob relativnem gibanju nihala glede na okolico, povzročajo v tuljavah spreminjajoče se električne napetosti. Te tokovne sunke je potrebno zabeležiti, da bi dobili seizmogram, to je sliko gibanja tal.

Dušenje seizmografa je magnetno; plošča iz aluminija, ki je pritrjena na prostem koncu nihala, se lahko svobodno giblje med poloma dveh permanentnih magnetov iz jekla Alnico. Vrtinčasti tokovi, ki nastanejo v plošči med njenim gibanjem, zavirajo gibanje nihala. Medsebojni položaji te plošče in magnetov se lahko spreminjajo, tako da je mogoče doseči razne stopnje dušenja, do aperioidičnega.



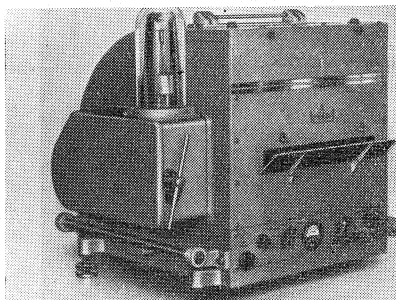
Sl. 2. Vertikalni seizmograf Hiller »Stuttgart«

Legenda: 1—1' vodoravna vrtilna os, 2 smer nihanja seizmografa, 3 jeklene vzmeti, 4 vijačna vzmet, 5 indukcijske tuljave, 6 zgornja železna armaturna ploščica, 7 pol magneta, 8 ščitniki iz mehkega železa, 9 pol dušilnega magneta, 10 zrcalci, 11 nihalo.

Lastna perioda nihala znaša okoli 0,5 sekunde; z magnetno astazirno napravo se da perioda povečati do 1,5 sekunde, torej približno do vrednosti periode potresnih valov, ki je značilna zlasti za bližnje potrese.

Za umerjanje je konstruktor pritrdil na okvir nihala še majhen elektromagnet, s katerim nihalo seizmografa lahko odklonimo iz mirovne lege. Za to potrebujemo priročno napravo, s katero lahko pošljemo skozi tuljavo elektromagneta različno močne tokove. Ti tokovi morajo biti tolikšni, da povzročijo le majhne nagibe vodoravno ležčega nihala (do 40"), ki so sorazmerni električnemu toku. S pomočjo teodolita in posebne skale ter dveh ogledal, izmed katerih je eno na nihalu, drugo pa na ogrodju seizmografa, lahko določimo konstanto proporcionalnosti, ki jo rabimo pri računanju drugih seizmografskih konstant.

Registrirna naprava, ki je del seizmografa, je zelo enostavna. V njej se nahaja galvanometer, boben s fotografskim papirjem, ki ga poganja časovni mehanizem, in pa sistem zrcal in leč, ki služijo za prenos svetlobnega žarka od izvora do fotografskega papirja. V tuljavah seizmografa inducirani tokovni sunki zavrtje tuljavico zrcalnega galvanometra v registrirni napravi. Svetlobni žarek, ki iz stalnega točkastega izvora svetlobe vpada na zrcalce galvanometra, dobi na ta način vlogo pisala, katero s pomočjo optičnih prenosov ž ravnimi zrcali in cilindrično lečo prenese sliko gibanja tal na fotografski papir. Ta se enakomerno vrti na valju, ki ga goni časovni mehanizem. Dodatna naprava v tem mehanizmu počasi nagiba svetlobni žarek, tako da dobimo na valju sled v obliki vijajnice. Vsa naprava je povezana z observatorijsko uro, ki vsako minuto prekine za dve sekundi električni tok izvora svetlobe, s tem pa kasneje omogoči časovno opredelitev pojava potresnih valov. Pri Hillerjevi registrirni napravi lahko s posebnim menjalnikom uravnavajo tudi obodne hitrosti valja



Sl. 3. Zunanost registrirne aparature. Na levi se vidi pogonski mehanizem. Galvanometer je postavljen v dnu zadnjega dela naprave

v intervalih od 15 do 30 mm in od 60 do 120 mm na minuto. V ljubljanski seizmološki postaji uporabljajo hitrost 60 mm na minuto, kar ravno še omogoča zahtevano natančnost čitanja časovnih opredelitev potresnih valov do 0,1 sekunde natančno.*

Omenimo naj še zrcalni galvanometer, ki je postavljen v registrirni napravi. Gre za Mollov galvanometer tipa O z lastno nedušeno periodo 1,5 sekunde, notranjim uporom 80 ohmov in z možnostjo zunanjega priključka od 1 do 400 ohmov; seizmograf s svojim notranjim uporom 160 ohmov je torej prilagojen pogojem galvanometra. Napetost približno 10^{-6} V daje v razdalji enega metra odklon žarka za 1 mm.

3. OPREDELITEV KONSTANT SEIZMOGRAFA

Seizmograf ustreza pogoju, ki ga je podal B. Golicev in ki pravi, da morata biti lastna perioda nihala in galvanometra v nedušeni stanju enaki. Pri obratovanju je dušenje kakor pri seizmografu tako tudi pri galvanometru na meji aperiodičnosti.

* Za registracije uporabljajo bromovo-srebrni registrirni papir z izredno občutljivostjo. Dimenzije papirja so 920×300 mm.

Oglejmo si nekaj osnovnih pojmov iz teorije seizmografa! Iz mehanike poznamo enačbo, ki velja za gibanje fizičnega ali kakega podobnega nihala:

$$J \ddot{\Theta} + b_1 \dot{\Theta} + C_1 \Theta = 0. \quad (1)$$

Pri tem je Θ kotni odklon, J pa vztrajnostni moment nihala.

Člen $b_1 \dot{\Theta}$ predstavlja momente sil, ki se pojavljajo zaradi dušenja, člen $C_1 \Theta$ pa predstavlja momente sil, ki vračajo nihalo v ravnotežni položaj. Enačbo (1) lahko pišemo v drugi obliki

$$\ddot{\Theta} + 2\varepsilon \dot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0, \quad (2)$$

kjer sta $2\varepsilon = b_1/J$ in $\omega_0^2 = C_1/J$. Vidimo, da je ω_0 krožna frekvenca nedušenega nihala, torej $\omega_0 = 2\pi/T_0$, če je T_0 ustrezna lastna perioda. V mejnem primeru aperioidičnega dušenja je $\varepsilon = \omega_0$ in enačba (2) se tedaj glasi:

$$\ddot{\Theta} + 2\omega_0 \dot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0. \quad (3)$$

Pri umerjanju seizmografa odklonimo z elektromagnetom nihalo za majhen kot Θ_0 in nihalo spustimo. Nadaljnje gibanje opišemo s tisto rešitvijo enačbe (3), ki zadošča začetnima pogojema $\Theta = \Theta_0$ in $\dot{\Theta} = 0$ pri $t = 0$. Ta rešitev je:

$$\Theta = \Theta_0 e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t). \quad (4)$$

Za kotni odklon galvanometriške tuljave φ velja podobna enačba kot (3):

$$\ddot{\varphi} + 2\omega_0 \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = -K \dot{\Theta}. \quad (5)$$

Upoštevali smo, da je frekvenca galvanometra enaka frekvenci nihala, in da je tudi galvanometer aperioidično dušen. Člen na desni strani enačbe predstavlja vrtilni moment, ki deluje na tuljavico zaradi toka. Ta moment je sorazmeren kotni hitrosti $\dot{\Theta}$, s katero se giblje nihalo. Sorazmernostni faktor K , v katerem se skrivajo konstante tuljavnice in prej omenjenih indukcijskih tuljav, se imenuje prenosni faktor.

Ko uvrstimo izraz za $\dot{\Theta}$ iz enačbe (4) v (5), dobimo

$$\ddot{\varphi} + 2\omega_0 \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = K \Theta_0 \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} \quad (6)$$

Rešitev te enačbe (6), ki zadovoljuje pogoja $\varphi = 0$ in $\dot{\varphi} = 0$ za $t = 0$, je:

$$\varphi = \frac{1}{6} K \Theta_0 \omega_0^2 t^3 e^{-\omega_0 t} \quad (7)$$

Odklon tuljavnice doseže prvi maksimum $\varphi_{\max}$, ko je prvič spet $\dot{\varphi} = 0$, to je pri $t \varphi_{\max} = 3/\omega_0$, kar daje

$$\varphi_{\max} = \frac{9}{2e^3} \cdot \frac{K \Theta_0}{\omega_0} = 0,224 \cdot \frac{K \Theta_0}{\omega_0} \quad (8)$$

Ta enačba omogoča določitev prenosnega faktorja K , če smo izmerili Θ_0 in $\varphi_{\max}$. Ta določitev predstavlja glavno nalogo pri umerjanju seizmografa.

Za računanje dinamične povečave V_d seizmografa za potresne valove z različnimi periodami lahko vzamemo enačbo B. Golicina

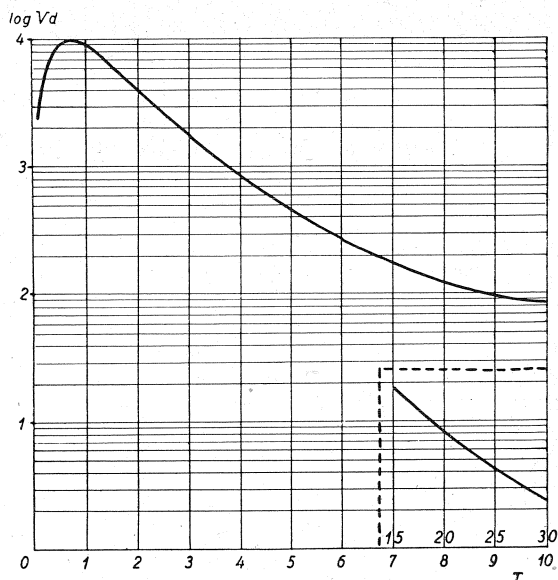
$$V_d = \frac{K A T_0}{\pi l} \cdot \frac{u}{(1 + u^2)^2} \quad (9)$$

A je pri tem razdalja med zrcalom galvanometra in registrirnim papirjem. Dalje je l reducirana dolžina neastaziranega, svobodno nihajočega seizmografa, u pa razmerje med periodo potresnega vala (T) in periodo astaziranega seizmografa (T_0), torej

$$u = \frac{T}{T_0}$$

V_d doseže največjo vrednost pri $u_{\max} = 1/\sqrt{3}$, namreč

$$V_{d \max} = 0,1034 \frac{K A T_0}{l} \quad (10)$$



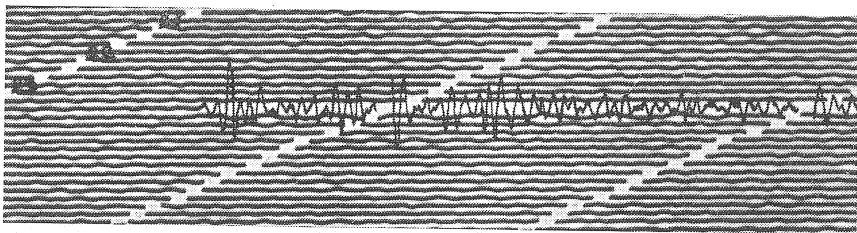
Sl. 4. Dinamično povečanje Hillerjevega seizmografa V_d v odvisnosti od lastne periode gibanja tal T ob potresu

Pri določanju konstant našega seizmografa smo se natanko držali klasičnih pogojev Golicina in smo regulirali nihalo na lastno periodo 1,5 sekunde, ki se ujema z lastno periodo galvanometra. Izkazalo se je, da je največja možna povečava seizmografa 10 150-kratna, in to za potresni val s periodo okoli 0,75 sekunde. Za periodo dve sekund je povečava 4000-kratna.

V začetku članka omenjena enačba kaže, da bi klasičen seizmograf z enako povečavo moral imeti maso 80 ton, kar bi bilo seveda povezano z mnogimi nevšečnostmi tehničnega značaja. Krivuljo povečanja na osnovi enačbe (9) si lahko ogledamo na sl. 4. Opazimo, da dobimo veliko povečanje le v območju kratkoperiodnih potresnih valov.

4. ZAKLJUČEK

Vertikalni Hillerjev seizmograf je pri beleženju bližnjih potresov že pokazal svoje odlične lastnosti. Zaradi velike občutljivosti aparature, ki je zabeležila tudi izredno šibke potrese, je navidezno porastlo število potresov v naših pokrajinah. Tako je na primer v prvem tromesečju letos registrirala ljubljanska seizmološka postaja 243 potresov, beograjska pa, ki je opremljena s klasičnimi seizmografi, le 61 potresov. V to število so seveda všteti tudi oddaljeni potresi. Poudariti velja zlasti pomembno vlogo Hillerjevega seizmografa pri registraciji potresnih valov, ki so prešli skozi Zemljino jedro. Iz antipodnega področja naše Zemlje namreč pogosto zabeležijo potrese, ki imajo svoj izvor v tektonsko aktivnih pasovih ob otočju Tonga in Fidži v Pacifiku. Pod določenimi pogoji je s tem seizmografom mogoče zabeležiti tudi zelo oddaljene jedrske eksplozije.



Sl. 5. Seizmogram: Začetek registracije potresa v Agadiru dne 29. februarja 1960 ob 23^h 45^m 35,1^s po svetovnem času, zabeležen na Hillerjevem seizmografu. Epicenter je bil oddaljen 2700 km

Nadaljnja odlika Hillerjevega seizmografa je velika stabilnost njegovih konstant, ki se v teku enega leta, odkar seizmograf neprekinjeno teče, praktično niso spremenile. Tudi delo na seizmografu in možnost njegove kontrole sta dokaj enostavna. Svojstva te naprave bi bila skoraj popolna, če bi seizmograf imel še avtomatično napravo, ki bi v primeru močnejših potresnih sunkov ojačala svetlost izvora svetlobe; zdaj se namreč dogaja, da so ob močnih potresih deli seizmograma podekspozirani, ker svetlobni žarek prehitro riše po fotografskem papirju. Ko bodo zgradili še takšno napravo, ki pa ne bo smela vplivati na sistem seizmograf-galvanometer, se bo praktična vrednost seizmografa še povečala.

Literatura:

- Golicin B.: Die elektromagnetische Registriermethode, Comtes Rendus Acad. Imp. Sciences, St. Pétersbourg, 1908.
- Savarenskij E. F. — Kirnos D. P.: Elementy sejsmologii i sejsmometrii, Gos-tehteorizdat, Moskva, 1955.
- Lojcjanskij L. G. — Lurje A. I.: Kurs teoretičeskoj mehaniki, T. II. Gostehizdat, Moskva, 1948.
- Robel F.: Die seismische Station Bensberg bei Köln, Zeit. Geophys. 25, 1959, Nr. 1.
- Preliminary Seismological Bulletin, Geophysical Institute University of Ljubljana, Jan.—Mar. 1960.
- Bulletin séismique mensuel, Institut Séismologique de Beograd, I—III, 1960.
- Askania Werke, Berlin-Friedenau: Auslieferungsliste 1525 G.

MASERJI

SAVO POBERAJ

Nuklearni institut »Jožef Stefan«

V zadnjih letih so izdelali posebne ojačevalnike in oscilatorje, ki se po svojem delovanju bistveno razlikujejo od ojačevalnikov in oscilatorjev z elektronskimi cevmi in s tranzistorji. To so tako imenovani MASER-ji (**M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation). Uporabljajo jih, vsaj za sedaj, samo v mikrovalovnem frekvenčnem območju. Z maserji moremo ojačevati signale, ki so približno 1000-krat šibkejši od signalov, ki jih še moremo ojačevati z običajnimi ojačevalniki. Nekatere vrste maserjev so uporabne kot oscilatorji z izredno frekvenčno stabilnostjo. To so »atomske ure«.

V običajnih mikrovalovnih napravah n. pr. klistronih, magnetronih in ceveh na potujoče valove se kinetična energija elektronov pretvarja v energijo mikrovalovnega polja. Pri maserjih pa mikrovalovno polje sodeluje z električno nevtralnimi atomi ali molekulami. Pri tem se notranja energija atomov ali molekul ali pa potencialna energija v magnetnem polju, ki jo imajo zaradi magnetnih momentov, pretvarja v mikrovalovno energijo. Ta proces je podoben sevanju vidne svetlobe n. pr. pri razelektrenju v plinih. Vendar pa je važna razlika med emisijo v vidnem in mikrovalovnem frekvenčnem območju. Pri optičnih frekvencah so življenjske dobe atomov v vzbujenem stanju zelo kratke ($\sim 10^{-8}$ s). Vzbujeni atomi spontano sevajo svetlobo. Vsak atom seva neodvisno od drugega in je zato sevanje nekoherentno. V mikrovalovnem frekvenčnem področju pa je spontana emisija zaradi dolgih življenjskih dob (do 10^{-2} s) vzbujenih stanj precej nevažna. Pri teh frekvencah atomi sevajo energijo, če jih k temu prisilimo. Tako prisilno ali inducirano emisijo dosežemo tako, da atome »kopamo« v mikrovalovnem elektromagnetnem polju. Valovanje, ki nastane pri prisilni emisiji, je koherentno. Pri maserjih izkoriščamo prisilno emisijo za ojačevanje signalov ali za ustvarjanje izredno monohromatskega valovanja.

Maserje delimo na dve skupini: 1. maserje na atomski ali molekulski curek, 2. maserje s trdno snovjo. Pri maserjih na curek je emitirano valovanje posledica električnih ali magnetnih dipolnih prehodov. Pri maserjih s trdno snovjo pa izkoriščamo za emisijo samo magnetne dipolne prehode.

Emitirano ali absorbirano moč izračunamo pri električnih in magnetnih dipolnih prehodih takole: Atom ali molekulo dvignemo iz nižjega na višji energijski nivo tako, da mu privedemo energijo $h\nu_{ij} = E_i - E_j$, kjer je E_i energija višjega, E_j pa nižjega nivoja. V temperaturnem ravnotežju so nižji energijski nivoji bolj zasedeni kot višji. Za $E_i - E_j \ll kT$, kjer je T temperatura snovi, je verjetnost w_{ij} za prehod z višjega nivoja i na nižji nivo j enaka verjetnosti w_{ji} za prehod iz nižjega na višji nivo. Če z q_j in q_i označimo koncentracijo atomov na nižjem in na višjem energijskem nivoju, dobimo za absorbirano moč formulo

$$P = h\nu_{ij} w_{ij} (q_j - q_i). \quad (1)$$

Emisija nastopi le pri »invertirani« zasedbi nivojev, t. j. za $q_i > q_j$.

Verjetnost w_{ij} izračunamo s teorijo časovno spremenljivih motenj. Za električne dipolne prehode dobimo*

$$w_{ij} = (2\pi^2 p_{ij}^2 / h^2) E_0^2(\nu) g_e(\nu - \nu_{ij}). \quad (2)$$

* Glej n. pr.: L. Schiff: Quantum Mechanics, II. izdaja, McGraw-Hill Book Co. 1955, str. 195.

p_{ij} je matrični element za dipolni prehod, $E_0(\nu)$ je efektivna električna poljska jakost, ν je frekvenca električnega polja, $g_e(\nu - \nu_{ij})$ pa je funkcija, ki podaja obliko resonančne krivulje. Za ozke resonančne krivulje velja

$$g_e(\nu - \nu_{ij}) = \Delta\nu/\pi [(\nu_{ij} - \nu)^2 + (\Delta\nu)^2]. \quad (3)$$

$2\Delta\nu$ je razpolovna širina resonančne krivulje.

Za magnetne dipolne prehode pa velja

$$w_{ij} = (2\pi^2 \mu_B^2 \mu_0^2/h^2) H_0^2(\nu) (S - M + 1) (S + M) g_m(\nu - \nu_{ij}). \quad (4)$$

Tu je μ_B Bohrov magneton, μ_0 induksijska konstanta, $H_0(\nu)$ pa efektivna magnetna poljska jakost. S je spin delca in M magnetno kvantno število. Za magnetne dipolne prehode velja izbirno pravilo $\Delta M = \pm 1$. Funkcija $g_m(\nu - \nu_{ij})$ je odvisna od oblike resonančne krivulje.

Če vstavimo izraza (2) in (4) v (1), dobimo za absorbirano ali emitirano moč na enoto prostornine snovi formulo

$$P = (2\pi^2 \nu_{ij} p_{ij}^2/h) E_0^2(\nu) g_e(\varrho_j - \varrho_i) \quad (5)$$

za električne dipolne prehode in formulo

$$P = (2\pi^2 \nu_{ij} \mu_B^2 \mu_0^2 h) H_0^2(\nu) (S - M + 1) (S + M) g_m(\varrho_j - \varrho_i) \quad (6)$$

za magnetne dipolne prehode.

Emisijo in absorpcijo v snovi moremo opisati tudi fenomenološko. Absorbinana moč električnega polja na enoto prostornine snovi je podana z znano relacijo $P = \text{Re}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{j}_0)$. $\mathbf{E}_0$ je efektivna električna poljska jakost v snovi, $\mathbf{j}_0$ pa je gostota efektivnega električnega toka. Snov naj ima električno prevodnost σ in kompleksno električno susceptibilnost $\chi_e(\nu) = \chi_e'(\nu) + i\chi_e''(\nu)$. Realni in imaginarni del susceptibilnosti sta funkciji frekvence polja. Za gostoto toka velja

$$\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0 + \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t}$$

Časovno spreminjanje polja naj bo podano z $\exp(-i2\pi\nu t)$. Za gostoto toka dobimo formulo $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0 + 2\pi\nu\chi_e''\varepsilon_0\mathbf{E}_0 - i2\pi\nu\chi_e'\varepsilon_0\mathbf{E}_0$. Absorbirana moč je $\sigma E_0^2 + 2\pi\nu\chi_e''\varepsilon_0 E_0^2$. Običajno se σ vključi v χ_e'' . Tukaj tega nismo naredili zato, ker nas zanima le tisti del absorbirane moči, ki se spreminja s frekvenco. Ta del je

$$P = 2\pi\nu\chi_e''(\nu)\varepsilon_0 E_0^2(\nu). \quad (7)$$

Emisijo dobimo, če je $\chi_e'' < 0$. Za snovi z magnetno susceptibilnostjo $\chi_m(\nu) = \chi_m'(\nu) + i\chi_m''(\nu)$ (feromagnetike izključimo) velja podobna formula

$$P = 2\pi\nu\chi_m''(\nu)\mu_0 H_0^2(\nu). \quad (8)$$

Za $\chi_m'' < 0$ snov oddaja energijo.

S primerjanjem izrazov (5) in (6) s (7) dobimo

$$\chi_e'' = (\pi p_{ij}^2/h\varepsilon_0) g_e(\varrho_j - \varrho_i) \quad (9)$$

in

$$\chi_m'' = (\pi \mu_B^2 \mu_0/h) g_m(S - M + 1)(S + M)(\varrho_j - \varrho_i) \quad (10)$$

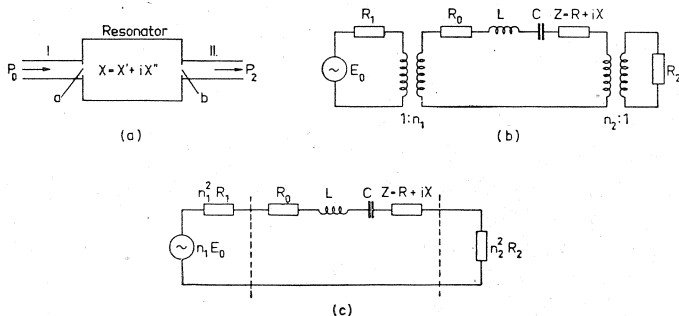
Zveza med realnim in imaginarnim delom susceptibilnosti je podana z disperzijskimi relacijami. V bližini resonančne frekvence ν_{ij} velja

$$\chi'(\nu) = \chi''(\nu_{ij}) (\nu - \nu_{ij}) / \Delta\nu, \quad (11)$$

kjer je $2\Delta\nu$ širina resonančne krivulje.

Negativne vrednosti imaginarnega dela susceptibilnosti imamo samo takrat, kadar so višji energijski nivoji bolj zasedeni kot nižji. Načine, kako dosežemo večjo zasedenost višjih energijskih nivojev kot nižjih, bomo opisali pozneje. Pred tem pa si oglejmo maserje s čisto električnega stališča.

Maser je shematično narisan na sl. 1a. Valovanje moči P_0 , ki ga želimo ojačiti, prihaja po valovodu I skozi režo a v resonator. V resonatorju je snov



Slika 1

z električno ali magnetno susceptibilnostjo $\chi(\nu) = \chi'(\nu) + i\chi''(\nu)$. Ojačeno valovanje gre deloma skozi režo b v valovod II. Na sl. 1b vidimo nadomestno vezje za tak maser. Izvor signala s frekvenco $\nu = \omega/2\pi$, efektivno napetostjo E_0 in močjo P_0 je generator (n. pr. antena) z notranjo upornostjo R_1 . Resonatorju ustreza v nadomestni shemi nihajni krog z induktivnostjo L , kapacitivnostjo C in upornostjo R_0 . Vpliv snovi na razmere v resonatorju opišemo z navidezno upornostjo $Z = R + iX$. Zvezo med R in $\chi''(\nu)$ ter X in $\chi'(\nu)$ bomo izpeljali pozneje. R_2 je upornost potrošnika (n. pr. upornost naslednjega ojačevalnika). Sklopitveni reži a in b nadomeščata transformatorja s prestavnima razmerjema $1:n_1$ in $n_2:1$. Zaradi lažjega razmotrivanja transformiramo vezje na sl. 1b v vezje na sl. 1c.

Zanima nas moč P_2 , ki se sprošča na upor R_2 , če je moč signala na vходу P_0 . Iz sl. 1c sledi, da je efektivni tok, ki ga žene napetost $n_1 E_0$

$$J = \frac{n_1 E_0}{(n_1^2 R_1 + n_2^2 R_2 + R_0 + R) + i(\omega L - \frac{1}{\omega C} + X)} \quad (12)$$

Za moč $P_2 = n_2^2 R_2 J_0 J_0^*$ dobimo

$$P_2 = n_2^2 R_2 \frac{n_1^2 E_0^2}{(n_1^2 R_1 + n_2^2 R_2 + R_0 + R)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C} + X)^2} \quad (13)$$

Maksimalna moč, ki jo generator lahko odda resonatorju, je $P_0 = E_0^2 / 4 R_1$. Z vstavljanjem vrednosti E_0^2 iz te enačbe v (13) in z deljenjem števca in imenovalca z $\omega_0^2 L^2$, kjer je $\omega_0^2 = 1/LC$ kvadrat krožne resonančne frekvence praznega resonatorja, dobimo

$$P_2 = \frac{4 P_0}{Q_a Q_b} \frac{1}{\left(\frac{1}{Q_a} + \frac{1}{Q_b} + \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_s} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{X}{\omega_0 L} \right)^2} \quad (14)$$

V tej formuli je $Q_0 = \omega_0 L / R_0$ kvaliteta praznega resonatorja, $Q_a = \omega_0 L / n_1^2 R_1$ in $Q_b = \omega_0 L / n_2^2 R_2$ pa sta zunanji kvaliteti resonatorja. Količina $Q_s = \omega_0 L / R$ je odvisna od lastnosti resonatorja in ojačevalne snovi.

Z množenjem števca in imenovalca z J_0^2 sledi $Q_s = \omega_0 L J_0^2 / R J_0^2$ ali

$$Q_s = \omega_0 \left(\frac{\text{Povprečna vskladiščena energija}}{\text{V snovi absorbirana moč}} \right) \quad \omega = \omega_0.$$

S pomočjo znane relacije za energijo magnetnega polja in formule (8) dobimo

$$Q_s = \frac{2 \pi \nu_0 \int_{\text{resonator}} \mu_0 H_0^2 dV}{2 \pi \nu_0 \int_{\text{snov}} \mu_0 \chi_m'' H_0^2 dV}$$

Če χ_m'' ni funkcija kraja, je $Q_s = 1/\chi_m'' \eta_m$. Faktor $\eta_m = \int_{\text{snov}} H_0^2 dV / \int_{\text{resonator}} H_0^2 dV$ je 1, če je resonator napolnjen s snovjo. Pri pravkar izpeljani formuli za Q_s smo privzeli, da je $\chi_e'' = 0$. Za $\chi_m'' = 0$ in $\chi_e'' \neq 0$ je $Q_s = 1/\chi_e'' \eta_e$, kjer je $\eta_e = \int_{\text{snov}} E_0^2 dV / \int_{\text{resonator}} E_0^2 dV$. Iz Q_s dobimo za R formulo

$$R = \omega_0 L \chi'' \eta \quad (15)$$

Najti moramo še zvezo med X in χ' . Poiščemo jo takole: Zaradi snovi v resonatorju se resonančna frekvenca $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$ praznega resonatorja spremeni v $\nu' = \omega' / 2\pi$. Izraz v drugem oklepaju v imenovalcu formule (14) smemo v bližini ω_0 pisati v obliki $2(\omega - \omega_0) / \omega_0 + X / \omega_0 L = 2(\omega - \omega' / \omega_0)$. Naj bo $\chi_e' = 0$ in $\chi_m' \neq 0$. Zaradi snovi z realnim delom magnetne susceptibilnosti χ_m' , se L spremeni za dL in ω_0 za $d\omega$. Iz $\omega_0^2 = 1/LC$ dobimo $d\omega = -(\omega_0^2/2) dL/L$ ali $d\omega = -(\omega_0/2) dL J_0^2 / L J_0^2$. Produkt $dL J_0^2$ je sprememba magnetne energije v resonatorju zaradi prisotnosti snovi, $L J_0^2$ pa je v praznem resonatorju nakopičena magnetna energija. Torej veljajo zveze $dL J_0^2 = \int_{\text{snov}} \chi_m' \mu_0 H_0^2 dV$ in $L J_0^2 = \int_{\text{resonator}} \mu_0 H_0^2 dV$. Za spremembo resonančne frekvence sledi $d\omega = -(\omega_0/2) \chi_m' \eta_m$. Za $\chi_m' = 0$ in $\chi_e' \neq 0$ velja $d\omega = -(\omega_0/2) \chi_e' \eta_e$. Ker je $\omega' = \omega_0 + d\omega$ sledi

$$X = \omega_0 L \chi' \eta. \quad (16)$$

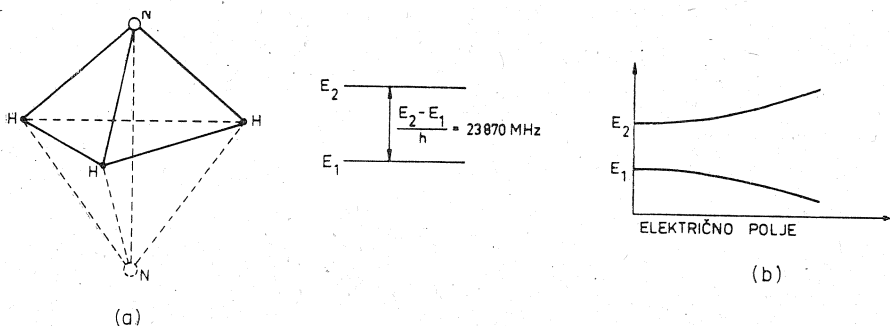
Zgoraj smo privzeli, da je $\chi_e' = 0$ pri $\chi_m' \neq 0$ in obratno. To seveda ni res. Za snovi, pri katerih izkoriščamo za emisijo energije električne dipolne prehode je χ_m res tako majhen, da ga smemo zanemariti. χ_e' pa za snovi, pri katerih izkoriščamo za emisijo magnetne dipolne prehode, ni majhen. Naše formule se

nič ne spremene; če spremembo resonančne frekvence zaradi χ'_e vključimo kar v ω_0 . Ker ima snov tudi določeno električno prevodnost σ , skrijemo izgube zaradi prevodnosti v Q_0 .

Za moč P_2 dobimo končno formulo

$$P_2 = \frac{4 P_0}{Q_a Q_b} \frac{1}{\left(\frac{1}{Q_L} + \chi'' \eta \right)^2 + \left(2 \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} + \chi' \eta \right)^2} \quad (17)$$

kjer je $1/Q_L = 1/Q_a + 1/Q_b + 1/Q_0$. V formuli (17) lahko χ' izrazimo z (11). Če je frekvenca ν valovanja, ki ga ojačujemo, enaka $\nu_0 (1 - \chi' \eta/2)$, je drugi člen v imenovalcu formule (17) enak nič. Prvi člen v imenovalcu je zelo majhen za $\chi'' < 0$ in pri dovolj velikih vrednostih Q_L in $|\chi'' \eta|$. Ojačitev, ki je podana z razmerjem P_2/P_0 , more za velike vrednosti Q_L in $|\chi' \eta|$ postati izredno velika. Ker je P_0 zaradi spontane emisije v ojačevalni snovi in zaradi toplotnega šuma v valovodih in resonatorju vedno od nič različen, nam v tem primeru naprava zaniha kot oscilator.



Slika 2

MASER NA AMONIAK

Oglejmo si maser na curek amoniakovih molekul. Za ojačevanje ga ne uporabljajo, ker dela samo pri točno določeni frekvenci 23 870 MHz. Zelo dobro pa se obnese kot generator izredno monohromatskega valovanja z navedeno frekvenco.

Strukturo amoniakove molekule vidimo na sl. 2a. Dušikov atom ima dve ekvivalentni legi. Zaradi tunelskega efekta prehaja skozi ravnino trikotnika, ki ga tvorijo vodikovi atomi. Frekvenca prehajanja je 23 870 MHz. Prava valovna funkcija je linearna kombinacija valovnih funkcij za vsako ravnovesno lego posebej. Dvakrat degenerirani vibracijski nivoji dušika se zaradi tunelskega efekta razcepijo na nivoja, ki ustrezata simetrični in antisimetrični kombinaciji prvotnih valovnih funkcij. Če je molekula v električnem polju, je razcep funkcija električnega polja. Na sl. 2b je podana energija molekul v električnem polju za oba stanja, v katerih se molekula lahko nahaja. V nehomogenem električnem polju potujejo molekule na višjem energijskem nivoju v področje s slabšim poljem, one na nižjem pa v področje z močnejšim poljem. Ločiti jih moremo na primer v električnem polju kvadrupolne leče.

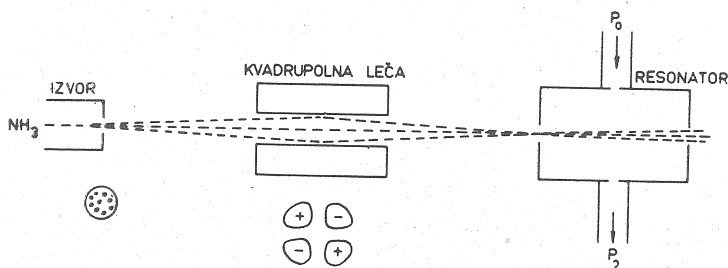
Shema maserja na amoniak je na sl.3. Amoniak uhaja skozi majhne luknjice iz posode, v kateri je tlak 1 tor, v posodo s tlakom 10^{-5} tora. Molekularski curek gre skozi kvadrupolno lečo. V njej se molekule z nižjo notranjo energijo odklanjajo od osi, molekule z višjo notranjo energijo pa se približujejo k osi leče. Po preletu skozi lečo gre curek molekul na višjem energijskem nivoju skozi resonator, ki je uglasen na približno 23 870 MHz. V resonator dovajamo slabotno valovanje s frekvenco blizu 23 870 MHz. To valovanje povzroča prisilno emisijo amoniakovih molekul, ki emitirajo valovanje z »inverzijsko« frekvenco 23 870 MHz.

Ker v resonator prihajajo samo molekule v vzbujenem stanju, je ϱ_i v (9) enak nič. Za $\nu = \nu_{ij} = 23\,870$ MHz dobimo za χ_e''

$$\chi_e'' = - \frac{\pi p_{ij}^2}{h \epsilon_0} g_e(o) \varrho_i \quad (18)$$

Za moč, emitirano iz enote prostornine curka sledi iz (5) ali (7)

$$P_z = - \frac{2 \pi^2 \nu_{ij} p_{ij}^2}{h} E_0^2(\nu_{ij}) g_e(o) \varrho_i \quad (19)$$



Slika 3

Pri že zgrajenih maserjih je celokupna iz curka emitirana moč približno 10^{-9} W. Širina inverzijske črte amoniaka je okrog 200 Hz. Pri dovolj veliki koncentraciji ϱ_i in velikem Q_L naprava zaniha kot oscilator, ne da bi od zunaj dovajali valovanje. Pri termostatisiranih resonatorjih je frekvenčna stabilnost maserjev na amoniak približno $1:10^{10}$.

MASERJI S TRDNO SNOVJO

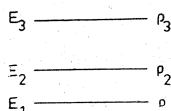
Pri maserjih s trdno snovjo ojačujemo signale s prisilnimi magnetnimi dipolnimi prehodi med Zeemanovimi nivoji v paramagnetnih kristalih. V temperaturnem ravnotežju je zasedba dveh sosednjih Zeemanovih nivojev podana z relacijo

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \exp \left(- \frac{E_2 - E_1}{k T} \right),$$

kjer je $E_2 - E_1 = g \mu_B B$ razlika energij obeh nivojev. Za običajne paramagnetne snovi je g približno 2. V navedeni formuli je B gostota magnetnega polja.

Če spinski sistem spravimo iz temperaturnega ravnotežja in ga nato prepustimo samega sebi, se po določenem relaksacijskem času T vrne v prvotno stanje. Za T velja $1/T = 1/T_1 + 1/T_2$, kjer je T_1 longitudinalni, T_2 pa transversalni relaksacijski čas. Z longitudinalnim relaksacijskim časom opišemo sodelovanje spinskega sistema s kristalno mrežo. Spin sicer neposredno ne sodeluje s kristalno mrežo, pač pa »čuti« njeno toplotno gibanje zaradi sklopitve spin-vrtilni moment atoma. Na vrtilni moment pa vpliva lokalno kolebanje električnega polja zaradi nihanja mreže. Transverzalni relaksacijski čas je posledica izmenjav energije med samimi spini. Ta izmenjava nastane zaradi lokalnih kolebanj magnetnega polja spinskega sistema. Čas T_2 podaljšamo s tem, da snov magnetno razredčimo. To naredimo tako, da določeno število paramagnetnih atomov v kristalu nadomestimo z diamagnetnimi atomi. Lokalna kolebanja električnega in magnetnega polja nastanejo zaradi toplotnega gibanja kristalne mreže. S hlajenjem kristala zmanjšamo to gibanje, zato se časa T_1 in T_2 podaljšata. Najdalji čas T , ki so ga dosegli, je približno 10^{-2} s.

Pri maserjih s trdno snovjo izkoriščamo dva ali tri Zeemanove nivoje. Maser z dvema nivojema deluje takole: Snov moremo izkoristiti za ojačevanje signalov, če je zgornji Zeemanov nivo bolj zaseden kot spodnji. Večjo zasedenost zgornjega nivoja dosežemo s tem, da damo snov v resonator, ki je uglasen na frekvenco $\nu_{21} = (E_2 - E_1)/h$ in je v magnetnem polju. V resonator



Slika 4

dovajamo valovanje iz posebnega generatorja, ki se imenuje črpalka. Frekvenco črpalke periodično spreminjamo. Najnižja in najvišja frekvenca morata biti daleč od resonančne frekvence ν_{21} . Elektromagnetno polje je v resonatorju močno le tedaj, ko je frekvenca črpalke blizu resonančne frekvence resonatorja. Zaradi absorpcije energije iz valovanja prehajajo spini na višji energijski nivo. Pri dovolj hitrem spreminjanju frekvence črpalke postane zgornji nivo bolj zaseden kot spodnji. Ko se frekvenca črpalke oddalji od resonančne frekvence resonatorja, polje v resonatorju praktično izgine. Zasedenost zgornjega nivoja začne padati. Padanje je tem počasnejše, čim daljši je relaksacijski čas T . Podaljšamo ga s hlajenjem snovi v tekočem heliju. Če takoj nato, ko izgine polje črpalke v resonatorju, dovedemo v resonator šibak signal s frekvenco ν_{21} , ta povzroči prehode iz višjega na nižji nivo. Pri tem se ojači. Očitno je, da ojačevanje traja samo tako dolgo, dokler zasedenost zgornjega nivoja preveč ne pade. Zaradi periodičnega spreminjanja frekvence črpalke se igra ponavlja. Kot ojačevalna snov se dobro obnese magnezijev oksid ali pa z žarki gama obsevani kremen.

Čeprav so maserji z dvema spinskima nivojema enostavni, je njihova uporaba omejena, ker delajo samo v pulzih. To povzroča modulacijo ojačenega signala. Oblika modulacije je odvisna od kvalitete resonatorja, relaksacijskega časa T in od nekaterih manj važnih efektov. Take maserje uporabljajo v radijski astronomiji.

Trajno ojačevanje dosežemo pri maserjih s tremi Zeemanovimi nivoji. Energijske nivoje spinskega sistema vidimo na sl. 4. Snov mora biti tako

izbrana, da razdalje med nivoji niso enake (vpliv notranjih magnetnih polj). Tudi pri teh maserjih damo snov v resonator, ki je v magnetnem polju. V temperaturnem ravnotežju je $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3$. Z dovajanjem valovanja s frekvenco $\nu_{31} = (E_3 - E_1)/h$ iz črpalke dosežemo nasičenje zgornjega nivoja ali drugače povedano: oba nivoja postaneta enako zasedena. Relaksacijski čas za prehode iz tretjega na drugi nivo mora biti mnogo daljši od relaksacijskega časa za prehode iz drugega na prvi, ki mora biti kratek zato, da je zasedenost drugega nivoja vedno približno enaka oni v temperaturnem ravnotežju. Če v resonator prihaja valovanje s frekvenco $\nu_{32} = (E_3 - E_2)/h$, povzroča spinske prehode iz tretjega na drugi manj zasedeni nivo. Valovanje se pri tem ojači. Ker je tretji nivo stalno nasičen, je ojačevanje trajno. Resonator mora biti tako konstruiran, da ima dve resonančni frekvenci. To se doseže z različnima načinoma nihaja elektromagnetnega polja signala in črpalke.

Kot ojačevalna snov se dobro obnese $K_3Co(CN)_6$ z 0,5 % dodatkom kroma namesto kobalta. Najbolje pa se je obnesel rubin (Al_2O_3) z 0,05 % dodatkom kroma, ki zamenja aluminij. Take rubine izdelujejo umetno.

Maserji s trdno snovjo delajo samo pri temperaturi tekočega helija. Razlogov za to je več: 1. Samo pri nizkih temperaturah so relaksacijski časi dovolj dolgi, da lahko dosežemo nasičenje zgornjega nivoja že pri moči črpalke enega watta. 2. Samo pri nizkih temperaturah se more ustvariti dovolj velika razlika v zasedenosti nivojev. 3. Pri nizkih temperaturah je toplotni šum nizek.

Maserji nimajo nizkega šuma samo zaradi nizke temperature, pri kateri delajo, ampak predvsem zato, ker elektromagnetno polje signala sodeluje z električno nevtralno snovjo. S tem odpade šum, ki nastane zaradi statističnih kolebanj elektronskega toka v elektronskih cevah in tranzistorjih.

Maserji s trdno snovjo se kot oscilatorji običajno ne uporabljajo, ker je njihova frekvenčna stabilnost mnogo slabša kot pri maserjih na atomski ali molekulski curek. Njihova prednost pred maserji na curek pa je v tem, da moremo frekvenco, pri kateri ojačujemo, spreminjati v določenih mejah s spreminjanjem gostote magnetnega polja. Pri maserjih na curek moramo delati samo pri čisto določenih frekvencah, ki so značilne za atome ali molekule v curku.

Zaradi resonatorja je frekvenčni pas, v katerem ojačujemo, ozek. Zato mnogo delajo na razvoju maserjev na potujoče valove. Pri takih maserjih se snov nahaja v posebno konstruiranih valovodih. Pri dosedanjih izvedbah je ojačitev manjša kot pri maserjih z resonatorjem.

Prednost maserjev pred vsemi drugimi vrstami ojačevalnikov je njihov izredno nizek šum (faktor šuma je približno 0,05 db). Kljub temu pa je njihova uporaba zelo omejena. Zaradi komplicirane konstrukcije so dragi, pogonski stroški pa so zaradi hlajenja s tekočim helijem veliki. Poleg tega pa delajo samo v mikrovalovnem frekvenčnem področju. Čeprav so to velike pomankljivosti, so postali nepogrešljivi pri sodobnih radijskih teleskopih in pri velikih radarskih napravah.

Literatura:

1. J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes: Phys. Rev., **95**, 2822 (1955).
2. N. Bloembergen: Phys. Rev., **104**, 324 (1955).
3. H. Scovil, G. Feher, H. Seidel: Phys. Rev., **105**, 762 (1957).
4. A. Mc Whorter, J. Meyer: Phys. Rev., **109**, 312 (1958).
5. G. Feher, J. P. Gordon: Phys. Rev., **109**, 221 (1958).
6. J. C. Helmer: J. Appl. Phys., **30**, 118 (1959).
7. E. O. Schultz-Du Bois: BSTJ, **38**, 27 (1959).

O ELEKTRONIH V KRISTALIH

P. GOSAR

Nuklearni institut »J. Stefan«

1. UVOD

Kristali so zelo velike molekule. Zgradba take molekule je geometrijsko pravilna. Kristal si vedno lahko mislimo sestavljen iz enakih kosov, položenih eden k drugemu. Najmanjši kos kristala, ki zadostuje, da iz njega sestavimo z zlaganjem cel kristal, ne da bi bilo treba pri tem posamezne kose vrteti, se imenuje *osnovna celica*. V osnovni celici je normalno samo nekaj atomov, večkrat en sam. Izberimo si v eni izmed osnovnih celic poljubno točko, na primer enega izmed ogljišč, in nato poiščimo v vseh ostalih celicah, ki sestavljajo kristal, tej točki ustrezne točke! Tako dobimo sistem točk, ki tvorijo vozlišča trodimenzionalne mreže. Ta mreža se imenuje *kristalna mreža*. Kristalna mreža je pri različnih kristalih različna. Glede na njeno zgradbo ločimo razne kristalne sisteme.

Atomska jedra so vezana na določene »mirovne« lege v osnovnih celicah. Jedra nihajo okoli teh mirovnih leg. Ta nihanja so tem močnejša, čim višja je temperatura kristala. Vendar je amplituda nihanj v primeri z dimenzijami osnovne celice vedno zelo majhna. Tudi pri absolutni ničli jedra ne mirujejo popolnoma.

Elektroni so, v nasprotju z atomskimi jedri, le slabo lokalizirani v kristalu ali pa sploh ne. To velja posebej za elektrone zunanjih atomskih lupin, to je valenčne elektrone. Za te si moramo misliti, da se razlivajo po vsem kristalu in da ne pripadajo več posameznim atomom.

Po kvantni teoriji popišemo lego elektronov v kristalu z valovno funkcijo $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots)$, v kateri so spremenljivke koordinate $\mathbf{r}_i$ posameznih elektronov. Produkt $\psi^* \psi$ je mera za verjetnost, da najdemo pri meritvi tako razporeditev posameznih elektronov v kristalu, kot jo določajo izbrane krajevne koordinate $\mathbf{r}_i$. Valovna funkcija mora zadoščati Schrödingerjevi enačbi za kristal $\mathcal{H} \psi = E \psi$, kjer je $\mathcal{H}$ Hamiltonov operator za energijo in E celotna energija elektronov.

Hamiltonov operator je diferencialni operator in ima za elektrone v kristalu naslednjo obliko:

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) + \sum_{i, \beta} \frac{-Z_\beta e^2}{4\pi \epsilon_0 r_{i\beta}} + \frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \quad (1)$$

Izraz za sumacijskim znakom v prvem členu predstavlja operator kinetične energije za i -ti elektron. x_i, y_i in z_i so komponente krajevnega vektorja $\mathbf{r}_i$. $\hbar$ je Planckova konstanta h deljena z 2π in m masa elektrona. Seštevanje se vrši po vseh elektronih. Naslednji člen je izraz za potencialno energijo elektronov v polju jeder, ki sestavljajo kristal. Z_β je zaporedno število jedra β , e elementarni naboj, ϵ_0 influenčna konstanta in $r_{i\beta}$ razdalja med i -tim elektronom in β jedrom. Seštevanje se vrši po vseh elektronih in vseh atomskih jedrih. Zadnji člen v Hamiltonovem operatorju predstavlja medsebojno potencialno energijo elektronov, r_{ij} je razdalja med i -tim in j -tim elektronom. $\frac{1}{2}$ pred sumacijskim

znakom je zato, ker vsak par elektronov nastopi pri seštevanju dvakrat in bi to dalo dvojno energijo medsebojne interakcije. — Tu smo pa zanemarili spinske efekte.

Schrödingerjeva enačba v gornjem zapisu je veljavna le, če se atomska jedra v kristalu ne gibljejo. To vemo, da ni res. Vendar so amplitude in frekvence nihanj atomskih jeder dovolj majhne, da smemo pri študiju energijskih nivojev elektronov skoraj vedno to gibanje zanemariti.

2. ENOELEKTRONSKE VALOVNE FUNKCIJE

Problem več teles ni strogo rešljiv. Pomagati si moramo s približnimi rešitvami. Postopamo na zelo podoben način kot pri računanju energijskih nivojev in valovnih funkcij za atome z več elektroni. Valovno funkcijo za več elektronov izrazimo s primernimi valovnimi funkcijami za posamezne elektrone. Tako moremo na primer pisati valovno funkcijo za dva elektrona $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ kot produkt dveh enoelektronskih valovnih funkcij $\psi_1(\mathbf{r}_1)$ in $\psi_2(\mathbf{r}_2)$, namreč $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2)$. Ta zapis ni prav dober, ker vemo, da mora biti $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ antisimetrična funkcija glede na zamenjavo krajevnih koordinat elektronov. Tako lastnost pa ima naslednja funkcija: $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_1(\mathbf{r}_2) \psi_2(\mathbf{r}_1)$ ali v determinatni obliki

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{r}_1), \psi_1(\mathbf{r}_2) \\ \psi_2(\mathbf{r}_1), \psi_2(\mathbf{r}_2) \end{vmatrix} \quad (2)$$

Determinante te vrste se imenujejo Slaterjeve determinante. Če imamo N elektronov, ima tudi Slaterjeva determinanta, ki predstavlja valovno funkcijo za te elektrone, po N vrst in stolpcev. Take determinante nam služijo pri reševanju valovne enačbe za kristal. Zapis valovne funkcije v obliki produkta ali determinante ima to slabo stran, da pri tem že vnaprej zanemarimo vsako medsebojno korelacijo pri gibanju posameznih elektronov.

Enoelektronske valovne funkcije moramo določiti tako, da Slaterjeva determinanta čim bolje reši Schrödingerjevo enačbo. Pokaže se, da morajo enoelektronske valovne funkcije zadoščati enačbi, ki je popolnoma analogna Schrödingerjevi enačbi za en elektron, le da v njej nastopa namesto pravega potenciala poseben efektivni potencial $V(\mathbf{r})$. Efektivni potencial ni potencial v klasičnem smislu, ker vsebuje poleg elektrostatskega potenciala elektrona v polju atomskih jeder in povprečnega potenciala v polju vseh ostalih elektronov še člene, ki so posledica čisto valovno mehanskih efektov (to so členi, ki predstavljajo izmenjalno energijo). Diferencialna enačba za enoelektronsko valovno funkcijo $\psi_i(\mathbf{r})$ se torej glasi:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{r}) \right] \psi_i(\mathbf{r}) = E_i \psi_i(\mathbf{r}) \quad (3)$$

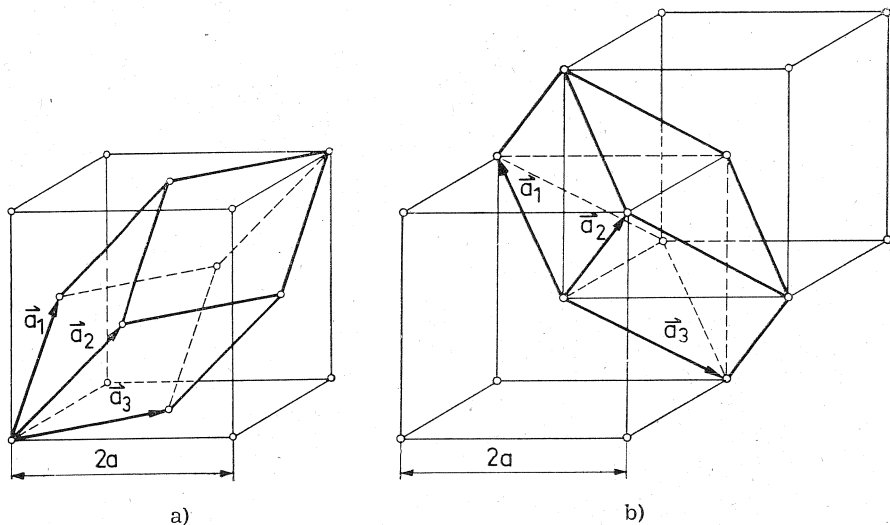
kjer je E_i energija i -tega elektrona. Celotna energija elektronov v kristalu je vsota energij za posamezne elektrone.

O lastnostih rešitev enačbe (3) lahko povemo precej, ne da bi jo bilo treba zares rešiti. $V(\mathbf{r})$ se v kristalu periodično ponavlja in to se prav značilno odraža v obliki rešitev.

Potencial $V(\mathbf{r})$ se ponavlja v osnovnih celicah kristala. To se pravi, da je $V(\mathbf{r})$ v ekvivalentnih točkah osnovnih celic enak. Vektorji, ki vežejo ekvivalentne točke različnih osnovnih celic, se imenujejo *mrežni vektorji*. Vsak mrežni vektor $\mathbf{R}$ lahko pišemo v obliki

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \quad (4)$$

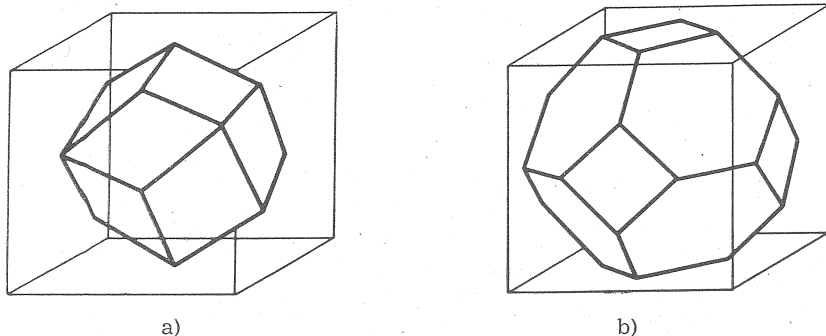
kjer so n_1, n_2 in n_3 cela števila in $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$ *osnovni vektorji* kristalne mreže. Poglejmo si nekaj primerov! V enostavni kubični mreži ima vsaka osnovna celica po en atom, osnovni vektorji so pa trije med seboj pravokotni vektorji enake dolžine. Na primer: $\mathbf{a}_1 = (a, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, a, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, a)$. Oblika in lega osnovne celice ni enolično določena. Tu imamo precej izbire. Najbolje je izbrati osnovno celico tako, da po svoji zunanji obliki in notranji razporeditvi atomov kaže vse simetrijske lastnosti kristala. V primerih, kjer je v osnovni celici po en sam atom, konstruiramo tako osnovno celico na naslednji način:



Slika 1

Atomi so vedno v središču celice. Izbrani atom zvezemo s sosednjimi atomi z daljicami, ki jih nato sečemo pravokotno z ravninami ravno na polovični razdalji med sosednjima atomoma. Te ravnine izrežejo okoli izbranega atoma kos prostora poliedrske oblike. Ta prostor predstavlja celico s simetrijskimi lastnostmi kristalne mreže. Lahko je pokazati, da je takó konstruirana celica res osnovna celica in da torej ne vsebuje več ekvivalentnih točk. Njen volumen je $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Pri enostavnem kubičnem kristalu je torej osnovna celica kocka z volumnom a^3 . Osnovne celice, ki ohranijo vse simetrijske lastnosti kristalov, se imenujejo Wigner-Seitzove celice. Oglejmo si še dva primera, namreč ploskovno centrirani in prostorsko centrirani kubični kristal. Osnovni vektorji so narisani na slikah 1 a in 1 b v kubičnih celicah s stranico $2a$. Osnovni celici sta lahko poliedra, katerih robove tvorijo osnovni vektorji, kot je to pokazano na sliki. Bolje pa je, da konstruiramo Wigner-Seitzove celice, ki so za ta primera pokazane na slikah 2 a in 2 b. Volumen osnovne celice za ploskovno centrirano kocko je $2a^3$ in za prostorsko centrirano kocko $4a^3$. Wigner-Seitzove celice zgube deloma svoj pomen pri kristalih, ki imajo v osnovni celici po dva

ali več atomov. Vendar so še porabne, kot kaže primer kristala NaCl, ki je po strukturi ploskovno centrirana kocka. Osnovno celico NaCl lahko predočimo s poliedrom na sliki 3, kjer je v sredini celice na primer atom natrija in na šestih ogliščih po en atom klora. Teh šest klorovih atomov pripada seveda deloma tudi sosednjim celicam.

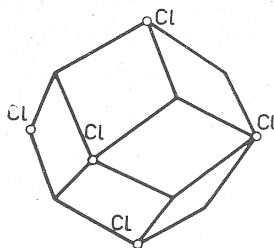


Slika 2

Izbira oblike osnovne celice je zelo važna pri računu valovnih funkcij za kristal. S primerno izbiro celice lahko računanje izredno poenostavimo.

Efektivni kristalni potencial $V(\mathbf{r})$ ostane nespremenjen pri spremembi krajevnega vektorja za poljuben vektor $\mathbf{R}$. Vpeljimo operator translacije $\mathcal{T}(\mathbf{R})$, ki je definiran z enačbo:

$$\mathcal{T}(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (5)$$



Slika 3

kjer je $\psi(\mathbf{r})$ poljubna funkcija. Iz lastnosti potenciala $V(\mathbf{r})$, da ostane nespremenjen pri transformaciji s poljubnim operatorjem $\mathcal{T}(\mathbf{R})$, vidimo takoj, da Hamiltonov operator $\mathcal{H}$ za enoelektronske valovne funkcije komutira z vsemi operatorji $\mathcal{T}(\mathbf{R})$. Za dva operatorja $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pravimo, da komutirata, če je $\mathcal{B}\mathcal{A}f(\mathbf{r}) = \mathcal{A}\mathcal{B}f(\mathbf{r})$, kjer je $f(\mathbf{r})$ poljubna funkcija koordinat. Tu pomeni $\mathcal{B}\mathcal{A}$ zaporedje transformacij $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Najprej transformiramo funkcijo $f(\mathbf{r})$ z operatorjem $\mathcal{A}$ in nato takó nastalo funkcijo še z operatorjem $\mathcal{B}$. Operatorji $\mathcal{T}(\mathbf{R})$ imajo še to lastnost, da tudi med seboj komutirajo, ker je končni rezultat neodvisen od vrstnega reda translacij. Od tod sklepamo, da je možno dobiti take lastne funkcije enačbe (3), ki so obenem tudi lastne funkcije vseh enačb:

$$\mathcal{T}(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}) = T(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}) \quad (6)$$

kjer so $T(\mathbf{R})$ konstante.

Kakšno obliko mora imeti rešitev enačb (6), je lahko uvideti. Naredimo na funkciji $\psi(\mathbf{r})$ operacijo translacije za vektor $\mathbf{a}_1$. Pri tem se $\psi(\mathbf{r})$ pomnoži s $T(\mathbf{a}_1)$. Če translacijo n_1 -krat ponovimo, dobimo $\psi(\mathbf{r} + n_1 \mathbf{a}_1) = T^{n_1}(\mathbf{a}_1) \psi(\mathbf{r})$. Če imamo opravka z neskončnim kristalom in se zanimamo le za rešitve, ki so povsod končne, torej vidimo, da mora biti $|T(\mathbf{a}_1)| = 1$. Zato smemo postaviti $T(\mathbf{a}_1) = \exp(i\varphi_1)$, kjer je φ_1 poljubno realno število. Pri splošni translaciji za vektor $\mathbf{R}$ je torej

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \exp[i(\varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2 + \varphi_3 n_3)] \psi(\mathbf{r}) \quad (7)$$

Ker so konstante $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ poljubne, smemo gornjo formulo pisati tudi v obliki

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \exp[i\mathbf{k}(n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3)] \psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}) \quad (8)$$

kjer je $\mathbf{k}$ poljuben vektor. Sedaj pa pogledajmo, kako se transformira funkcija $u(\mathbf{r}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$ pri uporabi poljubnega operatorja translacije. Lahko je uvideti, da je $u(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u(\mathbf{r})$; zato je $u(\mathbf{r})$ periodična funkcija na enak način kot potencial $V(\mathbf{r})$. Tako smo dobili končen rezultat, da se dajo rešitve Schrödingerjeve enačbe za posamezne elektrone v kristalu zapisati v obliki:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (9)$$

Tu smo dodali funkcijama $\psi(\mathbf{r})$ in $u(\mathbf{r})$ indeks $\mathbf{k}$, da bi s tem poudarili, da imamo opravka z rešitvijo valovne enačbe za vnaprej izbrani vektor $\mathbf{k}$. Vektor $\mathbf{k}$ se imenuje valovni vektor. $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ je namreč zelo podoben valovni funkciji za proste elektrone z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$. Tu je le amplituda valovanja modulirana periodično, ker se $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ ponavlja v vsaki osnovni celici kristala. Valovne funkcije tipa (9) se imenujejo *Blochove funkcije*, ker jih je Bloch prvi vpeljal pri reševanju Schrödingerjeve enačbe za periodični potencial.

Krajeven potek periodične funkcije $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ dobimo le z rešitvijo enačbe (3) za izbrani vektor $\mathbf{k}$. Če gremo z nastavkom (9) v enačbo (3), dobimo naslednjo diferencialno enačbo za $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar}{m} \left(k_x \frac{\partial}{\partial x} + k_y \frac{\partial}{\partial y} + k_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

V poštev pridejo le take rešitve $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, ki so periodične. Iz tega sklepamo, da so dopustne le diskretne vrednosti za energijo E elektrona. Za izbrani $\mathbf{k}$ dobimo serijo energijskih nivojev, ki jih označimo z $E_1(\mathbf{k}), E_2(\mathbf{k}), \dots, E_n(\mathbf{k}), \dots$. Pri splošnem $\mathbf{k}$ energijski nivoji niso degenerirani. Degeneriranost lahko nastopi le za specialne vrednosti $\mathbf{k}$. Če v gornji diferencialni enačbi $\mathbf{k}$ malo spremenimo, se tudi rešitev le malo spremeni. Tako uvidimo, da so energijski nivoji zvezne in zvezno odvedljive funkcije $\mathbf{k}$.

Funkcija $E_n(\mathbf{k})$ ima še več zanimivih lastnosti. Je periodična. To spoznamo takole: Poiščemo take vektorje $\mathbf{k}$, za katere je

$$\exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) = 1 \quad (11)$$

pri poljubno izbranem mrežnem vektorju $\mathbf{R}$. Vektorje $\mathbf{k}$, ki izpolnijo enačbo (11), označimo z velikim $\mathbf{K}$. Ti vektorji predstavljajo mrežne vektorje recipročne mreže, pomnožene s faktorjem 2π . Recipročna mreža je definirana z osnovnimi vektorji $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ in $\mathbf{b}_3$ takole:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \quad (12)$$

Poljuben vektor $\mathbf{K}$ se zapiše kot:

$$\mathbf{K} = 2\pi (n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2 + n_3 \mathbf{b}_3) \quad (13)$$

kjer so n_1 , n_2 in n_3 cela števila. Lahko se prepričamo, da ti vektorji res zadovoljijo enačbo (11). Sedaj bomo pa dokazali, da je $E_n(\mathbf{k} + \mathbf{K}) = E_n(\mathbf{k})$. Če v enačbi (10) spremenimo $\mathbf{k}$ v $\mathbf{k} + \mathbf{K}$ in $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ v $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{K}\mathbf{r})$, je enačba izpolnjena pri nespremenjenem $E_n(\mathbf{k})$. Nova funkcija $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{K}\mathbf{r})$ je periodična glede na krajevni vektor $\mathbf{r}$ in torej predstavlja $u_{\mathbf{k}+\mathbf{K}}(\mathbf{r})$ z ustrezno vrednostjo energije $E_n(\mathbf{k})$. Vidimo, da ni samo energija periodična funkcija $\mathbf{k}$, ampak tudi valovna funkcija sama.

Ker se $E_n(\mathbf{k})$ periodično ponavlja, zadostuje, da poznamo $E_n(\mathbf{k})$ samo za vektorje $\mathbf{k}$ v eni izmed osnovnih celic mreže z osnovnimi vektorji $2\pi\mathbf{b}_1$, $2\pi\mathbf{b}_2$ in $2\pi\mathbf{b}_3$. Običajno si izberemo izhodišče koordinatnega sistema v eni izmed mrežnih točk in nato konstruiramo okoli te točke Wigner-Seitzovo celico. Takó dobljena osnovna celica se imenuje *prva ali osnovna Brillouinova cona*. Na sliki 2 vidimo pod a) Brillouinovo cono za prostorsko centrirani in pod b) za ploskovno centrirani kubični kristal. Recipročna mreža ploskovno centrirane kubične mreže je namreč prostorsko centrirana kubična mreža in obratno.

Množica vrednosti $E_n(\mathbf{k})$ za celo osnovno cono tvori *energijski pas* dovoljenih energij. V atomih imamo diskretne energijske nivoje, v kristalih pa srečamo namesto tega energijske pasove. Pas je označen z indeksom n . Različna pasova n in m sta lahko med seboj ločena tako, da je na primer vedno $E_n(\mathbf{k}') < E_m(\mathbf{k})$, ne glede na vrednosti $\mathbf{k}$ in $\mathbf{k}'$, ali pa se deloma prekrivata. O tem bomo obširneje razpravljali pozneje, pri proučevanju razlike med izolatorji in kovinami.

Iz enačbe (10) lahko izpeljemo še eno lastnost funkcije $E_n(\mathbf{k})$. Če vzamemo konjugirano kompleksno vrednost leve in desne strani enačbe, vidimo, da je $E_n(-\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k})$ in $u_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})$. To nam pove, da ima $E_n(\mathbf{k})$ svoj maksimum ali minimum za $\mathbf{k} = 0$. Mnogo bi mogli še sklepati o lastnostih funkcije $E_n(\mathbf{k})$ iz simetrijskih lastnosti kristala glede na vrtenja in zrcaljenja, vendar se v to tu ne moremo spuščati.

Enačbo (10) rešujemo numerično z raznimi aproksimativnimi metodami. Zelo važna je pravilna izbira sistema funkcij, po katerih razvijemo $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. S primerno izbranimi začetnimi funkcijami lahko račun konstant razvoja zelo poenostavimo. Vendar je v večini primerov izračunanje $E_n(\mathbf{k})$ numerično dosledljivo le za določene smeri in vrednosti vektorja $\mathbf{k}$.

3. BLOCHOVA METODA ZA IZRAČUNAVANJE $E_n(\mathbf{k})$

Ogledati si hočemo aproksimativno metodo, ki jo je vpeljal Bloch za izračunavanje $E_n(\mathbf{k})$ pri elektronih notranjih elektronskih obel. Združitev atomov v kristal ne vpliva mnogo na energijo teh elektronov, ker so njihove valovne

funkcije močno lokalizirane okoli atomskih jeder in tako notranji elektroni niso posebno moteni od polja sosednjih atomov. Ta račun je zanimiv, ker da dobro kvalitativno sliko tudi za valenčne elektrone. Vzemimo kot primer kak nedegeneriran atomski nivo z normirano valovno funkcijo $\psi(\mathbf{r})$! To je nujno nivo tipa s . Približno valovno funkcijo za kristal zapišemo po Blochu kot

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}_i} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \quad (14)$$

kjer gre seštevanje po vseh mrežnih vektorjih. Funkcija (14) ima zahtevano lastnost Blochovih funkcij, poleg tega pa pravilno popiše gibanje elektrona v bližini atomskih jeder. Mogli bi tudi pokazati, da je izmed linearnih kombinacij funkcij $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$ kombinacija (14) za rešitev enačbe (10) najboljša.

Prvi približek za energijo $E(\mathbf{k})$ izračunamo po znanem obrazcu

$$E(\mathbf{k}) = \int \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \mathcal{H} \psi(\mathbf{r}) d\tau / \int \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\tau \quad (15)$$

kjer izvršimo integrala po vsem prostoru. V (15) nastopijo integrali tipa $\int \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \mathcal{H} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j) d\tau$ in $\int \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j) d\tau$, če upoštevamo za valovno funkcijo izraz (14). Ti integrali so odvisni samo od razdalje med i -tim in j -tim atomom. Če je ta razdalja velika, je vrednost gornjih integralov zanemarljiva, ker je funkcija $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$ znatno različna od nič le v neposredni okolici atoma s krajevnim vektorjem $\mathbf{R}_i$. Zato zadostuje, da upoštevamo pri računu le neposredno sosedne atome. Vzemimo kot konkreten primer kristal na sliki 1b s strukturo prostorsko centrirane kocke! Tu je razdalja med neposrednimi sosedi $a\sqrt{3}$. Naj bo:

$$\begin{aligned} \int \psi^*(\mathbf{r}) \mathcal{H} \psi(\mathbf{r}) d\tau &= E_0 \\ \int \psi^*(\mathbf{r}) \mathcal{H} \psi[\mathbf{r} - a(1, 1, 1)] d\tau &= A \\ \int \psi^*(\mathbf{r}) \psi[\mathbf{r} - a(1, 1, 1)] d\tau &= B \end{aligned} \quad (16)$$

Če upoštevamo v (15) le največje člene, dobimo naslednji izraz za $E(\mathbf{k})$:

$$E(\mathbf{k}) = \frac{E_0 + 8A \cos(k_x a) \cos(k_y a) \cos(k_z a)}{1 + 8B \cos(k_x a) \cos(k_y a) \cos(k_z a)} \quad (17)$$

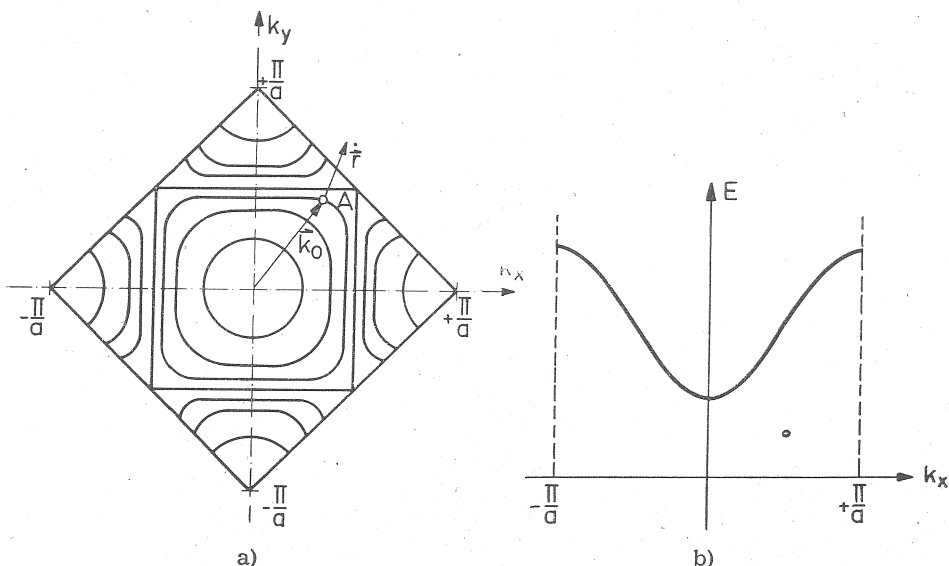
E_0 je praktično enak energiji atomskega nivoja. Konstanta B je zelo majhna, ker se valovne funkcije s središči v sosednjih atomih le malo prekrivajo in smemo zato v grobem približku postaviti $B = 0$. Isto pa ne velja za A , ker imamo pri izračunu te konstante pod integralnim znakom operator $\mathcal{H}$ za kristal in ne za izolirani atom. Tu se bomo zadovoljili s približkom:

$$E(\mathbf{k}) = E_0 + 8A \cos(k_x a) \cos(k_y a) \cos(k_z a) \quad (18)$$

Slika 4a kaže presek prve Brillouinove cone za $k_z = 0$ z včrtanimi krivuljami konstantne energije. Če poiščemo vse točke v prostoru $\mathbf{k}$, ki jim ustreza ista energija E , dobimo zaključeno ploskev, ki se imenuje *energijska ploskev*. Krivulje konstantne energije pa dobimo pri preseku energijskih ploskev na primer

z neko ravnino. Iz slike vidimo, da imajo energijske ploskve vse simetrijske lastnosti kristala. To je splošno pravilo. Slika 4 b pa kaže potek energije $E(\mathbf{k})$ v smeri osi k_x .

Iz izraza (18) sledi, da je širina energijskega pasu $16A$. Širina je zelo majhna za elektrone blizu atomskih jeder in velika za elektrone v zunanjih elektronskih oblah.



Slika 4

Energija ima svoj maksimum ali minimum pri $\mathbf{k} = 0$; to je odvisno od predznaka integrala A . Energijske ploskve so okoli te točke skoraj krogle in tako velja za majhne $\mathbf{k}$, da je

$$E(\mathbf{k}) = E_0 + 8A - 4Aa^2\mathbf{k}^2 \quad (19)$$

4. PSEUDO-GIBALNA KOLIČINA IN NAVIDEZNA MASA ELEKTRONA V KRISTALU

Izraz (19) je zelo podoben izrazu za energijo prostega elektrona v konstantnem potencialnem polju:

$$E = V + \hbar^2\mathbf{k}^2/2m \quad (20)$$

kjer prvi člen predstavlja potencialno energijo elektrona in drugi kinetično; m je mirovna masa elektrona in $\mathbf{k}$ valovni vektor, podan z izrazom $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$, kjer je $\mathbf{p}$ gibalna količina elektrona. Tudi v kristalu pripišemo vsakemu elektronu, katerega $\psi(\mathbf{r})$ ima obliko Blochovih funkcij, čisto formalno vektor $\mathbf{p}$ po obrazcu $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Vektor $\mathbf{p}$ se imenuje *pseudo-gibalna količina* elektrona. Tu se moramo dobro zavedati, da $\mathbf{p}$ ni resnična gibalna količina, ki v primeru Blochovih funkcij sploh ni konstanta gibanja. Pač pa je tu pseudo-gibalna ko-

ličina konstanta gibanja. Če razvijamo analogijo med elektroni v kristalu in elektroni v praznem prostoru še dalje, lahko iz primerjave med (19) in (20) pripišemo elektronom v kristalu za majhne $|\mathbf{k}|$ še navidezno maso:

$$m^* = -\hbar^2/8 A a^2 \quad (21)$$

Navidezna masa je lahko tudi negativna. m^* je zelo velik za elektrone najbolj notranjih elektronskih lupin, ker je tam konstanta A majhna, in majhen za zunanje elektronske lupine. Za valenčne elektrone je navidezna masa velikostnega reda mase prostih elektronov.

Oglejmo si analogijo med prostimi elektroni in elektroni v kristalu še malo podrobneje! Z linearno kombinacijo valovnih funkcij, ki predstavljajo ravna valovanja za proste elektrone, lahko naredimo valovni paket, ki lokalizira elektron v prostoru. S tem seveda izgubimo natančnost pri določitvi gibalne količine. Takó dobljeno stanje elektrona ni stacionarno, ker moramo dodati k vsaki valovni funkciji $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, ki je odvisna samo od krajevnih koordinat, še časovni faktor $\exp[-i E(\mathbf{k}) t/\hbar]$. Časovni faktor pa je za različne $\mathbf{k}$ različen. Zato se valovni paket giblje v prostoru. Tudi v kristalu lahko sestavimo iz Blochovih funkcij valovni paket. Če so razsežnosti paketa precej večje kot osnovna celica kristala, zadostuje, da upoštevamo le Blochove funkcije iz istega energijskega pasu. Blochove funkcije, ki so najbolj zastopane v valovnem paketu, imajo približno isti vektor $\mathbf{k}$. Hitrost gibanja težišča valovnega paketa določimo takole: Fazni faktorji glavnih funkcij, ki sestavljajo valovni paket, so taki, da se ta valovanja medsebojno ojačujejo na mestu valovnega paketa. Fazni faktor φ je funkcija časa, lege v prostoru in valovnega vektorja. Velja znana relacija:

$$\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = -\frac{E(\mathbf{k}) t}{\hbar} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (22)$$

Gibanje težišča je določeno s pogojem, da se tam fazne difference med valovanji, katerih valovni vektorji se le malo razlikujejo od srednjega valovnega vektorja $\mathbf{k}$, ohranjajo v času. Matematično to izrazimo z zahtevo, da je časovni odvod gradienta faznega faktorja glede na valovni vektor $\mathbf{k}$ za valovanje s srednjim $\mathbf{k}$ in težišče valovnega paketa enak nič. Tu moramo seveda vzeti, da je krajevni vektor $\mathbf{r}$ v izrazu (22) funkcija časa, ker $\mathbf{r}$ predstavlja težišče paketa. Tako dobimo iz (22) naslednji izraz za hitrost težišča:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \text{grad}_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})/\hbar \quad (23)$$

$\mathbf{v}$ se imenuje tudi *grupna hitrost valovanja*. Takoj vidimo, da $\mathbf{v}$ v splošnem nima smeri valovnega vektorja $\mathbf{k}$. To je res le tedaj, če so energijske ploskve krogle s središčem v izhodišču prostora $\mathbf{k}$. Tak primer imamo pri prostih elektroni, kjer se grupna hitrost paketa ujema s klasično hitrostjo elektrona. Grupna hitrost je pravokotna na energijske ploskve in kaže v smeri rastoče energije. Na sliki 4 a je v točki A zarisan vektor grupne hitrosti za valovni paket z valovnim vektorjem $\mathbf{k}_0$.

Valovni paket z enim elektronom predstavlja električni tok $e\mathbf{v}$. Če v kristalu nimamo zunanjšega električnega polja, so vse smeri vektorjev $\mathbf{k}$ enako zastopane in tako na zunaj ne opazimo toka. Razmere se pa lahko spremenijo, ko vključimo zunanje električno polje $\mathbf{E}$. Poglejmo, kakšen vpliv ima električno

polje na gibanje valovnega paketa! V majhnem časovnem intervalu dt se valovni paket premakne v prostoru za $v dt$. Pri tem opravi polje na elektronu delo $-e \mathbf{E} v dt$. Sprememba energije elektrona se v valovnem paketu odraža le v drugačni izbiri valovnih funkcij, ki sestavljajo paket. $E(\mathbf{k})$, kjer je $\mathbf{k}$ srednji valovni vektor paketa, postane funkcija časa, ker se $\mathbf{k}$ pod vplivom zunanega polja s časom spreminja. Sprememba $E(\mathbf{k})$ v časovnem intervalu dt , namreč $grad_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, mora biti enaka delu, ki ga opravi električno polje na elektronu. Z uporabo izraza (23) za grupno hitrost pridemo tako do zanimivega rezultata, da je časovni odvod vektorja $\mathbf{k}$ proporcionalen električnemu polju, namreč:

$$\dot{\mathbf{k}} = -e \mathbf{E} / \hbar \quad (24)$$

Če namesto $\mathbf{k}$ vpeljemo pseudo-gibalno količino $\mathbf{p}$, dobimo klasično relacijo med časovnim odvodom gibalne količine in silo na elektron. Iz (24) sklepamo, da električno polje normalno lahko povzroči, da so v kristalu bolj zastopane valovne funkcije, ki imajo večjo komponento vektorja $\mathbf{k}$ v smeri, ki je nasprotna smeri polja $\mathbf{E}$, kot obratno. V tem primeru kaže kristal na zunaj električni tok. Vendar taka asimetrija v zasedbi energijskih nivojev ni vedno možna, kot bomo videli v nadaljnjem razpravljanju o končnih kristalih.

Zanimivo je pogledati, kakšen je pospešek težišča valovnega paketa, ki je v električnem polju. Če zapišemo hitrost težišča $\mathbf{v}$, ki je dana z izrazom (23), v komponentah in nato vsako komponento odvajamo po času, upoštevajoč časovno odvisnost vektorja $\mathbf{k}$, dobimo naslednje izraze za pospeške v smereh koordinatnih osi x , y in z :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{e}{\hbar^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_x^2} E_x + \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_y} E_y + \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_z} E_z \right) \\ \ddot{y} &= -\frac{e}{\hbar^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_x} E_x + \frac{\partial^2 E}{\partial k_y^2} E_y + \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_z} E_z \right) \\ \ddot{z} &= -\frac{e}{\hbar^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_x} E_x + \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_y} E_y + \frac{\partial^2 E}{\partial k_z^2} E_z \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Zveza med silo na elektron in pospeškom je tenzorska. V tenzorski obliki lahko enačbo (25) zapišemo kot $\ddot{\mathbf{r}} = -e \underline{T} \cdot \mathbf{E}$, kjer je $\underline{T}$ naslednji tenzor:

$$\underline{T} = \frac{1}{\hbar^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial k_x^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_y^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_z^2} \end{vmatrix} \quad (26)$$

K tenzorju $\underline{T}$ inverzni tenzor $\underline{T}^{-1}$ se imenuje *tenzor navidezne mase*. V primeru prostih elektronov se ta tenzor reducira v konstanto, ki je enaka masi elektrona. $\underline{T}^{-1}$ preide v skalarno količino tudi v kristalu, če so energijske ploskve krogle, kot to vidimo na primer pri energijskih ploskvah, podanih z obrazcem (19). Tam smo vpeljali pojem navidezne mase, ki ravno ustreza tenzorju $\underline{T}^{-1}$ za primer krogelnih energijskih ploskev.

5. KOVINE, POLPREVODNIKI IN IZOLATORJI

Do sedaj smo obravnavali le razmere v neskončno velikih kristalih. Število dopustnih nivojev je bilo neskončno, saj smo dobili namesto energijskih nivojev kar dopustne energijske pasove. Resnični kristali so končni in mora biti tudi število nivojev, ki ustrezajo posameznemu atomskemu nivoju, končno. Poglejmo, v čem se spremenene razmere, če vzamemo namesto neskončnega končen kristal! Ravna valovanja tipa (9) se na površini kristala odbijejo. Površina kristala predstavlja potencialni prag, ki preprečuje, da bi se valovne funkcije razširjale znatno v zunanjšino kristala. Po večkratnem odboju valovanja na površini kristala nastane stojno valovanje. Tako valovanje je pa možno le za nekatere valovne vektorje. Zaradi enostavnosti računa vzemimo, da ima kristal obliko paralelopipeda s stranicami v smereh osnovnih vektorjev! Naj bo dolžina stranic $N_1|\mathbf{a}_1|$, $N_2|\mathbf{a}_2|$ in $N_3|\mathbf{a}_3|$, kjer so N_1 , N_2 in N_3 cela števila. Pogoj za nastop stojnega valovanja je naslednji:

$$\begin{aligned}\exp(i\mathbf{k} N_1 \mathbf{a}_1) &= \pm 1 \\ \exp(i\mathbf{k} N_2 \mathbf{a}_2) &= \pm 1 \\ \exp(i\mathbf{k} N_3 \mathbf{a}_3) &= \pm 1\end{aligned}\tag{27}$$

Prav lahko je uvideti, da se dopustni vektorji $\mathbf{k}$ izrazijo kot:

$$\mathbf{k} = \pi \left(\frac{n_1}{N_1} \mathbf{b}_1 + \frac{n_2}{N_2} \mathbf{b}_2 + \frac{n_3}{N_3} \mathbf{b}_3 \right)\tag{28}$$

kjer so n_1 , n_2 in n_3 cela števila. Ker morajo biti vsi ti vektorji v eni izmed osnovnih celic recipročne mreže (na primer v prvi Brillouinovi coni), vidimo, da je število možnih n_1 enako N_1 , možnih n_2 enako N_2 in možnih n_3 enako N_3 . Iz kontinuumata energijskega pasu smo s pogojem (27) dobili diskretne nivoje. Dopustni vektorji $\mathbf{k}$ so enakomerno in gosto posejani v prostoru $\mathbf{k}$. Celotno število dopustnih nivojev je $N_1 N_2 N_3$. Tako pridemo do zelo važnega rezultata, da je število nivojev v vsakem energijskem pasu ravno enako številu osnovnih celic, ki sestavljajo kristal.

Na vsak energijski nivo v kristalu lahko spravimo po dva elektrona z obrnjenimi spini. Nekateri energijski pasovi so popolnoma zasedeni, drugi deloma zasedeni ali popolnoma prazni. Popolnoma zasedeni so predvsem pasovi, ki ustrezajo elektronskim nivojem notranjih lupin v atomih. Vendar so pri nizkih temperaturah popolnoma zasedeni pri izolatorjih ali polprevodnikih

tudi energijski pasovi, v katerih imamo valenčne elektrone. Ti pasovi se imenujejo *valenčni pasovi*. Kovine se razlikujejo od izolatorjev in polprevodnikov ravno v tem, da so pri njih valenčni pasovi le deloma zasedeni tudi pri absolutni ničli. Popolnoma prazni so pasovi z večjimi energijami.

Zunanje električno polje ne more povzročiti električnega toka pri pasovih, ki so popolnoma zasedeni. Tu je asimetrična zasedba nivojev glede na vektorje $\mathbf{k}$ nemogoča. Električni tok nastopi le pri deloma zasedenih nivojih, kjer elektroni lahko prevzamejo nekaj energije od električnega polja. Pri zasedenih pasovih so možni le prehodi elektronov v višje nezasedene pasove. Vendar je verjetnost za take prehode pri majhnih poljskih jakostih, ki pridejo v poštev v praksi, izredno majhna. Pač pa pride večkrat do tega pojava pri električnem preboju izolatorjev, ko so poljske jakosti velikostnega reda 10^5 V/cm ali več.

Zasedba energijskih nivojev je odvisna od temperature. Verjetnost, da je neki nivo zaseden, je podana s Fermijevo porazdelitveno funkcijo

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp [E - E_F]/k T]} \quad (29)$$

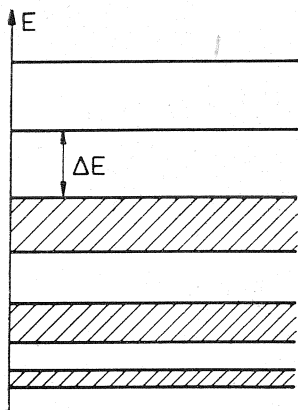
kjer je k Boltzmannova konstanta, T absolutna temperatura, E energija nivoja in E_F konstanta, ki ima dimenzijo energije in se imenuje *Fermijeva energija*. Če poznamo razporeditev nivojev v kristalu, lahko z uporabo porazdelitvene funkcije (29) izračunamo število elektronov v kristalu. V rezultatu nastopa edini še neznani parameter, namreč Fermijeva energija, ki jo določimo tako, da je izračunano število elektronov enako resničnemu številu elektronov, ki so v kristalu. Očividno je, da se Fermijeva energija spreminja s temperaturo, vendar so te spremembe majhne. Število elektronov v energijskih pasovih kristala je najlažje izračunati z vpeljavo pojma *gostote nivojev*. Nivoji so v posameznih pasovih tako gosto posejani glede na energijske razmake, da smemo vpeljati zvezno funkcijo $N(E)$, ki pove, koliko nivojev pride na enoto energijskega intervala. Gostoto nivojev normalno podajamo za enoto prostornine in ne za cel kristal. Koncentracija elektronov N v kristalu je torej:

$$N = \int f(E) N(E) dE \quad (30)$$

kjer integriramo po energijskem intervalu vseh možnih energij. Pri absolutni ničli so zasedeni vsi nivoji do $E = E_F$. Energijska ploskev, ki ustreza energiji E_F , se imenuje *Fermijeva ploskev*. Ta ploskev se pogosto razširja čez različne energijske pasove, to je različne valenčne pasove, če se ti med seboj prkrivajo. V takih primerih je Fermijeva ploskev precej komplicirana. Vpeljava pojma Fermijeve ploskve je smiselna le za kovine, kjer imamo opravka z le deloma zasedenimi pasovi.

Določitev Fermijeve energije povzroča nekaj težav pri izolatorjih in polprevodnikih. Energijska shema izolatorja ali polprevodnika je shematsko pokazana na sliki 5. Tu vidimo posamezne energijske pasove. Pasovi, ki so zasedeni z elektroni pri absolutni ničli, so črtkani. Spodnji pasovi na sliki ustrezajo energijskim nivojem elektronov notranjih atomskih lupin. Ti pasovi so precej ozki, v skladu z našim prejšnjim razmišljanjem. Zadnji zasedeni pas oziroma

skupina pasov, ki se med seboj prekrivajo, pa ustreza valenčnim elektronom. Prvi nezasedeni pasovi, ki sledijo valenčnim pasovom, so *prevodni pasovi*. Elektroni v teh pasovih morejo biti nosilci električnega toka in jim zato pravimo *prosti elektroni*. Energijski interval med valenčnimi in prevodnimi pasovi, v katerem ni nobenih energijskih nivojev, se imenuje *prepovedani pas*. Razlika med izolatorji in polprevodniki je le v širini ΔE prepovedanega pasu. Pri izolatorjih je ta velika, normalno večja kot 2 eV, pri polprevodnikih pa velikostnega reda 1 eV. Pri absolutni ničli ni v prevodnih pasovih nič elektronov in je zato vseeno, kakšno lego ima E_F v prepovedanem pasu. Toda kakor hitro dvignemo temperaturo, dobimo nekaj elektronov v prevodnih pasovih in nekaj praznih mest v valenčnih pasovih. S tem pa postane Fermijeva energija točno določena. E_F je normalno skoraj v sredini prepovedanega pasu. Kristal postane prevodnik električnega toka, ker imamo elektrone v prevodnih pasovih in tudi valenčni pasovi niso več popolnoma zasedeni. Nezasedenim mestom v valenčnih pasovih pravimo *vrzeli*. Pri navadnih temperaturah je prevodnost izolatorjev majhna, ker je ΔE velik in je zato le malo prostih elektronov in vrzeli. Pri polprevodnikih pa imamo že pri sobni temperaturi precej prostih elektronov in vrzeli in je zato njihova prevodnost precej večja, toda še vedno mnogo manjša od kovinske prevodnosti.



Slika 5

Pri izolatorjih in polprevodnikih je Fermijeva energija zelo odvisna tudi od raznih napak v kristalni mreži in od tujih atomov, ki so ali vgrajeni na normalna mesta kristalne mreže ali pa vrinjeni na vmesne lege med atomi kristala. Napake in tuje primesi dostikrat povzročijo, da je število elektronov, ki sestavljajo kristal, večje ali manjše kot v idealnem kristalu. Povzročijo pa tudi majhne spremembe v legi in številu energijskih nivojev. V takem primeru tudi pri nižjih temperaturah valenčni pasovi niso popolnoma zasedeni ali pa imamo elektrone v prevodnih pasovih. To pa očitno povzroči velike spremembe v legi Fermijeve energije v prepovedanem pasu.

Literatura

R. E. Peierls: Quantum Theory of Solids, Oxford University Press 1955.

MERITEV MAGNETNEGA DIPOLNEGA MOMENTA MEZONOV μ

Fizika se zadnja leta vedno bolj zanima za elementarne delce. Med njimi sta vredna mion* in elektron posebne pozornosti. Imata namreč skoraj enake elektromagnetne in šibke interakcije, kljub temu pa različni masi. Problem njunih mas je zato posebno zanimiv in fizika si obeta dobiti z rešitvijo tega problema važen ključ za razumevanje narave elementarnih delcev.

Za primerjavo naj povemo, da moramo razložiti masni razcep barionov in hyperonov (Λ in nukleon, Σ in Λ , π in K) z delovanjem močnih interakcij. Mion in elektron pa takih interakcij nimata. Razlika njunih mas je zato verjetno posledica nekih še nepoznanih interakcij, ali pa jo moremo popisati z uvedbo novega kvantnega števila, kot predlaga Gell-Mann.

Ker bi pomenilo tolmačenje razlike mas miona in elektrona pomemben korak naprej v razumevanju elementarnih delcev, je potrebno meriti bolj natančno in z večjo občutljivostjo vse lastnosti miona in elektrona. Te meritve bodo namreč potrdile ali zavrgle hipoteze o obstoju dveh stanj, ki se razlikujeta samo v vrednosti mase.

Ker je znano, da so šibke interakcije miona in elektrona enake na $\sim 2\%$, preostane meriti še elektromagnetne lastnosti:

(1) Sipanja mion-nukleon in elektron-nukleon. Če bodo opazili kakšno razliko, bo najbolj verjetno posledica strukturnih razlik miona in elektrona. Drugače povedano, razlika v sipanju bi bila dokaz za različne elektromagnetne interakcije obeh delcev.

(2) Sipanje μ -e in e-e. Sipanje elektron-elektron že preiskujejo, sipanje μ -e pa zahteva močne čurke mionov visoke energije, ki danes še niso dosegljivi.

(3) Statične elektromagnetne lastnosti. Te lastnosti moremo že danes meriti z izredno natančnostjo. Če je razlika v masi med mionom in elektronom posledica kakšne nove interakcije, bi ta interakcija mogla povzročiti razlike v magnetnem dipolnem momentu.

Drug poudarek daje meritvi MDM* kvantna elektrodinamika.

Diracova enačba dá za delce s polovičnim spinom za g vrednost 2. Če upoštevamo še sklopitev miona z njegovim sevalnim poljem, dobimo

$$g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0,75 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \dots \right) = 2(1.0011654), \text{ pri čemer je } \alpha \text{ konstanta}$$

fine strukture. Iz primerjave izračunane in izmerjene vrednosti g lahko neposredno vidimo, kako natančno veljajo zakoni kvantne elektrodinamike.

Meritve MDM elementarnih delcev so si v osnovi vse podobne.

Najprej je potrebno žarek delcev polarizirati, t. j. vsem delcem zasukati spin v določeno smer. Nato pustimo, da preteče žarek neko pot v magnetnem polju, ki deluje na MDM delcev z navorom $\vec{\mu} \times \vec{B}$. Zaradi navora začnejo spini delcev precesirati okoli smeri polja — spreminjati se smer polarizacije. Končno izmerimo z analizatorjem, za kakšen kot so se spini zavrteli.

Precej bolj nerodna pa je meritev pri relativističnih delcih. V tem primeru ne moremo tako enostavno izračunati precesijske frekvence. V mirovnem

* mezon μ imenujemo mion.

* magnetni dipolni moment označimo s kratico MDM, električni dipolni moment pa s kratico EDM.

sistemu delca, ki se giblje v hitrostjo v , dobimo namreč še električno poljsko jakost $-\vec{v} \times \vec{B}$ in, če imamo poleg magnetnega polja še kakršnokoli električno polje, še dodatno magnetno poljsko jakost $-\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$. Obe relativistični polji

prav tako vrtita smer spina, prvo le, če ima elementarni delec električni dipolni moment, kar pa ne smemo vnaprej izključiti.

Dodatna težava je, da so izvori mionov revni in zato ne moremo delati tako, kot na primer pri nevtronih z metodo atomskih žarkov,* ampak moramo uporabiti nekatere nove prijeme.

V najbolj splošnem primeru, če bi imel delec EDM in MDM, če upoštevamo relativistično električno in magnetno polje in čisti relativistični efekt, Thomasovo precesijo,** dobimo, da je celokupna precesija vsota precesije MDM v magnetnem polju, precesija EDM v električnem polju in relativistične Thomasove precesije:

$$\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_{MDM} + \vec{\omega}_{EDM} + \vec{\omega}_T.$$

V poskusih, ki si jih bomo ogledali, pa mion praktično miruje. Zato odpadejo vsi relativistični efekti in, ker nimamo nikakršnega električnega polja, odpade tudi precesija EDM (ne vemo še, ali je EDM miona nič). Izraz se zelo poenostavi:

$$\omega = \frac{g}{2} \cdot \frac{eB}{m},$$

e je osnovni naboj, m je masa miona.

Izvor mionov je curek pionov, ki se zaustavi v tarči. Ker se parnost pri razpadu $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}$ ne ohranja***, so pri razpadu piona nastali mioni longitudinalno polarizirani (vektor spina je paralelen smeri gibanja miona). Ker se tudi pri razpadu miona $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu} + \nu$ parnost ne ohranja, so tudi razpadni pozitroni polarizirani. Kotna porazdelitev pozitronov okoli smeri mionovega spina je $P = 1 + a \cos \vartheta$, pri tem je ϑ kot med smerjo gibanja miona in med smerjo gibanja pozitrona. Meritve so pokazale, da je $a = -0,33 \pm 0,03$.

Že Lee in Yang sta napovedala, da je longitudinalna polarizacija mionov, ki jih dobimo z razpadom pionov, idealni naravni polarizator. Moremo ga izkoristiti pri meritvi MDM. Za analizator nam rabi kotna porazdelitev pozitronov, ki je občutljiva za spremembo smeri mionovega spina.

Prvo meritev MDM miona so napravili Garwin, Lederman in Weinrich leta 1957.

Shematično je narisana njihova aparatura na sliki 1.

Meritev se začne, ko prileti pion π^+ v absorber a in v njem razpade ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$). Iz absorberja a izleti mion μ^+ , ki se zaustavi v absorberju b . Delca sprožita števec 1 in 2, ki sta vezana v koincidenca. Ta koincidenca odpre z zakasnitvijo 0,75 μsek pozitronska števec 3 in 4 in ju drži odprta 1,25 μsek ****. Tako šteje stik 12,34 samo pozitrone, ki so se rodili v času od 0,75 do 2 μsek potem, ko se je mion zaustavil v absorberju b .

* J. H. Smith, Phys. Rev. **108**, 120 (1957).

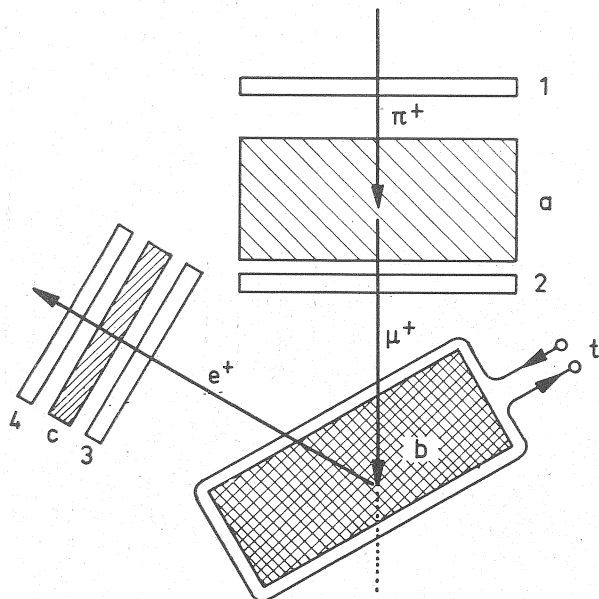
** glej Möller, The Theory of Relativity, str. 53.

*** glej L. Pičman, Obzornik 157, 1956-57.

**** Koincidenca 1 in 2, vezano z zakasnitvijo na števec 3 in 4, zapišemo simbolično 12,34.

Pridelek pozitronov se zaradi polarizacije $P = 1 + a \cos \vartheta$ v neki smeri spremeni, če se zavrti spin mionov. Spin je precesiral v magnetnem polju B , pravokotnem na pot miona. Ker so vklopili polje takrat, ko je miroval mion v tarči b , ni bilo relativističnih efektov.

Garwin in sodelavci so za meritev g izkoristili odvisnost števila sunkov 12,34 od smeri mionovega spina. Pri stalni legi pozitronskega detektorja so merili število pozitronskih sunkov v odvisnosti od magnetilnega toka. Ker se je precesijska frekvenca spreminjala s tokom $I \sim B \sim \omega$, je število sunkov s tokom pojemale in naraščalo. Poskus se je ujemal z računom, v katerem so upoštevali porazdelitev $P = 1 - 0,33 \cos \vartheta$ in $g = 2,00 \pm 0,10$.



Sl. 1. Garwinova naprava za meritev MDM mionov

1 in 2 sta scintilacijska števca z organskim scintilatorjem, a je ogljen absorber pionov, b je absorber mionov, t je na obsorber b tesno navita tuljava, 3 in 4 sta scintilacijska števca za pozitrone. Med števčema 3 in 4 je absorber c , v katerem se zaustavijo vsi pozitroni z energijo $W < 25$ MeV. Pozitronski števeni stik (3, c , 4) šteje zato samo pozitrone z energijo $W > 25$ MeV, ki so nastali pri razpadu $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$

Mnogo natančnejši poskus so napravili leto kasneje Coffin in sodelavci z resonančno metodo.

Shematično je narisana naprava na sliki 2.

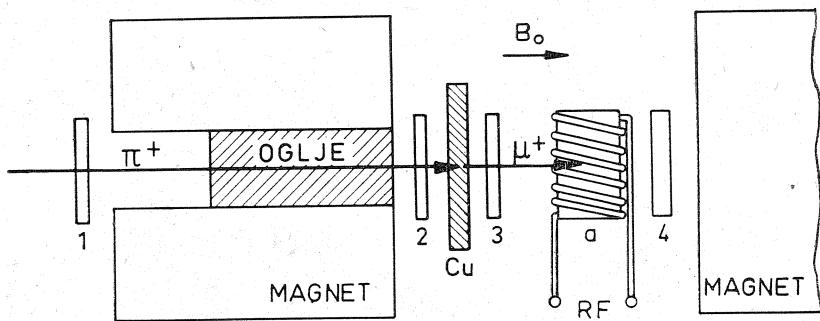
Na sliki so 1, 2, 3 in 4 scintilacijski števci, Cu je tarča iz bakra, med 1 in 2 je ogljen absorber. Absorber a ($CHBr_3$) je ovit s tuljavo. V absorberju je homogeno polje B_0 in kadar teče skozi tuljavo tok, še radiofrekvenčno polje B_1 , ki je pravokotno na B_0 in tudi na smer mionove hitrosti.

Vstop piona π^+ v kanal magneta, rojstvo miona μ^+ v bakrenem absorberju in zaustavitev miona v absorberju a pokaže koincidenca števcev 1, 2, 3 v antikoincidenca s števcem 4.* Signal 1234 sproži dvojce: skozi tuljavo steče

* simbolično zapišemo 1234

radiofrekvenčni pulz in po $2\ \mu\text{sek}$ se odpro števna vrata za pozitrone, ki ostanejo odprta $3\ \mu\text{sek}$. Isti števcji štejejo sedaj pozitrone, ki letijo glede na smer mionov v nasprotni smeri ($P = 1 - 0,33 \cos \vartheta$). Pozitrone štejejo števcji 3, 2 in 1, ki so vezani v koincidenčnem stiku ter v antikoincidenzi s števcem 4.* Pulze 3214 sprožijo seveda samo tisti pozitroni, ki se rodijo v intervalu, ko so odprta vrata, ki jih sproži pulz 1234, to je med $2\ \mu\text{sek}$ in $5\ \mu\text{sek}$ po zaustavitvi miona.

Meritev je potekala tako: Najprej so šтели sunke 3214, ne da bi priključili radiofrekvenčno tuljavo (brez polja B_1). V tem primeru ne deluje na mion noben navor, ker je polje B_0 vzporedno z magnetnim momentom miona. Smer spina ostane nespremenjena. Zato so dobili največ pozitronov v nasprotni smeri mionove poti, število sunkov 3214 je bilo največje.



Sl. 2. Coffinova resonančna aparatura za meritev MDM mionov

Nato so vključili radiofrekvenčno polje B_1 take frekvence, ki je zadoščala resonančnemu pogoju** za $g = 2$, in s počasnim spreminjanjem polja B iskali pravo resonanco. V resonanci so se spini zasukali za 180° , največ pozitronov je tedaj odletelo v smeri števca 4, število sunkov 3214 je bilo najmanjše. Frekvenco ν_{RF} so držali med poskusom stalno, spreminjali so magnetno polje B_0 . Polje B_0 so merili s protonsko resonanco.

S tem poskusom so dobili $g_{+\mu} = 2 (1.0025 \pm 0,0009)$, kar se dovolj dobro ujema z vrednostjo, ki jo da kvantna elektrodinamika.

M. Pintar
Institut J. Stefan

Literatura:

Garwin, Lederman, Weinrich, Observation of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays: the Magnetic Moment of the Free Muon, Phys. Rev. **105**, 1415 (1957).

T. Coffin et al., Magnetic Moment of the Free Muon, Phys. Rev. **109**, 973 (1958).

* Simbolično zapišemo 3214

** I. Zupančič, Obzornik 120, 1957-58.

O veljavnosti specialne relativnostne teorije nas prepričajo mnogi poskusi. Izmed teh pa sta do nedavnega samo dva, Michelsonov in Ivesov, neposredno potrjevala princip relativnosti. Ta pravi, da je hitrost svetlobe v vseh inercialnih sistemih (sistemih, ki se gibljejo s konstantno hitrostjo) enaka.

Michelsonov poskus je prvi ovrzel etrsko hipotezo. Po tej naj bi bila hitrost svetlobe enaka c samo v nekem' odlikovanem sistemu — etru. V drugih inercialnih sistemih naj bi bila odvisna od hitrosti teh sistemov proti etru. Neosnovano bi bilo domnevati, da ravno Zemlja v etru miruje. Hitrost Zemlje proti etru pa bi moral pokazati Michelsonov poskus.

Michelsonov interferometer, s katerim izvedejo poskus, ima dva med seboj pravokotna kraka. Oba koherentna svetlobna curka pretečeta enaki, med seboj pravokotni poti. Najprej kaže prvi krak interferometra v smer gibanja etra. Ko potem interferometer zavrtijo, da kaže v smer gibanja etra drugi krak, bi se morali premakniti interferenčni kolobarji. Premik bi moral biti sorazmeren z $(v/c)^2$, kjer je v hitrost Zemlje proti etru. Če pričakujemo za v vrednosti okoli 30 km/s, kolikor je hitrost letnega gibanja Zemlje okoli Sonca (hitrost dnevnega gibanja je zanemarljivo majhna), bi moral biti premik pri nekaterih izvedbah večji od enega kolobarja. Poskus pa neodvisno od začetne smeri interferometra in dnevnega ali letnega časa ne dá skoraj nobenega premika.

Drug pojav, s katerim lahko ovržemo etrsko hipotezo, je Dopplerjev efekt. Iz akustike je znano, da je frekvenca zvoka, ki jo meri opazovalec, odvisna od relativne hitrosti zvočila in opazovalca in od hitrosti obeh proti zraku. Ista trditev bi morala veljati za svetlobo, če bi bila etrska hipoteza pravilna: frekvenca svetlobe, ki jo meri opazovalec, bi morala biti odvisna od relativne hitrosti svetila in opazovalca in še od hitrosti obeh proti etru. Poskus, ki je dal odgovor na takšno vprašanje, je prvi napravil Ives. — Curek ioniziranih molekul vodika z električnim poljem pospešijo do velikih hitrosti. Pri tem zelo natančno merijo frekvenco svetlobe, ki jo sevajo molekule, medtem ko se gibljejo z veliko, toda konstantno hitrostjo. Izmerjena frekvenca se ne ujema s frekvenco, izračunano po etrski hipotezi, če vzamejo za hitrost Zemlje proti etru od nič različno vrednost. Izid tega poskusa torej prav tako kot izid Michelsonovega poskusa pove, da etrska hipoteza ne more biti pravilna in da velja princip relativnosti.

Pred tremi leti je Möller predložil nov poskus, ki naj ravno tako neposredno potrdi princip relativnosti. Za ta poskus sta potrebna dva maserja* na curek molekul amoniaka.

Izračunajmo frekvenco takšnega maserja po etrski teoriji! Če molekule in opazovalec proti etru mirujejo, meri opazovalec inverzijsko frekvenco ν_0 . Isti rezultat dobi v etru mirujoč opazovalec tudi, kadar se molekule gibljejo, če meri frekvenco sevanja pravokotno na smer gibanja molekul. Toda rezonator zbere sevanje v vseh smereh. Zato je treba pri računanju maserjeve frekvence poiskati povprečje po vseh smereh. V izračunanem povprečju je en člen odvisen od kota med smerjo etra in smerjo hitrosti molekul; vsi drugi so odvisni samo od absolutne vrednosti hitrosti molekul.

Od kota odvisni člen pa dobimo tudi, če poenostavljeno računamo, kot da sevajo molekule NH_3 , tedaj ko rezonator v etru miruje, samo pravokotno

* Glej članek S. Poberaja: Maserji, v tej številki Obzornika.

na smer svojega potovanja. Vzemimo, da se giblje rezonator s hitrostjo v proti etru. Za opazovalca, ki miruje proti rezonatorju, molekule ne sevajo več pravokotno na smer potovanja. Eter nosi namreč valovanje s seboj. Kot θ med smerjo potovanja molekul in smerjo, v kateri zazna sevanja proti rezonatorju mirujoč opazovalec, je

$$\theta = \frac{1}{2} \pi - v/c. \quad (1)$$

Zaradi tega nastopi Dopplerjev efekt in frekvenca maserja ν ni več enaka lastni frekvenci rezonatorja:

$$\nu = \nu_0 (1 - u \cos \theta/c) = \nu_0 (1 - uv/c^2 + \dots). \quad (2)$$

Pri tem je u hitrost molekul NH_3 proti rezonatorju. Lastna frekvenca rezonatorja je tako blizu inverzijski frekvenci ν_0 , da smo obe frekvenci izenačili.

Če sta dva, sicer popolnoma enaka maserja nameščena tako, da v prvem molekule NH_3 potujejo proti etru, v drugem pa z etrom, se razlikujeta frekvenci obeh maserjev za

$$\Delta\nu = \nu_0 (1 + uv/c^2) - \nu_0 (1 - uv/c^2) = 2\nu_0 uv/c^2. \quad (3)$$

(Pri tvorbi razlike odpadejo členi, ki so odvisni samo od absolutne vrednosti hitrosti u , in je rezultat navzlic poenostavljenemu računu pravilen.) Ako položaj maserjev zamenjamo, se razlika podvoji, znaša torej $2\Delta\nu$. V primeru, ko je povprečna hitrost molekul NH_3 pri sobni temperaturi $u = 600$ m/s, hitrost rezonatorja proti etru $v = 30$ km/s in $\nu_0 = 2,387 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, sledi $2\Delta\nu = 20 \text{ s}^{-1}$.

V enačbi (3) nastopa v linearno in ne kot pri Michelsonovem poskusu v kvadratu. Podoben rezultat kot (3) pa bi dobili po etrski hipotezi, če bi letalo z Michelsonovim interferometrom letelo najprej v smeri etra in drugič v nasprotni smeri ter bi primerjali interferenčne kolobarje v obeh primerih.

Möllerjev poskus so izvedli Cederholm in sodelavci. Dva maserja so v opisanem položaju skupaj s pomožnimi napravami pritrdili na klop, vrtljivo okoli navpične osi. Valovanji, ki sta ju oddajala maserja, so zmešali in ojačili utripanje. Lastni frekvenci obeh rezonatorjev sta se za malenkost razlikovali, namreč ravno za toliko, da je imelo utripanje frekvenco 20 s^{-1} .

Po etrski hipotezi bi se ob zasuku klopi iz neke smeri za 180° frekvenca utripanja morala spremeniti za okoli 20 s^{-1} . Toda ničesar podobnega niso opazili. Klop so postavili v smer vzhod-zahod, pa se frekvenca utripanja v enem dnevu ni spremenila za več kot za $0,02 \text{ s}^{-1}$. Ker se Zemlja v tem času zavrti za poln kot, pač etrska hipoteza ne more biti pravilna. Zato je rezultat poskusa nova potrditev principa relativnosti in specialne relativnostne teorije.

Če so klop zasukali, se je frekvenca utripanja malo spremenila. Motnje so bile posledica zemeljskega magnetnega polja in lokalnih magnetnih polj.

Z Möllerjevim poskusom ugotovljena zgornja meja za »hitrost etra« (ki meri v resnici le natančnost poskusa) je $0,03 \text{ km/s}$, medtem ko je z Michelsonovim poskusom ni bilo mogoče znižati pod velikostno stopnjo 1 km/s .

Zaradi relativističnih efektov je frekvenca maserja odvisna od hitrosti molekul NH_3 . Člen, ki to odvisnost izraža, vsebuje $(u/c)^2$. To bi se dalo meriti z dvema maserjema, ki imata različno hitra molekulska curka. Vendar je dosegljiva natančnost za meritve takšne vrste za zdaj še premajhna.

C. Möller, *Nuovo Cimento*, Suppl. 6, 381 (1957).

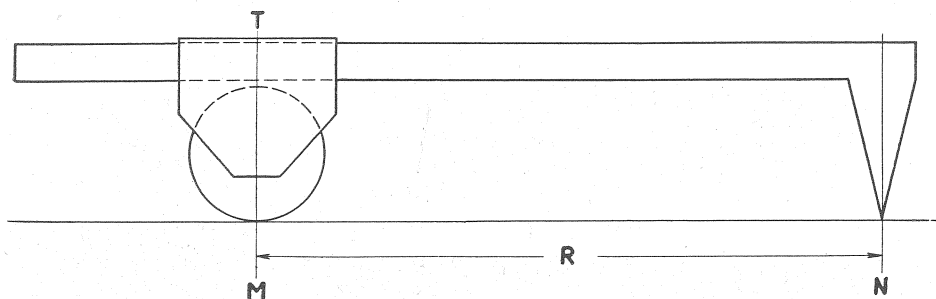
J. P. Cederholm, G. F. Bland, B. L. Havens, C. H. Townes, *Phys. Rev. Letters* 1, 342 (1958).

J. Strnad

Vozilo na sliki 1 a v članku »Cestne krivine« (Obzornik VI, str. 133—136) je v bistvu traktoriograf (sl. 1).¹ Ta nam omogoča risarsko izvedbo kvadrature kroga po matematično točnem postopku [2].²

V pričujoči notici hočem izrabiti izsledek iz omenjenega članka in pokazati omenjeno izvedbo.

S traktoriografom rišemo po papirju, ki je v horizontalni legi. Če vlečemo konico traktoriografa (to je prednje kolo vozila na sl. 1 a v [1]) po kaki dani krivulji D, popisuje kolesček traktoriografa (zadnje kolo vozila na sl. 1 a v [1]) krivuljo T, ki se imenuje traktrisa dane krivulje; dana krivulja pa je njena direktrisa. (Glej sl. 2: N je konica, M pa kolesček traktoriografa.)



Slika 1

Iz opisanega je razvidno, da so premice MN tangente na traktriso T. Zato lahko rečemo, da je traktrisa ogrinjača družine premic MN [2].

Kot φ ima isti pomen kakor v članku [1]: φ je namreč kot med prirejenimi si tangentami krivulj T in D (v točkah M in N, sl. 2). Krivulja D naj bo zvezna in ne lomljena. Pri teh pogojih je kar nazorno razvidno, da se φ od točke do točke zvezno spreminja in je natančno določen, če smo ga izbrali v začetni točki $N = N_0$. Kot φ je torej funkcija točke N. Pri pravkar naštetih pogojih za krivuljo D moremo vzeti φ kot funkcijo ločne dolžine $s = s(N)$. Začetna točka N_0 , kjer je $s = 0$, je še poljubna.

Nas predvsem zanima traktrisa krožnice. Izkazalo se bo, da je najugodnejše, če izberemo razdaljo $MN = R$ tako, da je ta enaka polmeru krožnice, kateri hočemo narisati traktriso. (To dosežemo s pomočjo vijaka T na sl. 1.) Ker gre pri kvadraturi kroga za število π , vzemimo zaradi enostavnosti, da je polmer dane krožnice enak enoti.

¹ Ljubomir Klerić, profesor Velike šole v Beogradu (1844—1910), je izboljšal traktoriograf. Kolesčku je priključil pomožnega, da ga maže s črnilom, konici pa vrtljivi jarem, ki daje pripravi stabilnost [2].

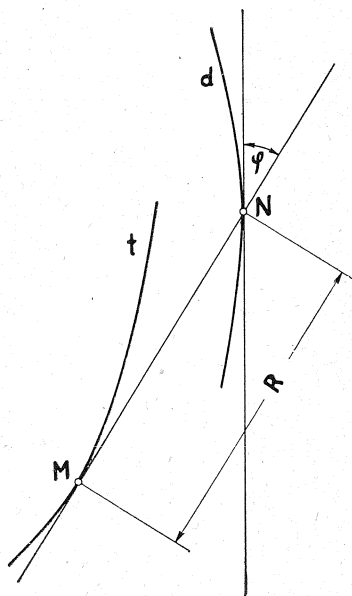
² V [2] ni podan postopek za kvadraturu kroga. Tudi mi ni znano, kakšnega je imel v mislih M. Petrović.

Za krivuljo, ki jo popiše prednje kolo, najdemo na koncu članka [1] tole diferencialno enačbo

$$1/\varrho = \sin \varphi + d\varphi/ds$$

Tu je $1/\varrho$ ukrivljenost krivulje D, ds ločni diferencial krivulje D, φ pa kot, ki ga oklepata prirejeni si tangenti na krožnico in njeno traktriso. Ker je v našem primeru krivulja D krožnica s polmerom 1, je njena ukrivljenost enaka 1 in velja zato tale diferencialna enačba

$$1 = \sin \varphi + d\varphi/ds$$



Slika 2

Če v njej ločimo spremenljivki, se glasi

$$\frac{d\varphi}{1 - \sin \varphi} = ds$$

Integrirajmo jo v mejah od $s = 0$ do $s = a$, kjer je a središčni kot (v ločni meri). Kratek račun nam da zvezo

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = 1 - 360/\pi a \quad (1)$$

(kjer je sedaj a merjen v stopinjah.)

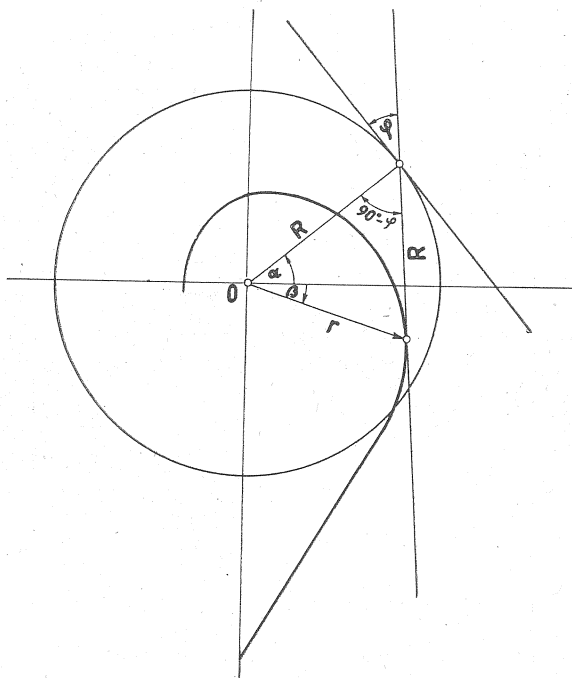
S slike 3 pa dobimo na podlagi kosinusovega izreka enačbo

$$r^2 = 2(1 - \sin \varphi) \quad (2)$$

Z iste slike najdemo še naslednjo zvezo

$$2(\alpha + \beta) = 90^\circ + \varphi \quad (3)$$

Tu je α kot, ki ga oklepa radijvektor do točke na krožnici s pozitivno smerjo abscisne osi, β pa kot, ki ga pri istem α oklepa radijvektor do točke na traktrisi s pozitivno smerjo osi (x).



Slika 3

Iz enačbe (1) dobimo za $\alpha = 0$, da je $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = -8$. Od tod moremo vzeti, da je $\frac{1}{2} \varphi = -90^\circ$, oziroma $\varphi = -180^\circ$. Nazorno je razvidno, da je tedaj $r = \sqrt{2}$. Isto dobimo iz enačbe (2). Enačba (3) pa pove, da je $\beta = 45^\circ$. Tedaj moramo postaviti kolesček traktoriografa pokončno navzgor.

Z rastočim kotom α se giblje traktoriograf nekaj časa nazaj. Iz enačbe (1) je razvidno, da kot φ hkrati s kotom α raste in je za $\varphi = -90^\circ$ kot $\alpha = \beta$ ter $r = 2$. Od tu se traktoriograf giblje s konico naprej. Kot α je prehitel kot β . (Glej enačbo (3).) Za točke, kjer traktrisa seče krožnico, je φ že < 0 , kar ugotovimo iz enačbe (2), če vzamemo $r = 1$.

Izračunajmo r za $\alpha = 180^\circ$! Če upoštevamo znane zveze med kotnimi funkcijami ter enačbo (1), dobimo iz (2)

$$r^2 = 8/[\pi^2 + (\pi - 2)^2]$$

oziroma

$$r^2 \pi^2 - 2 r^2 \pi + 2 (r^2 - 2) = 0$$

Od tod je

$$\pi = 1 \pm \frac{\sqrt{(2+r)(2-r)}}{r} \quad (4)$$

Očitno pride v poštev le znak $+$ pri korenu, saj je ena rešitev negativna. (Pri $\alpha = 180^\circ$ je namreč $r < 1$.)

Končno se vprašajmo po risarski izvedbi kvadrature kroga! Predvsem moramo določiti r za $\alpha = 180^\circ$. S središčem v točki N $(-1,0)$ opišemo del krožnice s polmerom $R = 1$ tako, da seče traktriso v M. Razdalja OM je potem enaka $r = r(180^\circ)$, kar je neposredno razvidno. Ko smo našli r , moremo konstruirati število π samo z ravnilom in šestilom in sicer tako, da konstruiramo izraz (4).

Literatura

[1] Janez Strnad: Cestne krivine. Obzornik za matematiko in fiziko, VI, str. 133—136.

[2] Mihajlo Petrović: Članci. NK, Beograd 1949 (str. 33—36).

[3] France Križanič: Kvadratura kroga. Obzornik za matematiko in fiziko, II, str. 97—106.

Janez Ušan, Vršac

ŠOLA

MERITEV GRAVITACIJSKE KONSTANTE KOT DEMONSTRACIJSKI POSKUS

Newtonov gravitacijski zakon

$$F = \kappa m m_1 / R^2 \quad (1)$$

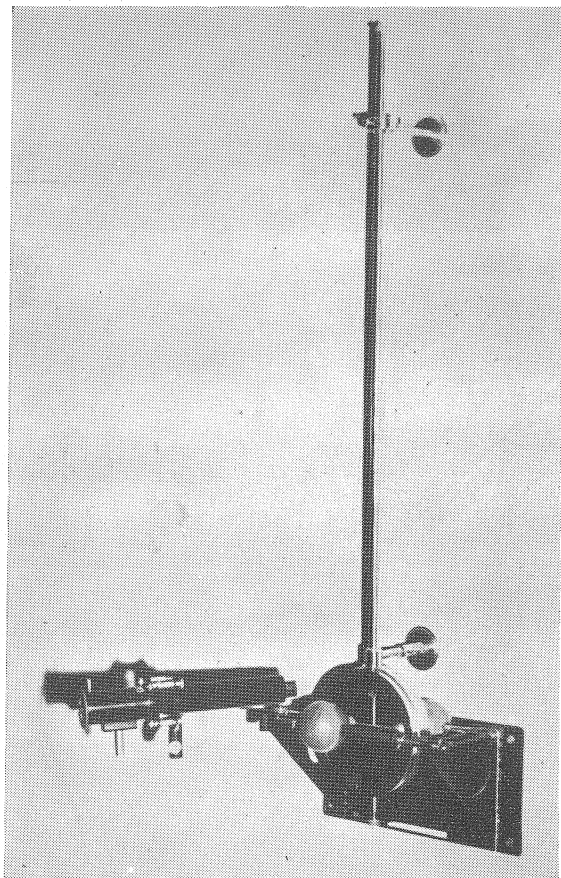
je eden izmed osnovnih naravnih zakonov. Pove, s kolikšno silo F se privlačujeta kroglasti masi m in m_1 , če je R razdalja med njunima težiščema. Koeficient κ je gravitacijska konstanta. Vrednost zanjo lahko predavatelj pri osnovnem tečaju eksperimentalne fizike kar napiše na tablo. Bolj poučno pa je, če jo izmeri z demonstracijskim poskusom.

Sile med masami, s katerimi imamo opravka na Zemlji, so zelo majhne. Za merjenje tako majhnih sil moramo uporabiti posebne naprave¹. Ena izmed

¹ Handbuch der Experimentalphysik II, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1926. Str. 131.

teh je torzijska tehtnica na visečo žico. Meritev z njo ni tako zahtevna, če se zadovoljimo z natančnostjo na nekaj procentov. Demonstracijska naprava, ki jo uporabljamo na Fizikalnem inštitutu univerze, je narejena po Ebertovih predlogah² (sl. 1).

Torzijsko tehtnico sestavlja zelo tanka žica, na kateri visi prečka z dvema kroglicama. Na sredi prečke je pritrjeno zrcalce. Tehnica je zaprta v kovinsko



Sl. 1. Torzijska tehtnica za merjenje gravitacijske konstante.
Na levi je svetilka za svetlobni kazalec

ohišje s steklenim oknom. Na obeh straneh ohišja sta v višini prečke kovinski palici, po katerih drsita večji svinčeni krogli. Vse skupaj je pritrjeno na stransko steno predavalnice.

Legi svinčenih krogel pred poskusom in po njem kaže sl. 2. Če premaknemo svinčeni krogli v nasprotni strani, bo prečka zanihala okrog nove mirovne lege. Amplitudo φ_0 tega nihanja dobimo iz enačbe za torzijsko tehtnico

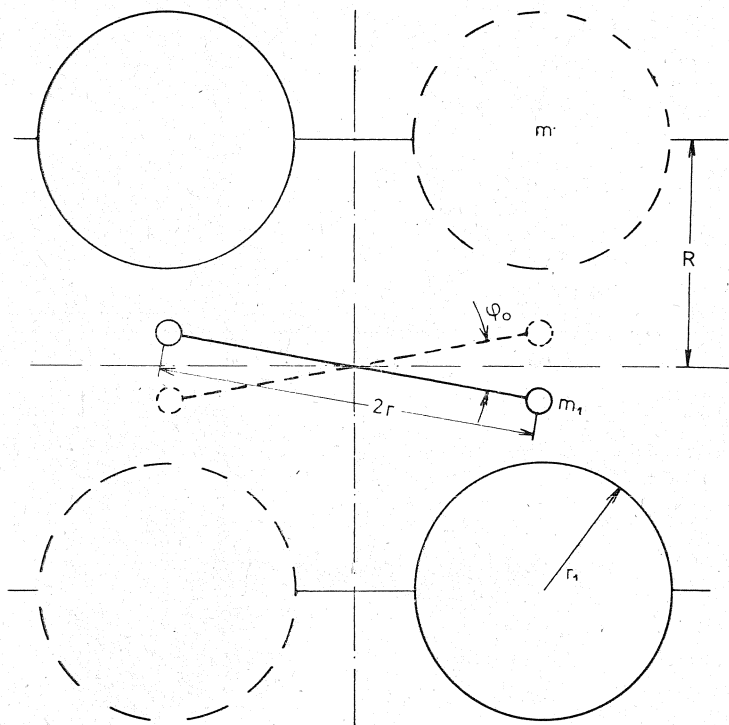
$$\varphi_0 = M/D, \quad (2)$$

² H. Ebert: Lehrbuch der Physik, Veit & Co., Leipzig 1917. Str. 223.

pri čemer je M celotni navor, ki deluje na prečko, D pa torzijski koeficient žice. Ker privlači vsaka svinčena krogla obe kroglici, je celotni navor

$$M = 2.2 \pi r m m_1 \{ 1 - (R/2r)^3 [1 + (R/2r)^2]^{-3/2} \} / R^2 = 4 \pi r m m_1 K / R^2, \quad (3)$$

kjer smo s K zaznamovali izraz v zavitem oklepaju. Pri tem je m masa svinčene krogle, m_1 masa kroglice, $2r$ dolžina prečke in R razdalja težišč svinčene krogle in bližnje kroglice. Razdalja R se zaradi gibanja kroglice le malo spreminja, tako da jo smemo vzeti za konstantno.



Sl. 2. Gravitacijska tehtnica v tlorisu. Izvlečeno je narisana lega prečke in svinčenih krogel pred poskusom. Končna lega krogel in nova mirovna lega prečke sta narisani črtkano. Tloris je narisani v merilu, razen odmika prečke, ki je močno pretiran

Kakšna mora biti torzijska tehtnica, da je amplituda φ_0 čim večja? Enačba (3) kaže, da je treba vzeti čim daljšo prečko. Svinčena krogla mora biti čim težja. Masa m krogle s premerom $2r_1$ je sorazmerna z r_1^3 , razdalja R pa je približno enaka r_1 . Zato je φ_0 približno sorazmeren z r_1^3/r_1^2 , torej sorazmeren z r_1 . Občutljivost tehtnice pa je predvsem odvisna od žice, saj je torzijski koeficient

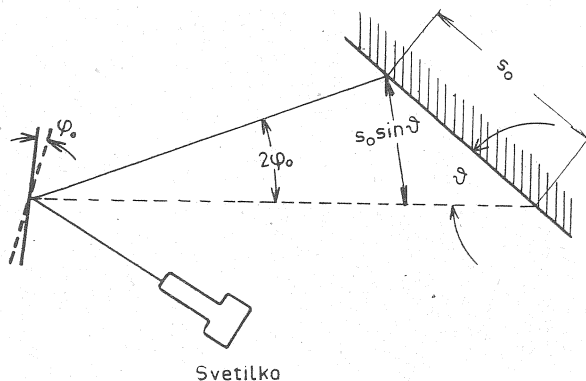
$$D = \frac{1}{2} \pi a^4 G / l, \quad (4)$$

kjer je G strižni modul, $2a$ premer in l dolžina žice. Masa $2m_1$, ki jo žica še lahko nosi, je sorazmerna s presekom πa^2 . Iz enačb (2) do (4) sledi zato, da je φ_0 sorazmeren z m_1/D , torej sorazmeren z $a^2/(a^4 l) = 1/(a^2 l)$: treba je vzeti čim tanjšo in čim daljšo žico. Ker pa je naprava namenjena za demonstracijski poskus v polni predavalnici (ko motijo tresljaji, ki jih stena prenaša do tehtnice), ne sme biti žica pretanka.

Pri nas smo uporabili volframsko žico dolžine 1 m s premerom 0,05 mm. Ta žica je dovolj močna, da nosi prečko s kroglicama v skupni teži 210 g. Z zahtevo, da naprava ne sme biti prevelika, so določene ostale količine: dolžina prečke $2r = 10$ cm, masa svinčene kroglice $m = 3$ kg in razdalja $R = 6$ cm.

Amplituda φ_0 je premajhna, da bi jo lahko direktno izmerili. Zato spustimo na zrcalce curek svetlobe, ki se na njem odbije in pade na nasprotno steno predavalnice. Amplituda odklona merjenega na steni (sl. 3), je

$$s_0 = 2 \varphi_0 L / \sin \vartheta, \quad (5)$$



Sl. 3. Svetlobni kazalec pri torzijski tehtnici. Slika ni narisana v merilu. Odklon φ_0 je v resnici zelo majhen

kjer je ϑ kot, pod katerim curek zadene steno, a L razdalja med zrcalcem in nasprotno steno. V našem primeru je $L = 10,6$ m in $\vartheta = 45^\circ$. Potrebujemo še koeficient D , ki ga izrazimo z vztrajnostnim momentom tehtnice J in nihajnim časom t_0

$$D = (2\pi/t_0)^2 J = (2\pi/t_0)^2 2 m_1 r^2. \quad (6)$$

Pri približnem računanju vztrajnostnega momenta tehtnice smo zanemarili vztrajnostni moment same prečke, kroglici pa vzeli kot točki. Tako dobimo končno za gravitacijsko konstanto naslednji izraz

$$\kappa = \pi^2 R^2 r \sin \vartheta s_0 / (K m L t_0^2). \quad (7)$$

Tako izpeljavo smo izbrali zato, da smo določili občutljivost tehtnice. Pri demonstraciji je izpeljava krajša: vsaka od obeh svinčenih krogel privlačuje bližnjo kroglico s silo F (1). Ko premaknemo svinčeni krogli v drugo skrajno lego, podeli sila $2F$ vsaki od obeh kroglic pospešek $a = 2KF/m_1 = 2K\kappa m/R^2$.

Faktor K (v našem primeru je $K = 0,864$) upošteva vpliv bolj oddaljene svinčene kroglice. Pospešek izračunamo tudi iz enačbe za maksimalni pospešek sinusnega nihala $a = (2\pi/t_0)^2 s_0'$, kjer je s_0' amplituda odmika kroglice. Merimo pa amplitudo s_0 odklona svetlobnega curka na steni, ki je z amplitudo s_0' v zvezi $s_0 = 2L s_0'/(r \sin \vartheta)$. Končni rezultat (7) je isti. Posebno nazorna je ta izpeljava³, če ima torzijska tehničnica tako velik nihajni čas, da je pospešek v prvi minuti poskusa stalen ($s_0' = \frac{1}{2} a t^2$) in je prečka narejena tako, da vpliv bolj oddaljene svinčene kroglice ne moti ($K = 1$).

V našem primeru moramo izmeriti amplitudo s_0 in nihajni čas. Ker je gibanje svetlobnega curka pri obračanju zelo počasno, je težko določiti trenutek, ko se curek ustavi. Zato izmerimo dan pred poskusom čas več nihajev in izračunamo nihajni čas. Čez noč se tehničnica umiri, medtem ko sta svičeni krogli v eni od skrajnih leg. Pri demonstracijskem poskusu premaknemo svinčeni krogli v drugo skrajno lego in merimo pot curka $2s_0$ na steni. Za to potrebuje curek $\frac{1}{2} t_0$. Nihajni čas t_0 že poznamo in ga med poskusom samo preverimo. Naša torzijska tehničnica ima nihajni čas 460 s, za dvojno amplitudo pa smo pri nekem poskusu dobili $2s_0 = 0,62$ m. Iz (7) potem sledi

$$\kappa = 6,7_8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

kar se za 1 % razlikuje od prave vrednosti $(6,670 \pm 0,005) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Meritve v polni predavalnici so dale slabše rezultate, napaka pa nikoli ni presegla 10 %.

S. Pahor, J. Strnad, R. Korbar,
Fizikalni institut univerze.

DOMAČE VESTI

TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV V BEOGRADU

Na republiškem tekmovanju mladih matematikov je bilo izbranih osem kandidatov iz Slovenije za zvezno tekmovanje v Beogradu, ki je bilo v nedeljo, 8. maja t. l. Vseh osem kandidatov je v petek zvečer z menoj odpotovalo iz Ljubljane. V vlaku smo si krajšali čas z raznimi matematičnimi igrami in ugankami ter pridno debatirali o raznih problemih iz našega področja. Iz razgovora z dijaki sem spoznal, da je bila izbira naših udeležencev za tekmovanje v Beogradu zelo dobra. Po pregledu nalog so mi tudi kolegi sokorektorji priznali, da so se vsi tekmovalci iz Slovenije dobro odrezali, tudi tisti, ki niso bili nagrajeni. V soboto smo si ogledali našo prestolnico, zvečer pa kmalu legli, da bi odpočiti prišli na tekmovanje.

V nedeljo se je sestala komisija za tekmovanje, ki je bila tako sestavljena: predsednik prof. Pavle Tišma iz Zemuna, člani: Draginja Frantlović za Srbijo, Ignacij Smolec za Hrvatsko, Petar Mladenović za Makedonijo, Radomir Živković za BiH, Momčilo Kosmajac za Črno goro in Stanko Uršič za Slovenijo.

³ W. Pohl: *Mechanik, Akustik, Wärmelehre*, Springer, Berlin 1942. Str. 43.

Vsak predstavnik Republike je predložil komisiji po pet nalog za vsak razred. Od skupno 60 nalog je komisija izbrala naslednje:

Za 3. razred:

1. Posoda ima obliko kvadra. Osnovna ploskev je pravokotnik z obsegom 4 cm. Višina kvadra je 5 cm.

a) Kakšni so osnovni robovi, da ima posoda maksimalni volumen?

b) V katerem intervalu je funkcija za volumen določena?

c) Načrtaj funkcijo!

č) Ako je podan osnovni rob in višina, kako je odvisen volumen od obsega osnovne ploskve? Katere vrednosti so možne za obseg osnovne ploskve? (Prikaži to grafično in tabelarno!) ($a = 2$ cm, $b = 5$ cm)

2. Kolik je rob kocke, ki je včrtana v pravilno pokončno tristranično piramido z osnovnim robom a in višino v tako, da leže 4 oglišča kocke na osnovni ploskvi, ostala 4 oglišča pa na stranskih ploskvah piramide?

3. Določi vse vrednosti za x , za katere je:

$$\log (x^2 - 4x + 3) > -3!$$

4. Podan je krog c s središčem v točki O in polmerom R . Točka O_1 , ki se nahaja na krožnici, je središče drugega kroga s polmerom $r = R/2$. Ako so A in B presečne točke obeh krogov, izračunati približno vrednost kota AOB (v radianih), in prostornino skupnega dela obeh krogel, ki jih dobimo z rotacijo obeh krogov okoli osi OO_1 !

5. Dokazati identičnost:

$$(1 - \cos b \cos c)^2 - (1 - \cos b \cos c) + \sin^2 c = 0$$

in rešitev izraziti v najpreprostejši obliki!

Za 4. razred.

1. Dokaži, da je produkt treh zaporednih števil deljiv s 7.8.9, ako je srednje število kub nekega drugega števila.

2. Načrtati krog (O, r) , enega njegovih premerov AB in točko M na krožnici. Točka M se projicira v točki Q na AB . Daljica AN (različna od MQ) seče krožnico v D . Določi enačbo geometrijskega mesta preseka P daljic BD in QM , ako se točka M premika po krožnici (O, r) !

3. Razlika recipročnih vrednosti dveh zaporednih celih števil je 0,0a, kjer je a ena od devetih števil 1, 2, 3, ... 9. Za katere a je naloga rešljiva in koliko rešitev ima?

4. Skozi neko točko v notranjosti trikotnika potekajo tri premice vzporedno stranicam trikotnika. Te premice razdelijo ploščino na 6 delov, od katerih so trije trikotniki s ploščinami s_1 , s_2 in s_3 . Kolika je ploščina trikotnika?

5. Podana je familija krivulj

$$y = (m - 1)x^2 + 2mx + 4$$

a) Dokazati, da gredo vse krivulje dane familije skozi dve določeni točki A in B , in določiti x !

b) Določiti ono krivuljo dane familije, ki se dotika osi Ox , nato določiti še tisto krivuljo, ki ima teme v točki B! (B ne leži na osi Ox).

Tekmovanje je trajalo tri ure in se ga je udeležilo: 14 dijakov iz Srbije, 10 iz Hrvatske, 8 iz Slovenije, 2 iz BiH, 4 iz Črne gore in 6 iz Makedonije.

Po pregledu nalog je komisija podelila naslednje nagrade:

IV. razred:

I. nagrada: Predrag Mojsilović, III. gim., Beograd.

II. nagrado delita Egon Zakrajšek, gimn. Jesenice, in Behdet Mesihović, gimn. Mostar.

III. nagrado delijo Anton Primožič, gimn. Idrija, Borut Gogala, gimn. Ljubljana in Zoran Popović, gimn. Beograd.

III. razred:

I. nagrada: Dragoljub Arandelović, gimn. Svetozarevo.

II. nagrada: Dragoslav Lugmirski, gimn. Kragujevac.

III. nagrado delijo Vladimir Paar, gimn. Zagreb, Dragomir Večanski, gimn. Zrenjanin in Dragutin Veličković, gimn. Niš.

Vsi udeleženci so prejeli še knjižne nagrade.

Po tekmoivanju so si dijaki s posebnim avtobusom ogledali mesto in okolico. Zvečer pa je bila slovesna podelitev nagrad v klubu kulturnih delavcev ob snemanju za televizijo in radio.

Komisija za tekmoivanje predlaga za bodoča zvezna tekmoivanja naslednje:

1. Tekmoivanje naj bo vsako leto in v drugi republiki.

2. Prihodnje leto naj bo v Hrvatski.

3. Tekmoivanje naj bo v mesecu aprilu.

4. Tekmujejo naj samo dijaki iz 3. in 4. razreda.

5. Zvezno komisijo sestavljajo po en predstavnik iz vsake republike in en član plenuma.

6. Republiške komisije morajo poslati 14 dni pred tekmoivanjem svoje predloge komisiji Društva tiste republike, v kateri se vrši tekmoivanje.

7. Komisija, ki izbira naloge, mora te izbrati najmanj en dan pred tekmoivanjem.

Tekmoivalna komisija predlaga tudi Izvršnemu odboru, naj prouči možnost tekmoivanja naših dijakov v tujini.

Sedaj smo že prejeli prvi poziv za tekmoivanje v tujini, in sicer v Romuniji.

Od Zveze društev matematikov in fizikov v Beogradu smo prejeli obvestilo, da bo od 18. do 26. julija v Bukarešti tekmoivanje maturantov iz matematike. Na tekmoivanje so bili vabljeni poleg držav vzhodnega bloka še Jugoslavija, Grčija, Turčija in Kitajska. Iz Jugoslavije naj bi šlo na to tekmoivanje osem udeležencev. Iz Slovenije so bili vabljeni: Egon Zakrajšek z Jesenic, Borut Gogala iz Ljubljane, Anton Primožič iz Idrije in Janez Lesjak iz Kočevja. Ker je Borut Gogala iz zdravstvenih razlogov moral odpovedati udeležbo, je naše Društvo v zameno predlagalo Edvarda Košnjeka iz Kranja.

Upamo, da bomo lahko premostili vse formalnosti za udeležbo na tem tekmoivanju in se v mednarodnem merilu pomerili v tem plemenitem boju.

Stanko Uršič

Iščemo fizike!

Sprejmemo več fizikov za delo v razvojnih laboratorijih in proizvodnji v redno ali honorarno zaposlitev, s polnim ali s skrajšanim delovnim časom. V poštev pridejo tudi študentje zadnjih letnikov in absolventi. Plača po dogovoru.

Delovna področja: Proizvodnja GM števcov, razvoj polvodnikov, razvoj magnetnih materialov, električne in fizikalne meritve na radijskih sestavnih delih, razvoj visokofrekvenčne keramike itd.

Zaradi dogovora se čimprej zglasite v Razvojnem sektorju Industrije za elektroizveze, Ljubljana, Vegova 2, tel. 22-675!

INDUSTRIJA ZA ELEKTROIZVEZE LJUBLJANA

KONGRES MATEMATIKOV IN FIZIKOV

Kakor smo že poročali, bo letos od 19. do 24. septembra v Beogradu kongres matematikov in fizikov FLRJ.

Opozarjamo posebej tovariše na šolah, ki so na občinskih proračunih, in kateri imajo zanimanje za kongres, da si oskrbijo sredstva za udeležbo na tej važni prireditvi, ki bo sredi reformnih prizadevanj naše šole in ki bo imela velik pomen tudi za matematični in fizikalni pouk v šolah.

UREDNIŠTVO JE PREJELO V ZAMENO

- Bilten Društva matematičara i fizičara NR BiH, Sarajevo 1960, št. 2.
- Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1960, T. 88, No. 1, 2.
- Elektrotehniški vestnik, Ljubljana 1959, št. 11–12.
- Farmacevtski vestnik, Ljubljana 1959, št. 3–6.
- Gospodarski vestnik, Ljubljana 1960, št. 34–60.
- Idrijski razgledi, Idrija 1960, št. 1.
- Philip's Technische Rundschau, Eindhoven 1959/60, No. 7, 8/9, 10.
- Physics Today, New York 1960, Vol. 12, No. 1, 4, 8, 9.
- Proteus, Ljubljana 1959/60, št. 8, 9–10.
- Publikacije elektrotehnič kog fakulteta, Beograd 1959, No. 35–37, 38, 39–40.
- Uspehi matematičesk ih nauk, Moskva 1960, T. XV., Vyp. 2, 3.
- Varilna tehnika, Ljubljana 1960, IX., št. 2, 3.
- Zdravstveni vestnik, Ljubljana 1959, št. 11; 1960. št. 1–2.

Zveza Društev matematikov in fizikov FLRJ izdaja časopis:

Nastava matematike i fizike

Naročnina je za člane vseh republiških društev matematikov in fizikov 300 din, za ostale naročnike, šole in biblioteke 400 din. Naročila in naročnino pošiljajte na žiro-račun Nastave 101-701-5-1262 z oznako »za Nastavu«.

Društvo matematikov in fizikov NRS izdaja

Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS

Letno izide v dveh dvojnih številkah, letna naročnina je 400 din. Naročnino pošiljajte na ček. račun 101-707-3-119 Društvu matematičara i fizičara NRS pod označbo »Za Vesnik«. Dopise pošiljajte na naslov društva Beograd pošt. fah 791.

Društvo matematikov in fizikov NRH izdaja za vso državo

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

za učence srednjih šol. Letnik ima 4 številke, med počitnicami ne izhaja. Letna naročnina je 240 din, posamezna številka 60 din.

Profesorji srednjih šol, priporočajte list dijakom! Naročila in naročnino pošiljajte na naslov:

Matematičko-fizički list, Zagreb, Ilica 16/III, p. p. 165 ali na čekovni račun št. 400-73-5-1884.

Društvo matematikov in fizikov LR Hrvatske izdaja časopis

Glasnik matematičko-fizički i astronomski

Naročnina za leto 1958 znaša 480 din. Časopis naročite pri administraciji Glasnika: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica št. 16-III. Čekovni račun 400-73-3-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov LRS. Urejujejo ga: R. Blinc, P. Gosar, F. Križanič, A. Kuhelj, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna ČZP »Ljudska pravica« v Ljubljani. — Naročnina je 250 din, za podjetja in ustanove, ki plačajo po računu, in za naročnike, ki plačajo po terjatvi, pa 280 din. Posamezna številka 100 din. Naročnino nakažite na čekovni račun $\frac{600 - 70}{3 - 207}$.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov:

Glasnik za matematiko in fiziko, Ljubljana, poštni predal 227, tel. št. 23-304